

57847

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

ELEKTRONİK DEVRELERİN KAOTİK DAVRANIŞLARININ İNCELENMESİ

Elektronik Müh. Mehmet TURHAL

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"Elektronik Yüksek Mühendisi"**

Ünvanı Verilmesi için Kabul Edilen Tezdir

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26.07.1996
Tezin Savunma Tarihi : 23.08.1996**

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Rifat YAZICI

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Temel KAYIKÇIOĞLU

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Mustafa ULUTAŞ

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Yaşar GÖK

Temmuz 1996

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, günümüzde oldukça rağbet gören bir konu olan kaosun elektronik devrelerle oluşturulması ve uygulamaları incelenmiştir. Önce kaosun matematik ve fizik temeli üzerine bir bakış yapılmış ve bu ilginç davranışın anlaşılması üzerinde durulmuştur. Daha sonra yapılan çalışmalarla oluşturulan elektronik devrelerin davranışları incelenmiş ve haberleşmede kullanılması halinde etkinliği gözlenmiştir.

Çalışmalarım süresince benden ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Rıfat YAZICI 'ya teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca kaynak olarak kullandığım kitapları sağlayan Doç. Dr. Olkan ÇUVALCI, fikirlerinden yararlandığım Arş. Gör. Selahattin KINDIKOĞLU, elektronik devreleri oluştururken yardımlarını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Cengiz YILMAZER ve bazı elektronik elemanları temin etmemi sağlayan Araş. Gör. Hasan Hüseyin BALIK 'a teşekkür ederim.

Trabzon, Temmuz 1996

Mehmet TURHAL

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
TÜRKÇE ÖZET	V
İNGİLİZCE ÖZET	VI
ŞEKİL LİSTESİ	VII
TABLO LİSTESİ.....	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Kaos Kavramının Tarihsel Gelişimi	1
1.3. Dinamik Sistemler	2
1.4. Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemler.....	4
1.4.1. Doğrusal Olmayan Bir Sistemin Denge Çözümleri	4
1.4.1.1. Kararlılık	5
1.4.1.2. Denge Çözümlerinin Yorumlanması	6
1.4.2. Lyapunov Fonksiyonları	10
1.4.3. Kararlılığın Değişimi (Dallanma).....	11
1.4.4. Lyapunov Üstelleri	13
1.4.5. Poincaré Haritası	14
1.5. Kaos.....	17
1.5.1. Başlangıç Şartlarına Duyarlılık	18
1.5.2. Faz Resmî Görünümü	18
1.5.3. Frekans Spektrumu	23
1.5.4. Lyapunov Üstelleri	24
1.5.5. Poincaré Haritası	25
1.6. Elektronik Devrelerde Kaos ve Uygulamaları.....	26
1.6.1. Kaotik Van der Pol-Duffing Osilatörü.....	26
1.6.2. Kaotik Sistemlerin Senkronizasyonu	28
1.6.2.1. Pecora ve Carroll 'un Çalışmaları.....	28
1.6.2.2. He ve Vaidya 'nın Çalışmaları	29
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	32
2.1. Rössler Sisteminde Dallanma ve Kaos.....	32
2.2. Kaotik Lorenz Sisteminde Tek Değişkenle Senkronizasyon	37
2.2.1. Verici Sistem	39
2.2.2. Alıcı Sistem	39
2.2.3. Senkronizasyon	39

2.2.3.1. Verici Sistemin Elektronik Olarak Gerçeklenmesi	41
2.2.3.2. Alıcı Sistemin Elektronik Olarak Gerçeklenmesi	44
2.2.3.3. Senkronizasyonun Gerçekleştirilmesi	45
2.3. Senkron Kaotik Sistemlerle Bilgi İletimi.....	46
2.4. Kaotik Bir Sistemde İki Değişkenle Senkronizasyon	49
2.5. İki Değişkenle Senkron Kaotik Sistemlerde Bilgi İletimi.....	52
3. BULGULAR.....	56
4. İRDELEME ve DEĞERLENDİRME.....	57
5. SONUÇLAR.....	61
6. KAYNAKLAR.....	62
7. ÖZGEÇMİŞ.....	64



ÖZET

Kaotik sistemleri karakterize eden en önemli özellikler, başlangıç şartlarına duyarlılıkları ve dönemli olmayan karmaşık hareketleridir. Kaotik sistemlerin bu özelliklerini incelemek ve birbirlerine senkronlanabilme olanaklarını araştırmak amacıyla bu çalışmada, Rössler ve Lorenz kaotik sistemleri elektronik elemanlarla gerçekleştirilip kaotik hareketleri incelendi. Böylece Rössler sisteminde, kontrol parametresi değiştiğinde bir denge noktasının nasıl etkilendiği gözlemlendi.

Eğer iki bağımsız kaotik sistem aynı başlangıç şartlarıyla çalışmaya başlarsa, bu şartlardaki küçük bir fark zamanda üstel olarak büyüyecektir. Biraz sonra iki sistem ilişkisiz hale gelir. Fakat, Pecora ve Carroll iki kaotik sistemin senkronizasyonunun mümkün olduğunu gösterdi.

Uygun şartlar altında zamanın akışıyla kaotik vericinin değişkenleri asimptotik olarak alıcının değişkenlerine yaklaşacaktır ve kaotik vericinin değişkenlerini adım adım takip edecektir. Bu davranışı görmek için iki Lorenz sisteminin senkronizasyonu ve kaotik veri iletimi, sürme amacıyla tek değişken kullanılarak gerçekleştirildi.

Ayrıca bu çalışmada, iki değişken kullanılarak senkronizasyonun ve kaotik veri iletiminin mümkün olduğu 5 boyutlu bir sistemde gösterildi ve bilgisayar benzetimleri yapıldı. Böylece, sadece bir senkron kaotik sistemin, iki değişken kullanılarak bilgi taşıyan iki işaretin gönderilmesi için yeterli olduğu gösterildi.

Anahtar Kelimeler : Kaos, Dallanma, Senkronizasyon, Kaotik Bilgi İletimi

SUMMARY

A Study of Chaotic Motion in Electronic Circuits

Perhaps the most well known of the properties that characterize chaotic systems is their sensitivity to initial conditions and their complex nonperiodic motion. In this work, Rössler and Lorenz chaotic systems are implemented in electronic circuits to study their chaotic motions. How the stability of an equilibrium point is affected when the control parameter is varied in the Rössler systems is investigated.

If two independent chaotic systems are started with the same initial conditions, any arbitrarily small difference in these conditions will grow exponentially in time. As time elapses, the motions of the two systems will be uncorrelated. But, Pecora and Carroll have shown that it is possible to synchronize two chaotic systems. Under the proper conditions as time elapses the state variables of the chaotic transmitter will converge asymptotically to those of the receiver and continue to remain in step with the values of the variables of the chaotic receiver. To see this behavior, two Lorenz systems were built and, using only one variable for drive, synchronization and subsequent chaotic data transmission were demonstrated.

Moreover, in this work, the possibility of synchronization and the chaotic data transmission using two drive variables is shown and simulated in a 5 dimensional system. Thus, it is shown that one pair of synchronized chaotic systems is sufficient to transmit two information-bearing signals using two drive variables.

Key Words : Chaos, Bifurcation, Synchronization, Chaotic data transmission

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 1. Durum sayısının belirlediği uzay boyutu	2
Şekil 2. Faz-kontrol uzayı.....	3
Şekil 3. $n=2$ durum sayısı için faz resmi	3
Şekil 4. Benzer eğri aileleri.....	4
Şekil 5. Asimptotik kararlılık	5
Şekil 6. Kararlı düğüm ve kararlı odak durumlarının faz resmi görünümü.....	6
Şekil 7. Merkez nokta durumunun faz resmi görünümü	7
Şekil 8. Kararsız düğüm ve kararsız odak durumunun faz resmi görünümü	7
Şekil 9. Semer noktası durumunun faz resmi görünümü.....	7
Şekil 10. Limit çevrimi durumunun faz resmi görünümü	8
Şekil 11. Doğrusal olmayan bir dinamik sistemin faz resmi.....	9
Şekil 12. U sınırlarındaki dinamik sistem.....	10
Şekil 13. Lyapunov kararlılığı	11
Şekil 14. $f_\mu(x) = \mu x - x^3$ için dallanma şekli	12
Şekil 15. Kaosa giden bir dallanma	13
Şekil 16. Üç boyutlu uzayda oluşturulan Poincaré yüzeyi.....	15
Şekil 17. Dönemli kaynağa sahip bir dinamik sistemde Poincaré haritasının oluşturulması.....	16
Şekil 18. Dönemli bir davranışın faz resmi	16
Şekil 19. Dönemli bir davranışın Poincaré haritasındaki görünümü.....	17
Şekil 20. Yarı dönemli dinamik sisteme ait Poincaré haritası.....	17
Şekil 21. Lorenz sisteminde, başlangıç şartlarındaki %1 'lik farklılıkla sistem davranışının ilişkisiz hale gelişi.....	18
Şekil 22a, b. Kaotik Lorenz sisteminin zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması	19
Şekil 22c, d. Kaotik Lorenz sisteminin zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması	20
Şekil 23a, b. Kaotik Rössler sisteminin zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması	21
Şekil 23c, d. Kaotik Rössler sisteminin zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması	22
Şekil 24a, b, c. Dönemli, yarı dönemli ve kaotik işaretlerin frekans spektrumu	23
Şekil 25a, b. Düşük ve daha yüksek sönümlü bir kaotik davranışın Poincaré haritası	25
Şekil 26. Poincaré haritasının belli bir bölgesi büyütülen sistemde, birbirini tekrar eden yapılar.....	26

Şekil 27. Kaotik Van der Pol-Duffing osilatörü.....	26
Şekil 28. Doğrusal olmayan direnç elemanının eşdeğer devresi.....	27
Şekil 29. Kaotik Van der Pol-Duffing sisteminin faz resmi	28
Şekil 30. $\sigma =10$, $\rho=60$ ve $\beta=8/3$ için kaotik olan (18) sisteminin faz resmi	30
Şekil 31. Verici-Alıcıdaki süren ve sürülen alt sistemlerin kutucuk gösterimi	31
Şekil 32. Kaotik Rössler sisteminin bilgisayar benzetimiyle elde edilen faz resmi.....	32
Şekil 33. Rössler sisteminin elektronik devresi	33
Şekil 34. $R_{11}\approx 300\Omega$ için T dönemli davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi	34
Şekil 35. $R_{11}\approx 21K\Omega$ için 2T dönemli davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi	35
Şekil 36. $R_{11}\approx 35K\Omega$ için 4T dönemli davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi	35
Şekil 37. $R_{11}\approx 53K\Omega$ için kaotik davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi	36
Şekil 38. Kaotik Rössler sisteminin frekans spektrumu	36
Şekil 39. Lorenz sisteminin kaotik parametre değerleri için x-y faz resmi	37
Şekil 40. Lorenz sisteminin kaotik parametre değerleri için x-z faz resmi.....	38
Şekil 41. Verici yönünden bakıldığında süren ve sürülen alt sistemler	40
Şekil 42. Alıcı yönünden bakıldığında süren ve sürülen alt sistemler	40
Şekil 43. Verici kaotik sistemin elektronik devresi.....	42
Şekil 44. Kaotik verici sistemin osiloskoptan alınan $u_V - v_V$ faz resmi	43
Şekil 45. Kaotik verici sistemin osiloskoptan alınan $u_V - w_V$ faz resmi	43
Şekil 46. Alıcı sistemin elektronik devresi	44
Şekil 47. Senkronizasyondan önce bağımsız çalışan verici ve alıcının, $u_V - u_a$ düzlemindeki görünümü	45
Şekil 48. Senkronizasyondan sonra birlikte çalışan verici ve alıcının, $u_V - u_a$ düzlemindeki görünümü	46
Şekil 49. Kaotik verici ve alıcı arasında bilgi iletimine imkan sağlayan sistemin kutucuk gösterimi.....	46
Şekil 50. Kaotik senkron işareti $u_V(t)$ ile bilgi işareti $b(t)$ nin toplanması	47
Şekil 51. Alıcı tarafta $b(t)$ bilgi işaretinin yeniden elde edilmesi için kullanılan fark alıcı ve alçak geçiren filtre	48
Şekil 52. Bilgi işareti olarak kullanılan üçgen dalganın verici ve alıcı taraftaki görünümü	48
Şekil 53. $b(t)$ (üçgen dalga) ve $T(t)=u_V(t)+b(t)$ işaretlerine ait frekans spektrumu	49
Şekil 54. Kaotik sistemlerin iki değişkenle senkronizasyonu için kutucuk gösterimi .	50

Şekil 55. $x_1-x'_1$ düzleminde bilgisayar benzetimiyle senkronizasyon.....	51
Şekil 56. $x_4-x'_4$ düzleminde bilgisayar benzetimiyle senkronizasyon.....	52
Şekil 57. İki değişken üzerinden senkron kaotik sistemlerle bilgi iletimi.....	52
Şekil 58. $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ işaretleri olarak kullanılan bilgi işareti.....	53
Şekil 59. Alıcı tarafta oluşturulan $\tilde{b}_1(t)$ işareti	54
Şekil 60. Alıcı tarafta oluşturulan $\tilde{b}_2(t)$ işareti	54
Şekil 61. $h_1(t)$ 'nin zaman gelişimi	58
Şekil 62. $h_2(t)$ 'nin zaman gelişimi	59
Şekil 63. $h_3(t)$ 'nin zaman gelişimi	59



TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1. Özdeğerlere ilişkin davranış durumları	6
Tablo 2. Çeşitli dinamik sistemlere ait Lyapunov üstelleri	24



1. GENEL BİLGİLER

1.1 Giriş

Kelime anlamı "belirsizlik" olan kaos, pek çok fiziksel sistemde ve tabiatta gözlenebilen bir davranış biçimidir. Doğal olarak, elektronik elemanlarla da kaotik çalışan bir sistem oluşturmak mümkündür.

Kaotik sistemlerin incelenmesine yönelik çalışmalar yaklaşık yüz yıl öncesine kadar gitmesine rağmen elektronikteki ciddi anlamda uygulamaları 90'lı yıllardan itibaren gelişmiştir [1]. Özellikle senkronizasyon davranışı çok güçlü olan kaotik sistemler, şifreleme, kontrol ve iletişim alanlarında kendini göstermeye başlamıştır.

Kaotik çalışan iki osilatörden biri diğerini sürdüğünde, sürülen sistem diğerinden bağımsız çalıştığı halde, çok kısa bir sürede iki sistemin senkronizasyonu gerçekleşir ve zaman ilerledikçe devam eder [3]. Bu özelliğin, pek çok önemli pratik uygulamanın habercisi olduğu söylenebilir [3].

1.2 Kaos Kavramının Tarihsel Gelişimi

Nedensel (deterministic) bir sistem için, verilen başlangıç şartlarına bağlı olarak zaman içinde nereye gideceğini bilebileceğimiz bir sistem tanımı yapılabilir. Nedenselliğin tanımı gereği bu beklenen bir sonuçtur.

Ancak 1892'de Henri Poincaré, bazı nedensel sistemlerin verilen pek çok farklı başlangıç noktasıyla çığınca farklı sonuçlara gittiğini göstererek bunun yanlış olduğunu ispatladı [4]. Fakat bu sonuç, pek çok fizikçi tarafından önemsiz bir olay olarak yorumlandı.

1963 yılında, meteorolog olan E. N. Lorenz tarafından birbiriyle bağlaşıklık, birinci dereceden üç diferansiyel denklemin oluşturduğu doğrusal olmayan sistemin kaotik davranışları bulunduğu gösterildi. Bu, kayıplı sistemlerde nedensel kaosun ilk örneğidir.

Takip eden yıllarda yeni teorik sonuçlar, yeni deneysel teknikler ve yüksek hızlı bilgisayarların gelişmesiyle kaotik davranış daha iyi anlaşılabilir ve giderek pek çok bilim dalında uygulama alanı buldu [5].

Lazerler, doğrusal olmayan optik aygıtlar, Josephson birleşimi, kimyasal reaksiyonlar, parçacık hızlandırıcılar, osilatörler, canlıların nüfus değişiminin biyolojik modelleri, beyindeki sınırlar gibi daha pek çok alanda kaotik davranış şekilleri tespit edilmiştir.

1.3 Dinamik Sistemler

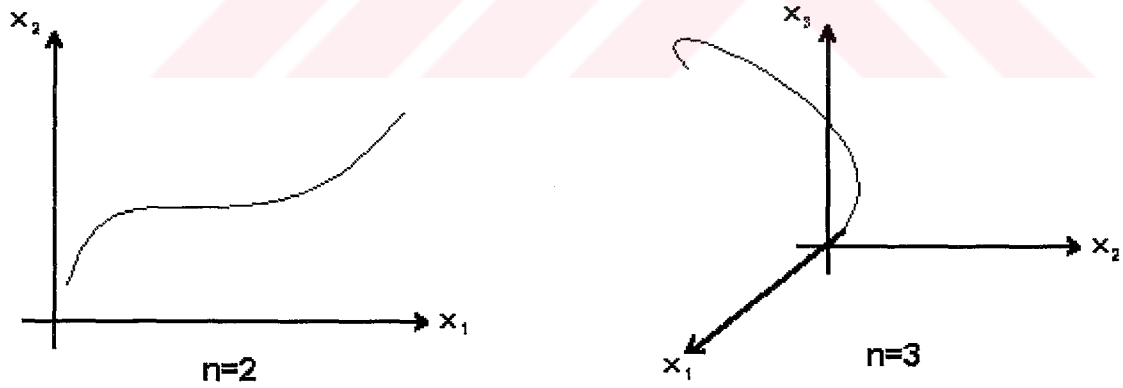
Nedensel sistemlere matematikte *dinamik* sistemler adı verilir ve sistem durumları sonlu gerçel sayılarla ifade edilir. Burada dinamik sistemlerden kasıt, kayıplı dinamik sistemlerdir.

$$\dot{x} = f(x, t; c) \quad (x \in R^n, c \in R^n) \quad (1)$$

(1) eşitliğiyle genelleştirilen bir dinamik sistem açıkça zamana bağlı olması sebebiyle *otonom olmayan* sistem olarak adlandırılır. R^n uzayında otonom olmayan herhangi bir sistem $x_{n+1} = t$ yapılarak R^{n+1} uzayında *otonom* yani açıkça zamana bağlı olmayan sistem haline getirilebilir [4]. Burada x bağımlı değişken ve c kontrol parametresidir.

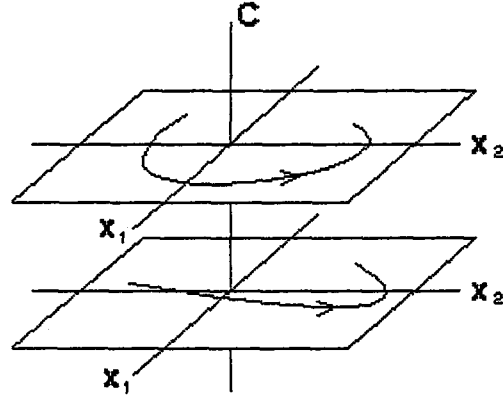
$$\dot{x} = f(x; c) \quad (x \in R^{n+1}, \text{otonom}) \quad (2)$$

Bir dinamik sistemin davranışını incelemek için Poincaré çok kullanışlı bir yöntem önermiştir. Buna göre sistem durumlarının sayısı, o sistemin temsil edileceği uzay boyutu olarak alınacaktır. Sistem durumları sayısı $n=2$ ise düzlemde bir nokta, $n=3$ ise 3 boyutlu uzayda bir nokta ile temsil edilebilir (Şekil 1). Bu gösterim, sistemin *faz uzayı* diye adlandırılır.



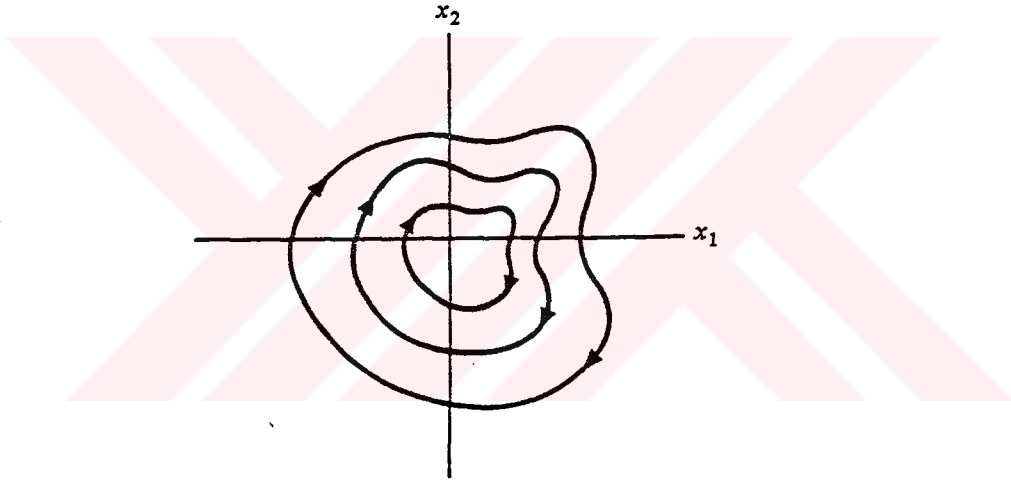
Şekil 1. Durum sayısının belirlediği uzay boyutu.

Bir dinamik sistemde, değişimler c kontrol parametresinin sabit bir değerinde meydana gelir. Bu yüzden kontrol parametreleri (c_1, c_2, \dots, c_k) ve dinamik değişkenlerin (x_1, x_2, \dots, x_n) bir arada incelendiği *faz-kontrol uzayı* yaklaşımı, (2) sistemlerinin değişimlerinin çözümlenmesi açısından çok kullanışlı olur (Şekil 2).



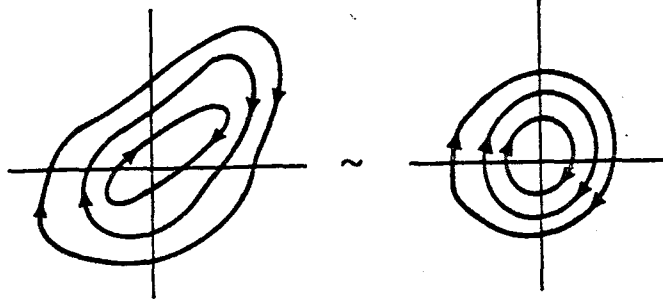
Şekil 2. Faz-kontrol uzayı.

(2) eşitliğinin farklı başlangıç şartları için çözümleri, faz uzayında sistemin *faz resmi* (phase portrait) diye anılan faz eğrisi aileleri içerir (Şekil 3).



Şekil 3. $n=2$ durum sayısı için faz resmi.

(2) eşitliğine biçim olarak uygun olan farklı sistemler, analitik olarak tamamen farklı çözümlere sahip olmalarına rağmen, faz uzayındaki yörünge aileleri birbirine benzer özellikler gösteren farklı $f(x)$ fonksiyonları içerir (Şekil 4a, b). Yörüngelerin faz uzayı içindeki detaylı konumu yerine yörüngeler arası ilişkiler ve bunların ortaya koyduğu davranış biçimi ön plana çıkarılabilir. Bu yaklaşım, nicelik bilgisinin kaybı pahasına, önemli bazı nitelik kavrayışlar getirir. Bu anlamda Şekil 4a ve Şekil 4b 'deki eğri ailelerinin temsil ettiği sistemlere, yörüngelerin kesişme ve birleşme durumları hariç, aynı nitelikteki sistemler gözüyle bakılabilir [4].



Şekil 4. Benzer eğri aileleri.

1.4 Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemlerin İncelenmesi

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerin çözümleri bilinen basit fonksiyonlarla ($e^{-\alpha t}$, $\sin(\omega t)$,...) ifade edilemediğinden, bu tür bir sistem hakkında doğrudan yargıya varmak mümkün değildir.

(2) eşitliği biçimindeki doğrusal olmayan bir dinamik sistemin davranışını anlamak için, sistemin *denge noktaları* (fixed point, rest point) diye adlandırılan, $f(x)$ 'in sıfır çözümüne sahip olduğu noktaları bulmak iyi bir başlangıç olacaktır [4,6].

1.4.1 Doğrusal Olmayan Bir Sistemin Denge Çözümleri

(2) şeklindeki doğrusal olmayan bir sistemde $f(\bar{x}) = 0$ eşitliğini sağlayan denge noktaları (\bar{x}) , \bar{x} yakınlarındaki çözümlerin davranışını karakterize eder. Yani doğrusal olmayan bir dinamik sistemin davranışını denge noktaları civarında doğrusal bir dinamik sistemin davranışı gibi düşünmek mümkündür. Göz önüne alınabilecek böyle bir doğrusal dinamik sistem, doğrusal olmayan dinamik sistemi, denge noktası civarında oldukça iyi bir yaklaşıklıkla temsil edecektir.

$f(x)$ fonksiyonu \bar{x} denge noktası civarında Taylor serisine açılırsa, bu yaklaşık sisteme ilişkin yeni bir eşitlik elde edilir.

$$f(x) = [f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \dots \quad f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)]^T \quad (3)$$

(3) vektörü dikkate alınır, $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$ denge noktaları civarında Taylor serisine açılımı aşağıdaki biçimdedir.

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_{\bar{x}}(x - \bar{x}) + \dots \quad (4)$$

Burada J, Jacobian matrisidir.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

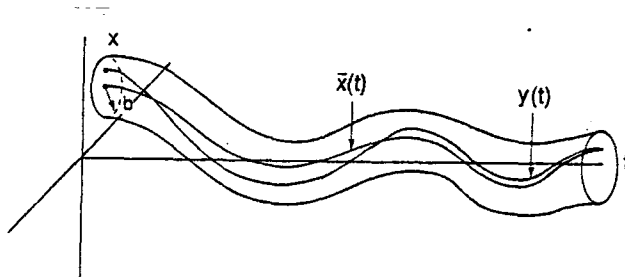
\bar{x} denge noktasında $f(\bar{x}) = 0$ olacağından (4) eşitliği, yüksek dereceli türevler ihmal edilerek, iyi bir yaklaşıklıkla $f(x) = J_{\bar{x}}(x - \bar{x})$ şeklinde ifade edilebilir [7].

Sistem hakkında, ne tür bir davranış izleyeceğine, Jacobian matrisinin özdeğerlerine bakılarak karar verilir. (6) determinantı ile bulunan özdeğerler, \bar{x} denge noktaları civarında sistem hakkında bize önemli bilgiler verir. Denge noktalarına karşılık gelen özdeğerlerin gerçel kısımları sıfırdan farklı ise bunlar, *hiperbolik denge noktası* adını alır.

$$|J - \lambda I| = 0 \quad (6)$$

1.4.1.1 Kararlılık

$\bar{x}(t)$, (2) eşitliğinin bir çözümü olsun. Verilen bir anda $\bar{x}(t)$ yakınında başlayan çözümler, sonraki bütün anlarda $\bar{x}(t)$ yakınlarında kalıyorsa, $\bar{x}(t)$ *kararlıdır* denir. Eğer $\bar{x}(t)$ yakınlarındaki çözümler, $t \rightarrow \infty$ için $\bar{x}(t)$ 'ye yaklaşıyorsa *asimptotik kararlıdır* denir (Şekil 5).



Şekil 5. Asimptotik kararlılık.

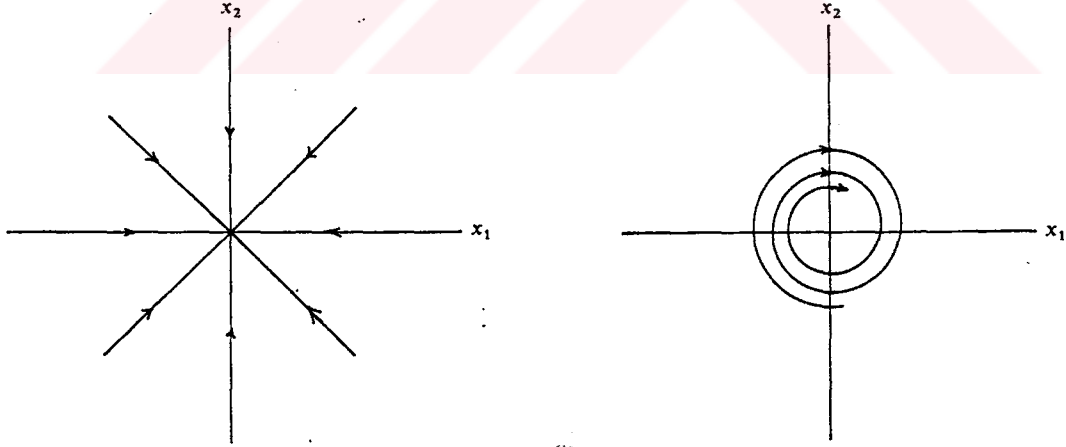
1.4.1.2 Denge Çözümlerinin Yorumlanması

Denge noktaları civarındaki çözümlere özel isimler verilir (Tablo 1).

Tablo 1. Özdeğerlere İlişkin Davranış Durumları

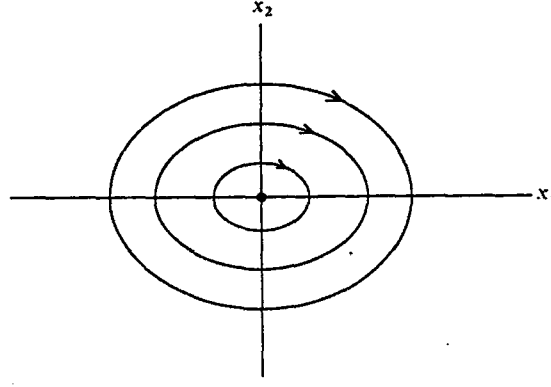
Özdeğerler, λ_i	Sistemin Davranışı
Gerçel ve aynı işaretli	Düğüm
Karmaşık eşlenik	Odak
İmajiner eşlenik	Merkez
Gerçel ve ters işaretli	Semer

Sistemin özdeğerleri karmaşık düzlemin sol yarısında ise, sistem kararlıdır (asimptotik kararlı). Buna karşı düşen faz resmindeki bütün yörüngeler, özdeğerler gerçel ise *düğüm*, karmaşık eşlenik ise *odak* ismini alan denge noktasında biterler. Yörüngelerin yönü, $t \rightarrow \infty$ olduğunda, denge noktasına gelinecek biçimdedir. Bu yüzden *kararlı düğüm* ya da *kararlı odak* diye adlandırılır (Şekil 6).



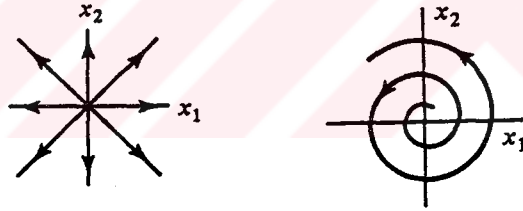
Şekil 6. Kararlı düğüm ve kararlı odak durumlarının faz resmi görünümü.

Sistemin özdeğerleri imajiner iseler sistem kararlı, fakat asimptotik kararlı değildir. $t \rightarrow \infty$ için yörüngeler denge noktası civarında kalır ancak bu noktaya erişemezler (Şekil 7). Bu durum *merkez nokta* diye adlandırılır.



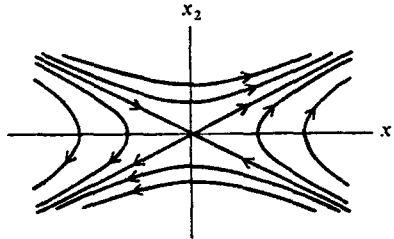
Şekil 7. Merkez nokta durumunun faz resmi görünümü.

Sistemin özdeğerleri karmaşık düzlemin sağ yanında ise, $t \rightarrow \infty$ olduğunda, durum değişkenlerinin genlikleri sonsuz olarak artar. Yörüngelerin yönleri, özdeğerler gerçel ise *kararsız düğüm*, karmaşık eşlenik ise *kararsız odak* ismini alarak, bir noktadan dışarı gidecek biçimdedir (Şekil 8). Bu durumda sistem kararsızdır.



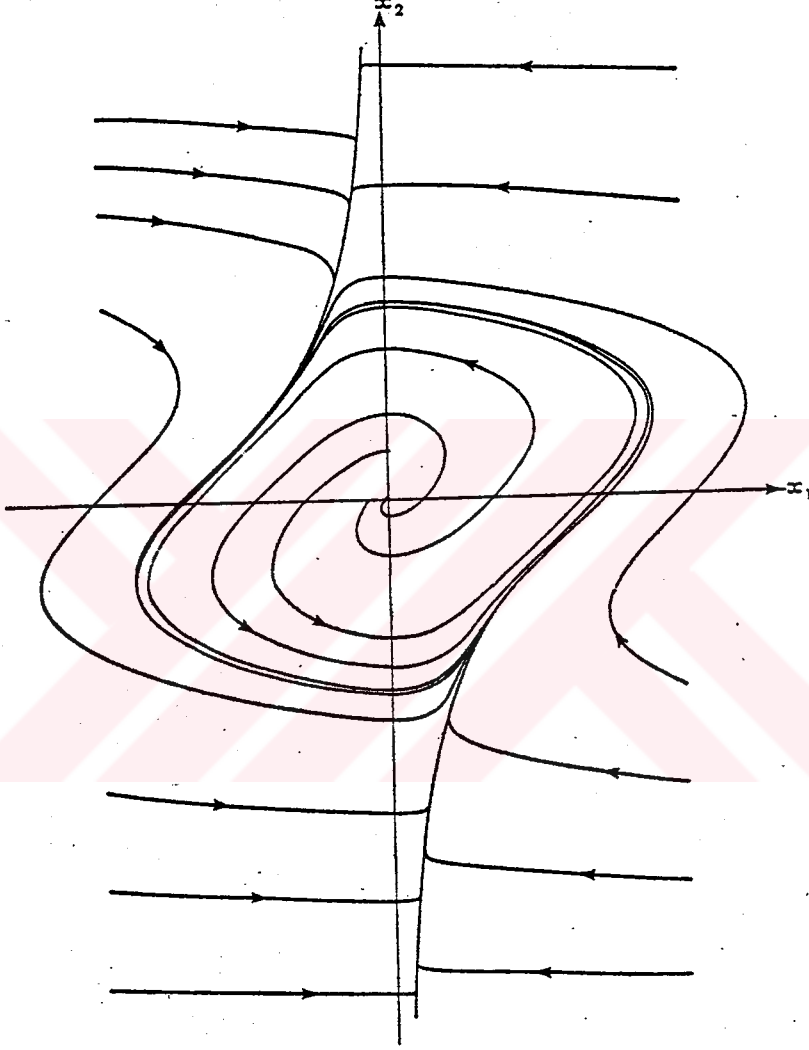
Şekil 8. Kararsız düğüm ve kararsız odak durumunun faz resmi görünümü.

Özdeğerler gerçel ancak ters işaretli ise, bir özdeğer karmaşık düzlemin sağ yanında yer aldığı için, sistem kararsızdır ve bu durum *semer noktası* diye adlandırılır (Şekil 9).



Şekil 9. Semer noktası durumunun faz resmi görünümü.

Bazı dinamik sistemler, özdeğerlerine bağlı olarak kararsız odak davranışı göstermekle birlikte, faz resminin tümü çizildiğinde daha başka özellikleri de barındırdıkları görülür (Şekil 10).



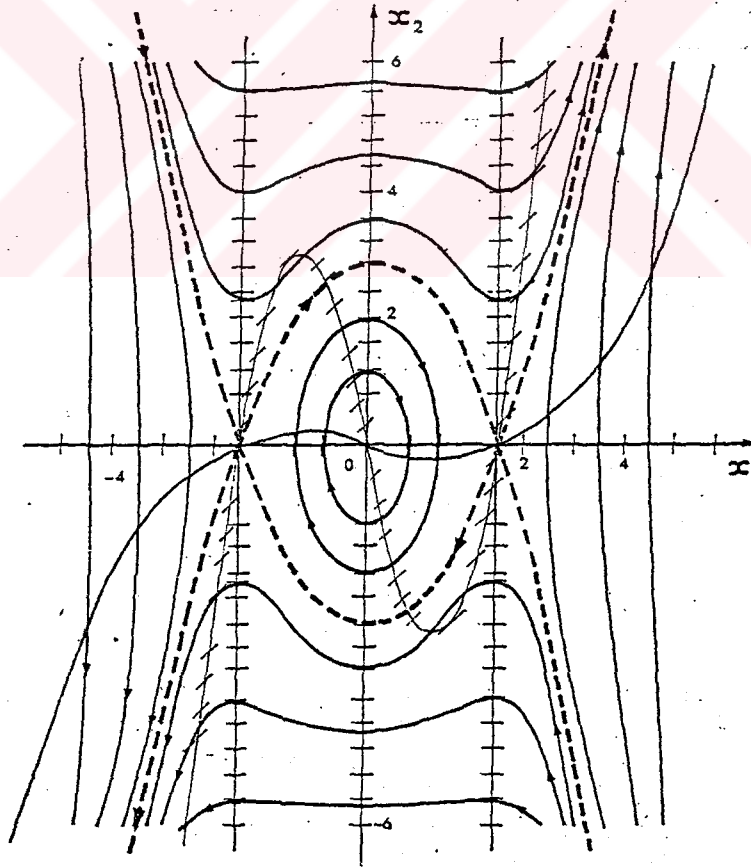
Şekil 10. Limit çevrimi durumunun faz resmi görünümü.

Davranışı Şekil 10'daki gibi olan bir dinamik sistemde, denge noktasına çok yakın bir noktadan başlayan yörünge bu noktadan uzaklaşmakta ancak sonsuza kadar uzaklaşmadan bir kapalı eğriye yaklaşmaktadır. Denge noktasına çok uzakta olan bir noktadan başlayan yörünge de $t \rightarrow \infty$ olduğunda bu kapalı eğriye yaklaşmaktadır. Bu kapalı eğriye *limit çevrimi* adı verilir. $t \rightarrow \infty$ olurken, sıfırdan farklı herhangi bir başlangıç şartı için durum değişkenleri dönemli fonksiyonlara dönüşür. Ancak limit çevriminin biçimi gelişigüzel olduğundan elde edilen bu dönemli fonksiyonlar genellikle sinüzoidal değildir.

Genel olarak, limit çevrimi davranışına sahip, doğrusal olmayan dinamik sistemlerde $t \rightarrow \infty$ için faz resmi, ya Şekil 10 'da olduğu gibi limit çevrimine yaklaşır ya da limit çevriminden uzaklaşır. İlk durumdaki limit çevrimine kararlı çevrim (asimptotik kararlı değil), diğerine kararsız çevrim adı verilir [7].

Görüldüğü gibi, Şekil 10 'daki davranışa sahip bir dinamik sistemde, limit çevriminin içindeki bir noktanın davranışı kararsız odak olmakla birlikte sistem kararlı bir yapıya sahiptir. Bu sonuç, doğrusal olmayan dinamik sistemi \bar{x} denge noktası etrafında doğrusallaştırıp davranışı hakkında bir kanıya varmanın yeterli olamayacağını göstermektedir [8].

Doğrusal olmayan dinamik sistemlerde, yukarıda sıralanan davranış şekillerinden birkaçı bir arada görülebilir. Doğrusal olmayan bir dinamik sistemin özdeğerleri Tablo 1 'deki durumlardan birden fazlasını içerdiğinde, sistemin davranışı verilen başlangıç şartına bağlı olarak kararlı yada kararsız olabilmektedir (Şekil 11).

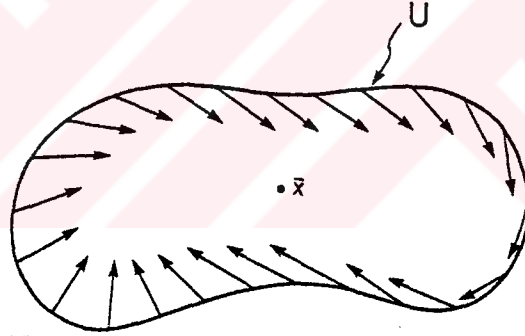


Şekil 11. Doğrusal olmayan bir dinamik sistemin faz resmi.

Şekil 11 'deki davranışı gösteren dinamik sistemde, denge noktaları merkez ve semer noktalarının varlığını göstermektedir. Verilen başlangıç şartına karşı düşen nokta, merkez nokta bölgesinin içinde bulunuyorsa, bu doğrusal olmayan sistemde durum değişkenlerinin genlikleri zamanla artmayacaktır ve sistem kararlıdır (asimptotik kararlı değil). Öte yandan başlangıç şartına karşı düşen nokta, semer nokta bölgesinin içindeyse durum değişkenlerinin genlikleri $t \rightarrow \infty$ için sonsuz olarak büyüyecektir. Bu durumda sistem kararsızdır.

1.4.2 Lyapunov Fonksiyonları

Lyapunov yöntemi, \bar{x} denge noktası civarında doğrusallaştırma ile anlamsız ya da yetersiz sonuçlar çıktığında, denge noktasının kararlılığını tanımlamak için çok sık kullanılır. Lyapunov'un yöntemine göre (2) şeklindeki doğrusal olmayan sistemde \bar{x} denge noktasını gösteriyor olsun. \bar{x} denge noktasının U komşuluğunda bir V fonksiyonu tanımlansın (Şekil 12).



Şekil 12. U sınırlarındaki dinamik sistem.

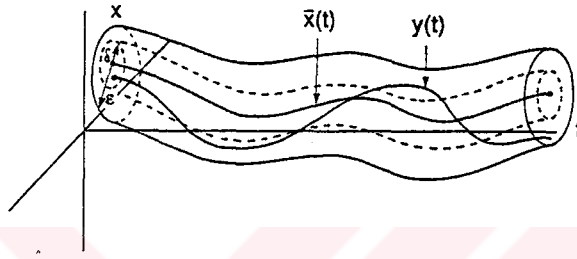
$$V: U \rightarrow R \quad (7)$$

(7) gösterimiyle tanımlanan V fonksiyonu aşağıdaki ilk iki şartı sağlıyorsa Lyapunov anlamında kararlıdır (Şekil 13). Üçüncü şartı da sağlıyorsa asimptotik kararlıdır [8].

- i) $V(\bar{x}) = 0$ ve $V(x) > 0$, $x \neq \bar{x}$ için
- ii) $\dot{V}(x) \leq 0$, $U - \{\bar{x}\}$ için
- iii) $\dot{V}(x) < 0$, $U - \{\bar{x}\}$ için

Lyapunov fonksiyonları, sistemin davranışını tanımlayan bir aktif enerji fonksiyonunun belirlenmesinden ibarettir. Sistemin bir denge durumu varsa ve sistemde depo edilen enerji ya da enerji ile aynı değişimi gösteren bir fonksiyon $t \rightarrow \infty$ için sonsuza gidiyorsa sistem kararsızdır. Bu fonksiyon sınırlı kalıyorsa sistem kararlıdır.

Lyapunov fonksiyonları sistemin durum değişkenleri olan x_1, x_2, \dots, x_n 'e bağlıdır ve $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ şeklinde ifade edilir. Bu fonksiyonun türevinin işareti ise sistemin kararlılığını, asimptotik kararlılığını veya kararsızlığını ifade eder. Lyapunov yöntemi doğrusal olmayan dinamik sistemin geniş anlamda kararlılığını inceler.



Şekil 13. Lyapunov kararlılığı.

1.4.3 Kararlılığın Değişimi (Dallanma)

Doğrusal olmayan sistemlerde önemli olan bir nokta da, kontrol parametresinin değişimiyle denge noktasının nasıl etkileneceğidir. Dinamik sistemler, kendilerini tanımlayan denklem takımlarındaki parametrelerle yakından ilgilidir. Bu parametreler değiştiğinde, belirli parametre değerleri için çözümlerin yapısal niteliklerinde değişimler gözlenir. Bu değişimler *dallanma* (bifurcation), ve parametre değerleri de *dallanma değeri* (bifurcation values) olarak adlandırılır. Dallanma terimi, ilk olarak bir diferansiyel denklemler ailesindeki denge çözümlerinin ayrılmasını tanımlamak için Poincaré tarafından kullanılmıştır.

$$\dot{x} = f_{\mu}(x) \quad x \in R^n, \mu \in R^k \quad (8)$$

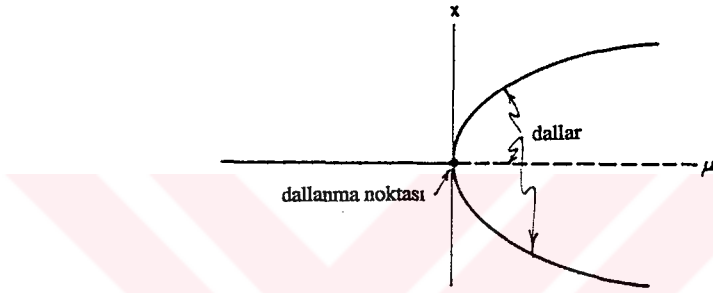
(8) eşitliğindeki diferansiyel denklem sistemi k boyutlu μ parametresine bağlıdır. Bu durumda (8) denkleminin denge çözümleri $f_{\mu}(x)=0$ olarak ortaya çıkar.

μ değişirken, açık fonksiyon teoremi, $f_{\mu}(x)$ 'in Jacobian türevi $D_x f_{\mu}$ 'nün sıfır özdeğere sahip olduğu noktalardan uzaklaşan ve μ 'nün düzgün fonksiyonları ile tanımlanan bu eşitliği ifade eder [8]. (8) eşitliğinin her dalı bu fonksiyonların herbirinin grafiğidir.

$D_x f_\mu$ 'nün sıfır özdeğere sahip (x_0, μ_0) denge noktasında, eşitliğin pekçok dalı bir arada görülebilir. Buna (x_0, μ_0) 'ın bir dallanma noktası denir. Aşağıdaki gibi tanımlı bir dinamik sistemde bu daha açık bir şekilde görülebilir.

$$f_\mu(x) = \mu x - x^3 \quad (9)$$

(9) eşitliğinden $D_x f_\mu = \mu - 3x^2$ dir. Bu durumda sadece $(\bar{x}, \mu) = (0, 0)$, bir dallanma noktasıdır. Denge noktası $\bar{x} = 0$ iken $\mu \leq 0$ ise sistem kararlı, $\mu > 0$ ise sistem kararsız hal alır. Denge noktası $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$ ise sistemin dallanan yeni denge noktaları kararlıdır (Şekil 14).

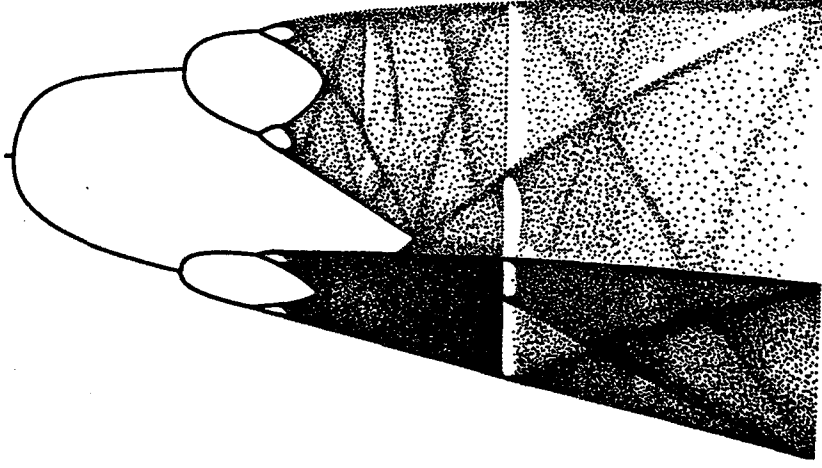


Şekil 14. $f_\mu(x) = \mu x - x^3$ için dallanma şekli.

Dallanma şekli dinamik sistemin yapısına göre değişmektedir. Şekil 14 'teki dallanma, bir çatal şeklini aldığı için *çatallanma dallanması* (pitchfork bifurcation) olarak adlandırılır. Bir dinamik sistemde, yapısına göre, semer-düğüm dallanması, kritik geçiş dallanması, çatallanma dallanması ve Hopf dallanması görülebilir [8].

Parametrenin değişimi, dinamik sistemin davranışı üzerinde dönemli, yarı dönemli (quasiperiodic), kaotik davranışların oluşmasına ya da mevcut olan bu davranışların bozulmasına sebep olabilir [8].

Uygun yapıdaki bir doğrusal olmayan dinamik sistemde, değişen parametreyle, T dönemli bir davranış $2T, 4T, 8T, \dots$ olacak şekilde değişime uğrar ve sistem kaosa gider. Şekil 15 'te, benzer değişim gösteren bir dinamik sistemin kaosa gittiği görülmektedir.



Şekil 15. Kaosa giden bir dallanma.

1.4.4 Lyapunov Üstelleri

Bir dinamik sistemin davranışının çözümlenmesinde çok önemli bir ölçüt olan Lyapunov üstelleri, sistem hakkında karakteristik bilgiler verir ve aynı zamanda kaotik davranışın da bir ölçüsüdür.

Eğer bir dinamik sistemin davranışı başlangıç şartlarına çok duyarlıysa, bu durumda zaman ilerledikçe, faz uzayındaki birbirine yakın yörüngeler hızlıca birbirinden ayrılır. O zaman bu sistemin dinamik bir şekilde kararsız olmaya başladığı söylenebilir. Fakat sisteme ait çoğu yörünge bilinmediği için hemen böyle bir saptama yapmak kolay değildir. Ancak ifade edilebilen yörüngelerle yetinilme zorunluluğu da vardır [4].

Bir dinamik sisteme ilişkin Lyapunov üstellerini bulmak için, tek boyutlu ayrık bir sistem göz önünde tutulsun.

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (10)$$

(10) eşitliğindeki sistemde, n tekrarlamayı göstermektedir. (x_0, y_0) noktaları R faz uzayında birbirine yakın iki başlangıç noktası olsun.

$$x_n = f^n(x_0) \quad , \quad y_n = f^n(y_0) \quad (11)$$

(11) eşitliğinde x_n ve y_n , f 'in n . tekrarıdır. Eğer bu noktalar n ile üstel olarak birbirinden ayrılırsa,

$$|y_n - x_n| = Ae^{\lambda n} \quad (\lambda > 0)$$

$$A = |y_0 - x_0| \quad , \text{ büyük } n \text{ için}$$

$$\frac{1}{n} \ln |y_n - x_n| \rightarrow \lambda \quad , \text{ büyük } n \text{ için}$$

halini alır.

Bununla birlikte, sınırlı bir bölgede hareket durumunda çok büyük n için, başlangıç noktaları (x_0, y_0) çok yakın olmadıkça üstel ayrılma oluşamaz. Bu yüzden $n \rightarrow \infty$ olmadan önce, $|x_0 - y_0| \rightarrow 0$ olmak zorundadır. Bu ise bir sabiti tanımlar [4].

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{|x_0 - y_0| \rightarrow 0} \ln \left| \frac{x_n - y_n}{x_0 - y_0} \right| \\ \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{|x_0 - y_0| \rightarrow 0} \ln \left| \frac{f^n(x_0) - f^n(y_0)}{x_0 - y_0} \right| \\ \lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| \\ \lambda_\gamma &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df^n(x_k)}{dx_k} \right| \end{aligned} \quad (12)$$

(12) eşitliği $\gamma = \{ x_n = f^n(x_0); n=0, 1, 2, \dots \}$ yörüngesi için Lyapunov üstelini tanımlar [4]. Dinamik sistemin boyutu kadar Lyapunov üsteli vardır. Lyapunov üstellerinin toplamı, sıfırdan küçük ise kayıplı bir sistemi, sıfır ise kayıpsız sistemi (Hamiltonian sistem), sıfırdan büyük ise genişleyen bir sistemi tanımlar.

Tek boyutlu ayırık bir dinamik sistem için tanımlanan Lyapunov üstelini, diferansiyel denklem sistemlerine uygulamak için, diferansiyel denklemler ayırık sistemlere dönüştürülmelidir [9].

1.4.5 Poincaré Haritası

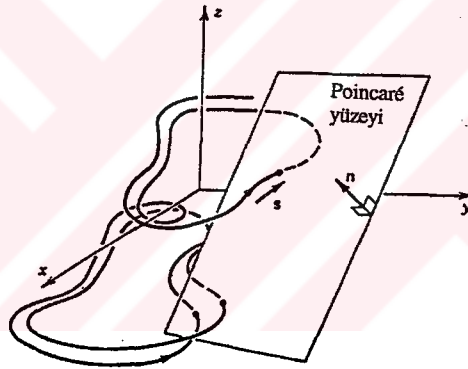
Poincaré 'nin öğretisiyle ortaya çıkmış bir teknik olan Poincaré haritası, çeşitli davranışların (dönemli, yarı dönemli, kaotik) ayırt edilmesinde kullanılır.

Poincaré haritasının oluşturulmasında, dinamik sisteme ait en az bir değişken atılır. Bu, yüksek boyutlu ve anlaşılması güç olan dinamik sistemlerde boyut azaltımı nedeniyle anlaşılabilirliği artırmaktadır.

Düşük boyutlu problemlerde ($D \leq 4$) sayısal yöntemlerle hesaplanmış Poincaré haritaları, sistemin genel değişimlerinin kolay kavranabilirliğini ve göze batan görüntülerini sağlar [8].

Ne yazık ki, Poincaré haritasını oluşturmak için istenilen bir dinamik sisteme uygulanabilen genel bir yöntem yoktur [8]. Poincaré haritasının oluşturulması için dinamik sistemin faz resmindeki geometrik yapısı hakkında birtakım bilgiler gereklidir.

Üç tane birinci dereceden diferansiyel denklemden oluşan bir dinamik sistem dikkate alınrsa, harekete ait yörüngeler üç boyutlu uzayda gösterilir. Poincaré haritası ise bu uzayda yörüngelerin içinden geçtiği iki boyutlu bir yüzeyin tanımlanmasıyla oluşturulur (Şekil 16). Bu yüzeyde dinamik sistemin zaman akışına ait bilgi varsa, verilen sisteme ait t_n ve t_{n+1} deki yerleşimler arasında bağlantı kurulabilir.



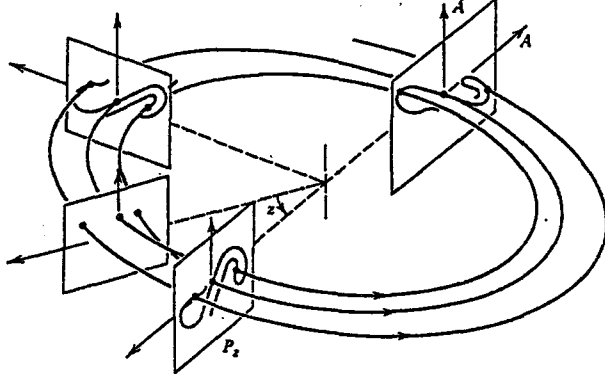
Şekil 16. Üç boyutlu uzayda oluşturulan Poincaré yüzeyi.

Şekil 16 'da düzlem, $n=(n_1, n_2, n_3)$ normal vektörler olmak üzere, $n_1x+n_2y+n_3z=c$ şeklinde seçilir. Özel bir durum olarak $x=0$ seçilirse o zaman Poincaré haritası bu yüzeyi delip geçen yörüngelerin noktalarını içerir.

Dönemli kaynağa sahip bir doğrusal olmayan dinamik sistem, genel olarak aşağıdaki gibi yazılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= F(x, y) + f_0 \cos z \\ \dot{z} &= w \end{aligned}$$

bu sistem için doğal örnekleme zamanı $z=0$ iken seçilmelidir. Bu sistem, z değişkeni $0 \leq z \leq 2\pi$ şeklinde sınırlandırılmış olarak silindirik bir faz uzayında davranmaktadır diye düşünülebilir (Şekil 17).

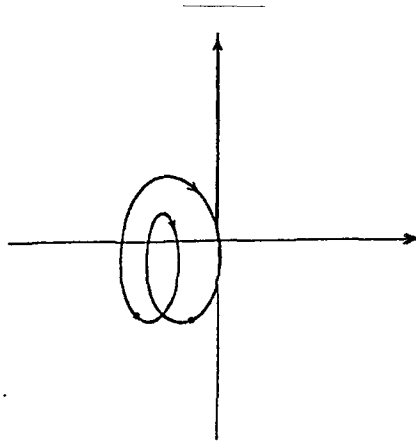


Şekil 17. Dönemli kaynağa sahip bir dinamik sistemde Poincaré haritasının oluşturulması.

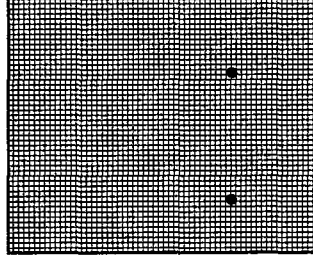
Eğer bir dinamik sistemin değişimlerine sadece ayırık zamanda bakılırsa bu durumda Poincaré haritasında faz düzlemine ait noktalar dizisi görünür. Poincaré haritasının oluşturulmasında t_n örnekleme zamanı belirli bir kurala göre seçilir.

Bir kaynakla sürülen T dönemli bir davranış varsa Poincaré haritası için örnekleme zamanı doğal olarak $t_n = nT + \tau_0$ seçilir. Bu, dönemli ve dönemli olmayan davranışların arasından birine karar vermeye izin verir (Şekil 18).

Şekil 18 'deki dönemli davranışın Poincaré haritasındaki görünümü iki nokta olacaktır (Şekil 19).



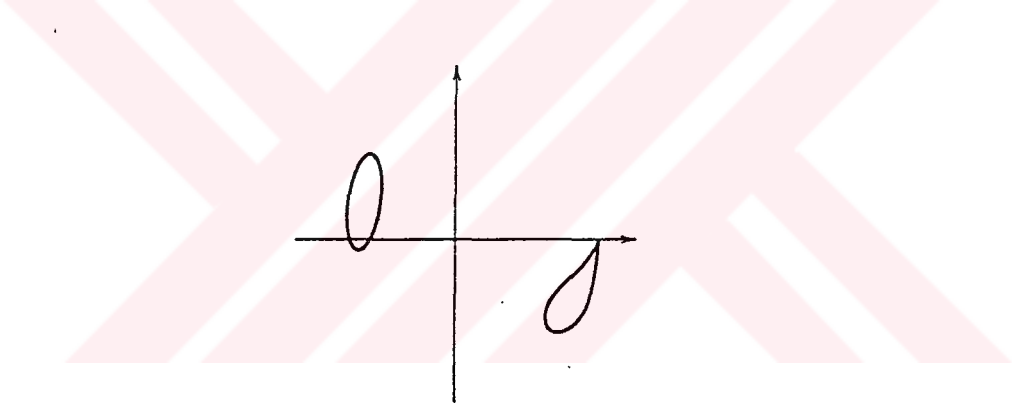
Şekil 18. Dönemli bir davranışın faz resmi.



Şekil 19. Dönemli bir davranışın Poincaré haritasındaki görünümü.

Yarı dönemli davranışa sahip bir dinamik sistemin Poincaré haritası Şekil 20 'de görülmektedir. Burada davranış, w_1/w_2 kesirli bir sayı olan aşağıdaki şekildedir. Frekansların ikisinden birine karşı gelen anlarda örnekleme yapılırsa, Poincaré haritasındaki görünüm sürekli-kapalı bir yörünge halini alacaktır.

$$x(t) = c_1 \sin(w_1 t + d_1) + c_2 \sin(w_2 t + d_2)$$



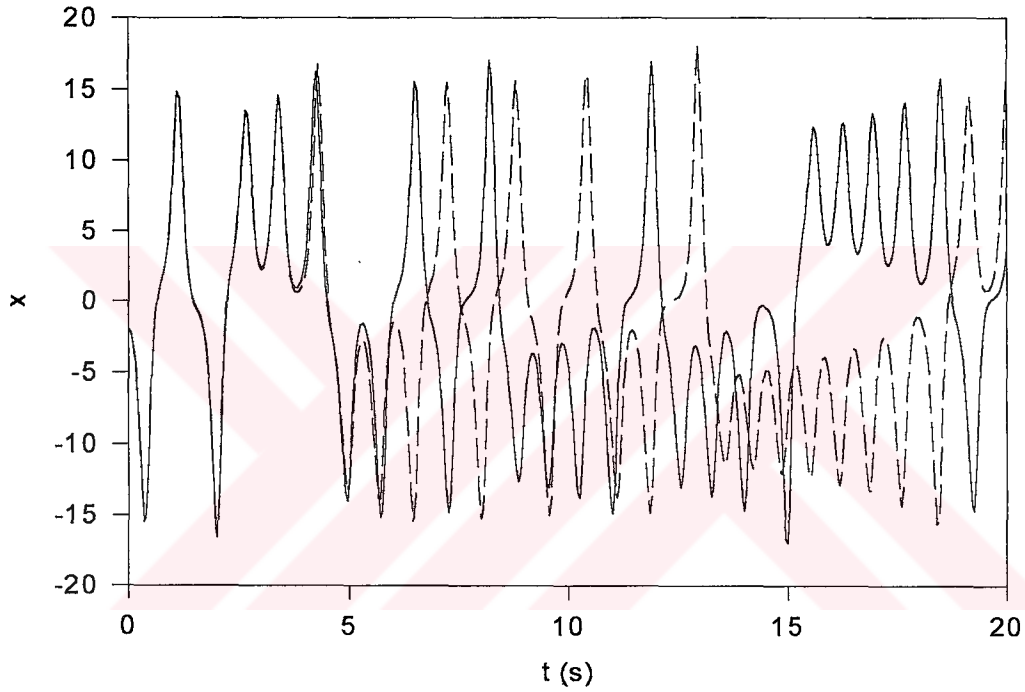
Şekil 20. Yarı dönemli dinamik sisteme ait Poincaré haritası.

1.5 Kaos

Doğrusal olmayan bazı dinamik sistemlerde, *kaos* olarak adlandırılan, önceden tahmin edilemeyen ilginç davranışlar görmek mümkündür. Bu tür bir davranış şekli, diferansiyel veya fark denklemlerinden oluşabilen dinamik sistemlerde, ancak bazı nicel ve nitel ölçütlere başvurulularak tespit edilebilir. Ölçütlerin sonuçları birbirini destekleyecek nitelikteyse, bu durumda kaotik davranıştan bahsedilebilmektedir. Bu ölçütlerden bazıları, başlangıç şartlarına duyarlılık, faz resmi görünümü, frekans spektrumu, Lyapunov üstelleri ve Poincaré haritası olarak sıralanabilir.

1.5.1 Başlangıç Şartlarına Duyarlılık

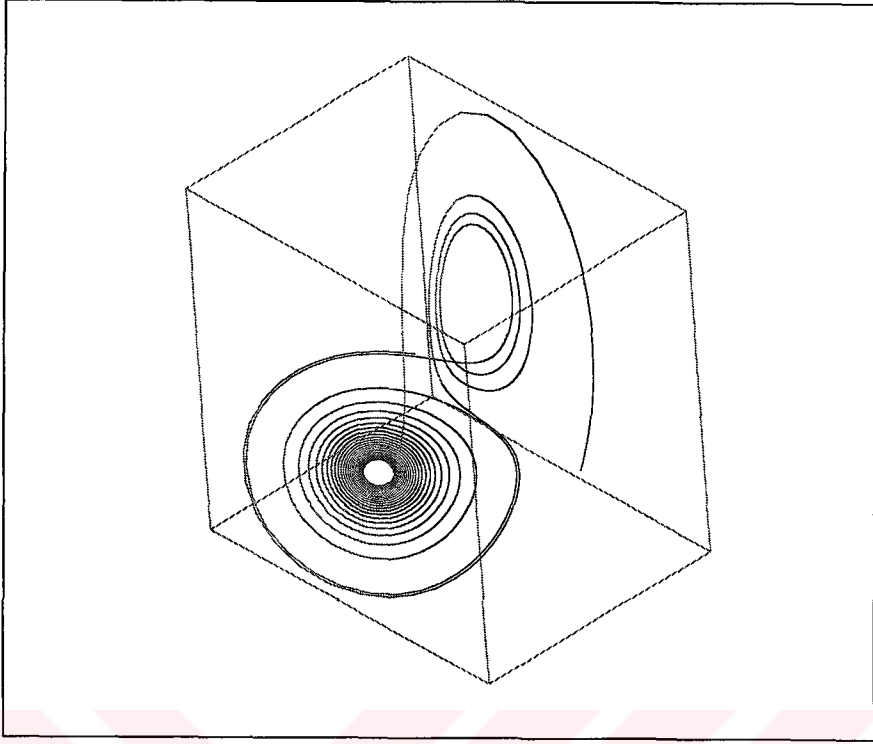
Bir dinamik sistemin kaotik davranabilmesi için başlangıç şartlarına çok duyarlı olması gerekmektedir [6, 8, 10]. Lorenz sisteminde, $\sigma=10$ $\rho=28$ $\beta=8/3$ parametre değerleri için, başlangıç değerlerindeki %1 farklılığın, daha sonra sistemin gelişimini nasıl etkilediği Şekil 21 'de görülmektedir. Şekil 21 'de, x değişkeninin zamanla gelişimi gösterilirken, düz çizgi için $x_0 = -2$ ve kesikli çizgi için $x_0 = -2.01$ dir. Görüldüğü gibi küçük bir fark, bir süre sonra değişimleri ilişkisiz hale getirmektedir.



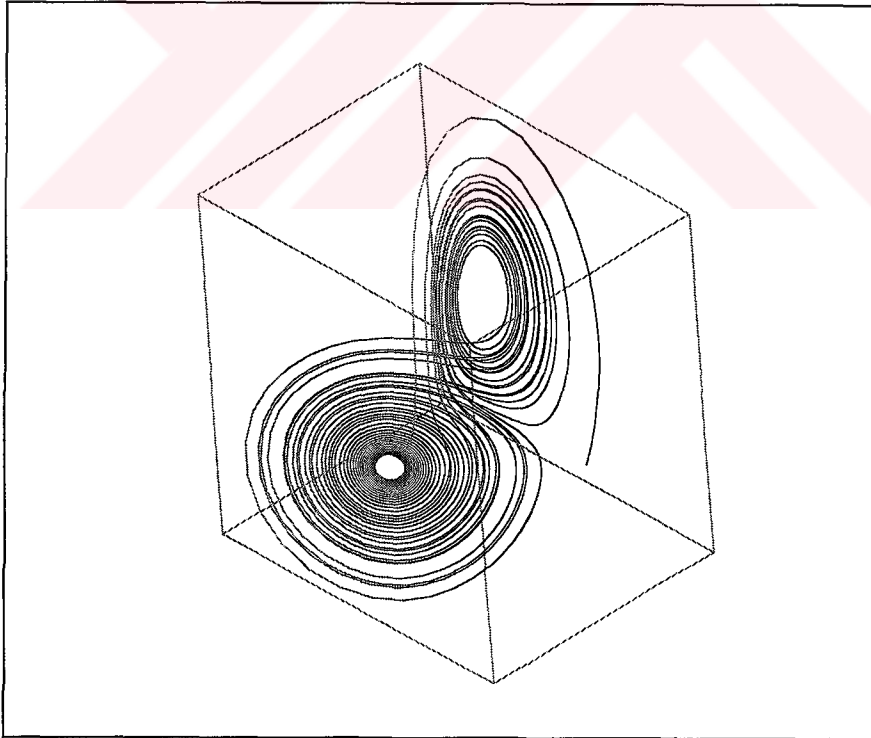
Şekil 21. Lorenz sisteminde, başlangıç şartlarındaki %1 'lik farklılıkla sistem davranışının kısa sürede ilişkisiz hale gelişi.

1.5.2 Faz Resmi Görünümü

Kaotik yapıya sahip sistemlerde faz resminin zaman gelişimi, dinamik sistemin yapısının belirlediği faz uzayı bölgesinde, sayılamayacak kadar yörüngeyle dolması şeklinde olur. Zaman ilerledikçe, yörüngeler faz uzayını doldurmaya başlar ve hiçbir zaman üzerine kapanmaz, tekrar eder [10]. Faz uzayının bu şekilde dolması kaotik işaretlerden biridir. Bu özelliği, kaotik Lorenz ve Rossler sistemlerinde görmek mümkündür (Şekil 22a,b,c,d ve Şekil 23a,b,c,d).

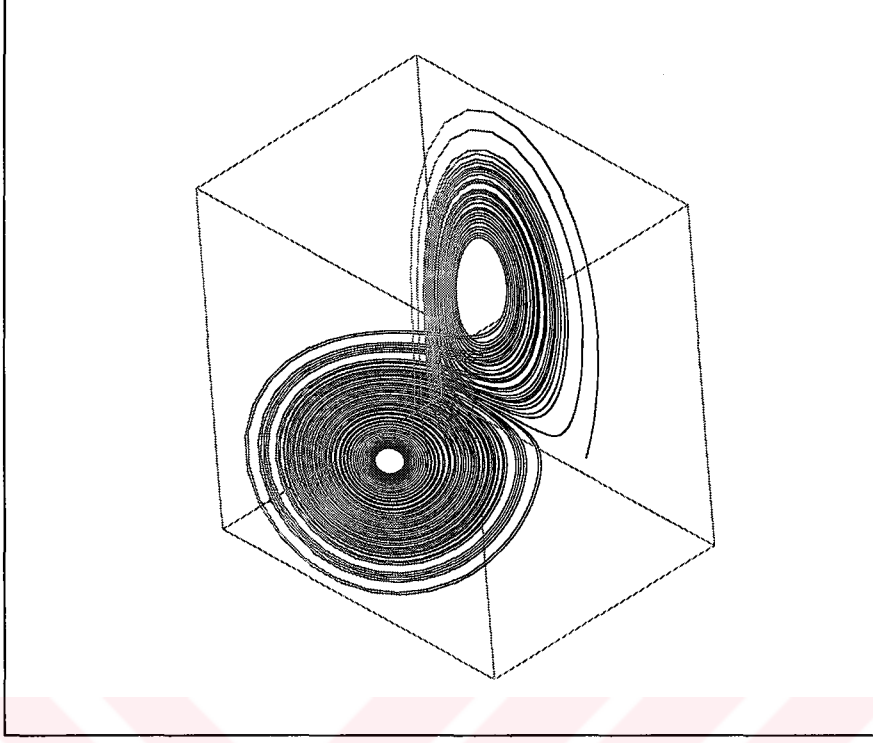


(a)

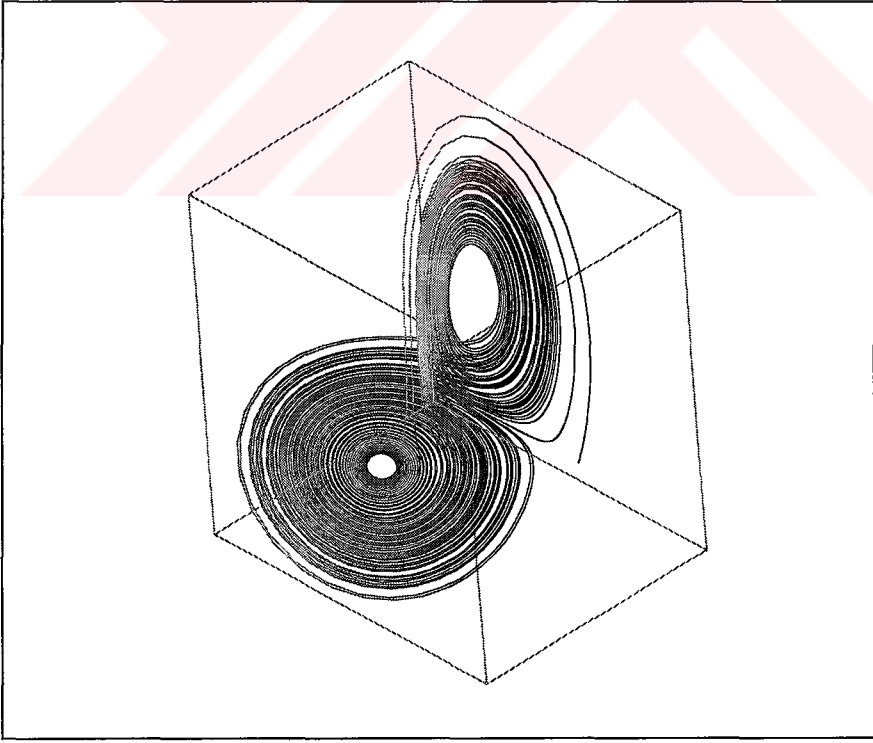


(b)

Şekil 22a,b. Kaotik Lorenz sisteminin, zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması. (a) 0-20 saniye. (b) 0-40 saniye.

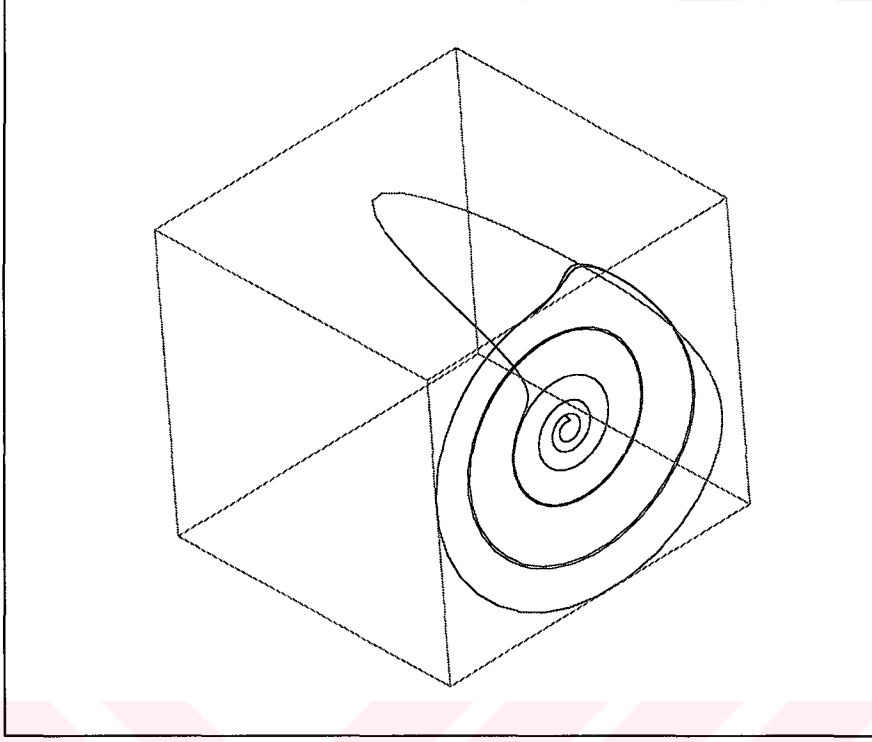


(c)

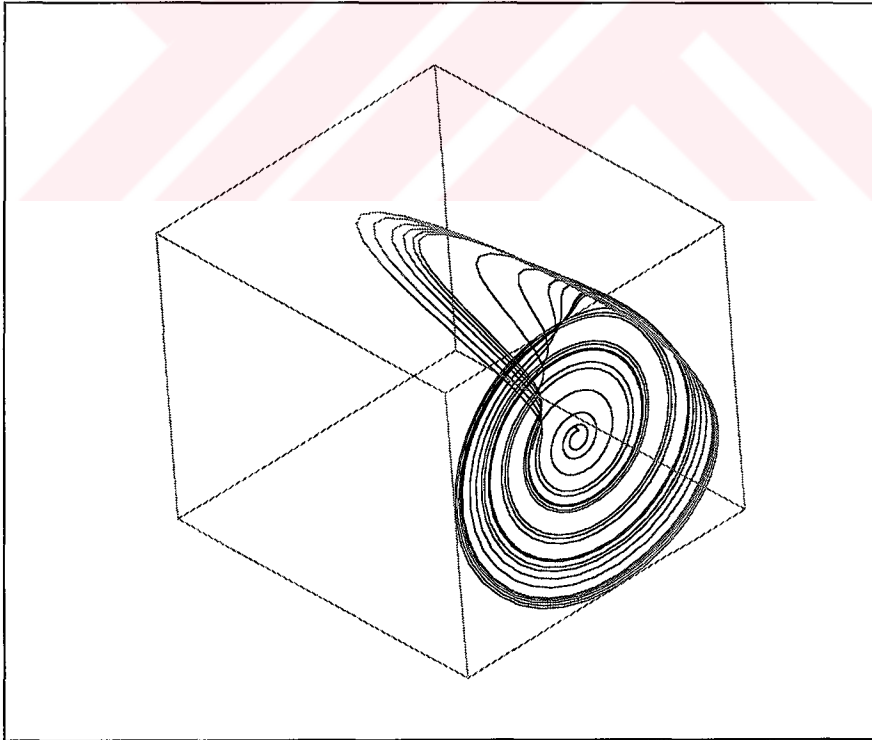


(d)

Şekil 22c,d. Kaotik Lorenz sisteminin, zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması. (c) 0-80 saniye. (d) 0-120 saniye.

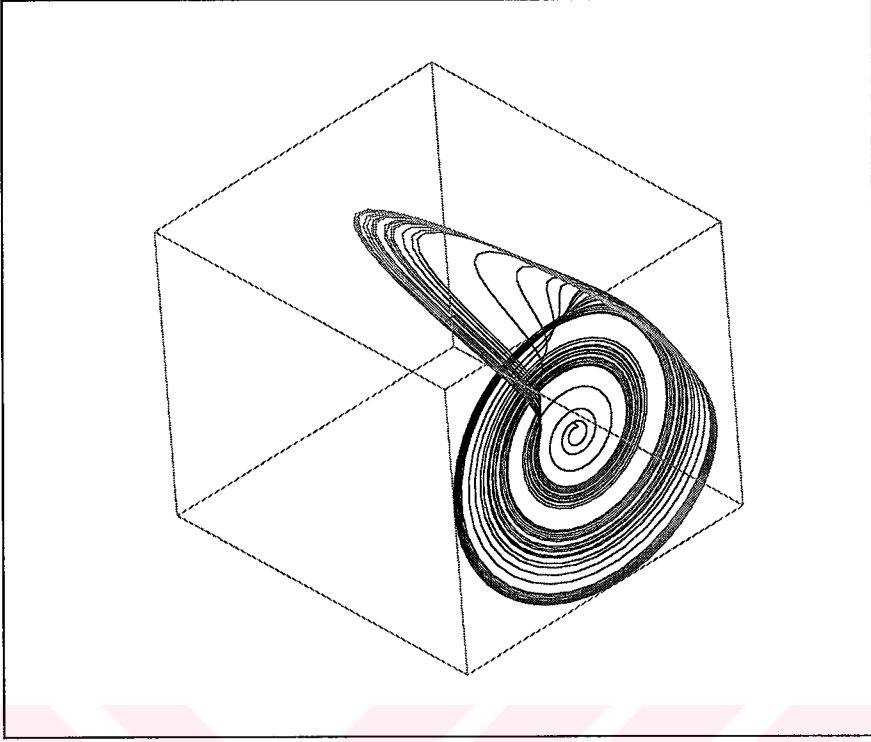


(a)

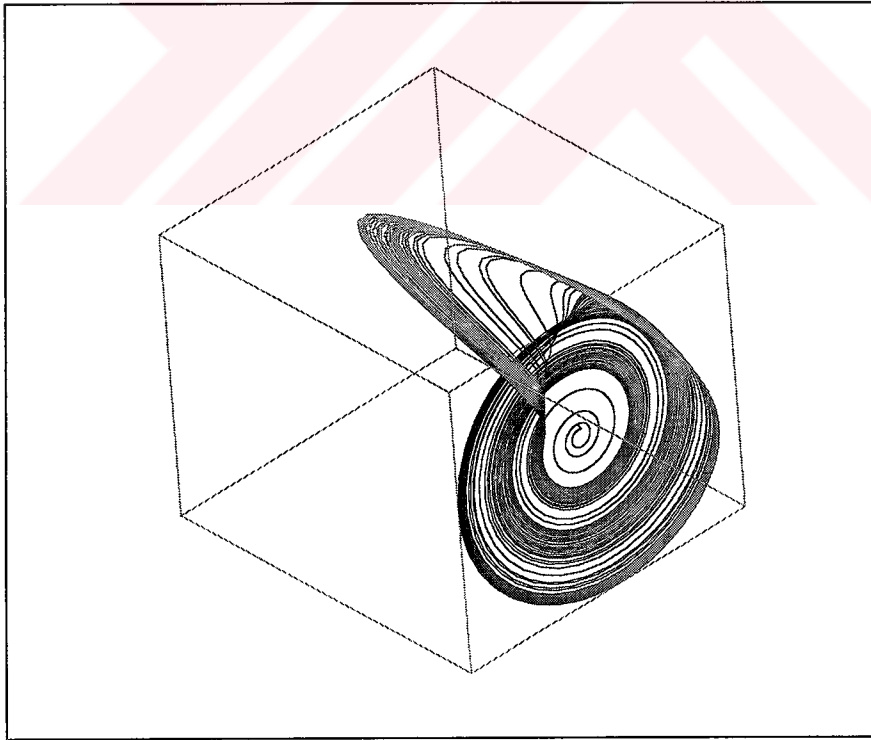


(b)

Şekil 23a,b. Kaotik Rössler sisteminin, zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması. (a) 0-50 saniye. (b) 0-150 saniye.



(c)

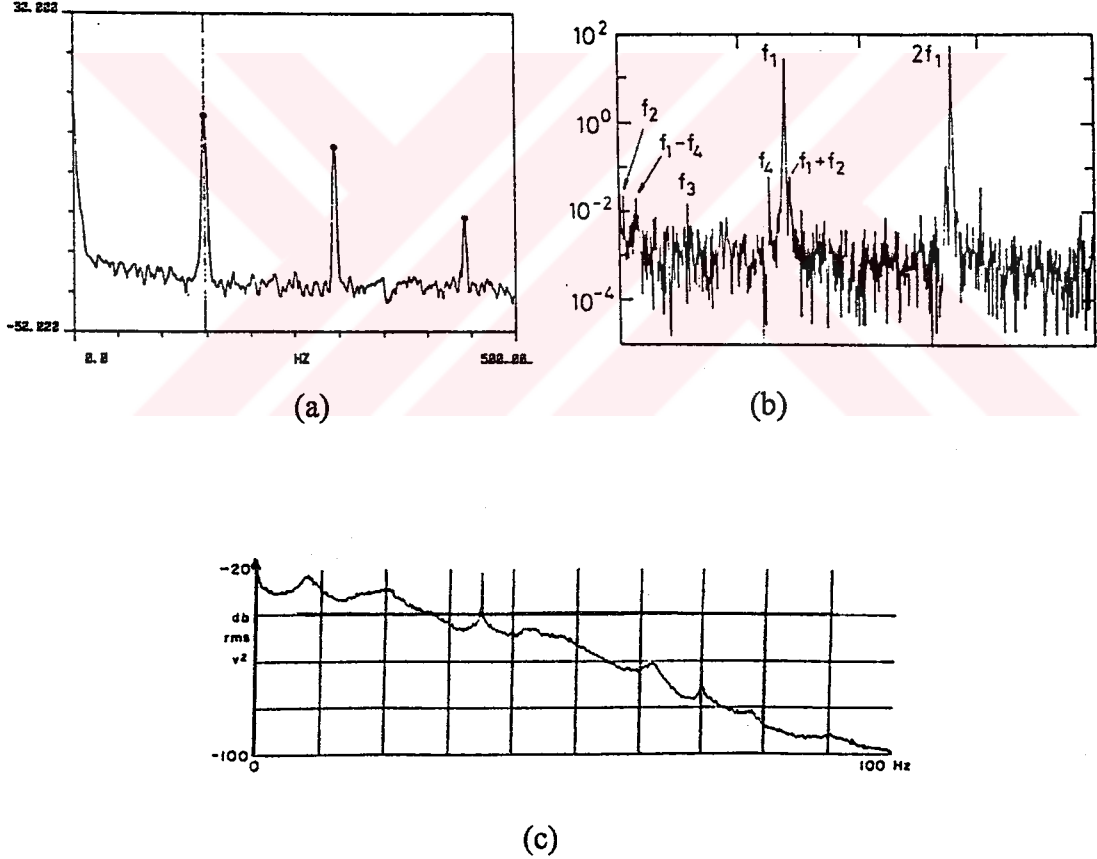


(d)

Şekil 23c,d. Kaotik Rössler sisteminin, zaman ilerledikçe 3 boyutlu faz uzayını doldurması. (c) 0-350 saniye. (d) 0-650 saniye.

1.5.3 Frekans Spektrumu

Kaotik davranışın ipuçlarından biri de sistemin geniş bantlı bir frekans spektrumuna sahip olmasıdır [10]. Kaosun bu karakteristiği, sistem düşük boyutlarda ise ($1 \leq D \leq 3$) daha önemli bir hal alır [10]. Genellikle, eğer w_0 'da sisteme ait baskın bir frekans bileşeni varsa, frekans spektrumunda w_0/n ($n=1,2,3,\dots$) bileşenlerinin bulunması kaosa işaretler. Genelde bu frekansa ait bileşenler mw_0/n ($m=n=1,2,3,\dots$) şeklinde olur. Yüksek boyutlu sistemlerde frekans spektrumunun kullanımı kaotik davranışın anlaşılmasında fazla yardımcı olmayabilir. Bu yüzden sistemdeki bir veya birkaç parametrenin değiştirilmesiyle spektrumdaki değişimin gözlenmesi yararlı olacaktır [10]. Şekil 24 'te dönemli, yarı dönemli ve kaotik işaretlerin frekans spektrumları görülmektedir [10,11].



Şekil 24. (a) Temel frekans bileşeni ve bir kaç harmonik içeren dönemli işaretin frekans spektrumu.
 (b) Dört temel frekans bileşeni içeren yarı dönemli bir işaretin frekans spektrumu.
 (c) Kaotik bir işaretin frekans spektrumu.

1.5.4 Lyapunov Üstelleri

Bir dinamik sistemin kaotik olarak tanımlanabilmesi için kullanılan ölçütlerden nicel olan ve belki de en önemlisi Lyapunov üstelidir. Ayrıca Lyapunov üstelleri bir dinamik sistemin başlangıç şartlarına duyarlılığının da ölçüsüdür [10]. Bir dinamik sistem, toplamları sıfırdan küçük olmak üzere, sıfırdan büyük en az bir Lyapunov üsteli içeriyorsa kaotik olarak tanımlanır [12].

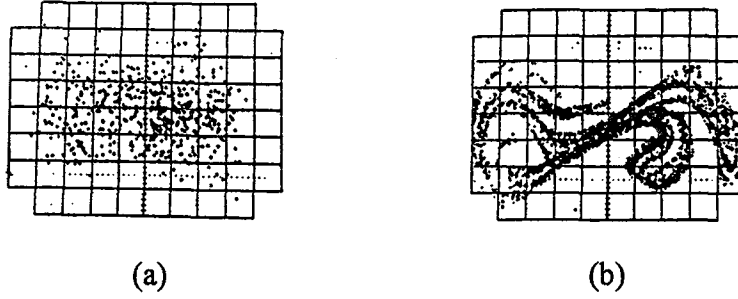
Tablo 2 'de kaotik davranan çeşitli dinamik sistemlere ait hesaplanmış Lyapunov üstelleri verilmektedir [12].

Tablo 2. Çeşitli dinamik sistemlere ait Lyapunov üstelleri

Sistem	Parametre değerleri	Lyapunov Üsteli (bit/s)
<u>Hénon :</u> $x_{n+1} = 1 - a x_n + y_n$ $y_{n+1} = b x_n$	$a=1.4$ $b=0.3$	$\lambda_1=0.603$ $\lambda_2=-2.34$ (bit / tekrar sayısı)
<u>Rosler-kaos :</u> $\dot{x} = -(y + z)$ $\dot{y} = x + a y$ $\dot{z} = b + z(x - c)$	$a=0.15$ $b=0.20$ $c=10.0$	$\lambda_1=0.13$ $\lambda_2=0.00$ $\lambda_3=-14.1$
<u>Lorenz :</u> $\dot{x} = \sigma(y - x)$ $\dot{y} = x(r - z) - y$ $\dot{z} = x y - b z$	$\sigma = 16.0$ $r = 45.92$ $b = 4.0$	$\lambda_1=2.16$ $\lambda_2=0.00$ $\lambda_3=-32.4$
<u>Rosler-hiperkaos :</u> $\dot{x} = -(y + z)$ $\dot{y} = x + a y + w$ $\dot{z} = b + x z$ $\dot{w} = c w - d z$	$a=0.25$ $b=3.0$ $c=0.05$ $d=0.5$	$\lambda_1=0.16$ $\lambda_2=0.03$ $\lambda_3=0.00$ $\lambda_4=-39.0$

1.5.5 Poincaré Haritası

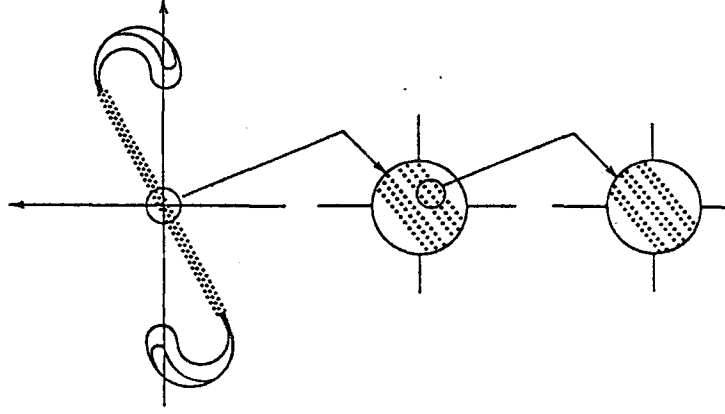
Eğer bir dinamik sisteme ait Poincaré haritası Şekil 19 'daki gibi sonlu bir noktalar kümesi ya da Şekil 20 'deki gibi kapalı yörüngelerden birini içermezse davranış kaotik olabilir (Şekil 25) [10].



Şekil 25. (a) Düşük sönümlü bir kaotik davranışın Poincaré haritası.
(b) Daha yüksek sönümlü bir kaotik davranışın Poincaré haritası.

Bu durumda, sistem hakkında sönümlü ya da sönümsüz olduğuna karar verilmelidir. Sönümsüz veya çok düşük sönümlü dinamik sistemlerde kaotik hareketin Poincaré haritası, Poincaré kesitinde düzensiz noktalardan oluşmuş bir bulut şeklinde görünür (Şekil 25a) [10]. Sönümlü sistemlerde kaotik hareketin Poincaré haritası ise, birbirine paralel görünümü veren, oldukça düzenli sonsuz bir noktalar kümesi şeklinde görünür (Şekil 25b) [10].

Sayısal benzetim teknikleriyle çözülen bir kaotik sistemde, Poincaré haritasının bir parçası büyültüldüğünde uzaktaki yapılar gözlenebilir. Eğer bu noktalar kümesinin yapılanması pek çok büyültmeden sonra hala mevcutsa bu sistem *acayip çekici* (strange attractor) adıyla anılan bir davranış gösterir (Şekil 26) [10]. Poincaré haritasındaki bu iç içe gömülmüş yapılanma da kaotik davranışın güçlü bir göstergesidir [10].



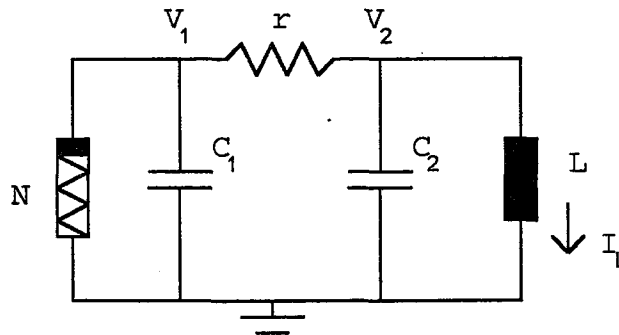
Şekil 26. Poincaré haritasının belli bir bölgesi büyütülen sistemde, birbirini tekrar eden yapılar.

1.6 Elektronik Devrelerde Kaos ve Uygulamaları

Kaotik çalışan elektronik devreler oluşturulabildiği gibi, bu tür devrelerden yararlanılarak senkron çalışan kaotik sistemler de oluşturulabilir. Elektronik devrelerde kaosun uygulanması, kendini en çok senkronizasyon ve ona bağlı uygulamalar konusunda göstermektedir.

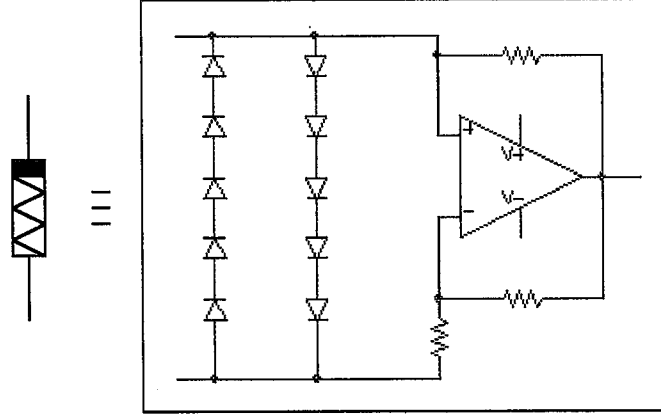
1.6.1 Kaotik Van der Pol-Duffing Osilatörü

Van der Pol-Duffing osilatörünün genel hali Şekil 27 'de görülmektedir.



Şekil 27. Kaotik Van der Pol-Duffing osilatörü.

Kaotik çalışmanın gözlenebilmesi için gerekli olan doğrusal olmayan eleman, negatif direnç sayesinde oluşturulmaktadır. Negatif direnç ise diyot dizisi ve bir işlemsel yükselteçten oluşan elemanları içerir (Şekil 28) [13].



Şekil 28. Doğrusal olmayan direnç elemanının eşdeğer devresi.

Doğrusal olmayan direnç elemanının I-V eğrisi kübik polinom yaklaşımıyla aşağıdaki gibi verilebilir [13].

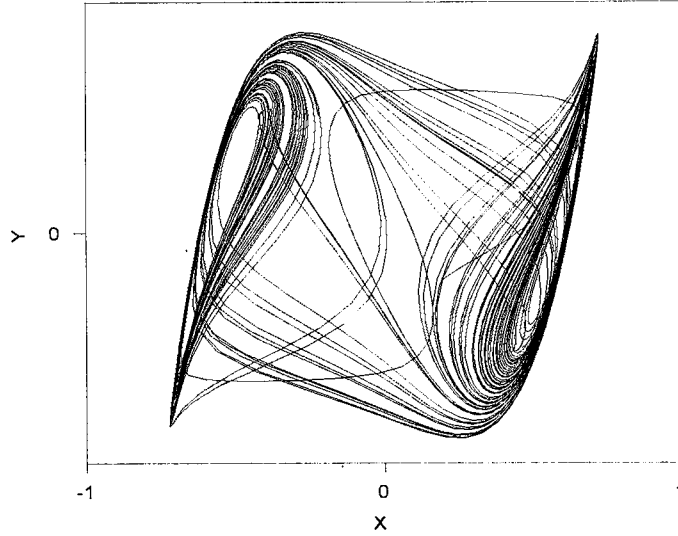
$$I(v) = aV + bV^3 \quad a < 0, \quad b > 0$$

Kirchoff 'un akımlar yasası kullanılarak Şekil 28 'deki devreye ilişkin otonom denklemler sistemi bulunur.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -m(x^3 - \alpha x - y) \\ \dot{y} &= x - y - z \\ \dot{z} &= \beta y \end{aligned} \quad (13)$$

$$m = C_2/C_1 \quad \alpha = -(1 + ar) \quad \beta = C_2 r^2 / L$$

(13) 'deki denklem takımının kaotik parametre değerleri için davranışı Şekil 29 'da görülmektedir.



Şekil 29. Kaotik Van der Pol-Duffing sisteminin faz resmi.

1.6.2 Kaotik Sistemlerin Senkronizasyonu

1.6.2.1 Pecora ve Carroll 'un Çalışmaları

İki bağımsız kaotik sistem aynı başlangıç şartlarıyla çalışmaya başlarsa, bu şartlardaki en küçük bir fark zamanla üstel olarak büyüyecektir [2]. Biraz zaman sonra iki kaotik sistemin davranışı ilişkisiz hale gelir. Buna rağmen Pecora ve Carroll, iki kaotik sistemin doğru işaretlerle sürülmesi halinde senkronize olabileceklerini göstermiştir [2].

Pecora ve Carroll 'un öngördüğü yaklaşıma göre, kaotik davranan bir dinamik sistemin bazı alt parçalarının kopyalarını çıkarıp, kopyalanmamış parçadan alınan işaretlerle gerçek alt sistemi ve kopyasını sürmek gereklidir [2]. Bu, bir sistemi sürmenin genel halidir. Bu yaklaşımı izah etmek için n boyutlu bir dinamik sistem alınsın.

$$\dot{u} = f(u) \quad u = (u_1, \dots, u_n) \quad (14)$$

(14) eşitliğindeki dinamik sistem iki alt sisteme bölündüğünde, $v = g(v, w)$ $w = h(v, w)$ elde edilir. Özel bir m değeri için, $v = (v_1, \dots, v_m)$, $g = (g_1, \dots, g_m)$, $w = (w_1, \dots, w_{n-m})$, $h = (h_1, \dots, h_{n-m})$ şeklinde yazılır. w alt sisteminin kopyası çıkarılıp, yeni w' değişkeni olarak kullanılırsa, sistem $2n-m$ boyutlu hal alır. (15) eşitliğindeki $v-w$ alt sistemi, w' 'den bağımsız çalıştığı için süren sistem olarak algılanır ve v işareti w' alt sistemine sürmesi için gönderilir.

$w'(t)$ değişkeni, zaman ilerlerken doğru şartlar altında, asimptotik olarak $w(t)$ değişkenine yaklaşacaktır ve daha sonra $w(t)$ ile aynı değişimi gösterecektir [2].

$$\begin{aligned}\dot{v} &= g(v, w) \\ \dot{w} &= h(v, w) \\ \dot{w}' &= h(v, w')\end{aligned}\tag{15}$$

Bu olayın oluşması için Pecora ve Caroll tarafından belirlenen gerek ve yeter şart, w alt sisteminin Lyapunov üstellerinin işaretlerinin sıfırdan küçük olmalarıdır. w alt sistemi için Lyapunov üstelleri süren değişken v 'ye bağlıdır ve şartlı Lyapunov üsteli olarak bilinir.

Senkronizasyon için istenilen durum, $\Delta w(t) = w'(t) - w(t)$ farkının $t \rightarrow \infty$ için sıfıra yaklaşmasıdır. Bu, w alt sistemi için değişim denklemini gerekli kılar.

$$\frac{d\Delta w}{dt} = D_w h(v, w) \Delta w + O((\Delta w)^2)\tag{16}$$

$D_w h$, w alt sistemini Jacobian 'ıdır. (16) eşitliğinde yüksek dereceli terimler ihmal edilirse geriye, w alt sistemi için bir değişim denklemi kalır. Bu değişim denkleminde Lyapunov üstelleri hesaplanabilir [2, 11]. w alt sisteminin Lyapunov üstellerinin hesaplanması, bu alt sistemin kararlılığını, w' 'nün w 'ye yaklaştığını tanımlar.

Pecora ve Caroll, ortaya koydukları bu yaklaşıma göre kaotik sistemlerin senkronizasyonunu başarıyla gerçekleştirmişlerdir.

1.6.2.2 He ve Vaidya 'nın Çalışmaları

Pecora ve Caroll 'dan sonra kaotik sistemlerin senkronizasyonuna güçlü bir yaklaşım, He ve Vaidya 'dan gelmiştir. He ve Vaidya, Pecora ve Caroll 'dan farklı olarak, kaotik bir sistemi olduğu gibi kullanmak yerine sistemin boyutunu artırmışlar ve elde ettikleri yeni kaotik sistemin senkronizasyonunu denemişlerdir. Ayrıca senkronizasyon için öngörülen gerek ve yeter şartlar asimptotik kararlılık-Lyapunov kararlılığı temeline dayalıdır.

Kaotik sistemlerde boyut artırımı, alt sistemi seçerken daha çok ihtimalin oluşmasından dolayı çok kullanışlı olur. Böylece mevcut bir kaotik sistem senkronizasyon için daha elverişli hale getirilebilir.

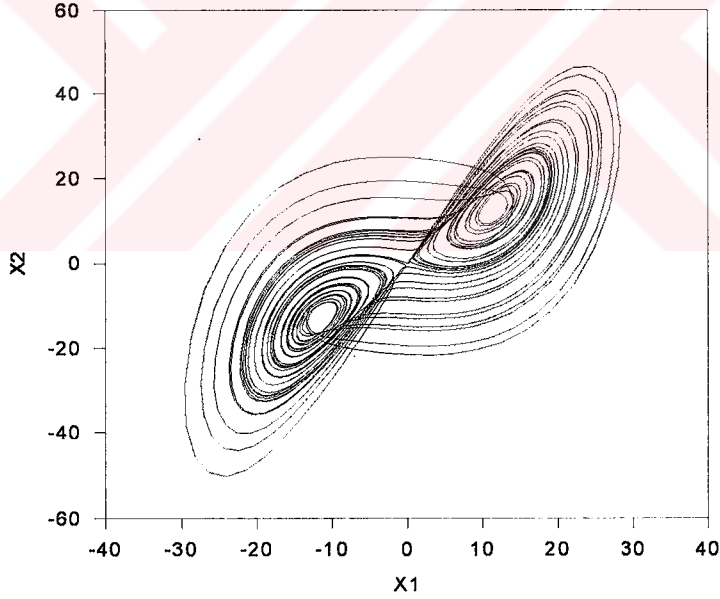
Senkronizasyon için öngörülen asimptotik kararlılık ve Lyapunov kararlılığı ise bir dinamik sistem için belirlenmesi daha kolay olan ölçülerdir.

Lorenz sistemi (17) eşitliği ile ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \sigma(y - x) \\
\dot{y} &= \rho x - y - xz \\
\dot{z} &= xy - \beta z
\end{aligned} \tag{17}$$

He ve Vaidya, (17) eşitliği ile ifade edilen üç boyutlu Lorenz sistemini, kaotik olacak şekilde (18) eşitliği ile beş boyutlu duruma çıkardılar (Şekil 30).

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) + x_5 \\
\dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\
\dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3 \\
\dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5 \\
\dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - 8x_5
\end{aligned} \tag{18}$$

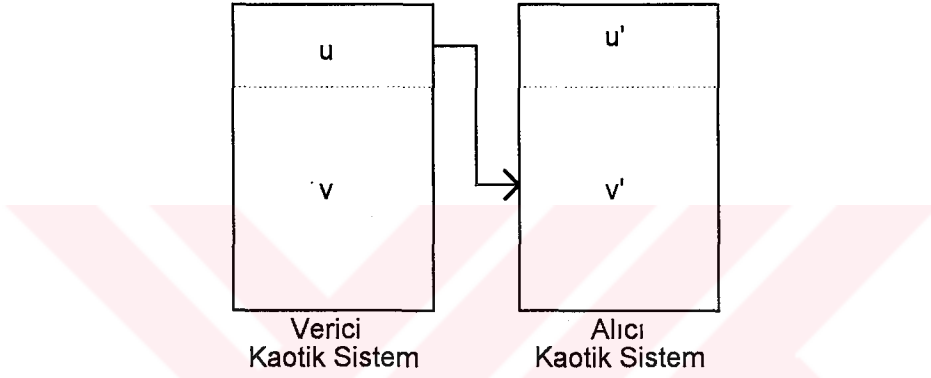


Şekil 30. $\sigma=10$, $\rho=60$ ve $\beta=8/3$ için kaotik olan (18) sisteminin faz resmi.

He ve Vaidya, kaotik beş boyutlu (18) sistemini u (süren) ve v (sürülen) gibi iki alt sisteme bölerek, senkronizasyon için (19) alt sistemini seçtiler.

$$\begin{aligned}
\dot{x}'_2 &= \rho x_1 - x'_2 - x_1 x'_3 \\
\dot{x}'_3 &= x_1 x'_2 - \beta x'_3 \\
\dot{x}'_4 &= -x'^3_4 + x'_5 \\
\dot{x}'_5 &= -x_1 - x'_4 - 8x'_5
\end{aligned} \tag{19}$$

Elde edilen süren ve sürülen alt sistemlerin kutucuk gösterimi Şekil 31 'de görülmektedir. v sürülen alt sistemi, (19) ile gösterilen denklem sistemine karşılık gelmektedir. Süren (u) alt sistem ise, x_1 değişkenini kullanır.



Şekil 31. Verici-Alıcıdaki süren ve sürülen alt sistemlerin kutucuk gösterimi.

Verici ve alıcıdaki alt sistemlerin arasındaki fark, senkronizasyonun sağlanması için, $t \rightarrow \infty$ olduğunda sıfır olmalıdır. He ve Vaidya, bu fark sistem için seçtikleri Lyapunov fonksiyonunun $V(x) > 0$ ve $\dot{V}(x) < 0$ olduğunu göstererek, asimptotik kararlılık ve Lyapunov kararlılığının mümkün olduğunu, senkronizasyonun sağlanabildiğini gösterdiler [3].

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu kısımda kaosun elektronikteki mevcut uygulamaları ve bazı yeni fikirler gerçekleştirilmiştir. Kaotik elektronik devrelerin oluşturulabilmesi için hızlı işlemsel yükselteçler, hızlı ve yüksek doğruluklu çarpıcılar, osiloskop, spektrum analizör, güç kaynağı, dirençler ve kondansatörler kullanıldı. Bilgisayar benzetimleri için bilgisayar ve çeşitli benzetim programlarından (PSPICE, VISSIM, MATLAB) yararlanıldı.

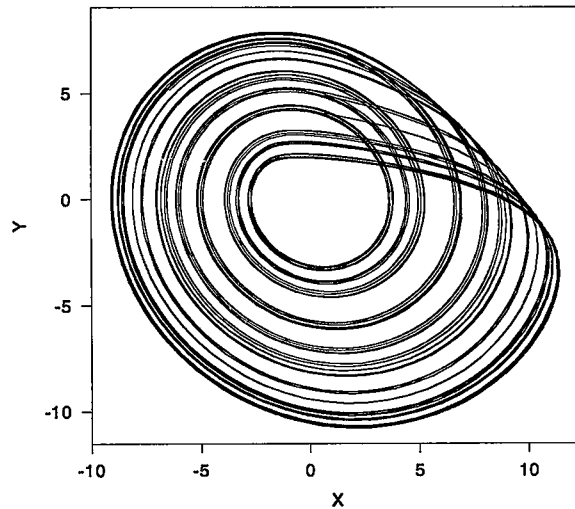
2.1 Rössler Sisteminde Dallanma ve Kaos

Doğrusal olmayan bir dinamik sistemde parametrenin değişimiyle, dallanma ve sistemin kaosa gidişine ait etkilerin incelenmesi amacıyla Rössler sistemi seçildi. İfadesi (20) eşitliğiyle verilen Rössler sisteminin gerçekleştirilmesi için TL074 işlemsel yükselteç, AD633JN çarpıcı, dirençler ve kondansatörler kullanıldı.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y+z) \\ \dot{y} &= x+ay \\ \dot{z} &= b+z(x-c) \end{aligned} \quad (20)$$

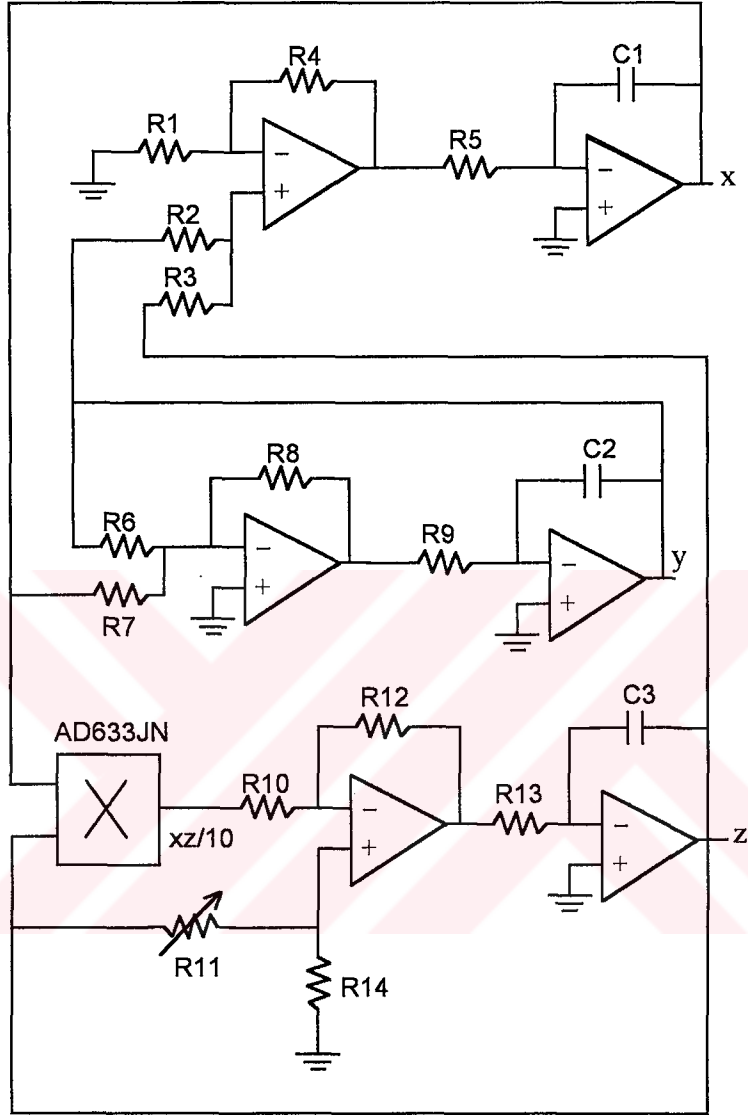
$a = 0.15 \quad b = 0.2 \quad c = 10$

Bilgisayarda benzetimi yapılan Rössler sistemine ait kaotik faz resmi Şekil 32 'de görülmektedir.



Şekil 32. Kaotik Rössler sisteminin bilgisayar benzetimiyle elde edilen faz resmi.

Şekil 32 'de bilgisayar benzetimi görülen (20) eşitliğine ait elektronik devre, sistemi sağlayacak şekilde kuruldu (Şekil 33).

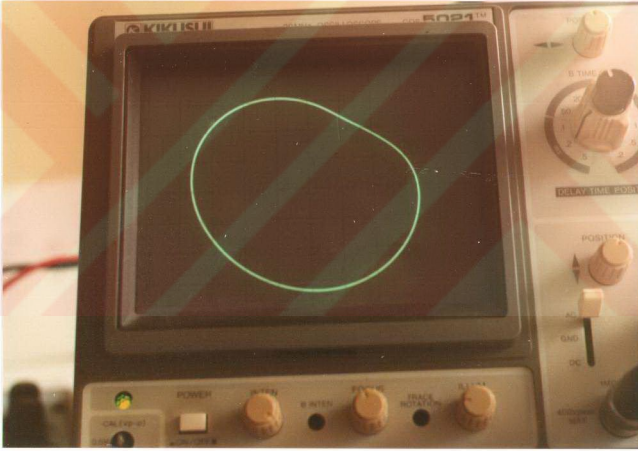


Şekil 33. Rössler sisteminin elektronik devresi.

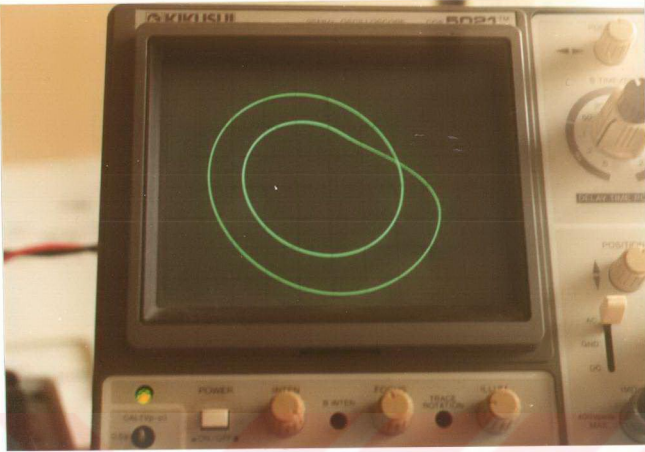
Şekil 33 'teki devreye ait eleman değerleri $R1=R2=R3=R4=R5=R9=R12=R14=100K\Omega$, $R6=1M\Omega$, $R7=R8=150K\Omega$, $R10=10K\Omega$, $R11=100K\Omega$ ayarlı, $R13=56K\Omega$, $C1=C2=C3=1nF$ olmak üzere seçildi. Buna göre devreye ait denklemler aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{C_1 R_5} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) \left(\frac{R_2}{R_2 + R_3} z + \frac{R_3}{R_2 + R_3} y \right) \\ \dot{y} &= \frac{R_8}{C_2 R_9} \left(\frac{x}{R_7} + \frac{y}{R_6} \right) \\ \dot{z} &= \frac{1}{C_3 R_{13}} \left[\frac{R_{12}}{10 R_{10}} x z - \left(1 + \frac{R_{12}}{R_{10}} \right) \frac{R_{14}}{R_{11} + R_{14}} z \right]\end{aligned}$$

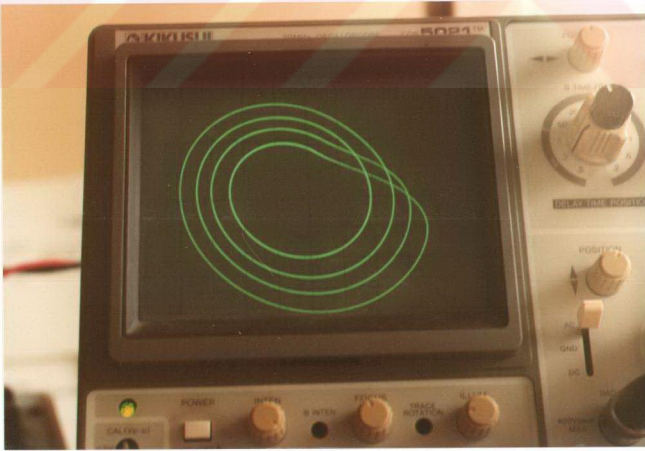
(20) denkleminde parametre değerleri $a=0.15$, $b=0$, $c=10$ şeklinde seçildi. c parametresi, Şekil 33 'teki devrede R_{11} ayarlı direnci üzerinden değiştirilerek devrenin T dönemli davranışının nasıl değiştiği gözlemlendi (Şekil 34, Şekil 35, Şekil 36, Şekil 37).



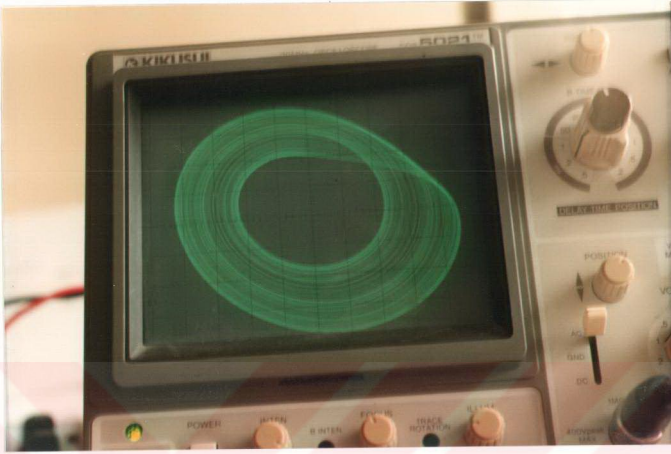
Şekil 34. $R_{11} \approx 300 \Omega$ için T dönemli davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi.



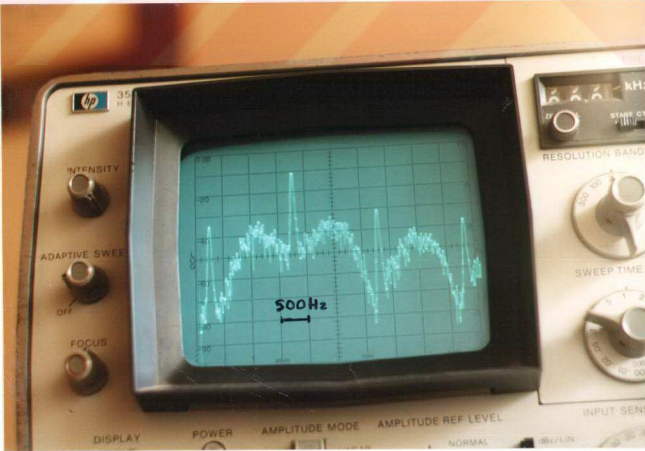
Şekil 35. $R_{11} \approx 21K\Omega$ için 2T dönemli davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi.



Şekil 36. $R_{11} \approx 35K\Omega$ için 4T dönemli davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi.



Şekil 37. $R_{11} \approx 53K\Omega$ için kaotik davranan Rössler sisteminin osiloskoptan alınan faz resmi.



Şekil 38. Kaotik Rössler sisteminin frekans spektrumu.

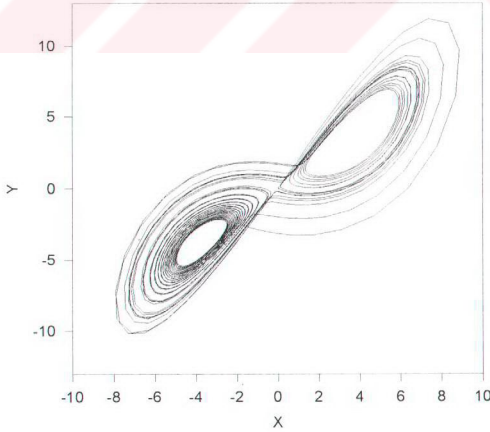
Rössler sisteminin, osiloskoptan alınan faz resimlerinde görüldüğü gibi, parametrenin değişimiyle dallanarak T, 2T, 4T, ..., 2ⁿT şeklinde frekans değişimine uğrayıp kaosa gittiği gözlemlendi. Bu sonuçlardan parametrenin değişiminin neden olduğu dallanmanın, doğrusal olmayan bir dinamik sistemi kaosa götürmekte ne kadar önemli olduğu görülmektedir. Kaotik Rössler sisteminin frekans spektrumu, spektrum analizörden alınan fotoğrafta görülmektedir (Şekil 38).

2.2 Kaotik Lorenz Sisteminde Tek Değişkenle Senkronizasyon

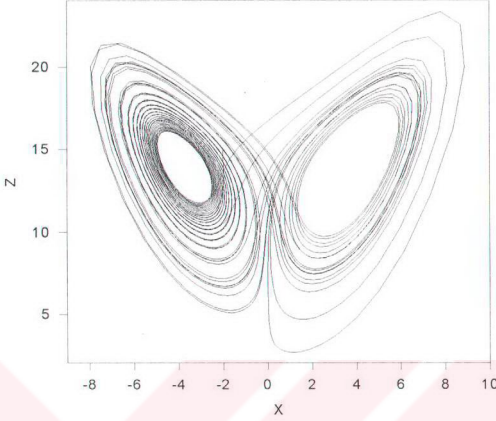
Kaotik sistemlerin en önemli uygulamalarından biri olan senkronizasyonun gerçekleştirilmesi için (21) eşitliğindeki Lorenz sistemi seçildi.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz \\ \dot{z} &= xy - \beta z \end{aligned} \quad (21)$$

(21) denklem sistemi için kaotik parametre değerleri, $\sigma = 5$, $\rho = 15$, $\beta = 1$ dir. Bu parametre değerleri için Lorenz sisteminin kaotik faz resmi, bilgisayar benzetimiyle Şekil 39 ve Şekil 40 'da verilmiştir.



Şekil 39. Lorenz sisteminin kaotik parametre değerleri için x-y faz resmi.



Şekil 40. Lorenz sisteminin kaotik parametre değerleri için x-z faz resmi.

(21) denklem sisteminin bilgisayar benzetimiyle elde edilen çözümlerinde x , y , z değişkenlerinin genlikleri elektronik elemanların (işlemsel yükselteç, çarpıcı) besleme sınırlarını aştığından, doğrusal bir dönüşümle elektronik elemanlar için uygun bir denklem takımı elde edildi. Buna göre $u=x/4$, $v=y/4$, $w=z/8$ dönüşümleri yazıldı ve (21) denklem sisteminin pratik açıdan uygulanabilir yeni hali (22) eşitliğindeki gibi elde edildi.

$$\begin{aligned}
 \dot{u} &= \sigma(v - u) \\
 \dot{v} &= \rho u - v - 8uw \\
 \dot{w} &= 2uv - \beta w
 \end{aligned} \tag{22}$$

(22) denklem sistemini senkronizasyon için iki alt sisteme ayırmak gerektiğinden, süren alt sistem olarak u seçildi ve sürülen alt sistem (23) denklem takımındaki gibi elde edildi.

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= \rho u - v - 8uw \\
 \dot{w} &= 2uv - \beta w
 \end{aligned} \tag{23}$$

(23) eşitliğindeki gibi seçilen sürülen alt sistemin, kararlı bir sistem olup olmadığının belirlenmesi için, hesaplanan özdeğerlerinin ikisinin de karmaşık düzlemin sol yarısında yer

aldığı görüldü. Böylece (23) eşitliğindeki gibi seçilen sürülen alt sistemin kararlı bir sistem olduğu gösterildi.

Bundan sonraki adım, verici ve alıcı olarak adlandırılabilen iki kaotik sistem arasında senkronizasyonun gerçekleştirilmesi için iç yapılarının oluşturulmasıdır.

2.2.1 Verici Sistem

Verici sistem, $\dot{u} = \sigma(v - u)$ süren alt sistemi ve (23) eşitliğindeki sürülen alt sistem birlikte kullanılarak (22) eşitliğindeki toplam sistem olarak oluşturuldu. Böylece verici sistem olarak, doğrusal bir değişimle elde edilen Lorenz kaotik sistemi kullanıldı. Yeni bir isimlendirmeye verici sistem (24) eşitliğindeki gibi yazıldı.

$$\begin{aligned} \dot{u}_v &= \sigma(v_v - u_v) \\ \dot{v}_v &= \rho u_v - v_v - 8u_v w_v \\ \dot{w}_v &= 2u_v v_v - \beta w_v \end{aligned} \quad (24)$$

2.2.2 Alıcı Sistem

Alıcı sistem, temel olarak (23) eşitliğindeki sürülen alt sistemden oluşmakla birlikte vericiden gelecek senkronizasyon işaretini kullanacağı için (23) eşitliğindeki u değişkeni, vericiden gelecek u_v işaretiyle değiştirildi. Ayrıca, alıcı tarafta u işaretinin oluşturulması için, $\dot{u} = \sigma(v - u)$ süren alt sistemi de alıcı sisteme eklendi. Böylece alıcı sistem yeni isimlendirmeye (25) 'teki gibi oluşturuldu.

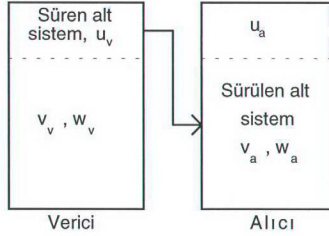
$$\begin{aligned} \dot{u}_a &= \sigma(v_a - u_a) \\ \dot{v}_a &= \rho u_v - v_a - 8u_v w_a \\ \dot{w}_a &= 2u_v v_a - \beta w_a \end{aligned} \quad (25)$$

2.2.3 Senkronizasyon

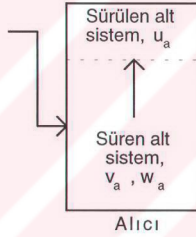
Alıcı ve verici temel olarak aynı yapıdadır. Verici yönünden bakıldığında, süren alt sistem vericide ve sürülen alt sistem ise alıcıdır. Senkronizasyon için vericideki süren alt

sistem, alıcıdaki (v_a, w_a) sürülen alt sistemini zorlayarak vericideki (v_v, w_v) alt sisteminin ürettiği kaotik işaretlerin bir eşini üretmesini sağlar (Şekil 41).

Alıcı yönünden bakılırsa, verici tarafından sürülen (v_a, w_a) alt sistemi, alıcıda u_a alt sistemini süren alt sistem halini alır (Şekil 42).



Şekil 41. Verici yönünden bakıldığında süren ve sürülen alt sistemler.



Şekil 42. Alıcı yönünden bakıldığında süren ve sürülen alt sistemler.

Bu şekildeki bir çalışmada verici ve alıcı arasında senkronizasyonun gerçekleşmesi için, $V=(u_v, v_v, w_v)$ ve $A=(u_a, v_a, w_a)$ vektörlerinin farkı olarak tanımlanan hata vektörü $H=V-A$, $t \rightarrow \infty$ için sıfır olmalıdır [3]. Bu ise, tanımlanan hata dinamik sisteminin asimptotik olarak kararlı olmasını gerekli kılar.

Bunun için verici ve alıcı sistemlerindeki parametreler özdeş olarak atandı ve (26) eşitliğiyle hata dinamik sistemi ortaya çıkarıldı.

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{h_1 = u_v - u_a}_{\dot{h}_1 = u_v - u_a} & \underbrace{h_2 = v_v - v_a}_{\dot{h}_2 = v_v - v_a} & \underbrace{h_3 = w_v - w_a}_{\dot{h}_3 = w_v - w_a} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\dot{h}_1 &= [\sigma(v_v - u_v) - \sigma(v_a - u_a)] \\
\dot{h}_2 &= (\rho u_v - v_v - 8u_v w_v) - (\rho u_a - v_a - 8u_a w_a) \\
\dot{h}_3 &= (2u_v v_v - \beta w_v) - (2u_a v_a - \beta w_a) \\
\dot{h}_1 &= \sigma[(v_v - v_a) - (u_v - u_a)] \\
\dot{h}_2 &= -(v_v - v_a) - 8u_v(w_v - w_a) \\
\dot{h}_3 &= 2u_v(v_v - v_a) - \beta(w_v - w_a) \\
\dot{h}_1 &= \sigma(h_2 - h_1) \\
\dot{h}_2 &= -h_2 - 8u_v h_3 \\
\dot{h}_3 &= 2u_v h_2 - \beta h_3
\end{aligned} \tag{26}$$

(26) eşitliğiyle tanımlanan hata dinamik sisteminin asimptotik olarak kararlı olduğunu göstermek üzere kendisi sıfırdan büyük, türevi sıfırdan küçük olan Lyapunov fonksiyonu (27) eşitliğindeki gibi tanımlandı.

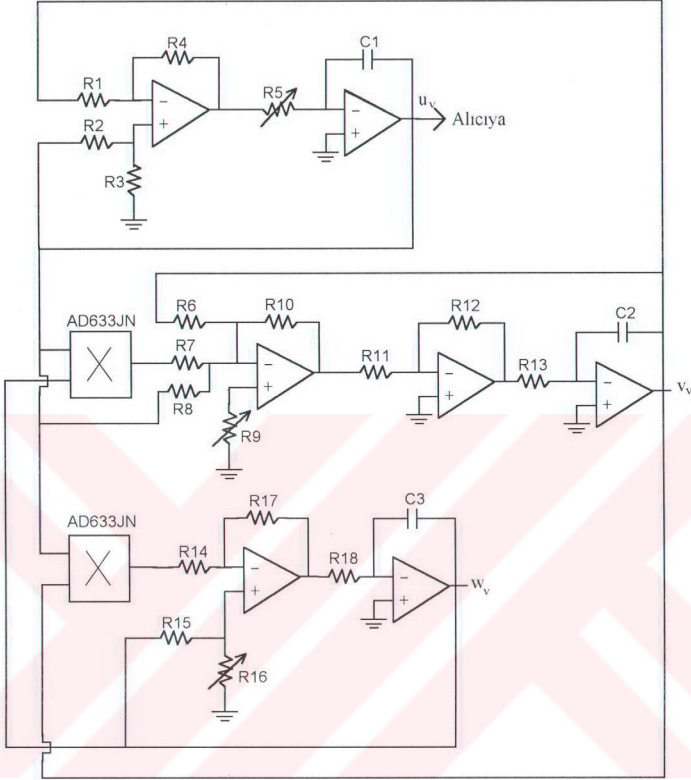
$$\begin{aligned}
V(h, t) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sigma} h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 \right) > 0 \\
\dot{V}(h, t) &= - \left(h_1 - \frac{1}{2} h_2 \right)^2 - \frac{3}{4} h_2^2 - 4\beta h_3^2 < 0
\end{aligned} \tag{27}$$

(27) ifadesinde görüldüğü gibi hata dinamik sisteminin kendisi sıfırdan büyük, türevi sıfırdan küçük bir Lyapunov fonksiyonu tanımlanabilmektedir. Böylece verici ve alıcı sistemlerin senkron olabileceği gösterildi.

2.2.3.1 Verici Sistemin Elektronik Olarak Gerçeklenmesi

Verici sistemin elektronik devresi, (24) denklem sistemini gerçekleyecek şekilde LF353 işlemsel yükselteçler ve AD633JN çarpıcılarla oluşturuldu (Şekil 43).

Devrede kullanılan direnç ve kondansatör elemanlarının değerleri, R1=R2=R3=R4=R11=R12=R14=R15=R17=R18=100KΩ, R5=168KΩ, R6=R8=200KΩ, R7=R10=10KΩ, R9=68KΩ, R13=39KΩ, R16=22KΩ, C1=C2=C3=30pF olarak seçilmiştir. Elektronik elemanlar ideal olmadıkları için seçilen direnç ve kondansatör değerleri yaklaşık değerlerdir.



Şekil 43. Verici kaotik sistemin elektronik devresi.

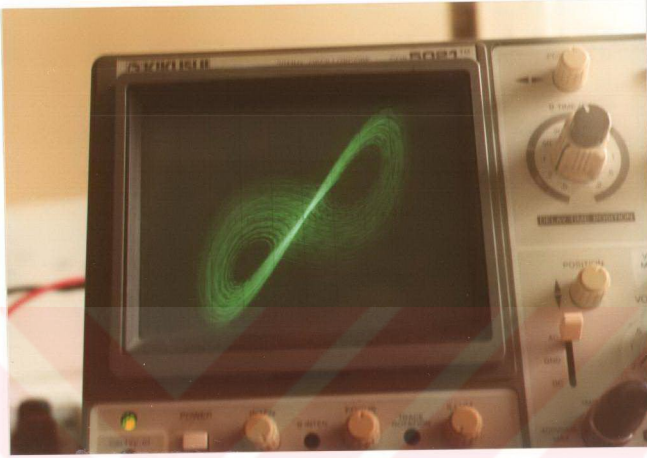
Şekil 43 'teki verici kaotik devreye ait denklemler aşağıdaki gibi bulundu.

$$\dot{u}_v = \frac{R_4}{C_1 R_5 R_1} v_v - \frac{1}{C_1 R_5} \left(1 + \frac{R_4}{R_1} \right) \frac{R_3}{(R_2 + R_3)} u_v$$

$$\dot{v}_v = \frac{1}{C_2 R_{13}} \left(1 + \frac{R_{10}(R_6 + R_7)}{R_6 R_7} \right) \frac{R_5}{(R_8 + R_9)} u_v - \frac{R_{10}}{C_2 R_{13} R_6} v_v - \frac{R_{10}}{10(C_2 R_{13} R_7)} u_v w_v$$

$$\dot{w}_v = \frac{R_{17}}{10(C_3 R_{18} R_{14})} u_v v_v - \left(1 + \frac{R_{17}}{R_{14}} \right) \frac{R_{16}}{C_3 R_{18} (R_{15} + R_{16})} w_v$$

Seçilen direnç ve kondansatör değerleriyle Şekil 43 'teki elektronik devrenin osiloskoptan görüntülenmiş faz resimleri Şekil 44 ve Şekil 45 'te verilmiştir.



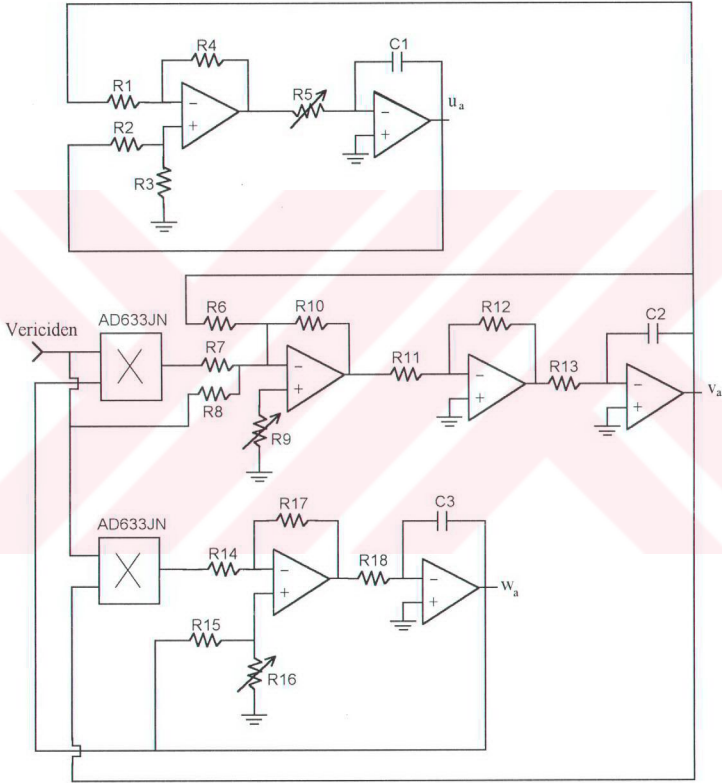
Şekil 44. Kaotik verici sisteminin osiloskoptan alınan $u_V - v_V$ faz resmi.



Şekil 45. Kaotik verici sistemin osiloskoptan alınan $u_V - w_V$ faz resmi.

2.2.3.2 Alıcı Sistemin Elektronik Olarak Gerçeklenmesi

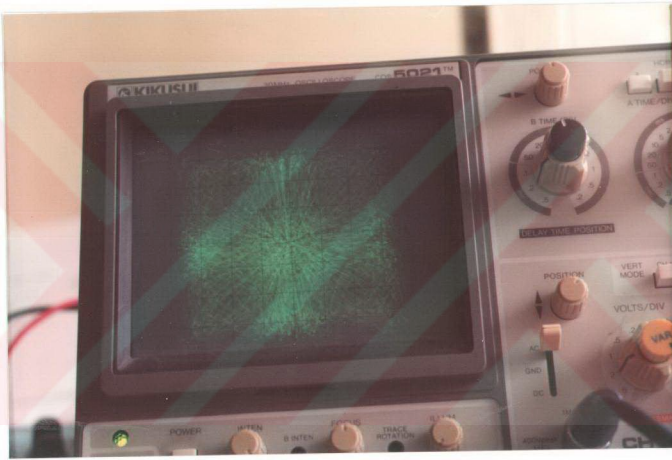
Alıcı elektronik devre, verici ile benzer yapıda ve aynı eleman değerleriyle oluşturulmasına rağmen senkronizasyon için, (25) eşitliğinden de görüleceği üzere, vericiden gelen süren alt sistem u_v 'den giriş kabul edecek şekilde düzenlendi (Şekil 46).



Şekil 46. Alıcı sistemin elektronik devresi.

2.2.3.3 Senkronizasyonun Gerçekleştirilmesi

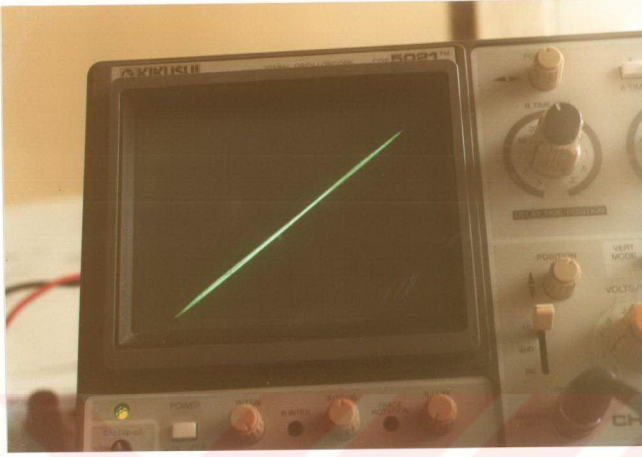
Senkronizasyon, (24) ve (25) denklem takımlarındaki verici ve alıcı sistem arasında mümkün olduğu (27) ifadesiyle gösterildikten sonra, kurulan elektronik devrelerde pratik olarak gerçekleştirildi. Vericideki süren alt sistemden alınan bir uçla alıcıdaki sürülen alt sistem birleştirildi. Birbirine hemen senkron olan iki sistem osiloskopta gözlemlendi. Senkronizasyon sağlanmadan önce ve sağlandıktan sonra u_v ve u_a işaretlerinin osiloskoptaki görüntüleri Şekil 47 ve Şekil 48 'de verilmiştir.



Şekil 47. Senkronizasyondan önce bağımsız çalışan verici ve alıcının, $u_v - u_a$ düzlemindeki görünümü.

Şekil 47 'de görüldüğü gibi, farklı başlangıç şartlarıyla çalışmaya başlayan verici ve alıcı sistem birbirinden tamamen bağımsız davranmaktadır. Senkronizasyondan önce verici ve alıcı sistemin ilişkisizliği $u_v - u_a$ düzleminde bir yumak şeklinde görüntülendi.

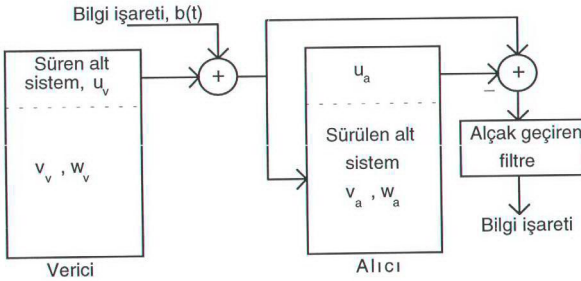
Senkronizasyondan sonra ise $u_v - u_a$ düzleminde 45° 'lik bir doğru ile, vericideki u_v işaretinin alıcıda bir eşinin oluşturulduğu ve çok güçlü bir senkronizasyonun daha sonra bozulmamak üzere gerçekleştirildiği gözlemlendi (Şekil 48).



Şekil 48. Senkronizasyondan sonra birlikte çalışan verici ve alıcının, $u_v - u_a$ düzlemindeki görünümü.

2.3 Senkron Kaotik Sistemlerle Bilgi İletimi

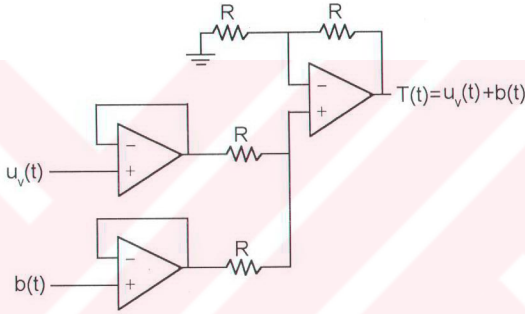
Lorenz sistemi tabanına dayalı verici ve alıcı sistemlerin senkronizasyonundan faydalanılarak, verici ve alıcı arasında bilgi iletimini gerçekleştirmek üzere Şekil 49 'daki sistem kullanıldı.



Şekil 49. Kaotik verici ve alıcı arasında bilgi iletimine imkan sağlayan sistemin kutucuk gösterimi.

Verici sistem Şekil 43 'teki, alıcı sistem ise Şekil 46 'daki elektronik devrenin aynıdır. u_v işareti alıcıya gitmeden $b(t)$ bilgi işareti ile toplandı ve $T(t)=u_v(t)+b(t)$ toplam işareti, alıcıda senkronizasyonu sağlamak için kullanıldı (Şekil 50). Buna göre alıcı sistemin, denklem takımı aşağıdaki gibi olur.

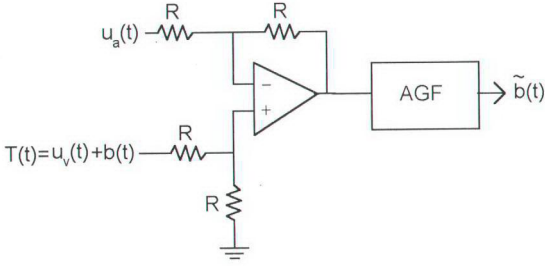
$$\begin{aligned} \dot{u}_a &= \sigma(v_a - u_a) \\ \dot{v}_a &= \rho T(t) - v_a - 8T(t)w_a \\ \dot{w}_a &= 2T(t)v_a - \beta w_a \end{aligned}$$



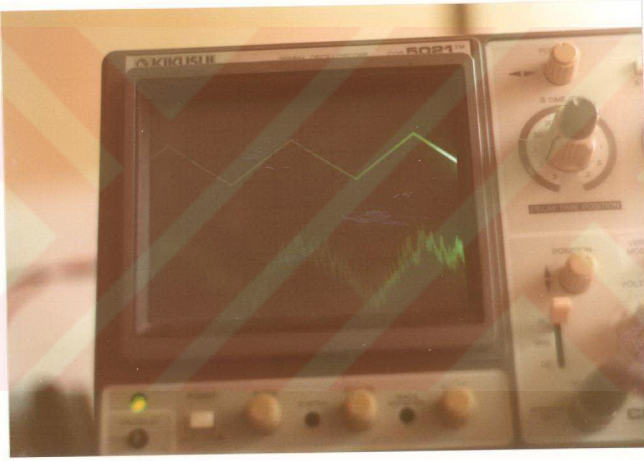
Şekil 50. Kaotik senkron işareti $u_v(t)$ ile bilgi işareti $b(t)$ 'nin toplanması.

Senkronizasyonun sağlanması için bilgi işareti $b(t)$ 'nin $u_v(t)$ 'den daha küçük genlikli olacağı açıktır. Alıcı tarafta üretilen u_a ile $T(t)$ işaretinin farkı, bilgi işaretini yaklaşık olarak oluşturmaktadır. Senkronizasyon sağlandığında $u_v(t) \approx u_a(t)$ olduğundan, $b(t) = T(t) - u_a(t)$ eşitliğinden bilgi tekrar elde edilir (Şekil 51). Yüksek frekanslı bileşenleri $b(t)$ işaretinden yok etmek üzere alçak geçiren filtre kullanıldı.

Şekil 49 'daki sistem pratik olarak gerçekleştirildi ve bilgi işareti olarak üçgen dalga, sinüs ve kare dalga kullanıldı. Gönderilen ve alınan bilgi işaretleri Şekil 52 'de görülmektedir.

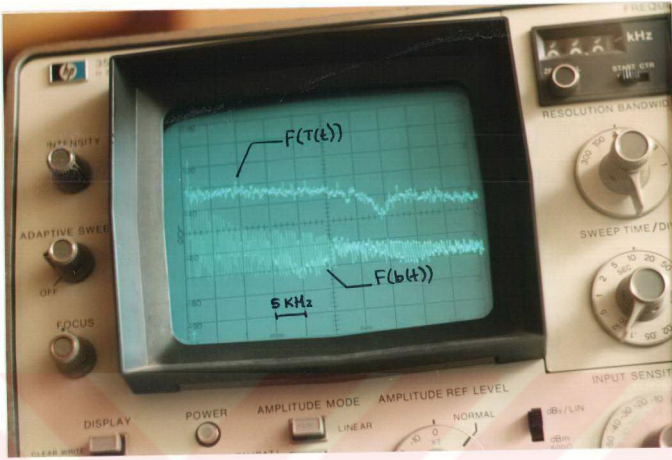


Şekil 51. Alıcı tarafta $b(t)$ bilgi işaretinin yeniden elde edilmesi için kullanılan fark alıcı ve alçak geçiren filtre.



Şekil 52. Bilgi işareti olarak kullanılan üçgen dalganın verici ve alıcı taraftaki görünümü.

Şekil 52 'den görüleceği gibi alıcıda tekrar elde edilen üçgen dalganın, etkin bir filtreleme ile gerçek şekline daha benzer hale getirilmesi mümkündür. Yapılan bilgi iletimi ile kaotik $u_v(t)$ işaretinin frekans bileşelerinin, $b(t)$ bilgi işaretinin temel frekans bileşelerinin üzerine binerek bilgi işaretini gizlediği görüldü (Şekil 53).



Şekil 53. $b(t)$ (üçgen dalga) ve $T(t)=u_v(t)+b(t)$ işaretlerine ait frekans spektrumu.

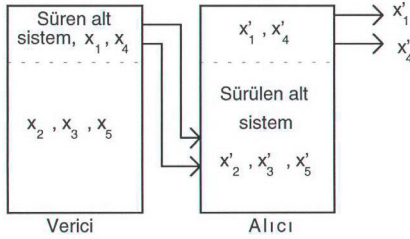
2.4 Kaotik Bir Sistemde İki Değişkenle Senkronizasyon

Literatürde rastlanılmamış bu çalışmanın amacı birden fazla değişken kullanılarak iki kaotik sistemin senkronizasyonunun araştırılmasıdır. Bunun için, He ve Vaidya 'nın Lorenz sisteminde boyut artırımı ile elde ettikleri beş boyutlu kaotik sistem kullanıldı [3].

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= \sigma(x_2 - x_1) + x_5 \\
 \dot{x}_2 &= \rho x_1 - x_2 - x_1 x_3 \\
 \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - \beta x_3 \\
 \dot{x}_4 &= -x_4^3 + x_5 \\
 \dot{x}_5 &= -x_1 - x_4 - 8x_5
 \end{aligned} \tag{28}$$

$$\sigma = 10 \quad \rho = 60 \quad \beta = 8/3$$

(28) kaotik sisteminde süren alt sistem olarak x_1 ve x_4 alınırsa senkronizasyon için sistemin kutucuk gösterimi Şekil 54 'teki gibi olur.



Şekil 54. Kaotik sistemlerin iki değişkenle senkronizasyonu için kutucuk gösterimi.

Süren alt sistem olarak x_1 ve x_4 alındığından alıcıda oluşturulacak sürülen alt sistem, parametreler özdeş atılarak (29) eşitliğindeki gibi bulundu.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}'_2 &= \rho x_1 - x'_2 - x_1 x'_3 \\
 \dot{x}'_3 &= x_1 x'_2 - \beta x'_3 \\
 \dot{x}'_5 &= -x_1 - x_4 - 8x'_5
 \end{aligned} \tag{29}$$

Senkronizasyonu göstermek üzere, alıcıda (29) eşitliğiyle gösterilen sürülen alt sistem ile vericideki eşleniği olan x_2 , x_3 , x_5 sisteminden oluşturulacak hata dinamik sisteminin asimptotik kararlılığını ifade etmek yeterli olduğundan, hata dinamik sistemi (30) eşitliğiyle oluşturuldu.

$$\begin{aligned}
 \underline{h_1} &= \underline{x_2 - x'_2} & \underline{h_2} &= \underline{x_3 - x'_3} & \underline{h_3} &= \underline{x_5 - x'_5} \\
 \dot{\underline{h_1}} &= \dot{x_2} - \dot{x}'_2 & \dot{\underline{h_2}} &= \dot{x_3} - \dot{x}'_3 & \dot{\underline{h_3}} &= \dot{x_5} - \dot{x}'_5
 \end{aligned}$$

$$\dot{\underline{h_1}} = (\rho x_1 - x_2 - x_1 x_3) - (\rho x_1 - x'_2 - x_1 x'_3)$$

$$\dot{\underline{h_2}} = (x_1 x_2 - \beta x_3) - (x_1 x'_2 - \beta x'_3)$$

$$\dot{\underline{h_3}} = (-x_1 - x_4 - 8x_5) - (-x_1 - x_4 - 8x'_5)$$

$$\dot{\underline{h_1}} = -(x_2 - x'_2) - x_1(x_3 - x'_3)$$

$$\dot{\underline{h_2}} = x_1(x_2 - x'_2) - \beta(x_3 - x'_3)$$

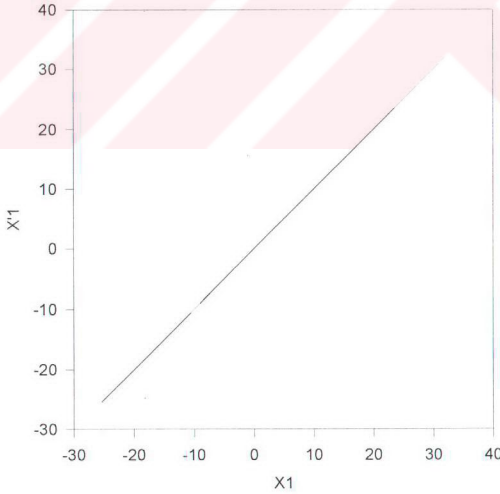
$$\dot{\underline{h_3}} = -8(x_5 - x'_5)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{h}_1 &= -h_1 - x_1 h_2 \\
 \dot{h}_2 &= x_1 h_1 - \beta h_2 \\
 \dot{h}_3 &= -8h_3
 \end{aligned} \tag{30}$$

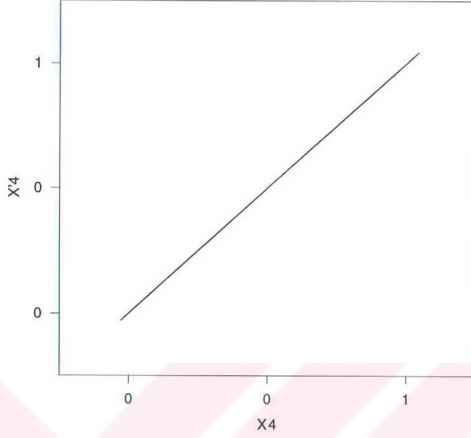
Senkronizasyon için verici ve alıcı arasındaki farkın, $t \rightarrow \infty$ için sıfır olduğunu göstermek üzere (31) eşitliğiyle hata dinamik sistemine ait Lyapunov fonksiyonu tanımlandı.

$$\begin{aligned}
 V(h, t) &= \frac{1}{2}(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2) > 0 \\
 \dot{V}(h, t) &= -h_1^2 - \beta h_2^2 - 8h_3^2 < 0
 \end{aligned} \tag{31}$$

(31) eşitliğinden görüleceği üzere verici ve alıcı sistemin, farklı başlangıç şartlarından başlasalar dahi, $t \rightarrow \infty$ için aralarındaki fark sıfır olacaktır. Asimptotik olarak kararlı olduğu gösterilen hata dinamik sistemi nedeniyle senkron olan verici ve alıcıya ait bilgisayar benzetimleri yapıldı. Gerçekleştirilen bilgisayar benzetimlerinde de $x_1 - x'_1$ ve $x_4 - x'_4$ düzleminde 45° 'lik doğru ile verici ve alıcının senkron olduğu görüldü (Şekil 55 ve Şekil 56).



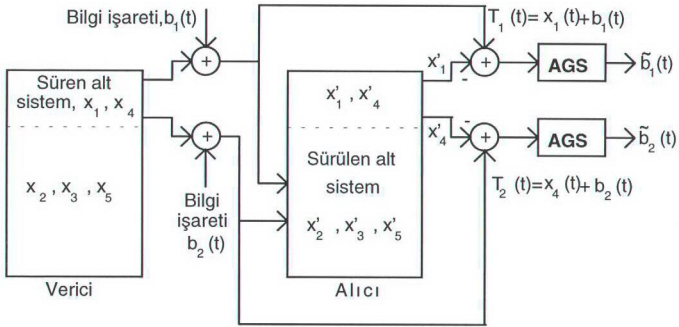
Şekil 55. $x_1 - x'_1$ düzleminde bilgisayar benzetimiyle senkronizasyon.



Şekil 56. $x_4 - x'_4$ düzleminde bilgisayar benzetimiyle senkronizasyon.

2.5 İki Değişkenle Senkron Kaotik Sistemlerde Bilgi İletimi

Kaotik iki sistemin iki değişkenle senkron olabilmesi mümkün olduğuna göre, bu iki değişken üzerinden bilgi iletimi de mümkün olmalıdır. Bunu göstermek üzere 2.4 konu başlığı altında senkron olduğu gösterilen sistem kullanıldı. Böylece tek bir kaotik sistemle birden fazla bilgi süren alt sistem üzerinden gönderildi (Şekil 57).

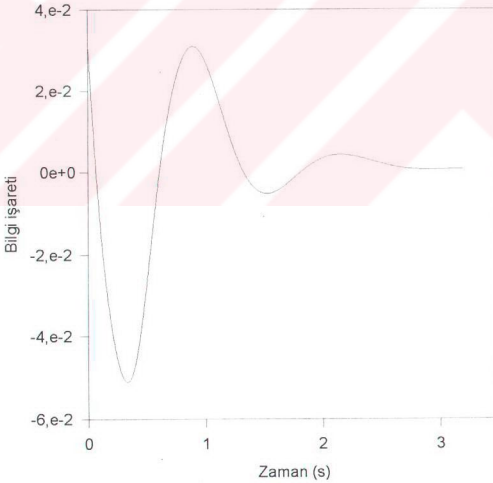


Şekil 57. İki değişken üzerinden senkron kaotik sistemlerle bilgi iletimi.

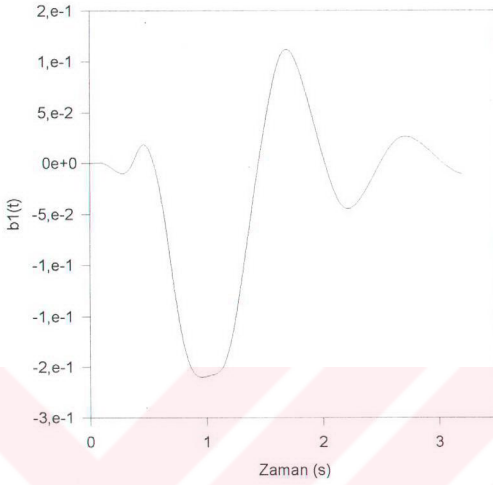
Vericinin çıkışında süren alt sisteme ait değişkenlere bilgi işaretinin eklenmesiyle, alıcıdaki sürülen alt sistemde (32) eşitliğinde görüldüğü gibi x_1 yerine $T_1(t)=x_1(t)+b_1(t)$ ve x_4 yerine $T_2=x_4+b_2(t)$ gelecektir.

$$\begin{aligned} \dot{x}'_2 &= \rho T_1(t) - x'_2 - T_1(t)x'_3 \\ \dot{x}'_3 &= T_1(t)x'_2 - \beta x'_3 \\ \dot{x}'_5 &= -T_1(t) - T_2(t) - 8x'_5 \end{aligned} \quad (32)$$

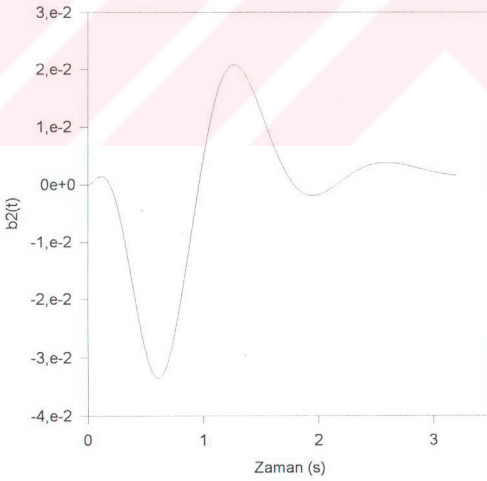
Senkronizasyonun sağlıklı olarak gerçekleştirilebilmesi için $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ 'nin genlikleri $x_1(t)$ ve $x_4(t)$ 'den küçük olmalıdır. Senkronizasyon sağlandığında $x_1(t) \approx x'_1(t)$ ve $x_4(t) \approx x'_4(t)$ olduğundan alıcı tarafta $\bar{b}_1(t) = T_1(t) - x'_1(t)$ ve $\bar{b}_2(t) = T_2(t) - x'_4(t)$ işlemi ile, gerçek bilgi işaretlerine çok yakın olacak şekilde, bilgi tekrar elde edildi. Bilgisayarda VISSIM programı ile benzetimi yapılan bu işlemde, yeniden elde edilen bilgi işaretlerini bozan yüksek frekanslı bileşenler ikinci dereceden Butterworth alçak geçiren süzgeç kullanılarak azaltıldı (Şekil 58, Şekil 59 ve Şekil 60).



Şekil 58. $b_1(t)$ ve $b_2(t)$ işaretleri olarak kullanılan bilgi işareti.



Şekil 59. Alıcı tarafta oluşturulan $\tilde{b}_1(t)$ işareti.



Şekil 60. Alıcı tarafta oluşturulan $\tilde{b}_2(t)$ işareti.

Şekil 59 ve Şekil 60 'tan görüleceği üzere tek bir kaotik sistemle iki bilgi iletimi bilgisayar benzetimi sonucu gerçeğine oldukça yakın bir şekilde gerçekleştirildi. Böylece birden fazla bilgi işareti için uygun seçilmiş tek bir kaotik sistemin kullanılabilceği görüldü.



3. BULGULAR

Yapılan çalışmalar sonucu, kaotik sistemlerin elektronik olarak gerçekleştirilebileceği görüldü. Fiziksel olarak gerçekleşen Rössler ve Lorenz kaotik sistemlerinin zaman gelişimleri ve faz resimleri, bilgisayar benzetimleriyle eş sonuçlar vermiştir. Gerçekleştirilen kaotik sistemlerin frekans spektrumu, kaotik davranışın teorisine uygun olarak geniş bantlı olarak gözlemlendi. Dönemli davranan bir Rössler sistemine ilişkin bir parametrenin direnç yardımıyla değiştirilmesi sonucunda, sistemin ürettiği frekansın değiştiği ve sistem davranışının dallanarak kaosa gittiği gözlemlendi.

Bilgi iletiminde kullanılan kaotik sistemlerin bu tür bir çalışma için oldukça uygun olduğu gözlemlendi. Senkronizasyonu, senkron işarete ihtiyaç duymadan kendiliğinden gerçekleştirebilen kaotik sistemlerin bu özellikleriyle bilgi iletimi için çok üstün oldukları belirlendi. Bilgi iletimi sırasında, kaotik taşıyıcının bilgi işaretini doğal olarak şifrelediği görüldü.

He ve Vaidya 'nın ortaya koyduğu beş boyutlu kaotik sistem üzerinde yapılan ve literatürde yeni olan çalışmada ise iki kaotik sistemin senkronizasyonunun birden fazla değişkenle oluşturulabileceği gösterildi. İki değişkenle oluşturulan senkronizasyonun da, bilinen tek değişkenle senkronizasyon gibi güçlü ve iletişim için kullanılabilir olduğu sonucuna varıldı. Bu sonuçlardan hareketle aynı kaotik sistem kullanılarak iki bilgi işaretinin iki kaotik senkron işareti üzerinden iletebileceği belirlendi. Bu veriler ışığında yapılan bilgisayar benzetimlerinde iki değişken üzerinden gerçekleştirilen bilgi iletiminde başarılı sonuçlar elde edildi.

4. İRDELEME ve DEĞERLENDİRME

Yapılan teorik çalışmalar sonucu senkron olduğu gösterilen kaotik sistemlerin bu davranışı deneysel çalışmalarla da başarıyla gerçekleştirildi. Kaotik sistemlerde senkronizasyonun gerçekleştirilmesi için hata dinamik sistemine ait Lyapunov fonksiyonları uygun şekilde tanımlanabilmektedir. Bu çalışmada senkron olduğu tek değişkenle gösterilen üç boyutlu Lorenz ve iki değişkenle gösterilen He ve Vaidya tarafından tanımlanmış beş boyutlu kaotik sisteme ilişkin hata dinamik sistemlerinin analitik çözümü ile ortaya çıkan denklemlerin zaman gelişimleri, senkronizasyonun ne kadar süre içinde oluşacağı hakkında bilgi verir. Bu ise bilgi iletiminde kaotik sistemlerin kullanımının sınırlarını belirleyebilecek önemli bir etkidir. Yeterince hızlı senkron olamayan kaotik sistemlerde doğal olarak bilgi iletimi için sakıncalar ortaya çıkmaktadır. Hızlı senkron olabilen kaotik sistemlerin oluşturulabilmesi için hata dinamik sistemlerinin çözümlerinin ayrıntılı olarak incelenmesi gereklidir. 2.2.3 konu başlığı altında hesaplanan hata dinamik sistemi aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned}\dot{h}_1 &= \sigma(h_2 - h_1) \\ \dot{h}_2 &= -h_2 - 8u_1 h_3 \\ \dot{h}_3 &= 2u_1 h_2 - \beta h_3\end{aligned}\quad (33)$$

(33) denklem sistemine ait çözümün genel biçimi $h_1(0)$, $h_2(0)$ ve $h_3(0)$ başlangıç şartları olmak üzere aşağıdaki gibi verilir.

$$h_1(t) = \frac{-(-\beta\sigma h_2(0) + \beta\sigma h_1(0) - \beta h_1(0) - 16h_1(0)u_v^2 - \sigma^2 h_1(0) + 8\sigma u_1 h_3(0) + \sigma^2 h_2(0) + \sigma h_1(0))e^{-\sigma t}}{\beta - \sigma\beta + 16u_v^2 - \sigma + \sigma^2} - \frac{pe^{-1/2(\beta+1-\sqrt{k})t}}{n\sqrt{k}} + \frac{me^{-1/2(\beta+1+\sqrt{k})t}}{l\sqrt{k}}$$

$$h_2(t) = \left(\frac{p\beta}{2n\sqrt{k}} - \frac{p\sigma}{n\sqrt{k}} + \frac{p}{2n\sqrt{k}} - \frac{p}{2n} \right) \frac{e^{-1/2(\beta+1-\sqrt{k})t}}{\sigma} + \left(\frac{m\sigma}{l\sqrt{k}} - \frac{m\beta}{2l\sqrt{k}} - \frac{m}{2l\sqrt{k}} - \frac{m}{2l} \right) \frac{e^{-1/2(\beta+1+\sqrt{k})t}}{\sigma}$$

$$h_3(t) = \left(\frac{p\beta}{32n\sqrt{k}} - \frac{p\sigma}{16n\sqrt{k}} + \frac{p}{32n\sqrt{k}} - \frac{p}{32n} \right) \frac{(\beta - \sqrt{k} - 1)e^{-1/2(\beta+1-\sqrt{k})t}}{\sigma u_v} + \left(\frac{m\sigma}{16l\sqrt{k}} - \frac{m\beta}{32l\sqrt{k}} - \frac{m}{32l\sqrt{k}} - \frac{m}{32l} \right) \frac{(\beta + \sqrt{k} - 1)e^{-1/2(\beta+1+\sqrt{k})t}}{\sigma u_v}$$

$$k = \beta^2 - 2\beta + 1 - 64u_v^2$$

$$l = -\beta + 2\sigma - \sqrt{k} - 1$$

$$m = 16\sigma u_v h_1(0) + \sigma h_2(0) - \beta \sigma h_2(0) + \sigma \sqrt{k} h_2(0)$$

$$n = -\beta + 2\sigma - 1 + \sqrt{k}$$

$$p = 16\sigma u_v h_1(0) - \beta \sigma h_2(0) - \sigma \sqrt{k} h_2(0) + \sigma h_2(0)$$

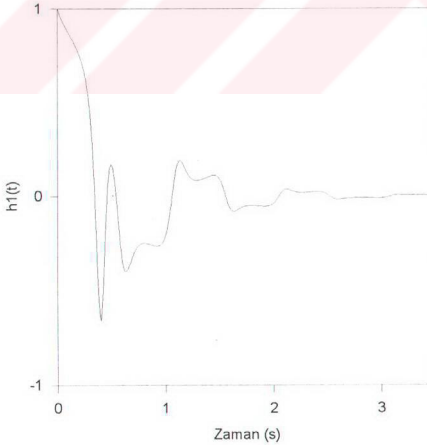
(33) hata dinamik sisteminin çözümünde görüleceği üzere σ ve β parametreleri, sistemin senkronizasyonunun hızlı olmasında çok etkilidir. σ ve β 'nin büyük değerleri için senkronizasyon daha hızlı olacaktır. Fakat σ ve β 'nin, sistemin kaotik parametre değerlerinin dışına çıkılmaması gerekliliği yüzünden, istenildiği kadar büyük alınmadığı ve belli sınırlar içinde kaldığı görülmektedir. (33) hata dinamik sistemine ait özdeğerler aşağıdaki gibi verilir.

$$\lambda_1 = -\sigma$$

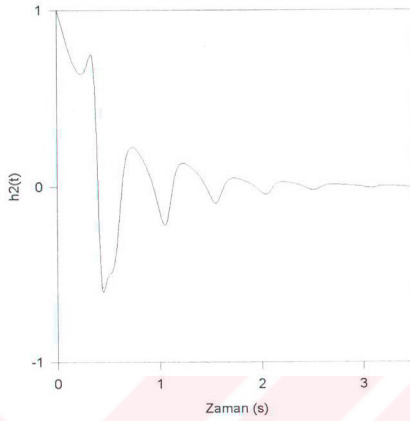
$$\lambda_2 = -0.5 - 0.5\beta + 0.5\sqrt{1 - 2\beta + \beta^2 - 64u_v^2}$$

$$\lambda_3 = -0.5 - 0.5\beta - 0.5\sqrt{1 - 2\beta + \beta^2 - 64u_v^2}$$

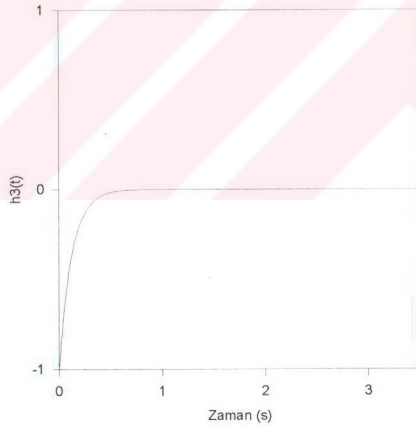
Yapılan çalışmalarda σ ve β parametrelerinin seçilen değerleri sonucu, verici ve alıcı arasındaki farkın sönümlü bir değişimle sıfıra gittiği görüldü (Şekil 61, Şekil 62, Şekil 63).



Şekil 61. $h_1(t)$ 'nin zaman gelişimi.



Şekil 62. $h_2(t)$ 'nin zaman gelişimi.



Şekil 63. $h_3(t)$ 'nin zaman gelişimi.

Kaotik sistemlerin geniş bantlı spektruma sahip olmaları, iletilen bilgiye ait spektrumun kaotik spektrum içinde gizlenip şifrenmesine imkan tanımaktadır. Bu çalışmada bilgi iletimi tekniği toplamsal modülasyona dayandığı için bilgi şifrelemeyi

gerçekleştirmek üzere kullanılan kaotik sistemin bant genişliği, bilgi işaretinin bant genişliğinden büyük olmalıdır. Aksi halde etkin bir gizlilik sağlanması söz konusu değildir. Bu özellikler dikkate alınarak yapılan haberleşmede bilgi işaretinin üçüncü bir kişi tarafından alınabilmesi çok zor olacaktır. Üçüncü bir kişinin bilgi işaretini elde edebilmesi için, kullanılan kaotik sistemi ve parametrelerini bilmesi zorunludur. Bu yüzden bu şekildeki bir haberleşmenin güvenle yapılabilmesi için başkalarının bilinmeyen özgün bir kaotik sistem geliştirmek gereklidir.

Pekçok ihmal sonunda bu tür bir haberleşmenin çözülme olasılığı, kaotik sistemdeki otonom denklem sayısı n ve parametre sayısı m olmak üzere aşağıdaki şekilde verilebilir.

$$P = \frac{1}{n^{2n} 2^n m^n \left[\frac{n!}{2(n-2)!} \right]^n \left[\frac{n!}{(n-2)!} \right]^n} \quad (34)$$

Otonom denklem sayısı 10 ve parametre sayısı 5 olan bir kaotik sistemin çözülme ihtimali (34) eşitliğinden $P \approx 1/1,187.10^{86}$ bulunur. Bu, pekçok ihmal yapıldığı göz önüne alınırsa, oldukça zayıf bir olasılıktır. Bu durumda kaotik sistemlerle yapılabilecek haberleşmeye güvenli bir haberleşme gözüyle bakılabilir.

5. SONUÇLAR

- 1- Doğrusal olmayan dinamik sistemler, parametre değişimiyle denge noktalarının yaşadıkları etkilenme sonucu kaosa girebilmektedir.
- 2- Uygun seçilmiş alt sistemler vasıtasıyla, iki özdeş kaotik sistem arasında senkronizasyon güçlü bir şekilde sağlanabilmektedir.
- 3- İki kaotik sistem arasında oluşturulmuş senkronizasyon $t \rightarrow \infty$ için çok kararludur ve bozulmamaktadır.
- 4- Senkron olmuş iki kaotik sistem arasında senkronizasyon işareti üzerinden bilgi iletimi yapmak mümkündür.
- 5- Yapılan bilgi iletimi, kaotik işaretin geniş bantlı spektrumu nedeniyle, gizlenmiş olarak iletilmektedir.
- 6- Yapılan bu gizli haberleşmenin üçüncü kişiler tarafından alınabilmesi hemen hemen imkansız gibidir. Bu tür bir haberleşmeye güvenli bir haberleşme olarak bakılabilir.
- 7- Ayrıca, iki özdeş kaotik sistem iki değişken üzerinden senkron yapılabilir. Bu senkronizasyon da tek değişkenle yapılan gibi çok kararludur.
- 8- Bu iki senkron işareti üzerinden tek bir kaotik sistem kullanılarak iki farklı bilgi işareti iletilebilmektedir.
- 9- Böyle bir haberleşmede kaotik sistemden tasarruf yapılmaktadır.

6. KAYNAKLAR

- 1- Pecora, L. M. ve Carroll, T. L., Synchronization of Chaotic Systems, Phys. Rev. Lett., 64,(1990) 821.
- 2- Carroll, T. L. ve Pecora, L. M., Synchronizing Chaotic Circuits, IEEE Trans. on Circuits and Systems, 38,(1991), 453-456.
- 3- He, R. ve Vaidya, P. G., Analysis and Synthesis of Synchronous Periodic and Chaotic Systems, Phys. Rev. A, 46,(1992),7387-7392.
- 4- Jackson, E. A., Perspectives of Nonlinear Dynamics, Vol. I-II First Edition, Cambridge University Press, New York, 1989.
- 5- Schuster, H. G., Deterministic Chaos an Introduction, Physik-Verlag GmbH, Weinheim, 1984.
- 6- Guckenheimer, J. ve Holmes, P., Nonlinear Oscillations Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1993.
- 7- Tokad, Y., Devre Analizi Dersleri, Cilt I İkinci Baskı, Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 1986.
- 8- Wiggins, S., Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos, First Edition, Springer-Verlag, New York, 1990.
- 9- McCauley, J. L., Chaos, Dynamics and Fractals, First Edition, Cambridge University Press, New York, 1993.
- 10- Moon, F. C.,Chaotic Vibrations, John Wiley & Sons, New York, 1987.
- 11- Eckmann, J. P. ve Ruelle, D., Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors, Rev. of Modern Physics, 57,(1985) 617-656.
- 12- Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L. ve Vastano, J. A., Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, Physica 16D, 1985, 285-317.

- 13- King, G. P. ve Gaito, S. T., Bistable Chaos. I. Unfolding The Cusp, Physical Rev. A, 46,(1992) 3092-3099.



7. ÖZGEÇMİŞ

1971 yılında Trabzon 'da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini tamamladıktan sonra 1987 yılında Trabzon Lisesini başarıyla bitirdi. 1988 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Elektrik-Elektronik Bölümünden 1992 yılında Elektronik Mühendisi ünvanı ile mezun oldu. Bir yıl süre ile özel sektörde çalıştıktan sonra 1993 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Ana Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Aynı yıl KTÜ Elektrik-Elektronik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı ve halen yüksek lisans eğitimiine devam etmektedir. Almanca ve İngilizce bilmektedir.

