57775

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI

BERGMAN POLİNOMLARI VE ONLARIN BAZI ÖZELLİKLERİ

Hasan GÜVELİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
Yüksek Lisans
Ünvanı Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 27/07/1996
Tezin Savunma Tarihi :18/08/1996

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Adnan BAKİ
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Abdullah ÇAVUŞ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yaşar GÖK

Haziran 1996
TRABZON

ÖNSÖZ

Bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programında gerçekleştirilmiştir.

Çalışmada, G bölgesi üzerinde ortonormal olan $\{K_n(z)\}$ Bergman polinomları elde edilerek bu polinomların sıfırları ve extremallığı verilerek G bölgesi üzerinde ağırlık fonksiyonlu Bergman polinomlarının bölgenin iç noktalarında hangi hızla sıfıra indiği, G bölgesinin ve $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak bulundu.

Yaptığım bu çalışmada, tez konusunu belirleyen ve planlayan, çalışma süresince her türlü yardımını esirgemeyen sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Adnan BAKİ bey'e, ayrıca ilgi ve desteklerini esirgemeyen sayın Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV bey'e teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

HAZİRAN - 1996 Hasan GÜVELİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bergman polinomları ve onların bazı özellikleri adlı bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, diğer iki bölüme hazırlık niteliğinde olup; bu bölümde, analitik fonksiyonlar, kompleks düzlemde eğriler ve eğriler ailesi, kompleks değişkenli fonksiyonların integrali, mutlak süreklilik, L^p- türevlenebilirlik , Cauchy, Cauchy-Pompeiu formülleri ile ilgili bazı tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi için $A^2(G)$ fonksiyon uzayı tanıtıldı ve bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu gösterildi. $A^2(G)$ uzayında verilmiş bir $\{f_k(z)\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ lineer bağımsız sisteminden, Gram-Schmidt ortogonalleştirme metodu yardımıyla $A^2(G)$ uzayında ortonormal bir $\{g_k(z)\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ ortonormal sistemi inşa edildi. Buradan özel olarak sınırlı G bölgeleri için , G üzerinde ortonormal olan $\{K_n(z)\}$ Bergman polinomları elde edildi ve bu polinomların basit özellikleri verildi. $A^2(G)$ uzayının tanımına benzer şekilde, $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonlu $A^2(\gamma, G)$ fonksiyon uzayı tanıtıldı ve bu uzayda $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan polinomlar verildi.

Üçüncü bölümde bir giriş olarak, bu çalışmanın amacı olan problem sunuldu ve Riemann dönüşüm teoremleri, yarıkonform dönüşümler, yarıkonform eğriler, eğriler ailesinin modülü ve Riemann dönüşüm fonksiyonlarının bazı yerel özellikleri verildikten sonra, $A^2(G)$ uzayında $\varphi'(z,z_0)$ (Riemann dönüşüm fonsiyonunun türevi) ve $\dfrac{\varphi'(z,z_0)}{D(z)}$ $(D(z) \in A(\overline{G}) \cap \mathrm{Lip}\,\alpha, 0 < \alpha \leq 1, D(z) \neq 0, \forall z \in \overline{G})$ fonksiyonlarına yaklaşım ile ilgili iki teorem ispatlandı. Son olarak, G üzerinde ağırlık fonksiyonlu Bergman polinomlarının bölgenin iç noktalarında hangi hızla sıfıra indiği, G bölgesinin ve $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak bulundu.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Konform dönüşüm, Yarıkonform dönüşüm, Yarıkonform eğri, Yarıkonform yansıma, Ortonormal sistemler, Ağırlık fonksiyonu, Ağırlık fonksiyonlu ortonormal (Bergman) polinomları.

SUMMARY

"Bergman's polynomials and their some properties"

This study entitled as "Bergman's polynomials and their some properties" consists of three chapters.

The first chapter as a preliminary from of the next chapters includes some definition and theorems (with or without proof) concerning the analytic functions, curves and the families of curves in the complex plane. The absolutely continuous, differentiable, L^p- differentiable and integrals of the complex valued functions; Cauchy and Cauchy Pompeiu's formulas are given.

In the second chapter, $A^2(G)$ function space is introduced and it is proved that this space is a Hilbert space. $\{g_k(z)\}$, $k = 0,1,2,...$ which is orthonormal system in $A^2(G)$ is constructed from the $\{f_k(z)\}$, $k = 0,1,2,...$ which is linearly independent system in $A^2(G)$ by the Gram-Scmidt orthogonalization process. Then a special case $\{K_n(z)\}$ Bergman's polynomials that are orthonormal in G are constructed. Some elementary properties of these polynomials are presented (their zeros and external). As in $A^2(G)$, $A^2(\gamma,G)$ space with $\gamma(z)$ weight function is introduced, and orthonormal polynomials with respect to $\gamma(z)$ weight function are given.

The third chapter starts with an introduction. Then the problem as the main objective of the study is established. Having given the theorems of Riemann mapping, the quasiconformal mappings, the quasiconformal curves, the module of families of curves, some local properties of the function of Riemann mapping, two theorems bear on the approximation of special function are given in $A^2(G)$ space. Finally, by which speed Bergman's polynomials with weight function in domain G are approaching to 0 for interior point of the domain is found regarding to the properties of G and weight function.

Key Words: An analytic function, a conformal mapping, a quasiconformal mapping, a quasiconformal curve, a quasiconformal reflection, orthonormal system, a weight function, orthonormal (Bergman) polynomials with a weight function.

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	Genişletilmiş kompleks düzlem
$\forall$	Her
$\exists$	En az bir tane vardır
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\bar{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
$a < b$	a küçüktür b
$a \leq b$	a küçük eşittir b
$a \preccurlyeq b$	$a \leq cb$ (c sabit)
$a \asymp b$	$a \preccurlyeq b$ ve $b \preccurlyeq a$
$=$	Eşittir
$\neq$	Eşit değildir
$:=$	Tanım olarak eşittir
$[a,b]$	a,b kapalı aralığı
$U_\varepsilon(z)$	$\{\zeta : \lvert\zeta - z\rvert < \varepsilon\}$
$D(a,r)$	$\{z : \lvert z-a\rvert < r\}$
$E(\gamma)$	γ eğrisinin dışı
$I(\gamma)$	γ eğrisinin içi
$\overline{G}$	G 'nin kapanışı
∂G	G 'nin sınırı
$\mathbb{C}-G$	G 'nin tümleyeni
$A(G)$	G bölgesindeki analitik fonksiyonların kümesi
$A^2(G)$	$\left\{ f : f \in A(G) \text{ ve } \iint_G \lvert f(z)\rvert^2 d\sigma_z < +\infty \right\}$
$A^2(\gamma, G)$	$\left\{ f : f \in A(G) \text{ ve } \iint_G \gamma(z)\lvert f(z)\rvert^2 d\sigma_z < +\infty \right\}$

1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Bu bölümde, ilerideki ispatlarımızda kullanılacak temel özellikler ile ilgili tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1: G, $\mathbb{C}$-kompleks düzlemde açık bir küme, $a \in G$ ve $f: G \to \mathbb{C}$ olsun.

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \tag{1}$$

limiti mevcut ve sonlu ise f fonksiyonuna $a \in G$ noktasında türevlenebilir bir fonksiyon denir [1].

f fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ise (1) limitine f nin $a \in G$ noktasındaki türevi denir ve $f'(a)$ ile gösterilir. f, G nin her noktasında türevlenebilir ise f ye G de türevlenebilir denir.

Teorem 1: $G \subset \mathbb{C}$ açık bir küme, $a \in G$ ve $f: G \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonunun $a \in G$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $a \in G$ de sürekli ve $\forall z \in G$ için $f(z) = f(a) + (z - a)f^*(z)$ olacak şekilde bir tek $f^*: G \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun olmasıdır. Bu durumda $f'(a) = f^*(a)$ dır [1].

Sürekli fonksiyonların çarpımı ve toplamı sürekli olduğundan, f fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ise teorem 1 den f nin $a \in G$ noktasında sürekli olduğu görülür.

Teorem 2: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $z = x + iy \in G$ ve $f: G \to \mathbb{C}$ olsun. f fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ise $\frac{\partial f(a)}{\partial x}, \frac{\partial f(a)}{\partial y}$ kısmi türevleri mevcut olup, bu kısmi türevler

$$f'(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial x} = -i\frac{\partial f(a)}{\partial y}$$

şartını sağlar [2].

Tanım 2: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $f: G \to \mathbb{C}$ ve $a \in G$ olsun. f nin a noktasında $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x}, \dfrac{\partial f(a)}{\partial y}$ kısmi türevleri mevcut ise $\dfrac{\partial f(a)}{\partial z}$ ve $\dfrac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}}$ aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f_z(a) := \frac{\partial f(a)}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x} - i\frac{\partial f(a)}{\partial y}\right)$$

ve

$$f_{\bar{z}}(a) := \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f(a)}{\partial x} + i\frac{\partial f(a)}{\partial y}\right).$$

Eğer $f(z) = U(x,y) + iV(x,y)$ biçiminde gösterilirse ;

$$f_z := \frac{1}{2}\left(U_x + V_y\right) + \frac{i}{2}\left(V_x - U_y\right),$$

$$f_{\bar{z}} := \frac{1}{2}\left(U_x - V_y\right) + \frac{i}{2}\left(V_x + U_y\right)$$

olduğu görülür [2].

Teorem 3: $f: G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $a \in G$ noktasında türevlenebilir ise

$$f'(a) = \frac{\partial f(a)}{\partial z} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}} = 0$$

dır.

Tanım 3: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $f: G \to \mathbb{C}$ ve $a \in G$ olsun. Belli bir r>0 sayısı için f fonksiyonu, a merkezli ve r yarıçaplı $D(a,r) := \{z : |z-a| < r\} \subset G$ açık dairesinin her noktasında türevlenebilir ise f ye a noktasında analitik denir [2].

f fonksiyonu G nin her noktasında analitik ise f ye G de analitik denir. G üzerinde tanımlı tüm analitik fonksiyonların kümesi A(G) ile gösterilir. G üzerinde tanımlı tüm analitik ve $\overline{G}$ da sürekli fonksiyonların kümesi $A(\overline{G})$ ile gösterilir.

Tanım 4: $G \subset \mathbb{C}$ açık, $f \in A(G)$ olsun. $\forall z \in G$ için $f'(z)$ değerini alan $f' : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna f nin türevi denir [1].

Tanım 5: $S \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n : S \to \mathbb{C}$ kompleks fonksiyonlarının oluşturduğu $\{f_n\}$ dizisine ortak tanım kümesi S olan bir fonksiyon dizisi denir [3].

Tanım 6: $\{f_n\}$, ortak tanım kümesi $S \subset \mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi ve $z_0 \in S$ olsun. $\{f_n(z_0)\}$ dizisi yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $z_0 \in S$ noktasında yakınsaktır denir. $\{f_n\}$ fonksiyon dizisi S nin her noktasında yakınsak ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $S \subset \mathbb{C}$ üzerinde noktasal yakınsaktır denir.

$\{f_n\}$, $S \subset \mathbb{C}$ üzerinde noktasal yakınsak bir fonksiyon dizisi ise $f : S \to \mathbb{C}$ $\forall z \in S$ için $f(z) := \lim_{n \to \infty} f_n(z)$, fonksiyonuna $\{f_n\}$ fonksiyon dizisinin limiti denir [3]

Tanım 7: $\{f_n\}$, ortak tanım kümesi $S \subset \mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi ve $f : S \to \mathbb{C}$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall z \in S$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$ için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısı bulunabilir ise $\{f_n\}$ fonksiyon dizisine $S \subset \mathbb{C}$ üzerinde $f : S \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır denir [3].

Tanımdan görülüyor ki ; $\{f_n\}$ dizisi f ye düzgün yakınsak ise $\{f_n\}$ dizisi S üzerinde noktasal yakınsaktır. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Teorem 4: $\{f_n\}$ ortak tanım kümesi $S \subset \mathbb{C}$ olan bir fonksiyon dizisi olsun. $\{f_n\}$ dizisinin S üzerinde düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\forall z \in S$ ve $\forall n, m \in \mathbb{N}$, m ve $n \geq N(\varepsilon)$, için $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ doğal sayısının bulunabilmesidir [3].

Tanım 8: [a,b] kapalı bir aralık, g:$[a,b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyleki $\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k-1}) < \delta$ ve $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ olan

$\forall\{[a_{k-1},a_k]\}_{k=1}^{n}$ parçalanış için $\left|\sum_{k=0}^{n}(g(a_k)-g(a_{k-1}))\right|<\varepsilon$ ise g ye [a,b] üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon denir [4].

Tanım 9: $G\subset\mathbb{C}$ açık, $U(x,y):G\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer kenarları Ox ve Oy eksenlerine paralel olan her $R\subset G$ kapalı dikdörtgeninin hemen hemen tüm düşey ve hemen hemen tüm dikey aralıklarında U(x,y) fonksiyonu mutlak sürekli ise U(x,y) ye G de doğrular üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon denir ve $U(x,y)\in ACL(G)$ ile gösterilir.

$f=U+iV\in ACL(G)\Leftrightarrow U,V\in ACL(G)$ dır [5].

Teorem 5: $G\subset\mathbb{C}$ açık, $f:G\to\mathbb{C}$ olsun. Eğer $f\in ACL(G)$ ise G de hemen hemen her yerde $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevleri mevcuttur ve dolayısıyla G de hemen hemen her yerde $f_z,f_{\bar{z}}$ formal türevleri vardır [5].

1.2 Kompleks Düzlemde Eğriler

Tanım 10: $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ olsun. $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon ise γ fonksiyonuna kompleks düzlemde bir eğri denir [3]. $\gamma(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç noktası, $\gamma(b)$ noktasına γ eğrisinin bitiş noktası ve $[\gamma]:=\{\gamma(t):t\in[a,b]\}$ noktalar kümesine γ eğrisinin izi adı verilir. Karışıklığa sebep olmadıkça $[\gamma]$ yerine genellikle γ yazılır.

Tanım 11: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir eğri olsun.

i) $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise, γ eğrisine bir kapalı eğri,

ii) $\forall t_1,t_2\in[a,b]$, $t_1\neq t_2$ için $\gamma(t_1)\neq\gamma(t_2)$ ise γ eğrisine bir basit eğri veya yay,

iii) $\{t_1,t_2:\gamma(t_1)=\gamma(t_2)$ ve $t_1\neq t_2$, $t_1,t_2\in[a,b]\}=\{a,b\}$ ise γ eğrisine bir basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi, Bundan sonra, $\mathbb{C}$ de sınırı bir Jordan eğrisi olan bölgeye bir Jordan bölgesi adı verilecektir.

iv) [a,b] kapalı aralığının bir $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ parçalanışı bulunabilir öyleki $\forall k \in \{1,2,...,n\}$ için $\gamma(t)$, (t_{k-1},t_k) aralıklarının her biri üzerinde sürekli türevlenebilir ve $\lim\limits_{t\to t_{k-1}^+}\gamma'(t)$, $\lim\limits_{t\to t_k^-}\gamma'(t)$ limitleri mevcut ise γ eğrisine parça-parça sürekli türevlenebilir veya parçalı düzgün eğri, özel olarak $P=\{t_0,t_1\}, t_0=a, t_1=b$ olursa γ eğrisine sürekli türevlenebilir veya düzgün (sürekli teğete sahip) eğri denir ve bu eğriler sınıfı C_θ ile gösterilir.

v) Eğer $\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ biçiminde gösterilirse, öyleki $x(t)$ ve $y(t)$ fonksiyonları $\forall t\in[a,b]$ de analitik ve $x'^2(t)+y'^2(t)\neq 0$, $t\in[a,b]$, şartı sağlanırsa γ eğrisine bir analitik eğri denir [3].

vi) Eğer $\forall p=1,2,...$ için $\gamma^{(p)}(t)$ sürekli türevleri mevcut ve $\gamma^{(p)}(t)$ fonksiyonu için

$$\left|\gamma^{(p)}(t_1)-\gamma^{(p)}(t_2)\right|\le M\left|t_1-t_2\right|^\alpha, \quad 0<\alpha\le 1$$

koşulu sağlanırsa γ eğrisine p. mertebeden düzgün (Lipschitz anlamında) eğri denir ve $\gamma\in C(p,\alpha)$ ile gösterilir[6].

Tanım 12: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ kapalı parçalı düzgün eğrisini oluşturan $\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_m$ düzgün yayları kesiştikleri noktalarda $\lambda_j\pi$, $0<\lambda_j<2$, $j=\overline{1,m}$ dış açı (γ ile sınırlı sonlu bölgeye göre) oluştururlarsa γ eğrisine $\lambda\pi$, $\lambda=\underset{j=\overline{1,m}}{\text{Mim}}\{\lambda_j\}$ dış açıya sahip parçalı düzgün eğri denir ve bu eğriler ailesi $C_\theta(\lambda)$, $0<\lambda<2$ ile gösterilir [7].

Tanım 13: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ kompleks düzlemde bir eğri ve $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$, $[a,b]$ kapalı aralığının bir parçalanışı olsun. $\wp([a,b])$, $[a,b]$ kapalı aralığının tüm P parçalanışlarının kümesi ve $P\in\wp([a,b])$ için $\ell(P):=\sum\limits_{k=1}^{n}\left|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\right|$ olsun. $\{\ell(P):P\in\wp([a,b])\}$ kümesi üstten sınırlı ise γ eğrisine ölçülebilir bir eğri denir ve

$$\ell_\gamma:=\text{Sup}\{\ell(P):P\in\wp([a,b])\}\ge 0$$

sayısına γ eğrisinin uzunluğu denir [3].

Teorem 6: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ise γ eğrisi ölçülebilir ve $\ell_\gamma=\int_a^b|\gamma'(t)|dt$ dir [3].

Teorem 7 [Jordan Eğri Teoremi]: γ kompleks düzlemde Jordan eğrisi ise $[\gamma]$, kompleks düzlemi, her birinin sınırı $[\gamma]$ olan biri sınırlı ve diğeri sınırsız olan tam iki ayrık bölgeye ayırır [3].

Bu bölgelerden sınırlı olan bölgeye γ nın içi denir ve $I(\gamma)$ ile gösterilir. Sınırsız bölgeye ise γ nın dışı denir ve $E(\gamma)$ ile gösterilir.

Tanım 14: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge olsun. G de alınan her Γ Jordan eğrisi için $I(\Gamma)\subset G$ ise G bölgesine bir basit bağlantılı bölge denir [3].

Teorem 8: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge olsun. G bölgesi basit bağlantılıdır ancak ve ancak G, $\mathbb{C}_\infty\backslash G$, $\mathbb{C}_\infty:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ genişletilmiş kompleks düzleminde bağlantılı ise [3].

Teorem 9: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, Jordan eğrisi ise $I(\gamma)$ $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölgedir fakat $E(\gamma)$ $\mathbb{C}$ de basit bağlantılı bir bölge değildir [3].

Tanım 15: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge olsun. G bölgesini içeren tüm konveks kümelerin arakesitine G nin konveks kabuğu denir [8].

1.3 Kompleks Değişkenli Fonksiyonların İntegrali

Tanım 16: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ kompleks düzlemde parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ve f(z), γ üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon ise

$$\int_\gamma f(z)dz:=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

kompleks sayısına f nin γ eğrisi üzerinde eğrisel integrali denir [3].

Teorem 10: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ parça-parça sürekli türevlenebilir bir eğri ve f(z), γ eğrisi üzerinde tanımlı sürekli bir fonksiyon olsun. $M>0$ $\forall z\in\gamma$ için $|f(z)|\le M$ koşulunu şağlıyor ise

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le M\,\ell_\gamma$$

dır [3].

Teorem 11 [Cauchy İntegral Teoremi]: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f\in A(G)$ olsun. γ, G de $I(\gamma)\subset G$ koşulunu sağlayan parça-parça sürekli türevlenebilir bir Jordan eğrisi ise

$$\int_\gamma f(z)dz=0$$

dır [3].

Tanım 17: $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, bir Jordan eğrisi olsun. γ üzerinde hareket edildiğinde, $I(\gamma)$ hareketlinin solunda kalıyorsa γ eğrisine pozitif yönlendirilmiş bir eğri denir [9].

Teorem 12 [Cauchy İntegral Formulü]: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $f\in A(G)$ olsun. γ, G de $I(\gamma)\subset G$ olan pozitif yönlendirilmiş parça-parça sürekli türevlenebilir bir Jordan eğrisi ise $\forall z\in I(\gamma)$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

dır.

İspat. $z\in I(\gamma)$ keyfi fakat sabit olsun. f, $\overline{I(\gamma)}$ de sürekli olduğundan f, $\overline{I(\gamma)}$ de düzgün süreklidir. Buna göre $\forall\varepsilon>0$ için $\exists\delta\equiv\delta(\varepsilon)>0$ öyleki $D(z,\delta)\subset I(\gamma)$ ve $\forall\zeta\in D(z,\delta)$ için $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$ dur. $\Gamma:=\partial D(z,\delta)$ eğrisi pozitif yönlendirilirse teorem 10 yardımıyla

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-f(z)\right|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|}|d\zeta|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon}{\delta}\int_{\Gamma}|d\zeta| = \varepsilon$$

bulunur, $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

elde edilir. Öte yandan teorem 11 den dolayı

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

dir.

Tanım 18: $G \subset \mathbb{C}$, $U(x,y): G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu ikinci mertebeye kadar sürekli kısmi türevleri olan bir fonksiyon ve $\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ Laplace operatörü olsun. Eğer $\Delta U = 0$ ise U(x,y) fonksiyonuna G de harmoniktir denir [10].

Teorem 13 [Ortalama Değer Teoremi]**:** $G \subset \mathbb{C}$, $U: G \to \mathbb{C}$, G de harmonik ve $D(z_0, r) \Subset G$ ise

$$U(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z_0 + re^{it})\,dt$$

dir [10].

Teorem 14: $U: G \to \mathbb{C}$, G de harmonik ve $D(z_0, r) \Subset G$ olsun. Bu durumda

$$U(z_0) = \frac{1}{\pi r^2}\iint_{D(z_0,r)} U(z)\,d\sigma_z$$

dır.

İspat. Teorem 13 e göre

$$U(z_0)\frac{r^2}{2}=\int_0^r \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(z_0+se^{it})\,dt\,sds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^r U(z_0+se^{it})\,sdsdt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\iint_{D(z_0,r)} U(z)\,d\sigma_z.$$

Tanım 19: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge olsun. $\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z<\infty$ koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir $f:G\rightarrow\mathbb{C}$ fonksiyonlarının sınıfı $L^2(G)$ ile gösterilsin. $\forall p>0$ için

$$L^p(G):=\left\{ f:|f|^{p/2}\in L^2(G)\right\}$$

gibi tanımlanır.

Teorem 15: $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge olsun.

i) $p,q>1$ sayıları için $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere; $f\in L^p(G)$ ve $g\in L^q(G)$ ise $f.g\in L^1(G)$ ve

$$\left|\iint_G fg\,d\sigma_z\right|\le\left(\iint_G |f|^p d\sigma_z\right)^{1/p}\left(\iint_G |g|^p d\sigma_z\right)^{1/q}$$

dır.Bu eşitsizliğe Hölder eşitsizliği denir.

ii) $p>1$ için $f,g\in L^p(G)$ ise $f+g\in L^p(G)$ ve

$$\left(\iint_G |f+g|^p d\sigma_z\right)^{1/p}\le\left(\iint_G |f|^p d\sigma_z\right)^{1/p}+\left(\iint_G |g|^p d\sigma_z\right)^{1/p}$$

dır. Bu eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği denir [11].

Tanım 20: $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge , $f{:}G \to \mathbb{C}$ ve $p \geq 1$ olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanırsa f fonksiyonuna G de L^p- türevlenebilir bir fonksiyon denir [11].

i) $f \in ACL(G)$

ii) $\forall B \Subset G$ için $f_x, f_y \in L^p(B)$.

Teorem 16: $f{:}G \to \mathbb{C}$, L^1- türevlenebilir bir fonsiyon ise $\forall$ ölçülebilir sınırlı $D \Subset G$ Jordan bölgesi için

$$\int_{\partial D} f(\zeta)\,d\zeta = 2i \iint_D f_{\bar{\zeta}}(\zeta)\,d\sigma_\zeta$$

dır[11].

Teorem 17 [Cauchy-Pompeiu İntegral Formulü]: $f{:}G \to \mathbb{C}$, L^1- türevlenebilir bir fonksiyon, $D \Subset G$ ölçülebilir sınırlı bir Jordan bölgesi ve $z \in D$ ise

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z}\,d\sigma_\zeta$$

dır.

İspat. $U_\varepsilon(z) \Subset D$, z merkezli ε yarıçaplı daire olmak üzere, D-$U_\varepsilon(z)$ bölgesinde teorem 16, $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ fonksiyonuna uygulanırsa

$$\int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta - \int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = 2i \iint_{D - U_\varepsilon(z)} \frac{f_{\bar{\zeta}}}{\zeta - z}\,d\sigma_z$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci integralin

$$\int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta = \int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta + \int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

olduğu görülür.

Diğer taraftan

$$\left| \int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{|f(\zeta)-f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| \leq \varepsilon$$

dır. Buna göre

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\partial U_\varepsilon(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right] = f(z)\, 2\pi i$$

bulunur. Böylece

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f_{\bar\zeta}(\zeta)}{\zeta - z} d\sigma_\zeta$$

elde edilir.

Tanım 21: $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge , $f \in L^2(G)$ ve $\zeta \in G$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z-\zeta|>\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2} d\sigma_z \right)$ mevcut ve sonludur. $\forall \zeta \in G$ için

$$(Tf)(\zeta) := \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z-\zeta|>\varepsilon} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^2} d\sigma_z \right)$$

değerini alan $Tf : G \to \mathbb{C}$ dönüşümüne f nin Hilbert transformasyonu denir [5].

Teorem 18: $\forall f \in L^2(G)$ için $Tf \in L^2(G)$ olup ; $T : L^2 \to L^2$ sınırlı bir lineer operatördür. Yani $\exists M > 0$ öyleki $\forall f \in L^2(G)$ için

$$\| Tf \|_{L^2} \leq M \| f \|_{L^2}$$

dir [5].

2.TEORİK ÇALIŞMALAR

2.1 $A^2(G)$ Uzayının Tanımı

Tanım 22: $G \subset \mathbb{C}$ keyfi bir bölge, $f \in A(G)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$I[f] := \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \qquad (2)$$

olsun. Burada alınan integral, Lebesque integrali anlamındadır. Fakat (2) integraline Riemann integrallerinin limiti gibi bakılabilir.

Teorem 19: (2) ile tanımlı Lebesque anlamındaki $I[f]$ integrali Riemann anlamındaki integrallerin limiti şeklinde ifade edilebilir [7].

İspat. G bölgesinde $\{G_n\}$ bölgeler dizisi aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde alınsın:

i) G_n nin sınırı olan ∂G_n sonlu sayıda Jordan eğrisinden oluşur,

ii) $\forall n$ için $\overline{G}_n \subset G_{n+1} \subset G$,

iii) $\forall z \in G$ noktası için $\exists N(z)$ öyleki $\forall n > N$ için $z \in G_n$ dir.

Buna göre

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} |f(z)|^2 & , z \in \overline{G}_n \\ 0 & , z \in G - \overline{G}_n \end{cases}$$

ise, $\varphi_n \uparrow |f|^2$ olduğundan Lebesque monoton yakınsaklık teoremine göre

$$\lim_{n\to\infty} \iint_G \varphi_n d\sigma_z = \iint_G |f|^2 d\sigma_z,$$

yani

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{G_n} |f|^2 d\sigma_z = I[f] = \iint_G |f|^2 d\sigma_z$$

elde edilir.

Bu , $I[f]$ nin Riemann integrallerinin limiti olarak gösterilebilmesi anlamına gelir.

Özel olarak

$$G=\{z: r<|z-z_0|<R\},\ 0\le r<R<\infty, \qquad f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ \ z\in G \text{ olsun.}$$

$z-z_0=\rho e^{i\theta}$ kutupsal koordinat dönüşümü yapılırsa

$$I[f]=\int_r^R \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\theta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{a}_n \rho^n e^{-in\theta}\, d\theta$$

elde edilir.

$r<\rho<R$ için yukarıdaki seri θ ve ρ ya göre mutlak ve düzgün yakınsaktır,

$$I[f]=2\pi \int_r^R \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n+1} d\rho$$

ve integral içindeki seri negatif olmadığından

$$I[f]=2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \int_r^R \rho^{2n+1} d\rho$$

elde edilir. $r=0$ durumunda eğer $f\in A(0<|z-z_0|<R)$ ve $I[f]<\infty$ ise, n<0 için $a_n=0$ dır. Bu durumda $z=z_0$ noktası bir kaldırılabilir singüler nokta olur ve

$$I[f]=\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} |a_n|^2 R^{2n+2} \tag{3}$$

elde edilir.

Tanım 23: $G\subset\mathbb{C}$ keyfi bir bölge olmak üzere

$$A^2(G):=\{f: f\in A(G) \text{ ve } I[f]<\infty\}$$

ile tanımlanır.

2.2 $A^2(G)$ Uzayının Bazı Basit Özellikleri

Lebesque integralinin özelliklerinden ve $|f_1+f_2|^2\le(|f_1|+|f_2|)^2\le 2(|f_1|^2+|f_2|^2)$ eşitsizliğinden kolayca görülüyor ki

i) $f\in A^2(G)$ ve $c\in\mathbb{C}$ sabiti için $cf\in A^2(G)$,

ii) $f_1,f_2\in A^2(G)$ için $f_1+f_2\in A^2(G)$

ve dolayısıyla,

iii) $f_k \in A^2(G)$, $\quad k=\overline{0,n}$ ve $c_k \in \mathbb{C}$ için $\sum_{k=0}^{n} c_k f_k \in A^2(G)$

Buna göre $A^2(G)$ sabitle çarpım ve toplam işlemlerine göre kapalıdır. Bu iki işlem yardımıyla ve Lebesque integrallerinin özelliklerinden yararlanarak $A^2(G)$ uzayının lineer uzay olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 20: $f \in A^2(G)$, $z \in G$ keyfi, $\delta(z) := \operatorname{dist}(z, \partial G) = \operatorname*{Inf}_{\zeta \in \partial G} |z-\zeta|$ olmak üzere

$$I[f] \geq \pi \delta^2(z) |f(z)|^2$$

dır.

İspat. $D(z,\delta) := \{\zeta : |\zeta - z| \leq \delta\}$ olsun. Bu durumda

$$I[f] = \iint_G |f(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta \geq \iint_{D(z,\delta)} |f(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta \tag{3}$$

ve

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\zeta - z)^n$$

olduğundan

$$I[f] \geq \pi \delta^2 |a_0|^2 = \pi \delta^2 |f(z)|^2$$

elde edilir.

Tanım 24: $f, g \in A^2(G)$ fonksiyonları için

$$(f,g) := \iint_G f(z) \overline{g(z)} \, d\sigma_z \tag{4}$$

olsun. (f,g) ye f ve g fonksiyonlarının $A^2(G)$ uzayında iç çarpımı denir. Ayrıca

$$|c_1 f + c_2 g|^2 \leq 2\left(|c_1|^2 |f|^2 + |c_2|^2 |g|^2\right)$$

eşitsizli ile

$$f\overline{g} = \frac{1}{2}|f+g|^2 + \frac{i}{2}|f+ig|^2 - \frac{1+i}{2}|f|^2 - \frac{1+i}{2}|g|^2$$

özdeşliğinden kolayca görülür ki (4) ile tanımlı (f,g) bir kompleks sayıdır.

Teorem 21: $A^2(G)$ uzayı (4) ile tanımlı iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır.

İspat. Teoremi ispatlamak için aşağıdakiler gösterilmelidir:

a) $A^2(G)$ uzayı bir lineer uzaydır.

b) (4) ile tanımlı iç çarpım aşağıdaki koşulları sağlar.

i) $(f,f) \geq 0$, $(f,f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

ii) $(f,g) = \overline{(g,f)}$

iii) $(\lambda f, g) = \lambda (f,g)$, $\lambda \in \mathbb{C}$

iv) $(f+g,h) = (f,h) + (g,h)$

c) $A^2(G)$ uzayı (4) ile tanımlı iç çarpımın meydana getirdiği

$$(f,f)^{1/2} = \left(\iint_G |f|^2 d\sigma_z \right)^{1/2} =: \| f \|_{A^2}$$

normuna göre bir normlu uzaydır.

d) $A^2(G)$ uzayı bu norma göre tamdır.

Gerçekten, a- şıkkı yukarıda gösterildi, b- ve c- şıkları Lebesque integrali özelliklerinden ve Minkowski eşitsizliğinden yararlanılarak kolayca elde edilir. d- şıkkı için: $\{f_n\} \in A^2(G)$ bir Cauchy dizisi olsun, yani $\forall n, m > N$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için $\|f_n - f_m\|_{A^2}^2 < \varepsilon$. Teorem 20 yi $f_n(z) - f_m(z)$ fonksiyonuna uygulayarak $\forall n, m > N$ için

$$|f_n(z) - f_m(z)|^2 < \frac{\varepsilon}{\pi \delta^2}, \quad z \in B \subset G, \ \delta := \operatorname{dist}(B, \partial G)$$

kosulunun sağlandığını ve buradan, teorem 4 e göre $\{f_n\}$ analitik fonksiyonlar dizisinin herhangi $B \Subset G$ kompakt alt kümesinde bir F fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğu görülür. Ayrıca, [3] de verilen bir teoreme göre $F \in A(G)$ dir.

Öte yandan ; $B \Subset G$ herhangi bir kompakt alt küme ise $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall n, m > N$ için

$$\iint_B |f_n(z) - f_m(z)|^2 d\sigma_z \leq I[f_n - f_m] < \varepsilon$$

olduğundan $m \to \infty$ limitine geçerek

$$\iint_B |f_n(z)-F(z)|^2 d\sigma_z \le \varepsilon, \qquad n>N, \quad \forall B \Subset G$$

bulunur.$B \Subset G$ keyfi kompakt olduğundan $I[f_n - F] \le \varepsilon$, $n > N$ yani $F \in A^2(G)$ ve $\lim_{n\to\infty} \| f_n - F \| = 0$ dır. Dolayısıyla $A^2(G)$ uzayından olan her bir Cauchy dizisi yakınsaktır ve limit fonksiyon $A^2(G)$ uzayının elemanıdır, yani; $A^2(G)$ uzayı tamdır.

2.3 $A^2(G)$ Uzayında Ortonormal Sistemler. Gramm-Schmidt Ortonormalleştirme Metodu

Tanım 25: $A^2(G)$ bir Hilbert uzayı olsun. $\forall k = 0,1,...$ için $f_k(z) \in A^2(G)$, $f_k(z) \neq 0$ olan ve

$$(f_n, f_m) = \iint_G f_n(z)\overline{f_m(z)}\, d\sigma_z = 0, \quad n \neq m$$

şartını sağlayan $\{f_k(z)\}$, $k = 0,1,...$ sistemine bir ortogonal sistem denir. Ayrıca, $\{f_k(z)\}$ sistemi belli bir $d_k \neq 0$ sabiti ile çarpılırsa $\{d_k f_k(z)\} =: \{f_k^*(z)\}$ sistemi bir ortogonal sistem olur. n = m için $d_n^2 \iint_G |f_n(z)|^2 d\sigma_z \neq 0$ elde edilir ve d uygun olarak seçilerek,

$$\iint_G f_n^*(z)\overline{f_m^*(z)}\, d\sigma_z = \delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & , n \neq m \\ 1 & , n = m \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. Böyle elde edilen $\{f_k^*(z)\}$, $k = 0,1,...$ sistemine bir ortonormal sistem denir.

Eğer $A^2(G)$ uzayında bir lineer bağımsız $\{f_k(z)\}$, $k = 0,1,...$ fonksiyonlar sistemi verilirse, bu sistem yardımı ile $A^2(G)$ uzayında ortonormal olan bir $\{g_k(z)\}$ $k = 0,1,...$ fonksiyonlar sistemi aşağıdaki şekilde inşa edilebilir. Bu inşa metoduna Gramm-Schmidt ortonormalleştirme metodu denir [12].

Farzedelim ki, $\{f_k(z)\}$, $k = 0,1,...$ fonksiyonlar sistemi $A^2(G)$ uzayından bir lineer bağımsız sistem olsun.

1. adım: $g_0(z) := \dfrac{e^{i\omega_0}}{\sqrt{(f_0, f_0)}} f_0(z)$, $\omega_0 \in IR$ keyfi alınsın

2. adım: $h_1(z) = f_1(z) + \mu_0 g_0(z)$ olsun. μ_0 sayısı öyle seçilsin ki, $(h_1, g_0) = 0$ şartı sağlansın. $0 = (h_1, g_0) = (f_1 + \mu_0 g_0, g_0) = (f_1, g_0) + \mu_0 (g_0, g_0)$ ve $(g_0, g_0) = 1$ olduğundan $\mu_0 = -(f_1, g_0)$ dır. Dolayısıyla

$$h_1(z) = f_1(z) - (f_1, g_0) g_0(z)$$

elde edilir. Aşikar olarak görülür ki $h_1(z) \neq 0$ ve $h_1(z)$, ω_0 ın seçiminden bağımsızdır. Buna göre

$$g_1(z) := \frac{e^{i\omega_1}}{\sqrt{(h_1, h_1)}} h_1(z), \quad \omega_1 \in IR.$$

3. adım: $h_2(z) = f_2(z) + \mu_0 g_0(z) + \mu_1 g_1(z)$ olsun ve μ_0 ve μ_1 öyle seçilsin ki $(h_2, g_0) = 0$ ve $(h_2, g_1) = 0$ şartlarını sağlasın. Buradan kolayca bulunur ki;

$$h_2(z) = f_2(z) - \sum_{k=0}^{1} (f_2, g_k) g_k(z)$$

dır ve aşikar olarak görülür ki $h_2(z) \neq 0$ ve $h_2(z)$ ω_0, ω_1 den bağımsızdır. Buna göre

$$g_2(z) := \frac{e^{i\omega_2}}{\sqrt{(h_2, h_2)}} h_2(z), \ \omega_2 \in IR.$$

Bu metotla devam edilirse, n adımda

$$h_n(z) = f_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, g_k) g_k(z)$$

ve

$$g_n(z) := \frac{e^{i\omega_n}}{\sqrt{(h_n, h_n)}} h_n(z), \ \omega_n \in IR$$

bulunur, aşikardır ki, $h_n(z) \neq 0$ ve $h_n(z)$ $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ den bağımsızdır.

$\{g_n(z)\}, n = 0, 1, ..$ sisteminin inşasından görülür ki, her bir $g_k(z)$ fonksiyonu $f_k(z)$ fonksiyonlarının bir lineer toplamı olarak gösterilebilir ve bunun tersi de doğrudur. Ayrıca $(g_n, g_n) = 1$ ve $(g_k, g_j) = 0$, $k \neq j$ dır.

Gerçekten $(g_k, g_j) = 0$, $k \neq j$ $k, j = \overline{0, n-1}$ olursa, $m < n$ için

$$(g_n, g_m) = \frac{e^{i\omega_n}}{\sqrt{(h_n, h_n)}} \left(f_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} (f_n, g_k) g_k(z), g_m \right)$$

$$= \frac{e^{i\omega_n}}{\sqrt{(h_n,h_n)}}\left[(f_n,g_m) - \sum_{k=0}^{n-1}(f_n,g_k)(g_k,g_m)\right]$$

$$= \frac{e^{i\omega_n}}{\sqrt{(h_n,h_n)}}\left[(f_n,g_m) - (f_n,g_m)\right] = 0$$

Bu metod $e^{i\omega_n}$ katsayılarının verilmesi ile ortonormal sistemi belirler. $e^{i\omega_n}$ katsayılarına faz katsayıları denir ve özel olarak $\omega_n = \sqrt[n]{1}$ gibi ele alınır.

Ayrıca $g_n(z)$ fonksiyonu her bir $f_k(z)$, $k = \overline{0,n-1}$ fonksiyonuna ortogonaldir, çünkü $f_k(z)$ fonksiyonu $f_k(z) = \sum_{j=0}^{k} \mu_j g_j(z)$ gibi gösterilebilir.

Şimdi $\{g_n(z)\}$ ortonormal sisteminin

$$g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} f_k(z), \quad a_n^{(n)} > 0 \qquad (5)$$

koşulu ile tek türlü tanımlandığını gösterelim. Farzedelim ki (5) ile tanımlı iki $\{g_n(z)\}$, $\{\lambda_n(z)\}$, n=0,1,... ortonormal sistemleri mevcuttur. $g_n(z) \equiv \lambda_n(z)$, $n = 0,1,...$ olduğu gösterilmelidir. Gramm-Schmidt ortonormalleştirme metoduna göre

$$g_0(z) = c_1 f_0(z) = c_1 c_2 \lambda_0(z) = A_0 \lambda_0(z)$$

ve

$$(g_0,g_0) = A_0^2(\lambda_0,\lambda_0) = 1$$

olduğundan $A_0^2 = 1$ elde edilir ve $a_n^{(n)} > 0$ dan dolayı $A_0 = 1$ bulunur, yani; $g_0(z) \equiv \lambda_0(z)$ dır. n>0 için $g_n(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k \lambda_k(z)$ gibi yazılabilir, her tarafı $\lambda_k(z)$ ye çarparak

$$(g_n,\lambda_k) = \sum_{j=0}^{n} A_j(\lambda_j,\lambda_k) = A_k$$

olduğu bulunur:

$$A_k = \iint_G g_n(z)\overline{\lambda_k(z)}\,d\sigma_z, \quad k = \overline{0,n}.$$

Öte yandan

$$A_k = (g_n, \lambda_k) = \left(g_n, \sum_{j=0}^{k} c_j f_j\right) = 0\,,\ k = \overline{0, n-1}.$$

Bu durumda $g_n(z) = A_n \lambda_n(z)$ ve koşula göre $A_n > 0$ ve $A_n^2 = 1$ olduğundan $A_n = 1$, dolayısıyla $g_n(z) \equiv \lambda_n(z)$, $\forall n = 0, 1, \ldots$ elde edilir.

2.4 Ortonormal Sistemlerin Determinantlar Yardımıyla İfadesi:

Tanım 26: a) $G \subset \mathbb{C}$ keyfi bir bölge ve $\{f_k(z)\} \subset A^2(G)$, $k = \overline{0, n}$ lineer bağımsız fonksiyonlar sistemi verilsin. Bu durumda

$$c_{j,k} := (f_j, f_k) = \iint_G f_j(z) \overline{f_k(z)} d\sigma_z$$

ile tanımlansın. İç çarpımın özelliklerinden kolayca görülür ki $c_{j,j} > 0$ ve $c_{j,k} = \overline{c_{k,j}}$ dir.

b) $$G := G(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{pmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n} \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

matrisine $\{f_k(z)\}$, $k = \overline{0, n}$ sisteminin Gramm matrisi denir. $D_n := \det G(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ ise, tanım 26 a- dan dolayı $\overline{G'} = G$, ve dolayısıyla $\det \overline{G'} = \det G$ olduğundan $\forall k = \overline{0, n}$ için $D_k \in \mathbb{R}$ görülür.

Şimdi D_n determinantı yardımıyla aşağıda tanımlanan fonksiyon incelenirse

$$Q_n(z) := \begin{vmatrix} c_{0,0} & c_{0,1} & \cdots & c_{0,n-1} & f_0(z) \\ c_{1,0} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,n-1} & f_1(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,0} & c_{n,1} & \cdots & c_{n,n-1} & f_n(z) \end{vmatrix} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} f_k(z), \qquad (6)$$

D_n nin tanımından dolayı $\lambda_n^{(n)} = D_{n-1}$ ve

$$(Q_n, f_k) = \iint_G Q_n(z) \overline{f_k(z)} d\sigma_z = \begin{cases} 0 & , k = \overline{0, n-1} \\ D_n & , k = n \end{cases}. \qquad (7)$$

Ayrıca

$$\iint_G |Q_n(z)|^2 d\sigma_z = \iint_G Q_n(z)\sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda_k^{(n)}\, f_k(z)}\, d\sigma_z$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{\lambda_k^{(n)}} \iint_G Q_n(z)\, \overline{f_k(z)}\, d\sigma_z$$

$$= \overline{\lambda_n^{(n)}}\, D_n = D_{n-1} D_n . \tag{8}$$

Gösterelim ki $\forall n = 0,1,\ldots$ için $D_n > 0$ dır. Gerçekten $D_n = 0$ olsaydı, (8) den dolayı

$$\iint_G |Q_n(z)|^2 d\sigma_z = 0$$

olurdu, buradan $Q_n(z) = 0$. Bu durumda

$$Q_n(z) = \lambda_n^{(n)} f_n(z) + \ldots + \lambda_0^{(n)} f_0(z)$$

olduğundan $\lambda_n^{(n)} = 0$ olurdu ve buradan $D_{n-1} = 0$ elde edilirdi. Benzer biçimde hareket edilerek $D_{n-2} = 0, D_{n-3} = 0, \ldots, D_0 = 0$ sonucuna ulaşılırdı, halbuki $D_0 = \det c_{0,0} > 0$ dır. Bulunan bu çelişki gösterir ki $\forall n = 0,1,\ldots$ için $D_n \neq 0$ dır. Dolayısıyla (8) e göre $\forall n = 0,1,\ldots$ için $D_n > 0$ olmak zorundadır. Ayrıca (7) ve (8) den

$$\iint_G Q_n(z)\overline{Q_k(z)}\, d\sigma_z = \begin{cases} 0 & ,k \neq n \\ D_n D_{n-1}, & k = n \end{cases}$$

dır, yani; $\{Q_n(z)\}$ fonksiyonlar sistemi ortogonaldir.

$$g_n(z) := \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} Q_n(z) = \sqrt{\frac{D_{n-1}}{D_n}}\, f_n(z) + \ldots \tag{9}$$

olarak tanımlanırsa $\{g_n(z)\}$ ortonormal fonksiyonlar sistemi elde edilir.

2.5 Ortonormal Polinomlar ve Onların Ekstremal Özelliği

Tanım 27: (6) formulündeki $\{f_k(z)\}, k=\overline{0,n}$ lineer bağımsız fonksiyonlar sistemi olarak $\{z^k\}, k=\overline{0,n}$ sistemini veya bu sistemin keyfi alt sisteminin oluşturduğu polinomlar gözönüne alındığında (9) formulü ile elde edilen $\{g_n(z)\}$ sistemine G bölgesi üzerinde ortonormal polinomlar sistemi denir. Bundan böyle yukarıda adı geçen ortonormal polinomlar sistemi $\{K_n(z)\}$ ile işaret edilecektir.

Özel olarak $G:=\{z:|z|<R\}$ ve $f_k(z)=z^k, k=\overline{0,n}$ alınırsa,

$$\iint\limits_{|z|<R} z^k \overline{z^j} d\sigma_z = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} \rho^{k+j} e^{(k-j)i\theta} d\theta$$

$$= \int_0^R \rho^{k+j+1} d\rho \int_0^{2\pi} e^{(k-j)i\theta} d\theta = 0 \, , k \neq j$$

ve

$$\iint\limits_{|z|<R} |z^k|^2 d\sigma_z = \int_0^R \rho^{2k+1} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^R \rho^{2k+1} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{k+1} R^{2(k+1)}$$

elde edilir. Buna göre $|z|<1$ de $\{K_n(z)\}$ ortonormal polinomlar sisteminin

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$$

olduğu görülür.

Teorem 22: $K_n(z)=a_n z^n+\ldots$ ve $\wp_n:=\{P_n : P_n(z)=z^n+c_1 z^{n-1}+\ldots+c_0\}$ olmak üzere

$$J[P_n]:=\iint\limits_G |P_n(z)|^2 d\sigma_z$$

integraline minimum değerini veren polinom $P_n^*(z):=a_n^{-1}K_n(z)$ polinomudur ve bu minimum değer a_n^{-2} dir [7].

İspat. Keyfi bir $P_n \in \wp_n$ polinomu alınırsa, bu polinom

$$P_n(z) = a_n^{-1}K_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} d_j K_j(z)$$

şeklinde yazılabilir.

Buna göre

$$J[P_n] = \iint_G \left| a_n^{-1}K_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} d_j K_j(z) \right|^2 d\sigma_z$$

$$= \iint_G \left[a_n^{-1}K_n(z) + \sum_{j=0}^{n-1} d_j K_j(z) \right] \left[\overline{a_n^{-1}K_n(z)} + \sum_{j=0}^{n-1} \overline{d_j K_j(z)} \right] d\sigma_z$$

$$= a_n^{-2} + \sum_{j=0}^{n-1} |d_j|^2$$

elde edilir. Buradan aşikar olarak görülür ki, $J[P_n]$ integrali minimum değerini $d_j = 0 \;\; j = \overline{0, n-1}$ durumunda alır, yani; $J[P_n]$ integraline minimum değerini veren polinom

$$P_n^*(z) := a_n^{-1}K_n(z)$$

polinomudur ve $J[P_n^*] = a_n^{-2}$ dir.

Teorem 23: $K_n(z)$ polinomunun sıfır yerleri G nin konveks kabuğuna aittir [7].

İspat. G^*, G nin konveks kabuğu ve $P_n^*(z) = (z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n)$ olsun. Varsayalım ki $z_1 \notin G^*$ olsun. Bu durumda G^*konveks olduğundan z_1 noktasını G bölgesinden ayıran bir ℓ doğrusu mevcuttur. z_1 noktasından ℓ ye indirilen dikmenin ℓ yi kestiği nokta z_1' ile gösterilirse $\forall z \in G$ için

$$|z - z_1'| < |z - z_1|$$

olacağından $q_n(z) := (z - z_1')(z - z_2)...(z - z_n)$ polinomu $J[q_n] < J[P_n^*]$ koşulunu sağlar. Bu ise teorem 22 ile çelişir, yani; $z_1 \in G^*$ olmak zorundadır.

2.6 Ağırlık Fonksiyonuna Göre Ortonormal Polinomlar

Tanım 28: $\gamma(z) \geq 0$ fonksiyonu G bölgesinde ölçülebilir, reel değerli ve

$$\iint_G \gamma(z)d\sigma_z > 0 \tag{10}$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$A^2(\gamma,G) := \left\{ f : f \in A(G) \text{ ve } \iint_G \gamma(z)|f(z)|^2 d\sigma_z < \infty \right\}$$

ile tanımlanır.

Tanım 29: $\gamma(z)$ fonksiyonu, tanım 28 deki koşullara ek olarak, $\forall B \subset G$ kapalı kümesinde, $\exists \rho_B > 0$ öyleki $\forall z_0 \in B$ ve $\forall f \in A^2(\gamma, G)$ için

$$\iint_G \gamma(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \rho_B |f(z_0)|^2 \tag{11}$$

şartını sağlıyorsa, $\gamma(z)$ fonksiyonuna G bölgesinde bir ağırlık fonksiyonu denir.

Teorem 24: $\gamma(z)$ fonksiyonu (10) koşulunu sağlayacak şekilde verilmiş olsun. Eğer $\forall B \subset G$ kapalı kümesi için aşağıdaki koşulları sağlayan, kapalı, parçalı-düzgün bir $\ell \subset G$ eğrisi ve bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $\gamma(z)$ fonksiyonu bir ağırlık fonksiyondur.

1) $\operatorname{Min}\{ d(\ell,B) ; d(\ell,\partial G) \} \geq \delta$

2) $\gamma(z) \geq \varepsilon_0 > 0$, $\forall z \in \overline{F} := \left\{ z : d(z,\ell) \leq \frac{\delta}{2} \right\}$

İspat. $\forall \zeta \in \ell$ ve $f(z) \in A^2(\gamma,G)$ için $m_\ell = \operatorname*{Inf}_{z \in F} \gamma(z) > 0$ olmak üzere

$$\iint_G \gamma(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \iint_{|z-\zeta| \leq \frac{\delta}{2}} \gamma(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq m_\ell \iint_{|z-\zeta| \leq \frac{\delta}{2}} |f(z)|^2 d\sigma_z$$

yazılabilir ve teorem 20 den dolayı

$$\iint_G \gamma(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 m_\ell |f(\zeta)|^2$$

ayrıca $M := \underset{\zeta\in\ell}{\mathrm{Max}}|f|$ olmak üzere

$$\iint_G \gamma(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \pi\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 m_\ell M^2 \tag{12}$$

elde edilir. $\forall z_0 \in B$ için teorem 12 kullanılırsa

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\ell \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

$$|f(z_0)| \leq \frac{M \, mes\ell}{2\pi\delta}$$

eşitliği ve buradan (12) gözönüne alınarak

$$\iint_G \gamma(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \frac{\pi^3\delta^4}{(mes\ell)^2} m_\ell |f(z_0)|^2, \quad z_0 \in B$$

olduğu görülür. $B \subset G$ ve $f \in A^2(\gamma, G)$ keyfi olduğundan $\gamma(z)$ fonksiyonu bir ağırlık fonksiyonudur .

Özel olarak, $D(z) \in A^2(G)$ ve $D(z) \neq 0$, $z \in \overline{G}$ olmak üzere

$$\gamma(z) := |D(z)|^2 \tag{13}$$

ile tanımlanırsa, teorem 24 e göre $\gamma(z)$ fonksiyonu bir ağırlık fonksiyonu olacaktır. Gramm-Schmidt ortonormalleştirme metodunda ele alınan $f_k(z)$, $k = \overline{0,n}$ fonksiyonları olarak

$$f_k(z) \doteq D(z) z^k, \quad k = \overline{0,n}$$

fonksiyonları alınırsa ortonormalleştirme sonucunda G bölgesinde ortonormal olan

$$g_k(z) = D(z) K_k(z), \; k = \overline{0,n}$$

sistemi bulunur. Burada $K_k(z)$ k. dereceden bir polinomdur ve $e^{i\omega_k}$ faz katsayıları öyle seçilmiştir ki $K_k(z)$ nin baş teriminin katsayısı pozitiftir.

Bu durumda

$$\iint\limits_{G} D(z)\,K_k(z)\,\overline{D(z)\,K_m(z)}\,d\sigma_z = \delta_{k,m}$$

elde edilir ve $\gamma(z) = |D(z)|^2$ yazılarak

$$\iint\limits_{G} \gamma(z) K_k(z)\overline{K_m(z)}\,d\sigma_z = \delta_{k,m}$$

sonucuna ulaşılır.

Bu şekilde bulunan $\{K_k(z)\}$ polinomlar sistemine $\gamma(z) = |D(z)|^2$ ağırlık fonksiyonuna göre G bölgesinin ortonormal polinomlar sistemi denir.

3. BULGULAR

3.1 Giriş ve Problemin Sunuluşu

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesi, sınırı Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge olsun. İkinci bölümde görüldüğü gibi, G bölgesinde verilmiş herhangi bir $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan $\{K_n(z)\}$ polinomlar sistemi, başteriminin katsayısı pozitif olmak üzere

$$\iint_G \gamma(z) K_n(z) \overline{K_m(z)}\, d\sigma_z = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \tag{14}$$

tek türlü tanımlanır.Bu polinomlara G nin $\gamma(z)$ ye göre Bergman polinomları adı verilir. Bu polinomlar ilk kez 1922 yılında, Taylor serilerinin sonlu basit bağlantılı bölgeler için benzerini bulmak amacı ile T. Carleman [13] tarafından incelenmiştir. $K_n(z)$ polinomlarına klasik ortogonal polinomların (Tschbyscheff, Lagrange, Laguerre, Legendre, Hermite) kompleks düzlemde benzeri ve genişlemesi gibi de bakılabilir. Bu nedenle klasik ortogonal polinomlar için incelenen problemler uygun olarak $\{K_n(z)\}$ polinomları için de incelenir. Böyle problemlerden biri 1921 yılında Stekloff tarafından söylenilmiştir:

"Hangi yeter koşul altında, verilmiş aralığa göre ortogonal polinomlar bu aralığın iç noktalarında düzgün sınırlı olurlar."

Bu problem benzer şekilde $\{K_n(z)\}$ polinomları için aşağıdaki şekilde verilebilir:

G bölgesi ve $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonu hangi koşulları sağlamalıdır ki $\{K_n(z)\}$ polinomları G bölgesinin iç noktalarında düzgün sınırlı olsunlar. Daha genel olarak, G bölgesinin içinde $\{K_n(z)\}$ polinomlarının sıfıra inme hızını belirlemek gerekir. (14) den bu problemin çözümü direkt olarak G bölgesinin ve $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonun özelliklerine bağlıdır. Bu bağlılık P.K.Suetin [6] tarafından ispatlanmış aşağıdaki teoremde açıkca gözükmektedir.

Bu bölümde, ağırlık fonksiyonu olarak; $D(z) \in A(\overline{G})$ ve $D(z) \neq 0$, $\forall z \in \overline{G}$ olmak üzere

$$\gamma(z) = |D(z)|^2, \quad z \in G \tag{15}$$

fonksiyonu alınacaktır.

Teorem 25:[6] $L \in C(p+1,\alpha)$, $p \geq 0$; $D^{(p)}(z) \in A(\overline{G}) \cap Lip\,\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ $\quad z \in \overline{G}$ olsun.

Bu durumda

$$|K_n(z)| \leq \frac{const}{[d(B,L)]^{p+3}} \frac{1}{n^{p+\alpha}}, \quad z \in B \Subset G \tag{16}$$

1988 yılında parçalı-düzgün sınırlı bölgeler için (16) formulünün bir benzeri D.Gaier [7] tarafından elde edilmiştir, fakat (16) eşitsizliğinin sağ tarafının $z \in B \Subset G$ noktalarına bağımlılığı gösterilmemiştir. Bu bölümde daha geniş bölgeler ailesi için sözü edilen problemin benzeri incelenecektir.

3.2 Riemann Dönüşümü

Tanım 30: G_1 ve G_2 kompleks düzlemde iki bölge ve $f: G_1 \to G_2$ bire-bir, örten ve analitik bir fonksiyon ise f dönüşümüne bir konform dönüşüm denir [3].

Teorem 26 [Riemann Dönüşüm Teoremi]**:** G kompleks düzlemde $G \neq \mathbb{C}$ olan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ ise G bölgesini, $U := \{z : |z| < 1\}$ açık birim dairesine dönüştüren ve $\varphi(z_0, z_0) = 0$, $\varphi'(z_0, z_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $\varphi: G \to U$ konform dönüşümü vardır [3].

Teorem 27: $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi, sınırı Jordan eğrisi olan sonlu bir bölge ise

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi: C\overline{G} \to C\overline{U}$ konform dönüşümü vardır.

İspat: $\eta_0 \in \mathbb{C}$ keyfi fakat sabit bir nokta olsun. Bu takdirde $\eta(z) := \eta_0 + \frac{1}{z}$ dönüşümü $C\overline{G}$ basit bağlantılı bölgesini, $\mathbb{C}$ düzleminde basit bağlantılı bir $G_1 := \eta(C\overline{G})$ bölgesine resmeden $\eta(\infty) = \eta_0$ ve $\eta'(\infty) > 0$ koşullarını sağlayan bir konform dönüşümdür. Öte yandan teorem 26 ya göre $\varphi(\eta_0, \eta_0) = 0$ ve $\varphi'(\eta_0, \eta_0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $\varphi : G_1 \to U$ konform dönüşümü vardır. $\mu : U \to C\overline{U}$, $\mu(0) = \infty$, $\mu'(\infty) > 0$, $\mu(w) = \frac{1}{w}$, dönüşümü konform olduğundan

$\Phi := \mu \circ \varphi \circ \eta : C\overline{G} \to C\overline{U}$

$$\Phi(z) = \frac{1}{\varphi(\frac{1}{z} + \eta_0, \eta_0)},$$

dönüşümü konformdur ve

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlar.

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesi, sınırı Jordan eğrisi olan sonlu bir bölge, $z_0 \in G$, $L := \partial G$ ve $\Omega := CG$ olsun. $w = \varphi(z, z_0)$ $(w = \Phi(z))$ ile G bölgesinin (Ω bölgesinin) $U := \{w : |w| < 1\}$ ya ($C\overline{U}$ ye), $\varphi(z_0, z_0) = 0$ $\varphi'(z_0, z_0) > 0$ $\left(\Phi(\infty) = \infty, \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0\right)$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü olsun.

φ (Φ) dönüşümü $\overline{G}$ den $\overline{U}$ ye ($\overline{\Omega}$ den CU ya) homeomorf olarak genişletilebilir [14]. Bu homeomorfizm karışıklığa sebep olmadıkça yine $\varphi(\Phi)$ ile gösterilecek ve $\psi := \varphi^{-1}$ $(\Psi := \Phi^{-1})$ alınacaktır.

$0 < r \le 1$ ve $R \ge 1$ olsun.

$$L_r := \{z : |\varphi(z, z_0)| = r\}, \; L_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R\}$$

eğrilerine seviye eğrileri denir ve $t > 0$ için $G_t := I(L_t)$, $\Omega_t := E(L_t)$ olsun.

3.3 Yarıkonform Dönüşümler ve Yarıkonform Eğriler

Tanım 31: $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$ iki bölge, $f : G_1 \to G_2$ için $J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0, \forall z \in G_1$ şartını sağlayan C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Bu durumda

$$\sup_{z\in G_1}\frac{|f_z(z)|+|f_{\bar z}(z)|}{|f_z(z)|-|f_{\bar z}(z)|}\le K<\infty \tag{17}$$

ise, f dönüşümüne G_1 bölgesi üzerinde tanımlı bir K- yarıkonform dönüşüm ve $K\ge 1$ sayısına ise f dönüşümünün yarıkonformluk katsayısı denir [5].

Tanımdan görülüyor ki, f dönüşümü, G_1 bölgesi üzerinde K- yarıkonform ve $k:=\frac{K-1}{K+1}$ ise $\forall z\in G_1$ için $\frac{|f_{\bar z}(z)|}{|f_z(z)|}\le k<1$ dir. Ayrıca, $f:G_1\to G_2$ dönüşümü konform ise $\forall z\in G_1$ için $f_{\bar z}(z)=0$ olduğundan f dönüşümü 1-yarıkonform dönüşümdür.

Tanım 32: L genişletilmiş kompleks düzlemde bir Jordan yayı (eğrisi) olsun. Eğer $D\supset L$ bölgesinin f K-yarıkonform dönüşümü altındaki $f(L)$ resmi, aralık (çember) ise, L yayına (eğrisine) K-yarıkonform $(K\ge 1)$ yay (eğri) denir [11, 15].

$F(L)$ ile $D\supset L$ bölgesinin tüm $K(f)$-yarıkonform dönüşümlerinin kümesi alınsın, öyleki; $f(L)$ aralık veya çember olsun. $K(L):=\operatorname{İnf}\{K(f):f\in F(L)\}$ile tanımlıdır ve $K(f)=\frac{|f_z|+|f_{\bar z}|}{|f_z|-|f_{\bar z}|}\ge 1$, f dönüşümünün dilatasyonudur. Bu durumda L eğrisine K-yarıkonform eğri denir, eğer;

$$K(L)\le K<\infty \tag{18}$$

ise [11, 15].

Tanım 32 de iki hal olabilir;

a) $D=\mathbb{C}$,

b) $D\subset\mathbb{C}$ - sonlu bölgedir,

a-) haline uygun tanıma yarıkonform eğrilerin global tanımı ve (17) ile verilen K sayısına bu yarıkonform eğrinin yarıkonformluk katsayısı denir.

b-) haline uygun tanıma yarıkonform eğrilerin lokal tanımı denir ve bu durumda yarıkonformluk katsayısı (18) ile belirlenir.

Teorem 28: L bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L, z_1 \neq z_2$ olan keyfi noktalar ve $L(z_1, z_2)$, z_1 ve z_2 noktalarının L eğrisinden ayırdığı küçük çaplı yay olsun. L eğrisinin yarıkonform olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{z_3 \in L(z_1, z_2) \\ z_1, z_2 \in L}} \frac{|z_1 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır [5].

Bu bölümde yarıkonform eğrilerin lokal tanımından yaralanılacaktır. Lokal tanımın global tanıma avantajı, bu tanım yardımıyla bazı basit yayların veya eğrilerin K-yarıkonformluk katsayılarının hesaplanabilmesidir.

Teorem 29: L analitik yay veya eğri ise K=1 dir [16].

Teorem 30: L ,C_θ sınıfından bir yay veya eğri ise $\forall \varepsilon > 0$ için L,$(1+\varepsilon)$ yarıkonformdur [15].

Tanım 33: L kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi, y:$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü I(L) bölgesini E(L) bölgesine, E(L) bölgesini I(L) bölgesine dönüştüren ve $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ koşulunu sağlayan bir dönüşüm olsun. $\overline{y}:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü yarıkonform ise; y dönüşümüne L eğrisine göre bir yarıkonform yansıma denir [17].

Teorem 31: L eğrisi kompleks düzlemde bir Jordan eğrisi olsun. L eğrisine göre yarıkonform yansımanın mevcut olması için gerek ve yeter koşul L eğrisinin yarıkonform olmasıdır [11].

Teorem 32: L eğrisi, global anlamda K- yarıkonform eğri olsun. Bu durumda L eğrisinin belli bir komşuluğunda sınırlı kısmi türevleri olan L eğrisine göre C^1 sınıfından bir y yarıkonform yansıması vardır; özel olarak L eğrisinin belli bir komşuluğundaki $\forall z$ ve $\forall z' \in L$ için

$$\text{sabit}|z - z'| \leq |y(z) - z'| \leq \text{sabit}|z - z'| \tag{19}$$

sağlanır [18].

L , lokal anlamda, K-yarıkonform f dönüşümü ile tanımlanan K- yarıkonform bir eğri olsun. Bu durumda, R_0 sayısı, $1 < R_0 \leq 2$, φ, Φ, f dönüşümlerine bağlı olarak belirlenmiş ve $r_0 = R_0^{-1}$ olmak üzere tanım 32 deki D bölgesi olarak $D := G_{R_0} - G_{r_0}$ bölgesi alınabilir.

[5,s.71] e benzer olarak gösterilebilir ki, $\alpha(\cdot) = f^{-1}\left\{\left[\overline{f(z)}\right]^{-1}\right\}$ dönüşümü L eğrisine göre K^2- yarıkonform yansımadır. Yani $\overline{\alpha(\cdot)}$ dönüşümü öyle bir K^2-yarıkonform dönüşümdür ki, L eğrisinin noktalarını değiştirmez ve herhangi bir $1 < \tilde{R} < R_0$, $r_0 < \tilde{r} < 1$ sayıları için

$$\alpha(G_{\tilde{R}} - \overline{G}) \subset G - \overline{G}_{r_0} \text{ , } \alpha(G - G_{\tilde{r}}) \subset G_{R_0} - \overline{G}$$

koşullarını sağlar. Ayrıca yarıkonform dönüşümlerin genişletilmesi teoreminden [11,s.102] yararlanarak genelliği kaybetmeden tanım 32 de adı geçen D bölgesinde

$$y(z) = \alpha(z) \tag{20}$$

olduğu kabul edilecekdir.

3.4 φ ve Φ Dönüşümlerinin Bazı Lokal Özellikleri

Tanım 34: $\mathbb{C}$ de tanımlı, negatif olmayan, ölçülebilir ve

$$A(\rho) := \iint \rho^2(z) d\sigma_z \neq 0 \text{ , } \infty$$

koşulunu sağlayan bir $\rho(z)$ fonksiyonuna bir model fonksiyonu denir [5].

Γ,düzlemde verilmiş keyfi lokal ölçülebilir bir eğriler ailesi, $\rho: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ bir model fonksiyonu ve

$$L_\rho(\Gamma) := \inf_{\gamma \in \Gamma} \int_\gamma \rho(z) |dz|$$

olsun. ($\rho(z)$, γ eğrisi üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon değilse, $\int_\gamma \rho(z)|dz| := \infty$ olarak kabul edilecektir) [5].

Tanım 35: Γ kompleks düzlemde lokal ölçülebilir bir eğri ailesi ve $\{\rho(z)\}$ tüm model fonksiyonlarının ailesi ise

$$m(\Gamma):=\text{İnf}\left\{\frac{A(\rho)}{L_\rho^2(\Gamma)}:\rho\in\{\rho(z)\}\right\}$$

sayısına, Γ ailesinin modülü denir [5].

Tanım 36: $M\subset\mathbb{C}$ herhangi bir basit bağlantılı bölge (sınırlı veya sınırsız) ve $z_1,z_2,z_3,z_4\in M$ birbirinden farklı noktalar olsun. $\gamma\subset M$, lokal-ölçülebilir kapalı Jordan eğrisi, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemini, biri $z_1,z_2\in\overline{M}$ diğeri $z_3,z_4\in M$ noktalarını içeren iki alt bölgeye bölerse, γ eğrisine, $\overline{M}$ bölgesinde $z_1,z_2\in M$ noktalarını $z_3,z_4\in M$ noktalarından ayırıyor denir.

Böyle γ eğrilerinden oluşan aileye, M bölgesinde z_1,z_2 noktalarını, z_3,z_4 noktalarından ayıran eğriler ailesi denir. Bu aile $\Gamma(z_1,z_2;z_3,z_4,M)$ ve bu ailenin modülü $m(z_1,z_2;z_3,z_4,M)$ ile gösterilecektir.

Teorem 33: $w=F(z)$ dönüşümü M bölgesinde bir K- yarıkonform dönüşüm olsun. Bu durumda

$$K^{-1}\le\frac{m(z_1,z_2;z_3,z_4,M)}{m(F(z_1),F(z_2);F(z_3),F(z_4),F(M))}\le K$$

dır. K=1, yani F dönüşümü konform dönüşüm ise

$$m(z_1,z_2;z_3,z_4,M)=m(F(z_1),F(z_2);F(z_3),F(z_4),F(M))$$

dır [5, s.25].

Bundan sonra; $c,c_1,c_2,...$ pozitif, $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2,...$ yeteri kadar küçük pozitif sayılar, ve genelde G,D bölgelerinden bağımlı sabitleri işaretleyeceğiz. $A\preccurlyeq B$ sembolü $A\le cB$ $(A>0\,,\,B>0)$ $A\asymp B$ sembolü ise $A\preccurlyeq B$ ve $B\preccurlyeq A$ olduğunu gösterir.

$$\forall\, M,N\subset\mathbb{C} \text{ için } d(M,N):=\text{İnf}\{|z-\zeta|:z\in M\,,\,\zeta\in N\}$$

ve ayrıca $A_n=O(B_n)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=0$ ve $A_n=o(B_n)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=c$ olsun.

Teorem 34: L bir K-yarıkonform eğri, $z_1 \in L, z_2, z_3 \in G \cap \{z:|z-z_1| \leq c_1 d(z_1, L_{R_0})\}$; $w_j = \varphi(z_j, z_0)$, $(z_2, z_3 \in \Omega \cap \{z:|z-z_1| \leq c_2 d(z_1, L_{r_0})\}; w_j = \Phi(z_j))$ $j = 1,2,3$ olsun. Bu durumda

$$\text{i) } |z_1 - z_2| \preccurlyeq |z_1 - z_3| \Leftrightarrow |w_1 - w_2| \preccurlyeq |w_1 - w_3| \text{ dır,}$$

ve dolayısıyla

$$|z_1 - z_2| \asymp |z_1 - z_3| \Leftrightarrow |w_1 - w_2| \asymp |w_1 - w_3| \text{ dır.}$$

ii) Eğer $|z_1 - z_2| \preccurlyeq |z_1 - z_3|$ ise

$$\left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^{-2}} \preccurlyeq \left|\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \preccurlyeq \left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^2}$$

dır [16, 19].

Sonuç 1: Teorem 34 ün koşulları dahilinde, eğer; $z_3 \in G \cap \{z:|z-z_1| = c_1 d(z_1, L_{R_0})\}$ $\left(z_3 \in G \cap \{z:|z-z_1| = c_2 d(z_1, L_{r_0})\}\right)$ ise

$$|w_1 - w_2|^{K^2} \preccurlyeq |z_1 - z_2| \preccurlyeq |w_1 - w_2|^{K^{-2}}$$

dır.

Teorem 35: $L \in C_\theta(\lambda)$, $0 < \lambda < 2$ ise $\forall R > 1$ ve $\forall \mu, 0 < \mu < \mathrm{Min}\{1, \lambda\}$ için

$$\sup_{z \in L} d(z, L_R) \preccurlyeq (R-1)^{\mu},$$

dır.

İspat. Basitlik için, G bölgesi bir tane $\lambda\pi$ dış açıya sahip ve $z_\lambda \in L$, G bölgesinin $\lambda\pi$ dış açısına sahip olduğu köşe noktası olsun. $\lambda < 1$ için $\zeta := (z - z_\lambda)^{1/\lambda} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümünde $\zeta(z_\lambda) = 0 =: \zeta_0$ ve $L_\zeta = \zeta(L) \in C_\theta$ dır. Teorem 30 ve sonuç 1 den dolayı $\forall \varepsilon > 0$ küçük sayısı için $d(\zeta_0, \zeta(L_R)) \preccurlyeq (R-1)^{1-\varepsilon}$ dır. Teorem 30 ve sonuç 1 den, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(z_\lambda, L_R) \preccurlyeq [d(\zeta_0, \zeta(L_R))]^{\lambda} \preccurlyeq (R-1)^{\lambda(1-\varepsilon)}$$

$$d(z, L_R) \preccurlyeq (R-1)^{1-\varepsilon}, \ \forall \varepsilon > 0, \ z \in L - \{|t - z_\lambda| \leq \varepsilon_1\} \tag{21}$$

dır.

$\lambda \geq 1$ ise z_λ noktasının L_R seviye çizgisine kadar olan uzaklığı, diğer noktalardan L_R seviye çizgisine kadar olan uzaklıklardan daha küçüktür. Buna göre $\forall z \in L - \{|t - z_\lambda| \leq \varepsilon_1\}$ için teorem 30 ve teorem 34 den, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$d(z_\lambda, L_R) \leq d(z, L_R) \preccurlyeq (R-1)^{1-\varepsilon} \tag{22}$$

elde edilir. Böylece (21) ve (22) den teoremin ispatı yapılmış olur.

Teorem 36: $G \subset \mathbb{C}$ keyfi sonlu basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu durumda φ dönüşüm fonksiyonunun türevi için aşağıdaki eşitlik sağlanır [16]

$$\frac{1-|\varphi(z,z_0)|}{4d(z,L)} \leq |\varphi'(z,z_0)| \leq 2\frac{1-|\varphi(z,z_0)|}{d(z,L)}.$$

Teorem 37: L eğrisi, K- yarıkonform eğri olsun. Bu durumda $\forall u$, $0 < u < R_0 - 1$ ve $\forall z_0 \in G$ için

$$\operatorname{mes}(\varphi \circ \alpha)(G_{1+u} - G, z_0) \preccurlyeq \delta^{-1}(z_0)\ \delta^{K^{-2}}(\zeta)$$

sağlanır. Burada $|\tau| = \operatorname{Min}\{|w| : w \in (\varphi \circ \alpha)(L_{1+u}, z_0)\}$ olmak üzere, $\delta(z) = d(z, L)$ ve $\zeta = \varphi^{-1}(\tau)$ dır.

İspat. Açık olarak, $$\operatorname{mes}(\varphi \circ \alpha)(G_{1+u} - G, z_0) \leq 2\pi(1 - |\tau|) \tag{23}$$

dır. $z_0 \in \overline{G}_{r_0}$ ise sonuç 1 den;

$$1 - |\tau| \preccurlyeq \delta^{K^{-2}}(\zeta) \tag{24}$$

elde edilir. $z_0 \in G \cap D, z_0' := \alpha(z_0)$; $\delta(z_0) = |z - z_0|$, $z \in L$ olsun. Bu durumda iki hal mümkündür:

i) $z_0' \in \overline{G}_{1+u}$;

bu halde sonuç 1 den

$$1 - |\tau| \leq 1 \preccurlyeq \left|\frac{\zeta - z}{z - z_0}\right| \preccurlyeq \frac{\delta(\zeta)}{\delta(z_0)} \tag{25}$$

ii) $z_0' \in \Omega_{1+u} \cap D$;

w_1 noktası, $|w| = R_0$ çemberi üzerinde belli bir nokta ve $z_1 := \Phi^{-1}(w_1)$ olmak üzere; φ fonksiyonu, G bölgesinden G_{R_0} bölgesine aşağıdaki gibi genişletilebilir:

$$\tilde{\varphi}(z,z_0) := \begin{cases} \varphi(z,z_0), & z \in \overline{G} \\ \dfrac{1}{\overline{\varphi(\alpha(z),z_0)}}, & z \in G_{R_0} - \overline{G} \end{cases}$$

Açıkca görülür ki; $\tilde{\varphi}(z,z_0)$ dönüşümü K^2-yarıkonformdur.

G_{R_0} bölgesinde, z ve ζ noktalarını z_0 ve z_1 noktalarından ayıran, yerel sonlu uzunluklu eğriler ailesi $\Gamma_1 := \Gamma_1(z,\zeta;z_0,z_1,G_{R_0})$ ve $\Gamma_1' = \tilde{\varphi}(\Gamma_1,z_0)$ ile tanımlansın. Bu durumda bu eğri ailelerinin modülleri için aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır [16]:

$$m(\Gamma_1) \geq \frac{1}{2\pi}\ln c_1\left|\frac{z-z_0}{z-\zeta}\right|, \quad m(\Gamma_1') \leq \frac{1}{2\pi}\ln\frac{c_2}{1-|\tau|} \tag{26}$$

burada; $c_j = c_j(R_0, D, G), j = 1,2$ ve z, ζ, z_0, τ dan bağımsızdır.

Teorem 33 den ve sonuç 1 in yardımıyla

$$(1-|\tau|)^{K^2} \preccurlyeq \left|\frac{\zeta - z}{z_0 - z}\right| \preccurlyeq \frac{\delta(\zeta)}{\delta(z_0)} \tag{27}$$

olduğu görülür. Buna göre (23)-(27) den teorem 27 ispatlanmış olur.

Sonuç 2: $\forall u, 0 < u < R_0 - 1$ ve $\forall z_0 \in G$ için

$$mes(\varphi \circ \alpha)(G_{1+u} - G, z_0) \preccurlyeq \delta^{-1}(z_0)\, u^{K^{-4}}$$

dır. Bu sonuç, (19), (20), teorem 37 ve sonuç 1 den görülür.

Sonuç 3: $\forall u, 0 < u < R_0 - 1$ ve $\forall z_0 \in G$ için

$$\iint\limits_{G_{1+u}-G} \left|\frac{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)}{\partial\overline{z}}\right|^2 d\sigma_z \preccurlyeq \frac{u^{K^{-4}}}{\delta(z_0)}$$

dır.

İspat. $\tilde{\varphi}$ dönüşümünün, Jakobiyanı $J_{\tilde{\varphi}} := \left|\frac{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)}{\partial \bar{z}}\right|^2$ ve yarıkonformluk katsayısı K^2 $(k = \frac{K^2-1}{K^2+1})$ olsun. G_{R_0} bölgesinde hemen hemen her yerde

$$\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)}{\partial \bar{z}} \Big/ \frac{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)}{\partial z}\right| \le k < 1$$

olduğundan

$$\iint\limits_{G_{1+u}-G} \left|\frac{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)}{\partial \bar{z}}\right|^2 d\sigma_z = \iint\limits_{G_{1+u}-G} J_{\tilde{\varphi}} \left[\left|\frac{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)/\partial z}{\partial\tilde{\varphi}(z,z_0)/\partial \bar{z}}\right|^2 - 1\right]^{-1} d\sigma_z$$

$$\le \frac{k^2}{1-k^2} \iint\limits_{G_{1+u}-G} J_{\tilde{\varphi}}\, d\sigma_z$$

$$\preccurlyeq \operatorname{mes}(\varphi\circ\alpha)(G_{1+u}-G) \preccurlyeq \frac{u^{K^{-4}}}{\delta(z_0)}$$

Teorem 38: $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi, L K-yarıkonform eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $\alpha(\cdot)$, L eğrisine göre bir yarıkonform yansıma olsun. Bu durumda, $\forall u, 0 < u < R_0 - 1$ için

$$\iint\limits_{G_{1+u}-G} |\alpha_{\bar{z}}(z)|^2 d\sigma_z \le \frac{\operatorname{mes}(G)}{1-k^2}, \quad k = \frac{K^2-1}{K^2+1}$$

dır.

İspat: α, K^2-yarıkonform yansıma olduğundan; $\bar{\alpha}$ bir K^2- yarıkonform dönüşümdür ve dolayısıyla

$$\left|\frac{\bar{\alpha}_{\bar{z}}}{\bar{\alpha}_z}\right| = \left|\frac{\alpha_z}{\alpha_{\bar{z}}}\right| \le k\,,\; k = \frac{K^2-1}{K^2+1}$$

sağlanır. Ayrıca

$$J_{\bar{\alpha}} := |\bar{\alpha}_z|^2 - |\bar{\alpha}_{\bar{z}}|^2 = |\alpha_{\bar{z}}|^2 - |\alpha_z|^2 = -(|\alpha_z|^2 - |\alpha_{\bar{z}}|^2) > 0$$

olduğundan

$$\iint\limits_{G_{1+u}-G} |\alpha_{\bar z}(z)|^2 d\sigma_z = \iint\limits_{G_{1+u}-G} |\alpha_{\bar z}(z)|^2 \frac{(-J_{\bar\alpha})}{|\alpha_{\bar z}(z)|^2 - |\alpha_z(z)|^2} d\sigma_z$$

$$= \iint\limits_{G_{1+u}-G} \frac{(-J_{\bar\alpha})}{1-|\alpha_z(z)|^2/|\alpha_{\bar z}(z)|^2} d\sigma_z$$

$$\leq \frac{1}{1-k^2} \iint\limits_{G_{1+u}-G} |J_\alpha(z)| d\sigma_z$$

$$\leq \frac{\mathrm{mes}(\alpha(G_{1+u}-G))}{1-k^2} \leq \frac{\mathrm{mes}(G)}{1-k^2}$$

elde edilir.

3.5 $A^2(G)$ de Yaklaşım

Teorem 39: L eğrisi K-yarıkonform eğri, $z_0 \in G$ ve $\delta(z_0) := \mathrm{dist}(z_0, L)$ olsun.Bu durumda, $\forall\, n \geq 2$ ve $0 < \gamma < \frac{1}{2K^4}$ için

$$\text{i) } P_n(z_0,z_0) = 0,\ P_n'(z_0,z_0) = \varphi'(z_0,z_0),$$

$$\text{ii) } \|\varphi'(z,z_0) - P_n'(z,z_0)\|_{A^2} \leq c\,\delta^{-3/2}(z_0)\,n^{-\gamma} \tag{28}$$

şartlarını sağlayan bir $P_n(z,z_0)$ polinomu vardır.

İspat. $1 < R' < R_0$ kaydedilmiş sayı olsun ve φ fonksiyonu, $G_{R'}$ bölgesine

$$\tilde\varphi(z,z_0) := \begin{cases} \varphi(z,z_0), & z \in \overline{G} \\ \varphi(\alpha(z),z_0), & z \in G_{R'} - G \end{cases}$$

şeklinde genişletilsin.

Bu durumda,

$$\tilde{\varphi}_{\bar{z}}(z,z_0)=\begin{cases}0 & , \quad z\in G\\ \varphi'(\alpha(z),z_0)\alpha_{\bar{z}}, & z\in G_{R'}-\overline{G}\end{cases} \tag{29}$$

olur. Bu halde $\tilde{\varphi}(z,z_0)$ fonksiyonu için $G_{R'}$ bölgesinde teorem 17 kullanılarak

$$\varphi(z,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{R'}}\frac{\tilde{\varphi}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_{R'}-G}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,\quad z\in G \tag{30}$$

integral gösterimi yazılabilir ve buradan

$$\varphi'(z,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{R'}}\frac{\tilde{\varphi}(\zeta,z_0)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_{R'}-G}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)}{(\zeta-z)^2}d\sigma_\zeta,\quad z\in G.$$

Yeteri kadar büyük $n>N(R_0)$ ve keyfi $0<\varepsilon<1$ sayısı için $R:=1+c_1 n^{\varepsilon-1}$ sayısı $1<R<R'$ olacak şekilde seçilsin.

$$A(z,z_0):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{R'}}\frac{\tilde{\varphi}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_{R'}-G_R}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,\quad z\in G$$

ve

$$B(z,z_0):=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_R-G}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)}{\zeta-z}d\sigma_\zeta,\quad z\in G$$

alınırsa, (30) dan,

$$\varphi(z,z_0)=A(z,z_0)+B(z,z_0) \tag{31}$$

elde edilir. $A(z,z_0)$ fonksiyonuna, $\overline{G}$ bölgesinde analitik olduğundan, polinomlar ile yeteri kadar iyi yaklaşılabilir. Bu amaçla

$$Q_n(z,z_0):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_{R'}}\tilde{\varphi}(\zeta,z_0)K_{1,m,k,n}(\zeta,z)d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_{R'}-G_R}\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)K_{1,m,k,n}(\zeta,z)d\sigma_\zeta \tag{32}$$

polinomunu ele alalım. Buradaki $K_{1,m,k,n}(\zeta,z)$ Dzyadyık çekirdek polinomdur [20] ve $(\zeta-z)^{-j}$, $j=1,2,\ldots$ Cauchy çekirdek fonksiyonuna yeteri kadar iyi yaklaşır. Yarıkonform sınırlı bölgelerde Dzyadyık çekirdek polinomunun yaklaşım özellikleri, V.I.Belyi [21] tarafından incelenmiştir. [21] de, keyfi $z \in L, \zeta \in \overline{\Omega}_{1+1/n}$ noktaları ve yeteri kadar büyük $k = k(G) \geq 2$ doğal sayısı için

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\zeta - z} - K_{1,m,k,n}(\zeta, z)\right)\right| \preccurlyeq \frac{d^m(z, L_{1+1/n})}{|\zeta - z|^2(|\zeta - z| + |\tilde{\zeta} - \zeta|)^m}, \quad \zeta \in G_{R'} - G_R$$

olduğu gösterilmiştir. Burada

$$\tilde{\zeta} = \Psi[\Phi(\zeta)(1 + 1/n)]$$

dır.

$z' \in L_{1+1/n}$ noktası, $d(z, L_{1+1/n}) = |z - z'|$ olacak şekilde seçilir ve $z_1 := z$, $z_2 := z'$, $z_3 := \zeta$, $w_1 := \Phi(z)$, $w_2 := \Phi(z')$, $w_3 := \Phi(\zeta)$ alınırsa, teorem 34 yardımıyla

$$\left[\frac{|z - z'|}{|z - \zeta| + |\tilde{\zeta} - \zeta|}\right]^m \leq \left|\frac{z - z'}{z - \zeta}\right|^m \preccurlyeq \left|\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3}\right|^{mK^{-2}}$$

$$\preccurlyeq \left(\frac{1/n}{1/n^{1-\varepsilon}}\right)^{mK^{-2}} = n^{-\varepsilon m K^{-2}}$$

bulunur. Sonuç 1 e göre, $|\zeta - z| \succcurlyeq n^{-(1-\varepsilon)K^2}$ olduğu gözönüne alınırsa, $\forall \zeta \in G_{R'} - G_R$ noktası ve $m \geq [K^2 + 2K^4(1 - \varepsilon)]/\varepsilon$ sayısı için,

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\zeta - z} - K_{1,m,k,n}(\zeta, z)\right)\right| \preccurlyeq n^{-1} \qquad (33)$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür.

Bunlara göre;

$$|A'(z, z_0) - Q_n'(z, z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{L_{R'}} |\tilde{\varphi}(\zeta, z_0)| \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\zeta - z} - K_{1,m,k,n}(\zeta, z)\right)\right| |d\zeta|$$

$$+ \frac{1}{\pi}\iint_{G_{R'} - G_R} |\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta, z_0)| \left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\zeta - z} - K_{1,m,k,n}(\zeta, z)\right)\right| |d_\zeta|$$

$$:= J_1 + J_2$$

elde edilir.

ℓ, $L_{R'}$ eğrisinin uzunluğu olmak üzere, (33) yardımıyla;

$$J_1 \preccurlyeq \frac{1}{n}\int_{L_{R'}} |\tilde{\varphi}(\zeta, z_0)||d\zeta| \leq \frac{1}{n}\int_{L_{R'}} |d\zeta| = \frac{\ell}{n}$$

elde edilir. Öte yandan $|\Psi'(w)| \asymp \frac{d(z,L)}{|\Phi(z)|-1}$ [22] ve sonuç 1' in yardımıyla;

$$\ell = \int_{L_{R'}} |d\zeta| = \int_{|w|=R'} |\Psi'(w)||dw| \leq \frac{1}{(R'-1)^{1-(1/K^2)}} \int_{|w|=R'} |dw|$$

$$= 2\pi R'(R'-1)^{K^{-2}-1}$$

ve $R' > 1$ sayısı kaydedilmiş olduğundan, $J_1 \preccurlyeq \frac{1}{n}$ bulunur.

Schwartz eşitsizliği kullanılarak

$$J_2 \preccurlyeq \frac{1}{n} \iint_{G_{R'}-G_R} |\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta, z_0)||d\zeta|$$

$$\leq \frac{1}{n}\left[\iint_{G_{R'}-G_R} |\varphi'(\alpha(\zeta), z_0)|^2 d\sigma_\zeta\right]^{1/2}\left[\iint_{G_{R'}-G_R} |\alpha_{\bar{\zeta}}|^2 d\sigma_\zeta\right]^{1/2}$$

bulunur. Sonuç 3 ve teorem 38 den

$$\iint_{G_{R'}-G_R} |\varphi'(\alpha(\zeta), z_0)|^2 d\sigma_\zeta \preccurlyeq \operatorname{mes}\varphi(\alpha(G_{R'}-G_R), z_0) \preccurlyeq 1$$

$$\iint_{G_{R'}-G_R} |\alpha_{\bar{\zeta}}|^2 d\sigma_\zeta \preccurlyeq \operatorname{mes}\alpha(G_{R'}-G_R) \leq \operatorname{mes}G$$

ve dolayısıyla; $m \geq \frac{K^2(2K^2+1)}{\varepsilon}$ sayıları için

$$\left|A'(z,z_0)-Q_n'(z,z_0)\right| \preccurlyeq \frac{1}{n}, \quad z\in\overline{G}, \quad z_0\in G \tag{34}$$

eşitsizliğinin sağlandığı elde edilir.

$$\tilde{Q}_n(z,z_0):=Q_n(z,z_0)-Q_n(z_0,z_0)$$

alınırsa, $\tilde{Q}_n(z_0,z_0)=0$ ve (31) , (34) den,

$$\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-Q_n'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2} \preccurlyeq \left\|B'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}+\frac{1}{n} \tag{35}$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 18 'den yararlanarak (19), (20) yardımıyla,

$$\iint_G \left|B'(\cdot,z_0)\right|^2 d\sigma_z \preccurlyeq \iint_{G_R-G} \left|\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\zeta,z_0)\right|^2 d\sigma_\zeta$$

$$\preccurlyeq \iint_{G_R-G} \left|\varphi'(\alpha(\zeta),z_0)\right|^2 d\sigma_\zeta$$

$$\preccurlyeq \operatorname{mes}\varphi(\alpha(G_R-G),z_0)$$

ve bu durumda (35) den,

$$\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-Q_n'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2} \preccurlyeq \operatorname{mes}\varphi(\alpha(G_R-G),z_0)+\frac{1}{n} \tag{36}$$

olduğu bulunur.

$$P_n(z,z_0):=\begin{cases}\tilde{Q}_n(z,z_0)-(z-z_0)\left[\varphi'(z_0,z_0)-\tilde{Q}_n'(z_0,z_0)\right], & n>N(R_0)\\ (z-z_0)\varphi'(z_0,z_0) & , n\le N(R_0)\end{cases} \tag{37}$$

ele alınarak, Minkowski ve Schwartz eşitsizlikleri yardımı ile (34) ve (36) dan

$$\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-P_n'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2} \preccurlyeq \left\|\varphi'(\cdot,z_0)-\tilde{Q}_n'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}+\left|A'(z_0,z_0)-\tilde{Q}_n'(z_0,z_0)\right|+\left\|B'(z_0,z_0)\right\|_{A^2}$$

$$\preccurlyeq \frac{1}{n}+\left[\operatorname{mes}\varphi(\alpha(G_R-G),z_0)\right]^{1/2}+\left\|\tilde{\varphi}_{\bar{\zeta}}(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}\left[\iint_{G_R-G}\frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z_0\right|^4}\right]^{1/2}$$

$$\preccurlyeq \frac{1}{n} + \delta^{-1}(z_0)\left[\text{mes}\varphi(\alpha(G_R - G), z_0)\right]^{1/2} \tag{38}$$

bulunur. R sayısı ve sonuç 2 gözönüne alınarak (37) ve (38) den teoremin ispatı elde edilir.

Teorem 40: $L \in C_\theta(\lambda)$, $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, $\forall n \geq 2$ ve $0 < \mu < \text{Min}\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{1}{2}\right\}$ için

$$\text{i) } P_n(z_0, z_0) = 0\,,\ P_n'(z_0, z_0) = \varphi'(z_0, z_0)$$

$$\text{ii) } \left\| \varphi'(\cdot, z_0) - P_n'(\cdot, z_0) \right\|_{A^2} \leq c\left[\delta(z_0)\right]^{-\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}} n^{-\mu} \tag{39}$$

şartlarını sağlayan bir $P_n(z, z_0)$ polinomu vardır.

İspat. $L \in C_\theta(\lambda)$ olduğundan L eğrisi için teorem 28 in koşulu sağlanır. Yani L yarıkonform eğridir (herhangi bir $K_1 > 1$ yarıkonformluk katsayısı ile). Buna göre (38) den $P_n(z_0, z_0) = 0$ ve $P_n'(z_0, z_0) = \varphi'(z_0, z_0)$ olmak üzere,

$$\left\| \varphi'(\cdot, z_0) - P_n'(\cdot, z_0) \right\|_{A^2} \preccurlyeq \frac{1}{n} + \delta^{-1}(z_0)\left[\text{mes}\varphi(\alpha(G_R - G), z_0)\right]^{1/2} \tag{40}$$

elde edilir.

$z_0 \in G$ noktası kaydedildiği durumda, $\text{mes}\varphi(\alpha(G_R - G))$ nin değerlendirilmesi z_0 dan bağımsız halde [18] de verilmiştir.

$z_0 \in G$ noktası keyfi nokta olduğu durumda ise, $\text{mes}\varphi(\alpha(G_R - G))$ için [6] da yapılmış değerlendirme yöntemi, uygun ilaveler yapılarak kullanılacaktır.

$z_\lambda \in L$ noktası, $\lambda\pi$, $\underset{j}{\text{Min}}\,\lambda_j = \lambda$, $0 < \lambda_j < 2$ dış açıya sahip sonlu sayıdaki noktalardan biri, $b_j(z_\lambda), j = 1,2$ yayları L eğrisinin z_λ noktasında birleşen ve $\lambda\pi$ dış açısını oluşturan sonlu uzunluklu alt yayları, $\Phi(z_\lambda) = 1$; b_t, uzunluğu en küçük olan $\Phi(b_j(z_\lambda)), j = 1,2$ yayı ve $E_t := \left\{re^{i\theta} : |\theta| < \text{mes}b_t,\ 1 < r < R\right\}$, $E_z = \Psi(E_t)$, $E_{z^*} = \alpha(E_z)$, $E_w = \varphi(E_{z^*})$ olsun.

Ayrıca (z) düzleminin (ζ) düzlemine $\zeta=\zeta(z^*,z_0)=(z^*-z_\lambda)^{\frac{1}{2-\lambda}}$ ve (ζ) düzleminin (w) düzlemine $w=w(\zeta,z_0)$, $w(\zeta(z_0,z_0))=0$ dönüşümleri alalım ve $E_\zeta=\zeta(E_{z^*})$, $E_w=w(E_\zeta)$, $\zeta_0:=\zeta(z_0,z_0)=(z_0-z_\lambda)^{\frac{1}{2-\lambda}}$ gibi işaretliyelim. Bu durumda, $G_\zeta:=\zeta(G)$ bölgesi düzgün sınırlı bölgedir ve teorem 30 dan $L_\zeta:=\partial G_\zeta$ eğrisi keyfi $0<\varepsilon<1$ için $(1+\varepsilon)$-yarıkonform eğri olur. Teorem 37 yardımıyla, $|w'|:=\operatorname{Min}\left\{|w|:w\in\overline{E}_w\right\}$ ve $\zeta'=w^{-1}(w')$ olmak üzere;

$$\operatorname{mes}E_w \preccurlyeq \delta^{-1}(\zeta_0)\delta^{1-\varepsilon}(\zeta'),\quad \forall\varepsilon>0 \tag{41}$$

elde edilir.

L_ζ eğrisi $(1+\varepsilon)$-yarıkonform olduğundan $w(\zeta)$, $w^{-1}(\zeta)$ dönüşümleri kendi düzlemlerinde $(1+\varepsilon)^2$-yarıkonform dönüşümlerine kadar genişletilebilir [5, s.75]. Bu durumda Goldstein teoreminden [23]

$$\operatorname{mes}w(E_\zeta) \preccurlyeq (\operatorname{mes}E_\zeta)^\eta,\quad 0<\eta<(1+\varepsilon)^{-2} \tag{42}$$

yazılabilir. Öte yandan ∂E_w yarıkonform olduğundan,

$$\operatorname{mes}E_w \geq \varepsilon_1(1-|w'|) \tag{43}$$

koşulunu sağlayacak şekilde bir $\varepsilon_1>0$ sayısının mevcut olduğu gösterilebilir. Sonuç 1 yardımıyla $(1-|w'|)\geq c_2\,\delta^{(1+\varepsilon)^2}(\zeta')$ elde edilir ve (41)-(43) den,

$$\operatorname{mes}E_w \preccurlyeq \delta^{-1}(\zeta_0)(\operatorname{mes}E_\zeta)^{1-\varepsilon},\quad \forall\varepsilon>0$$

bulunur. $\operatorname{mes}E_\zeta$ nin üstten değerlendirilmesi $\operatorname{mes}F_w$ nin [18] de yapılan değerlendirmesine benzer şekilde yapılır. Bu durumda (z) düzlemine geçerek ve [18] deki $\operatorname{mes}F_w$ nin değerlendirmesinden

$$\operatorname{mes}E_w \preccurlyeq \delta^{-\frac{1}{2-\lambda}}(z_0)(R-1)^{\mu'},\quad 0<\mu'<\operatorname{Min}\left\{\frac{2\lambda}{2-\lambda},1\right\}$$

elde edilir. $0<\varepsilon<1$ keyfi ve $R=1+c_1n^{\varepsilon-1}$ olduğu gözönüne alınarak (40) dan

$$\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-P_n'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2} \preccurlyeq \frac{1}{n^\mu}\delta^{-\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}}(z_0),\quad \mu<\operatorname{Min}\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda},\frac{1}{2}\right\}$$

bulunur ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 41: L, bir K-yarıkonform eğri ve $\gamma(z)=|D(z)|^2$ ağırlık fonksiyonu, $D(z)\in A(\overline{G})$, $D(z)\in Lip\alpha$, $0<\alpha\leq 1$, $D(z)\neq 0$, $z\in\overline{G}$ koşullarını sağlıyor ise,

$$\forall n\geq 2 \text{ ve } 0<\lambda<\begin{cases}\dfrac{1}{2K^4}, & \alpha\leq\dfrac{1}{2K^2}\\[2mm] \dfrac{\alpha}{K^2}, & \alpha>\dfrac{1}{2K^2}\end{cases} \text{ için}$$

$$\text{i) } T_n(z_0,z_0)=\frac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}$$

$$\text{ii) } \left\|\frac{\varphi'(\cdot,z_0)}{D}-T_n(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}\preccurlyeq n^{-\lambda}\delta^{-\frac{3}{2}}(z_0)$$

şartlarını sağlayan bir $T_n(z,z_0)$ polinomu vardır.

İspat. $D(z)\in Lip\alpha$ ve $D(z)\neq 0$, $z\in\overline{G}$ olduğundan $\frac{1}{D(z)}\in Lip\alpha$, $z\in\overline{G}$ dır. Bu durumda Teorem 3. [17] ' ye göre;

$$\left\|\frac{1}{D}-\tilde{R}_m\right\|_C=\operatorname*{Max}_{z\in\overline{G}}\left|\frac{1}{D(z)}-\tilde{R}_m(z)\right|\preccurlyeq d^{\alpha}(z,L_{1+1/m}) \qquad (44)$$

koşulunu sağlayacak bir $\tilde{R}_m(z)$ polinomu mevcuttur.

$$R_m(z,z_0):=\tilde{R}_m(z)-\tilde{R}_m(z_0)+\frac{1}{D(z_0)} \qquad (45)$$

gibi tanımlanırsa,

$$R_m(z_0,z_0)=\frac{1}{D(z_0)}$$

koşulunun sağlandığı ve sonuç 1'in yardımıyla

$$\left\|\frac{1}{D}-R_m\right\|_C\preccurlyeq m^{-\alpha K^{-2}} \qquad (46)$$

olduğu bulunur.

Teorem 39 da adı geçen $P_\ell(z,z_0)$ polinomu gözönüne alınarak (46) ve teorem 39 dan, $0<\varepsilon<1$ keyfi sayısı için

$$\left\| \frac{\varphi'(\cdot,z_0)}{D} - P_\ell'(\cdot,z_0)R_m(\cdot,z_0) \right\|_{A^2} =$$

$$\left\| \frac{\varphi'(\cdot,z_0) - P_\ell'(\cdot,z_0)}{D} + \left[P_\ell'(\cdot,z_0) - \varphi'(\cdot,z_0)\right]\left[\frac{1}{D} - R_m(\cdot,z_0)\right] + \varphi'(\cdot,z_0)\left[\frac{1}{D} - R_m(\cdot,z_0)\right] \right\|_{A^2}$$

$$\leq \left\|\varphi'(\cdot,z_0) - P_\ell'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}\left(\left\|\frac{1}{D}\right\|_C + \left\|\frac{1}{D} - R_m(\cdot,z_0)\right\|_C\right)$$

$$+\left\|\frac{1}{D} - R_m(\cdot,z_0)\right\|_C \left\|\varphi'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}$$

$$\preccurlyeq \ell^{-\frac{(1-\varepsilon)}{2K^4}}\delta^{-\frac{3}{2}}(z_0) + m^{-\alpha K^{-2}}\left(1 + \ell^{-\frac{(1-\varepsilon)}{2K^4}}\delta^{-\frac{3}{2}}(z_0)\right) \qquad (47)$$

elde edilir.

$$m := \begin{cases} n \quad , & \alpha \leq \dfrac{1}{2K^2} \\ n^{\frac{1}{2\alpha K^2}} + 1, & \alpha > \dfrac{1}{2K^2} \end{cases}$$

ve $T_n := P_\ell' R_m$ alınırsa, $T_n(z_0,z_0) = \dfrac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}$ ve (47) den,

$$\left\| \frac{\varphi'(\cdot,z_0)}{D} - T_n(\cdot,z_0) \right\|_{A^2} \preccurlyeq \delta^{-\frac{3}{2}}(z_0) \begin{cases} n^{-\frac{1}{2K^4}}, & \alpha \leq \dfrac{1}{2K^2} \\ n^{-\frac{\alpha}{K^2}}, & \alpha > \dfrac{1}{2K^2} \end{cases}$$

elde edilir.

Sonuç 4: $L \in C_\theta(\lambda), 0 < \lambda < 2$ ve $\gamma(z)$ fonksiyonu, teorem 41 ın koşullarını sağlayan ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda; $0 < \mu < \mathrm{Min}\left\{\dfrac{\lambda}{2-\lambda}, \dfrac{1}{2}\right\}$, $0 < \mu' < \alpha\ \mathrm{Min}\{1,\lambda\}$ olmak üzere; $\forall n \geq 2$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $T_n(z,z_0)$ polinomu mevcuttur

$$\text{i) } T_n(z_0,z_0)=0,\quad T_n'(z_0,z_0)=\varphi'(z_0,z_0),$$

$$\text{ii)}\left\|\frac{\varphi'(\cdot,z_0)}{D}-T_n(\cdot,z_0)\right\|_{L^2}\preccurlyeq \delta^{-\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}}(z_0)\begin{cases} n^{-\mu'} & ,\ \mu'\le\mu \\ n^{-\mu} & ,\ \mu'>\mu\end{cases}$$

İspat. Bu sonucun ispatı, teorem 41 in ispatı gözönüne alınarak, $L\in C_\theta(\lambda)$ haline uygun değerlendirmeler yapılarak elde edilir:

(44)-(46) dan, teorem 35 e göre $d(z,L_{1+1/m})\preccurlyeq\frac{1}{m^\eta}$, $\eta=\mathrm{Min}\{1,\lambda\}$ olduğu kullanılarak,

$$\left\|\frac{1}{D}-R_m\right\|_C\preccurlyeq d^\alpha(z,L_{1+1/m})\preccurlyeq m^{-\mu'},\quad 0<\mu'<\alpha\,\mathrm{Min}\{1,\lambda\} \tag{49}$$

elde edilir. Teorem 40 'da adı geçen $P_n(z,z_0)$ polinomu alınarak (47) ye benzer biçimde, $0<\mu<\mathrm{Min}\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda},\frac{1}{2}\right\}, 0<\mu'<\alpha\,\mathrm{Min}\{1,\lambda\}$ keyfi sayılar olmak üzere;

$$\left\|\frac{\varphi'(\cdot,z_0)}{D}-P_\ell'(\cdot,z_0)R_m(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}\le\left\|\varphi'(\cdot,z_0)-P_\ell'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}\left(\left\|\frac{1}{D}\right\|_C+\left\|\frac{1}{D}-R_m(\cdot,z_0)\right\|_C\right)$$

$$+\left\|\frac{1}{D}-R_m(\cdot,z_0)\right\|_C\left\|\varphi'(\cdot,z_0)\right\|_{A^2}$$

$$\preccurlyeq\ell^{-\mu}(1+m^{-\mu'})\delta^{-\frac{5-2\lambda}{2(2-\lambda)}}(z_0)+m^{-\mu'} \tag{50}$$

bulunur.

$$m:=\begin{cases} n & ,\ \mu'\le\mu \\ n^{\frac{\mu}{\mu'}}+1, & \mu'>\mu\end{cases}$$

ve $T_n:=P_\ell' R_m$ alınarak (50) den (48) elde edilir.

3.6 $\{K_n(z)\}$ Polinomlar Sisteminin özelliği

Teorem 42: L bir K-yarıkonform eğri, $z_0\in G$ keyfi bir nokta ve $\gamma(z)=|D(z)|^2$ ağırlık fonksiyonu, $D(z)\in A(\overline{G})\cap \mathrm{Lip}\alpha$, $0<\alpha\le1$, $D(z)\ne0$, $\forall z\in\overline{G}$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda $\forall n=1,2,\dots$ için

$$\left|K_n(z_0)\right| \le c\delta^{-\frac{5}{2}}(z_0)\begin{cases}(1/n)^{\frac{1}{2K^4}}, & \alpha < \dfrac{1}{2K^2}\\[2mm] (1/n)^{\frac{\alpha}{K^2}}, & \alpha \ge \dfrac{1}{2K^2}\end{cases} \tag{51}$$

sağlanır. Burada ki $c = c(G,K,D) > 0$ sabiti z_0 ve n den bağımsızdır.

İspat.

$$J(f) := \iint_G \left|D(z)f(z)\right|^2 d\sigma_z \tag{52}$$

integraline

$$\tilde{A}^2(\gamma,G) = \left\{ f \in A^2(\gamma,G) : f(z_0) = \frac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)} =: \lambda_0 \right\}$$

sınıfında minimum değerini veren fonksiyonun bulunması problemine bakalım.

$D(z)f(z) \in A^2(G)$ olduğundan $D(\psi(w))f(\psi(w))\psi'(w)$ fonksiyonu B birim dairesinde analitiktir. Bu durumda $a_0 = \dfrac{D(z_0)\,f(z_0)}{\varphi'(z_0,z_0)} = 1$ olmak üzere;

$$D(\psi(w))f(\psi(w))\psi'(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k$$

dır ve (52) den

$$J(f) = \iint_B \left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k\right|^2 d\sigma_w = \pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|a_k\right|^2}{k+1} \ge \pi \tag{53}$$

elde edilir. Buna göre, (52) integraline minimum değerini veren fonksiyon,

$$f_0(z) := \frac{\varphi'(z,z_0)}{D(z)}$$

fonksiyonudur [23]. Öte yandan, $P_{n-1}(z_0) = \lambda_0$ koşulunu sağlayan (n-1) dereceli polinomlar kümesinde (52) integraline minimum değerini veren polinom,

$$P^*_{n-1}(z) = \lambda_0 \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \overline{K_j(z_0)}\,K_j(z)}{\sum_{j=0}^{n-1} \left|K_j(z)\right|^2} \tag{54}$$

polinomudur ve bu minimum değer

$$J(P_{n-1}^*(z)) = \iint_G \gamma(z)|P_{n-1}^*(z)|^2 d\sigma_z = \frac{|\lambda_0|^2}{\sum_{j=0}^{n-1}|K_j(z_0)|^2} \tag{55}$$

dır [23]. Ayrıca

$$|f_0(z) - P_n^*(z)|^2 = |P_n^*(z)|^2 - |f_0(z)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{f_0(z)}\left[f_0(z) - P_n^*(z)\right]\right) \tag{56}$$

özdeşliği ve teorem 14 e göre

$$2\iint_G |D(z)|^2 \mathrm{Re}\,\overline{f_0(z)}\left[f_0(z) - P_{n-1}^*(z)\right]d\sigma_z = 2\iint_G |D(z)|^2 |f_0(z)|^2 \mathrm{Re}\left[1 - \frac{P_{n-1}^*(z)}{f_0(z)}\right]d\sigma_z$$

$$= 2\iint_G |\varphi'(z,z_0)|^2 \mathrm{Re}\left[1 - \frac{P_{n-1}^*(z)}{f_0(z)}\right]d\sigma_z$$

$$= 2\iint_B \mathrm{Re}\left[1 - \frac{P_{n-1}^*(\Psi(w))}{f_0(\Psi(w))}\right]d\sigma_w$$

$$= 2\pi\,\mathrm{Re}\left[1 - \frac{P_{n-1}^*(\Psi(0))}{f_0(\Psi(0))}\right]$$

$$= 2\pi\,\mathrm{Re}\left(1 - \frac{P_{n-1}^*(z_0)}{f_0(z_0)}\right) = 0$$

elde edilir. Buradan, (56) özdeşliği $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp integral alınırsa

$$\iint_G \gamma(z)|f_0(z) - P_{n-1}^*(z)|^2 d\sigma_z = \iint_G \gamma(z)|P_{n-1}^*(z)|^2 d\sigma_z - \pi \tag{57}$$

ve (53), (57) den $T_{n-1}(z)$ keyfi polinom olmak üzere,

$$\pi \le \iint_G \gamma(z)|P_{n-1}^*(z)|^2 d\sigma_z \le \pi + \iint_G \gamma(z)|f_0(z) - T_{n-1}(z)|^2 d\sigma_z$$

elde edilir. $T_{n-1}(z)$ polinomu olarak, teorem 41 deki $T_{n-1}(z)$ polinomu alınırsa, (55) den, (51) de $\nu := \frac{1}{2K^4} - \varepsilon$ sayısı seçilirse,

$$\frac{|\lambda_0|^2}{\sum_{j=0}^{n-1}|K_j(z_0)|^2} = \pi + O\left[\delta^{-3}(z_0)\,n^{-2\nu}\right]$$

dır. Buradan

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left|K_j(z_0)\right|^2=\frac{|\lambda_0|^2}{\pi}-O\left[|\lambda_0|^2\delta^{-3}(z_0)n^{-2\nu}\right] \qquad (58)$$

bulunur. $\forall m>n-1$ için $\sum_{j=0}^{m}\left|K_j(z_0)\right|^2$ serisi (58) biçiminde yazılır ve ondan (58) çıkarılırsa,

$$\sum_{j=n}^{m}\left|K_j(z_0)\right|^2=O\left[|\lambda_0|^2\delta^{-3}(z_0)n^{-2\nu}\right]-O\left[|\lambda_0|^2\delta^{-3}(z_0)m^{-2\nu}\right]$$

ve $m\to\infty$ limite geçerek, teorem 36 yardımıyla, $|\lambda_0|=\left|\frac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}\right|\preccurlyeq\delta^{-1}(z_0)$ olduğu gözönüne alınarak,

$$\sum_{j=n}^{\infty}\left|K_j(z_0)\right|^2\preccurlyeq\delta^{-5}(z_0)n^{-2\nu} \qquad (59)$$

elde edilir.Seri pozitif terimlerden oluştuğundan, (59) eşitsizliği herbir $\left|K_j(z)\right|^2$, $j=n,n+1,\ldots$ için sağlanır. Böylece, (51) de $\nu:=\frac{1}{2K^4}-\varepsilon$ sayısı alınırsa, teoremin ispatı yapılmış olur.

Teorem 43: $L\in C_\theta(\lambda)$, $0<\lambda<2$ ve $\gamma(z)=|D(z)|^2$ ağırlık fonksiyonu, $D(z)\in A(\overline{G})\cap \mathrm{Lip}\alpha$, $0<\alpha\le 1$, $D(z)\neq 0$, $\forall z\in\overline{G}$ olsun. Bu durumda, $\forall z_0\in G$ ve $\forall n=1,2,3,\ldots$ için

$$\left|K_n(z_0)\right|\le c\,\delta^{-\frac{9-4\lambda}{2(2-\lambda)}}\begin{cases} n^{-\mu'}, & \begin{array}{ll}\alpha\le\frac{1}{2-\lambda} & ,\ \lambda\le\frac{2}{3}\\ \alpha\le\frac{1}{2\lambda} & ,\frac{2}{3}<\lambda<1\\ \alpha\le\frac{1}{2} & ,\lambda\ge 1\end{array}\\[2ex] n^{-\mu}, & \text{aksi halde}\end{cases} \qquad (60)$$

dır. Burada, $0<\mu<\mathrm{Min}\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda},\frac{1}{2}\right\}$, $0<\mu'<\alpha\,\mathrm{Min}\{1,\lambda\}$ ve c sabiti, z_0 ve n den bağımsızdır.

İspat. Bu teoremin ispatı teorem 42 deki gibidir, fakat;

$$\iint_G \gamma(z)\left|f_0(z)-T_{n-1}(z)\right|^2 d\sigma_z$$

integralinin değerlendirilmesinde $T_{n-1}(z)$ olarak sonuç 4 de adı geçen polinom alınmalıdır.

Sonuç 5: Teorem 43 'ün koşulları dahilinde, $\lambda=1$ için, yani, $L\in C_\theta$ olduğunda

$$\left|K_n(z_0)\right|\le c\,\delta^{-\frac{5}{2}}(z_0)\begin{cases} n^{-\frac{1}{2}}, & \alpha>\frac{1}{2} \\ n^{-\alpha}, & \alpha\le\frac{1}{2} \end{cases} \tag{61}$$

sağlanır.

i) (61) değerlendirmesi $\alpha\le\frac{1}{2}$ için teorem 2.1 [6] daki değerlendirmeden daha iyidir.

ii) $\gamma(z)=1$ için teorem 43, [18] de ispatlanmış, fakat (60) eşitsizliğinin sağ tarafının, z_0 noktasından bağımlılığı belirtilmemiştir.

iii) Teorem 42 ve teorem 43, $\{K_n(z)\}$ polinomlar sisteminin, hangi $F\subset G$ kompakt altkümelerinde, sıfıra yaklaşmasının mümkün olduğunu gösterir. Dolayısıyla, bu polinomların hangi kompakt kümelerde düzgün sınırlı olduğu elde edilmiş olur.

4. İRDELEME

$G \subset \mathbb{C}$, sınırı Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölgeye ve $\gamma(z) = |D(z)|^2, D(z) \in A(\overline{G})$, $D(z) \neq 0, \forall z \in G$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan $\{K_n(z)\}$ polinomlar sisteminin $\forall z_0 \in G$ noktasında sıfıra inme hızı (veya düzgün sınırlılığı) probleminin çözümü; Teorem 42'de görüldüğü gibi, (52) formülü ile verilen extremal problemin çözümüne getirildikten sonra

$$\iint_G \gamma(z) \left| \frac{\varphi'(z, z_0)}{D(z)} - T_{n-1}(z) \right|^2 d\sigma_z$$

integralini üstten değerlendirmek için, önce $\varphi'(z, z_0)$ fonksiyonuna sonrada $\frac{\varphi'(z, z_0)}{D(z)}$ fonksiyonuna $A^2(G)$normunda yaklaşan $P_n(z, z_0)$ (teorem 39, 40) ve $T_n(z, z_0)$ (teorem 41 ve sonuç 4) polinomlarının inşası yapıldı ve bu polinomların uygun fonksiyonlara noktasal yaklaşım hızı elde edildi. Burada Teorem 40 ve sonuç 4 uygun olarak teorem 39 ve teorem 41'den yarıkonform eğrilerin yerel tanımından yaralanılarak elde edildiğinden yarıkonform eğrilerin yerel tanımı kullanıldı.

Teorem 39 ve teorem 41'de $\varphi'(z, z_0)$ ve $\frac{\varphi'(z, z_0)}{D(z)}$ fonksiyonlarının yaklaşım problemleri çözülürken, φ Riemann dönüşüm fonksiyonunun yerel özelliklerini veren teorem 34-38 ile beraber yarıkonform sınırlı bölgelerde Beyli [17,21] teoremleri kullanıldı.

5. SONUÇLAR

$G \subset \mathbb{C}$ sınırı Jordan eğrisi olan sınırlı bölge, $\{K_n(z)\}$, $n = 1,2,...$ polinomlar sistemi $\gamma(z) = |D(z)|^2$, $D(z) \in A(\overline{G})$, $D(z) \neq 0$, $\forall z \in G$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal polinomlar sistemi, $\varphi(z, z_0)$ ise teorem 25'de belirlenen Riemann dönüşüm fonksiyonu olsun.

1) Yarıkonform sınırlı bölgelerde Cauchy-Pompeiu formülü, Dzyadyk-Kernel polinomu ve (32) formülü ile tanımlanan polinomdan yararlanarak $\varphi'(z, z_0)$ fonksiyonuna $A^2(G)$ uzayında yaklaşan $P_n(z, z_0)$ polinomu inşa edildi ve bu polinomun $\varphi'(z, z_0)$ fonksiyonuna $A^2(G)$normunda noktasal yaklaşım hızı belirlendi.

2) Yarıkonform eğrilerin tanımından yararalanarak parçalı-düzgün sınırlı bölgelerde $\varphi'(z, z_0)$ fonksiyonuna yaklaşan bir $Q_n(z, z_0)$ polinomu elde edildi ve bu polinomun $\varphi'(z, z_0)$ fonksiyonuna $A^2(G)$normunda noktasal yaklaşım hızı belirlendi.

3) 1ve 2 şıklarında elde edilen polinomların yardımıyla $\frac{\varphi'(z, z_0)}{D(z)}$ fonksiyonuna $A^2(G)$ uzayında yaklaşan $T_n(z, z_0)$ polinomu inşa edildi ve bu polinomun gösterilen fonksiyona noktasal yaklaşım hızı yarıkonform ve parçalı-düzgün sınırlı bölgelerde belirlendi.

4) $T_n(z, z_0)$ polinomu yardımıyla (52) formülü ile verilen extremal problemin çözümüne ulaşıldı ve buradan, önce $\sum_{j=n}^{\infty} |K_j(z)|^2$ toplamı üstten değerlendirildi ve sonuç olarak $\{K_n(z)\}$ polinomlar sisteminin bölgenin içinde düzgün sınırlılığı (veya sıfıra inmesi) gösterildi.

6. ÖNERİLER

1) $G \subset \mathbb{C}$ sınırı Jordan eğrisi olan sınırlı bölge, $\{K_n(z)\}$, $n = 1,2,...$ polinomlar sistemi G bölgesinde verilmiş $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal polinomlar sistemi olsun. $K_n(z)$ polinomlarının G bölgesinin iç noktalarında sıfıra inmesi ve dolayısıyla düzgün sınırlılığı, ele alınan G bölgesinin ve $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonunun özelliklerinden bağımlı olarak belirlendikten sonra, doğal olarak aşağıdaki problem incelenebilir:

G bölgesinin kapanışında $K_n(z)$ polinomları hangi özelliğe sahip olacaktır. Yani; bu polinomlar $\gamma(z)$ ve $L := \partial G$ den bağımlı olarak sınırlı kalacaklarmıdır veya modülleri hangi hızla artacaktır.

2) Verilmiş G bölgesi ve $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan $\{K_n(z)\}$, $n = 1,2,...$ polinomlar sisteminin ve $\{a_n\} \in \mathbb{C}$, $n = 1,2,...$ sayılar sisteminin oluşturduğu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n K_n(z)$ serisinin, hangi sınıftan olan fonksiyonlara düzgün yakınsaklığı (bölgenin içinde veya kapanışında) ve daha genel olarak bu yakınsamanın hızının, ağırlık fonksiyonundan ve ele alınan bölgenin özelliklerinde bağımlı olarak bulunması incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Gleason, A. M., Fundamentals of Abstract Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, New York., 1966.

[2] Ahlfors, L V., Complex Analysis, second edition, McGraw-Hill Kogakusha Ltd., Tokyo, 1966.

[3] Depree, J. D. ve Oehring, C. C., Elements of Complex Analysis, Addison Wesley Publishing Company, New York., 1969.

[4] Alıprantıs, C. D ve Burkınshaw, O., Prıncıples of Real Analysıs, Academıc press, Inc, Boston.,1990

[5] Ahlfors, L. V., Lectures on Quasiconformal Mappings, Van Nostrand Company, California., 1987.

[6] Suetin, P. K., Polynomials Orthogonal over a Region and Bieberbach Polynomials, American Math. society, Rhode Island., 1974.

[7] Gaier, D., Lectures on Complex Approximation, Birkhauser Boston, Inc., 1987.

[8] Davıs, P. J., Interpolation and Approximation, Blaisdell Publishing Company.,New York.,1963

[9] Fulk, W., Complex Variables, Marcel Dekker, Inc., Boston., 1993.

[10] Torchinsky, A., Real-Variable Methods in Harmonic Analysis, Academic Press, Inc., Indiana ., 1986 .

[11] Lehto, O. ve Virtanen, K. I., Quasiconformal Mappings in The Plane, Second edition, New York ., 1973.

[12] Smirnov, V. I ve Lebedev, N. V., Functions of a Complex Variable, Consrtuctıve Theory. The M.I.T Press ,1968.

[13] Carleman, T., Über die Approximation Analytischer Funktionen durch lineare Aggregate van vofgegebenen, Potenzen-Aktiv mat., I-30 9 17 (1923)

[14] Markushevich, A. I., Theory of functions of A Complex Variable, 3, Prentıce-Hall, Inc., 1965.

[15] Rickman, S., Characterisation of quasiconformal arcs, Annal. Acad. Scien. Fenn. series A, Matematica 395., 1966

[16] Abdullayev, F. G., On the orthogonal polynomials in domains with quasiconformal boundary . (Russian).,Dissertation, Donetsk ,1986.

[17] Belyi, V. I., Conformal mappings and the approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary. Math. USSR-Sb 31, (1977), 289-317.

[18] Gaier, D., On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners. Const. Approx., 4 (1988) 289-305.

[19] Abdullayev, F. G., ve Andrievskii, V. V., On the orthogonal polynomials in the domains with K- quasiconformal boundary. Izv. Akad. Nauk Azerb USSR, Ser F.T.M. 1, (1983), s 3-7

[20] Dzyadyık, V. K., Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by polynomials. (Russian). Nauka. Moscow, 1977.

[21] Belyi, V. I., Approximation of functions in the class $A^r(\overline{G})$ in bounded domains with quasiconformal boundary. Metric questions of theory of functions and mappings.Naukova .Dumka, Kiev ,(1979), 3 - 18

[22] Andrievskii, V. V., On the approximation function which partical sum series of Faber's polynomials in continuum which non zeros local geometrical characterisation, Ukraine Math Journal 32 1 (1980) 3 -8.

[23] Goluzim, G. M., Geometric Theory of Complex Valued Functions, M.L. Academıc press, Inc., New York., 1952.

ÖZGEÇMİŞ

1972 yılında Rize'de doğdu. 1989 yılında Rize lisesini bitirdi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Bölümüne girdi. 1993 yılında ikincilik derecesi ile mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalında Yüksek Lisans Programına başladı.

1995 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesine Araştırma Görevlisi olarak atandı. Halen bu görevine devam etmekte olup yabancı kaynakları kullanabilecek düzeyde ingilizce bilmektedir.

ÖZET

Bergman polinomları ve onların bazı özellikleri adlı bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, diğer iki bölüme hazırlık niteliğinde olup; bu bölümde, analitik fonksiyonlar, kompleks düzlemde eğriler ve eğriler ailesi, kompleks değişkenli fonksiyonların integrali, mutlak sürekliliği, türevlenebilmesi, L^p- türevlere sahip olması ve Cauchy, Cauchy-Pompeiu formülleri ile ilgili bazı tanım ve teoremler (ispatlı veya ispatsız) verildi.

İkinci bölümde $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi için $A^2(G)$ fonksiyon uzayı tanıtıldı ve bu uzayın bir Hilbert uzayı olduğu gösterildi. $A^2(G)$ uzayında verilmiş $\{f_k(z)\}$, $k = 0,1,2,...$ lineer bağımsız sisteminden Gram-Schmidt ortogonalleştirme metodu yardımıyla $A^2(G)$ uzayında ortonormal olan $\{g_k(z)\}$, $k = 0,1,2,...$ ortonormal sistemi inşaa edildi. Buradan özel olarak, G üzerinde ortonormal olan $\{K_n(z)\}$ Bergman polinomları elde edildi. Bu polinomların basit özellikleri (sıfırları, extremallığı) verildi. $A^2(G)$ uzayının tanımına benzer şekilde, $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonunu $A^2(\gamma, G)$ fonksiyon uzayı tanıtıldı ve bu uzayda $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal olan polinomlar verildi.

Üçüncü bölüme bir girişle başlanarak, bu çalışmanın amacı olan problem sunuldu ve Riemann dönüşüm teoremleri, yarıkonform dönüşümler, yarıkonform eğriler, eğriler ailesinin modülü ve Riemann dönüşüm fonksiyonlarının bazı yerel özellikleri verildikten sonra, $A^2(G)$ uzayında bir özel fonksiyonun yaklaşımı ile ilgili iki teorem ispatlandı. Son olarak, G üzerinde ağırlık fonksiyonlu Bergman polinomlarının bölgenin iç noktalarında hangi hızla sıfıra indiği, G bölgesinin ve $\gamma(z)$ ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak bulundu.

Anahtar Kelimeler: Analitik fonksiyon, Konform dönüşüm, Yarıkonform dönüşüm, Yarıkonform eğri, Yarıkonform yansıma, Ortonormal sistemler, Ağırlık fonksiyonu, Ağırlık fonksiyonlu ortonormal (Bergman) polinomları.

SUMMARY

This study entitled as "Bergman's polynomials and their some properties" consists of three chapters.

The first chapter as a preliminary from of the next chapters includes some definition and theorems (with or without proof) concerning the analytic functions, curves and the families of curves in the complex plane. The absolutely continuous, differentiable, L^p- differentiable and integrals of the complex valued functions; Cauchy and Cauchy Pompeiu's formulas are given.

In the second chapter, $A^2(G)$ function space is introduced and it is proved that this space is a Hilbert space. $\{g_k(z)\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ which is orthonormal system in $A^2(G)$ is constructed from the $\{f_k(z)\}$, $k = 0,1,2,\ldots$ which is linearly independent system in $A^2(G)$ by the Gram-Scmidt orthogonalization process. Then a special case $\{K_n(z)\}$ Bergman's polynomials that are orthonormal in G are constructed. Some elementary properties of these polynomials are presented (their zeros and external). As in $A^2(G)$, $A^2(\gamma,G)$ space with $\gamma(z)$ weight function is introduced, and orthonormal polynomials with respect to $\gamma(z)$ weight function are given.

The third chapter starts with an introduction. Then the problem as the main objective of the study is established. Having given the theorems of Riemann mapping, the quasiconformal mappings, the quasiconformal curves, the module of families of curves, some local properties of the function of Riemann mapping, two theorems bear on the approximation of special function are given in $A^2(G)$ space. Finally, by which speed Bergman's polynomials with weight function in domain G are approaching to 0 for interior point of the domain is found regarding to the properties of G and weight function.

Key Words: An analytic function, a conformal mapping, a quasiconformal mapping, a quasiconformal curve, a quasiconformal reflection, orthonormal system, a weight function, orthonormal (Bergman) polynomials with a weight function.