BANACH UZAYLARINDA TOTAL ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Esra YOLAÇAN

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ
2015

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BANACH UZAYLARINDA TOTAL ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Esra YOLAÇAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM

2015

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

BANACH UZAYLARINDA TOTAL ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ danışmanlığında, Esra YOLAÇAN tarafından hazırlanan bu çalışma 28/01/2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Seyit TEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Tevfik İŞLEYEN	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu ..19../..02../2015.. tarih ve ..07../..310.......... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. İhsan EFEOĞLU
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

BANACH UZAYLARINDA TOTAL ASİMPTOTİK GENİŞLEMEYEN DÖNÜŞÜMLER İÇİN SABİT NOKTA YAKLAŞIMLARI

Esra YOLAÇAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ

Bu tezde, düzgün konveks bir Banach uzayın boş olmayan kapalı konveks alt kümesinde, total asimptotik genişlemeyen dönüşümler ve genişlemeyen dönüşümlerin sonlu bir ailesinden oluşan dönüşümler için hata terimli sonlu adım iterasyon dizisinin ortak sabit noktaya kuvvetli yakınsamaları incelendi. Ayrıca, düzgün konveks bir Banach uzayda kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için hata terimli modifiye edilmiş Mann ve hata terimli modifiye edilmiş Ishikawa iterasyon dizilerinin kuvvetli yakınsama teoremleri çalışıldı.

2015, 78 sayfa

Anahtar Kelimeler: Total asimptotik genişlemeyen dönüşüm, sonlu adım iterasyonu, ortak sabit nokta, kuvvetli yakınsama, düzgün konveks Banach uzayı.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

APPROXIMATIONS TO FIXED POINT FOR TOTAL ASYMPTOTICALLY NONEXPANSIVE MAPPINGS IN BANACH SPACES

Esra YOLAÇAN

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Analysis and Function Theory

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ

In this thesis, we define and study strong convergence of finite step iteration sequences with errors to a common fixed point for a pair consisting of a finite family of nonexpansive mappings and a pair consisting of a finite family of total asymptotically nonexpansive mappings in nonempty closed convex subset of uniformly convex Banach spaces. Also, we define and study new strong convergence theorems of the modified Mann and the modified Ishikawa iterative scheme with errors for nonself mappings which are total asymptotically nonexpansive mappings in uniformly convex Banach spaces.

2015, 78 pages

Keywords: Total asymptotically nonexpansive mapping, finite step iteration, common fixed point, strongly convergence, uniformly convex Banach space.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, çalışmalarımda ve tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Hükmi KIZILTUNÇ'a en içten dileklerimle sonsuz teşekkürlerimi arz ederim.

Matematik Bölümünde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e, ETÜ Fen Fakültesi Dekanı Sayın Prof. Dr. Hüseyin AYDIN'a ve tezin hazırlanması sürecinde her türlü bilgi yardımında bulunan Bayburt Üniversitesi Rektör Yardımcısı Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Tevfik İŞLEYEN'e ve bölümümüzün çok değerli öğretim üyelerine sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında kendisinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı canım arkadaşım Sayın Yrd. Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ'a içtenlikle teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında beni her zaman destekleyen ve yüreklendiren babam Nihat YOLAÇAN'a, annem Ayten YOLAÇAN'a, kardeşim Dr. Ebru YOLAÇAN'a ve arkadaşlarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Esra YOLAÇAN
Ocak, 2015

İÇİNDEKİLER

ÖZET..i
ABSTRACT..ii
TEŞEKKÜR..iii
SİMGELER DİZİNİ..vi
ŞEKİLLER DİZİNİ..vii
ÇİZELGELER DİZİNİ..viii
1. GİRİŞ..1
2. KURAMSAL TEMELLER..4
2.1. Genel Kavramlar..4
2.2. Sabit Nokta Kavramı..10
2.3. Bazı Sabit Nokta Teoremleri..16
3. MATERYAL ve YÖNTEM..20
3.1. İterasyon Yöntemleri..20
3.1.1. Picard İterasyon Metodu..20
3.1.2. Krasnoselskij İterasyon Metodu..22
3.1.3. Kirk İterasyon Metodu..24
3.1.4. Mann İterasyon Metodu..24
3.1.5. Ishikawa İterasyon Metodu..25
3.1.6. Noor İterasyon Metodu..26
3.2. Hata Terimli İterasyon Yöntemleri..27
3.3. Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler..28
3.4. Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler..32
4. ARAŞTIRMA BULGULARI..37
4.1. Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Nokta Yaklaşımı..37
4.2. Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler için Temel Sonuçlar..39
4.3. Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler İçin Sabit Nokta Yaklaşımı..56
4.4. Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler İçin Temel Sonuçlar..57

5. TARTIŞMA ve SONUÇ **69**
KAYNAKLAR 76
ÖZGEÇMİŞ 79

SİMGELER DİZİNİ

$(L, <, >)$	İç çarpım uzayı
$(N, \|\|\|\|)$	Normlu uzay
(X, d)	Metrik uzay
(X, τ)	Topolojik uzay
X^*	X in duali
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel uzay
B^t	A kümesinin tümleyeni
B_X	X uzayındaki kapalı birim yuvar
$F_T, Fix(T), F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
S_X	X uzayındaki birim küre
$x_n \to x$	Kuvvetli yakınsaklık
$x_n \rightharpoonup x$	Zayıf yakınsaklık
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
T'	T nin diferansiyeli
$C(X, \mathbb{R})$	Sürekli reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesi
$D(x_0; r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Bir sabit noktaya sahip olan fonksiyonun geometrik gösterimi 10
Şekil 3.1. $x_0 = 0,5$ başlangıç değerine sahip olan $x_n = \cos x_{n-1}$ sabit nokta iterasyonu 21

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. İlk 10 adım için Picard iterasyonunun aldığı değerler................................21

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisinin birçok alanda uygulamaları mevcuttur. Örneğin oyun teorisinde, John Nash'in denge kuramında dengenin varlığını ispatlamak için sabit nokta teoremleri kullanılmıştır. Fizikte, özellikle faz geçişleri teorisinde, kararsız bir sabit nokta yakınındaki dalgalanma renormalizasyon grubunun keşfedildiği çalışma Wilson'a Nobel ödülü kazandırmıştır. Derleyicilerde, sabit nokta hesaplamaları program analizi için kullanılır. Genellikle kod optimizasyonu yapmak için gereken veri-akış analizi buna örnek olarak verilebilir. Web sayfalarının PageRank değerlerinin vektörü, dünya çapındaki ağ bağlantı yapısının türetilmiş bir lineer dönüşümünün sabit noktasıdır.

Sabit nokta çalışmaları 20. yüzyılın başlarında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer teoremi, öklit uzayının konveks kompakt bir K alt kümesinden kendi üzerine tanımlı sürekli bir fonksiyon için oluşturulmuştur. Daha sonra Brouwer bu teoremi $\mathbb{R}^n$ için genelleştirmiştir.

Banach (1922), tam metrik uzayların en ilgi çekici uygulamalarından birisi olan, sabit noktanın varlığını ve tekliğini garanti altına alan Banach sabit nokta teoremini ifade etmiştir. Bu teorem, "(X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)\,, \quad 0 \leq k < 1$$

ise T, X de bir tek sabit noktaya sahiptir" şeklindedir. Banach sabit nokta teoreminin reel analiz, nümerik analiz, adi diferansiyel denklemler ve integral denklemlere de uygulamaları mevcuttur.

Schauder (1930), topolojik vektör uzayları için Brouwer sabit nokta teoremini geliştirmiştir. Ayrıca, Schauder sabit nokta teoremi, Banach uzayları gibi özel uzaylar için ispatlanmıştır. Rus matematikçi Tychonoff (1935) tarafından, K lokal konveks bir uzayın kompakt konveks bir alt kümesi olması durumunda Schauder teoremi yeniden ispatlanmıştır. Bu uyarlama Schauder-Tychonoff sabit nokta teoremi olarak da bilinir.

Daha sonra, Browder (1965), Kannan (1968), Kirk (1969), Ciric (1974) ve daha pek çok matematikçi bu temel sonuçları genelleştirerek bazı yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Günümüzde ise Rhoades (1974), Junck (1976), Sessa (1982) gibi pek çok araştırmacı birden fazla dönüşümün ortak sabit noktaları üzerine çok sayıda çalışma yapmışlardır.

Albert *et al*. (2005), total asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramını asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin önemli bir genelleştirmesi olarak teşkil etmiş ve kendi üzerine olan total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yeni bir iterasyon şeması üzerine çalışmalar yapılmıştır. Chidume and Ofeudo (2006) tarafından ilk kez kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramı teşkil edilmiş ve yeni bir iterasyon şeması kullanılarak yakınsamaları incelenmiştir.

Bu tez, beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanımlar ve kavramlara yer verilmiştir. Yine bu bölümde daraltan, kesin daraltan ve genişlemeyen dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşümlerin sabit noktalarının hangi şartlar altında var olduğu araştırılmıştır.

Üçüncü bölümde ilk olarak dönüşümlerin sabit noktaları bulunurken kullanılan çeşitli iterasyon metotları verilmiştir. Bunlardan bazıları Picard iterasyon metodu, Kirk iterasyon metodu, Krasnoselskij iterasyon metodu, Mann iterasyon metodu, Ishikawa iterasyon metodu, Noor iterasyon metodudur. İkinci olarak total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için yapılan çalışmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde öncelikle bazı iterasyon metodları tanıtılmış ve ispatlarda kullanacağımız tanım ve yardımcı teoremler (lemmalar) verilmiştir. Daha sonra reel Banach uzayında kendi üzerine olan total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için *N*-adım iterasyon şeması kullanılarak kuvvetli yakınsama teoremleri verilmiştir. Son olarak düzgün konveks Banach uzayında kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için tanımlanan modifiye edilmiş hata terimli Ishikawa iterasyon şeması kullanılarak kuvvetli yakınsama teoremleri ifade edilmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

i. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
ii. $d(x, y) = d(y, x)$,
iii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve (X, d) veya X ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. (Cauchy Dizisi): $X = (X, d)$ herhangi bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n, m > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.3. (Tam Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise yani $x_n \to x \in X$ ise, (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.4. (Kompakt Metrik Uzay): $X = (X, d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her dizi yakınsak bir alt diziye sahipse (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

Tanım 2.1.5. (Sürekli Dönüşüm): (X, d) ve (Y, ρ) iki metrik uzay, $f: X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

veya denk bir ifade ile

$$f\big(D(x_0; \delta)\big) \subseteq D(f(x_0); \epsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f ye x_0 noktasında süreklidir denir. f, X in her noktasında sürekli ise f ye X de süreklidir denir.

Tanım 2.1.6. (Açık ve Kapalı Küme): X bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Her $x \in A$ için $D(x; r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r \geq 0$ sayısı varsa, A ya X in açık alt kümesi denir. X in herhangi bir B alt kümesinin X deki tümleyeni olan $B^t = X - B$, X de açık ise B ye kapalı küme denir.

Tanım 2.1.7. (Topolojik Uzay): X boş olmayan bir küme ve τ, X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

$i.$ X,$\emptyset \in \tau$,
$ii.$ τ ya ait sonlu sayıda kümenin kesişimi, olduğunda τ ya aittir.
$iii.$ τ ya ait sonsuz sayıda kümenin birleşimi, olduğunda τ ya aittir.
şartları sağlanıyorsa τ ya X için bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay denir.

Tanım 2.1.8. (Lineer Uzay): L boş olmayan bir küme ve F bir cisim olsun. $+: L \times L \to L$ ve $.: F \times L \to L$ işlemleri tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa, L ye F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) denir.

A) $(L, +)$ değişmeli bir gruptur. Yani, G1. Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir,

G2. Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir,

G3. Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır,

G4. Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır,

G5. Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir.

B) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

L1. $\alpha . x \in L$ dir,

L2. $\alpha . (x + y) = \alpha . x + \alpha . y$ dir,

L3. $(\alpha + \beta) . x = \alpha . x + \beta . x$ dir,

L4. $(\alpha\beta) . x = \alpha . (\beta . x)$ dir,

L5. $1 . x = x$ dir (burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L ye kompleks lineer uzay uzay adı verilir.

Tanım 2.1.9. (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in L: \ z = \alpha x + (1 - \alpha) y, \qquad 0 \le \alpha \le 1\} \subseteq A$$

ise A kümesine konvekstir denir.

Tanım 2.1.10. (Normlu Uzay): N, bir lineer uzay olsun. $\|.\|: N \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

$N1.$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ $(\alpha \in F)$

N3. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlıyorsa $\|.\|$ fonksiyonuna N de (veya N üzerinde) norm ve $(N, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.11. (Banach Uzayı): N normlu lineer uzay olsun. N, $d(x,y) = \|x-y\|$ norm metriğine göre tam ise N ye Banach uzayı denir.

Tanım 2.1.12. (İç Çarpım Fonksiyonu ve İç Çarpım Uzayı): L, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\langle \quad \rangle : L \times L \to F$ fonksiyonu

I1. $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$
I2. $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle \quad (\alpha \in F)$
I3. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$
I4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ ve $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \theta$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona iç çarpım fonksiyonu (veya iç çarpım) denir.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonunun tanımlandığı vektör uzayına iç çarpım uzayı (veya ön-Hilbert uzayı) denir. İç çarpım uzayı $(L, \langle \quad \rangle)$ veya kısaca L ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. (Hilbert Uzayı): X bir iç çarpım uzayı ve $\| \quad \|$ iç çarpım normu olsun. $d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ olarak tanımlanırsa (X, d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normuyla tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise, X e Hilbert uzayı denir.

Hilbert uzayları, özel bir normdan elde edilmiş Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.1.14. (Sınırlı Lineer Operatör): N ve N' iki normlu uzay ve $T: N \to N'$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in N$ için

$$\|Tx\|' \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ reel sayısı varsa, T ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.1.15. (Topolojik Dual): X bir normlu lineer uzay olsun. X de tanımlı tüm sürekli ve reel değerli lineer fonksiyonellerin kümesini $C(X,\mathbb{R})$ ile gösterelim. Yani $C(X,\mathbb{R}) = \{T: T: X \to \mathbb{R}$ lineer ve sürekli$\}$ olsun. Her $x \in X$ ve $T_1, T_2 \in C(X,\mathbb{R})$ için

$$\begin{cases}(T_1+T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)\\ (\alpha T_1)(x) = \alpha T_1(x)\end{cases}$$

olarak tanımlanırsa $C(X,\mathbb{R})$ bir lineer uzay oluşturur. Bu $C(X,\mathbb{R})$ uzayına X in topolojik duali denir ve X^* ile gösterilir.

Burada X^*, $\|T\| = sup\{|T(x)|: \|x\| \leq 1\}$ normuna göre normlu lineer uzaydır. Ayrıca $\mathbb{R}$ tam olduğu için X tam olmasa bile X^* daima bir Banach uzayıdır. Bu X^* uzayına bazen X in eşi veya eşleniği adı verilir.

Tanım 2.1.16. (Kuvvetli Yakınsaklık): X, bir normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e kuvvetli yakınsaktır (veya norma göre yakınsaktır) denir ve bu durum

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

şeklinde ya da kısaca $x_n \longrightarrow x$ ile gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli limiti adı verilir.

Tanım 2.1.17. (Zayıf Yakınsaklık): X normlu uzay ve $\{x_n\}$ de X de bir dizi olsun. Eğer her $f \in X^*$ için,

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ dizisi x e zayıf yakınsaktır denir ve bu durum ya $x_n \xrightarrow{z} x$ ya da $x_n \rightharpoonup x$ şeklinde gösterilir. Buradaki x e, $\{x_n\}$ dizisinin zayıf limiti adı verilir.

Kuvvetli ve zayıf yakınsama arasındaki gerektirmeler aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir.

Teorem 2.1.18: X normlu bir uzay olsun. Bu durumda,

(a) Kuvvetli yakınsaklık, zayıf yakınsaklığı gerektirir.
(b) (a) nın tersi genel olarak doğru değildir.
(c) $dim(x) < \infty$ ise, zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir.

Normlu uzaylarda zayıf yakınsamanın kuvvetli yakınsamayı gerektirmediğini aşağıdaki örnek ile görebiliriz.

Örnek 2.1.19: $X = l_2$ uzayını ve bu uzayda $x \in X$ için $\|x\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2\right)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan normu alalım. $\{x_n\}$ dizisini

$$x_n = (0,0,\cdots,1,0,\cdots)$$

şeklinde tanımlayalım. Herhangi bir $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots) \in X^* = l_2$ ve $n \to \infty$ için

$$(x_n, y) = y_n \to 0$$

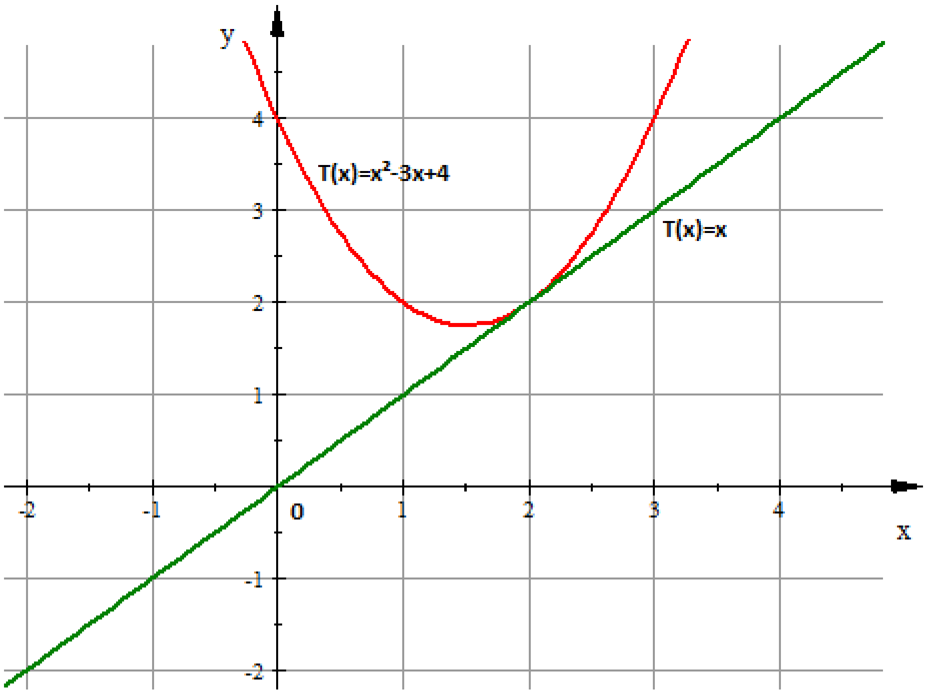
olur. Böylece, $n \to \infty$ iken $x_n \rightharpoonup 0$ zayıf yakınsar. Ancak, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n\| = 1$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi kuvvetli yakınsak değildir (Agarwal *et al.* 2009).

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1. (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer, $T(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F_T, F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir.

Bu tanımı geometrik olarak şöyle ifade edebiliriz: Reel değişkenli ve reel değerli bir fonksiyon için, $x \in X$ bir sabit nokta ise $(x, T(x))$ noktası $y = x$ doğrusu üzerindedir. Yani, T dönüşümü ile $y = x$ doğrusunun ortak noktaları dönüşümün sabit noktalarıdır. Örneğin;

i. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X,\ T(x) = x^2 - 3x + 4$ fonksiyonunun sabit noktası $T(2) = 2$ olduğundan $F(T) = \{2\}$ dir. Geometrik olarak da aşağıdaki şekilde düşünülebilir.



Şekil 2.1. Bir sabit noktaya sahip olan fonksiyonun geometrik gösterimi

Şekil 2.1'de görüldüğü gibi $T(x) = x^2 - 3x + 4$ fonksiyonu bir tek sabit noktaya sahiptir.

ii. $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $T: X \to X,\ T(x) = \frac{x^2+1}{x}$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \emptyset$ dir.

iii. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X,\ T(x) = x + sinx$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T) = \{k\pi: k \in \mathbb{Z}\}$ dir.

Tanım 2.2.2. (n. İterasyon): X boş olmayan bir küme ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$ olacak şekilde $T^n(x)$ i tanımlayabiliriz. $T^n(x), T$ altındaki x in $n.$ iterasyonu olarak adlandırılır. Burada,

$$\underbrace{T \circ T \circ T \circ \cdots T}_{n\ adet\ T}(x) = T\left(T\left(\cdots T(x)\right)\right) = T^n(x)$$

dir.

Örneğin; $X = \mathbb{R}$ olmak üzere, $T(x) = x^3 + 2$ ile tanımlı $T: X \to X$ dönüşümü beşinci iterasyonu

$$T^5(x) = T\left(T\left(T\left(T\left(T(x)\right)\right)\right)\right) = ((((x^3 + 2)^3 + 2)^3 + 2)^3 + 2)^3 + 2$$

dır.

$T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

i. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T) \subset F(T^n)$ dir.

ii. Keyfi bir $n \in \mathbb{N}$ için $F(T^n) = \{x\}$ ise, $F(T) = \{x\}$ dir. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir. Bundan sonra $T(x)$ yerine Tx notasyonu kullanılacaktır.

Örneğin; i. $X = \mathbb{R}$ olmak üzere $T: X \to X, Tx = x^2 - 2x$ dönüşümü için $F(T) = \{0,3\}$ ve $F(T^2) = \left\{0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}, 3\right\}$ dir. Dolayısıyla, $F(T) \subset F(T^2)$ olur.

ii. $T: \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$ dönüşümü $T(1) = 5$, $T(2) = 4$, $T(3) = 3$, $T(4) = 2$, $T(5) = 1$ olarak tanımlanırsa, $F(T) = \{3\}$ olur. Fakat, $F(T^2) = \{1,2,3,4,5\}$ bulunur. O halde, yukarıdaki ifadenin tersi doğru değildir.

X, boş olmayan bir küme ve $T_1, T_2, \cdots, T_m: X \to X$ m tane dönüşüm olsun. Eğer $T_1x = T_2x = \cdots = T_mx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına $T_1, T_2, \cdots, T_m$ nin ortak sabit noktası denir. Bu dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{m} F(T_m)$ ile gösterilir. Aşağıda birden fazla dönüşümün ortak sabit noktalarıyla ilgili bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.2.3: $X = \mathbb{R}$, $T_1x = x$, $T_2x = 2x$, $T_3x = 3x, \cdots$, $T_mx = mx$ dönüşümleri verilsin. O halde $F(T_1) = \mathbb{R}$, $F(T_2) = \{0\}$, $F(T_3) = \{0\}, \cdots, F(T_m) = \{0\}$ dir. T_1, $T_2, \cdots$, T_m dönüşümlerinin ortak sabit noktalarının kümesi ise $\mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^{m} F(T_m) = \{0\}$ dir.

Tanım 2.2.4. (Lipschitzian Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

olacak şekilde bir $k \geq 0$ sabit sayısı varsa T ye Lipschitzian dönüşüm denir. (2.1) eşitsizliğine Lipschitz şartı ve bu şartı sağlayan en küçük k sayısına da Lipschitz sabiti denir.

Yukarıdaki tanıma göre, Lipschitz şartını sağlayan her T dönüşümü düzgün süreklidir. Çünkü, her $\varepsilon > 0$ için $d(x,y) < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow kd(x,y) < k\delta = \varepsilon$ olduğundan

$$d(Tx,Ty) \leq kd(x,y) < k\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

yazılır. Bu da, T dönüşümünün düzgün sürekli olduğunu gösterir. Ancak, bu ifadenin tersi her zaman doğru değildir.

Lipschitzian dönüşümlerin varlığı aşağıdaki önerme ile garanti altına alınmıştır.

Önerme 2.2.5: $T: [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, (a,b) üzerinde diferansiyellenebilir bir dönüşüm ve T', $[a,b]$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda, T Lipschitzian bir dönüşümdür (Agarwal *et al.* 2009).

Yukarıdaki T dönüşümünün Lipschitzian bir dönüşüm olması durumunda diferansiyellenebilmesini gerektirmediği aşağıdaki örnek ile görülür.

Örnek 2.2.6: $X \in [-1,1]$ olmak üzere $T: X \to X$, $Tx = |x|$ olsun. Her $x, y \in [-1,1]$ için,

$$|Tx - Ty| \leq |x - y|$$

olacağından Lipschitzian bir dönüşümdür. Burada, $k = 1$ olup Lipschitz şartı sağlanır. Ancak, dikkat edilirse $Tx = |x|$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında diferansiyellenebilir değildir (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 2.2.7. (Daraltan Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ Lipschitzian bir dönüşüm olsun. Eğer, (2.1) eşitsizliği $0 \leq k < 1$ olması halinde sağlanıyorsa, T ye daraltan dönüşüm ya da büzülme dönüşümü (contraction) denir.

Lipschitz koşulunu sağlayan her dönüşüm düzgün sürekli olduğundan daraltan dönüşümler de düzgün süreklidir. Dolayısıyla, T sürekli değilse, bir daraltan dönüşüm de olamaz. Buna karşın T daraltan dönüşüm olmasa bile, herhangi bir n için T^n daraltan bir dönüşüm olabilir.

Tanım 2.2.8. (Kesin Daraltan Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

ise, T ye kesin daraltan dönüşüm (contractive) denir.

Örnek 2.2.9: $X = [1, \infty)$, $d(x, y) = |x - y|$ ve $T: X \to X$ dönüşümü $Tx = x + \frac{1}{x}$ olsun. T dönüşümü kesin daraltan olup daraltan değildir. Çünkü her $x, y \in [1, \infty)$, $x \neq y$ için

$$d(Tx, Ty) = |Tx - Ty| \leq |x - y| \left|\frac{xy - 1}{xy}\right| < |x - y| = d(x, y)$$

olur. Dolayısıyla, T dönüşümü kesin daraltandır. Ancak, $Tx = x + \frac{1}{x} \neq x$ olduğundan T dönüşümünün sabit noktası yoktur.

Bu tip dönüşümlerin sabit noktasını garanti etmek için çalışılan uzayın kompakt olması yeterlidir.

Önerme 2.2.10: (X, d) metrik uzay K da X in boş olmayan kompakt bir alt kümesi olsun. $\psi: K \to K$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için $d\big(\psi(x), \psi(y)\big) < d(x, y)$ özelliğini sağlasın. Bu durumda $\psi(x) = x$ eşitliğini sağlayan bir $x \in K$ vardır (Soykan 2008).

Tanım 2.2.11. (Genişlemeyen Dönüşüm): (X, d) bir metrik uzay ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$$

ise, T ye genişlemeyen (nonexpansive) dönüşüm denir.

Tanım 2.2.12. (Düzgün Lipschitzian Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve her $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, T ye düzgün Lipschitzian dönüşüm denir.

Tanım 2.2.13. (Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan bir küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in K$ ve $\forall n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq k_n\|x - y\|$$

olacak şekilde $k_n \to 1$ şartını sağlayan bir $\{k_n\} \subset [1, \infty)$ dizisi varsa, T ye asimptotik genişlemeyen dönüşüm denir.

Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı, genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesidir. Yani, her genişlemeyen dönüşüm asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Fakat, tersi doğru değildir.

Tanım 2.2.14. (Düzgün Konveks Uzay): X bir Banach uzayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ şartlarını sağlayan $\forall\, x, y \in X$ için

$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1-\delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Aksoy and Khamsi 1990).

Bu tanım, $x, y \in B_X = \{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon > 0$ için $(x+y)/2$ orta noktasının $S_X = \{x \in X: \|x\| = 1\}$ den $\delta -$kadar uzaklıkta ve B_X kapalı birim yuvar içinde olduğunu ifade eder.

2.3. Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bazı dönüşümlerin sabit noktası olmadığı halde, bazılarının bir veya birden fazla sabit noktası olabilir. Bu bölümde, hangi tür dönüşümlerin sabit noktalarının var ve bu sabit noktaların hangi koşullar altında tek olduğunu teorem ve örneklerle ifade edeceğiz.

Aşağıdaki teorem, analizdeki en basit sabit nokta teoremi olarak bilinir.

Teorem 2.3.1: $[a, b]$, $\mathbb{R}$ de bir kapalı aralık ve $f: [a, b] \to [a, b]$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda, $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ sayısı vardır.

İspat: Her $x \in [a, b]$ için, $T(x) = x - f(x)$ olacak şekilde bir $T: [a, b] \to \mathbb{R}$ dönüşümünü tanımlayalım. Bu durumda, T sürekli bir dönüşümdür. Eğer $f(a) \geq a$ ise, $T(a) \leq 0$ olur. Benzer şekilde, $f(b) \leq b$ ise $T(b) \geq 0$ olur. Ara değer teoremi gereğince $T(c) = 0$ olacağından, $f(c) = c$ olacak şekilde bir $c \in [a, b]$ vardır.

Teorem 2.3.2. (Brouwer Sabit Nokta Teoremi): B, $\mathbb{R}^n$ de kapalı bir küre (dolayısıyla $\mathbb{R}^n$ nin bir kompakt konveks alt kümesi) olsun. Bu durumda $f: B \to B$ sürekli dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Lineer olmayan operatör denklemlerin çözümlerinin varlığı probleminin incelenmesinde daraltan dönüşüm ve Newton iterasyon teoremi ile beraber Schauder sabit nokta teoremi de kullanılır. Şimdi bu teoremin ifadesini vereceğiz.

Teorem 2.3.3. (Schauder Sabit Nokta Teoremi): X bir Banach uzayı, $K \subseteq X$ boş olmayan kompakt konveks bir alt küme ve $f: K \to K$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda f en az bir sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

Şimdi Schauder sabit nokta teoreminin genelleştirilmiş hali olan Tychonov Sabit Nokta Teoremini verelim:

Teorem 2.3.4. (Tychonoff Sabit Nokta Teoremi): X lokal konveks uzay ve K, X de kapalı konveks bir alt küme olsun. Eğer, $T: X \to X$ sürekli dönüşümü için $T(K)$ nin kapanışı kompakt ise T dönüşümünün bir sabit noktası vardır (Agarwal *et al.* 2009).

Eğer, X normlu ve K kompakt ise T dönüşümünün sürekliliğinden $T(K)$ kompakt ve dolayısıyla kapalıdır. O halde, $\overline{T(K)} = T(K)$ kapalıdır. Dolayısıyla Tychonoff Sabit Nokta Teoremi Schauder Sabit Nokta Teoremini kapsar.

Şimdi, metrik uzaylarda daraltan dönüşümler için bilinen bir sabit nokta teoremini ifade edelim:

Teorem 2.3.5. (Caristi'nin Sabit Nokta Teoremi): (X, d) bir tam metrik uzay olmak üzere $\varphi: X \to (-\infty, \infty)$ düzgün, alttan ve üstten sınırlı sürekli bir fonksiyon ve $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Herhangi bir $x \in X$ için

$$d(x, Tx) \leq \varphi(x) - \varphi(Tx)$$

ise $\varphi(v) < \infty$ ve $v = Tv$ olacak şekilde bir $v \in X$ noktası vardır (Agarwal *et al.* 2009).

Caristi'nin sabit nokta teoreminde, T dönüşümünün sabit noktasının tek olması gerekmez.

Şimdi de, dönüşümün sabit noktasının tek olduğunu garanti eden Banach Daralma ilkesini ifade edelim:

Teorem 2.3.6. (Banach Daralma İlkesi): (X,d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ daraltan bir dönüşüm olsun. Bu durumda T, bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1 = Tx_0, \;\; x_2 = Tx_1 = T^2x_0, \dots, x_{n+1} = Tx_n = T^{n+1}x_0$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu dolayısıyla da $x \in X$ e yakınsadığını ve bu x in $Tx = x$ denkleminin bir tek çözümünün olduğunu göstereceğiz. O halde $n \geq 1$ ve $p \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
d\left(x_{n+p}, x_n\right) &= d(T^{n+p}x_0, T^n x_0) \\
&\leq kd\left(x_{n+p-1}, x_{n-1}\right) = kd(T^{n+p-1}x_0, T^{n-1}x_0) \leq k^2 d\left(x_{n+p-2}, x_{n-2}\right) \\
&\leq \cdots \\
&\leq k^n d\left(x_{n+p-n}, x_{n-n}\right) = k^n d\left(x_p, x_0\right) \\
&\leq k^n \left(d\left(x_p, x_{p-1}\right) + d\left(x_{p-1}, x_0\right)\right) \\
&\leq k^n \left(kd\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right) + d\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right) + d\left(x_{p-2}, x_0\right)\right) \\
&= k^n \left(kd\left(x_{p-2}, x_0\right) + d\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right) + d\left(x_{p-1}, x_{p-2}\right)\right) \\
&\leq k^n \left(kd\left(x_{p-2}, x_0\right) + kd\left(x_{p-2}, x_{p-3}\right) + k^2 d\left(x_{p-2}, x_{p-3}\right)\right) \\
&\;\;\vdots \\
&\leq k^n (d(x_1, x_0) + kd(x_1, x_0) + k^2 d(x_1, x_0) + \cdots) \\
&= k^n d(x_1, x_0)(1 + k + k^2 + k^3 + \cdots)
\end{aligned}$$

$$= k^n d(x_1, x_0)\left(\frac{1}{1-k}\right)(n \to \infty \text{ için})$$

bulunur. Yani,

$$d\left(x_{n+p}, x_n\right) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0)$$

elde edilir. $0 \leq k < 1$ olduğundan $n \to \infty$ için limit alınırsa $d\left(x_{n+p}, x_n\right) \to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x_n \to x$ dolayısıyla da $x_{n+1} \to x$ dir. T dönüşümü, sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n \to Tx$ dir. $x_{n+1} = Tx_n$ denkleminden $n \to \infty$ için $Tx = x$ elde edilir.

Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y, T nin başka bir sabit noktası olsun. Yani, $Ty = y$ dir. O halde, y başka bir çözüm ise

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu da $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Çünkü,

$$d(x, y) \leq kd(x, y) \Rightarrow d(x, y) - kd(x, y) \leq 0$$
$$\Rightarrow d(x, y)[1 - k] \leq 0$$

olur. $k < 1$ olduğundan $1 - k > 0$ dır. Dolayısıyla hem $1 - k > 0$ hem de $d(x, y) \geq 0$ olduğundan $d(x, y)[1 - k] \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanması için $d(x, y) = 0$ olması gerekir. Bu da $x = y$ demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.7: (X, d) bir tam metrik uzay ve $n \in \mathbb{N}$ için T^n bir daraltan dönüşüm olacak şekilde bir $T: X \to X$ dönüşümü verilsin. Bu durumda, T bir tek sabit noktaya sahiptir (Khamsi and Kirk 2001).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. İterasyon Yöntemleri

Bu bölümde bazı sabit nokta iterasyonlarına, total asimptotik genişlemeyen dönüşümlere, nonself (kendi üzerine olmayan) total asimptotik genişlemeyen dönüşümlere ve son olarak da araştırma bulgular kısmında kullanacağımız önerme ve yardımcı teoremlere (lemmalara) yer verilecektir.

3.1.1. Picard İterasyon Metodu

(X, d) bir metrik uzay, $K \subseteq X$ kapalı bir alt küme ve $T : K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ olmak üzere Picard iterasyonu

$$x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0, \;\; n = 1,2, \dots \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır (Picard 1890). Picard iterasyonu bazen ardışık yaklaşıklar dizisi (sequence of successive approximations) olarak da adlandırılır.

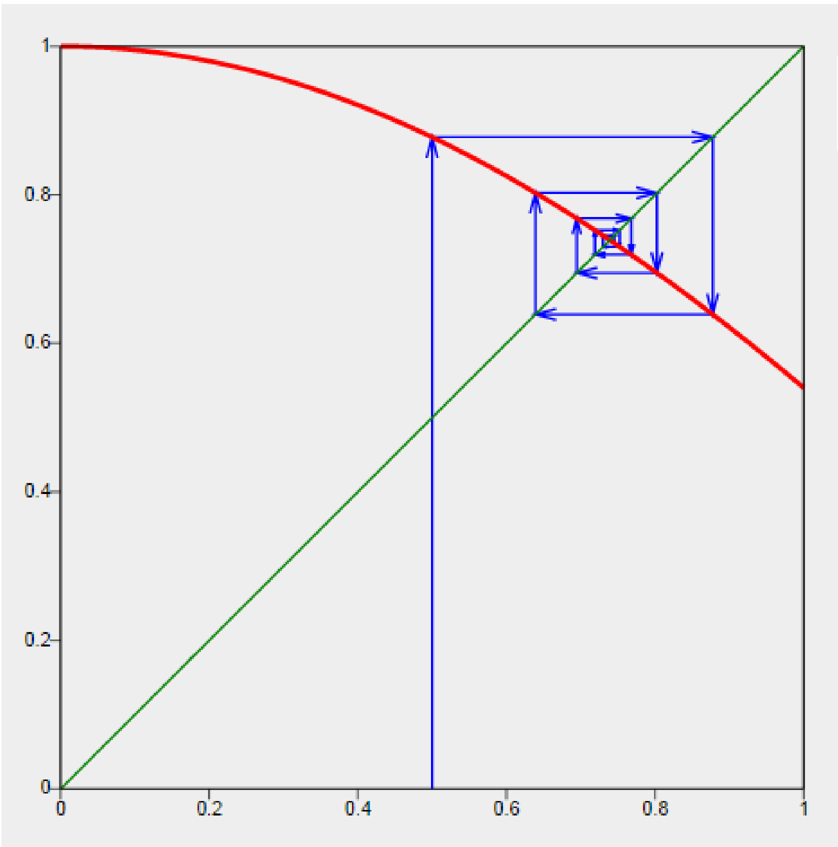
Yaklaşık iki bin yıldan fazla tarihe sahip olan Picard iterasyon metodu ilk olarak İtalyan matematikçi Picard tarafından adi diferansiyel denklemler için Cauchy probleminin tahmini çözümünü bulmak için kullanılmıştır. Özellikle, nümerik analizde, yinelemeli fonksiyonların sabit noktalarının hesaplanmasına yönelik kullanılan bir yöntemdir.

Örnek 3.1.1: i. $X = \mathbb{R}$, $K = [0,1] \subset X$, $T: K \to K$ ve $Tx = \cos x$ olsun. T, daraltan bir dönüşüm ve $F(T) = \{0{,}73909\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = 0{,}5$ noktası için (3.1) Picard iterasyonun ilk 10 adımının sonuçları aşağıdaki çizelgede verilmiştir.

Çizelge 3.1. İlk 10 adım için Picard iterasyonunun aldığı değerler

n	$x_n = T(x_{n-1})$
0	0,5
1	0,87758256189037
2	0,63901249416526
3	0,80268510068233
4	0,69477802678801
5	0,76819583128202
6	0,71916544594242
7	0,75235575942153
8	0,73008106313782
9	0,74512034135144
10	0,73500630901480

Çizelge 3.1'de belirtilen veriler doğrultusunda Şekil 3.1 oluşturulmuştur.



Şekil 3.1. $x_0 = 0,5$ başlangıç değerine sahip olan $x_n = \cos x_{n-1}$ sabit nokta iterasyonu

Şekil 3.1'de yeşil doğru $y = x$ doğrusunu, kırmızı eğri bize verilen aralık için $\cos x$ eğrisinin bir kısmını ve mavi oklar ise çizelgedeki veriler doğrultusunda x_1, x_2, x_3, $\cdots$, x_{10} değerlerinin hareketini göstermektedir. Dikkat edilirse, mavi oklar $y = x$ doğrusu ile $\cos x$ eğrisinin kesim noktasında yoğunlaşmaya başlamaktadır. Bu kesim noktası T dönüşümünün sabit noktasıdır.

ii. $X = [0,1]$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $T: X \to X$, $Tx = 1 - x$ olsun. T, genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ noktası için (3.1) Picard iterasyonu,

$$x_0 = a$$
$$x_1 = Tx_0 = 1 - a$$
$$x_2 = Tx_1 = T^2 x_0 = a$$
$$x_3 = Tx_2 = T^2 x_1 = T^3 x_0 = 1 - a$$
$$\vdots$$
$$x_n = Tx_{n-1} = T^2 x_{n-2} = \cdots = T^n x_0$$
$$\vdots$$

şeklinde olup bu da $(a, 1 - a, a, 1 - a, \ldots)$ salınımlı dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için yakınsak olmadığından, Picard iterasyonu, dönüşümün sabit noktasına yakınsamaz (Berinde 2006). Dolayısıyla, istenilen sabit noktayı bulmak için başka iterasyon metodlarına ihtiyaç duyulmaktadır. Şimdi, bu metodların bazılarından bahsedelim.

3.1.2. Krasnoselskij İterasyon Metodu

$(N, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : N \to N$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in N$ ve $\lambda \in [0,1]$ için Krasnoselskij iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\lambda)x_n + \lambda T x_n, \quad n = 0,1,2,\dots \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır. Bu iterasyon, $\lambda = 1$ için Picard iterasyonuna indirgenir (Krasnoselskij 1955).

Örnek 3.1.1 (ii) de kullandığımız Picard iterasyonu, sabit noktayı bulmak için bize fayda sağlamamıştı. Şimdi, Krasnoselskij iterasyon yöntemini kullanarak yakınsamanın var olup olmadığını inceleyelim.

Örnek 3.1.2: $X = [0,1]$ olmak üzere her $x \in [0,1]$ için $T: X \to X$, $Tx = 1 - x$ olsun. T genişlemeyen bir dönüşümdür ve $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Herhangi bir $x_0 = a \neq \frac{1}{2}$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ noktası için (3.2) Krasnoselskij iterasyonu,

$$\begin{aligned}
x_0 &= a, \\
x_1 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x_0 + \frac{1}{2}Tx_0 = \frac{1}{2}, \\
x_2 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x_1 + \frac{1}{2}Tx_1 = \frac{1}{2}, \\
x_3 &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x_2 + \frac{1}{2}Tx_2 = \frac{1}{2}, \\
&\vdots \\
x_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)x_{n-1} + \frac{1}{2}Tx_{n-1} = \frac{1}{2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

şeklinde olup bu da $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\right)$ dizisine karşılık gelir. Bu dizi $a \neq \frac{1}{2}$ için T dönüşümünün sabit noktasına yakınsar.

3.1.3. Kirk İterasyon Metodu

X bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olsun. Kirk iterasyonu, $x_0 \in X$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 T x_n + \alpha_2 T^2 x_n + \cdots + \alpha_k T^k x_n \tag{3.3}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $i = 0,1,2,\dots,k$ için $\alpha_1 > 0$ ve $\alpha_i \geq 0$ olmak üzere

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_k = 1$$

dir.

(3.3) eşitliği ile verilen Kirk iterasyonu, $k = 0$ için Picard iterasyonuna ve $k = 1$ için Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Kirk 1971).

3.1.4. Mann İterasyon Metodu

Mann (1953) tarafından kurulmuş ve Banach daralma ilkesini sağlamayan dönüşümlerin sabit noktalarını elde etmek için kullanılmıştır. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1 - \alpha_n) x_n + \alpha_n T x_n \,, \;\; n = 0,1,2,\dots \tag{3.4}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\} \in [0,1]$ aralığında

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,, \;\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

şartlarını sağlayan bir dizidir.

(3.4) eşitliği ile verilen Mann iterasyonunda $\alpha_n = \lambda$ (sabit) olarak alınırsa bu iterasyon, Krasnoselskij iterasyonuna indirgenir (Berinde 2006).

Mann'ın bulmuş olduğu sonuçlar Franks and Marzec (1971) tarafından, aynı şekilde Franks and Marzec'in sonuçları da Rhoades (1974) tarafından genişletilmiştir. Yine, Rhoades (1974), herhangi bir kapalı ve sınırlı aralıktan yine bu aralığa tanımlı bir dönüşüm (self-map) için Mann iterasyonunun bu dönüşümün bir sabit noktasına yakınsadığını göstermiştir.

3.1.5. Ishikawa İterasyon Metodu

Ishikawa (1974) tarafından kurulmuş olup Lipschitzian ve pseudocontractive dönüşümler için Mann iterasyon yönteminin yetersizliği durumunda yeni bir iterasyon metodu olarak oluşturulmuştur. Bu iterasyon, ilk olarak, bir Hilbert uzayın konveks ve kompakt alt kümesi üzerinde tanımlı Lipschitzian ve pseudocontractive bir dönüşümün sabit noktasına kuvvetli yakınsadığını göstermek amacıyla kullanılmıştır (Berinde 2006). X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\} \in [0,1]$ aralığında reel diziler ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0\,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir.

(3.5) eşitliği ile verilen iterasyonda, $\beta_n = 0$ alınırsa, bu iterasyon Mann iterasyonuna indirgenir. Bu duruma rağmen, Mann ve Ishikawa iterasyonları için yakınsama sonuçları arasında genel bir bağ yoktur (Berinde 2006).

3.1.6. Noor İterasyon Metodu

Noor (2000) tarafından kurulmuştur. X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt küme, $T: K \to K$ bir dönüşüm ve $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere Noor iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n \,, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n \,, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n, \;\; n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\} \subset [0,1]$ aralığında reel diziler ve

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0 \,, \quad \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0 \,, \quad \lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0 \,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$$

dir.

Noor (2000)’de, Hilbert uzaylardaki bazı eşitsizliklerin yaklaşık çözümlerini çalışmak için 3-adım (Noor) iterasyonunu tanıtmıştır.

Xu and Noor (2002), Noor iterasyonunun düzgün konveks bir Banach uzayının kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesinde kendi üzerine tanımlanmış asimptotik genişlemeyen bir dönüşümün sabit noktaya yakınsaklığını çalışmışlardır.

3.2. Hata Terimli İterasyon Yöntemleri

Bu bölümde, önce Liu (1995) ve daha sonra da Xu (1998) tarafından tanımlanan hata terimli Mann ve hata terimli Ishikawa iterasyon yöntemleri incelenecektir.

Tanım 3.2.1: X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere hata terimli Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T x_n + u_n, \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{3.7}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$, $[0,1]$ üzerinde bazı koşulları sağlayan reel sayı dizisi ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$ koşulunu sağlayan dizidir (Liu 1995).

Tanım 3.2.2: X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere hata terimli Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n + u_n \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n + v_n \quad n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.8}$$

şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\beta_n\}_{n=0}^{\infty}$, $[0,1]$ üzerinde bazı koşulları sağlayan reel sayı dizileri ve $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_n\| < \infty$, $\sum_{n=0}^{\infty}\|v_n\| < \infty$ koşullarını sağlayan dizilerdir (Liu 1995).

Liu’nun hata terimli Mann ve hata terimli Ishikawa iterasyon yöntemleri hataların rastgeleliğine karşın hata terimlerinin yakınsamasına bağlıdır. Ayrıca, eğer K, X in konveks alt kümesi ise o zaman $\{x_n\}$ dizisi K da olmayabilir (Berinde 2006).

Xu (1998), Liu’nun vermiş olduğu tanımı yeniden düzenleyerek aşağıdaki biçimde oluşturmuştur.

Tanım 3.2.3: X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $T: K \to X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ olmak üzere hata terimli Mann iterasyonu,

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n T x_n + c_n u_n, \;\; n = 0,1,2,\ldots \tag{3.9}$$

şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, K da sınırlı dizi, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $[0,1]$ üzerinde $\forall n \geq 0$ için $a_n + b_n + c_n = 1$ koşulunu sağlayan reel sayı dizileridir (Xu 1998).

Tanım 3.2.4: X bir normlu uzay, $K \subseteq X$ boş olmayan konveks alt kümesi ve $T: K \to X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in K$ keyfi bir nokta olmak üzere hata terimli Ishikawa iterasyonu,

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n x_n + b_n T y_n + c_n u_n, \\ y_n = a'_n x_n + b'_n T x_n + c'_n v_n \;\; n = 0,1,2,\ldots \end{cases} \tag{3.10}$$

şeklinde tanımlanır. Burada tanımlanan $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{v_n\}_{n=0}^{\infty}$ K da sınırlı dizilerdir. $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{a'_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{b'_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{c'_n\}_{n=0}^{\infty}$ de $[0,1]$ üzerinde $\forall n \geq 0$ için $a_n + b_n + c_n = a'_n + b'_n + c'_n = 1$ koşulunu sağlayan reel sayı dizileridir (Xu 1998).

(3.4) ve (3.5) ile belirtilen Mann ve Ishikawa iterasyon yöntemleri Liu ve Xu tarafından tanımlanan hata terimli Mann ve hata terimli Ishikawa iterasyon yöntemlerinin özel bir durumudur.

3.3. Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler

Bu başlık altında total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerle ilgili bazı teoremlere yer verilmiştir.

Total asimptotik genişlemeyen dönüşümler, Albert *et al.* (2005) tarafından asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin bir genellemesi olarak ortaya çıkarılmıştır.

Tanım 3.3.1. (Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): E bir normlu uzay, $K \subseteq E$ boş olmayan bir küme ve $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için

$$\|T^n x - T^n y\| \leq \|x - y\| + \mu_n \phi(\|x - y\|) + l_n \tag{3.11}$$

olacak şekilde $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ kesin artan sürekli fonksiyonu ve $n \to \infty$ iken $\mu_n,\ l_n \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri varsa $T: K \to K$ dönüşümüne "total asimptotik genişlemeyen dönüşüm" denir (Albert *et al.* 2005).

Sonuç 3.3.2: Eğer, (3.11) de $\phi(\lambda) = \lambda$ olarak alınırsa,

$$\|T^n x - T^n y\| \leq (1 + \mu_n)\|x - y\| + l_n, \qquad n \geq 1$$

elde edilir. Burada $l_n = 0$ olarak alınırsa ifademiz asimptotik genişlemeyen dönüşüm haline gelir. Ayrıca $l_n = \mu_n = 0$ alınırsa genişlemeyen dönüşüm sınıfı elde edilir (Albert *et al.* 2005).

$T: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümü verilsin. $F(T) \neq \emptyset$ olmak üzere bu T dönüşümü düzgün sürekli bir dönüşüm olup Lipschitzian ve asimptotik genişlemeyen dönüşüm olmadığını göstermek için aşağıdaki örnek verilmiştir.

Örnek 3.3.3: $\mathbb{R}$ alışılmış topolojiye sahip reel sayıların bir kümesi olsun. $K = [0,1] \subset \mathbb{R}$ olduğunu düşünelim. $T: K \to K$ dönüşümü

$$Tx = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \\ \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{3}}, & x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ olacak şekilde kesin artan sürekli fonksiyon ve $\forall n \geq 1$ için $\mu_n = \frac{1}{n}$ ve $l_n = \frac{1}{n+1}$ şeklinde tanımlanan $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ negatif olmayan iki reel sayı dizisi olsun. Dolayısıyla, ($\lim_{n\to\infty} \mu_n = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} l_n = 0$) dir. $n \geq 2$ ve herhangi bir $x \in K$ için $T^n x = \frac{1}{2}$ olup $F(T) = \left\{\frac{1}{2}\right\}$ dir. Açık bir şekilde, T, K üzerinde hem düzgün sürekli hem de total asimptotik genişlemeyen bir dönüşümdür. Gerçekten de, eğer $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ise, $T^n x = \frac{1}{2}$ dir. Benzer şekilde, eğer $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ise,

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| = x - \frac{1}{2} \leq x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}} = |x - Tx|$$

elde edilir. Dolayısıyla, herhangi bir $x \in K$ için

$$d\big(x, F(T)\big) = \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq |x - Tx|$$

dir. Ancak T, Lipschitzian değildir. Gerçekten herhangi bir $x, y \in K$ için

$$|Tx - Ty| \leq L|x - y|$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısının var olmadığını kabul edelim. Eğer

$$x = 1 - \frac{1}{2(1+L)^2} > \frac{1}{2} \text{ ve } y = 1$$

olarak alınırsa

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}} \leq L(1-x) \Leftrightarrow \frac{1}{3L^2} \leq \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{4L^2 + 8L + 4}$$

elde edilir. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

Araştırma Bulguları bölümünde kendi üzerine N tane total asimptotik genişlemeyen dönüşüm için ispatlarımızı yapacağımızdan dolayı işlem kolaylığı adına aşağıdaki önermemizi ifade edelim:

Önerme 3.3.4: E bir Banach uzayı, K da E nin boş olmayan bir alt kümesi ve $\{T_i\}_{i=1}^{N}: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. Bu durumda, $n \to \infty$ iken $\mu_n,\ l_n \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri var ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ \phi(0) = 0$ şeklinde bir kesin artan sürekli fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için

$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq \|x - y\| + \mu_n \phi(\|x - y\|) + l_n \tag{3.12}$$

olur (Yolacan ve Kızıltunc 2012).

İspat: $T_i: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olduğundan $i = 1,2,\cdots,N$ ve $n \to \infty$ için $\mu_{in},\ l_{in} \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_{in}\}$, $\{l_{in}\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri var ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ \phi(0) = 0$ kesin artan sürekli fonksiyon olsun. Her $x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için

$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq \|x - y\| + \mu_{in} \phi_i(\|x - y\|) + l_{in}$$

yazılabilir. Eğer,

$$\mu_n = max\{\mu_{1n}, \mu_{2n}, \cdots, \mu_{Nn}\},\ \ l_n = max\{l_{1n}, l_{2n}, \cdots, l_{Nn}\},$$

$$\phi(a) = max\{\phi_1(a), \phi_2(a), \cdots, \phi_N(a)\},\ \ a \geq 0$$

olarak düşünülürse bu durumda, $n \to \infty$ iken $\mu_n,\ l_n \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri var ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ \phi(0) = 0$ kesin artan sürekli fonksiyonu olduğundan dolayı her $x, y \in K$ ve $i = 1,2,\cdots,N$ için

$$\|T_i^n x - T_i^n y\| \leq \|x-y\| + \mu_{in}\phi_i(\|x-y\|) + l_{in}$$
$$\leq \|x-y\| + \mu_n\phi(\|x-y\|) + l_n, \qquad n \geq 1$$

elde edilir.

3.4. Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler

Bu başlık altında, kendi üzerine olmayan (nonself) total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin tanımları ve bu dönüşümlerle ilgili bazı çalışmalara yer verilmiştir.

Tanım 3.4.1: E bir reel normlu uzay ve K da E nin bir alt kümesi olsun. Her $x \in K$ için $Px = x$ olacak şekilde $P: E \to K$ sürekli dönüşümü varsa, K ya E nin bir retractı (çekilmesi) denir. Düzgün konveks bir Banach uzayının her kapalı, konveks alt kümesi bir çekilmesidir. $P: E \to E$ dönüşümünün bir retraction (çekme) olabilmesi için $P^2 = P$ şartını sağlaması gerekir.

Kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşüm kavramı, total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin önemli bir genelleştirmesi olarak ilk defa Chidume and Ofoedu (2006) tarafında ifade edilmiştir. Şimdi, bu dönüşümlerle ilgili bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 3.4.2. (Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşüm): E bir reel normlu uzay, $K \subseteq E$ boş olmayan bir küme ve $P: E \to K$, E nin K üzerine genişlemeyen çekmesi ve $T: K \to E$ bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq \|x-y\| + \mu_n\phi(\|x-y\|) + l_n$$

olacak şekilde $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ kesin artan sürekli fonksiyonu ve $n \to \infty$ iken $\mu_n,\ l_n \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri varsa $T: K \to E$

dönüşümüne “kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşüm” adı verilir (Chidume and Ofoedu 2006).

Sonuç 3.4.3: Eğer yukarıdaki son eşitsizlikte $\phi(\lambda) = \lambda$ olarak alınırsa,

$$\|T(PT)^{n-1}x - T(PT)^{n-1}y\| \leq (1 + \mu_n)\|x - y\| + l_n,$$

elde edilir. Ayrıca $l_n = 0$ olarak alınırsa ifademiz Chidume *et al*. (2003) tarafından tanımlanan kendi üzerine olmayan asimptotik genişlemeyen dönüşüme dönüşür.

Önerme 3.4.4: K, bir E reel normlu uzayının boş olmayan bir alt kümesi ve $P: E \to K$, genişlemeyen çekmesi ve $T_1, T_2: K \to E$ kendi üzerine olmayan iki total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Ayrıca, $n \to \infty$ iken $\mu_n,\ l_n \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri var ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ kesin artan sürekli fonksiyonu verilsin. Her $x, y \in K$ ve $i = 1{,}2$ için

$$\|T_i(PT_i)^{n-1}x - T_i(PT_i)^{n-1}y\| \leq \|x - y\| + \mu_n\phi(\|x - y\|) + l_n, \quad n \geq 1$$

dır (Kızıltunc ve Yolacan 2012).

İspat: $i = 1{,}2$ için $T_i: K \to E$ kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşümler, $n \to \infty$ iken $\mu_{in},\ l_{in} \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_{in}\}$, $\{l_{in}\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri var ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ kesin artan sürekli fonksiyonu olsun. Her $x, y \in K$ ve $n \geq 1$ için

$$\|T_i(PT_i)^{n-1}x - T_i(PT_i)^{n-1}y\| \leq \|x - y\| + \mu_{in}\phi_i(\|x - y\|) + l_{in}$$

yazılabilir. Eğer,

$$\mu_n = max\{\mu_{1n}, \mu_{2n}\},\ \ l_n = max\{l_{1n}, l_{2n}\},$$

$$\phi(a) = max\{\phi_1(a), \phi_2(a)\}, \ \ a \geq 0$$

olarak düşünülürse bu durumda, $n \to \infty$ iken $\mu_n,\ l_n \to 0$ olacak şekilde $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ negatif olmayan reel sayı dizileri var ve $\phi: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $\phi(0) = 0$ kesin artan sürekli fonksiyonu olduğundan dolayı her $x, y \in K$ ve $i = 1{,}2$ için

$$\begin{aligned} \|T_i(PT_i)^{n-1}x - T_i(PT_i)^{n-1}y\| &\leq \|x-y\| + \mu_{in}\phi_i(\|x-y\|) + l_{in} \\ &\leq \|x-y\| + \mu_n\phi(\|x-y\|) + l_n, \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece önermemizin ispatı tamamlanmış olur.

Albert *et al.* (2005), kendi üzerine total asimptotik genişlemeyen dönüşüm ve kendi üzerine total asimptotik zayıf kesin daraltan dönüşümü tanımlayarak Krasnosel'ski-Mann-tipli iterasyon yöntemini kullanarak normlu uzaylar için kuvvetli ve zayıf yakınsamalarını incelemişlerdir. Chidume and Ofoedu (2006) kendi üzerine olmayan (nonself) total asimptotik genişlemeyen dönüşümü tanımlayarak, kendi üzerine olan total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesi için kuvvetli yakınsamaları üzerine çalışmışlardır. Yine, Chidume and Ofoedu (2009) kendi üzerine olan total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sonlu ailesi için yeni bir iterasyon yöntemi teşkil etmiş ve kuvvetli yakınsamalarını incelemişlerdir. Hu and Yang (2008) tarafından yeni bir iterasyon şeması teşkil edilmiş ve kendi üzerine olmayan total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için kuvvetli yakınsamaları incelenmiştir. Mukhamedov and Saburov (2010) tarafından Explicit iterasyonunun düzgün reel konveks Banach uzayının boş olmayan kapalı ve konveks bir altkümesinde kendi üzerine tanımlanmış bir total asimptotik I-genişlemeyen dönüşümünün sabit noktaya yakınsaklığı çalışılmıştır.

Tanım 3.4.5. (Demikompaktlık): E bir reel normlu uzay ve K da E nin bir alt kümesi olsun. $T: K \to K$ bir dönüşüm olsun. Eğer, K daki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için $\{x_n - Tx_n\}$ yakınsak ise, T dönüşümüne demikompakttır denir.

Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin, K da x^* sabit noktasına kuvvetli yakınsayan $\{x_{n_j}\}$ alt dizi vardır (Agarwal *et al.* 2009).

Tanım 3.4.6. ((A) şartı): X Banach uzayının boş olmayan bir K alt kümesi ve $T: K \to K$ dönüşümleri verilsin. Eğer her $t > 0$ için $f(t) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için $\|x - Tx\| \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$ ise $T: K \to K$ dönüşümü (A) şartını sağlıyor denir (Senter and Dotson 1974).

Tanım 3.4.7. ((A') şartı): X Banach uzayının boş olmayan bir K alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to K$ dönüşümleri verilsin. Eğer, her $t > 0$ için $f(t) > 0$, $f(0) = 0$ olacak şekilde azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var ve her $x \in K$ için

$$\frac{1}{2}(\|x - T_1x\| + \|x - T_2x\|) \geq f\left(d\big(x, F(T)\big)\right)$$

ise $T_1, T_2: K \to K$ dönüşümleri (A') şartını sağlıyor denir (Khan and Fukhar-ud-din 2005). Ayrıca $T_1 = T_2 = T$ olarak alınırsa (A) şartının (A') şartının özel bir hali olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 3.4.8: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{\delta_n\}$ aşağıdaki eşitsizliği sağlayan ve negatif olmayan reel sayı dizileri verilsin. Her $n \geq 1$ için

$$a_{n+1} \leq (1 + \delta_n)a_n + b_n,$$

olsun. Eğer, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$

i. $\lim_{n\to\infty} a_n$ limiti vardır;

ii. $\{a_n\}$ dizisinin 0 a yakınsan bir $\{a_{n_k}\}$ alt dizisi varsa, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ dır (Tan and Xu 1993).

Yardımcı Teorem 3.4.9: E düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve $n \geq 1$ için $0 < b < c < 1$ olmak üzere b ve c iki sabit olsun. Kabul edelim ki, $\{t_n\} \subseteq [b,c] \subset (0,1)$ aralığında bir dizi, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, E de diziler olmak üzere uygun bir $s \geq 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \sup\|x_n\| \leq s, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup\|y_n\| \leq s, \qquad \lim_{n\to\infty}\|t_n x_n + (1-t_n)y_n\| = s,$$

şartları sağlansın. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = 0$ dır (Schu 1991).

Yardımcı Teorem 3.4.10: E düzgün konveks bir Banach uzayı ve $B_r(0) = \{x \in E: \|x\| \leq r\}$ olsun. Her $x, y, z \in B_r(0)$, $\alpha, \beta, \gamma \subset [0,1]$ ve $\alpha + \beta + \gamma = 1$ için,

$$\|\alpha x + \beta y + \gamma z\|^2 \leq \alpha\|x\|^2 + \beta\|y\|^2 + \gamma\|z\|^2 - \alpha\beta g(\|x-y\|)$$

olacak şekilde bir kesin artan sürekli ve konveks $g: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $g(0) = 0$ fonksiyonu vardır (Cho *et al.* 2004).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilecektir.

Öncelikle kendi üzerine olan total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı için iterasyon şeması teşkil edilmiş ve daha sonra düzgün konveks Banach uzayında bu iterasyon için kuvvetli yakınsama teoremleri verilmiştir.

İkinci olarak kendi üzerine olmayan (nonself) total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı için yeni bir iterasyon şeması ifade edilmiş ve daha sonra düzgün konveks bir Banach uzayında bu iterasyon için kuvvetli yakınsama teoremleri verilmiştir.

4.1. Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Nokta Yaklaşımı

E bir Banach uzayı, K da E nin boş olmayan konveks bir alt kümesi, $S_1, S_2, \cdots, S_N: K \to K$ genişlemeyen dönüşümler ve $T_1, T_2, \cdots, T_N: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Keyfi $x_1 \in K$ noktası için,

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^{(N)} = a_n^{(N)} T_N^n x_n^{(N-1)} + b_n^{(N)} S_N x_n + c_n^{(N)} u_n^{(N)}, \\ x_n^{(N-1)} = a_n^{(N-1)} T_{N-1}^n x_n^{(N-2)} + b_n^{(N-1)} S_{N-1} x_n + c_n^{(N-1)} u_n^{(N-1)} \\ \qquad \vdots \\ x_n^{(3)} = a_n^{(3)} T_3^n x_n^{(2)} + b_n^{(3)} S_3 x_n + c_n^{(3)} u_n^{(3)} \\ x_n^{(2)} = a_n^{(2)} T_2^n x_n^{(1)} + b_n^{(2)} S_2 x_n + c_n^{(2)} u_n^{(2)} \\ x_n^{(1)} = a_n^{(1)} T_1^n x_n + b_n^{(1)} S_1 x_n + c_n^{(1)} u_n^{(1)}, \quad n \geq 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

dır. Burada, $i = 1, 2, \dots, N$ için $\left\{u_n^{(i)}\right\}$, K da sınırlı diziler ve $a_n^{(i)} + b_n^{(i)} + c_n^{(i)} = 1$ olmak üzere $\left\{a_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{b_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{c_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ dır. (4.1) ile oluşturulan $\{x_n\}$ iteratiw dizisi, total asimptotik genişlemeyen ve genişlemeyen dönüşümler için yeni bir N-adım iterasyon şemasıdır.

Sonuç 4.1.1. i. Eğer N=3 olarak seçilirse (4.1) şeması aşağıdaki modifiye edilmiş üç adım iterasyonuna indirgenir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n^{(3)} T_3^n y_n + b_n^{(3)} S_3 x_n + c_n^{(3)} u_n^{(3)}, \\ y_n = a_n^{(2)} T_2^n z_n + b_n^{(2)} S_2 x_n + c_n^{(2)} u_n^{(2)}, \\ z_n = a_n^{(1)} T_1^n x_n + b_n^{(1)} S_1 x_n + c_n^{(1)} u_n^{(1)}, \qquad n \geq 1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Burada $i = 1, 2, 3$ için $\left\{u_n^{(i)}\right\}$, K da sınırlı diziler ve $a_n^{(i)} + b_n^{(i)} + c_n^{(i)} = 1$ olacak şekilde $\left\{a_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{b_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{c_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ dir.

ii. Eğer $T_1 = T_2 = T_3 = T$ ve $S_1 = S_2 = S_3 = S$ kendi üzerine dönüşümler ise, bu durumda (4.2) iterasyon şeması Liu *et al.* (2007) tarafından verilen (4.3) iterasyon şemasına indirgenir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n^{(3)} T y_n + b_n^{(3)} S x_n + c_n^{(3)} u_n^{(3)}, \\ y_n = a_n^{(2)} T z_n + b_n^{(2)} S x_n + c_n^{(2)} u_n^{(2)}, \\ z_n = a_n^{(1)} T x_n + b_n^{(1)} S x_n + c_n^{(1)} u_n^{(1)}, \qquad n \geq 1. \end{cases} \tag{4.3}$$

Burada $i = 1, 2, 3$ için $\left\{u_n^{(i)}\right\}$, K da sınırlı diziler ve $a_n^{(i)} + b_n^{(i)} + c_n^{(i)} = 1$ olacak şekilde $\left\{a_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{b_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}, \left\{c_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ dir.

iii. Eğer $T_2 = T_3 = T$ ve $S_2 = S_3 = S$ kendi üzerine dönüşümler ve $n \geq 1$ için $a_n^{(1)} = c_n^{(1)} = 0$ ise (4.2) ifadesi Liu *et al.* (2005) tarafından verilen (4.4) iterasyon şemasına indirgenir:

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n^{(3)} T y_n + b_n^{(3)} S x_n + c_n^{(3)} u_n^{(3)} \\ y_n = a_n^{(2)} T x_n + b_n^{(2)} S x_n + c_n^{(2)} u_n^{(2)}, \qquad n \geq 1 \end{cases}. \tag{4.4}$$

Burada $\left\{u_n^{(2)}\right\}$ ve $\left\{u_n^{(3)}\right\}$, K da sınırlı diziler, $a_n^{(2)} + b_n^{(2)} + c_n^{(2)} = 1$ ve $a_n^{(3)} + b_n^{(3)} + c_n^{(3)} = 1$ olacak şekilde $\left\{a_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{c_n^{(2)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{a_n^{(3)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n^{(3)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{c_n^{(3)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ dir.

4.2. Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler için Temel Sonuçlar

İlk olarak kuvvetli yakınsama teoremlerinden önce bu teoremlerin ispatında kullanacağımız bazı yardımcı teoremler aşağıda verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.2.1: E reel Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan, konveks bir alt kümesi, $S_1, S_2, \cdots, S_N: K \to K$ genişlemeyen dönüşümler ve $T_1, T_2, \cdots, T_N: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Ayrıca $i = 1,2,\cdots,N$ için $F(S,T) = \bigcap_{i=1}^{N} F(S_i) \cap F(T_i) \neq \emptyset$ ve negatif olmayan $\{\mu_n\}$, $\{l_n\}$ dizileri, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ şartlarını sağlasın. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^*\lambda$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ var ve $i = 1,2,\cdots,N$ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_n^{(i)} < \infty \tag{4.5}$$

olduğunda herhangi bir $x_1 \in K$ için (4.1) deki $\{x_n\}$ dizisi tanımlanırsa $p \in F(S,T)$ olmak üzere $lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ limiti vardır.

İspat: $p \in F(S,T) = \bigcap_{i=1}^{N} F(S_i) \cap F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. $i = 1,2,\cdots,N$ için $\left\{u_n^{(i)}\right\}$, K da sınırlı diziler olduğundan

$$K = max\left\{sup_{n\geq1}\left\|u_n^{(1)} - p\right\|, \cdots, sup_{n\geq1}\left\|u_n^{(N)} - p\right\|\right\}$$

yazılabilir. (3.12) ve (4.1) kulanılarak,

$$\begin{aligned}\left\|x_n{}^{(1)}-p\right\| &\leq a_n{}^{(1)}\|T_1^n x_n-p\|+b_n{}^{(1)}\|S_1 x_n-p\|+c_n{}^{(1)}\left\|u_n{}^{(1)}-p\right\| \\ &\leq a_n{}^{(1)}[\|x_n-p\|+\mu_n\phi(\|x_n-p\|)+l_n] \\ &\quad + b_n{}^{(1)}\|x_n-p\|+c_n{}^{(1)}\left\|u_n{}^{(1)}-p\right\| \\ &\leq \left(a_n{}^{(1)}+b_n{}^{(1)}\right)\|x_n-p\|+a_n{}^{(1)}\mu_n\phi(\|x_n-p\|) \\ &\quad + a_n{}^{(1)}l_n+c_n{}^{(1)}K \\ &\leq \|x_n-p\|+a_n{}^{(1)}\mu_n\phi(\|x_n-p\|)+a_n{}^{(1)}l_n+\varphi_{(1)}^n \end{aligned} \tag{4.6}$$

yazılır. Burada, $\varphi_{(1)}^n = c_n{}^{(1)}K$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n{}^{(1)} < \infty$ olduğundan dolayı, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{(1)}^n < \infty$ elde edilir. ϕ, artan bir fonksiyon olduğundan $\lambda \leq M$ iken $\phi(\lambda) \leq \phi(M)$ ve eğer, $\lambda \geq M$ ise $\phi(\lambda) \leq M^*\lambda$ dır. Her iki durumdan da $M, M^* > 0$ için;

$$\phi(\lambda) \leq \phi(M) + M^*\lambda \tag{4.7}$$

yazılır.

Böylece, (4.6) ve (4.7) den

$$\begin{aligned}\left\|x_n{}^{(1)}-p\right\| &\leq \|x_n-p\|+a_n{}^{(1)}\mu_n[\phi(M)+M^*\|x_n-p\|] \\ &\quad + a_n{}^{(1)}l_n+\varphi_{(1)}^n \\ &\leq (1+M_1\mu_n)\|x_n-p\|+R_1(\mu_n+l_n)+\varphi_{(1)}^n \end{aligned} \tag{4.8}$$

elde edilir. Burada, M_1 ve $R_1 > 0$ sabit sayılarıdır. (4.7) ve (4.8) kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\left\|x_n{}^{(2)}-p\right\| &\le a_n{}^{(2)}\left\|T_2^n x_n{}^{(1)}-p\right\| + b_n{}^{(2)}\|S_2 x_n - p\| \\
&\quad + c_n{}^{(2)}\left\|u_n{}^{(2)}-p\right\| \\
&\le a_n{}^{(2)}\left[\left\|x_n{}^{(1)}-p\right\| + \mu_n\phi\left(\left\|x_n{}^{(1)}-p\right\|\right) + l_n\right] \\
&\quad + b_n{}^{(2)}\|x_n - p\| + c_n{}^{(2)}\left\|u_n{}^{(2)}-p\right\| \\
&\le a_n{}^{(2)}\left[(1+M_1\mu_n)\|x_n-p\| + R_1(\mu_n+l_n) + \varphi_{(1)}^n\right] \\
&\quad + a_n{}^{(2)}\mu_n\left[\phi(M) + M^*\left\|x_n{}^{(1)}-p\right\|\right] + a_n{}^{(2)}l_n \\
&\quad + b_n{}^{(2)}\|x_n - p\| + c_n{}^{(2)}\left\|u_n{}^{(2)}-p\right\| \\
&\le \left(a_n{}^{(2)}+b_n{}^{(2)}\right)(1+M_1\mu_n)\|x_n-p\| \\
&\quad + a_n{}^{(2)}R_1(\mu_n+l_n) + a_n{}^{(2)}\varphi_{(1)}^n + a_n{}^{(2)}\mu_n\phi(M) \\
&\quad + a_n{}^{(2)}\mu_n M^*\left\|x_n{}^{(1)}-p\right\| + a_n{}^{(2)}l_n + c_n{}^{(2)}K \\
&\le \|x_n-p\| \\
&\quad + \left(M_1 + M^* a_n{}^{(2)} + a_n{}^{(2)}\mu_n M^* M_1\right)\mu_n\|x_n-p\| \\
&\quad + a_n{}^{(2)}R_1(\mu_n+l_n) + a_n{}^{(2)}\mu_n\phi(M) + a_n{}^{(2)}l_n \\
&\quad + a_n{}^{(2)}\mu_n M^* R_1(\mu_n+l_n) + a_n{}^{(2)}\mu_n M^*\varphi_{(1)}^n \\
&\quad + a_n{}^{(2)}\varphi_{(1)}^n + c_n{}^{(2)}K \\
&\le (1+M_2\mu_n)\|x_n-p\| + R_2(\mu_n+l_n) + \varphi_{(2)}^n \qquad (4.9)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada M_2 ve $R_2 > 0$ olan sabit sayılar olmak üzere $\varphi_{(2)}^n = a_n{}^{(2)}\mu_n M^*\varphi_{(1)}^n + a_n{}^{(2)}\varphi_{(1)}^n + c_n{}^{(2)}K$ dir. $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{(1)}^n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}c_n{}^{(2)} < \infty$ olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{(2)}^n < \infty$ elde edilir. Tümevarım yöntemiyle, (4.1), (4.8) ve (4.9) kullanılarak $j = 1,2,\cdots,N-1$ için;

$$
\left\|x_n{}^{(j)}-p\right\| \le \left(1+M_j\mu_n\right)\|x_n-p\| + R_j(\mu_n+l_n) + \varphi_{(j)}^n \qquad (4.10)
$$

elde edilir. Buna bağlı olarak (4.1) ve (4.10) ifadelerinden

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1}-p\| &= \left\|x_n{}^{(N)}-p\right\| \\
&\leq a_n{}^{(N)}\left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)}-p\right\| + b_n{}^{(N)}\|S_N x_n - p\| \\
&\quad + c_n{}^{(N)}\left\|u_n{}^{(N)}-p\right\| \\
&\leq a_n{}^{(N)}\left[\left\|x_n{}^{(N-1)}-p\right\| + \mu_n \phi\left(\left\|x_n{}^{(N-1)}-p\right\|\right) + l_n\right] \\
&\quad + b_n{}^{(N)}\|x_n-p\| + c_n{}^{(N)}\left\|u_n{}^{(N)}-p\right\| \\
&\leq a_n{}^{(N)}\left[\left(1+M_{(N-1)}\mu_n\right)\|x_n-p\| + R_{(N-1)}(\mu_n+l_n) \right.\\
&\quad \left. + \varphi_{(N-1)}^n\right] + a_n{}^{(N)}\mu_n\left[\phi(M) + M^*\left\|x_n{}^{(N-1)}-p\right\|\right] \\
&\quad + a_n{}^{(N)} l_n + b_n{}^{(N)}\|x_n-p\| + c_n{}^{(N)}\left\|u_n{}^{(N)}-p\right\| \\
&\leq \left(a_n{}^{(N)}+b_n{}^{(N)}\right)\left(1+M_{(N-1)}\mu_n\right)\|x_n-p\| \\
&\quad + a_n{}^{(N)} R_{(N-1)}(\mu_n+l_n) + a_n{}^{(N)}\varphi_{(N-1)}^n + a_n{}^{(N)}\mu_n\phi(M) \\
&\quad + a_n{}^{(N)}\mu_n M^*\left\|x_n{}^{(N-1)}-p\right\| + a_n{}^{(N)} l_n + c_n{}^{(N)} K \\
&\leq \left(1-c_n{}^{(N)}\right)\left(1+M_{(N-1)}\mu_n\right)\|x_n-p\| \\
&\quad + a_n{}^{(N)} R_{(N-1)}(\mu_n+l_n) + a_n{}^{(N)}\varphi_{(N-1)}^n + a_n{}^{(N)}\mu_n\phi(M) \\
&\quad + a_n{}^{(N)} l_n + c_n{}^{(N)} K \\
&\quad + a_n{}^{(N)}\mu_n M^*\left[\left(1+M_{(N-1)}\mu_n\right)\|x_n-p\| \right.\\
&\quad \left. + R_{(N-1)}(\mu_n+l_n) + \varphi_{(N-1)}^n\right] \\
&\leq \|x_n-p\| \\
&\quad + \left(M_{(N-1)} + M^* a_n{}^{(N)} + a_n{}^{(N)}\mu_n M^* M_{(N-1)}\right)\mu_n \|x_n \\
&\quad - p\| + a_n{}^{(N)} R_{(N-1)}(\mu_n+l_n) + a_n{}^{(N)}\mu_n\phi(M) \\
&\quad + a_n{}^{(N)} l_n + a_n{}^{(N)}\mu_n M^* R_{(N-1)}(\mu_n+l_n) \\
&\quad + a_n{}^{(N)}\mu_n M^*\varphi_{(N-1)}^n + a_n{}^{(N)}\varphi_{(N-1)}^n + c_n{}^{(N)} K \\
&\leq (1+M_N\mu_n)\|x_n-p\| + R_N(\mu_n+l_n) + \varphi_{(N)}^n
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

bulunur. Burada M_N ve $R_N > 0$ sabit sayılar olmak üzere $\varphi_{(N)}^n = a_n{}^{(N)}\mu_n M^*\varphi_{(N-1)}^n + a_n{}^{(N)}\varphi_{(N-1)}^n + c_n{}^{(N)} K$ dır. $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{(N-1)}^n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_n{}^{(N)} < \infty$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{(N)}^n < \infty$ elde edilir. Ayrıca, $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{(N)}^n < \infty$ olduğundan ve Yardımcı Teorem 3.4.8 ye göre $lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ limiti vardır.

Yardımcı Teorem 4.2.2: E düzgün konveks Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan konveks bir alt kümesi, $S_1, S_2, \cdots, S_N : K \to K$ genişlemeyen dönüşümler ve $T_1, T_2, \cdots, T_N : K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Ayrıca $i =$

$1,2,\cdots,N$ için $F(S,T)=\bigcap_{i=1}^{N}F(S_i)\cap F(T_i)\neq\emptyset$ ve negatif olmayan $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n<\infty \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty}l_n<\infty \tag{4.12}$$

olacak şekilde tanımlansın. Kabul edelim ki, her $\lambda\geq M$ için $\phi(\lambda)\leq M^*\lambda$ olacak şekilde $M,M^*>0$ var, $\forall\, x,y\in K$ ve $\forall\, i=1,2,\cdots,N$ için

$$\|x-T_iy\|\leq\|S_ix-T_iy\| \tag{4.13}$$

olsun. Herhangi bir $x_1\in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$ için;

i. $n_0\in\mathbb{N}$ ve $\forall\; n\geq n_0$ olmak üzere

$$0<\eta_1\leq a_n^{(i)}\leq\eta_2<1, \tag{4.14}$$

ii. $\forall\; i=1,2,\cdots,N$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_n^{(i)}<\infty, \tag{4.15}$$

ise

$$lim_{n\to\infty}\|x_n-S_ix_n\|=lim_{n\to\infty}\|x_n-T_i^nx_n\|=0$$

dır.

İspat: $p\in F(S,T)=\bigcap_{i=1}^{N}F(S_i)\bigcap F(T_i)\neq\emptyset$ olsun. Yardımcı Teorem 4.2.1 den $lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|$ limiti vardır. $r\geq 0$ için $lim_{n\to\infty}\|x_n-p\|=r$ yazabiliriz. $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{(N-1)}^n<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}l_n<\infty$ olmak üzere (4.10) dan,

$$\begin{aligned}&\left\|{x_n}^{(N-1)}-p\right\|\\&\leq\left(1+M_{(N-1)}\mu_n\right)\|x_n-p\|+R_{(N-1)}(\mu_n+l_n)+\varphi_{(N-1)}^n\end{aligned} \tag{4.16}$$

elde edilir. Buradan, (4.16) ifadesinin her iki tarafının üst limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} &limsup_{n\to\infty}\left\|x_n{}^{(N-1)} - p\right\| \\ &\leq limsup_{n\to\infty}\left[\left(1 + M_{(N-1)}\mu_n\right)\|x_n - p\| + R_{(N-1)}(\mu_n + l_n) + \varphi^n_{(N-1)}\right] \\ &\leq r \end{aligned} \tag{4.17}$$

yazılır. (4.12) ve (4.17) den;

$$\begin{aligned} &limsup_{n\to\infty}\left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)} - p\right\| \\ &\leq limsup_{n\to\infty}\left[\left\|x_n{}^{(N-1)} - p\right\| + \mu_n\phi\left(\left\|x_n{}^{(N-1)} - p\right\|\right) + l_n\right] \\ &\leq r \end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. S_N genişlemeyen bir dönüşüm olup her iki tarafının üst limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} limsup_{n\to\infty}\|S_N x_n - p\| &\leq limsup_{n\to\infty}\|x_n - p\| \\ &\leq r \end{aligned} \tag{4.19}$$

olur. Şimdi bir sonraki durumu gözönüne alalım. Yani,

$$\left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)} - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right\| \quad \leq \quad \left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)} - p\right\| + c_n^{(N)}\left\|u_n^{(N)} - x_n\right\|$$

dir. Yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa

$$limsup_{n\to\infty}\left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)} - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right\| \leq r \tag{4.20}$$

olur. Ayrıca,

$$\left\|S_N x_n - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right\| \quad \leq \quad \|S_N x_n - p\| + c_n^{(N)}\left\|u_n^{(N)} - x_n\right\|$$

dir. Yukarıdaki son eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa

$$limsup_{n\to\infty}\left\|S_N x_n - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right\| \le r \tag{4.21}$$

elde edilir. Ayrıca

$$x_n^{(N)} - p = a_n^{(N)}\left(T_N^n x_n{}^{(N-1)} - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right)$$
$$+\left(1 - a_n^{(N)}\right)\left(S_N x_n - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right)$$

eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\begin{aligned} r &= lim_{n\to\infty}\left\|x_n^{(N)} - p\right\| \\ &= lim_{n\to\infty}\left\|a_n^{(N)}\left(T_N^n x_n{}^{(N-1)} - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right)\right. \\ &\left.+\left(1 - a_n^{(N)}\right)\left(S_N x_n - p + c_n^{(N)}\left(u_n^{(N)} - x_n\right)\right)\right\| \end{aligned} \tag{4.22}$$

olup (4.20), (4.21), (4.22) ve Yardımcı Teorem 3.4.9 den aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$lim_{n\to\infty}\left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)} - S_N x_n\right\| = 0. \tag{4.23}$$

(4.13) ifadesinden

$$lim_{n\to\infty}\left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)} - x_n\right\| = 0 \tag{4.24}$$

elde edilir. Şimdi, $lim_{n\to\infty}\left\|T_{N-1}^n x_n^{(N-2)} - S_{N-1}x_n\right\| = 0$ olduğunu gösterelim. Her $n \ge 1$ için,

$$
\begin{aligned}
\|x_n - p\| &\leq \left\|T_N^n x_n^{(N-1)} - x_n\right\| + \left\|T_N^n x_n^{(N-1)} - p\right\| \\
&\leq \left\|T_N^n x_n^{(N-1)} - x_n\right\| + \left[\left\|x_n^{(N-1)} - p\right\| + \mu_n \phi\left(\left\|x_n^{(N-1)} - p\right\|\right) + l_n\right]
\end{aligned}
$$

yazılabilir. (4.12) ve (4.24) ifadelerinden

$$
r = lim_{n\to\infty}\|x_n - p\| \leq liminf_{n\to\infty}\left\|x_n^{(N-1)} - p\right\|
$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeyi takiben

$$
r \quad \leq \quad liminf_{n\to\infty}\left\|x_n^{(N-1)} - p\right\| \quad \leq \quad limsup_{n\to\infty}\left\|x_n^{(N-1)} - p\right\| \quad \leq \quad r
$$

yazılabilir. Buradan,

$$
lim_{n\to\infty}\left\|x_n^{(N-1)} - p\right\| = r \tag{4.25}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\left\|x_n^{(N-2)} - p\right\| \quad \leq \quad \left(1 + M_{(N-2)}\mu_n\right)\|x_n - p\| + R_{(N-2)}(\mu_n + l_n) + \varphi_{(N-2)}^n
$$

olup, $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{(N-2)}^n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} l_n < \infty$ olduğunda yukarıdaki son eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa

$$
\begin{aligned}
&limsup_{n\to\infty}\left\|x_n^{(N-2)} - p\right\| \\
&\leq limsup_{n\to\infty}\left[\left(1 + M_{(N-2)}\mu_n\right)\|x_n - p\| + R_{(N-2)}(\mu_n + l_n) + \varphi_{(N-2)}^n\right] \\
&\leq r,
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

elde edilir. (4.12) ifadesinden

$$limsup_{n\to\infty}\left\|T_{N-1}^{n}x_n^{(N-2)}-p\right\|$$
$$\leq limsup_{n\to\infty}\left[\left\|x_n^{(N-2)}-p\right\|+\mu_n\phi\left(\left\|x_n^{(N-2)}-p\right\|\right)+l_n\right]$$
$$\leq r \tag{4.27}$$

olur. S_{N-1} genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} limsup_{n\to\infty}\|S_{N-1}x_n-p\| &\leq limsup_{n\to\infty}\|x_n-p\| \\ &\leq r \end{aligned} \tag{4.28}$$

olur. Yine bir sonraki durumu düşünelim

$$\begin{aligned} \left\|T_{N-1}^{n}x_n{}^{(N-2)}-p+c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)}-x_n\right)\right\| &\leq \left\|T_{N-1}^{n}x_n{}^{(N-2)}-p\right\| \\ &+c_n^{(N-1)}\left\|u_n^{(N-1)}-x_n\right\| \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki son eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa,

$$limsup_{n\to\infty}\left\|T_{N-1}^{n}x_n{}^{(N-2)}-p+c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)}-x_n\right)\right\|\leq r \tag{4.29}$$

olur. Ayrıca

$$\left\|S_{N-1}x_n-p+c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)}-x_n\right)\right\| \leq \|S_{N-1}x_n-p\|+c_n^{(N-1)}\left\|u_n^{(N-1)}-x_n\right\|$$

olup eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa,

$$limsup_{n\to\infty}\left\|S_{N-1}x_n-p+c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)}-x_n\right)\right\|\leq r \tag{4.30}$$

elde edilir. Ayrıca

$$x_n^{(N-1)} - p = a_n^{(N-1)}\left(T_{N-1}^n x_n{}^{(N-2)} - p + c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)} - x_n\right)\right)$$
$$+\left(1 - a_n^{(N-1)}\right)\left(S_{N-1}x_n - p + c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)} - x_n\right)\right)$$

eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$\begin{aligned} r &= lim_{n\to\infty}\left\|x_n^{(N-1)} - p\right\| \\ &= lim_{n\to\infty}\left\|a_n^{(N-1)}\left(T_{N-1}^n x_n{}^{(N-2)} - p + c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)} - x_n\right)\right)\right. \\ &\left.+\left(1 - a_n^{(N-1)}\right)\left(S_{N-1}x_n - p + c_n^{(N-1)}\left(u_n^{(N-1)} - x_n\right)\right)\right\| \end{aligned} \tag{4.31}$$

olup (4.29), (4.30), (4.31) ve Yardımcı Teorem 3.4.9 den

$$lim_{n\to\infty}\left\|T_{N-1}^n x_n{}^{(N-2)} - S_{N-1}x_n\right\| = 0 \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.13) ifadesinden

$$lim_{n\to\infty}\left\|T_{N-1}^n x_n{}^{(N-2)} - x_n\right\| = 0 \tag{4.33}$$

olur. Benzer yöntemle, $0 \le i \le (n-2)$ için

$$lim_{n\to\infty}\left\|T_{N-i}^n x_n{}^{(N-i-1)} - x_n\right\| = 0 \tag{4.34}$$

elde edilir.

Şimdi de aşağıdaki son durumu düşünelim,

$$\left\|T_1^n x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right\| \quad \le \quad \|T_1^n x_n - p\| + c_n^{(1)}\left\|u_n^{(1)} - x_n\right\|$$

dir. Yukarıdaki son eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa

$$limsup_{n\to\infty}\left\|T_1^n x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right\| \leq r \tag{4.35}$$

olur. Ayrıca, S_1 genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan

$$\begin{aligned} limsup_{n\to\infty}\|S_1 x_n - p\| &\leq limsup_{n\to\infty}\|x_n - p\| \\ &\leq r \end{aligned} \tag{4.36}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\|S_1 x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right\| \quad \leq \quad \|S_1 x_n - p\| + c_n^{(1)}\left\|u_n^{(1)} - x_n\right\|$$

olup bu son eşitsizliğin her iki tarafının üst limiti alınırsa

$$limsup_{n\to\infty}\left\|S_1 x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right\| \leq r \tag{4.37}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} - p = a_n^{(1)} &\left(T_1^n x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right) \\ &+\left(1 - a_n^{(1)}\right)\left(S_1 x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right) \end{aligned}$$

eşitliğinin her iki tarafının limiti alınırsa

$$r = lim_{n\to\infty}\left\|x_n^{(1)} - p\right\|$$
$$= lim_{n\to\infty}\left\|a_n^{(1)}\left(T_1^n x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right)\right.$$
$$\left.+\left(1 - a_n^{(1)}\right)\left(S_1 x_n - p + c_n^{(1)}\left(u_n^{(1)} - x_n\right)\right)\right\| \quad (4.38)$$

olup (4.35), (4.37), (4.38) ve Yardımcı Teorem 3.4.9 den

$$lim_{n\to\infty}\|T_1^n x_n - S_1 x_n\| = 0. \quad (4.39)$$

eşitlik elde edilir. (4.13) ifadesinden

$$lim_{n\to\infty}\|T_1^n x_n - x_n\| = 0 \quad (4.40)$$

olur. Üstteki ispatlar gibi benzer ispat yöntemlerini kullanarak

$$lim_{n\to\infty}\|T_2^n x_n - x_n\| = 0 \quad (4.41)$$

ifadesi elde edilir.

Benzer yöntemle, her $i = 1,2,\ldots,N$ için

$$lim_{n\to\infty}\|T_i^n x_n - x_n\| = 0 \quad (4.42)$$

ifadesi elde edilir. (4.23), (4.24), (4.32), (4.33), (4.34), (4.39) ve (4.40) dan, $i = 1,2,\ldots,N$ için

$$lim_{n\to\infty}\|x_n - S_i x_n\| = 0 \quad (4.43)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.3: E reel Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan, kapalı konveks bir alt kümesi, $S_1,\ S_2,\cdots,\ S_N\colon K\to K$ sürekli genişlemeyen dönüşümler ve $T_1,T_2,\cdots,T_N\colon K\to K$ sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Ayrıca $i=1,2,\cdots,N$ için $F(S,T)=\bigcap_{i=1}^{N}F(S_i)\cap F(T_i)\neq\emptyset$ olsun ve $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n<\infty \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty}l_n<\infty \tag{4.44}$$

şartını sağlayan iki dizi olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda\geq M$ için $\phi(\lambda)\leq M^*\lambda$ olacak şekilde $M,M^*>0$ var, her $x,y\in K$ ve $i=1,2,\dots,N$ için

$$\|x-T_iy\|\leq\|S_ix-T_iy\| \tag{4.45}$$

ve herhangi bir $x_1\in K$ için (4.1) deki $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$ için;

i. $n_0\in\mathbb{N}$ için $\forall\ n\geq n_0$ olmak üzere

$$0<\eta_1\leq a_n^{(i)}\leq\eta_2<1, \tag{4.46}$$

ii. $\forall\, i=1,2,\cdots,N$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty}c_n^{(i)}<\infty, \tag{4.47}$$

olması durumunda herhangi bir $x_1\in K$ için (4.1) deki $\{x_n\}$ dizisinin $S_1,S_2,\cdots,S_N,T_1,T_2,\cdots,T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $n\geq1$ için $d\big(x_n,F(S,T)\big)=inf_{p\in F(S,T)}\|x_n-p\|$ olmak üzere $liminf_{n\to\infty}d\big(x_n,F(S,T)\big)=0$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik açıktır. Dolayısıyla sadece yeterlilik kısmı ispatlayalım. $p\in F(S,T)$ için, (4.11)'den

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-p\| &= \left\|x_n^{(N)}-p\right\| \\ &\le (1+M_N\mu_n)\|x_n-p\| + R_N(\mu_n+l_n)+\varphi_{(N)}^n \\ &= \|x_n-p\|+\delta_n \end{aligned} \tag{4.48}$$

yazılır. Burada $\delta_n = M_N\mu_n\|x_n-p\| + R_N(\mu_n+l_n)+\varphi_{(N)}^n$ dır. $\{x_n-p\}$ sınırlı, $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n<\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}l_n<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{(N)}^n<\infty$ olduğundan, $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_n<\infty$ dır. Dolayısıyla (4.48) den

$$inf_{p\in F(S,T)}\|x_{n+1}-p\| \le inf_{p\in F(S,T)}\|x_n-p\| + \delta_n,$$

yazılır. Bu ifade aynı zamanda

$$d\big(x_{n+1},F(S,T)\big) \le d\big(x_n,F(S,T)\big)+\delta_n \tag{4.49}$$

ifadesinde denktir. (4.49)'dan Yardımcı Teorem 3.4.8 nin (i) şıkkına göre, $lim_{n\to\infty}d\big(x_n,F(S,T)\big)$ limiti vardır. $liminf_{n\to\infty}d\big(x_n,F(S,T)\big)=0$ olduğuna dikkat edilirse, (4.49)'dan ve Yardımcı Teorem 3.4.8 nin (ii) şıkkından dolayı $lim_{n\to\infty}d\big(x_n,F(S,T)\big)=0$ olur.

Şimdi $lim_{n\to\infty}d\big(x_n,F(S,T)\big)=0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\delta_n<\infty$ olduğundan verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için, $n\ge N_1$ olmak üzere $d\big(x_n,F(S,T)\big)\le\frac{\varepsilon}{4}$ ve $\sum_{j=n}^{\infty}\delta_j\le\frac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı vardır. Buradan, $d\left(x_{N_1},F(S,T)\right)\le\frac{\varepsilon}{4}$ ve $\sum_{j=N_1}^{\infty}\delta_j\le\frac{\varepsilon}{4}$ ifadeleri yazılabilir. Bu da, $\left\|x_{N_1}-p_1\right\|\le\frac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde bir $p_1\in F(S,T)$ sabit noktasının var olduğu anlamına gelir. (4.48) den, $n\ge N_1$ ve $m\ge 1$ iken

$$\begin{aligned}\|x_{n+m}-x_n\| &\le \|x_{n+m}-p_1\|+\|x_n-p_1\| \\ &\le \left\|x_{N_1}-p_1\right\| + \sum_{j=N_1}^{n+m-1}\delta_j + \left\|x_{N_1}-p_1\right\| + \sum_{j=N_1}^{n-1}\delta_j\end{aligned}$$

$$\leq \|x_{N_1} - p_1\| + \sum_{j=N_1}^{\infty} \delta_j + \|x_{N_1} - p_1\| + \sum_{j=N_1}^{\infty} \delta_j$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$= \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$, E de bir Cauchy dizisidir ve E tam olduğundan dolayı $n \to \infty$ iken $x_n \to p$ olacak şekilde $p \in E$ vardır. p noktası $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ nin ortak sabit noktası olduğunu yani $p \in F(S,T)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $p \in F^t(S,T)$ (burada $F^t(S,T)$, $F(S,T)$ nin tümleyenini göstermektedir). $F(S,T)$, E nin kapalı bir alt kümesi olduğundan (her bir $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ sürekli), $d\big(p, F(S,T)\big) > 0$ yazılabilir. Ancak her $q \in F(S,T)$ için,

$$\|p - q\| \leq \|p - x_n\| + \|x_n - q\|$$

elde edilir. Buradan

$$d\big(p, F(S,T)\big) \leq \|x_n - p\| + d\big(x_n, F(S,T)\big)$$

yazılır. $n \to \infty$ için $d\big(p, F(S,T)\big) > 0$ çelişkisinden dolayı $d\big(p, F(S,T)\big) = 0$ ifadesi elde edilir. O halde, p, $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ nin ortak sabit noktasıdır.

Teorem 4.2.4: E reel düzgün konveks Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan, kapalı konveks bir alt kümei, $S_1, S_2, \cdots, S_N: K \to K$ düzgün sürekli genişlemeyen dönüşümler ve $T_1, T_2, \cdots, T_N: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty \text{ ve } \sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty \tag{4.50}$$

şartını sağlayan iki dizi ve $i = 1,2,\cdots,N$ için $F(S,T) = \bigcap_{i=1}^{N} F(S_i) \cap F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^*\lambda$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ var, her $x, y \in K$ ve $i = 1,2,\dots,N$ için

$$\|x - T_i y\| \leq \|S_i x - T_i y\| \tag{4.51}$$

ve herhangi bir $x_1 \in K$ için (4.1) deki gibi $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ için;

i. $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\forall\ n \geq n_0$ olmak üzere

$$0 < \eta_1 \leq a_n^{(i)} \leq \eta_2 < 1, \tag{4.52}$$

ii. $\forall\, i = 1,2,\cdots,N$ olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_n^{(i)} < \infty, \tag{4.53}$$

olması durumunda $T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinden herhangi biri kompakt ise (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ iterasyon dizisi $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Yardımcı Teorem 4.2.2 yi göz önüne alarak $i = 1,2,\cdots,N$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - S_i x_n\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i^n x_n\| = 0 \tag{4.54}$$

olduğunu biliyoruz. T_N total asimptotik genişlemeyen dönüşüm, S_N genişlemeyen dönüşüm olduğundan ve (4.1), (4.23), (4.43) ifadeleri ve $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(N)} < \infty$ şartından dolayı

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \left\|a_n{}^{(N)} T_N^n x_n{}^{(N-1)} + b_n{}^{(N)} S_N x_n + c_n{}^{(N)} u_n{}^{(N)} - x_n\right\| \\
&\leq a_n{}^{(N)} \left\|T_N^n x_n{}^{(N-1)} - S_N x_n\right\| + c_n{}^{(N)} \left\|u_n{}^{(N)} - x_n\right\| \\
&\quad + \left(1 - a_n{}^{(N)} - c_n{}^{(N)}\right) \|S_N x_n - x_n\| \\
&\quad \to 0 \ (n \to \infty \ için)
\end{aligned}
\tag{4.55}
$$

elde edilir. T_1 kompakt olsun. T_1 sürekli ve kompakt olduğundan dolayı, T_1 tamamen süreklidir. Dolayısıyla $p \in E$ için $j \to \infty$ iken $T_1^{n_j} x_{n_j} \to p$ olacak şekilde $\{T_1^n x_n\}$ nin $\left\{T_1^{n_j} x_{n_j}\right\}$ alt dizisi vardır. Bu yüzden, $j \to \infty$ için $T_1^{n_j+1} x_{n_j} \to T_1 p$ ve (4.54) den, $lim_{j\to\infty} x_{n_j} = p$ elde edilir. Ayrıca, (4.54) den, $j \to \infty$ için $T_2^{n_j} x_{n_j} \to p, \cdots, T_N^{n_j} x_{n_j} \to p$ dir. O halde, $j \to \infty$ için $T_2^{n_j+1} x_{n_j} \to T_2 p, \cdots, T_N^{n_j+1} x_{n_j} \to T_N p$ yazılır. (4.55) ifadesini kullanarak $j \to \infty$ için $x_{n_{j+1}} \to p$ olur. Buradan, $p \in F(S,T)$ olduğunu elde edilir. $\forall \ i = 1,2,\cdots,N$ için

$$
\begin{aligned}
\|p - T_i p\| \leq & \left\|p - x_{n_{j+1}}\right\| + \left\|x_{n_{j+1}} - T_i^{n_j+1} x_{n_{j+1}}\right\| \\
& + \left\|T_i^{n_j+1} x_{n_{j+1}} - T_i^{n_j+1} x_{n_j}\right\| + \left\|T_i^{n_j+1} x_{n_j} - T_i p\right\|
\end{aligned}
\tag{4.56}
$$

elde edilir. $i = 1,2,\dots,N$ için, $j \to \infty$ iken limit alınırsa T_i nin düzgün sürekli olduğundan $p = T_i p$ elde edilir. Buradan da, $p \in F(T_i)$ olduğu görülür. Ayrıca, $i = 1,2,\cdots,N$; S_i dönüşümlerinin sürekliliği ve Yardımcı Teorem 4.2.2 den

$$
\|S_i p - p\| = lim_{j\to\infty} \left\|S_i x_{n_j} - x_{n_j}\right\| = 0,
$$

ifadesi elde edilir. Yani, $p \in F(S,T) = \bigcap_{i=1}^N F(S_i) \cap F(T_i)$ dir. Yardımcı Teorem 4.2.1 den $lim_{n\to\infty} \|x_n - p\|$ vardır ve $p \in F(S,T)$ dir. O halde $\{x_n\}$ dizisi $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

4.3. Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler için Sabit Nokta Yaklaşımı

Temel sonuçlarımızın ikinci kısmında, kendi üzerine olmayan (nonself) total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin sınıfı için bazı kuvvetli yakınsama teoremleri verilecektir. Bunun için kullanacağımız iterasyon şeması aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir:

E düzgün konveks bir reel Banach uzayı, K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan konveks bir alt kümesi olsun. Ayrıca, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ şartlarını sağlayan $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$, $\{l_n\}_{n\geq 1} \subset [0,\infty)$ dizileri ile $T_1, T_2: K \to E$ iki total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olmak üzere $x_1 \in K$ keyfi noktası için

$$\begin{cases} y_n = P(\alpha_n' x_n + \beta_n' T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + \gamma_n' v_n) \\ x_{n+1} = P(\alpha_n y_n + \beta_n T_2 (PT_2)^{n-1} y_n + \gamma_n u_n), \qquad n \geq 1 \end{cases} \tag{4.57}$$

iterasyon şemasını teşkil edelim. Burada $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K da sınırlı diziler ve $\alpha_n' + \beta_n' + \gamma_n' = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha_n'\}$, $\{\beta_n'\}$, $\{\gamma_n'\} \subset [0,1]$ olsun. (4.57) ile oluşturulan $\{x_n\}$ iterativ dizisi total asimptotik genişlemeyen dönüşümler için Xu (1998) tarafından tanımlanan modifiye edilmiş hata terimli Ishikawa iterasyon şeması olarak adlandırılır.

Sonuç 4.3.1. i. Eğer, $\beta_n' = \gamma_n' \equiv 0$ ve $\alpha_n' \equiv 1$ olarak alınırsa (4.57) iterativ dizisi (4.58) ile Xu (1998) tarafından tanımlanan modifiye edilmiş hata terimli Mann iterasyon şemasına indirgenir:

$$x_{n+1} = P(\alpha_n x_n + \beta_n T_2 (PT_2)^{n-1} x_n + \gamma_n u_n), \qquad n \geq 1, \tag{4.58}$$

iterasyon şemasında $\{u_n\}$, K da sınırlı dizi ve $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \subset [0,1]$ dir.

ii. Eğer, $T_1 = T_2 = T$ kendi üzerine dönüşümlerse ve $\beta'_n = \gamma'_n \equiv 0$ ve $\alpha'_n \equiv 1$ olarak alınırsa, (4.57) iterativ dizisi, Nilsrakoo (2009) tarafından (4.59) ile tanımlanan modifiye edilmiş hata terimli Mann iterasyon şemasına indirgenir:

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + \beta_n T^n x_n + \gamma_n u_n, \qquad n \geq 1, \tag{4.59}$$

iterasyon şemasında $\{u_n\}$, K da sınırlı dizi ve $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\} \subset [0,1]$ dir.

iii. Eğer, $T_1 = T_2 = T$ kendi üzerine dönüşümlerse ve $\beta'_n = \gamma_n = \gamma'_n \equiv 0$ ve $\alpha'_n \equiv 1$ olarak alınırsa, (4.57) iterativ dizisi modifiye edilmiş Mann iterasyon şemasına indirgenir.

4.4. Kendi Üzerine Olmayan Total Asimptotik Genişlemeyen Dönüşümler için Temel Sonuçlar

Kuvvetli yakınsama teoremlerini vermeden önce bu teoremlerin ispatında kullanacağımız bazı yardımcı teoremler aşağıda verilmiştir.

Yardımcı Teorem 4.4.1: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to E$ iki total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $\mathcal{F} := F(T_1) \cap F(T_2) = \{x \in K: T_1 x = T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma'_n < \infty$ olacak şekilde K da $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ sınırlı dizileri verilsin. Herhangi bir $x_1 \in K$ ve $q \in \mathcal{F}$ için (4.57) deki $\{x_n\}$ dizisinin $lim_{n\to\infty} \|x_n - q\|$ limiti vardır.

İspat: $q \in \mathcal{F}$ olsun. $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K da sınırlı diziler olduğundan dolayı

$$r = max\{sup_{n\geq 1}\|u_n - q\|, sup_{n\geq 1}\|v_n - q\|\} \tag{4.60}$$

yazılabilir. Önerme 3.4.4 ve (4.57) den

$$\begin{aligned}
\|y_n - q\| &= \|P(\alpha'_n x_n + \beta'_n T_1(PT_1)^{n-1}x_n + \gamma'_n v_n) - q\| \\
&\leq \alpha'_n\|x_n - q\| + \beta'_n\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\| + \gamma'_n\|v_n - q\| \\
&\leq \beta'_n[\|x_n - q\| + \mu_n\phi(\|x_n - q\|) + l_n] + \alpha'_n\|x_n - q\| \\
&\quad + \gamma'_n\|v_n - q\| \\
&\leq (\alpha'_n + \beta'_n)\|x_n - q\| + \beta'_n\mu_n\phi(\|x_n - q\|) + \beta'_n l_n + \gamma'_n r
\end{aligned} \tag{4.61}$$

elde edilir. Burada, ϕ artan bir fonksiyon olduğundan $\lambda \leq M$ iken $\phi(\lambda) \leq \phi(M)$ ve eğer $\lambda \geq M$ ise $\phi(\lambda) \leq M^*\lambda$ dir. Her iki durumdan da $M, M^* > 0$ için;

$$\phi(\lambda) \leq \phi(M) + M^*\lambda \tag{4.62}$$

yazılır. (4.61) ve (4.62) den,

$$\begin{aligned}
\|y_n - q\| &\leq \|x_n - q\| + \beta'_n\mu_n[\phi(M) + M^*\|x_n - q\|] + \beta'_n l_n + \gamma'_n r \\
&\leq (1 + Q_1\mu_n)\|x_n - q\| + Q_1(\mu_n + l_n) + \gamma'_n r
\end{aligned} \tag{4.63}$$

elde edilir. Burada, $Q_1 > 0$ olan bir sabit sayıdır. Benzer şekilde, (4.57) den

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\| &\leq \alpha_n\|y_n - q\| + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}y_n - q\| + \gamma_n\|u_n - q\| \\
&\leq \beta_n[\|y_n - q\| + \mu_n\phi(\|y_n - q\|) + l_n] + \alpha_n\|y_n - q\| \\
&\quad + \gamma_n r \\
&\leq (\alpha_n + \beta_n)\|y_n - q\| + \beta_n\mu_n\phi(\|y_n - q\|) + \beta_n l_n + \gamma_n r \\
&\leq \|y_n - q\| + \beta_n\mu_n[\phi(M) + M^*\|y_n - q\|] + \beta_n l_n + \gamma_n r \\
&\leq (1 + Q_2\mu_n)\|y_n - q\| + Q_2(\mu_n + l_n) + \gamma_n r
\end{aligned} \tag{4.64}$$

elde edilir. Burada, $Q_2 > 0$ olan bir sabit sayıdır. (4.63) ve (4.64) den

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\| &\le (1+Q_2\mu_n)[(1+Q_1\mu_n)\|x_n-q\|+Q_1(\mu_n+l_n)\\ &\quad +\gamma_n' r)]+Q_2(\mu_n+l_n)+\gamma_n r\\ &\le \|x_n-q\|+(Q_1+Q_2+Q_2\mu_n Q_1)\mu_n\|x_n-q\|\\ &\quad +Q_1(\mu_n+l_n)+Q_1Q_2\mu_n(\mu_n+l_n)+\gamma_n' r+Q_2\mu_n\gamma_n' r\\ &\quad +Q_2(\mu_n+l_n)+\gamma_n r\\ &\le (1+Q_3\mu_n)\|x_n-q\|+Q_3(\mu_n+l_n)+\gamma_n' r+Q_2\mu_n\gamma_n' r\\ &\quad +\gamma_n r\\ &\le (1+Q_3\mu_n)\|x_n-q\|+Q_3(\mu_n+l_n)+\Gamma_{(1)}^{\mathrm{n}}\end{aligned} \tag{4.65}$$

elde edilir. Burada, $\Gamma_{(1)}^{\mathrm{n}}=\gamma_n' r+Q_2\mu_n\gamma_n' r+\gamma_n r$ ve $Q_3>0$ olan bir sabit sayıdır. $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n'<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\gamma_n'<\infty$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_{(1)}^{\mathrm{n}}<\infty$ yazılabilir. Ayrıca, $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n<\infty$, $\sum_{i=1}^{\infty}l_n<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\Gamma_{(1)}^{\mathrm{n}}<\infty$ olduğundan ve Yardımcı Teorem 3.4.8 ye göre $lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|$ limiti vardır.

Yardımcı Teorem 4.4.2: E düzgün konveks bir Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1,T_2\colon K\to E$ iki total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$, $\sum_{i=1}^{\infty}\mu_n<\infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}l_n<\infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $\mathcal{F}:=F(T_1)\cap F(T_2)=\{x\in K\colon T_1x=T_2x=x\}\neq\emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda\ge M$ için $\phi(\lambda)\le M^*\lambda$ olduğunda $M,M^*>0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n<\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n'<\infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\gamma_n'<\infty$ olacak şekilde K da $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ sınırlı dizileri verilsin. Herhangi bir $x_1\in K$ için (4.57) deki $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Ayrıca,

i. $0<liminf_{n\to\infty}\alpha_n$ ve $0<liminf_{n\to\infty}\gamma_n<limsup_{n\to\infty}\gamma_n<1$,
ii. $0<liminf_{n\to\infty}\alpha_n{}'$ve $0<liminf_{n\to\infty}\gamma_n{}'<limsup_{n\to\infty}\gamma_n{}'<1$,

olsun. Bu durumda $i=1,2$ için $lim_{n\to\infty}\|T_i(PT_i)^{n-1}x_n-x_n\|=0$ eşitliği elde edilir.

İspat: $q\in\mathcal{F}$ olsun. Yardımcı Teorem 4.4.1 den $\{x_n-q\}$, $\{T_1(PT_1)^{n-1}x_n-q\}$, $\{y_n-q\}$, $\{T_2(PT_2)^{n-1}y_n-q\}$, $\{u_n-q\}$ ve $\{v_n-q\}$ dizileri sınırlıdır. $r>0$ olmak üzere B_r ye ait olan böyle diziler olduğunu kabul edebiliriz. Yardımcı Teorem 3.4.10 dan

$$\begin{aligned}
\|y_n - q\|^2 &\leq \alpha_n' \|x_n - q\|^2 + \beta_n' \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - q\|^2 + \gamma_n' \|v_n - q\|^2 \\
&\quad - \alpha_n' \beta_n' g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \\
&\leq \alpha_n' \|x_n - q\|^2 + \beta_n' [\|x_n - q\| + \mu_n \phi(\|x_n - q\|) + l_n]^2 \\
&\quad + \gamma_n' r^2 - \alpha_n' \beta_n' g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \\
&\leq (\alpha_n' + \beta_n') \|x_n - q\|^2 + R_1(\mu_n + l_n) + \gamma_n' r^2 \\
&\quad - \alpha_n' \beta_n' g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \\
&\leq \|x_n - q\|^2 + R_1(\mu_n + l_n) + \gamma_n' r^2 \\
&\quad - \alpha_n' \beta_n' g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

elde edilir. Burada, $R_1 > 0$ olan bir sabit sayıdır. Yardımcı Teorem 3.4.10 dan

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^2 &\leq \alpha_n \|y_n - q\|^2 + \beta_n \|T_2(PT_2)^{n-1}y_n - q\|^2 \\
&\quad + \gamma_n \|u_n - q\|^2 - \alpha_n \beta_n g(\|T_2(PT_2)^{n-1}y_n - y_n\|) \\
&\leq \alpha_n \|y_n - q\|^2 + \beta_n [\|y_n - q\| + \mu_n \phi(\|y_n - q\|) + l_n]^2 \\
&\quad + \gamma_n r^2 - \alpha_n \beta_n g(\|T_2(PT_2)^{n-1}y_n - y_n\|) \\
&\leq (\alpha_n + \beta_n) \|y_n - q\|^2 + R_2(\mu_n + l_n) + \gamma_n r^2 \\
&\leq \|y_n - q\|^2 + R_2(\mu_n + l_n) + \gamma_n r^2
\end{aligned} \tag{4.67}$$

elde edilir. Burada, $R_2 > 0$ olan bir sabit sayıdır. (4.66) ve (4.67) den

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\|^2 &\leq [\|x_n - q\|^2 + R_1(\mu_n + l_n) + \gamma_n' r^2 \\
&\quad - \alpha_n' \beta_n' g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)\,]^2 + R_2(\mu_n + l_n) \\
&\quad + \gamma_n r^2 \\
&\leq \|x_n - q\|^2 + R_3(\mu_n + l_n) + \xi_{(1)}^n \\
&\quad - \alpha_n' (1 - \alpha_n' - \gamma_n') g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

elde edilir. Burada, $\xi_{(1)}^{n} = \gamma_n' r^2 + \gamma_n r^2$ ve $R_3 > 0$ olan bir sabit sayıdır. $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{(1)}^{n} < \infty$ yazılabilir. Ayrıca, $0 < liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ 've $0 < liminf_{n\to\infty} \gamma_n' < limsup_{n\to\infty} \gamma_n' < 1$ olduğundan, herhangi bir $n \geq n_0$ için $0 < m_1 < \alpha_n{}' < m_2 < 1$ ve $0 < \gamma_n{}' < m_3 < 1$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ ve m_1, $m_2, m_3 \in (0,1)$ vardır. Herhangi bir $n \geq n_0$ için (4.68) den,

$$m_1(1 - m_2 - m_3)g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) \leq (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2)$$

$$+R_3(\mu_n + l_n) + \xi_{(1)}^{n}$$

olur. $k \geq n_0$ için uygulanırsa,

$$\sum_{n=n_0}^{k} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|)$$

$$\leq \frac{1}{m_1(1 - m_2 - m_3)} \left(\sum_{n=n_0}^{k} (\|x_n - q\|^2 - \|x_{n+1} - q\|^2) \right.$$

$$\left. +R_3 \sum_{n=n_0}^{k} (\mu_n + l_n) + \sum_{n=n_0}^{k} \xi_{(1)}^{n} \right)$$

$$\leq \frac{1}{m_1(1 - m_2 - m_3)} \left(\left\|x_{n_0} - q\right\|^2 + R_3 \sum_{n=n_0}^{k} (\mu_n + l_n) + \sum_{n=n_0}^{k} \xi_{(1)}^{n} \right)$$

bulunur. $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_{(1)}^{n} < \infty$ olduğundan $k \to \infty$ iken $\sum_{n=1}^{\infty} g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) < \infty$ dur. Dolayısıyla, $lim_{n\to\infty}\, g(\|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\|) = 0$ elde edilir. g kesin artan ve 0 da sürekli bir fonksiyon olup $g(0) = 0$ olduğundan

$$lim_{n\to\infty} \|T_1(PT_1)^{n-1}x_n - x_n\| = 0 \tag{4.69}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $lim_{n\to\infty} \|T_2(PT_2)^{n-1}x_n - x_n\| = 0$ olduğu görülür.

Teorem 4.4.3: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2 \colon K \to E$ sürekli total asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $\mathcal{F} := F(T_1) \cap F(T_2) = \{x \in K \colon T_1 x = T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, $\forall\ \lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma'_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma'_n < \infty$ olacak şekilde K da $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ sınırlı diziler olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için (4.57) deki $\{x_n\}$ dizisi gibi tanımlansın. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin $\{T_1, T_2\}$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \geq 1$ için $d(x_n, \mathcal{F}) = inf_{q \in \mathcal{F}} \|x_n - q\|$ olmak üzere $liminf_{n \to \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik şartları açıktır. Dolayısıyla, sadece yeterlilik kısmını ispatlayalım. $q \in \mathcal{F}$ için, (4.65) den

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+1} - q\| &\leq (1 + Q_3 \mu_n) \|x_n - q\| + Q_3(\mu_n + l_n) + \Gamma_{(1)}^n \\
&= \|x_n - q\| + \varphi_n \qquad (4.70)
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada, $\varphi_n = Q_3 \mu_n \|x_n - q\| + Q_3(\mu_n + l_n) + \Gamma_{(1)}^n$, $\{x_n - q\}$ sınırlı, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$, $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_{(1)}^n < \infty$ olduğundan, $\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$ olduğu elde edilir. Bu yüzden, (4.70) den,

$$
inf_{q \in \mathcal{F}} \|x_{n+1} - q\| \leq inf_{q \in \mathcal{F}} \|x_n - q\| + \varphi_n,
$$

yazılır. Bu ifade aynı zamanda

$$
d(x_{n+1}, \mathcal{F}) \leq d(x_n, \mathcal{F}) + \varphi_n \qquad (4.71)
$$

ifadesine denktir. (4.71) den, Yardımcı Teorem 3.4.8 (i) şıkkına göre, $lim_{n \to \infty} d(x_n, \mathcal{F})$ limiti vardır. $liminf_{n \to \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olduğuna dikkat edilirse, (4.71) den ve Yardımcı Teorem 3.4.8 (ii) şıkkından dolayı $lim_{n \to \infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olur.

Şimdi $lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n < \infty$ olduğundan verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için, $n \geq N_1$ olmak üzere $d(x_n, \mathcal{F}) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ ve $\sum_{j=n}^{\infty} \varphi_j \leq \frac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde pozitif bir N_1 tamsayısı vardır. Buradan, $d\left(x_{N_1}, \mathcal{F}\right) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ ve $\sum_{j=N_1}^{\infty} \varphi_j \leq \frac{\varepsilon}{4}$ ifadeleri yazılabilir. Bu, $\left\|x_{N_1} - q_1\right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ olacak şekilde bir $q_1 \in \mathcal{F}$ sabit noktasının var olduğu anlamına gelir. (4.70) den, $n \geq N_1$, $m \geq 1$ iken

$$
\begin{aligned}
\|x_{n+m} - x_n\| &\leq \|x_{n+m} - q_1\| + \|x_n - q_1\| \\
&\leq \left\|x_{N_1} - q_1\right\| + \sum_{j=N_1}^{n+m-1} \varphi_j + \left\|x_{N_1} - q_1\right\| + \sum_{j=N_1}^{n-1} \varphi_j \\
&\leq \left\|x_{N_1} - q_1\right\| + \sum_{j=N_1}^{\infty} \varphi_j + \left\|x_{N_1} - q_1\right\| + \sum_{j=N_1}^{\infty} \varphi_j \\
&\leq 2\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) \\
&= \varepsilon
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $\{x_n\}$, E de bir Cauchy dizisidir ve E tam olduğundan dolayı $n \to \infty$ iken $x_n \to q$ olacak şekilde $q \in E$ vardır. q noktası T_1, T_2 nin ortak sabit noktası olduğunu yani $q \in \mathcal{F}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $q \in \mathcal{F}^t$ (burada $\mathcal{F}^t$, $\mathcal{F}$ nin tümleyenini gösterir). $\mathcal{F}$, E nin kapalı bir alt kümesi olduğundan dolayı, (her bir T_1, T_2 sürekli), $d(q, \mathcal{F}) > 0$ yazılabilir. Ancak $\forall\ x^* \in \mathcal{F}$ için,

$$\|q - x^*\| \leq \|q - x_n\| + \|x_n - x^*\|$$

elde edilir. Buradan

$$d(q, \mathcal{F}) \leq \|x_n - q\| + d(x_n, \mathcal{F})$$

yazılır. $n \to \infty$ için $d(q, \mathcal{F}) > 0$ çelişkisinden dolayı $d(q, \mathcal{F}) = 0$ ifadesi elde edilir. O halde, q, T_1, T_2 nin ortak sabit noktasıdır yani $q \in \mathcal{F}$ dir.

Teorem 4.4.4: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to E$ iki sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $\mathcal{F} := F(T_1) \cap F(T_2) = \{x \in K: T_1 x = T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve T_1, T_2 nin herhangi birisi demikompakt olsun (genelliği bozmaksızın, T_1 in demikompakt olduğu kabul edildi). Varsayalım ki, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma_n' < \infty$ olacak şekilde K da $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ sınırlı diziler olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.57) deki gibi tanımlansın. Ayrıca,

i. $0 < liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ ve $0 < liminf_{n\to\infty} \gamma_n < limsup_{n\to\infty} \gamma_n < 1$,
ii. $0 < liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ 've $0 < liminf_{n\to\infty} \gamma_n' < limsup_{n\to\infty} \gamma_n' < 1$,

olsun. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisi, T_1, T_2 nin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K da sınırlı diziler ve Yardımcı Teorem 4.4.1 de $\{u_n - x_n\}$ ve $\{v_n - x_n\}$ sınırlı olduğu görülür. Ayrıca,

$$d_1 = sup\{\|u_n - x_n\|: n \geq 1\}, \qquad d_2 = sup\{\|v_n - x_n\|: n \geq 1\},$$
$$d = max\,\{d_i: i = 1,2\} \tag{4.72}$$

olsun. (4.57) ve Yardımcı Teorem 4.4.2 den,

$$\begin{aligned} \|y_n - x_n\| &= \|P(\alpha_n' x_n + \beta_n' T_1 (PT_1)^{n-1} x_n + \gamma_n' v_n) - P x_n\| \\ &\leq \beta_n' \|T_1 (PT_1)^{n-1} x_n - x_n\| + \gamma_n' \|v_n - x_n\| \\ &\leq \|T_1 (PT_1)^{n-1} x_n - x_n\| + \gamma_n' d \end{aligned}$$

olur.

(4.69) dan

$$lim_{n\to\infty}\|y_n - x_n\| = 0 \tag{4.73}$$

elde edilir. (4.57) ve (4.73) den,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x_n\| &= \|P(\alpha_n y_n + \beta_n T_2(PT_2)^{n-1}y_n + \gamma_n u_n) - Px_n\| \\
&\leq \alpha_n\|y_n - x_n\| + \beta_n\|T_2(PT_2)^{n-1}y_n - x_n\| \\
&\quad + \gamma_n\|u_n - x_n\| \\
&\leq \alpha_n\|y_n - x_n\| \\
&\quad + \beta_n[\|y_n - x_n\| + \mu_n\phi(\|y_n - x_n\|) + l_n] + \gamma_n d \\
&\leq (1 + Q\mu_n)\|y_n - x_n\| + Q(\mu_n + l_n) + \gamma_n d \\
&\to 0 \ \ (n \to \infty \ için)
\end{aligned} \tag{4.74}$$

elde edilir. Burada, $Q > 0$ olan bir sabit sayıdır. Yardımcı Teorem 4.4.2 den ve (4.74) den, $i = 1{,}2$ için,

$$\begin{aligned}
\|x_n - T_i(PT_i)^{n-2}x_n\| &\leq \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - T_i(PT_i)^{n-2}x_{n-1}\| \\
&\quad +\|T_i(PT_i)^{n-2}x_{n-1} - T_i(PT_i)^{n-2}x_n\| \\
&\leq 2\|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - T_i(PT_i)^{n-2}x_{n-1}\| \\
&\quad +\mu_{n-1}\phi(\|x_n - x_{n-1}\|) + l_{n-1} \\
&\to 0 \ (n \to \infty \ için)
\end{aligned} \tag{4.75}$$

olur. $i = 1{,}2$ için, T_i sürekli ve P de genişlemeyen bir çekmeye sahip olduğundan (4.75) ifadesini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\|T_i(PT_i)^{n-1}x_n - T_i x_n\| &= \|T_i P(T_i(PT_i)^{n-2})x_n - T_i P x_n\| \\
&\to 0 \ \ (n \to \infty \ için)
\end{aligned} \tag{4.76}$$

elde edilir. O halde, $i = 1{,}2$ için, Yardımcı Teorem 4.4.2 ve (4.76) dan

$$\|x_n - T_ix_n\| \leq \|x_n - T_i(PT_i)^{n-1}x_n\| + \|T_i(PT_i)^{n-1}x_n - T_ix_n\| \\ \to 0 \ (n \to \infty \ için) \tag{4.77}$$

yazılır.

T_1 demikompakt olduğundan, $lim_{n\to\infty}\|x_n - T_1x_n\| = 0$ ve $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu gerçeğinden $k \to \infty$ iken $q \in K$ kuvvetli yakınsayan $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_k}\}$ alt dizisi mevcuttur. Dolayısıyla, (4.77) ifadesinden $k \to \infty$ için $T_1x_{n_k} \to q, T_2x_{n_k} \to q$ olduğu aşikardır; ve $i = 1{,}2$ için, T_i sürekli olduğundan ve (4.76) ifadesinden

$$\begin{aligned} &\left\|T_i(PT_i)^{n_k-1}x_{n_k} - T_iq\right\| \\ &\leq \left\|T_i(PT_i)^{n_k-1}x_{n_k} - T_ix_{n_k}\right\| + \left\|T_ix_{n_k} - T_iq\right\| \\ &\leq \left\|T_iP(T_i(PT_i)^{n_k-2})x_{n_k} - T_iPx_{n_k}\right\| + \left\|T_ix_{n_k} - T_iq\right\| \\ &\to 0 \ (n \to \infty \ için) \end{aligned} \tag{4.78}$$

elde edilir. Buradan,

$$\|q - T_1q\| \leq \left\|q - x_{n_k}\right\| + \left\|x_{n_k} - T_1(PT_1)^{n_k-1}x_{n_k}\right\| + \left\|T_1(PT_1)^{n_k-1}x_{n_k} - T_1q\ \right\|$$

olduğuna dikkat edilirse (4.69) dan ve (4.78) den, $k \to \infty$ için $T_1q = q$ olur ve dolayısıyla $q \in F(T_1)$ dir. Benzer şekilde,

$$\|q - T_2q\| \leq \left\|q - x_{n_k}\right\| + \left\|x_{n_k} - T_2(PT_2)^{n_k-1}x_{n_k}\right\| + \left\|T_2(PT_2)^{n_k-1}x_{n_k} - T_2q\ \right\|$$

olduğuna dikkat edilirse Yardımcı Teorem 4.4.2 ve (4.78) den, $k \to \infty$ için $T_2q = q$ olur ve buradan da $q \in F(T_2)$ dir. Dolayısıyla, $q \in \mathcal{F}$ olduğu elde edilir. (4.65), Yardımcı Teorem 3.4.8 ve $lim_{n\to\infty}x_{n_k} = q$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisi $q \in \mathcal{F}$ ye kuvvetli yakınsar.

Aşağıdaki teoremde (A') şartı kullanılarak (4.57) iterasyon şemasının kuvvetli yakınsaması verilecektir.

Teorem 4.4.5: E düzgün konveks bir reel Banach uzayı ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2 : K \to E$ verilen iki total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $\mathcal{F} := F(T_1) \cap F(T_2) = \{x \in K : T_1 x = T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma_n' < \infty$ olacak şekilde K da $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ sınırlı dizileri verilsin. Herhangi bir $x_1 \in K$ için (4.57) deki gibi bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. T_1 ve T_2 dönüşümlerinin (A') şartını sağladığını ve

i. $0 < liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ ve $0 < liminf_{n\to\infty} \gamma_n < limsup_{n\to\infty} \gamma_n < 1,$
ii. $0 < liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ 've $0 < liminf_{n\to\infty} \gamma_n' < limsup_{n\to\infty} \gamma_n' < 1,$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisi, T_1, T_2 nin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

İspat: Yardımcı Teorem 4.4.1 e göre herhangi bir $q \in \mathcal{F}$ için $lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F})$ limitinin var olduğu elde edilir. Ayrıca, (4.77) den $lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ $(i = 1,2)$ olması ve (A') şartından dolayı

$$lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, \mathcal{F})\big) \leq lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} \|x_n - T_1 x_n\| + \|x_n - T_2 x_n\|\right) = 0 \qquad (4.79)$$

yazılır. Buradan,

$$lim_{n\to\infty} f\big(d(x_n, \mathcal{F})\big) = 0 \qquad (4.80)$$

olduğu elde edilir.

Her $t > 0$ için $f(t) > 0$ ve $f(0) = 0$ olacak şekilde, azalmayan bir $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu var olduğundan

$$lim_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0 \tag{4.81}$$

yazılır.

Şimdi, herhangi bir $j \geq 1$ tamsayısı için $\left\| x_{n_j} - y_j \right\| < 2^{-j}$ olacak şekilde $\{y_j\} \subset \mathcal{F}$ dizisini ve $\{x_n\}$ nin $\{x_{n_j}\}$ alt dizisini alalım. Tan and Xu (1993) nun ispatlama metodunu kullanarak,

$$\left\| x_{n_{j+1}} - y_j \right\| \leq \left\| x_{n_j} - y_j \right\| < 2^{-j} \tag{4.82}$$

eşitsizliği elde edilir ve buradan da,

$$\begin{aligned} \|y_{j+1} - y_j\| &\leq \left\| y_{j+1} - x_{n_{j+1}} \right\| + \left\| x_{n_{j+1}} - y_j \right\| \\ &\leq 2^{-(j+1)} + 2^{-j} \\ &\leq 2^{-j+1} \end{aligned} \tag{4.83}$$

olur. $\{y_j\}$, $\mathcal{F}$ de bir Cauchy dizisi olduğundan yakınsaktır. Kabul edelim ki, $y_j \to y$ olsun. $\mathcal{F}$ nin kapalılığından $y \in \mathcal{F}$ olup buradan $x_{n_j} \to y$ dir. $lim_{n\to\infty}\|x_n - p\|$ varlığından $x_n \to y \in \mathcal{F}$ elde edilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde ise çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar verilecektir.

İlk olarak, E bir Banach uzayı, K da E nin boş olmayan konveks bir alt kümesi ve $S_1, S_2, \cdots, S_N: K \to K$ genişlemeyen dönüşümler ve $T_1, T_2, \cdots, T_N: K \to K$ total asimptotik genişlemeyen dönüşümleri için (4.1) ile verilen iterasyon dizisi gözönüne alınmıştır.

Çalışmamız neticesinde bulduğumuz kuvvetli yakınsamayla ilgili sonuçları verelim.

Sonuç 5.1: E reel Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan, kapalı konveks bir alt kümesi, $S_1, S_2, \cdots, S_N: K \to K$ sürekli genişlemeyen dönüşümler ve $T_1, T_2, \cdots, T_N: K \to K$ sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Ayrıca negatif olmayan $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ ve $i = 1,2, \cdots, N$ için $F(S,T) = \bigcap_{i=1}^{N} F(S_i) \cap F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olacak şekilde $M, M^* > 0$ var, her $x, y \in K$ ve $i = 1,2, \ldots, N$ için $\|x - T_i y\| \leq \|S_i x - T_i y\|$ olsun ve herhangi bir $x_1 \in K$ için (4.1) deki $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ için;

i. $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\forall n \geq n_0$ olmak üzere $0 < \eta_1 \leq a_n^{(i)} \leq \eta_2 < 1$
ii. $\forall\, i = 1,2, \cdots, N$ için $\sum_{i=1}^{\infty} c_n^{(i)} < \infty$

olması durumunda $\{x_n\}$ dizisinin $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \geq 1$ için $d\big(x_n, F(S,T)\big) = inf_{p \in F(S,T)} \|x_n - p\|$ olmak üzere $liminf_{n \to \infty} d\big(x_n, F(S,T)\big) = 0$ olmasıdır.

Sonuç 5.2: E reel düzgün konveks Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan, kapalı konveks bir alt kümesi, $S_1, S_2, \cdots, S_N: K \to K$ düzgün sürekli genişlemeyen dönüşümler ve $T_1, T_2, \cdots, T_N: K \to K$ düzgün sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. Negatif olmayan $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ ve $i =$

$1,2,\cdots,N$ için $F(S,T)=\bigcap_{i=1}^{N}F(S_i)\cap F(T_i)\neq\emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda\geq M$ için $\phi(\lambda)\leq M^*\lambda$ olacak şekilde $M,M^*>0$ var, her $x,y\in K$ ve $i=1,2,\cdots,N$ için $\|x-T_iy\|\leq\|S_ix-T_iy\|$ olsun. Herhangi bir $x_1\in K$ için (4.1) deki $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$ için;

i. $n_0\in\mathbb{N}$ için $\forall n\geq n_0$ olmak üzere $0<\eta_1\leq a_n^{(i)}\leq\eta_2<1$

ii. $\forall\ i=1,2,\cdots,N$ için $\sum_{i=1}^{\infty}c_n^{(i)}<\infty$

olsun. Eğer, $T_1,T_2,\cdots,T_N$ dönüşümlerinden herhangi birisi kompakt ise bu durumda (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin $S_1,S_2,\cdots,S_N,T_1,T_2,\cdots,T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.3: E reel düzgün konveks Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan, kapalı konveks bir alt kümesi, $S_1,S_2,\cdots,S_N:K\to K$ sürekli genişlemeyen dönüşümler ve $T_1,T_2,\cdots,T_N:K\to K$ sürekli asimptotik genişlemeyen dönüşümler olsun. $i=1,2,\cdots,N$ için $\{k_{in}\}\subset[1,\infty]$ dizileri $\sum_{i=1}^{\infty}(k_{in}-1)<\infty$ ve $F(S,T)=\bigcap_{i=1}^{N}F(S_i)\cap F(T_i)\neq\emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $x,y\in K$ ve $\forall\ i=1,2,\cdots,N$ için $\|x-T_iy\|\leq\|S_ix-T_iy\|$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}c_n^{(i)}<\infty$ olsun. Herhangi bir $x_1\in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.1) deki gibi tanımlansın. $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$ için;

i. $n_0\in\mathbb{N}$ için $\forall n\geq n_0$ olmak üzere $0<\eta_1\leq a_n^{(i)}\leq\eta_2<1$

olsun. Bu durumda,

a) $\{x_n\}$ dizisinin $S_1,S_2,\cdots,S_N,T_1,T_2,\cdots,T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $n\geq 1$ için $d\big(x_n,F(S,T)\big)=inf_{p\in F(S,T)}\|x_n-p\|$ olmak üzere $liminf_{n\to\infty}d\big(x_n,F(S,T)\big)=0$ olmasıdır.

b) Eğer, $\{T_1, T_2, \cdots, T_N\}$ dönüşümlerinden herhangi birisi kompakt ise bu durumda (4.1) ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisinin $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.4: E reel düzgün konveks Banach uzayı ve K da E nin boş olmayan, kapalı konveks bir alt kümesi, $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N : K \to K$ sürekli genişlemeyen dönüşümler ve $F(S,T) = \bigcap_{i=1}^{N} F(S_i) \cap F(T_i) \neq \emptyset$ olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisini

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} = x_n^{(N)} &= a_n^{(N)} T_N x_n^{(N-1)} + b_n^{(N)} S_N x_n + c_n^{(N)} u_n^{(N)}, \\
x_n^{(N-1)} &= a_n^{(N-1)} T_{N-1} x_n^{(N-2)} + b_n^{(N-1)} S_{N-1} x_n + c_n^{(N-1)} u_n^{(N-1)}, \\
&\vdots \\
x_n^{(3)} &= a_n^{(3)} T_3 x_n^{(2)} + b_n^{(3)} S_3 x_n + c_n^{(3)} u_n^{(3)}, \\
x_n^{(2)} &= a_n^{(2)} T_2 x_n^{(2)} + b_n^{(2)} S_2 x_n + c_n^{(2)} u_n^{(2)}, \\
x_n^{(1)} &= a_n^{(1)} T_1 x_n^{(1)} + b_n^{(1)} S_1 x_n + c_n^{(1)} u_n^{(1)}, n \geq 1
\end{aligned}
$$

(N-adım iterasyon dizisi) şeklinde tanımlayalım. Burada $i = 1,2, \cdots, N$ için $\left\{u_n^{(i)}\right\}$ dizisi K da sınırlı diziler ve $a_n^{(i)} + b_n^{(i)} + c_n^{(i)} = 1$ olmak üzere $\left\{a_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{b_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{c_n^{(i)}\right\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,1]$ dir. Kabul edelim ki, $\forall\ x, y \in K$ ve $\forall\ i = 1,2, \cdots, N$ için $\|x - T_i y\| \leq \|S_i x - T_i y\|$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} c_n^{(i)} < \infty$ olsun. $\eta_1, \eta_2 \in (0,1)$ için;

i. $n_0 \in \mathbb{N}$ için $\forall n \geq n_0$ olmak üzere $0 < \eta_1 \leq a_n^{(i)} \leq \eta_2 < 1$

olsun. Bu durumda,

a) $\{x_n\}$ dizisinin $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \geq 1$ için

$d(x_n, F(S,T)) = inf_{p \in F(S,T)} \|x_n - p\|$ olmak üzere $liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(S,T)) = 0$ olmasıdır.

b) Eğer, $T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinden herhangi birisi kompakt ise bu durumda $\{x_n\}$ dizisinin $S_1, S_2, \cdots, S_N, T_1, T_2, \cdots, T_N$ dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Yukarıdaki sonuçlar Liu *et al.* (2005), Gu and He (2006), Liu *et al.* (2007), Saejung and Sitthikul (2008) in sonuçlarını genelleştirir.

Son olarak, (4.57) ile verilen iterasyon dizisi için düzgün konveks bir Banach uzayının boş olmayan, kapalı konveks bir altkümesi üzerinde tanımlanan kendi üzerine olmayan T_1 ve T_2 total asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsamasıyla ilgili bazı sonuçlar verilecektir.

Sonuç 5.5: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to E$ sürekli total asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $\mathcal{F} := F(T_1) \cap F(T_2) = \{x \in K: T_1 x = T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma_n' < \infty$ olacak şekilde $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K da sınırlı diziler olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için (4.57) deki $\{x_n\}$ dizisi tanımlansın. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin T_1, T_2 dönüşümlerinin ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \geq 1$ için $d(x_n, \mathcal{F}) = inf_{q \in \mathcal{F}} \|x_n - q\|$ olmak üzere $liminf_{n\to\infty} d(x_n, \mathcal{F}) = 0$ olmasıdır.

Sonuç 5.6: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to E$ sürekli total asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizisi ve $\mathcal{F} := F(T_1) \cap F(T_2) = \{x \in K: T_1 x =$

$T_2x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^*\lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve T_1, T_2 nin herhangi birisi demikompakt olsun (genelliği bozmaksızın, T_1 in demikompakt olduğunu kabul edildi). Varsayalım ki, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma_n' < \infty$ olacak şekilde $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ K da sınırlı diziler olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.57) deki gibi tanımlansın. Kabul edelim ki,

i. $0 < liminf_{n\to\infty}\alpha_n$ ve $0 < liminf_{n\to\infty}\gamma_n < limsup_{n\to\infty}\gamma_n < 1$,
ii. $0 < liminf_{n\to\infty}\alpha_n{}'$ve $0 < liminf_{n\to\infty}\gamma_n{}' < limsup_{n\to\infty}\gamma_n{}' < 1$,

olsun. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisi T_1, T_2 in ortak bir sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.7: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_1, T_2: K \to E$ iki total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $\mathcal{F} := F(T_1) \cap F(T_2) = \{x \in K: T_1x = T_2x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^*\lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \gamma_n' < \infty$ olacak şekilde K da $\{u_n\}$ ve $\{v_n\}$ sınırlı diziler olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.57) deki gibi tanımlansın. T_1 ve T_2 dönüşümlerinin (A') şartını sağladığını ve

i. $0 < liminf_{n\to\infty}\alpha_n$ ve $0 < liminf_{n\to\infty}\gamma_n < limsup_{n\to\infty}\gamma_n < 1$,
ii. $0 < liminf_{n\to\infty}\alpha_n{}'$ve $0 < liminf_{n\to\infty}\gamma_n{}' < limsup_{n\to\infty}\gamma_n{}' < 1$,

olduğu kabul edildi. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisi T_1, T_2 in ortak sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

(4.57) ifadesinden $\beta_n' = \gamma_n{}' \equiv 0$ ve $\alpha_n{}' \equiv 1$ olarak alınırsa modifiye edilmiş hata terimli Mann iterasyon yöntemi için kuvvetli yakınsamaları elde edilir.

Sonuç 5.8: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_2: K \to E$ sürekli total asimptotik genişlemeyen iki dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki reel dizi ve $F(T_2) = \{x \in K: T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ olacak şekilde $\{u_n\}$, K da sınırlı bir dizi olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.58) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisinin T_2 dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsaması için gerek ve yeter şart $n \geq 1$ olduğunda $d(x_n, F(T_2)) = inf_{q \in F(T_2)} \|x_n - q\|$ olmak üzere $liminf_{n\to\infty} d(x_n, F(T_2)) = 0$ olmasıdır.

Sonuç 5.9: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_2: K \to E$ sürekli total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde negatif olmayan iki dizi ve $F(T_2) = \{x \in K: T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve T_2 demikompakt olsun. Varsayalım ki, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ olacak şekilde K da $\{u_n\}$ sınırlı dizisi olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.58) deki gibi tanımlansın. Ayrıca,

i. $0 < liminf_{n\to\infty} \alpha_n$ ve $0 < liminf_{n\to\infty} \gamma_n < limsup_{n\to\infty} \gamma_n < 1$,

olsun. Bu durumda, $\{x_n\}$ dizisi T_2 dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.10: E bir reel Banach uzay ve K da E nin genişlemeyen bir çekmeye sahip boş olmayan kapalı konveks bir alt kümesi ve $T_2: K \to E$ total asimptotik genişlemeyen dönüşüm olsun. $\{\mu_n\}$ ve $\{l_n\}$ dizileri, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_n < \infty$ ve $\sum_{i=1}^{\infty} l_n < \infty$ olacak şekilde tanımlansın ve $F(T_2) = \{x \in K: T_2 x = x\} \neq \emptyset$ olsun. Kabul edelim ki, her $\lambda \geq M$ için $\phi(\lambda) \leq M^* \lambda$ olduğunda $M, M^* > 0$ var ve $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, olacak şekilde $\{u_n\}$ K da sınırlı diziler olsun. Herhangi bir $x_1 \in K$ için $\{x_n\}$ dizisi (4.58) deki gibi tanımlansın. T_2 dönüşümü (A) şartını sağladığını ve

i. $0 < liminf_{n\to\infty}\alpha_n$ ve $0 < liminf_{n\to\infty}\gamma_n < limsup_{n\to\infty}\gamma_n < 1$,

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi T_2 dönüşümünün sabit noktasına kuvvetli yakınsar.

Sonuç 5.5, Sonuç 5.6, Sonuç 5.7, Sonuç 5.8, Sonuç 5.9 ve Sonuç 5.10 Schu (1991), Xu (1998), Kim and Kim (2001) ve Nilsrakoo and Saejung (2009) un çalışmalarının genelleştirmeleridir.

Bu tezden aşağıdaki makaleler üretilmiştir.

1. Kiziltunc, H. and Yolacan, E., 2012 On convergence theorems for total asymptotically nonexpansive nonself-mappings in Banach spaces, J. Nonlinear Sci. Appl. 5, 389-402.
2. Yolacan, E. and Kiziltunc, H., 2012. Convergence theorems for a finite family of nonexpansive and total asymptotically nonexpansive mappings, Hacettepe journal of Mathematics and Statistics, 41(5), 657-673.

KAYNAKLAR

Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed point theory for Lipschitzian-type mappings with applications, Springer, 368p, New York, U.S.A.

Aksoy, A. G. and Khamsi, M. A., 1990. Nonstandard Methods in Fixed Point Theory, Springer, 148p, New York.

Albert, Ya. I, Chidume, C. E. and Zegeye, H. 2005. Approximation fixed points of total asymptotically nonexpansive mappings, Fixed Point Theory Appl. article ID 10673

Banach, S., 1922. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales, Fund. Math., 3, 133-181.

Berinde, V., 2006. Iterative Approximation of Fixed Points, Lecture Notes in Mathematics, Springer, 315p, Heidelberg, Germany.

Browder, F. E., 1965. Nonexpansive nonlinear operators in a Banach space, Proc. Natl. Acad. Sci., 54, 1041-1044.

Chidume, C. E. and Ofoedu E. U., 2006. Approximation of common fixed points for finite families of total asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 333, 128-141.

Chidume, C. E. and Ofoedu E. U., 2009. A new iteration Process for approximation of common fixed points for finite families of total asymptotically nonexpansive mappings, International Journal of Mathematical Sciences, 17p, Article ID 615107.

Chidume, C. E., Ofoedu E. U. and Zegeye H., 2003. Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 280, 364-374.

Cho, Y. J., Zhou, H. and Guo, G., 2004. Weak and strong convergence theorems for three-step iterations with errors for asymptotically nonexpansive mappings, Comput. Math. Appl., 47, 707-717.2.2,3.9.

Ciric, L. B., 1974. A generalization of Banach's Contraction Principle, Proc. Amer. Math. Soc., 45, 267-273.

Franks, R. L. and Marzec, R. P., 1971. A theorem on mean-value iterations, Proc. Amer. Math. Soc., 30, 324-326.

Gu, F. and He, Z., 2006. Multi-step iterative process with errors for common fixed points of a finite family of nonexpansive mappings, Math. Commun. 11 (1), 47-54.

Hu, G. and Yang, L., 2008. Strong convergence of the modified three step iterative process in Banach spaces. Dynamic of Continuous, Discrete and Impulsive System Series A: Mathematical Analysis 15, 555-571.

Ishikawa, S., 1974. Fixed points by a new iteration method, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 147-150.

Junck, G., 1976. Commuting mappings and fixed points, Amer. Math. Monthly, 83, 261-263.

Kannan, R., 1968. Some results on fixed points. Bull. Calcutta Math. Soc., 10, 71-76.

Khamsi, M. A. and Kirk W. A., 2001. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory, A Willey-Interscience Publication, 301p, New York, U.S.A.

Khan, S. H. and Fukhar-ud-din, H., 2005. Weak and strong convergence of a scheme with errors of two nonexpansive mapings, Nonlinear Anal., 61, 1295-1301.

Kim, G. E. and Kim, T. H., 2001. Mann and Ishikawa iterations with errors for non-Lipschitzian mappings in Banach spaces, Comput. Math. Appl., 42, 1565-1570.

Kirk, W. A., 1969. On nonlinear mappings of strongly semicontractive type, J. Math. Anal. Appl., 27, 409-412.

Kirk, W. A., 1971. On successive approximation for nonexpansive mappings in Banach spaces, Glasgow Math. J., 6-9.

Krasnoselskij, M. A., 1955. Two remarks on the method of successive approximations, Uspehi Mat. Nauk., 10, 123-127.

Liu, L. S., 1995. Ishikawa and Mann iteration process with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach spaces. J. Math. Anal. Appl. 194,114-125.

Liu, Z., Agarwal, R. P., Feng, C. and Kang, S. M. 2005. Weak and strong convergence theorems of common fixed points for a pair of nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings, Acta Univ. Palack. Olomuc. Fac. Rer. Nat. Math. 44, 83-96.

Liu, Z., Feng, C., Ume, J. S. and Kang, S. M. 2007. Weak and strong convergence for common fixed points for a pair of nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings Taiwanese J. Math. 11, 27-42.

Mann, W. R., 1953. Mean value methods in iteration, Proc. Amer. Math. Soc., 4, 506-510.

Mathematical Assistant on Web, http://um.mendelu.cz/maw-html/menu.php (15.10.2014)

Mukhamedov, F. and Saburov, M., 2010. Strongly convergence of an explicit iteration process for a totally asymptotically I-nonexpansive mapping in Banach spaces, Applied Mathematics Letters, 23, 1473-1478.

Nilsrako, W. and Saejung., 2009. A new strong convergence Theorem for non-Lipschitzian Mappings in a uniformly convex Banach space, Rostock, Math. Kolloq., 64, 75-86.

Noor, M. A., 2000. New approximation schemes for general variational inequalities, J. Math. Anal. Appl., 251, 217-229.

Picard, E. (Charles), 1890. Jour. de Math., (4) 6, 145-210.

Rhoades, B. E., 1974. Fixed point iterations using infinite matrices, Trans. Amer. Math. Soc., 196, 161-176.

Saejung, S. and Sitthikul., 2008. Weak and strong convergence theorems for a finite family of nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings in Banach Spaces, Thai J. Math. Special Issue, 15-26.

Schauder, J., 1930. Der Fixpunktsatz in Funktionalraumer, Studia Math., 2, 171-180.

Schu, J., 1991. Iterative construction of a fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, J. Math. Anal. Appl., 158, 407-413.

Schu, J., 1991. Weak and strong convergence of fixed points of asymptotically nonexpansive mappings, Bull. Austral. Math. Soc., 43, 153-159.

Senter, H. F. and Dotson, W. G., 1974. Approximating fixed points of nonexpansive mappings, Proc. Amer. Math. Soc., 44, 375-380.

Sessa, S., 1982. On weak commutativity condition of mappings in fixed point considerations, Publications de L'institut Mathematique., 32, 149-153.

Soykan, Y., 2008. Fonksiyonel Analiz, Nobel Yayın No: 1328, 504s, Ankara.

Tan, K. K. and Xu, H. K., 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by Ishikawa iteration process, J. Math. Anal. Appl., 178, 301-308.

Tychonoff, A., 1935. Ein Fixpunktsatz, Math. Ann., 111,767-776.

Xu, B. and Noor M. A., 2002. Fixed point iterations for asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 267, 444-453.

Xu, Y., 1998. Ishikawa and Mann iterative process with errors for nonlinear strongly accretive operator equations, J. Math. Anal. Appl., 224, 91-101.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Samsun'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Edirne'nin Keşan ilçesinde, lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2002 yılında girdiği Ondokuz Mayıs Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden 2006 yılında dereceyle mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başlayıp 2010 yılında mezun oldu. 2011 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Doktora öğrenimine başladı. Halen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde doktora eğitimine devam etmektedir.