BİR TİTREŞİM PROBLEMİNDE UÇ NOKTALARDAKİ HIZ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Hakkı GÜNGÖR

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı
Prof. Dr. Murat SUBAŞI
2017

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

BİR TİTREŞİM PROBLEMİNDE UÇ NOKTALARDAKİ HIZ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Hakkı GÜNGÖR

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

ERZURUM
2017

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

BİR TİTREŞİM PROBLEMİNDE UÇ NOKTALARDAKİ HIZ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Prof. Dr. Murat SUBAŞI danışmanlığında, Hakkı GÜNGÖR tarafından hazırlanan bu çalışma 24/02/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Uygulamalı Matematik Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ahmet KAÇAR *İmza:*

Üye(Danışmanı): Prof. Dr. Murat SUBAŞI *İmza:*

Üye: Prof. Dr. Şakir AYDOĞAN *İmza:*

Üye: Doç. Dr. Lütfi İNCİKABI *İmza:*

Üye: Yrd. Doç. Dr. Arzu AYKUT *İmza:*

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 02/03/2017 tarih ve 9/84 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

BİR TİTREŞİM PROBLEMİNDE UÇ NOKTALARDAKİ HIZ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Hakkı GÜNGÖR

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

Bu çalışmada, bir titreşim problemi için uç noktalardaki hızın kontrolüne ilişkin süreçler belirtilmiştir. Birinci bölümde, dalga denklemi ile ilgili ön bilgiler verildikten sonra, ikinci bölümde bazı temel teorem, lemma ve tanımlara yer verilmiştir. Sonraki bölümlerde, titreşim probleminin zayıf çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanarak, seçilen optimal kontrol probleminin çözümüne ait incelemeler yapılmıştır. Ayrıca çözüm için optimallik koşulları elde edilmiştir.

2017, 69 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Optimal kontrol, Titreşim problemi, Frechet diferansiyellenebilirlik.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR SPEED AT THE END POINTS IN A VIBRATION PROBLEM

Hakkı GÜNGÖR

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Applied Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Murat SUBAŞI

In this study, processes relating to the control of speed at the end points for vibration problem have been presented. In the first section, after giving fundamental information about the wave equation, in the second section it has been referred from some definitions, theorem and lemma. In the next sections, proving the existence and uniqueness of the solution for vibration problem, some investigations have been carried out about the solution of the chosen optimal control problem. Moreover, the optimality conditions for the solution have been obtained.

2017, 69 Pages

Keywords: Optimal control, Vibration problem, Frechet differentiability.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışmada, değerli bilgi, katkı ve desteğini benden esirgemeyen, fikirleri ile bana yol gösteren Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden danışman hocam Sayın Prof. Dr. Murat SUBAŞI' na yakın ilgi, teşvik ve yardımlarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Çalışmalarım esnasında büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan eşime, oğluma, aileme ve ağabeyime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hakkı GÜNGÖR
Şubat, 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Her yerde
$\Omega = (0,l)\times(0,T)$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$	$\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bölge
$L_2(0,T)$	$(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	Ω bölgesinde ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$H^1(\Omega)$	Kendisi ve birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayına ait olan fonksiyonların oluşturduğu Hilbert uzayı
$o\left(\lVert\Delta q\rVert^2\right)$	$\lVert\Delta q\rVert$ ifadesinden daha hızlı sıfıra giden terim

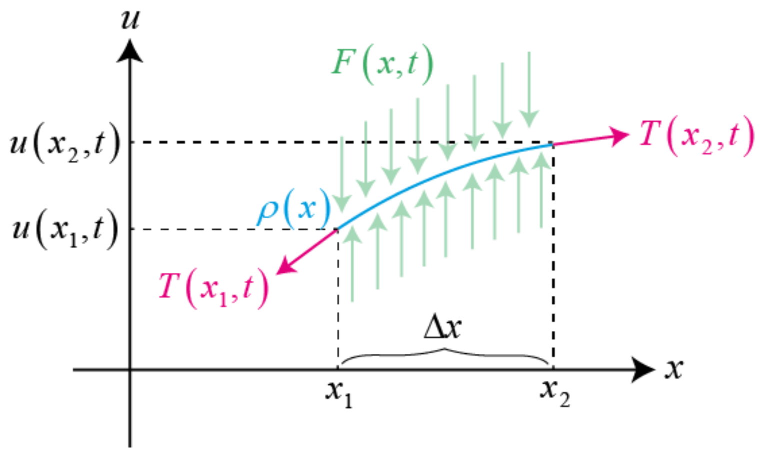
ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Hiperbolik denklemler fen ve mühendislik alanlarında çok önemli bir yere sahip olan kısmi diferansiyel denklem türleridir. Bu denklemler, zamana bağlı olup, dalgaların nasıl yayıldığını ifade ettikleri için dalga denklemleri olarak da adlandırılırlar. Ayrıca bu denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses dalgaları ve telin titreşimi gibi uygulama alanlarına da sahiptirler.

Bir dalga denkleminin türetilişini vermek için bir dış kuvvetin etkisiyle titreşimlere maruz kalan esnek bir teli göz önüne alalım. Esnek teldeki her noktayı x ekseninin bir noktasıyla eşleştirelim ve $u(x,t)$ fonksiyonu ile x noktasında ve t anındaki düşey yer değişimini gösterelim.

$T(x,t)$ fonksiyonu teldeki gerilimi, $F(x,t)$ fonksiyonu tele etki eden dış kuvveti ve $\rho(x)$ fonksiyonu ise telin kütle yoğunluğunu ifade etmek üzere, telin (x_1, x_2) parçasının titreşimini inceleyelim. Burada $x_2 = x_1 + \Delta x$ şeklindedir.



Şekil 1.1. Tel parçası ve ona etki eden kuvvetler

Newton’un ikinci yasası gereği momentumun zamanla değişimi, cisme etki eden net kuvvete eşittir.

$\left(x_1, x_2\right)$ parçasının u ekseni boyunca momentum bileşeni

$$\int_{x_1}^{x_2} u_t\left(x,t\right)\rho\left(x\right)dx$$

integrali ile ve x_1 ve x_2 noktaları arasındaki net gerilim kuvveti de

$$T\left(x_2,t\right)-T\left(x_1,t\right)$$

farkı ile hesaplanır. Buna göre telin $\left(x_1, x_2\right)$ parçasına, $\left(t_1,t_2\right),\left(t_2 = t_1 + \Delta t\right)$ zaman aralığında Newton’ un ikinci yasasını yazacak olursak

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[u_t\left(x,t_2\right)-u_t\left(x,t_1\right)\right]\rho\left(x\right)dx = \int_{t_1}^{t_2}\left[T\left(x_2,t\right)-T\left(x_1,t\right)\right]dt + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} F\left(x,t\right)dxdt$$

eşitliğini elde ederiz.

$u\left(x,t\right)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerinin var ve sürekli olduğunu kabul ederek bu eşitlikteki integrallere ortalama değer teoremini uygularsak

$$\begin{aligned}&\left(x_2 - x_1\right)\left[u_t\left(s_1,t_2\right)-u_t\left(s_1,t_1\right)\right]\rho\left(s_1\right) = \\ &\left(t_2 - t_1\right)\left[T\left(x_2,\tau_1\right)-T\left(x_1,\tau_1\right)\right]+\left(t_2 - t_1\right)\left(x_2 - x_1\right)F\left(s_2,\tau_2\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\left\{s_1, s_2\right\} \in \left(x_1, x_2\right)$ ve $\left\{\tau_1, \tau_2\right\} \in \left(t_1, t_2\right)$ şeklindedir.

$x_2 - x_1 = \Delta x$ ve $t_2 - t_1 = \Delta t$ olup bu eşitliği

$$\Delta x\left[u_t\left(s_1,t_2\right)-u_t\left(s_1,t_1\right)\right]\rho\left(s_1\right)=$$
$$\Delta t\left[T\left(x_2,\tau_1\right)-T\left(x_1,\tau_1\right)\right]+\Delta t\Delta xF\left(s_2,\tau_2\right)$$

veya

$$\Delta t\Delta x\frac{\left[u_t\left(s_1,t_2\right)-u_t\left(s_1,t_1\right)\right]}{\Delta t}\rho\left(s_1\right)=$$
$$\Delta x\Delta t\frac{\left[T\left(x_2,\tau_1\right)-T\left(x_1,\tau_1\right)\right]}{\Delta x}+\Delta t\Delta xF\left(s_2,\tau_2\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Türevler için ortalama değer teoremini uygulayarak

$$\Delta t\Delta xu_{tt}\left(s_1,\tau_3\right)\rho\left(s_1\right)=\Delta x\Delta tT_x\left(s_3,\tau_1\right)+\Delta t\Delta xF\left(s_2,\tau_2\right)$$

veya

$$u_{tt}\left(s_1,\tau_3\right)\rho\left(s_1\right)=T_x\left(s_3,\tau_1\right)+F\left(s_2,\tau_2\right)$$

eşitliklerini elde ederiz. Burada da $\tau_3\in\left(t_1,t_2\right)$ ve $s_3\in\left(x_1,x_2\right)$ şeklindedir. $\Delta x\to 0$ ve $\Delta t\to 0$ için limite geçersek $\left\{s_1,s_2,s_3\right\}\to x_1$ ve $\left\{\tau_1,\tau_2,\tau_3\right\}\to t_1$ olacağından son eşitliği

$$\rho\left(x_1\right)u_{tt}\left(x_1,t_1\right)=T_x\left(x_1,t_1\right)+F\left(x_1,t_1\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu incelemeyi telin $\left(x_1,x_2\right)$ parçasında ve $\left(t_1,t_2\right)$ zaman aralığında değil de herhangi bir x noktasında ve herhangi bir t anında yaptığımızı düşünürsek

$$\rho\left(x\right)u_{tt}\left(x,t\right)=T_x\left(x,t\right)+F\left(x,t\right) \tag{1.1}$$

titreşim denklemini buluruz. $T(x,t)$ gerilim fonksiyonu, $k(x)$ sertlik fonksiyonuna sahip olan teller için Hooke Yasası gereği $T(x,t)=k(x)u_x(x,t)$ eşitliği ile ifade edilir. Bu durumda (1.1) ile ifade edilen denklem

$$\rho(x)u_{tt}(x,t)=\left[k(x)u_x(x,t)\right]_x+F(x,t) \tag{1.2}$$

şeklini alır.

Tele dış kuvvetin etki etmediği ve $k(x)$ sertlik fonksiyonu ile $\rho(x)$ yoğunluğunun sabit olduğu varsayılırsa, (1.2) denklemi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

şeklinde olur. Burada $c^2=k/\rho$ sabiti dalga hızıdır.

Başlangıç anı olan $t=0$ anında telin konumu ve hızı biliniyorsa

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ \ u_t(x,0)=\varphi_2(x),\quad 0\le x\le l \tag{1.3}$$

başlangıç şartları yazılır.

Bu şartlara ek olarak $x=0$ ve $x=l$ noktalarında teldeki gerilim $f(t)$ ve $g(t)$ şeklinde iki fonksiyonla ifade edilirse, bu durumda da

$$u_x(0,t)=f(t),\ u_x(l,t)=g(t),\quad t\ge 0 \tag{1.4}$$

sınır şartları yazılabilir.

(1.2) denklemi ve (1.3)-(1.4) şartları birlikte düşünüldüğünde bahsedilen özellikteki bir tel için yazılmış olan bir başlangıç-sınır değer problemi ortaya çıkar.

Böyle bir başlangıç-sınır değer probleminde yer alan bilinmeyen herhangi bir fonksiyonun (fonksiyonların) bilinen diğer fonksiyonlar kullanılarak, analitik ya da nümerik olarak tespit edilmesi problemi birçok bilim insanının ilgisini çekmektedir.

Literatür incelendiğinde, son yıllarda bu tür problemler ile ilgili birçok çalışmaya rastlanabilir. Bu çalışmaların en önemlilerinden bazıları şunlardır:

Bamberger *et al.* (1979) yılında

$$\rho(z)\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu(z)\frac{\partial y}{\partial z}\right)=0,\ \forall t>0,\forall z>0$$

$$-\mu(0)\frac{\partial y}{\partial z}(0,t)=g(t),\ \forall t>0$$

$$y(z,0)=\frac{\partial y}{\partial z}(z,0)=0,\ \ \forall z>0.$$

bir boyutlu dalga denkleminde sınır ölçümünden $\rho(z)$ ve $\mu(z)$ iki katsayı fonksiyonunun bulunması problemini incelemiştir.

Yamamoto (1995) yılındaki çalışmasında

$$u_{tt}(x,t)=\Delta u(x,t)+\sigma(t)\,f(x),\ \ (x\in\Omega,\ 0<t<T)$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0,\ (x\in\Omega)$$

$$u(x,t)=0,\ \ (x\in\partial\Omega,\ 0<t<T).$$

denkleminin sağ tarafında bulunan $f(x)$ kuvvet fonksiyonunun belirlenmesiyle ilgili araştırma yapmıştır.

Shcheglov *et al.* (2004) yılında

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(u), \quad (x,t) \in \Delta_{(\theta,T)}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in [\theta - aT, l + aT],\ (\theta \geq aT)$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), x \in [0, l + aT],\ (\theta < aT)$$

$$u(0,t) = g(t), \quad t \in [0, T - \theta / \alpha].$$

lineer olmayan $f(u)$ kuvvet fonksiyonunun sayısal çözümüne ait bir çalışma yapmıştır.

Cipolatti *et al.* (2005) yılında

$$u_{tt} - \Delta u + q u_t = 0,\ in\ (0,T) \times \Omega$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0,\ in\ \Omega$$

$$u(t,\sigma) = f(t,\sigma), \quad (t,\sigma) \in \Sigma.$$

hiperbolik denklemde q katsayı fonksiyonunun kontrolünü incelemiştir.

Clason (2006) yılında

$$\frac{1}{[c(x)]^2} \partial_{tt} u(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in Q_T$$

$$u(x,t) = \varphi_0(x,t),\ (x,t) \in \Gamma_T$$

$$\partial_\nu u(x,t)=\varphi_1(x,t),\quad (x,t)\in\Gamma_T.$$

dalga denkleminde başlangıç konumunun belirlenmesi problemiyle ilgili bir doktora tezi çalışması hazırlamıştır.

Yeloğlu ve Subaşı (2010) çalışmasında

$$p(x)u_{tt}=\left(k(x)u_x\right)_x+f(x,t),\quad (x,t)\in\Omega_T$$

$$u(x,0)=g(x),\ u_t(x,0)=h(x),\ x\in(0,l)$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad t\in(0,T]$$

denklemi için kaynak fonksiyonunun ve başlangıç hızının belirlenmesi problemiyle ilgilenmiştir.

Subaşı vd (2012) çalışmasında

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+F(x,t),\quad (x,t)\in\Omega$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in(0,l)$$

$$u_x(0,t)=g(t),\quad u_x(l,t)=h(t),\quad t\in(0,T)$$

denklemi için uç noktalardaki hızın belirlenmesine ilişkin bir çalışma yapmıştır.

Tezin ilerleyen bölümlerinde aşağıdaki aşamalar gerçekleştirilecektir.

2. bölümde, ilerleyen bölümlerde kullanılacak tanımlar, teoremler ve lemmalar verilmiştir.

3.1. bölümde titreşim problemi tanıtılarak bu problem için zayıf çözümün varlığı ve tekliği incelenmiştir.

3.2. bölümde incelenecek olan optimal kontrol problemi tanıtılmıştır.

3.3. bölümde genel anlamıyla optimal kontrol problemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliğine ait esaslar sunulmuştur.

4.1. bölümde tezde incelenen optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır.

4.2. bölümde optimal kontrol problemi için eşlenik problem oluşturularak amaç fonksiyonelinin türevi (gradyeni) hesaplanmıştır.

4.3. Optimal çözümün nasıl elde edilebileceği açıklanmıştır.

5. bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlar sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde karşımıza çıkacak bazı tanım, teorem ve lemmalara yer verilmiştir (Ladyzhenkaya 1985; Lebedev 1996; Thomas 2005; İskenderov *et al.*2002).

Teorem 2.1 (Türevler için Ortalama Değer Teoremi): f, $[a,b]$ aralığında sürekli ve (a,b) aralığında türevlenebilen bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

olacak şekilde en az bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

Teorem 2.2 (İntegraller için Ortalama Değer Teoremi): f, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$\int_a^b f(x)\,dx=(b-a)\,f(c)$$

olacak şekilde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

Tanım 2.1 (Fonksiyonel): $Y\subset\mathbb{R}$ veya $X\subset\mathbb{C}$ olmak üzere X, Y üzerinde bir vektör uzayı olsun. $J:X\rightarrow Y$ operatörüne fonksiyonel adı verilir.

Tanım 2.2 (Lineer Operatör): X ve Y **,** F cismi üzerinde birer lineer uzay olsun. $T:X\rightarrow Y$ operatörü, her $\alpha,\beta\in F$ ve $x,y\in X$ için

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

şartını sağlıyorsa bu dönüşüme lineer operatör denir.

Tanım 2.3 (Bilineer Form): V , F cismi üzerinde lineer uzay ve $a:V\times V\to F$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $\lambda,\mu\in F$ ve her $u,v,w\in V$ için

B1. $a(\lambda u+\mu v,w)=\lambda a(u,w)+\mu a(v,w)$

B2. $a(w,\lambda u+\mu v)=\lambda a(w,u)+\mu a(w,v)$

şartları sağlanıyorsa bu dönüşüme bilineer form denir.

Ayrıca her $u,v\in V$ için $a(u,v)=a(v,u)$ şartı sağlanıyorsa $a(u,v)$ dönüşümüne simetrik bilineer form denir.

V Hilbert uzayı olmak üzere her $u,v\in V$ için

$$|a(u,v)|\le C\|u\|\|v\|$$

olacak şekilde bir C sabiti varsa $a(u,v)$ dönüşümüne sürekli bilineer form denir.

Tanım 2.4 (Koersiv Fonksiyon): $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x)=\infty$$

şartını sağlıyorsa koersiv olarak adlandırılır.

H Hilbert uzayı ve $a : H \times H \to \mathbb{R}$ bilineer form olsun. Her $x \in H$ için

$$a(x,x) \geq c\|x\|^2$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti varsa a dönüşümüne koersiv form denir. Burada $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle_H}$ şeklindedir.

Tanım 2.5 (Konveks Fonksiyon): X **,** $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı konveks bir alt kümesi olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $\lambda \in [0,1]$ ve her $x_1, x_2 \in X$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) \leq \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa bu fonksiyona X kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Ayrıca $\lambda \in (0,1)$ ve $x_1 \neq x_2$ için

$$f\left(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\right) < \lambda f\left(x_1\right) + (1-\lambda) f\left(x_2\right)$$

eşitsizliği geçerli ise kesin konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.6: $L_2(0,l)$,

$$\int_0^l |f|^2 \, dx < \infty$$

şartını sağlayan tüm $f : \; 0,l \; \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların kümesidir. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)v(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanır.

$L_2(0,l)$ uzayı yukarıda tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır

Tanım 2.7: $L_2(\Omega)$,

$$\iint_\Omega |u|^2\, d\Omega < \infty$$

şartını sağlayan tüm $u:\Omega \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm sırasıyla

$$\langle u,v\rangle_{L_2(\Omega)} = \iint_\Omega u(x,t)v(x,t)dxdt,$$

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.8: $H^1(\Omega)$ uzayı elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle u,v\rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(u(x,t)v(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{H^1(\Omega)}}.$$

$H^1(\Omega)$ uzayı yukarıda tanımlanan iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

Lemma 2.1 (Cauchy-Bunyakovski Eşitsizliği): $u,v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_\Omega uvdxd\tau \right| \le \left(\int_\Omega |u|^2 \, dxd\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 \, dxd\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.2 (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği): $(X, \langle \ \rangle)$, bir iç çarpım uzayı olsun. $x, y \in X$ için

$$|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \|y\|$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada norm, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ olarak tanımlanmaktadır.

Lemma 2.3 (ε-Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a,b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Tanım 2.9 (Zayıf Yakınsaklık): (x_n), H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için

$$\lim_{n\to\infty}\langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

ise (x_n) dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.10 (Zayıf Süreklilik): X, Y Banach uzayı ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in X$ noktasına zayıf yakınsayan $(x_n) \in X$ dizisi için $f(x_n)$ dizisi $f(x_0)$ elemanına zayıf yakınsıyorsa f dönüşümü x_0 noktasında zayıf süreklidir denir.

Tanım 2.11 (Aşağıdan Zayıf Yarı Süreklilik): A, X Banach uzayının bir alt kümesi ve $f : A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $x_0 \in A$ elemanına zayıf yakınsayan her $(x_n) \in A$ dizisi için

$$\liminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x_0)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında aşağıdan zayıf yarı süreklidir denir.

Tanım 2.12 (Zayıf Kapalı Küme): X kümesinde her zayıf yakınsak dizinin zayıf limiti bu kümeye ait ise X kümesine zayıf kapalı küme denir.

Teorem 2.3 (Genelleştirilmiş Weierstrass Teoremi): Zayıf kompakt bir kümede tanımlanmış aşağıdan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel, aşağıdan sınırlıdır ve bu kümede minimumunu alır.

Tanım 2.13 (Gradyen–Frechet Türevi): H kümesinde tanımlanan $J(h)$ fonksiyoneli için,

$$\Delta J(h) = J(h+\Delta h) - J(h) = \left\langle J'(h), \Delta h \right\rangle_H + o\left(\left\| \Delta h \right\|_H^2 \right)$$

şartı sağlanırsa bu fonksiyonele $h \in H$ elemanında Frechet anlamında diferensiyellenen fonksiyonel, $J'(h)$ elemanına ise $J(h)$ fonksiyonelinin gradyeni veya Frechet türevi denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezde ele alınan problem tanıtılarak çözüm için gerekli olan yöntemden bahsedilecektir.

3.1. Titreşim Problemi ve Zayıf Çözümü

1. bölümde incelediğimiz telin titreşim probleminde $T(x,t)$ gerilim fonksiyonu, $k(x)$ sertlik fonksiyonuna sahip olan teller için $T(x,t)=k(x)u_x(x,t)$ eşitliği ile ifade edilir. Bu durumda $T(0,t)$ ve $T(l,t)$ sınır şartları da $T(0,t)=k(0)u_x(0,t)$ ve $T(l,t)=k(l)u_x(l,t)$ şeklinde yeniden düzenlenir.

Bu durumda (1.1)-(1.3) problemine benzer olarak, $\Omega:=(0,l)\times(0,T)$ bölgesinde tanımlı

$$\rho(x)u_{tt}=\left(k(x)u_x\right)_x+F(x,t),\quad (x,t)\in\Omega \tag{3.1.1}$$

$$u(x,0)=\varphi_1(x),\ u_t(x,0)=\varphi_2(x),\ x\in(0,l) \tag{3.1.2}$$

$$k(0)u_x(0,t)=f(t),\ \ k(l)u_x(l,t)=g(t),\ \ t\in(0,T) \tag{3.1.3}$$

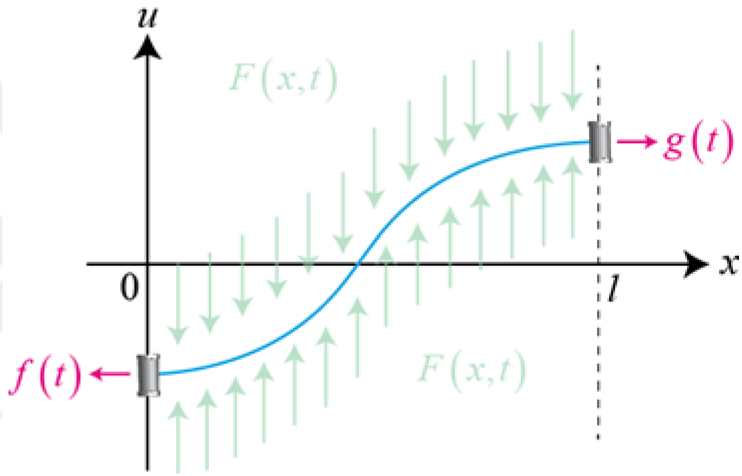
bir boyutlu titreşim problemi ortaya çıkar. Bu problem, l uzunluğuna sahip, homojen olmayan malzemeden yapılmış ve F dış kuvvetinin etkisiyle titreşen bir telin hareketine karşılık gelen bir başlangıç-sınır değer problemidir.

(3.1.1) denkleminde yer alan $\rho(x)$ fonksiyonu telin yapıldığı malzemenin yoğunluğunu ve $k(x)$ fonksiyonu ise bu malzemenin sertliğini ifade eder (Young modülü).

(3.1.2) ile verilen $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonları sırasıyla teldeki başlangıç konumunu ve başlangıç hızını temsil eder.

(3.1.3) ile verilen sınır şartları da telin sol ve sağ uçlarına uygulanmış, $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarıyla temsil edilen kuvvetlerin (gerilimlerin) etkisi olarak yorumlanır.

(3.1.1)-(3.1.3) problemi Şekil3.1'de görselleştirilmiştir.



Şekil 3.1. Titreşim probleminin görsel ifadesi

Bu problemde yer alan fonksiyonlar için

$$0 < \rho_0 \leq \rho(x) \leq \rho_1, \quad 0 < k_0 \leq k(x) \leq k_1, \quad \forall x \in [0,l]$$

$$F(x,t) \in L_2(\Omega)$$

$$\varphi_1(x) \in H^1(0,l), \quad \varphi_2(x) \in L_2(0,l)$$

$$f(t) \in L_2(0,T), \quad g(t) \in L_2(0,T)$$

koşullarının sağlandığını kabul edelim.

Ayrıca $\{f(t), g(t)\}$ fonksiyon çiftini $h(t) := \{f(t), g(t)\}$ ile gösterip bu fonksiyonları kapalı ve konveks bir

$$H \subset L_2(0,T) \times L_2(0,T) \tag{3.1.4}$$

alt kümesinden seçelim.

H kümesinde iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\langle h_1, h_2 \rangle_H = \int_0^T [f_1(t) f_2(t) + g_1(t) g_2(t)] dt; \quad \forall\, h_1 := \{f_1, g_1\},\ h_2 := \{f_2, g_2\} \in H$$

$$\|h(t)\|_H^2 = \int_0^T [f^2(t) + g^2(t)] dt; \quad \forall\, h := \{f, g\} \in H.$$

Bu çalışmanın amacı

$$J_\alpha(h) = \beta_1 \int_0^T [u(0,t;h) - y_1(t)]^2 dt + \beta_2 \int_0^T [u(l,t;h) - y_2(t)]^2 dt + \alpha \|h\|_H^2 \tag{3.1.5}$$

fonksiyonelini minimalleştirecek $h \in H$ elemanını bulmaktır, yani

$$J_{\alpha*} = \inf_{h \in H} J_\alpha(h) = J_\alpha(h_*) \tag{3.1.6}$$

problemini incelemektir. Burada $\beta_1 \geq 0,\ \beta_2 \geq 0,\ \beta_1 + \beta_2 \neq 0$ şeklinde verilmiş sayılardır. (3.1.5) fonksiyonelinde yer alan $u(0,t;h)$ ve $u(l,t;h)$ fonksiyonları (3.1.1)-(3.1.3) probleminin $h \in H$ elemanına karşılık gelen çözümlerinin uç noktalardaki değerleridir. Ayrıca $y_1(t) \in L_2(0,T)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında, $y_2(t) \in L_2(0,T)$ fonksiyonu da $x = l$ noktasında, çözümün yakın olması istenilen hedef fonksiyonlarıdır.

Yani (3.1.1)-(3.1.5) optimal kontrol problemine, “bir boyutlu tel için, uç noktaların istenilen konumlara yakın olmasını sağlayacak şekilde bu noktalara uygulanacak kuvvetlerin kontrol edilmesi problemidir” diyebiliriz.

(3.1.5) fonksiyonelinde $\alpha = 0$ alınırsa (3.1.6) probleminin nümerik olarak kötü tanımlanmış olduğu bilinmektedir. Yani (3.1.5) fonksiyonelini minimum yapan oldukça farklı $h(t)$ fonksiyonları bulunabilir.

Bu durumun üstesinden gelmek için $\alpha > 0$ düzgünleştirme parametresi kullanılır. Bu parametre $\left\| u(0,t;h) - y_1(t) \right\|^2_{L_2(0,T)}$, $\left\| u(l,t;h) - y_2(t) \right\|^2_{L_2(0,T)}$ ve $\left\| h(t) \right\|^2_H$ normları arasındaki dengeyi oluşturmada kullanılır. Düzgünleştirme parametresi hakkında daha ayrıntılı bilgi için Vasilyev’ in (1988) çalışması incelenebilir.

(3.1.1)-(3.1.3) problemindeki ikinci mertebeden türevleri de dikkate aldığımızda, problemin klasik çözümünün $u(x,t) \in C^{2,2}(\Omega) \cap C^{1,1}(\overline{\Omega})$ sınıfından olduğunu görürüz. Çözümün bu şekilde tanımlanabilmesi için katsayıların,

$$\rho(x) \in C[0,l],\ k(x) \in C^1[0,l]$$

ve giriş verilerinin de

$$\varphi_1(x) \in C^1[0,l],\ \varphi_2(x) \in C[0,l]$$

$$f(t) \in C[0,T],\ g(t) \in C[0,T],\ F(x,t) \in C(\Omega)$$

koşullarını sağlaması gerekir (Hasanoğlu 2010).

Pratikte bu fonksiyonlar fiziksel ölçümlerden elde edilen, düzgün olmayan(problemi sağlayacak derecede yeterli sürekli türevlere sahip olmayan) fonksiyonlardır. Diğer bir ifadeyle bu şartlar doğadaki problemlerin çoğunda mümkün olmayabilir. Bu durumlarda klasik çözüme dayalı metotlar geçersiz olacaktır. Böyle hallerde uygun şekilde tanımlanan, şartları daha kolay sağlanacak zayıf çözümler aranır.

Şimdi (3.1.1)-(3.1.3) titreşim problemi için zayıf çözümü tanımlayalım.

$\eta(x,T)=0$ olmak üzere, her $\eta \in H^1(\Omega)$ fonksiyonu için,

$$\int_0^t\int_0^l\left[-\rho(x)u_t\eta_t+k(x)u_x\eta_x\right]dxdt-\int_0^l\rho(x)\varphi_2(x)\eta(x,0)dx-\int_0^T g(t)\eta(l,t)dt+\int_0^T f(t)\eta(0,t)dt$$
$$-\int_0^T\int_0^l F(x,t)\eta(x,t)\,dxdt=0 \tag{3.1.7}$$

integral eşitliğini sağlayan $u \in H^1(\Omega)$ fonksiyonu zayıf çözümdür.

(3.1.1)-(3.1.3) probleminin (3.1.7) anlamında bir çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3.1.1: $u \in H^1(\Omega)$ zayıf çözümü için

$$\|u(x,t)\|_{H^1(\Omega)} \le c_0\left(\|\varphi_1\|_{H^1(0,l)}+\|\varphi_2\|_{L_2(0,l)}+\|F\|_{L_2(\Omega)}+\|h\|_H\right) \tag{3.1.8}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat: (3.1.1) ile verilen

$$\rho(x)u_{tt}-\left(k(x)u_x\right)_x=F(x,t)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu eşitliğin her iki tarafını u_t fonksiyonu ile çarpıp $[0,l]$ aralığında integrallersek,

$$\int_0^l \left[\rho(x)u_{tt} - \left(k(x)u_x\right)_x\right]u_t dx = \int_0^l F(x,t)u_t dx$$

eşitliğini yazarız. Burada,

$$\left(k(x)u_x\right)_x u_t = \left(k(x)u_x u_t\right)_x - k(x)u_x u_{xt}$$

özdeşliğinden yararlanırsak

$$\int_0^l \left(\rho(x)u_{tt}u_t + k(x)u_x u_{xt}\right)dx = \int_0^l F(x,t)u_t dx + \int_0^l \left(k(x)u_x u_t\right)_x dx$$

eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca,

$$\rho(x)u_{tt}u_t + k(x)u_x u_{xt} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[p(x)(u_t)^2 + k(x)(u_x)^2\right]$$

olduğunu kullanarak,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^l \left[\rho(x)(u_t)^2 + k(x)(u_x)^2\right]dx\right\} = \int_0^l F(x,t)u_t dx + \left(k(x)u_x u_t\right)\Big|_{x=0}^{x=l}$$

elde ederiz.

(3.1.3) sınır şartlarına göre $k(0)u_x(0,t) = f(t),\ k(l)u_x(l,t) = g(t)$ olduğundan, yukarıdaki eşitliği

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^l \left[\rho(x)(u_t)^2 + k(x)(u_x)^2\right]dx\right\} = \int_0^l F(x,t)u_t dx + f(t)u_t(l,t) - g(t)u_t(0,t)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu eşitliğin her iki tarafını $(0,t)$ aralığında integrallersek,

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(u_x(x,t)\right)^2\right]dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(u_t(x,0)\right)^2+k(x)\left(u_x(x,0)\right)^2\right]dx$$
$$=\int_0^t\int_0^l F(x,\tau)u_\tau dxd\tau+\int_0^t\left[g(\tau)u_\tau(l,\tau)-f(\tau)u_\tau(0,\tau)\right]d\tau,\ t\in[0,T]$$

eşitliğini elde ederiz.

Şimdi,

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(u_x(x,t)\right)^2\right]dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan,

$$J(t):=\sqrt{E(t)}=\left\{\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(u_x(x,t)\right)^2\right]dx\right\}^{1/2}$$

yazalım. $J(t)$ integraline $u(x,t)$ fonksiyonunun $(0,l)$ aralığındaki enerji normu denir. $t>0$ değişkenine bağlı bu norm,

$$\|u\|_E:=\left\{\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(u_x(x,t)\right)^2\right]dx\right\}^{1/2},\ t>0$$

olarak gösterilir.

Böylece, yukarıdaki eşitliği

$$J^2(t)-J^2(0)=\int_0^t\int_0^l F(x,\tau)u_\tau dxd\tau+\int_0^t\left[g(\tau)u_\tau(l,\tau)-f(\tau)u_\tau(0,\tau)\right]d\tau,\ t\in[0,T] \quad (3.1.9)$$

olarak ifade edebiliriz.

Teoremin ispatına devam etmeden önce bu ispatta kullanacağımız aşağıdaki lemmayı ifade edelim.

Lemma 3.1.2: (3.1.1) - (3.1.3) problemleri için,

$$\|u_x(x,t)\|_{L_2(0,l)}\leq\sqrt{\frac{2}{k_0}}J(t),\ t\in[0,T] \quad (3.1.10)$$

$$\|u_t(x,t)\|_{L_2(0,l)}\leq\sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(t),\ t\in[0,T] \quad (3.1.11)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

$E(t)$ ve $J(t)$ fonksiyonlarının tanımından

$$\begin{aligned}\int_0^l\left[u_x(x,t)\right]^2dx&\leq\frac{1}{k_0}\int_0^l k(x)\left[u_x(x,t)\right]^2dx\\&\leq\frac{1}{k_0}\int_0^l\left[\rho(x)\left(u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(u_x(x,t)\right)^2\right]dx\\&:=\frac{2}{k_0}E(t)\end{aligned}$$

olup, buradan

$$\left\|u_x(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{k_0}}J(t),\ t\in[0,T]$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\int_0^l \left[u_t(x,t)\right]^2 dx &\le \frac{1}{\rho_0}\int_0^l \rho(x)\left[u_t(x,t)\right]^2 dx \\ &\le \frac{1}{\rho_0}\int_0^l \left[\rho(x)\left(u_t(x,t)\right)^2 + k(x)\left(u_x(x,t)\right)^2\right]dx \\ &:= \frac{2}{\rho_0}E(t)\end{aligned}$$

olup,

$$\left\|u_t(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(t),\ t\in[0,T]$$

eşitsizliği bulunur. Böylece Lemma 3.1.2 ispatlanmıştır.

Şimdi teoremin ispatına devam edelim. (3.1.9) özdeşliğinin her iki tarafının $t>0$ değişkenine göre türevini alıp ve sonra bulunan eşitliğin sağ tarafına Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini uygularsak,

$$2J'(t)J(t) \le \|F\|_{L_2(0,l)}\|u_t\|_{L_2(0,l)} + |g(t)||u_t(l,t)| + |f(t)||u_t(0,t)|,\ t\in[0,T]$$

olur. Ayrıca

$$\exists\ \sigma_2 > 0,\ \ |u_t(0,t)| \le \sigma_1 \left\|u_t(x,t)\right\|_{L_2(0,l)}$$

$$\exists\ \sigma_1 > 0,\ \left|u_t\left(l,t\right)\right| \le \sigma_2 \left\|u_t\left(x,t\right)\right\|_{L_2(0,l)}$$

olacak şekilde σ_1 ve σ_2 sayıları mevcuttur. Buradan hareketle

$$J'\left(t\right) \le \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)} + \sigma_1\left|f\left(t\right)\right| + \sigma_2\left|g\left(t\right)\right|\right\},\ t\in\left[0,T\right]$$

eşitsizliği bulunur. Her iki tarafın $\left(0,t\right)$ aralığında integrali alınarak, yukarıdaki eşitsizlik

$$J\left(t\right) \le J\left(0\right) + \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\int_0^t\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)} + \sigma_1\left|f\left(\tau\right)\right| + \sigma_2\left|g\left(\tau\right)\right|\right\}d\tau,\ t\in\left[0,T\right] \quad (3.1.12)$$

şeklinde elde edilir.

Burada,

$$J\left(0\right) := \left\{\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho\left(x\right)\left(u_t\left(x,0\right)\right)^2 + k\left(x\right)\left(u_x\left(x,0\right)\right)^2\right]dx\right\}^{1/2}$$

şeklindedir.

Şimdi yine teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmayı ifade edelim.

Lemma 3.1.3 : (3.1.1) - (3.1.3) probleminde yer alan $u\left(x,t\right)$ fonksiyonu için,

$$\left\|u_x\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{k_0}}J\left(0\right) + \frac{1}{\sqrt{k_0\rho_0}}\int_0^t\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)} + \sigma_1\left|f\left(\tau\right)\right| + \sigma_2\left|g\left(\tau\right)\right|\right\}d\tau,\ t\in\left[0,T\right] \quad (3.1.13)$$

$$\left\|u_t\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(0)+\frac{1}{\rho_0}\int_0^t\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)}+\sigma_1\left|f(\tau)\right|+\sigma_2\left|g(\tau)\right|\right\}d\tau,\ t\in[0,T] \quad (3.1.14)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: (3.1.10) ve (3.1.12) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}\left\|u_x(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} &\le \sqrt{\frac{2}{k_0}}\left[J(0)+\frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\int_0^t\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)}+\sigma_1\left|f(\tau)\right|+\sigma_2\left|g(\tau)\right|\right\}d\tau\right]\\ &\le \sqrt{\frac{2}{k_0}}J(0)+\frac{1}{\sqrt{k_0\rho_0}}\int_0^t\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)}+\sigma_1\left|f(\tau)\right|+\sigma_2\left|g(\tau)\right|\right\}d\tau,\ t\in[0,T]\end{aligned}$$

değerlendirmesi yazılır.

Benzer şekilde (3.1.11) ve (3.1.12) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}\left\|u_t(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} &\le \sqrt{\frac{2}{p_0}}\left[J(0)+\frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\int_0^t\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)}+\sigma_1\left|f(\tau)\right|+\sigma_2\left|g(\tau)\right|\right\}d\tau\right]\\ &\le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(0)+\frac{1}{\rho_0}\int_0^t\left\{\left\|F\right\|_{L_2(0,l)}+\sigma_1\left|f(\tau)\right|+\sigma_2\left|g(\tau)\right|\right\}d\tau,\ t\in[0,T]\end{aligned}$$

bulunur.

Böylece Lemma 3.1.3 ispatlanmıştır.

Şimdi $\left\|u(x,t)\right\|_{L_2(0,l)}$ için bir değerlendirme yapalım:

$$\left\|u(x,t)\right\|_{L_2(0,l)}^2=\int_0^l\left[u(x,t)\right]^2dx,\ t\in[0,T]$$

eşitliğinin her iki tarafının $t>0$ değişkenine göre türevini alır ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$\begin{aligned} 2\|u\|_{L_2(0,l)}\|u\|'_{L_2(0,l)} &= 2\int_0^l u(x,t)u_t(x,t)\,dx \\ &\le 2\|u\|_{L_2(0,l)}\|u_t\|_{L_2(0,l)} \end{aligned}$$

olur. Her iki tarafı $2\|u\|\neq 0$ ile bölüp, sağ tarafta (3.1.14) eşitsizliğini dikkate alırsak,

$$\|u(x,t)\|'_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}J(0)}+\frac{1}{\rho_0}\int_0^t \left\{\|F\|_{L_2(0,l)}+\sigma_1|f(\tau)|+\sigma_2|g(\tau)|\right\}d\tau,\ t\in[0,T]$$

bulunur. t değişkenine bağlı bu eşitsizliği $(0,t)$ aralığında integrallersek,

$$\begin{aligned} \|u(x,t)\|_{L_2(0,l)} &\le \|u(x,0)\|_{L_2(0,l)}+\sqrt{\frac{2}{\rho_0}J(0)}\,t \\ &+\frac{1}{\rho_0}\int_0^t\int_0^\tau\left[\|F\|_{L_2(0,l)}+\sigma_1|f(\eta)|+\sigma_2|f(\eta)|\right]d\eta d\tau,\ t\in[0,T] \end{aligned}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlikte

$$\int_0^t\int_0^\tau F(x)\,d\eta d\tau=\int_0^t (t-\tau)F(\tau)\,d\tau$$

özdeşliğinden yararlanırsak,

$$\left\|u(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le \left\|u(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}J(0)t + \frac{1}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\left\|F\right\|_{L_2(0,l)} d\tau$$

$$+\frac{\sigma_1}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\left|f(\tau)\right| d\tau + \frac{\sigma_2}{\rho_0}\int_0^t (t-\tau)\left|g(\tau)\right| d\tau,\ \ t\in[0,T] \qquad (3.1.15)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca, Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğine göre

$$\int_0^t 1\left(\int_0^l \left[F(x,\tau)\right]^2 dx\right)^{1/2} d\tau \le \left(\int_0^t 1 d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^t\int_0^l \left[F(x,\tau)\right]^2 dx d\tau\right)^{1/2},\ t>0$$

olup, buradan

$$\int_0^t \left\|F\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \le \sqrt{t}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega_t)},\ t>0 \qquad (3.1.16)$$

ve

$$\int_0^t (t-\tau)\left\|F\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \le \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega_t)},\ t>0 \qquad (3.1.17)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Diğer taraftan,

$$J(0) \le \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\rho_1\int_0^l \left[u_t(x,0)\right]^2 dx + k_1\int_0^l \left[u_x(x,0)\right]^2 dx\right)^{1/2}$$

olup, $r_0 = \max\{\rho_1, k_1\}$ olmak üzere,

$$J(0) \le \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\int_0^l \left[u_t(x,0) \right]^2 dx + \int_0^l \left[u_x(x,0) \right]^2 dx \right)^{1/2}$$
$$= \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\| u_t(x,0) \|_{L_2(0,l)}^2 + \| u_x(x,0) \|_{L_2(0,l)}^2 \right)^{1/2}$$

ifadesi, buradan da

$$J(0) \le \sqrt{\frac{r_0}{2}} \left(\| u_t(x,0) \|_{L_2(0,l)} + \| u_x(x,0) \|_{L_2(0,l)} \right) \tag{3.1.18}$$

eşitsizliği yazılabilir. (3.1.16) ve (3.1.18) ifadeleri, (3.1.13) ifadesinde değerlendirilirse,

$$\| u_x(x,t) \|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{r_0}{k_0}} \left(\| u_t(x,0) \|_{L_2(0,l)} + \| u_x(x,0) \|_{L_2(0,l)} \right)$$
$$+ \sqrt{\frac{t}{k_0 \rho_0}} \| F \|_{L_2(\Omega_t)} + \sigma_1 \sqrt{\frac{t}{k_0 \rho_0}} \| f \|_{L_2(0,t)} + \sigma_2 \sqrt{\frac{t}{k_0 \rho_0}} \| g \|_{L_2(0,t)}, t \in [0,T]$$

olur. Burada

$$c_1 = \max \left\{ \sqrt{\frac{r_0}{k_0}}, \sqrt{\frac{t}{k_0 \rho_0}}, \sigma_1 \sqrt{\frac{t}{k_0 \rho_0}}, \sigma_2 \sqrt{\frac{t}{k_0 \rho_0}} \right\}, \quad t \in [0,T]$$

denirse,

$$\| u_x(x,t) \|_{L_2(0,l)} \le c_1 \left(\| u_t(x,0) \|_{L_2(0,l)} + \| u_x(x,0) \|_{L_2(0,l)} + \| F \|_{L_2(\Omega_t)} + \| f \|_{L_2(0,t)} + \| g \|_{L_2(0,t)} \right), t \in [0,T]$$

eşitsizliği veya buna denk olarak

$$\| u_x(x,t) \|_{L_2(0,l)}^2 \le 5c_1^2 \left(\| u_t(x,0) \|_{L_2(0,l)}^2 + \| u_x(x,0) \|_{L_2(0,l)}^2 + \| F \|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \| f \|_{L_2(0,t)}^2 + \| g \|_{L_2(0,t)}^2 \right), \quad t \in [0,T] \tag{3.1.19}$$

eşitsizliği yazılır.

(3.1.16) ve (3.1.18) ifadeleri, (3.1.14) ifadesinde değerlendirilirse,

$$\left\|u_t(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{r_0}{\rho_0}}\left(\left\|u_t(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\right)$$
$$+\frac{\sqrt{t}}{\rho_0}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho_0}\sigma_1\left\|f\right\|_{L_2(0,t)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho_0}\sigma_2\left\|g\right\|_{L_2(0,t)},\ t\in[0,T]$$

olur. Burada

$$c_2 = \max\left\{\sqrt{\frac{r_0}{\rho_0}}, \frac{\sqrt{t}}{\rho_0}, \frac{\sqrt{t}}{\rho_0}\sigma_1, \frac{\sqrt{t}}{\rho_0}\sigma_2\right\},\ \ t\in[0,T]$$

denirse,

$$\left\|u_t(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_2\left(\left\|u_t(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|_{L_2(\Omega_t)} + \left\|f\right\|_{L_2(0,t)} + \left\|g\right\|_{L_2(0,t)}\right), t\in[0,T]$$

ve

$$\left\|u_t(x,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 5c_2^2\left(\left\|u_t(x,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|u_x(x,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|F\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \left\|f\right\|^2_{L_2(0,t)} + \left\|g\right\|^2_{L_2(0,t)}\right),\ t\in[0,T] \quad (3.1.20)$$

bulunur.

(3.1.17) ve (3.1.18) ifadeleri, (3.1.15) ifadesinde değerlendirilirse,

$$\left\|u(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le \left\|u(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + t\sqrt{\frac{r_0}{\rho_0}}\left(\left\|u_t(x,0)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|u_x(x,0)\right\|_{L_2(0,l)}\right)$$
$$+\frac{t\sqrt{t}}{\rho_0\sqrt{3}}\left\|F\right\|_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho_0}\sigma_1\left\|f\right\|_{L_2(0,T)} + \frac{\sqrt{t}}{\rho_0}\sigma_2\left\|g\right\|_{L_2(0,T)},\ t\in[0,T]$$

olur. Burada

$$c_3 = \max\left\{1, t\sqrt{\frac{r_0}{\rho_0}}, \frac{t\sqrt{t}}{\rho_0\sqrt{3}}, \frac{t\sqrt{t}}{\rho_0\sqrt{3}}\sigma_1, \frac{t\sqrt{t}}{\rho_0\sqrt{3}}\sigma_2\right\}, \quad t \in [0,T]$$

alınırsa,

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,l)} \le c_3\Big(\|u(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u_t(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|u_x(x,0)\|_{L_2(0,l)} + \|F\|_{L_2(\Omega_t)} + \|f\|_{L_2(0,t)} + \|g\|_{L_2(0,t)}\Big), \quad t \in [0,T]$$

veya buna denk olarak

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le 6c_3^2\Big(\|u(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} + \|u_t(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} + \|u_x(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} + \|F\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \|f\|^2_{L_2(0,t)} + \|g\|^2_{L_2(0,t)}\Big), \quad t \in [0,T] \tag{3.1.21}$$

eşitsizliği yazılır.

(3.1.19), (3.1.20) ve (3.1.21) ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\|u(x,t)\|^2_{H^1(0,l)} \le c_4\Big(\|u(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} + \|u_t(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} + \|u_x(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} + \|F\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \|f\|^2_{L_2(0,t)} + \|g\|^2_{L_2(0,t)}\Big), \quad t \in [0,T] \tag{3.1.22}$$

yazılır. Burada $c_4 = \max\left\{6c_3^2, 5c_1^2, 5c_2^2\right\}$ şeklindedir.

Diğer taraftan, başlangıç şartlarından hareketle

$$\|u(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} = \|\varphi_1\|^2_{L_2(0,l)}$$

$$\left\|u_t\left(x,0\right)\right\|_{L_2(0,l)}^2=\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(0,l)}^2$$

ve

$$\left\|u_x\left(x,0\right)\right\|_{L_2(0,l)}^2=\left\|\left(\varphi_1\right)_x\right\|_{L_2(0,l)}^2$$

olduğunu biliyoruz. O halde (3.1.22) eşitsizliği

$$\left\|u\left(x,t\right)\right\|_{H^1(0,l)}^2\le c_4\left(\left\|\varphi_1\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|\left(\varphi_1\right)_x\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|F\right\|_{L_2(\Omega_t)}^2+\left\|f\right\|_{L_2(0,t)}^2+\left\|g\right\|_{L_2(0,t)}^2\right),t\in\left[0,T\right] \quad (3.1.23)$$

ve bu eşitsizliğe denk olarak,

$$\left\|u\left(x,t\right)\right\|_{H^1(0,l)}^2\le c_4\left(\left\|\varphi_1\right\|_{H^1(0,l)}^2+\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|F\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|f\right\|_{L_2(0,T)}^2+\left\|g\right\|_{L_2(0,T)}^2\right),\ \ t\in\left[0,T\right]$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Her iki tarafın $\left[0,T\right]$ aralığında integralini alırsak

$$\left\|u\left(x,t\right)\right\|_{H^1(\Omega)}^2\le c_4T\left(\left\|\varphi_1\right\|_{H^1(0,l)}^2+\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(0,l)}^2+\left\|F\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\left\|h\right\|_H^2\right) \quad (3.1.24)$$

yazabiliriz. Her iki tarafın karekökünü alarak

$$\left\|u\left(x,t\right)\right\|_{H^1(\Omega)}\le\sqrt{c_4T}\left(\left\|\varphi_1\right\|_{H^1(0,l)}+\left\|\varphi_2\right\|_{L_2(0,l)}+\left\|F\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|h\right\|_H\right)$$

yazabiliriz. Burada $c_0=\sqrt{c_4T}$ alınırsa Teorem 3.1.1 ispat edilmiş olur.

Çözümün tekliği için, varsayalım ki u_1 ve u_2 problemin iki zayıf çözümü olsun. $r=u_1-u_2$ farkı için

$$p(x)r_{tt}-\left(k(x)r_x\right)_x=0,\quad (x,t)\in\Omega$$

$$r(x,0)=0,\quad r_t(x,0)=0,\quad x\in(0,l)$$

$$k(0)r_x(0,t)=0,\quad k(l)r_x(l,t)=0,\quad t\in(0,T]$$

problemi yazılır. (3.1.12) eşitsizliğinin ispatında yapılan işlemler kullanılarak benzer şekilde bu problemin (3.1.10) anlamındaki çözümü için

$$\|r\|^2_{H^1(\Omega)}\le 0$$

eşitsizliği bulunur. Buradan $H^1(\Omega)$ uzayında $r=0$ olduğundan $u_1=u_2$ eşitliği bulunur ve buradan zayıf çözüm tektir denir (Ladyzhenskaya 1985).

3.2. Optimal Kontrol Probleminin Konuluşu

Optimal kontrol problemleri, optimal çözüme ulaşmada gerekli şartların sağlanacağı uygun bir amaç fonksiyoneli ve kontrol kümesi seçimi ile oluşturulur.

Ele alınacak olan optimal kontrol probleminin çözümü, uç noktaları, hedeflenen değere yaklaştıracak $(u^*,h^*)\in H^1(\Omega)\times L_2(0,T)$ elemanlarının bulunmasıdır.

Bu optimal kontrol problemini

$$J_\alpha(h)=\beta_1\int_0^T\left[u(0,t;h)-y_1(t)\right]^2dt+\beta_2\int_0^T\left[u(l,t;h)-y_2(t)\right]^2dt+\alpha\|h\|^2_H$$

fonksiyoneli için

$$\begin{cases} J_\alpha\left(u^*,h^*\right)=\min\limits_{(u,h)\in H^1(\Omega)\times L_2(0,T)} J_\alpha\left(u,h\right), \\ \rho\left(x\right)u_{tt}=\left(k\left(x\right)u_x\right)_x+F\left(x,t\right) \\ u\left(x,0\right)=\varphi_1\left(x\right),\ u_t\left(x,0\right)=\varphi_2\left(x\right), \\ k\left(0\right)u_x\left(0,t\right)=f\left(t\right),\ \ k\left(l\right)u_x\left(l,t\right)=g\left(t\right) \end{cases} \tag{3.2.1}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

3.3. Optimal Çözümün Varlığı ve Tekliğine ait Esaslar

Şimdi titreşim problemi için yazılmış olan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceleyelim.

Optimal çözümün varlığını ve tekliğini kanıtlamak için, simetrik bilineer formlara karşılık gelen karesel fonksiyonelin minimizasyonu ve varyasyonel problemleri arasındaki ilişkiyi kullanacağız.

Burada esas olan nokta (3.1.5) ile verilen $J_\alpha\left(h\right)$ fonksiyonelini

$$J_\alpha\left(h\right)=b\left(h,h\right)-2Lh+q \tag{3.3.1}$$

şeklinde yeniden ifade etmektir.

Aşağıdaki teorem genel olarak bu tür optimal kontrol problemlerinde çözümün varlığını ve tekliğini ifade eder.

Teorem 3.3.1: H kapalı ve konveks bir küme olmak üzere $b\left(h,h\right)$ bilineer, koersiv, sürekli ve simetrik form ve Lh lineer sürekli fonksiyonel olsun. O halde (3.3.1) ile verilen fonksiyonel için

$$J_{\alpha}\left(h^{*}\right)=\inf_{h\in H} J_{\alpha}\left(h\right)$$

olacak şekilde bir tek $h^{*} \in H$ elemanı vardır (Lions1971).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde materyal ve yöntem kısmında bahsedilen Teorem 3.3.1'in şartlarının, bu tezde ele alınan optimal kontrol problemi için de sağlandığı ispatlanacaktır. Daha sonra optimal çözümü ortaya çıkaracak olan adımlar araştırılacaktır.

4.1. Optimal Çözümün Varlığı ve Tekliği

(3.1.5) ile verilen $J_\alpha(h)$ amaç fonksiyonelini

$$J_\alpha(h)=\beta_1\int_0^T\left[u(0,t;h)-u(0,t;0)+u(0,t;0)-y_1(t)\right]^2dt$$
$$+\beta_2\int_0^T\left[u(l,t;h)-u(l,t;0)+u(l,t;0)-y_2(t)\right]^2dt+\alpha\|h\|_H^2 \tag{4.1.1}$$

şeklinde ifade edelim. Dolayısıyla

$$b(h,h)=\beta_1\int_0^T\left[u(0,t;h)-u(0,t;0)\right]^2dt$$
$$+\beta_2\int_0^T\left[u(l,t;h)-u(l,t;0)\right]^2dt+\alpha\|h\|_H^2, \tag{4.1.2}$$

$$Lh=\beta_1\int_0^T\left[u(0,t;h)-u(0,t;0)\right]\left[y_1(t)-u(0,t;0)\right]dt$$
$$+\beta_2\int_0^T\left[u(l,t;h)-u(l,t;0)\right]\left[y_2(t)-u(l,t;0)\right]dt \tag{4.1.3}$$

ve

$$q=\beta_1\int_0^T\left[y_1(t)-u(0,t;0)\right]^2dt+\beta_2\int_0^T\left[y_2(t)-u(l,t;0)\right]^2dt \tag{4.1.4}$$

fonksiyonellerini kullanarak (4.1.1) fonksiyonelini

$$J_\alpha(h) = b(h,h) - 2Lh + q \tag{4.1.5}$$

şeklinde yazabiliriz.

Böylece artık Teorem 3.1.1' in şartlarının (4.1.5) ile verilen fonksiyonel için de geçerli olup olmayacağını araştırmaya başlayabiliriz.

(4.1.2) ile verilen $b(h,h)$ dönüşümü bilineer midir?

Her $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ ve her $h_1,h_2,h \in H$ için

$$\begin{aligned} b(\lambda h_1 + \mu h_2, h) = {} & \beta_1 \int_0^T \left[u(0,t;\lambda h_1 + \mu h_2) - u(0,t;0)\right]\left[u(0,t;h) - u(0,t;0)\right]dt \\ & + \beta_2 \int_0^T \left[u(l,t;\lambda h_1 + \mu h_2) - u(l,t;0)\right]\left[u(l,t;h) - u(l,t;0)\right]dt \\ & + \alpha \int_0^T (\lambda h_1 + \mu h_2) h\,dt \end{aligned}$$

yazılır. Burada $h \to u[h] - u[0]$ dönüşümünün lineerliği kullanılarak

$$
\begin{aligned}
b(\lambda h_1+\mu h_2,h)=\lambda\beta_1\int_0^T&\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)\right]\left[u(0,t;h)-u(0,t;0)\right]dt\\
+\mu\beta_1\int_0^T&\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)\right]\left[u(0,t;h)-u(0,t;0)\right]dt\\
+\lambda\beta_2\int_0^T&\left[u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right]\left[u(l,t;h)-u(l,t;0)\right]dt\\
+\mu\beta_2\int_0^T&\left[u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right]\left[u(l,t;h)-u(l,t;0)\right]dt\\
+\lambda\alpha\int_0^T& h_1 h dt+\mu\alpha\int_0^T h_2 h dt
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$b(\lambda h_1+\mu h_2,h)=\lambda b(h_1,h)+\mu b(h_2,h)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$b(h,\lambda h_1+\mu h_2)=\lambda b(h,h_1)+\mu b(h,h_2)$$

elde edilir. O halde $b(h,h)$ dönüşümü bilineer formdur.

(4.1.2) ile verilen $b(h,h)$ dönüşümü koersiv midir?

Öncelikli olarak (3.1.1)-(3.1.3) problemi için fark problemini oluşturalım. Bunun için h elemanına δh artımını verelim ve $h+\delta h$ elemanına karşılık gelen hiperbolik problemin çözümünü $u_\delta(x,t)=u(x,t;h+\delta h)$ ile gösterelim. Bu durumda artım elemanına karşılık gelen

$$\rho(x)(u_\delta)_{tt}=\left(k(x)u_{\delta_x}\right)_x+F(x,t),\ (x,t)\in\Omega$$

$$u_\delta(x,0)=\varphi_1(x),\quad (u_\delta)_t(x,0)=\varphi_2(x),\ x\in(0,l)$$

$$k(0)u_{\delta_x}(0,t) = f + \delta f,\ k(l)\ u_{\delta_x}(l,t) = g + \delta g,\ t(0,T]$$

problemi yazılır.

$\delta u(x,t) = u(x,t;h+\delta h) - u(x,t;h)$ olmak üzere yukarıdaki problemden (3.1.1)-(3.1.3) problemi çıkarılırsa

$$\rho(x)\delta u_{tt} - \left(k(x)\delta u_x\right)_x = 0,\ (x,t)\in\Omega \tag{4.1.6}$$

$$\delta u(x,0) = 0,\quad \delta u_t(x,0) = 0,\ x\in(0,l) \tag{4.1.7}$$

$$k(0)\delta u_x(0,t) = \delta f,\quad k(l)\delta u_x(l,t) = \delta g,\ t\in(0,T] \tag{4.1.8}$$

fark problemi elde edilir.

Burada $h=0$ ve $\delta h = h$ olarak seçip $\delta u(x,t) = u(x,t;h) - u(x,t;0)$ şeklinde tanımlarsak $\alpha > 0$ ve her $h\in H$ için

$$\begin{aligned}|b(h,h)| &= \beta_1\int_0^T\left[\delta u(0,t)\right]^2 dt + \beta_2\int_0^T\left[\delta u(l,t)\right]^2 dt + \alpha\|h\|_H^2\\ &= \beta_1\|\delta u(0,t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \beta_2\|\delta u(l,t)\|_{L_2(0,T)}^2 + \alpha\|h\|_H^2\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$|b(h,h)| \geq \alpha\|h\|_H^2$$

yazılır. Bu eşitsizlik $b(h,h)$ fonksiyonelinin koersiv olduğunu gösterir.

(4.1.2) ile verilen $b(h,h)$ dönüşümü sürekli midir?

Önce aşağıdaki teoremi ifade edelim.

Teorem 4.1.1: $\delta u(x,t)=u(x,t;h+\delta h)-u(x,t;h)$, (4.1.6)-(4.1.8) probleminin çözümü olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned}\|\delta u(0,t)\|^2_{L_2(0,T)} &\le c_1\|\delta h\|^2_H \\ \|\delta u(l,t)\|^2_{L_2(0,T)} &\le c_2\|\delta h\|^2_H\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: (4.1.6) ile verilen

$$\rho(x)\delta u_{tt}-\left(k(x)\delta u_x\right)_x=0$$

eşitliğini göz önüne alalım. Denkleminin her iki tarafını δu_t ile çarpıp $[0,l]$ aralığında integrallersek,

$$\int_0^l\left[\rho(x)\delta u_{tt}-\left(k(x)\delta u_x\right)_x\right]\delta u_t dx=0$$

olur. Burada,

$$\left(k(x)\delta u_x\right)_x\delta u_t=\left(k(x)\delta u_x\delta u_t\right)_x-k(x)\delta u_x\delta u_{xt}$$

özdeşliğinden yararlanarak,

$$\int_0^l \left(\rho(x)\delta u_{tt}\delta u_t + k(x)\delta u_x \delta u_{xt}\right)dx = \int_0^l \left(k(x)\delta u_x \delta u_t\right)_x dx$$

yazabiliriz. Ayrıca,

$$\rho(x)\delta u_{tt}\delta u_t + k(x)\delta u_x \delta u_{xt} = \frac{1}{2}\left[\rho(x)(\delta u_t)^2 + k(x)(\delta u_x)^2\right]_t$$

olduğunu kullanarak,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^l \left[\rho(x)(\delta u_t)^2 + k(x)(\delta u_x)^2\right]dx\right\} = \left(k(x)\delta u_x \delta u_t\right)\Big|_{x=0}^{x=l}$$

elde ederiz.

$$k(0)\delta u_x(0,t) = \delta f,\ k(l)\delta u_x(l,t) = \delta g$$

olduğundan,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_0^l \left[\rho(x)(\delta u_t)^2 + k(x)(\delta u_x)^2\right]dx\right\} = \delta g \delta u_t(l,t) - \delta f \delta u_t(0,t)$$

yazabiliriz. $\Omega_t := (0,l)\times(0,t)$ ile gösterip bu eşitliğin her iki tarafını $(0,t)$ aralığında integrallersek,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho(x)\left(\delta u_t(x,t)\right)^2 + k(x)\left(\delta u_x(x,t)\right)^2\right]dx \\
&-\frac{1}{2}\int_0^l \left[\rho(x)\left(\delta u_t(x,0)\right)^2 + k(x)\left(\delta u_x(x,0)\right)^2\right]dx \\
&\qquad = \int_0^t \left[\delta g \delta u_\tau(l,\tau) - \delta f \delta u_\tau(0,\tau)\right]d\tau,\ t \in [0,T]
\end{aligned}$$

olur. Ayrıca fark probleminden $\delta u(x,0)=0$ ve $\delta u_t(x,0)=0$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\delta u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(\delta u_x(x,t)\right)^2\right]dx=\int_0^t\left[\delta g\delta u_\tau(l,\tau)-\delta f\delta u_\tau(0,\tau)\right]d\tau,\ t\in[0,T]$$

eşitliği yeniden yazılır. Şimdi,

$$\delta E(t):=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\delta u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(\delta u_x(x,t)\right)^2\right]dx$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Buradan,

$$\delta J(t):=\sqrt{\delta E(t)}=\left\{\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\delta u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(\delta u_x(x,t)\right)^2\right]dx\right\}^{1/2}$$

yazalım. $\delta J(t)$ integraline $\delta u(x,t)$ fonksiyonunun aralığındaki enerji normu denir. $t>0$ değişkenine bağlı bu norm,

$$\|\delta u\|_{\delta E}:=\left\{\frac{1}{2}\int_0^l\left[\rho(x)\left(\delta u_t(x,t)\right)^2+k(x)\left(\delta u_x(x,t)\right)^2\right]dx\right\}^{1/2},\ t>0$$

olarak gösterilir.

Böylece,

$$\delta J^2(t)=\int_0^t\left[\delta g\delta u_\tau(l,\tau)-\delta f\delta u_\tau(0,\tau)\right]d\tau,\ t\in[0,T] \qquad (4.1.10)$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla

$$\delta J^2(0)=0,\ t\in[0,T]$$

eşitliği yazılır.

Burada Teorem 4.1.1' i ispatlamak için kullanacağımız yeni bir lemma ifade ve ispat edelim.

Lemma 4.1.1: (4.1.6) - (4.1.8) problemleri için,

$$\|\delta u_x\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{k_0}}\delta J(t),\ t\in[0,T] \tag{4.1.11}$$

$$\|\delta u_t\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\delta J(t),\ t\in[0,T] \tag{4.1.12}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

δu_x fonksiyonu için

$$\begin{aligned}\int_0^l [\delta u_x(x,t)]^2\,dx &\le \frac{1}{k_0}\int_0^l k(x)[\delta u_x(x,t)]^2\,dx\\ &\le \frac{1}{k_0}\int_0^l \left[\rho(x)(\delta u_t(x,t))^2 + k(x)(\delta u_x(x,t))^2\right]dx\\ &:= \frac{2}{k_0}\delta E(t)\end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$\|\delta u_x\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{k_0}}\delta J(t),\ t \in [0,T]$$

eşitsizliği elde edilir.

Benzer şekilde δu_t fonksiyonu için de

$$\begin{aligned}\int_0^l \left[\delta u_t(x,t)\right]^2 dx &\le \frac{1}{\rho_0}\int_0^l \rho(x)\left[\delta u_t(x,t)\right]^2 dx \\ &\le \frac{1}{\rho_0}\int_0^l \left[\rho(x)\left(\delta u_t(x,t)\right)^2 + k(x)\left(\delta u_x(x,t)\right)^2\right]dx \\ &:= \frac{2}{\rho_0}\delta E(t)\end{aligned}$$

yazılabileceğinden

$$\|\delta u_t\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\delta J(t),\ t \in [0,T]$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Lemma 4.1.1 ispatlanmıştır.

Şimdi Teorem 4.1.1' in ispatına devam edelim. (4.1.10) eşitliğinin her iki tarafının $t>0$ değişkenine göre türevini alıp ve sonra bulunan eşitliğin sağ tarafına Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini uygularsak,

$$2\delta J'(t)\delta J(t) \le |\delta f||\delta u_t(0,t)| + |\delta g||\delta u_t(l,t)|$$

elde edilir. Ayrıca

$$\exists\ \xi_1 > 0,\ \left|\delta u_t(0,t)\right| \le \xi_1 \left\|\delta u_t(x,t)\right\|_{L_2(0,l)}$$

$$\exists\ \xi_2 > 0,\ \left|\delta u_t\left(l,t\right)\right| \le \xi_2 \left\|\delta u_t\left(x,t\right)\right\|_{L_2(0,l)}$$

olacak şekilde ξ_1 ve ξ_2 sayılarının mevcut olduğunu biliyoruz. Buradan hareketle

$$\delta J'\left(t\right) \le \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\left\{\xi_1\left|\delta f\right| + \xi_2\left|\delta g\right|\right\}$$

bulunur. Bunu $\left(0,t\right)$ aralığında integrallersek,

$$\delta J\left(t\right) \le \frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\int_0^t\left\{\xi_1\left|\delta f\right| + \xi_2\left|\delta g\right|\right\}d\tau,\ t \in \left[0,T\right] \tag{4.1.13}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi yine Teorem 4.1.1' i ispatlamak için kullanacağımız yeni bir lemma ifade ve ispat edelim.

Lemma 4.1.2 : (4.1.6) - (4.1.8) probleminde yer alan $\delta u\left(x,t\right)$ fonksiyonu için,

$$\left\|\delta u_x\right\|_{L_2(0,l)} \le \frac{1}{\sqrt{k_0\rho_0}}\int_0^t\left\{\xi_1\left|\delta f\right| + \xi_2\left|\delta g\right|\right\}d\tau,\ t \in \left[0,T\right] \tag{4.1.14}$$

$$\left\|\delta u_t\right\|_{L_2(0,l)} \le \frac{1}{\rho_0}\int_0^t\left\{\xi_1\left|\delta f\right| + \xi_2\left|\delta g\right|\right\}d\tau,\ t \in \left[0,T\right] \tag{4.1.15}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: (4.1.11) ve (4.1.13) eşitsizliklerinden,

$$\|\delta u_x\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{k_0}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\int_0^t \left\{\xi_1|\delta f| + \xi_2|\delta g|\right\} d\tau\right]$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{k_0\rho_0}}\int_0^t \left\{\xi_1|\delta f| + \xi_2|\delta g|\right\} d\tau,\ t \in [0,T]$$

bulunur.

Benzer şekilde (4.1.12) ve (4.1.13) eşitsizliklerinden,

$$\|\delta u_t\|_{L_2(0,l)} \le \sqrt{\frac{2}{\rho_0}}\left[\frac{1}{\sqrt{2\rho_0}}\int_0^t \left\{\xi_1|\delta f| + \xi_2|\delta g|\right\} d\tau\right]$$
$$\le \frac{1}{\rho_0}\int_0^t \left\{\xi_1|\delta f| + \xi_2|\delta g|\right\} d\tau,\ t \in [0,T]$$

bulunur.

Böylece Lemma4.1.2 ispatlanmıştır.

Şimdi Teorem 4.1.1'in ispatına devam edelim. Bunun için $\|\delta u\|_{L_2(0,l)}$ için bir değerlendirme yapalım:

$$\|\delta u\|^2_{L_2(0,l)} = \int_0^l \left[\delta u(x,t)\right]^2 dx,\ t \in [0,T]$$

eşitliğinin her iki tarafının $t > 0$ değişkenine göre türevini alır ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğinden yararlanırsak,

$$2\|\delta u\|_{L_2(0,l)}\|\delta u\|'_{L_2(0,l)} = 2\int_0^l \delta u(x,t)\,\delta u_t(x,t)\,dx$$
$$\le 2\|\delta u\|_{L_2(0,l)}\|\delta u_t\|_{L_2(0,l)}$$

olur. Her iki tarafı $2\|\delta u\| \neq 0$ ile bölüp, sağ tarafta (4.1.15) eşitsizliğini dikkate alırsak,

$$\|\delta u\|'_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{\rho_0}\int_0^t \left\{\xi_1|\delta f| + \xi_2|\delta g|\right\} d\tau,\ t \in [0,T]$$

bulunur. t değişkenine bağlı bu eşitsizliği $(0,t)$ aralığında integrallersek,

$$\|\delta u(x,t)\|_{L_2(0,l)} \leq \frac{1}{\rho_0}\int_0^t\int_0^\tau \left[\xi_1|\delta f| + \xi_2|\delta g|\right] d\mu d\tau,\ t \in [0,T]$$

olur. Bu ifade için,

$$\int_0^t\int_0^\tau F(\eta)\, d\eta d\tau = \int_0^t (t-\tau) F(\tau)\, d\tau$$

özdeşliğinden yararlanırsak ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini kullanırsak,

$$\int_0^t \|F\|_{L_2(0,l)}\, d\tau \leq \sqrt{t}\,\|F\|_{L_2(\Omega_t)},\ t > 0 \tag{4.1.16}$$

ve

$$\int_0^t (t-\tau)\|F\|_{L_2(0,l)}\, d\tau \leq \frac{t\sqrt{t}}{\sqrt{3}}\|F\|_{L_2(\Omega_t)},\ t > 0 \tag{4.1.17}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. $c = \max\left\{\frac{1}{\rho_0}\xi_1, \frac{1}{\rho_0}\xi_2\right\}$ olmak üzere,

$$\|\delta u\|_{L_2(0,l)} \leq c\int_0^t (t-\tau)\left[|\delta f| + |\delta g|\right] d\tau \tag{4.1.18}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned}\|\delta u\|_{L_2(0,l)} &\le \sqrt{2}c\left(\int_0^t (t-\tau)^2\, d\tau\right)^{1/2}\left(\int_0^T \left[|\delta f|^2+|\delta g|^2\right] d\tau\right)^{1/2}\\ &\le \sqrt{2}c\frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{3}}\|\delta h\|_H\end{aligned}$$

yazılır. $c_* = \dfrac{2c^2T^3}{3}$ denilirse

$$\|\delta u\|^2_{L_2(0,l)} \le c_*\|\delta h\|^2_H \tag{4.1.19}$$

değerlendirmesi bulunur.

Ayrıca

$$\exists\ \sigma_3>0,\ \ |\delta u(0,t)| \le \sigma_3\|\delta u(x,t)\|_{L_2(0,l)}$$

$$\exists\ \sigma_4>0,\ \ |\delta u(l,t)| \le \sigma_4\|\delta u(x,t)\|_{L_2(0,l)}$$

olacak şekilde σ_3 ve σ_4 sayıları mevcuttur. (4.1.19) eşitsizliği bu eşitsizliklerde kullanılırsa

$$\begin{aligned}\|\delta u(0,t)\|^2_{L_2(0,T)} &\le c_1\|\delta h\|^2_H\\ \|\delta u(l,t)\|^2_{L_2(0,T)} &\le c_2\|\delta h\|^2_H\end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1 ispatlanmış oldu.

Şimdi $b\left(h,h\right)$ fonksiyonelinin sürekliliğinin incelenmesine geri dönelim. Her $h,h_* \in H$ için

$$\begin{aligned} b\left(h,h_*\right) &= \beta_1 \int_0^T \left[u\left(0,t;h\right)-u\left(0,t;0\right)\right]\left[u\left(0,t;h_*\right)-u\left(0,t;0\right)\right]dt \\ &+\beta_2 \int_0^T \left[u\left(l,t;h\right)-u\left(l,t;0\right)\right]\left[u\left(l,t;h_*\right)-u\left(l,t;0\right)\right]dt \\ &+\alpha \int_0^T hh_* dt \end{aligned}$$

olup, Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \left|b\left(h,h_*\right)\right| \le & \beta_1 \left\|u\left(0,t;h\right)-u\left(0,t;0\right)\right\|_{L_2(0,T)} \left\|u\left(0,t;h_*\right)-u\left(0,t;0\right)\right\|_{L_2(0,T)} \\ &+\beta_2 \left\|u\left(l,t;h\right)-u\left(0,t;0\right)\right\|_{L_2(0,T)} \left\|u\left(l,t;h_*\right)-u\left(l,t;0\right)\right\|_{L_2(0,T)} \\ &+\alpha \left\|h\right\|_H \left\|h_*\right\|_H \end{aligned}$$

Elde edilir. $\delta u\left(x,t\right)=u\left(x,t;h\right)-u\left(x,t;0\right)$ ve $\delta u_*\left(x,t\right)=u\left(x,t;h_*\right)-u\left(x,t;0\right)$ için bu eşitsizlik

$$\begin{aligned} \left|b\left(h,h_*\right)\right| \le & \beta_1 \left\|\delta u\left(0,t\right)\right\|_{L_2(0,T)} \left\|\delta u_*\left(0,t\right)\right\|_{L_2(0,T)} + \beta_2 \left\|\delta u\left(l,t\right)\right\|_{L_2(0,T)} \left\|\delta u_*\left(l,t\right)\right\|_{L_2(0,T)} \\ &+ \alpha \left\|h\right\|_H \left\|h_*\right\|_H \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.1.1 de $h=0$ ve $\delta h=h$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned} \left\|\delta u\left(0,t\right)\right\|^2_{L_2(0,T)} &\le c_1 \left\|h\right\|^2_H \\ \left\|\delta u\left(l,t\right)\right\|^2_{L_2(0,T)} &\le c_2 \left\|h\right\|^2_H \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

yazılır. Benzer olarak $h=0$ ve $\delta h=h_*$ elemanları için de

$$\left\|\delta u_*(0,t)\right\|^2_{L_2(0,T)} \le c_1 \left\|h_*\right\|^2_H$$
$$\left\|\delta u_*(l,t)\right\|^2_{L_2(0,T)} \le c_2 \left\|h_*\right\|^2_H$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned}\left|b(h,h_*)\right| &\le \beta_1\sqrt{c_1}\left\|h\right\|_H \sqrt{c_1}\left\|h_*\right\|_H + \beta_2\sqrt{c_2}\left\|h\right\|_H \sqrt{c_2}\left\|h_*\right\|_H + \alpha\left\|h\right\|_H\left\|h_*\right\|_H \\ &= (\beta_1 c_1 + \beta_2 c_2 + \alpha)\left\|h\right\|_H\left\|h_*\right\|_H\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $c_3 = \max\{\beta_1 c_1, \beta_2 c_2, \alpha\}$ için

$$\left|b(h,h_*)\right| \le c_2 \left\|h\right\|_H \left\|h_*\right\|_H \qquad (4.1.21)$$

bulunur. Bu eşitsizlik $b(h,h_*)$ fonksiyonelinin sürekli olduğunu gösterir.

(4.1.2) ile verilen $b(h,h)$ dönüşümü simetrik midir?

Her $h, h_* \in H$ için

$$\begin{aligned}b(h,h_*) = &\beta_1\int_0^T \left[u(0,t;h)-u(0,t;0)\right]\left[u(0,t;h_*)-u(0,t;0)\right]dt \\ &+\beta_2\int_0^T \left[u(l,t;h)-u(l,t;0)\right]\left[u(l,t;h_*)-u(l,t;0)\right]dt \\ &+\alpha\int_0^T hh_* dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b(h_*,h) = &\beta_1\int_0^T \left[u(0,t;h_*)-u(0,t;0)\right]\left[u(0,t;h)-u(0,t;0)\right]dt \\ &+\beta_2\int_0^T \left[u(l,t;h_*)-u(l,t;0)\right]\left[u(l,t;h)-u(l,t;0)\right]dt \\ &+\alpha\int_0^T h_* h dt\end{aligned}$$

yazılabilir. O halde,

$$b(h,h_*)=b(h_*,h)$$

olduğu görülür. Yani $b(h,h_*)$ fonksiyoneli simetrik formdur.

Şimdi Lh fonksiyonelinin özelliklerini inceleyelim.

(4.1.3) ile verilen Lh dönüşümü lineer midir?

Her $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ve her $h_1,h_2\in H$ için $h\to u[h]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}L(\lambda h_1+\mu h_2)=\lambda\beta_1\int_0^T&\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)\right]\left[y_1(t)-u(0,t;0)\right]dt\\ +\mu\beta_1\int_0^l&\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)\right]\left[y_1(t)-u(0,t;0)\right]dt\\ +\lambda\beta_2\int_0^l&\left[u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right]\left[y_2(t)-u(l,t;0)\right]dt\\ +\mu\beta_1\int_0^l&\left[u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right]\left[y_2(t)-u(l,t;0)\right]dt\end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$L(\lambda h_1+\mu h_2)=\lambda Lh_1+\mu Lh_2$$

yazılır ve Lh fonksiyonelinin lineer olduğu görülür.

(4.1.3) ile verilen Lh dönüşümü sürekli midir?

$$Lh = \beta_1 \int_0^T \left[u(0,t;h) - u(0,t;0) \right]\left[y_1(t) - u(0,t;0) \right] dt$$
$$+\beta_2 \int_0^T \left[u(l,t;h) - u(l,t;0) \right]\left[y_2(t) - u(l,t;0) \right] dt$$

Fonksiyonelinde Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanıp, $\delta u(x,t) = u(x,t;h) - u(x,t;0)$ olarak değerlendirilirse

$$|Lh| \le \beta_1 \left\| \delta u(0,t) \right\|_{L_2(0,T)} \left\| y_1(t) - u(0,t;0) \right\|_{L_2(0,T)} + \beta_2 \left\| \delta u(l,t) \right\|_{L_2(0,T)} \left\| y_2(t) - u(l,t;0) \right\|_{L_2(0,T)}$$

elde edilir. $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ verilmiş fonksiyonlar olduklarından

$$\left\| y_1(t) - u(0,t;0) \right\|_{L_2(0,T)} \le c_4$$
$$\left\| y_2(t) - u(l,t;0) \right\|_{L_2(0,T)} \le c_5$$

eşitsizliklerini alalım. O halde

$$|L_1\varphi| \le c_4 \beta_1 \left\| \delta u(0,t) \right\|_{L_2(0,T)} + c_5 \beta_2 \left\| \delta u(l,t) \right\|_{L_2(0,T)}$$

bulunur. (4.1.20) eşitsizlikleri dikkate alınırsa $\delta u(x,t) = u(x,t;h) - u(x,t;0)$ için

$$|Lh| \le \sqrt{c_1} c_4 \beta_1 \|h\|_H + \sqrt{c_2} c_5 \beta_2 \|h\|_H$$

yazılır. O halde $c_6 = \max\left\{ \sqrt{c_1} c_4 \beta_1, \sqrt{c_2} c_5 \beta_2 \right\}$ alınarak,

$$|Lh| \le c_6 \|h\|_H \tag{4.1.22}$$

bulunur. Bu eşitsizlik Lh fonksiyonelinin sürekliliğini gösterir.

Böylece tezde ele alınan optimal kontrol problemi için Teorem 3.1.1' in şartlarının sağlandığını göstermiş olduk. Şimdi optimal çözümün varlığının ve tekliğinin ispatına geçebiliriz.

Bunun için $b(h,h)$ fonksiyonelinin kesin konveks ve Lh fonksiyonelinin konveks olduğunu ispatlayalım.

Önce $h \to b(h,h)$ dönüşümünün kesin konveks olduğunu ispatlayalım

$h \to u[h]-u[0]$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned} u(x,t;\lambda h_1+\mu h_2)-u(x,t;0) &= \lambda\left[u(x,t;h_1)-u(x,t;0)\right] \\ &\quad +\mu\left[u(x,t;h_2)-u(x,t;0)\right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $\beta \in [0,1]$ olmak üzere $\lambda=\beta,\ \mu=1-\beta$ ve $x=0,\ x=l$ için

$$\begin{aligned} & u(0,t;\beta h_1+(1-\beta)h_2)-u(0,t;0)+u(l,t;\beta h_1+(1-\beta)h_2)-u(l,t;0) \\ & =\beta\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)+u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right] \\ & +(1-\beta)\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)+u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right] \end{aligned} \tag{4.1.23}$$

şeklinde yazılır.

Şimdi $b(h,h)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu gösterelim. $b(h,h)$ fonksiyonelinin tanımı gereği her $h_1,h_2 \in H$ ve $\beta \in (0,1)$ için

$$b\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2,\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)=\beta_1\int_0^T\left[u\left(0,t;\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)-u\left(0,t;0\right)\right]^2dt$$
$$+\beta_2\int_0^T\left[u\left(l,t;\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)-u\left(l,t;0\right)\right]^2dt$$
$$+\alpha\int_0^l\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)^2dx$$

yazılır. Bu ifadede (4.1.23) özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&b\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2,\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)\\
&=\int_0^T\left[\beta\left(u\left(0,t;h_1\right)-u\left(0,t;0\right)\right)+(1-\beta)\left(u\left(0,t;h_2\right)-u\left(0,t;0\right)\right)\right]^2dt\\
&+\int_0^T\left[\beta\left(u\left(l,t;h_1\right)-u\left(l,t;0\right)\right)+(1-\beta)\left(u\left(l,t;h_2\right)-u\left(l,t;0\right)\right)\right]^2dt\\
&+\alpha\int_0^T\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)^2dt
\end{aligned}\tag{4.1.24}$$

olur.

Buradan basit işlemlerle

$$\begin{aligned}
&b\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2,\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)\\
&=\beta_1\beta^2\int_0^T\left[u\left(0,t;h_1\right)-u\left(0,t;0\right)\right]^2dt+\beta_1(1-\beta)^2\int_0^T\left[u\left(0,t;h_2\right)-u\left(0,t;0\right)\right]^2dt\\
&+\beta_2\beta^2\int_0^T\left[u\left(l,t;h_1\right)-u\left(l,t;0\right)\right]^2dt+\beta_2(1-\beta)^2\int_0^T\left[u\left(l,t;h_2\right)-u\left(l,t;0\right)\right]^2dt\\
&+2\beta\beta_1(1-\beta)\int_0^T\left[u\left(0,t;h_1\right)-u\left(0,t;0\right)\right]\left[u\left(0,t;h_2\right)-u\left(0,t;0\right)\right]dt\\
&+2\beta\beta_2(1-\beta)\int_0^T\left[u\left(l,t;h_1\right)-u\left(l,t;0\right)\right]\left[u\left(l,t;h_2\right)-u\left(l,t;0\right)\right]dt\\
&+\alpha\int_0^T\left[\beta^2\left(h_1\right)^2+(1-\beta)^2\left(h_2\right)^2+2\beta(1-\beta)\left(h_1\right)\left(h_2\right)\right]dt
\end{aligned}$$

elde edilir.

$\varepsilon-$Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}&\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)\right]\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)\right]+\left[u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right]\left[u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right]\\&\qquad\le\frac{\varepsilon}{2}\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)\right]^2\\&\qquad+\frac{\varepsilon}{2}\left[u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right]^2+\frac{1}{2\varepsilon}\left[u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right]^2\end{aligned}$$

ve

$$(h_1)(h_2)\le\frac{\varepsilon}{2}(h_1)^2+\frac{1}{2\varepsilon}(h_2)^2$$

yazılır. Bu eşitsizliklerde $\varepsilon=1$ alınarak, $h_1\neq h_2$ için yukarıdaki ifadede yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&b\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2,\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)\\&<\beta_1\beta^2\int_0^T\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)\right]^2dt+\beta_1(1-\beta)^2\int_0^T\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)\right]^2dt\\&+\beta_2\beta^2\int_0^T\left[u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right]^2dt+\beta_2(1-\beta)^2\int_0^T\left[u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right]^2dt\\&+\beta_1\beta(1-\beta)\int_0^T\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)\right]^2dt+\beta_1\beta(1-\beta)\int_0^T\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)\right]^2dt\\&+\beta_2\beta(1-\beta)\int_0^T\left[u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right]^2dt+\beta_2\beta(1-\beta)\int_0^T\left[u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right]^2dt\\&+\alpha\int_0^T\left[\beta^2(h_1)^2+(1-\beta)^2(h_2)^2+\beta(1-\beta)(h_1)^2+\beta(1-\beta)(h_2)^2\right]dt\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
& b\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2,\beta h_1+(1-\beta)h_2\right) \\
& \quad <\beta_1\beta\int_0^T\left[u\left(0,t;h_1\right)-u\left(0,t;0\right)\right]^2 dt+\beta_1(1-\beta)\int_0^T\left[u\left(0,t;h_2\right)-u\left(0,t;0\right)\right]^2 dt \\
& \quad +\beta_2\beta\int_0^T\left[u\left(l,t;h_1\right)-u\left(l,t;0\right)\right]^2 dt+\beta_2(1-\beta)\int_0^T\left[u\left(l,t;h_2\right)-u\left(l,t;0\right)\right]^2 dt \\
& \quad +\alpha\int_0^T\left[\beta\left(h_1\right)^2+(1-\beta)\left(h_2\right)^2\right]dt
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece

$$
b\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2,\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)<\beta b\left(h_1,h_1\right)+(1-\beta)b\left(h_2,h_2\right) \qquad (4.1.25)
$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik $b(h,h)$ fonksiyonelinin kesin konveks olduğunu göstermektedir.

Şimdi Lh fonksiyonelinin konveks olduğunu gösterelim. Lh fonksiyonelinin tanımından her $h_1,h_2\in H$ için

$$
\begin{aligned}
L\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)=\beta_1\int_0^T & \left[u\left(0,t;\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)-u\left(0,t;0\right)\right]\left[y_1(t)-u\left(0,t;0\right)\right]dt \\
+\beta_2\int_0^T & \left[u\left(l,t;\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)-u\left(l,t;0\right)\right]\left[y_2(t)-u\left(l,t;0\right)\right]dt
\end{aligned}
$$

yazılır.

Bu ifadede (4.1.23) özdeşliği kullanılırsa

$$L\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)=\beta_1\beta\int_0^T\left[u(0,t;h_1)-u(0,t;0)\right]\left[y_1(t)-u(0,t;0)\right]dt$$
$$+\beta_1\beta\int_0^T\left[u(l,t;h_1)-u(l,t;0)\right]\left[y_2(t)-u(l,t;0)\right]dt$$
$$+\beta_2(1-\beta)\int_0^T\left[u(0,t;h_2)-u(0,t;0)\right]\left[y_1(t)-u(0,t;0)\right]dt$$
$$+\beta_2(1-\beta)\int_0^T\left[u(l,t;h_2)-u(l,t;0)\right]\left[y_2(t)-u(l,t;0)\right]dt$$

olur. Buradan

$$L\left(\beta h_1+(1-\beta)h_2\right)=\beta L(h_1)+(1-\beta)L(h_2) \tag{4.1.26}$$

olduğu görülür. Yani Lh, konveks bir fonksiyoneldir.

Şimdi optimal çözümün varlığı ve tekliği meselesine geri dönebiliriz.

$\{h_n\}\in H$ dizisi $J_\alpha(h)$ fonksiyoneli için bir minimalleştirici dizi olsun. Yani $n\to\infty$ için

$$J_\alpha(h_n)\to\inf_{h\in H}J_\alpha(h) \tag{4.1.27}$$

yakınsaması geçerli olsun. $b(h,h)$ fonksiyonelinin koersiv ve Lh fonksiyonelinin sürekli olmasından faydalanılarak $\{h_n\}$ dizisi için

$$J_\alpha(h_n)=b(h_n,h_n)-2Lh_n+q\geq\alpha\|h_n\|_H^2-2c_6\|h_n\|_H \tag{4.1.28}$$

yazılır.

(4.1.27) şartına göre $J_\alpha(h_n)$ değerleri bir sayıya yakınsayacaktır. Bu durum (4.1.28) birlikte değerlendirilirse dizinin sınırlılığını, yani c_7 keyfi bir sabit olmak üzere

$$\|h_n\|_H \le c_7$$

olması gerekir. Sınırlılık özelliği zayıf prekompakt olmayı sağlayacağından $\{h_n\}$ dizisinin $w \in L_2(0,T) \times L_2(0,T)$ elemanına zayıf yakınsayan bir $\{h_\mu\}$ alt dizisi mevcuttur. Diğer yandan H kapalı ve konveks olduğundan zayıf kapalıdır. Bu durumda H kümesi zayıf limitini içerir, yani

$$w \in H \tag{4.1.29}$$

olur.

Ayrıca $h \to b(h,h)$ ve $h \to Lh$ dönüşümleri sürekli ve konveks olduklarından aşağıdan zayıf yarı süreklidir. Böylece bunların toplamlarından oluşan $h \to J_\alpha(h)$ dönüşümü aşağıdan zayıf yarı süreklidir. O halde aşağıdan zayıf yarı süreklilik tanımı gereği

$$\lim_{\mu\to\infty} \inf_{h\in H} J_\alpha(h_\mu) \ge J_\alpha(w) \tag{4.1.30}$$

olacaktır. Genelleştirilmiş Weierstrass Teoremine göre aşağıdan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel zayıf kompakt bir kümede aşağıdan sınırlıdır. Yani

$$\inf_{h\in H} J_\alpha(h) = k \tag{4.1.31}$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{R}$ sayısı mevcuttur. Bu eşitlik ve (4.1.30) ile verilen eşitsizlik birlikte değerlendirilirse

$$k \le J_\alpha(w) \le \lim_{\mu\to\infty} \inf_{h\in H} J_\alpha(h_\mu) \le \inf_{h\in H} J_\alpha(h) = k$$

olduğu görülür. Bu sonuç, $\{h_n\}$ dizisinin zayıf limiti olan w elemanının fonksiyonele infimum değerini aldıran eleman olduğu sonucunu çıkarır.

Böylece optimal çözümün varlığı gösterilmiş olur.

Şimdi de optimal çözümün tekliğini ispatlayalım. Önce $h \to b(h,h)$ dönüşümünün kesin konveks ve Lh dönüşümünün de konveks olduğunu kullanarak $h \to J_\alpha(h)$ dönüşümünün kesin konveks olduğunu gösterelim.

Her $h_1, h_2 \in H$ ve tüm $\beta \in (0,1)$ için

$$J_\alpha\left(\beta h_1 + (1-\beta)h_2\right) = b\left(\beta h_1 + (1-\beta)h_2, \beta h_1 + (1-\beta)h_2\right) - 2L\left(\beta h_1 + (1-\beta)h_2\right) + q$$

olup, (4.1.25) ve (4.1.26) değerlendirmeleri göz önüne alınırsa $h_1 \neq h_2$ iken

$$J_\alpha\left(\beta h_1 + (1-\beta)h_2\right) < \beta b(h_1,h_1) + (1-\beta)b(h_2,h_2) - 2\left(\beta Lh_1 + (1-\beta)Lh_2\right) + q$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned} J_\alpha\left(\beta h_1 + (1-\beta)h_2\right) &< \beta\left\{b(h_1,h_1) - 2Lh_1 + q\right\} + (1-\beta)\left\{b(h_2,h_2) - 2Lh_2 + q\right\} \\ &< \beta J_\alpha(h_1) + (1-\beta) J_\alpha(h_2) \end{aligned}$$

bulunur. O halde $J_\alpha(h)$ fonksiyoneli kesin konvekstir.

Şimdi iki tane optimal çözümün var olduğunu düşünelim. Yani h_1 ve h_2

$$J_\alpha(h_1) = J_\alpha(h_2) = \inf_{h \in H} J_\alpha(h)$$

şartını sağlayan iki eleman olsun. H kümesi konveks olduğundan

$$\frac{1}{2}(h_1 + h_2) \in H$$

olacaktır. Öte yandan $J_\alpha(h)$ fonksiyoneli kesin konveks olduğundan $h_1 \neq h_2$ iken

$$J_\alpha\left(\frac{1}{2}(h_1 + h_2)\right) < \frac{1}{2} J_\alpha(h_1) + \frac{1}{2} J_\alpha(h_2) = \inf_{h \in H} J_\alpha(h)$$

olur. Bu ifade h elemanının optimal çözüm oluşuyla bir çelişki oluşturmaktadır. Bu çelişki iki tane optimal çözümün var olduğu kabulünden kaynaklanmıştır. O halde $h_1 = h_2$ olmak zorundadır, yani minimum eleman tektir.

Böylece ele alınan problem için optimal çözümün varlığını ve tekliğini ispatlamış oluyoruz.

4.2. Optimal Çözüm için Fonksiyonelin Türevlenmesi

Optimal kontrol problemlerinde optimal çözümü bulabilmek için yapılacak işlemler, probleme karşılık gelen eşlenik problemi ve fonksiyonelin türevini (gradyenini) bulmaktır.

Bunun için

$$\begin{cases} J_\alpha(u^*, h^*) = \min J_\alpha(u, h) \\ L(u, h) = 0 \end{cases}$$

şeklindeki genel bir optimal kontrol probleminde önce

$$L(u, h, \eta) = J_\alpha(u, h) + \int_\Omega \eta L(u, h)\, d\Omega$$

birleştirilmiş fonksiyonelini (Lagrange Fonksiyoneli) yazmak gerekir. Daha sonra Lagrange fonksiyonelinin çözüm ve kontrol fonksiyonuna göre varyasyonelini bulmak gerekir. Kısmi integrasyon yardımı ile başlangıç ve sınır şartlarını dikkate almakla bulunan varyasyonları, Ω bölgesi üzerinden alınan integraller altında bulunan ifadelerle, çözüm fonksiyonunun konum ve zaman değişkenlerine göre varyasyonlarının kısmi türevleri bulunmayacak şekilde düzenlemek gerekir.

Son olarak, Lagrange fonksiyonelinin stasyonerlik şartından ve çözüm fonksiyonunun konum ve zaman değişkenlerine göre varyasyonlarının keyfiliğinden yararlanarak uygun varyasyonların katsayılarını sıfıra eşitlemek gerekir. Bu durumda, elde edilen eşitliklerin hepsi Lagrange çarpanları üzerindeki şartları ifade eder, aranılan eşlenik problemi ve gradyeni meydana getirir.

Bu tezde incelenen optimal kontrol problemi için eşlenik problemi ve $J_\alpha(h)$ fonksiyonelinin gradyenini araştırırken kullanacağımız birleştirilmiş fonksiyonel (Lagrange Fonksiyoneli) kavramından faydalanacağız. Bunun için önce

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\alpha(h) = {} & \beta_1\int_0^T\left[u(0,t)-y_1(t)\right]^2 dt+\beta_2\int_0^T\left[u(l,t)-y_2(t)\right]^2 dt+\alpha\|h\|_H^2 \\ & +\int_\Omega \eta\left[\rho(x)u_{tt}-\left(k(x)u_x\right)_x-F(x,t)\right]dxdt.\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

şeklindedir. Burada $u(x,t)$ fonksiyonuna $\delta u(x,t)$ artımını ve $h(t)$ fonksiyonuna da $\delta h(t)$ artımı verelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\tilde{J}_\alpha(\delta h) = {} & \beta_1\int_0^T\left[(u+\delta u)(0,t)-y_1(t)\right]^2 dt+\beta_2\int_0^T\left[(u+\delta u)(l,t)-y_2(t)\right]^2 dt+\alpha\|h+\delta h\|_H^2 \\ & +\int_\Omega \eta\left[\rho(x)(u+\delta u)_{tt}-\left(k(x)(u+\delta u)_x\right)_x-F(x,t)\right]dxdt.\end{aligned}$$

fonksiyoneli elde edilir. Bu fonksiyoneli (4.2.1) ile verilen fonksiyonelden çıkarırsak,

$$\begin{aligned}\delta\tilde{J}_\alpha(h) &= 2\beta_1\int_0^T\left[u(0,t)-y_1(t)\right]\delta u(0,t)\,dt+\beta_1\int_0^T\left[\delta u(0,t)\right]^2 dt\\ &+2\beta_2\int_0^T\left[u(l,t)-y_2(t)\right]\delta u(l,t)\,dt+\beta_2\int_0^T\left[\delta u(l,t)\right]^2 dt\\ &+\int_\Omega\eta\left[\rho(x)\delta u_{tt}-\left(k(x)(\delta u)_x\right)_x\right]dxdt\\ &+\alpha\|h+\delta h\|_H^2-\alpha\|h\|_H^2 .\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

fark fonksiyoneli elde edilir. Burada eşitliğin sağ tarafında bulunan 5. integral için kısmi integrasyon uygularsak.

$$\begin{aligned}\int_\Omega\rho(x)\delta u_{tt}\eta\,dtdx &= \int_0^l\rho(x)\left\{\delta u_t\eta\Big|_0^T-\int_0^T\delta u_t\eta_t\,dt\right\}dx\\ &=\int_0^l\rho(x)\left\{\delta u_t\eta\Big|_0^T-\left\{\delta u\eta_t\Big|_0^T-\int_0^T\delta u\eta_{tt}\,dt\right\}\right\}dx\\ &=\int_0^l\rho(x)\delta u_t(x,T)\eta(x,T)\,dx-\int_0^l\rho(x)\delta u_t(x,0)\eta(x,0)\,dx\\ &-\int_0^l\rho(x)\delta u(x,T)\eta_t(x,T)\,dx+\int_0^l\rho(x)\delta u(x,0)\eta_t(x,0)\,dx\\ &+\int_\Omega\rho(x)\delta u\eta_{tt}\,dtdx\end{aligned}$$

yazarız. (4.1.7) ifadesinden $\delta u(x,0)=0$ ve $\delta u_t(x,0)=0$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca $\eta(x,T)=0$ ve $\eta_t(x,T)=0$ olduğunu varsayarsak yukarıdaki eşitlik

$$\int_\Omega\rho(x)\delta u_{tt}\eta\,dtdx=\int_\Omega\rho(x)\delta u\eta_{tt}\,dtdx$$

şekline dönüşür. Benzer şekilde diğer kısmi integrasyon işlemini de gerçekleştirelim.

$$\int_{\Omega}\eta\left(k(x)(\delta u)_x\right)_x dxdt=\int_0^T\left\{k(x)\delta u_x\eta\Big|_0^l-\int_0^l k(x)\delta u_x\eta_x dx\right\}dt$$
$$=\int_0^T\left\{k(x)\delta u_x\eta\Big|_0^l-\left\{k(x)\delta u\eta_x\Big|_0^l-\int_0^l\delta u\left(k(x)\eta_x\right)_x dx\right\}\right\}dt$$
$$=\int_0^T k(l)\eta(l,t)\delta u_x(l,t)dt-\int_0^T k(0)\eta(0,t)\delta u_x(0,t)dt$$
$$-\int_0^T k(l)\eta_x(l,t)\delta u(l,t)dt+\int_0^T k(0)\eta_x(0,t)\delta u(0,t)dt$$
$$+\int_{\Omega}\delta u\left(k(x)(\delta\eta)_x\right)_x dxdt$$

yazılır. (4.1.8) ifadesinden $k(0)\delta u_x(0,t)=\delta f$ ve $k(l)\delta u_x(l,t)=\delta g$ olduğu bilindiğinden yukarıdaki eşitlik

$$\int_{\Omega}\eta\left(k(x)(\delta u)_x\right)_x dxdt=\int_0^T\eta(l,t)\delta g dt-\int_0^T\eta(0,t)\delta f dt$$
$$-\int_0^T k(l)\eta_x(l,t)\delta u(l,t)dt+\int_0^T k(0)\eta_x(0,t)\delta u(0,t)dt$$
$$+\int_{\Omega}\delta u\left(k(x)(\delta\eta)_x\right)_x dxdt$$

şeklinde yeniden düzenlenir. Bu bilgileri kullanarak (4.2.2) eşitliğini yeniden yazdığımızda

$$\delta\tilde{J}_{\alpha}(h)=2\beta_1\int_0^T\left[u(0,t)-y_1(t)\right]\delta u(0,t)dt+2\beta_2\int_0^T\left[u(l,t)-y_2(t)\right]\delta u(l,t)dt$$
$$+\int_{\Omega}\left[\rho(x)\eta_{tt}-\left(k(x)(\delta\eta)_x\right)_x\right]\delta udxdt-\int_0^T\eta(l,t)\delta g dt+\int_0^T\eta(0,t)\delta f dt$$
$$+\int_0^T k(l)\eta_x(l,t)\delta u(l,t)dt-\int_0^T k(0)\eta_x(0,t)\delta u(0,t)dt$$
$$+2a\int_0^T f\delta f dt+2a\int_0^T g\delta g dt.$$

elde ederiz. Benzer terimler aynı integral altında toplanıp artım fonksiyoneli düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\delta\tilde{J}_\alpha(h)=&\int_0^T\left[2\beta_1\left(u(0,t)-y_1(t)\right)-k(0)\eta_x(0,t)\right]\delta u(0,t)\,dt\\&+\int_0^T\left[2\beta_2\left(u(l,t)-y_2(t)\right)+k(l)\eta_x(l,t)\right]\delta u(l,t)\,dt\\&+\int_\Omega\left[\rho(x)\eta_{tt}-\left(k(x)\eta_x\right)_x\right]\delta u\,dx\,dt\\&+\int_0^T\left[\eta(0,t)+2\alpha f\right]\delta f\,dt+\int_0^T\left[-\eta(l,t)+2\alpha g\right]\delta g\,dt.\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

eşitliği elde edilir.

Bir h elemanının optimal çözüm olabilmesi için $\delta\tilde{J}_\alpha(h)=0$ şartını(stasyonerlik şartı) sağlaması gerekir. Bu şartı (4.2.3) ile verilen fonksiyonelde değerlendirelim.

δu keyfi bir artım olduğundan (4.2.3) ile verilen fonksiyonelin sağ tarafındaki ilk üç integralin sıfır olması için

$$\begin{aligned}\rho(x)\eta_{tt}-\left(k(x)\eta_x\right)_x&=0\\k(0)\eta_x(0,t)&=2\beta_1\left(u(0,t)-y_1(t)\right)\\k(l)\eta_x(l,t)&=-2\beta_2\left(u(l,t)-y_2(t)\right)\\\eta(x,T)=0,\ \ \eta_t(x,T)&=0.\end{aligned}\tag{4.2.4}$$

şartlarının sağlanması gerekir. Bu şartlar eşlenik sınır değer problemi olarak adlandırılır.

Eşlenik sınır değer probleminin çözümü denilince, $\forall\ \phi\in H^1(\Omega)$ için

$$\int_0^T\int_0^l\left[\rho(x)\eta_t\phi_t - k(x)\eta_x\phi_x\right]dxdt = 2\beta_1\int_0^T\left[u(0,t)-y_1(t)\right]\phi(0,t)\,dt$$
$$+2\beta_2\int_0^T\left[u(l,t)-y_2(t)\right]\phi(l,t)\,dt - \int_0^l \rho(x)\eta_t(x,0)\phi(x,0)\,dx \tag{4.2.5}$$

integral eşitliğini sağlayan $\eta \in H^1(\Omega)$ fonksiyonu anlaşılır.

Eşlenik sınır değer probleminden faydalanılarak (4.2.3) ifadesi, Euler denklemi denilen

$$\tilde{J}'_\alpha(h)\delta h = \int_0^T\left[\eta(0,t)+2\alpha f\right]\delta f dt + \int_0^T\left[-\eta(l,t)+2\alpha g\right]\delta g dt \tag{4.2.6}$$

eşitliğini verir. Buradan

$$J'_\alpha(h) = \left\{\eta(0,t)+2\alpha f, -\eta(l,t)+2\alpha g\right\} \tag{4.2.7}$$

elamanı fonksiyonelin türevi (gradyeni) olarak elde edilir.

4.3. Optimal Çözümün Elde Edilişi

Bu tezde ele alınan türdeki optimal kontrol problemleri için optimal çözümler genellikle analitik olarak elde edilemez. Bu yüzden optimal çözümler nümerik metotlar kullanılarak yaklaşık olarak hesaplanır. Bu bölümde gradyen metodu ile optimal çözümün yaklaşık olarak nasıl hesaplanacağını ele alacağız.

Gradyen Metodunun aşamaları şöyledir. Öncelikle $h_0 \in H$ başlangıç elemanı seçilir ve sırasıyla aşağıdaki işlemler gerçekleştirilir.

1. (3.1.1)-(3.1.3) hiperbolik probleminin (3.1.7) eşitliğini sağlayan u_0 çözümü bulunur.

2. Bulunan u_0 çözümü kullanılarak, (4.2.4) eşlenik problemin η_0 çözümü bulunur.

3. Eşlenik problemin çözümü kullanılarak, (4.2.7) ile verilmiş $J'_\alpha(h_0)$ gradyeni hesaplanır.

4. Bu gradyen kullanılarak

$$h_1 = h_0 - \beta_0 J'_\alpha(h_0) \tag{4.3.1}$$

elemanı hesaplanır. Burada $\beta_0 > 0$ sayısı

$$J_\alpha(h_1) - J_\alpha(h_0) = \beta_0\left[-\left\|J'_\alpha(h_0)\right\|^2 + \frac{o(\beta_0)}{\beta_0}\right] < 0 \tag{4.3.2}$$

şartını sağlayacak şekilde yeterince küçük olarak seçilir.

h_1 elemanı bulunduktan sonra tekrar 1. aşamaya dönülerek sonraki elemanlar aynı prosedür ile hesaplanır.

Yani minimalleştirici dizinin genel gösterimi

$$h_{k+1} = h_k - \beta_k J'_\alpha(h_k), \quad k = 0,1,\ldots \tag{4.3.3}$$

şeklinde olup fonksiyonelin minimalleşme işlemi de

$$J_\alpha(h_{k+1}) - J_\alpha(h_k) = \beta_k\left[-\left\|J'_\alpha(h_k)\right\|^2 + \frac{o(\beta_k)}{\beta_k}\right] < 0 \tag{4.3.4}$$

şartını sağlayan $\beta_k > 0$ sayılarının bulunması esasına dayanır.

Yeteri kadar küçük β_k sayıları için $\dfrac{o(\beta_k)}{\beta_k} \to 0$ olacağından (4.3.4) ile verilen eşitliğin sağ tarafının sıfırdan küçük olacağı açıktır. Bu durum da

$$J_\alpha\left(h_{k+1}\right) < J_\alpha\left(h_k\right)$$

eşitsizliğini gerektireceğinden (4.3.3) ile verilmiş $\{h_{k+1}\}$ dizisi minimalleştirici dizi olacaktır.

Bu ardışık hesaplama işlemi

$$\left|J_\alpha\left(h_{k+1}\right) - J_\alpha\left(h_k\right)\right| < \varepsilon$$

kriteri ile durdurulur.

5. SONUÇ

Bu tezde incelenen, bir telin titreşiminde uç noktaların istenilen konumlarda olabilmesi için bu uç noktalara uygulanacak kuvvetin kontrol edilmesi problemi literatürdeki bu türde olan optimal kontrol problemlerinden oldukça farklıdır.

Tezde her iki uça uygulanması gereken kuvvetler tek bir fonksiyon olarak temsil edilmiştir. Bu durumda bu fonksiyonun ürettiği hedefe yaklaştırma ölçüleri uçlara göre ayrı fonksiyonellerle yazılmıştır. Bu durum amaç fonksiyonelinin türevinin (gradyeninin) bir fonksiyon çifti olarak ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Gradyenin hesaplanabilmesi çalışılan optimal kontrol probleminin anlamlı olduğunu göstermesi açısından oldukça önemlidir.

Optimal çözüme ulaşma aşamasında da her iki uca uygulanması gereken kuvvetin bir tek fonksiyon olarak tanımlanıp, bu tanımdan faydalanarak minimalleştirici dizi kurulması optimal çözüme yakınsama açısından büyük bir kolaylık sağlamıştır. Böylece bu yaklaşım optimal kontrolün elde edilmesini oldukça kolaylaştırmıştır.

KAYNAKLAR

Bamberger, A., Chavent G. and Lailly P., 1979. About the stability of the inverse problem in 1-D wave equations, application to the interpretation of seismic profiles. Applied Mathematics and Optimization, 5, 1-47.

Cipolatti, R. and Lopez I. F., 2005. Determination of coefficients for a dissipative wave equation via boundary measurements. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 306, 317-329.

Clason, C., 2006. A direct method for the numerical time reversal of waves in a heterogeneous medium. Ph. D. Thesis, Technische Universitat München, Zentrum Mathematik, München.

Hasanoğlu, A., 2010. Kısmi Türevli Denklemler. Literatür Yayıncılık, İstanbul.

İskenderov, A. D., Tagiev R. G. and Yagubov G. Ya., 2002. Optimalleştirme Usülleri. Çaşoğlu, 376 p, Bakü.

Ladyzhenskaya, O. A., 1985. Boundary Value Problems in Mathematical Physics, Springer-Verlag, 322 p, New York.

Lebedev L.P., Vorovich I.I. and Gladwell G.M.L., 1996. Functional Analysis Applications in Mechanics and Inverse Problems, Kluwer Academic Publishers, 55-56, New York.

Lions, J.L., 1971. Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations. Springer-Verlag, 100 p, New York.

Shcheglov, A. Yu. and Viktorova I. V., 2004. Numerical Reconstitution of a Nonlinear Source in a Hyperbolic Equation. Numerical Functional Analysis and Optimization, 25 (1), 137–150.

Subaşı, M., Saraç, Y. and Kaçar, A., 2012. A variational technique for optimal boundary control in a hyperbolic problem, Applied Mathematics and Computation, 218, 6629–6636.

Thomas, G.B.,Weir M.D. and Hass J.R., 2005. Calculus, Addison-Wesley, 805 p, United States.

Vasilyev, F. P., 1988. Numerical Methods for Solving Extremal Problems, 550 p, Nauka, Moscow, Russia.

Yamamoto, M., 1995. Stability, reconstruction formula and regularization for an inverse source hyperbolic problem by a control method. Inverse Problems, 11 (2), 481-496.

Yeloğlu, T. and Subaşı, M., 2010. Simultaneous control of the source terms in a vibrational string problem, Iranian Journal of Science &Technology, Transaction A, 34 (1).

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Ankara'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Ankara'da tamamladı. 2001 yılında Gazi Üniversitesi Matematik Bölümü'nde yüksek öğrenimine başlayarak, 2006 yılında mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında yüksek lisans eğitimine başlayarak 2009 yılında mezun olmuştur. 2012 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik alanında doktora öğrenimine başladı.