GRADİENT İÇEREN $p(x)$ LAPLACİAN DENKLEMİ İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN MOUNTAİN PASS VE İTERASYON TEKNİKLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Ebubekir AKKOYUNLU

Yüksek Lisans Tezi Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT
2017

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GRADİENT İÇEREN $p(x)$ LAPLACİAN DENKLEMİ İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN MOUNTAİN PASS ve İTERASYON TEKNİKLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Ebubekir AKKOYUNLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2017

TEZ ONAY FORMU

GRADİENT İÇEREN $p(x)$ LAPLACİAN DENKLEMİ İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN MOUNTAİN PASS ve İTERASYON TEKNİKLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Prof. Dr. Sezgin AKBULUT danışmanlığında, Ebubekir AKKOYUNLU tarafından hazırlanan bu çalışma 09/01/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	*İmza*	:
Üye	: Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR	*İmza*	:
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Muhammed YİĞİDER	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulunun ..12../..01.../..2017.... tarih ve ..02../..26....... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRADİENT İÇEREN $p(x)$ LAPLACİAN DENKLEMİ İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN MOUNTAİN PASS ve İTERASYON TEKNİKLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Ebubekir AKKOYUNLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

Bu tezin ilk bölümünde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzayların tarihsel gelişimi ve standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerin fiziksel uygulamaları hakkında genel bilgi verilmiştir. Ayrıca bu bölümde standart olmayan büyüme koşullu diferansiyel denklemlerle ilgili yapılmış olan çalışmalar ele alınmıştır.

İkinci bölümde, tez çalışmamız ile ilgili temel tanımlar ve teoremlerin yanı sıra değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylar tanıtılmıştır.

Üçüncü bölümde Varyasyonel yaklaşım ve bu yaklaşımla ilgili temel tanımlar ve teoremler ile varyasyonel yaklaşımda kullanılan yöntemler tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde Mountain Pass ve Iterasyon Teknikleri kullanılarak Gradient içeren $p(x)$ Laplacian denklemi için Dirichlet probleminin çözümü verilmiştir.

Beşinci bölümde çalışmamızla ilgili sonuçlar sunulmuştur.

2017, 104 sayfa

Anahtar Kelimeler: Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev Uzayları, Standart Olmayan Büyüme Koşulu, Varyasyonel Yaklaşım, Mountain Pass Tekniği

ABSTRACT

MS Thesis

THE SOLUATION OF DIRICHLET PROBLEM FOR $\boldsymbol{p(x)}$ LAPLACIAN INVOLVING GRADIENT VIA MOUNTAİN PASS AND ITERATION TECHNIQUES

Ebubekir AKKOYUNLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Analysis and Function Theory Department

Supervisor: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT

The first chapter of this thesis presents an overview about physical applications of non-standart growth conditions in differential equations and the historical development of variable exponent Lebesgue, Sobolev spaces. Moreover, a brief information are given about the studies of the related non-standart growth conditions differential equations.

The second chapter introduces the basic definitions and theorems as well as Lebesgue and Sobolev spaces which are related to the work done in this thesis.

In the third part, the variational approach and basic definitions and theorems related to this approach and the methods used in the variational approach are introduced.

In the fourth chapter, the solution of the Dirichlet problem for the $p(x)$-Laplacian equation involving Gradient is given using Mountain Pass and Iteration Techniques.

The results of our study in the fifth section are presented.

2017, 104 pages

Keywords: Lebesgue and Sobolev Spaces, Non-Standart Growth Condition, Variational Approach, Mountain Pass Technic.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyen çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sezgin AKBULUT'a, Sayın Prof. Dr. Rabil AYAZOĞLU'na ve tezimin hazırlanması sürecinde Matematik bölümünde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Matematik bölüm başkanı Sayın Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR'e en içten dileklerimle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında sağladıkları destek ve fedakârlıklarından dolayı aileme teşekkür ederim.

Ebubekir AKKOYUNLU
Aralık,2016

SİMGELER

$\mathbb{R}^N$,	N boyutlu Euclid (Öklit) Uzayı
$\bar{A}$,	A kümesinin kapanışı
∂A ,	A kümesinin sınırı
$\|u\|$,	u'nun normu
X^*,	X uzayının duali
$C(\Omega)$,	Ω bölgesinde sürekli fonksiyonlar uzayı
$\mathrm{B_r}(a)$,	a merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$\overline{\mathrm{B_r}}(a)$,	a merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
$\sigma_r(a)$,	a merkezli ve r yarıçaplı yuvar yüzeyi
$L^p(\Omega)$,	Ω bölgesinde p. mertebeden integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L^{p(x)}(\Omega)$,	Değişken üslü Lebesgue uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$,	Sobolev uzayı
$W^{m,p(x)}(\Omega)$,	Değişken üslü Sobolev uzayı
∇ ,	Gradient operatörü
Δ_p,	p-Laplace operatörü

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Son yıllarda, standart olmayan büyüme koşullu ($p(x)$ büyüme koşullu) kısmi diferansiyel denklemlere ve varyasyonel integrallere olan ilgi artmıştır. Bu ilgi, onların uygulama alanlarında rol alan elastik mekanik, akışkanlar dinamiği, varyasyonel hesaplamalar ve Non-Newtonian akışkanların matematiksel modelleri olan Electroreheolojik akışkanlar üzerine yoğunlaşmıştır (Bocardo vd 1990; Acerbi 2000; Diening 2002; Harjulehto vd 2006; Hästö 2007; Mihăilescu ve Rădulescu 2007; Harjulehto ve Hästö 2008; Buhrii 2009).

Electroreheolojik (ER) akışkanlar, iletkenlik özelliği olmayan akışkanların içine küçük parçacıklara ayrılmış polarize olabilen taneciklerin eklenmesiyle oluşturulurlar. Elektrotlar arasından akan böyle bir karışıma dışarıdan elektrik alan uygulandığında katı hale geçebilme, elektrik alan uzaklaştırıldığında ise çok kısa bir sürede sıvı hale geçebilme gibi akışkanın reolojik davranışlarında büyük oranda tersinir (kimyasal, fiziksel ve mekanik olarak geri dönüştürülebilen) değişiklikler meydana gelir. ER akışkanlar teorisiyle ilgili ilk önemli bilgilere Winslow (1949) makalesinde rastlanmaktadır. Bu akışkanların kendi içlerindeki bağıl devinime gösterdikleri direnme özelliği (viscosity) akışkana uygulanan elektrik alanına bağlıdır. Winslow, bu akışkanlarda bir elektrik alanındaki viscosity'nin, alanın kuvveti ile ters orantılı olduğunu tespit etmiştir. Bu olay Winslow etkisi olarak bilinir. Elektroreheoloji olayı uzun yıllardır bilinmektedir, fakat son yıllarda bu akışkanlara olan ilgi daha da artmıştır. Günümüzde ER akışkanlar otomobil subapları, debriyajlar, damperler, hidrolik ve robot sistemleri gibi farklı alanlarda kullanılmaktadır. Ayrıca ER akışkanların kumaşın içine derinlemesine işleme ve kumaşın normal durumundan çok daha katı (dayanıklı) hale çok hızlı bir şekilde dönüşmesi özelliklerinden faydalanarak şu ankinden çok daha hafif olan kurşun geçirmez yelekler üretilmesi amaçlanmaktadır. Bununla birlikte ER akışkanların, sarılabilir/döndürülebilir ekranlar ve keypadler ile birlikte kullanılarak ihtiyaç duyulduğunda katı hale getirilebilen, ihtiyaç olmaması durumunda ise esnekleşerek sarılabilir/döndürülebilir hale getirilebilen 'esnek elektronik cihazlar' üretimi için de kullanılabileceği öngörülmektedir.

Non-Newtonian akışkan olarak da bilinen ER akışkanlar, standart olmayan büyüme koşullu denklemlerle ilgili çalışmalar içerisinde ayrı bir öneme sahiptir. ER akışkanlara karşılık gelen matematiksel modeller, standart olmayan büyüme koşullu denklem türündedir.

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ için

$$\int_\Omega F\big(x, \nabla u(x)\big)dx$$

integralinde $F(x,t)$ fonksiyonu; $p: \Omega \to (1,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$|t|^{p(x)} \leq F(x,t) \leq c\big(|t|^{p(x)} + 1\big) \tag{1.1}$$

şeklinde olursa, $F(x,t)$ fonksiyonuna nonstandart büyüme koşullu veya standart olmayan büyüme koşullu yada $p(x)$-büyüme koşullu fonksiyon denir. Nonstandart büyüme koşullu fonksiyonları bulunduran denklemlere de nonstandart büyüme koşullu denklemler denir.

Eğer $F(x,t)$ fonksiyonu; $p, q: \Omega \to (1,\infty)$, $1 < p(x) < q(x)$ şeklindeki ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$|t|^{p(x)} \leq F(x,t) \leq c\big(|t|^{q(x)} + 1\big) \tag{1.2}$$

şeklinde olursa, $F(x,t)$ fonksiyonuna $\big(p(x), q(x)\big)$-büyüme koşullu fonksiyon denir (Marcellini 1991).

$|t|^{p(x)-2}t = |t|^{p(x)-1}\mathrm{sgn}t$ ve $p(x)$ >1 olmak üzere, $p(x)$-Laplace operatörü

$$\Delta_{p(x)}u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right)^2\right)^{\frac{p(x)-2}{2}} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)$$

şeklinde veya

$$\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right| = \langle\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right)^2\right)^{1/2}$$

alınarak

$$\Delta_{p(x)}u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2}\frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\right) = \operatorname{div}\left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\right)$$

biçiminde tanımlanır.

$$\int_{\Omega} F\big(x, \nabla u(x)\big)dx$$

enerji integrali $p(x)$-büyüme koşuluna sahip iken, $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)}dx$ olarak alındığında

$$\frac{\partial F\big(x, \nabla u(x)\big)}{\partial u(x)} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F\big(x, \nabla u(x)\big)}{\partial\big(\nabla u(x)\big)}\right) = 0$$

olarak ifade edilen Euler-Lagrange denklemine göre tasarlanırsa

$$\Delta_{p(x)}u = \operatorname{div}\left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\right) = 0 \qquad (1.3)$$

şeklinde tanımlanan ve $p(x)$-Laplace denklemi olarak isimlendirilen nonlinear ve non homojen denklem elde edilir. $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^{p(x)}dx$ integralinde $p(x) = p = sabit$ olarak alınırsa

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\big(|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\big) = 0 \qquad (1.4)$$

şeklindeki nonlinear ve homojen p-Lapalce denklemi elde edilir. Eğer (1.3) denkleminde $p(x) = 2$ olarak alınırsa

$$\Delta u = \operatorname{div}\big(\nabla u(x)\big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = 0 \qquad (1.5)$$

lineer ve homojen Laplace denklemi elde edilir.

Yukarıda ifade edilen (1.3), (1.4) ve (1.5) denklemleri arasında bazı yapısal farklılıklar vardır. (1.5) de verilen Laplace denklemi lineerdir, yani eğer u ve v fonksiyonları (1.5) denklemi için bir çözüm ise, α ve β sabitleri için, $\alpha u+\beta v$ fonksiyonu da (1.5) denkleminin çözümü olur. p-Laplace denklemi ise $p \neq 2$ durumunda lineer değildir; ancak $scalable$'dir, yani genel olarak $u+v$ fonksiyonu (1.4) denkleminin bir çözümü değilken $\alpha u+\beta$ fonksiyonu (1.4) denklemi için çözüm olabilmektedir. $p(x)$-Laplace denkleminin lineer olmama durumu p-Laplace denklemine göre çok daha güçlüdür. Bundan dolayı (1.4) denkleminin çözümü olan $\alpha u+\beta$ fonksiyonunun (1.3) denkleminin çözümü olabilmesi için öncelikle $\lambda=\pm 1$ olmalıdır. Ayrıca p-Laplace operatörü $(p-1)$. dereceden homojendir, yani her $\lambda>0$ değeri için $\Delta_p(\lambda u)=\lambda^{p-1}\Delta_p u$ eşitliğini sağlar, ancak $p(x) \neq sabit$ iken $p(x)$-Laplace operatörü nonhomojendir. $p(x)$-Laplace operatörü homojen olmadığından dolayı bazı uygulamalar (Lagrange Çarpanlar teorisi gibi) $p(x)$-Laplace operatörü bulunduran denklemlere uygulanamaz.

M.Růžička (2000), katsayıları değişken büyüme oranlı doğrusal olmayan sistem içeren electroreheolojik akışkanlar (EA) için matematiksel model üzerinde çalışmıştır. Elektromanyetik alanlar ile hareketli akışkanlar arasındaki etkileşimi ifade eden bu model aşağıda (1.6) da verilmiştir;

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\operatorname{div}S(u)+(u.\nabla)u+\nabla\pi=f \tag{1.6}$$

Bu modellemede $u: R^{3+1} \rightarrow R^3$, akışkanın hızını veren fonksiyonu; $\nabla=(\partial_1,\partial_2,\partial_3)$, gradient operatörünü; $\pi: R^{3+1} \rightarrow R$, basınç fonksiyonunu; $f: R^{3+1} \rightarrow R^3$, harici kuvvetleri temsil eden fonksiyonu gösterir. $S: W_{loc}^{1,1} \rightarrow R^{3\times 3}$ fonksiyonu

$$S(u)(x)=\mu(x)(1+|Du(x)|^2)^{\frac{p(x)-2}{2}}Du(x) \tag{1.7}$$

olarak ifade edilen ekstra stres tensörüdür. (1.7) de yer alan $Du=\frac{1}{2}(\nabla u+\nabla u^T)$, u fonksiyonunun gradientinin simetrik kısmı ve μ bir ağırlık fonksiyonudur. Yukarıda verilen stres tensöründe p üssü, fonksiyon (değişken) olarak alınmıştır. (1.6) denklemi bilinen laplace denklemlerinden daha karmaşık olmasına rağmen, en yüksek mertebeden türeve sahip terim için, $\lambda=1$ olarak alındığında elde edilen

$$\operatorname{div}\left((\lambda+|Du(x)|^2)^{(p(x)-2)/2}Du(x)\right) \tag{1.8}$$

ifadesi $p(x)$-Laplace denklemine çok benzerdir. (1.8) denkleminde $\lambda = 0$ alındığında $\Delta_{p(x)} u = \operatorname{div}\left(|\nabla u(x)|^{p(x)-2}\nabla u(x)\right) = 0$ şeklindeki $p(x)$-Laplace denklemine dönüşür.

ER akışkanlar belirli bir manyetik alanla karşılaştıklarında bu akışkanların parçacıkları hareket esnasında belli bir miktar kütle kaybına uğramaktadırlar. Kaybolan bu kütle miktarını p kuvveti sabit iken $x \in \mathbb{R}^N$ nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca eşit kabul etmek zorunluluğu ortaya çıkmakta ve dolayısıyla bu farklı kütle kayıpları hesaba katılamamaktadır. Kaybolan bu kütle miktarını bu şekilde eşit kabul etmek ise bazı fizik, mekanik ve özellikle ER akışkanlarla ilgili problemlere karşılık gelen matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulamamasına sebep olmaktadır. Ancak; p kuvveti $p(x)$ şeklinde ölçülebilir pozitif reel değerli bir fonksiyon şeklinde seçilirse, $x \in \mathbb{R}^N$ nin farklı eksenlerdeki hareketleri boyunca ortaya çıkan farklı kütle kayıpları hesaba katılabilmekte bu da matematiksel modellerin yeterli doğrulukta oluşturulabilmesine imkân vermektedir. Dolayısıyla, ER akışkanlar teorisinden kaynaklanan standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemlere karşılık gelen matematiksel modeller ancak değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Sobolev uzaylarda oluşturulabilir ve incelenebilirler.

ER akışkanlarda Du, u hız alanının gradientinin simetrik kısmını ve p elektrik alanına bağlı materyal fonksiyonu göstermek üzere, altta yer alan enerjisi (etkin enerji) $\int_\Omega |Du|^{p(x)} dx$ ile verilir. (1.6) ile verilen modellemede p sabit iken etkin enerji $\int_\Omega |Du|^p dx$ ile ifade edilir. Bu durumda (1.7) deki stres tensöründe her bir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerler eşit kabul edilir. Böyle denklemler klasik Lebesgue (L^p) ve klasik Sobolev uzayları $(W^{m,p})$ kullanarak yeterli doğrulukla oluşturulabilir. Ancak; p kuvveti ölçülebilir pozitif gerçel değerli bir fonksiyon olarak seçildiğinde etkin enerji $\int_\Omega |Du|^{p(x)} dx$ ile ifade edilir. Bu durumda stres tensöründe herbir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerler farklı olur. Herbir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerlerin farklı olması non-homojen materyallerin doğal yapısıyla uyumluluk gösterir. Herbir $x \in \mathbb{R}^N$ için p kuvvetinin alacağı değerlerin farklı olması durumunda klasik

Lebesgue ve klasik Sobolev uzayları yetersiz kalır. Dolayısıyla değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Sobolev uzaylarına $\left(L^{p(x)}(\Omega) \text{ ve } W^{m,p(x)}(\Omega)\right)$ ihtiyaç duyulur.

Farklı bir uygulama alanı olan imaj iyileştirme işleminin matematiksel modellemesinde de değişken üslü uzayın önemini görebiliyoruz. Bu modellemede; düzlemdeki dikdörtgensel Ω bölgesi üzerinde tanımlanan I fonksiyoneli, gerçek görüntüyü temsil eden T ile istenmeyen noktacıklar (noise) tarafından bozulmuş gri (bulanık) alanları temsil eden η ifadelerinin toplamı olan $I = T + \eta$ $(T = \text{orijinal görüntü}, \eta = \text{noise})$ bir fonksiyoneldir. Görüntüyü düzeltebilmek için *veri girişi düzgünleştirme işlemi* uygulanır. Veri girişi düzgünleştirme işlemi

$$J_2(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^2 + |u(x) - I(x)|^2)\, dx$$

fonksiyoneli minimize yapılarak gerçekleştirilir. Burada $\int_{\Omega} |\nabla u(x)|\, dx$ terimi görüntüdeki iyileştirmeyi-düzgünleştirmeyi sağlayan terimdir. Bu işlem görüntüdeki ayrıntılara zarar verdiğinden kullanışlı bir yöntem değildir. İmaj iyileştirmede diğer bir yaklaşım *toplam varyasyon düzgünleştirme işlemidir.* Bu işlem

$$J_1(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u(x)|^1 + |u(x) - I(x)|^2)\, dx$$

fonksiyoneli minimize edilerek gerçekleştirilir. Bu yöntem görüntüdeki kenarların-hatların korunması-dağılmaması açısından çok kullanışlı bir yöntemdir. Ancak bu yöntem uygulandığında orijinal görüntüde bulunmayan yeni kenarlar meydana gelir. Dolayısıyla bu yöntemin de pek faydalı olduğu kabul edilmez.

Chen vd (2000) tarafından yukarıdaki iki yöntemin zayıf ve güçlü yanları birlikte değerlendirilerek, nonstandart büyüme koşuluna bağlı ve daha kullanışlı olan yeni bir yöntem üzerinde çalışılmıştır. Bu yöntem

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(|\nabla u(x)|^{p(x)} + |u(x) - I(x)|^2\right) dx$$

şeklindeki fonksiyonelin minimize edilmesine dayanır. Burada p, 1 ile 2 arasında değişen bir fonksiyon olmak üzere, eğer görüntüde kenarlar oluşuyorsa p nin değeri 1 sayısına, kenarlar oluşmuyorsa 2 sayısına yaklaşır. Bununla birlikte oluşabilme ihtimali bulunan kenarların yaklaşık yerini belirleyebilmek için veri girişi düzgünleştirilerek gradientin büyük olduğu yere bakılır.

Değişken üslü Lebesgue ($L^{p(x)}$) ve Değişken üslü Sobolev ($W^{m,p(x)}$) ($p(x)$ ölçülebilir pozitif gerçel değerli bir fonksiyon, $m > 0, m \in \mathbb{Z}$) uzayları literatürde ilk defa, Orlicz (1931) tarafından çalışılmıştır. Bu çalışmada aşağıdaki soru göz önüne alınmıştır: (p_k) ve (x_k) dizileri $\sum {x_k}^{p_k}$ yakınsak olacak şekilde reel sayıların iki dizisi olsun. Bu halde $\sum x_k y_k$ serisinin yakınsak olması için y_k üzerindeki gerek ve yeter koşullar nelerdir? Bu soruya yanıt, en az bir $\lambda > 0$ ve $p_k^{\iota} = \frac{p_k}{p_k - 1}$ için $\sum (\lambda y_k)^{p_k^{\iota}}$ serisinin yakınsak olması gerektiği ortaya çıkmaktadır. Orlicz aynı zamanda değişken üslü Lebesgue uzayını reel aralıkta göz önüne almıştır ve bu uzayda Hölder eşitsizliğini ispatlamıştır. Bu makaleden sonra Orlicz değişken üslü Lebesgue uzayını çalışmayı bırakıp, kendi ismi ile anılan Orlicz fonksiyon uzayları teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır. Orlicz uzayları u, Ω bölgesinde ölçülebilir gerçel değerli bir fonksiyon olmak üzere en az bir $\lambda > 0$ ve koşulları bilinen bir ϕ fonksiyonu için

$$\rho(\lambda u) = \int_{\Omega} \phi(\lambda |u(x)|) dx < \infty$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşur (Hudzik 1976). ρ fonksiyonuna bazı ek şartlar yüklenerek modüler uzay oluşturulur. Modüler uzaylar ilk defa sistematik olarak Nakano (1950,1951) tarafından çalışılmış ve değişken üslü Lebesgue uzayı daha genel uzayların bir örneği olarak göz önüne alınmıştır. Daha sonra, özellikle Musielak ve Orlicz (1959); Hudzik (1977); Hudzik (1979); Kami'nska (1982) tarafından modüler uzaylar incelenmiştir. Eğer yukarıdaki ϕ fonksiyonu x değişkenine de bağlı ise bu durumda ***genelleştirilmiş Orlicz uzayları*** veya ***Musielak Orlicz uzayları*** olarak isimlendirilen daha genel uzaylar elde edilir.

Reel aralıkta değişken üslü Lebesgue uzayları, özellikle Tsenov (1961) ve Sharapudinov (1979) olmak üzere Rus araştırmacılar tarafından geliştirilmiştir. Sharapudinov p, Ω bölgesinde ölçülebilir reel değerli bir fonksiyon, u sabit bir fonksiyon ve v, $L^{p(x)}([a\ b])$ nin sonlu boyutlu alt uzayında değişmek üzere,

$$\int_a^b |u(x)-v(x)|^{p(x)}\,dx$$

integralinin minimize problemiyle uğraşmıştır.

1980'li yılların ortasında Zhikov (1987) tarafından değişken üslü uzaylarla yakından ilişkili olan standart olmayan büyüme koşullu

$$\int_\Omega (1+|\nabla u(x)|^2)^{\alpha(x)} dx$$

şeklindeki varyasyonel integralini çalışmıştır ve $\alpha(x)$ Hölder sürekli ise regüler olmayan minimizelerinin olmadığını göstermiştir.

Marcellini (1989, 1991) ise

$$\int_\Omega F\big(\nabla u(x)\big) dx$$

varyasyonel integralleri için regülerlik problemlerini

$$c_1|\xi|^p \le F(\xi) \le c_2(1+|\xi|)^q,\ \xi \in R^n$$

ve $p<q$ koşulu altında incelemiştir. $p=q$ durumunda bu tip promlemlerin ele alınmasında Sobolev uzaylar teorisi $\big(W^{m,p}(\Omega)\big)$ doğal ve etkili bir yoldur. $p<q$ olduğu zaman durum dramatik bir biçimde değişir. Bu yüzden birçok problem klasik Lebesgue ve Sobolev uzayları kullanılarak yeterli doğrulukla matematiksel modellemesi yapılabilir. Fakat bazı homojen olmayan materyallerin altta yatan etkin enerjisinin (underlying energy) doğru bir şekilde ifade edilebilmesi için klasik Lebesgue ve klasik Sobolev uzayları yetersiz olur. Bu tip materyaller için p üssü değiştirilebilmelidir.

Değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının araştırılmasında bir sonraki büyük adım 90'lı yılların başlarında Kováčik ve Rákosník (1991) tarafından atılmıştır. Bu makalede $\mathbb{R}^N$ de değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının birçok temel özelliği ifade edilmiş ve O. Kováčik ve J. Rákosník, değerlerini $[1,\infty)$ aralığında alan p fonksiyonu için değişken üslü Lebesgue uzayının tanımını genişletmişlerdir.

Bu tanıma göre Ω, $\mathbb{R}^N$ de açık bir bölge olmak üzere $\Omega_\infty = \{x \in \Omega : p(x) = \infty\}$ olsun.

$$\rho(f) = \int_{\Omega/\Omega_\infty} |f(x)|^{p(x)} dx + \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega_\infty} |f(x)|$$

ve

$$\|f\|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{f}{\lambda}\right) \le 1\right\}$$

olarak alınsın. En az bir $\lambda > 0$ için $\rho(\lambda f) < \infty$ olacak şekilde tüm fonksiyonların sınıfına ***Değişken Üslü Lebesgue Uzayı*** adı verilir.

Ayrıca O. Kováčik ve J. Rákosník, Ω, $\mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge, $p : \overline{\Omega} \to [1, n)$ fonksiyonu sürekli ve

$$1 \le q(x) \le \frac{np(x)}{n - p(x)} - \varepsilon = p^*(x) - \varepsilon, \;\; 0 < \varepsilon < \frac{1}{n-1}$$

olmak üzere Sobolev tipli

$$\|u\|_{q(x)} \le c\|\nabla u\|_{p(x)}; \;\; u \in C_0^\infty(\Omega)$$

eşitsizliğini elde etmişlerdir.

Bu makaleden sonra uzun bir süre herhangi bir çalışma gözlenmemiştir. Son yıllarda çeşitli gelişmeler, değişken üslü uzayların sistematik ve yoğun biçimde incelenmesine yol açmıştır. Bu doğrultuda ilk önce değişken üslü uzaylarla standart olmayan büyüme koşulu ve coercive'lik özelliğine sahip varyasyonel integraller arasında ilişki kurulmuş ardından bu varyasyonel problemlerle electroreheolojik (ER) akışkanların matematiksel modellemesi arasındaki ilişki farkedilmiştir. Daha sonra varyasyonel integrallerle gözenekli ortamlarda akış (flow in porous media) ve lineer olmayan esneklik teorisi (nonlinear elasticity theory) gibi farklı fiziksel durumlarla da bağlantı kurulmuştur (Zhikov 1987; Antonsev ve Shmarev 2005).

Son yıllarda nonstandart büyüme koşuluna sahip diferansiyel denklemlerle ilgili yapılan çalışmalarda artış sözkonusudur. Sadece son on yıl içersinde 100 den fazla araştırmacı tarafından 300 den fazla çalışma yayımlanmıştır (Harjulehto vd 2010). Aşağıda şimdiye kadar yayınlanmış bazı önemli çalışmalara yer verilmiştir.

Fan (2005), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı açık bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1, p \in C(\overline{\Omega})$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda a_1(x)g_1(x,u) + \mu a_2(x)g_2(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip, nonstandart büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemi inceleyerek, varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisini, Fountain ve Dual Fountain teoremlerini kullanarak, denklemin Sublineer ve Superlineer durumlarını birlikte inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığını ve katlılığını göstermiştir.

Fan vd (2005) tarafından, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $p\colon \overline{\Omega} \to \mathbb{R}, \forall x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) > 1$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda |u|^{p(x)-2}u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip, nonstandart büyüme koşullu nonlineer eliptik denklemin özdeğerleri incelenerek, $N = 1$ ve $N > 1$ durumları için denklemin birinci özdeğerinin sıfırdan farklı olmasını sağlayan gerek ve yeter koşullar verilmiştir.

Alves ve Souto (2005), $p, q\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ büyüme koşullarını sağlayan ölçülebilir fonksiyonlar ve $0 < \lambda$ bir parametre olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u + u^{p(x)-1} = \lambda u^{q(x)}, & x \in \mathbb{R}^N \\ u \geq 0, \ \ u \neq 0, & u \in W^{1,p(x)}\,(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

şeklindeki nonstandart büyüme koşuluna sahip lineer olmayan eliptik denklemi inceleyerek, varyasyonel bir yaklaşımla Mountain Pass teoremini kullanıp, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin mevcut olduğunu göstermişlerdir.

Mihăilescu (2006), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ silindirik simetriye sahip sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1$, $p \in C(\overline{\Omega})$ ve $g\,(x, u)$ gerçel değerli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u(x) = -\mathrm{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\big) = g(x, u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına ve nonstandart büyüme koşuluna sahip lineer olmayan eliptik denklemi inceleyerek, $g(x, u) = h(x)|u(x)|^{q(x)-2}\,u$ ve $g(x, u) = h(x)|u\,(x)|^{q(x)-2} u + f(x, u)$ özel durumları için varyasyonel bir yaklaşımla Ekeland Varyasyonel prensibini ve Mountain Pass teoremini kullanıp, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu göstermiştir.

Boureanu (2006), $p\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ $(N \geq 3)$ Lipschitz-sürekli fonksiyon ve $\forall x \in \mathbb{R}^N$ için $p(x) \geq 2$, $b\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ ve $f\colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Big\{ -\Delta_{p(x)} u(x) + b(x)|u(x)|^{p(x)-2} u(x) = f(x, u), \ \ x \in \mathbb{R}^N, \ \ u \in W_0^{1,p(x)}\,(\mathbb{R}^N)$$

şeklindeki nonstandart büyüme koşuluna sahip lineer olmayan eliptik denklemi inceleyerek, varyasyonel bir yaklaşımla Mountain Pass teoremini kullanıp, denklemin Sublineer ve Superlineer durumlarını birlikte inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün mevcut olduğunu göstermiştir.

Calota (2008), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ düzgün sınıra sahip açık sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $q(x) > 1, q \in C(\overline{\Omega}),\ \lambda > 0, 1 < p < N$ ve $p^* = \frac{Np}{N-p}$ Sobolev kritik üs olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right) = \lambda |u|^{q(x)-2} u + |u|^{p^*-2} u, & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına ve nonstandart büyüme koşuluna sahip lineer olmayan eliptik denklemi inceleyerek, varyasyonel bir yaklaşımla Mountain Pass teoremini ve Ekeland prensibini kullanıp, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün mevcut olduğunu göstermiştir.

Ogras vd (2008), $\forall x \in \mathbb{R}^N$ için $1 < p(x), q(x) < N$ $(N \geq 2), p, q \in C(\overline{\Omega})$ ve $F \in C^1(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u = \dfrac{\partial F}{\partial u}(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N \\ -\Delta_{q(x)} u = \dfrac{\partial F}{\partial v}(x, u, v), & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

şeklindeki nonstandart büyüme koşuluna sahip nonlineer eliptik denklem sistemini inceleyerek, varyasyonel bir yaklaşımla Mountain Pass teoremini ve Cerami koşulunu kullanıp, denklemin Sublineer ve Superlineer durumlarını birlikte inceleyerek, denklem sisteminin sıfırdan farklı en az bir çözümünün mevcut olduğunu göstermişlerdir.

Zang (2008), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $\forall x \in \Omega$ için $p(x) > 1, p \in C(\overline{\Omega})$ olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u(x) = -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u\right) = f(x, u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına ve nonstandart büyüme koşuluna sahip lineer olmayan eliptik denklem üzerinde çalışmış, varyasyonel yaklaşımla Fountain Teoremini, Cerami ve AR koşullarını kullanıp, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığını göstermiştir.

Fan (2010) tarafından, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ üzerinde tanımlı iki fonksiyonel, a sıfır noktasında singülerliğe sahip olabilen bir fonksiyon ve $F(x,t)=\int_0^t f(x,s)ds$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\mathcal{A}(u)\Delta_{p(x)}u = \mathcal{B}(u)f(x,u), & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki lokal olmayan $p(x)$-Laplace Dirichlet denkleminin varyasyonel olmayan formu ve

$$\begin{cases} -a\left(\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\Delta_{p(x)}u = b\left(\int\limits_{\Omega}F(x,u)dx\right)f(x,u), & x\in\Omega \\ u=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki $p(x)$-Kirchhoff denkleminin varyasyonel formu incelenmiştir.

Mashiyev vd (2010) tarafından, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ $(N\geq 2)$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, $\forall x\in\Omega$ için $1<q(x)<p(x)<h(x)<p^*(x)=\frac{Np(x)}{N-p(x)}$ olacak şekilde $q,p,h\in C(\overline{\Omega})$ ve $a,b\in C(\overline{\Omega})$ fonksiyonları negatif olmayan ve Ω da kompakt destekli ağırlık fonksiyonları olmak üzere,

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u = \lambda a(x)|u|^{q(x)-2}u + b(x)|u|^{h(x)-2}u, & x\in\Omega \\ u(x)=0, & x\in\partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına ve nonstandart büyüme koşuluna sahip nonlineer eliptik denklem incelenerek, varyasyonel bir yaklaşımla denklemin Nehari manifold'u üzerinde, sıfırdan farklı en az iki çözümünün mevcut olduğu gösterilmiştir.

Mashiyev vd (2011) tarafından, $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, $\forall x\in\Omega$ için $p\in C(\overline{\Omega}), 1<p(x)<N, M:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ve $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bazı büyüme koşullarını sağlayan sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\begin{cases} -M\left(\int\limits_{\Omega} \dfrac{1}{p(x)}|\nabla u|^{p(x)}dx\right)\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki lokal olmayan $p(x)$-Laplace Dirichlet denklemi ($p(x)$-Kirchhoff denklemi) ele alınarak, varyasyonel yaklaşım ve Krasnoselskii Genus teorisi yardımıyla bu denklemin çözümlerinin varlığı ve çokluğu gösterilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ile uzaylar hakkında bilgi verilecektir.

2.1. Normlu Uzay ve İç Çarpım Uzayı

Tanım 2.1.1: X bir vektör uzay ve

$$\|\cdot\|: \mathrm{X} \to \mathbb{R}^{+} \cup \{0\}$$
$$x \longmapsto \|x\|$$

olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \iff x = 0,$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X de bir norm, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisinede **normlu uzay** denir. $x \in X$ elemanının normu $\|x\|$ şeklinde, X uzayında tanımlanan norm ise $\|\cdot\|_X$ şeklinde gösterilir. n-boyutlu $\mathbb{R}^N$ reel Euclid uzayında bir $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^N$ vektörünün normu

$$\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ile tanımlanır.

Tanım 2.1.2: $(x_n), (X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $n, m \geq n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\|_X < \varepsilon$ olacak şekilde ε'a bağlı bir $n_\varepsilon \in N$ sayısı varsa (x_n) dizisine **Cauchy dizisi** denir.

Teorem 2.1.3: Aşağıda verilen önermeler doğru önermelerdir:

i) Normlu uzaydaki her Cauchy dizisi sınırlıdır.

ii) Normlu uzaydaki her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

iii) (x_n) Cauchy dizisinin $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında $a \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi varsa (x_n) Cauchy dizisi de a'ya yakınsar.

iv) (x_n) ve (y_n), $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında birer Cauchy dizisi ise, $(x_n + y_n)$ dizisi de $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir Cauchy dizisidir (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.1.4: $(X, \|\cdot\|_X)$ bir normlu uzay olsun. Bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **tam normlu uzay** veya **Banach uzayı** denir.

Tanım 2.1.5: X vektör uzayında tanımlı skaler değerli fonksiyona **fonksiyonel** denir.

Eğer, f fonksiyoneli $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda f fonksiyoneli lineer olur.

Tanım 2.1.6: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayı üzerinde tanımlı bütün lineer ve sürekli fonksiyonellerden oluşan uzaya X vektör uzayının **dual uzayı** denir ve X^* ile gösterilir. Bu X^* dual uzayı $u, v \in X^*$ ve $c \in \mathbb{C}$; $(u + v)(x) = u(x) + v(x)$ (toplama) ve $(cu)(x) = cu(x)$ (skalerle çarpım) işlemleri ile bir vektör uzayıdır. Bu uzayda bir $u \in X^*$ elemanın normu

$$\|u\|_{X^*} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{|u(x)|}{\|x\|_X}$$

olarak tanımlanır. $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.7: X^* normlu uzayının duali olan $X^{**} = (X^*)^*$ vektör uzayına X uzayının **ikinci duali** denir. X^{**} ikinci dual uzayı da bir Banach uzay olur. Sabit bir $x \in X$ ve $u \in X^*$ için

$$g: X^* \to \mathbb{R} \text{ (veya } \mathbb{C}\text{)}$$
$$u \longmapsto g_x(u) = u(x)$$

olacak şekilde bir g_x fonksiyoneli olduğunu kabul edelim. $\forall x \in X$ için yalnız bir sınırlı lineer fonksiyonel karşılık geleceğinden,

$$T: X \to X^{**}$$
$$x \longmapsto T(x) = g_x(u)$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlanabilir. Bu tip dönüşümlere **kanonik dönüşüm** adı verilir. Eğer, bu dönüşüm üzerine ise X uzayına **yansımalı uzay** denilir. X yansımalı bir uzay ise $X = X^{**}$ olur.

Teorem 2.1.8: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayı yansımalı ise her alt uzayı da yansımalıdır (Musayev ve Alp 2000).

Tanım 2.1.9: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0'a **güçlü yakınsıyor** denir ve $x_n \to x_0$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.10: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve (x_n) de X de bir dizi olmak üzere, $\forall f \in X^*$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisi x_0'a **zayıf yakınsıyor** denir ve $x_n \rightharpoonup x_0$ ile gösterilir.

Teorem 2.1.11: (x_n), $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere,

i) (x_n) dizisi x_0'a zayıf yakınsak ise yakınsadığı x_0 değeri bir tanedir,

ii) (x_n) dizisi x_0'a zayıf yakınsak ise $\|x_n\|_X$ dizisi sınırlıdır,

iii) (x_n) dizisi x_0'a zayıf yakınsak ise (x_n) dizisinin her alt dizisi x_0'a zayıf yakınsaktır,

iv) (x_n) dizisi x_0'a güçlü yakınsak ise (x_n) dizisi x_0'a zayıf yakınsak olur. Bunun tersi genel olarak doğru değildir,

v) Boy$X < \infty$ ise (x_n) dizisinin x_0'a güçlü yakınsak olması için gerek ve yeter şart (x_n) dizisinin x_0'a zayıf yakınsamasıdır. Yani, sonlu boyutlu uzaylarda zayıf yakınsaklık ile güçlü yakınsaklık tanımları çakışır (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 2.1.12: (x_n), $(X, \|\cdot\|_X)$ yansımalı Banach uzayında sınırlı bir dizi ise bu dizinin X de zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır (Wang 2002).

Tanım 2.1.13: X normlu uzay ve $\|\cdot\|_1$ ile $\|\cdot\|_2$ bu uzayda tanımlı farklı iki norm olsun. $\forall x \in X$ için

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

olacak şekilde $c_1 > 0$ ve $c_2 > 0$ sabitleri varsa $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarına **denk normlar** denir.

Bir sonlu boyutlu vektör uzayında tanımlı normlar denk olduğundan dolayı, o uzay üzerinde aynı topolojiyi tanımlar. Yani, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları denk norm olduğunda X içinde $\|\cdot\|_1$ (veya $\|\cdot\|_2$) normuna göre yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi ise $\|\cdot\|_2$ (veya $\|\cdot\|_1$) normuna göre de yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir. Ayrıca, $(X, \|\cdot\|_1)$ $\big($veya $(X, \|\cdot\|_2)\big)$ bir Banach uzay ise $(X, \|\cdot\|_2)$ $\big($veya $(X, \|\cdot\|_1)\big)$ uzayı da bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.14: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay ve X in bir E alt kümesi verilsin. Eğer, E nin elemanlarından oluşan herbir (x_n) dizinin yakınsadığı değer X uzayının bir elemanı oluyorsa E kümesine X uzayında **yoğundur** denir.

Tanım 2.1.15: Bir $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının sayılabilir yoğun bir alt kümesi varsa $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına **ayrılabilir uzay** denir.

Teorem 2.1.16: $(X, \|\cdot\|_X)$ ayrılabilir yansımalı bir Banach uzay ve (x_n), X^* da sınırlı bir dizi ise bu dizi X^* da zayıf yakınsak bir alt diziye sahiptir (Wang 2002).

Teorem 2.1.17: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzayı olmak üzere X uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter şart X^* uzayının yansımalı olmasıdır. Eğer X ayrılabilir uzay ise, X^* da ayrılabilir uzaydır. Bu durumda, X uzayı ayrılabilir ve yansımalı bir uzay ise X^* uzayı da ayrılabilir ve yansımalı bir uzaydır (Adams 1975).

Tanım 2.1.18: X, K ($K = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzay olmak üzere, $\langle .,. \rangle : X \times X \to K$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

i) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

iii) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

iv) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

şartlarını sağlıyorsa $\langle .,. \rangle$ ye X de bir iç çarpım ve $(X, \langle .,. \rangle)$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** adı verilir. $K = \mathbb{R}$ olması durumunda **ii)** özelliği $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ şeklindedir.

$X, \langle .,. \rangle$ iç çarpım uzayında bir x vektörünün normu,

$$\|x\|_X = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır.

n-buyutlu $\mathbb{R}^N$ reel Euclid uzayındaki $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ vektörlerinin iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle = \sum x_j y_j$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.19: $(X, \langle .,. \rangle)$ iç çarpım uzayı bir Banach uzay ise, bu uzaya **Hilbert uzayı** denir.

Tanım 2.1.20: X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ olsun. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

şeklindeki bir toplama $x_1, x_2, \dots, x_n$ nin lineer birleşimi denir. $M \neq \emptyset \subset X$ ise M den alınan her sonlu sayıdaki vektörün lineer birleşimlerinin kümesine M nin **gereni (span)** denir ve Span$M$ olarak gösterilir. Span$M$, X in bir alt uzayıdır.

2.2. Süreklilik ve Sürekli Fonksiyonlar Uzayı

Tanım 2.2.1: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge ve $u: \Omega \to \mathbb{R}^N$ de tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve $x, x_0 \in \Omega$ elemanları için $|x - x_0| < \delta$ iken $|u(x) - u(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde yalnız ε'a bağlı pozitif bir δ sayısı varsa $u(x)$ fonksiyonuna $x = x_0$ **noktasında süreklidir** denir.

Ω bölgesinde tanımlı bütün sürekli fonksiyonlardan oluşan kümeye **sürekli fonksiyonlar uzayı** denir ve $C^0(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2: $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ negatif olmayan α_j lerin n-bileşenlisi ise α ya **çoklu indis** denir ve $|\alpha| = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$ şeklinde yazılabilir.

Buna göre $1 \leq j \leq n$ için $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ ise, o zaman $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$ ifadesi $|\alpha|$. mertebeden bir diferansiyel operatör belirtir. Bu durumda herhangi bir u fonksiyonunun $|\alpha|$. mertebeden türevi

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

şeklinde, u fonksiyonunun gradienti

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

şeklinde, u fonksiyonunun gradientinin normu

$$|\nabla u| = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3: $\overline{G}$, $G \subset \mathbb{R}^N$ nin kapanışı olsun. $\mathbb{R}^N$ de bir Ω bölgesi için $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kümesi $\mathbb{R}^N$ nin kompakt (kapalı ve sınırlı) bir alt kümesi ise $G \subset\subset \Omega$ ile gösterilir. G de tanımlı bir u fonksiyonun desteği

$$\mathrm{supp} u = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

olarak tanımlanır. Eğer $\mathrm{supp} u \subset\subset \Omega$ ise, u fonksiyonu Ω da **kompakt desteğe sahiptir** denir (Adams 1975).

Tanım 2.2.4: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, Ω bölgesinde $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar bütün $D^\alpha u$ kısmi türevleri sürekli olan u fonksiyonlarının oluşturduğu uzay $C^m(\Omega)$ vektör uzayıdır.

$$C^0(\Omega) = C(\Omega)$$

ve

$$C^{\infty}(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^{m}(\Omega)$$

olarak yazılabilir.

$C_0(\Omega)$ ve $C_0^{\infty}(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt destekli olan $C(\Omega)$ ve $C^{\infty}(\Omega)$ uzaylarındaki bütün fonksiyonlardan oluşur. $C_0^{\infty}(\Omega)$ uzayının elemanlarına **test fonksiyonu** denir.

Tanım 2.2.5: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere, Ω bölgesinde $D^{\alpha}u$ kısmi türevlerin sınırlı olduğu $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarının belirtiği uzaya $\boldsymbol{C_B^m(\Omega)}$ **vektör uzayı** denir. $C_B^m(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{C_B^m(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Eğer $u \in C(\Omega)$ fonksiyonları Ω bölgesinde sınırlı ve düzgün sürekli ise Ω bölgesinin kapanışı olan $\overline{\Omega}$ bölgesinde de tek, sınırlı ve süreklidir. $0 \leq |\alpha| \leq m$ için Ω bölgesinde $D^{\alpha}u$ sınırlı ve düzgün sürekli olan $u \in C^m(\Omega)$ fonksiyonlarının belirttiği vektör uzayı $C^m(\overline{\Omega})$ şeklinde gösterilir. $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı, $C_B^m(\Omega)$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır. $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}u(x)|$$

ya da

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} |D^{\alpha}u(x)|$$

olarak yazılan norm ile bir Banach uzayıdır.

2.3. Normlu Uzaylarda Kompaktlık

Tanım 2.3.1: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzayda açık kümelerin bir sınıfı $\mathcal{D} = (D_j)_{j\in\Lambda}$ olmak üzere, bir $\mathrm{E} \subset X$ alt kümesi için $\mathrm{E} \subset \bigcup_{j\in\Lambda} \mathrm{D_j}$ oluyorsa $\mathcal{D}$ sınıfına ***E* nin açık bir örtüsü** denir. Eğer $\Lambda_0 \subset \Lambda$ sonlu ve $E \subset \bigcup_{j\in\Lambda_0} \mathrm{D_j}$ ise $\mathcal{D}_0 = \bigcup_{j\in\Lambda_0} \mathrm{D_j}$ sınıfına ***E* nin sonlu alt örtüsü** denir. E kümesini örten $\mathcal{D}$ sınıfının her kümesinin çapı bir $\varepsilon > 0$ dan büyük değilse $\mathcal{D}$ örtüsüne ***E* nin *ε* örtüsü** denir (Musayev 2000).

Tanım 2.3.2: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ olmak üzere, E kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E kümesine X uzayında **kompakt bir küme** denir. Eğer E kümesinin $\overline{E}$ kapanışı X uzayında kompakt bir küme ise E kümesine X uzayında bir **ön-kompakt küme** denir. X kompakt (ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına **kompakt (ön-kompakt) normlu uzay** denir.

Tanım 2.3.3: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve E de X in bir alt kümesi olmak üzere, E kümesindeki her dizinin, limiti E den olan yakınsak bir alt dizisi varsa E kümesine, X de **dizisel kompakt küme** denir. Eğer E nin $\overline{E}$ kapanışı X de dizisel kompakt küme ise E ye X de **dizisel ön-kompakt** küme adı verilir. Eğer X dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) bir küme ise $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayına **dizisel kompakt (dizisel ön-kompakt) normlu uzay** denir.

Bu tanıma göre, X de dizisel kompakt bir $E \subset X$ alt kümesi içinde alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in E$ noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Bu $x \in E$ noktası (x_n) dizisi için bir limit noktasıdır. Ayrıca, $E \subset X$ alt kümesi içinde alınan herhangi bir (x_n) dizisinin bir $x \in E$ limit noktası varsa (x_n) dizisinin bu "x" noktasına yakınsayan bir (x_{n_k}) alt dizisi bulunabilir.

Teorem 2.3.4 (Heine-Borel teoremi): $E \subset \mathbb{R}$ nin kompakt olması için gerek ve yeter şart E kümesinin kapalı ve sınırlı olmasıdır (Wang 2002).

Heine-Borel teoreminden, $\mathbb{R}$ içindeki her kompakt kümenin $\mathbb{R}$ içinde kapalı ve sınırlı olduğunu söyleyebiliriz. Ayrıca, $\mathbb{R}$ de bir kümenin kompakt olması için gerek ve yeter şart bu kümenin kapalı ve sınırlı olmasıdır. Fakat sonsuz boyutlu Banach uzaylarda kapalılık ve sınırlılık koşulu kompaktlık için gereklidir ancak yeterli değildir.

Yardımcı Teorem 2.3.5: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E, X de kompakt bir küme ise E kümesi X de dizisel kompakttır (Musayev 2000).

Tanım 2.3.6: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu bir uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$\mathrm{B_r}(a) = \{x \in X : \|x - a\|_X < r\}$$

elemanlarının oluşturduğu kümeye ***a* merkezli ve *r* yarıçaplı açık yuvar**

$$\overline{\mathrm{B_r}}(a) = \{x \in X : \|x - a\|_X \leq r\}$$

elemanlarının oluşturduğu kümeye ***a* merkezli ve *r* yarıçaplı kapalı yuvar**

$$\sigma_r(a) = \{x \in X : \|x - a\|_X = r\}$$

elemanlarının oluşturduğu kümeye ***a* merkezli ve *r* yarıçaplı yuvar yüzeyi** denir.

Tanım 2.3.7: $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzay ve $E \subset X$ olmak üzere eğer $\forall \mathcal{E} > 0$ için E kümesinin sonlu sayıda açık yuvarlardan oluşan $\mathcal{E}$-örtüsü varsa E ye X de **tamamen sınırlı bir küme** denir.

Teorem 2.3.8: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzay ve $E \subset X$ olmak üzere, E kümesinin X de ön-kompakt olması için gerek ve yeter şart E kümesinin X de tamamen sınırlı olmasıdır (Musayev 2000).

Teorem 2.3.9 dan; kapalı bir kümenin tamamen sınırlı bir küme olması için gerek ve yeter şart, bu kümenin kompakt olmasıdır. Böylece, sonlu boyutlu uzaylarda doğru olan "kapalılık + sınırlılık = kompaktlık" özelliği yerine, "kapalılık + tamamen sınırlılık = kompaktlık" özelliğinin doğruluğu elde edilir.

Teorem 2.3.9: Bir $(X, \|\cdot\|_X)$ normlu uzayının sonlu boyutlu olması için gerek ve yeter şart, bu uzayın $\{x \in X: \|x\| \leq 1\}$ kapalı yuvarının kompakt olmasıdır (Adams 1975; Wang 2002).

Tanım 2.3.10: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzay ve $E \subset X$ olsun. $f: E \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonelinin E üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in E$ iken $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x - y\|_X < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ şartını sağlayan en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ olmasıdır.

Teorem 2.3.11: u, $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayının kompakt E alt kümesinde sürekli reel bir fonksiyonel ise u fonksiyoneli E üzerinde sınırlıdır ve E üzerinde bir en küçük ve bir en büyük değere ulaşır (Musayev 2000).

Tanım 2.3.12: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayı ve $E \subset X$ alt kümesi verilsin. Eğer E içindeki her sonsuz (x_n) dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E ye $(X, \|\cdot\|_X)$ da **zayıf kompakt (veya dizisel zayıf kompakt) küme** denir.

Teorem 2.3.13: $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach uzayının zayıf kompakt her alt kümesi sınırlıdır (Willem 1996).

2.4. Operatörler ve Gömmeler

Tanım 2.4.1: X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzayı ve $D_T \subset X$ olsun. $T: D_T \subset X \rightarrow Y$ dönüşümü D_T nın herbir elemanını Y nin yalnız bir elemanına karşılık getiriyorsa, T ye D_T den Y ye bir **operatör,** D_T ye T operatörünün **tanım kümesi**, $\{y \in Y: y = T(x),\ x \in D_T\}$ kümesine de T operatörünün **görüntü kümesi** denir.

Tanım 2.4.2: X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay ve $T: D_T \subset X \to Y$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in D_T$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

şartını sağlayan T öperatörüne **lineer operatör** denir.

Tanım 2.4.3: $D_T \subset X$ ve $T: X \longrightarrow Y$ bir operatör olarak verilsin. Eğer $\forall x \in D_T$ için

$$\|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X \tag{2.4.1}$$

şartını sağlayan bir $c > 0$ sabit sayısı varsa T operatörüne D_T üzerinde sınırlıdır denir. Eğer $D_T = X$ ise T operatörüne **sınırlıdır** denir.

(2.4.1) eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sayılarının infumumuna $\boldsymbol{T: X \to Y}$ **sınırlı lineer operatörünün normu** denir. Buna göre

$$\|T\| = \inf\{c > 0 : x \in D_T \text{ için } \|Tx\|_Y \leq c\|x\|_X\}$$

olur. Ayrıca, (2.4.1) eşitsizliği $x \neq 0$ için

$$\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq c$$

yazılabilir ki bu durumda c nin en az sol taraftaki ifadenin $D_T - \{0\}$ kümesi üzerinde alınan supremumu kadar olabileceğini gösterir. O halde (2.4.1) eşitsizliğin de mümkün olan en küçük c nin söz konusu olduğu supremum değerine T operatörünün normu denir ve

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D_T \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}$$

ile gösterilir. Ayrıca, X den Y ye tanımlanan bütün sınırlı ve lineer operatörlerin oluşturduğu uzay $L(X, Y)$ şeklinde gösterilmek üzere, eğer Y bir Banach uzay ise $L(X, Y)$ uzayı da bir Banach uzaydır.

Tanım 2.4.4: $T: X \rightarrow Y$ operatör, $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer, $n \rightarrow \infty$ iken

$$\|x_n - x_0\|_X \longrightarrow 0 \quad (x_n \rightarrow x_o)$$

olduğunda

$$\|T(x_n) - T(x_o)\|_Y \rightarrow 0 \quad \big((Tx_n) \rightarrow T(x_0)\big)$$

oluyorsa T operatörüne x_0 noktasında **süreklidir** denir. Lineer operatörler için sınırlılık ve süreklilik kavramları denktir. Lineer olmayan operatörler için bu ifade geçerli değildir (Willem 1996).

Tanım 2.4.5: $T: X \rightarrow Y$ operatör, X de $x_n \rightharpoonup x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi ve $x_0 \in X$ elemanı verilsin. Eğer,

i) $n \rightarrow \infty$ iken Y de $T(x_n) \rightharpoonup T(x_0)$ ise T operatörüne x_0 noktasında **zayıf süreklidir**

ii) $n \rightarrow \infty$ iken Y de $T(x_n) \rightarrow T\,(x_0)$ ise T operatörüne x_0 noktasında **güçlü süreklidir** denir.

Norma göre güçlü yakınsak olan bir T operatörü, aynı zamanda zayıf yakınsak olduğundan dolayı, eğer T operatörü güçlü sürekli ise aynı zaman da süreklidir. Bu nedenle güçlü süreklilik kavramı süreklilikten daha güçlü bir kavramdır.

Teorem 2.4.6: X yansımalı bir Banach uzayı ve $T: X \rightarrow Y$ güçlü sürekli operatör ise T operatörü **kompaktır** (Willem 1996).

Tanım 2.4.7: $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer,

$$f(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \tag{2.4.2}$$

şartı sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **alttan yarı-süreklidir** denir. Eğer (2.4.2) eşitsizliği $x_n \rightharpoonup x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **alttan zayıf yarı-süreklidir** denir.

Tanım 2.4.8: $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel ve $x_0 \in X$ elemanı için $x_n \to x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi verilsin. Eğer,

$$f(x_o) \geq \liminf_{n\to\infty} f(x_n) \tag{2.4.3}$$

şartı sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ oktasında **üstten yarı-süreklidir** denir. Eğer (2.4.3) eşitsizliği $x_n \rightharpoonup x_0$ olacak şekilde $(x_n) \subset X$ dizisi için sağlanıyorsa, f fonksiyoneline $x_0 \in X$ noktasında **üstten zayıf yarı-süreklidir** denir.

f fonksiyoneli eğer $x_0 \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında alttan ve üstten yarı-süreklidir. Eğer f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında zayıf sürekli ise, f fonksiyoneli $x_0 \in X$ noktasında alttan ve üstten zayıf yarı-süreklidir.

Tanım 2.4.9: X, Y iki Banach uzay ve $T: X \to Y$ lineer operatörü olsun. T operatörü X uzayının her sınırlı alt kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine dönüştürüyorsa, T ye **kompakt lineer operatör (tamamen sürekli lineer operatör)** denir.

Tanım 2.4.10: X, Y iki Banach uzay, $f: X \to Y$ bir operatör ve $x \in X$ olmak üzere, her $h \in X$ için

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|f(x+th) - f(x)\|_Y}{t} = T_x\,(h)$$

olacak şekilde bir $T \in L(X, Y)$ sınırlı lineer operatörü varsa f ye $x \in X$ noktasında ve h yönünde **Gâteaux diferansiyellenebilirdir** denir. T operatörüne ise f nin $x \in X$ noktasındaki **Gâteaux türevi** denir. Eğer, bu eşitlik her $x \in X$ için sağlanırsa f operatörü **Gâteaux diferansiyellenebilirdir** denir (Schechter 2007).

Tanım 2.4.11: X bir Banach uzay ve $x \in X$ olmak üzere, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli X de Gâteaux diferansiyellenebiliyorsa ve bu Gâteaux diferansiyeli sürekli ise f fonksiyonelinin diferansiyeli **zayıf süreklidir** denir (Duc ve Vu 2005).

Teorem 2.4.12 (Ortalama Değer Teoremi): X bir Banach uzayı ve $x, h \in X$ olmak üzere, $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli Gâteaux diferansiyellenebilir ise, o zaman

$$f(x+h) - f(x) = f'(x+th)h$$

olacak şekilde bir $0 < t < 1$ sayısı vardır (Papageorgiou ve Kyritsi-Yiallourou 2009).

Tanım 2.4.13: X, Y iki Banach uzay, $f: X \to Y$ tanımlanan bir operatör ve $x \in X$ olmak üzere her $h \in X$ için

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - T_x(h)\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir $T \in L(X, Y)$ sınırlı lineer operatörü varsa f operatörüne $x \in X$ noktasında **Fréchet diferansiyellenebilir** denir. T operatörüne de f in $x \in X$ noktasındaki **Fréchet türevi** denir. Eğer, bu eşitlik her $x \in X$ için sağlanırsa f operatörü **Fréchet diferansiyellenebilir** denir (Papageorgiou ve Kyritsi-Yiallourou, 2009).

Teorem 2.4.14: Eğer, $f: X \to Y$ operatörü $x \in X$ de Fréchet diferansiyellenebilir ise f operatörü $x \in X$ de süreklidir (Papageorgiou ve Kyritsi-Yiallourou, 2009).

Teorem 2.4.15: Eğer, $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonelinin X de Gâteaux türevi sürekli ise bu durumda f fonksiyoneli Fréchet diferansiyellenebilirdir ve $f \in C^1(X, Y)$ olur (Willem 1996).

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 2.4.16: X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer,

i) X, Y nin bir alt uzayı,

ii) X den Y ye $I(x) = x$ ile tanımlanan I birim operatörü her $x \in X$ için sürekli ise ***X* uzayı *Y* uzayına gömülür** denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir. I birim operatörü doğrusal olduğundan **ii)** koşulu her $x \in X$ için

$$\|I(x)\|_Y \leq c\|x\|_X$$

eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ sabitinin varlığına denktir. Eğer, I birim operatörü kompakt ise ***X* uzayı *Y* uzayına kompakt gömülür** denir ve $X \hookrightarrow\hookrightarrow Y$ ile gösterilir (Adams 1975).

2.5. Lebesgue Ölçümü ve Ölçülebilir Fonksiyon

Tanım 2.5.1: $\mathfrak{R}, \mathbb{R}^N$ in alt kümelerinin bir sınıfı olmak üzere, $\mathfrak{R}$ ailesi

i) $\mathbb{R}^N \in \mathfrak{R}$

ii) Eğer $A \in \mathfrak{R}$ ise $A^c = \{x \in \mathbb{R}^N : x \notin A\} \in \mathfrak{R}$

iii) Eğer $j = 1, 2, \ldots$ için $A_j \in \mathfrak{R}$ ise $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$

şartlarını sağlıyorsa $\mathfrak{R}$ sınıfına $\mathbb{R}^N$ üzerinde bir σ-cebir denir. **i) - iii)** özelliklerinin bir sonucu olarak

iv) $\emptyset \in \mathfrak{R}$

v) Eğer $j = 1, 2, \ldots$ için $A_j \in \mathfrak{R}$ ise $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{R}$

vi) Eğer $A, B \in \mathfrak{R}$ ise $A - B = A \cap B^c \in \mathfrak{R}$

özellikleri yazılabilir. **i- iii** koşulları ile **iv - vi** koşulları birbirine denktir.

Tanım 2.5.2: $\mathfrak{R}, \mathbb{R}^N$ in alt kümelerinin bir sınıfı ve $\mu: \mathfrak{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyon olmak üzere, μ fonksiyonu $\mathfrak{R}$ sınıfındaki ayrık kümelerin bir $\{A_j : j \in \mathbb{N}\}$ sınıfının sayılabilir her birleşimi için

$$\mu\,(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu\,(A_j), \quad A_j \cap A_k = \emptyset \quad j \neq k$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ fonksiyonuna $\mathfrak{R}$ üzerinde bir **ölçüm** denir.

Teorem 2.5.3: μ fonksiyonu $\mathfrak{R}$ üzerinde bir ölçüm olsun. Bu durumda,

i) Eğer $A, B \in \mathfrak{R}$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \le \mu(B)$ (monotonluk özelliği)

ii) $j = 1, 2, \ldots$ için $A_j \in \mathfrak{R}$ ve $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2 \subset \cdots$ (monoton artan) ise

$$\mu\,\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\Big) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j) \quad \text{(ölçümün sürekliliği)}$$

ifadeleri yazılabilir (Adams 1975).

Teorem 2.5.4: $\mathbb{R}^N$ nin alt kümelerinin $\mathfrak{R}$ sınıfı aşağıdaki özellikleri sağlayan bir σ-cebiri olsun. Bu durumda $\mathfrak{R}$ üzerinde bir μ ölçümü vardır;

i) $\mathbb{R}^N$ de bulunan her açık küme $\mathfrak{R}$ ya aittir,

ii) Eğer $A \subset B, B \in \mathfrak{R}$ ve $\mu(B) = 0$ ise, $A \in \mathfrak{R}$ ve $\mu(A) = 0$ dır,

iii) $A = \{x \in \mathbb{R}^N : a_j \le x_j \le b_j, j = 1, 2, \ldots, n\}$ ise o zaman $A \in \mathfrak{R}$ ve

$$\mu(A) = \prod_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j)$$

iv) μ öteleme altında değişmeyendir, yani; $x \in \mathbb{R}^N$ ve $A \in \mathfrak{R}$ için

$$x + A = \{x + \mathrm{y} : \mathrm{y} \in A\} \in \mathfrak{R} \text{ ve } \mu(x + A) = \mu(A) \text{ dır.}$$

Bu özelliklere sahip bir $\mathfrak{R}$ sınıfının elemanlarına $\mathbb{R}^N$ nin **Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri**, μ fonksiyonuna $\mathbb{R}^N$ nin **Lebesgue ölçümü** ve herhangi bir $A \in \mathfrak{R}$ için $\mu(A)$ ifadesine ***A* nın ölçümü** denir (Adams 1975).

Tanım 2.5.5: Eğer $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$ ve $\mu(B) = 0$ ise $A - B$ kümesinin her noktasında sağlanan bir özelliğe A kümesinde hemen hemen her yerde (h.h.h) sağlanan bir özellik denir.

Tanım 2.5.6: Ölçülebilir bir küme üzerinde tanımlı ve $\mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$ kümesindeki değerleri alan bir f fonksiyonu verilsin. Eğer her $k \in \mathbb{R}$ için

$$\{x: f(x) > k\}$$

kümesi ölçülebilir ise, f fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir.

Teorem 2.5.7:

i) f ölçülebilir ise $\|f\|$ de ölçülebilir,

ii) f ve g ölçülebilir ve reel değerli ise $f+g$ ve fg de ölçülebilir ve reel değerlidir,

iii) (f_n) ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise sup (f_n), inf (f_n), limsup (f_n) ve liminf(f_n) ifadeleri de ölçülebilir,

iv) f sürekli ve ölçülebilir bir küme de tanımlı ise o zaman f ölçülebilir,

v) $f, \mathbb{R}^N$ den $\mathbb{R}$ ye sürekli bir fonksiyon ve g ölçülebilir ve reel değerli fonksiyon ise $(f o\, g)\,(x) = f(g(x))$ ile tanımlanan "fog " bileşke fonksiyonu da ölçülebilirdir,

vi) **(Lusin's teoremi):** f ölçülebilir ve $x \in A^c$ için $f(x) = 0$ $(\mu(A) < \infty)$ ve $\varepsilon > 0$ ise bu durumda

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |g(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)| \text{ ve } \mu\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq g(x)\} < 0$$

olacak şekilde bir $g \in C_o(A)$ fonksiyonu vardır (Adams 1975).

Teorem 2.5.8 (Fatou's lemma): $A, \mathbb{R}^N$ in ölçülebilir bir alt kümesi ve (f_n) negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\int_A (\liminf_{n\to\infty} f_n(x))dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n(x)dx$$

eşitsizliği yazılabilir (Adams 1975).

Tanım 2.5.9: $E \subset \mathbb{R}^n$ alt kümesi için

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{X}_E(x)$ fonksiyonuna, E nin **karekteristik fonksiyonu** denir.

2.6. Lebesgue Uzayı ($L^p(\Omega)$)

$\Omega, \mathbb{R}^N$ nin ölçülebilir bir alt kümesi, $|\Omega| > 0$ ve $S(\Omega) = \{u \in \Omega : u, \Omega$ da tanımlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi$\}$olsun.

Tanım 2.6.1: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty,$$

özelliğine sahip tüm ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $L^p(\Omega)$ uzayı denir. $L^p(\Omega)$ uzayı

$$L^p(\Omega) = \left\{u \in S(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < \infty, \;\; 1 \leq p < \infty\right\}$$

olarak da yazılabilir.

Eğer $u \in L^p(\Omega)$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $cu \in L^p(\Omega)$ olur. Ayrıca $u, v \in L^p(\Omega)$ için

$$|u(x) + v\,(x)|^p \leq (|u(x)| + |v\,(x)|)^p \leq 2^p(|u(x)|^p + |v\,(x)|^p)$$

olduğundan $(u + v) \in L^p(\Omega)$ yazılabilir. Dolayısıyla $L^p(\Omega)$ uzayı bir vektör uzayı olur.

$L^p(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \;\; 1 \leq p < \infty$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.2: Ω bölgesinde ölçülebilir bir u fonksiyonu için hemen hemen her yerde $|u(x)| \leq K$ olacak şekilde negatif olmayan bir K sabiti mevcutsa u fonksiyonuna **hemen hemen sınırlıdır** denir. Bu eşitsizliği sağlayan $K \geq 0$ sabit sayılarının en büyük alt sınırına da $|u|$ nın Ω bölgesindeki **esas** (essential) **supremumu** denir ve

$\underset{x\in\Omega}{\text{esssup}}|u(x)|$ ile gösterilir. Ω bölgesinde hemen hemen sınırlı u fonksiyonlarının olusturduğu uzay $L^{\infty}(\Omega)$ ile gösterilir.

$L^{\infty}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} := \|u\|_{\infty} = \underset{x\in\Omega}{\text{esssup}}|u(x)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.6.3: $L^{p}(\Omega)$ uzayında $p = 2$ olarak alındığında $L^{2}(\Omega)$ uzayı oluşur. Bu uzay

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}dx$$

iç çarpım altında bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 2.6.4: $1 < p < \infty$ iken $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \left(p' = \frac{p}{1-p}\right)$ eşitliğini sağlayan $1 < p' < \infty$ sayısına ***p* nin eşleneği** denir.

Tanım 2.6.4 e göre, $1 < p < \infty$ ve $\phi \in \left(L^{p}(\Omega)\right)'$ alınırsa, $\forall u \in L^{p}(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

eşitliğini sağlayan bir $v \in L^{p'}(\Omega)$ vardır. Ayrıca

$$\|v\|_{L^{p'}(\Omega)} = \|\phi\|_{(L^{p}(\Omega))'}$$

olduğundan

$$L^{p'}(\Omega) \cong \left(L^{p}(\Omega)\right)'$$

olur. Bu iki uzay çok farklı elemanlara sahip olmalarına rağmen, Banach uzay olmaları açısından aynı kabul edilebilir.

Teorem 2.6.5: $|\Omega| = \int_\Omega dx < \infty$ ve $1 \leq p \leq q \leq \infty$ olsun. Eğer $u \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ olur ve

$$\|u\|_p \leq |\Omega|_q^{\left(\frac{1}{p}\right)-\left(\frac{1}{q}\right)} \|u\|_q$$

eşitsizliği yazılabilir. Dolayısıyla $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ sürekli gömmesi vardır (Adams 1975).

Teorem 2.6.6: Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı ayrılabilirdir ve $C_0(\Omega)$ ile $C_0^\infty(\Omega)$ uzayları $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olur (Adams 1975).

Teorem 2.6.7: Eğer $p \in (1, \infty)$ ise $L^p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks ve yansımalı uzaydır (Adams 1975).

2.7. Sobolev Uzay $\left(W^{m,p}(\Omega)\right)$

Tanım 2.7.1: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $p \in [1, \infty)$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen Ω bölgesindeki tüm ölçülebilir fonksiyonların uzayına $\boldsymbol{L_{loc}^p(\Omega)}$ **uzayı** denir. Bu uzay $p = 1$ için $L_{loc}^1(\Omega)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonalar sınıfını gösterir.

Tanım 2.7.2: $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. Eğer, her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \varphi v dx = (-1)^\alpha \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliğini sağlayan $v \in L_{loc}^p(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun $\boldsymbol{\alpha}$**. mertebeden zayıf türevi** denir. v fonksiyonuna, u fonksiyonun **genelleşmiş türevi** de denir ve $v = D^\alpha u$ biçiminde yazılabilir.

Örnek 2.7.3: $n = 1$ ve $\Omega = (0,2)$ olmak üzere u ve v fonksiyonları

$$u(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1] \\ 1, & x \in [1,2) \end{cases} \quad \text{ve} \quad v(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1] \\ 0, & x \in [1,2) \end{cases}$$

olarak tanımlansın. v nin u fonksiyonunun zayıf türevi olduğunu gösterelim.

Çözüm:

Bunun için $u'(x) = v$ olmak üzere

$$\int_0^2 u(x)D\eta(x)dx = -\int_0^2 v(x)\eta(x)dx\,, \;\; \eta(x) \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.7.1}$$

olduğu gösterilmelidir. (2.7.1) eşitliğinin sol kısmına $x = u\ (dx = du),\ D\eta(x)dx = dv\ (\eta(x) = v)$ alarak kısmi integral uygularsak

$$\int_0^2 u(x)D\eta(x)dx = \int_0^1 xD\eta(x)dx + \int_1^2 D\eta(x)dx$$

$$\int_0^2 u(x)D\eta(x)dx = x.\eta(x)|_0^1 - \int_0^1 \eta(x)dx + \eta(x)|_1^2$$

$$= \eta(1) - 0 - \int_0^1 \eta(x)dx + \eta(2) - \eta(1)$$

$$= -\int_0^1 \eta(x)dx$$

elde ederiz. (2.7.1) eşitliğinin sağ kısımdan da

$$-\int_0^2 v(x)\eta(x)dx = -\left(\int_0^1 1\eta(x)dx + \int_1^2 0\eta(x)dx\right)$$

$$= -\int_0^1 \eta(x)dx$$

sonucunu elde ederiz. Böylece

$$\int_0^2 u(x) D\eta(x) dx = -\int_0^2 v(x)\eta(x) dx$$

olduğu görülür. Dolayısıyla v fonksiyonu u fonksiyonunun zayıf türevidir.

Tanım 2.7.4: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge, $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

olarak ifade edilen uzaya **Sobolev uzayı** denir. Bu uzayda tanımlanan norm; $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^\alpha(u)|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0\leq|\alpha|\leq m} |D^\alpha(u)|_\infty$$

dur. $W^{m,p}(\Omega)$ Sobolev uzayı yukarıda tanımlanan normları ile bir Banach uzayıdır. $C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı olur.

Uzayların tanımlarının bir sonucu olarak $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ yazılabilir. Ayrıca, $1 \leq p < \infty$ iken $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $L^p(\Omega)$ uzayında yoğun olduğundan dolayı $W_0^{0,p} = L^p(\Omega)$ olur. Dolayısıyla, bu uzaylar arasında herhangi bir $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ için

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır.

Teorem 2.7.5 (Sobolev Eşitsizliği): $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge olsun. Eğer $1 \leq p < \infty$, $mp < N$ ve $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ ise

$$p^* = \frac{Np}{N - mp}$$

olarak tanımlanan Sobolev kritik üs olmak üzere

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|u\|_{m,p}$$

olacak şekilde bir $C(n, m, p)$ sabiti vardır (Harjulehto ve Hästö 2008).

Tanım 2.7.6: $p = 2$ iken $\mathrm{W}^{2,\mathrm{p}}(\Omega) = \mathrm{H}^{\mathrm{m}}(\Omega)$, $W_0^{2,p}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ olur. $H^m(\Omega)$ uzayındaki norm

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} := \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde verilir. $H^m(\Omega)$ uzayı,

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayı oluşturur.

Teorem 2.7.7: Eğer $p \in [1, \infty)$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları ayrılabilirdir (Adams 1975).

Teorem 2.7.8: Eğer $1 < p < \infty$ ise $W^{m,p}(\Omega)$ ve $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayları yansımalı ve düzgün konvekstir (Adams 1975; Willem 1996; Dai ve Hao 2009).

Tanım 2.7.9: $\mathbb{R}^N$ de $B_{r_1}(x)$ ve x noktasını içermeyen $B_{r_2}(y)$ açık yuvarını göz önüne alalım.

$$K_x = B_{r_1(x)} \cap \{x + \lambda(z - x) : z \in B_{r_2}(y), \lambda > 0\}$$

kümesine, tepe noktası x olan **sonlu koni** denir. Bir $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ açık kümesinin her x noktası bir $K_x \subset \Omega$ konisinin tepesi ise ve bütün K_x konileri bir K sonlu konisinden izomorfik ve izometrik dönüşümlerle elde edilebiliyorsa **Ω bölgesinin koni özelliği vardır** denir.

Teorem 2.7.10 (Sobolev Gömme Teoremi): $\Omega, \mathbb{R}^N$ de koni özelliğine sahip açık bir bölge, $m \geq 1$ ve $j \geq 0$ şeklinde tamsayılar ve $p \in [1, \infty)$ ise aşağıdaki gömmeler yazılabilir. Eğer,

i) $mp < N$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega)\,,\ p \leq q \leq q^* = \frac{Np}{N-mp}$$

ya da özel olarak

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)\,, p \leq q \leq q^* = \frac{Np}{N-mp}$$

elde edilir.

ii) $mp = N$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow \mathrm{L}^{\mathrm{q}}(\Omega),\ p \leq q < \infty$$

olur. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$\mathrm{W}^{\mathrm{j+m,1}}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j\,(\Omega)$$

elde edilir.

iii) $mp > N$ ise

$$\mathrm{W}^{\mathrm{j+m,1}}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j\,(\Omega)$$

gömmesi yazılabilir (Adams 1975; Adams ve Fournier 2003).

2.8. Modüler Uzay ve Orlicz Uzayı

Tanım 2.8.1: X bir reel vektör uzay olsun. Eğer $\rho\colon \mathrm{X} \to [0, \infty)$ fonksiyoneli $\forall x, y \in X$ için

i) $\rho(x) = 0 \iff x = 0,$

ii) $\rho(x) = \rho(-x),$

iii) Her $a, \beta \geq 0,\ a + \beta = 1$ için $\rho(ax + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$

özelliklerini sağlıyorsa, ρ fonksiyoneline X üzerinde **modüler** adı verilir. Eğer **iii)** özelliği yerine her $a, \beta \geq 0, a + \beta = 1$ için

$$\rho(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\, \rho(x) + \beta\rho\,(y),$$

özelliği sağlanıyorsa, ρ fonksiyoneline X üzerinde bir **konveks modüler** adı verilir.

Tanım 2.8.2: X bir reel vektör uzay ve $\rho: X \to [0,\infty)$ fonksiyoneli X üzerinde bir modüler ise, bu durumda

$$X_\rho = \{x \in X: \lim_{\lambda\to 0} \rho(\lambda x) = 0\}$$

uzayına bir **modüler uzay** adı verilir. X_ρ modüler uzayı X vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

Tanım 2.8.3: X bir reel vektör uzay ve ρ fonksiyoneli X üzerinde konvenks modüler ise, bu durumda X_ρ üzerinde

$$\|u\|_\rho = \inf\{\lambda > 0: \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\}$$

biçiminde tanımlanan norma **Luxemburg normu** adı verilir.

$$\rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) = \int_\Omega \varphi\left(x, \frac{u}{\lambda}\right) dx$$

Tanım 2.8.4: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de ölçülebilir bir bölge olsun. Eğer $\varphi: \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) Her $x \in \Omega$ için $\varphi(x,u)$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

ii) $\varphi(x,0) = 0$, $u > 0$ için $\varphi(x,0) > 0$ ve $\lim_{u\to\infty} \varphi(x,u) \to \infty$,

iii) Her $u \geq 0$ için $\varphi(x,u)$ ölçülebilir fonksiyon

özelliklerini sağlıyorsa, φ fonksiyonuna Φ **sınıfına aittir** denir.

Eğer φ fonksiyonu Φ sınıfına ait ise, her $u \in$ X için $\varphi(x, |u(x)|)$ fonksiyonu ölçülebilir ve

$$\rho\,(u)=\int_{\Omega}\varphi(x,|u(x)|)dx$$

ifadesi X de bir ρ modülerini tanımlar.

Eğer $\varphi(x,u)$ fonksiyonu her $x\in\Omega$ için u'nun konveks fonksiyonu ise ρ, X de konveks modülerdir. Bu durumda

$$X_{\rho}=\left\{u\in X:\lim_{\lambda\to 0^{+}}\int_{\Omega}\varphi(x,\lambda|u(x)|)dx=0\right\}$$

modüler uzayına **genelleştirilmiş Orlicz uzayı** veya **Musielak-Orlicz uzayı** denir ve L^{φ} ile gösterilir. Ayrıca,

$$L_{0}^{\varphi}=\left\{u\in X:\lim_{\lambda\to 0^{+}}\int_{\Omega}\varphi(x,|u(x)|)dx<\infty\right\}$$

kümesine **genelleştirilmiş Orlicz sınıfı** adı verilir.

2.9. Ağırlıklı Lebesgue ve Sobolev Uzayları

Tanım 2.9.1: a fonksiyonu hemen hemen her $x\in\mathbb{R}^{N}$ için $a(x)>0$ olacak şekilde $\mathbb{R}^{N}$ de local integrallenebilir olsun. Bu durumda, a fonksiyonuna bir **ağırlık fonksiyonu** denir.

Tanım 2.9.2: $\Omega, \mathbb{R}^{N}$ de açık bir bölge ve a bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere $\int_{\Omega} a|u|^{p}dx<\infty$ özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların kümesine **ağırlıklı Lebesgue uzayı** denir ve $L_{a}^{\varphi}(\Omega)$ ile gösterilir. $L_{a}^{\varphi}(\Omega)$

$$\|u\|_{p,a}=\left(\int_{\Omega}a|u|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu altında bir Banach uzayıdır (Drabek vd 1996).

Tanım 2.9.3: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge ve a bir ağırlık fonksiyonu, $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$W_a^{m,p}(\Omega) = \left\{u \in L_a^p(\Omega): D^\alpha u \in L_a^p(\Omega),\ \ 0 \leq |\alpha| \leq m\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **ağırlıklı Sobolev uzayı** adı verilir ve $W_a^{m,p}(\Omega)$ şeklinde gösterilir. $W_a^{m,p}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{m,p,a} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m}^{p} |D^\alpha u|_{p,a}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile ayrılabilir bir Banach uzayıdır.

2.10. Değişken Üslü Lebesgue Uzayı $\left(L^{p(x)}(\Omega)\right)$

Değişken üslü lebesgue uzayları anlamak için sayısal bir örnekle başlayalım. Reel düzlemde $f(x) = |x|^{\frac{-1}{3}}$ fonksiyonunu düşünelim. f fonksiyonu reel düzlemde oldukça iyi davranış gösterir, fakat herhangi bir $1 \leq p \leq \infty$ için $L^p(\mathbb{R})$ uzayında aynı davranışı göstermez. p'ye bir tek değer verildiğinde fonksiyon ya orjine (sıfıra) çok hızlı yaklaşır ya da çok yavaş bir şekilde sonsuza gider.

$f(x) = |x|^{-\frac{1}{3}}$ fonksiyonunun davranışını daha iyi anlamak için L^2 ve L^4 gibi iki farklı L^P uzayı ele alalım. f nin bölgesini bölerek $f \in L^2([-2,2])$ ve $f \in L^4(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$ alınabilir. Gerçekten; $\int_{-2}^{2} \left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^2 dx < \infty$ olduğundan $f \in L^2([-2,2])$ ve $\int_{\mathbb{R}\setminus[-2,2]} \left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^4 dx < \infty$ olduğundan da $f \in L^4(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$ dır.

Eğer $g(x) = |x|^{-\frac{1}{3}} + |x-1|^{-\frac{1}{4}}$ alınırsa $g \in L^2([-2,2])$ veya daha genel olarak $p < 3$ için $g \in L^p([-2,2])$ olur. Fakat $x = 1$ civarında daha az bilgiye sahibiz. Diğer taraftan $g \in L^4(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$ dır. Hatta $p > 4$ için $g \in L^p(\mathbb{R} \setminus [-2,2])$ dır. Bu bölgeyi daha alt bölgelere bölerek $g \in L^2\left(\left[-1,\frac{1}{2}\right]\right)$, $g \in L^3\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$ ve $g \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R} \setminus [-1,2])$ olduğu gösterilebilir. Gerçekten;

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(|x|^{-\frac{1}{3}} + |x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx &\leq 2^{2-1}\left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(\left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^2 + \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^2\right) dx\right) \\
&= 2\left(\int_{-1}^{\frac{1}{2}} \left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^2 dx + \int_{\Omega} \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^2 dx\right) \\
&< 2(\infty + \infty) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $g \in L^2\left(\left[-1,\frac{1}{2}\right]\right)$ dır.

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(|x|^{-\frac{1}{3}} + |x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^3 dx &\leq 2^{3-1}\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(\left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^3\right) dx\right) \\
&= 4\left(\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^3 dx + \int_{\Omega} \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^3 dx\right) \\
&< 4(\infty + \infty) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

olduğundan $g \in L^3\left(\left[\frac{1}{2},2\right]\right)$ dır.

$$\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,2]} \left(|x|^{-\frac{1}{3}} + |x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{9}{2}} dx \leq 2^{\frac{9}{2}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,2]} \left(\left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} + \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{9}{2}}\right) dx\right)$$
$$= 2^{\frac{7}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}\setminus[-1,2]} \left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} dx + \int\limits_{\Omega} \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{9}{2}} dx\right)$$
$$< 2^{\frac{7}{2}}(\infty + \infty)$$
$$= \infty$$

olduğundan $g \in L^{\frac{9}{2}}(\mathbb{R} \setminus [-1,2])$ dır.

Değişken üslü Lebesque uzaylarda üssü değiştirmek ve bölgeyi parçalamak yerine farklı yaklaşımlar sergilenir. Örneğin $p(x) = \frac{9|x|+2}{2|x|+1} = \frac{9}{2} - \frac{\frac{5}{2}}{2|x|+1}$ üs fonksiyonu için $p(0) = 2$, $p(1) = \frac{11}{3}$ ve $x \to \infty$ için $p(x) \to \frac{9}{2}$ olduğunu görmek kolaydır. Dolayısıyla

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^{p(x)} dx < \infty$$

olduğundan $f \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$ ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(|x|^{-\frac{1}{3}} + |x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^{p(x)} dx \leq 2^{\frac{9}{2}-1}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} + \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{9}{2}}\right) dx\right)$$
$$= 2^{\frac{7}{2}}\left(\int\limits_{\mathbb{R}} \left(|x|^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{9}{2}} dx + \int\limits_{\Omega} \left(|x-1|^{-\frac{1}{4}}\right)^{\frac{9}{2}} dx\right)$$
$$< 2^{\frac{7}{2}}(\infty + \infty)$$
$$= \infty$$

olduğundan $g \in L^{p(x)}(\mathbb{R})$ dir.

Bir başka ifadeyle tek değişkenli $p(\cdot)$ üs fonksiyonu, bize herbir fonksiyonun davranışını daha iyi inceleme imkanı sağlar. Örneğin $q(x) = \frac{8|x|+2}{2|x|+1} = 4 - \frac{2}{2|x|+1}$ alınırsa

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{q(x)} dx < \infty$$

ve $|g(\cdot)|^{q(\cdot)}$ lokal integrallenebilirdir. Fakat

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{q(x)} dx = \infty$$

olur.

Tanım 2.10.1: Her $x \in \Omega$ için $p(x) \in S(\Omega)$ ve $s \geq 0$ olmak üzere $\varphi(x,s) = s^{p(x)}$ şeklinde tanımlanan $\varphi(x,.) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ foksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa Φ sınıfına aittir denir.

i) Her $x \in \Omega$ için $\varphi(x,.) : \Omega \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ azalmayan sürekli bir fonksiyon,

ii) $\varphi(x,0) = 0$ ve $s > 0$ için $\varphi(x,s) > 0$ ve $\lim_{s\to\infty} \varphi(x,s) \to \infty$,

iii) Her $s \geq 0$ için $\varphi(.,s) \in S(\Omega)$.

Ayrıca, $\varphi(x,.)$ foksiyonu **i-iii** özelliklerine sahip olduğundan her $x \in \Omega$ için s'nin bir konveks fonksiyonu olur.

Tanım 2.10.2: Her $x \in \Omega$ için $u \in S(\Omega)$ ve $\varphi(x,s) = s^{p(x)}$ olmak üzere

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_{\Omega} \varphi(x,|u|)dx = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx$$

şeklinde tanımlanan $\rho_{p(x)}(u) : S(\Omega) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

i) $\rho_{p(x)}(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$

ii) $\rho_{p(x)}(u) = \rho_{p(x)}(-u)$

iii) $\forall u, v \in S(\Omega), \forall \alpha, \beta > 0, \alpha + \beta = 1$ için

$$\rho_{p(x)}(\alpha u + \beta v) \leq \alpha \rho_{p(x)}(u) + \beta \rho_{p(x)}(v)$$

özelliklerini sağladığı için $S(\Omega)$ kümesi üzerinde bir konveks modülerdir. Bu durumda, $L^{p(x)}(\Omega)$ modüler uzayı

$$L^{p(x)}(\Omega)=\left\{u\in S(\Omega):\lim_{\lambda\to 0^+}\rho_{p(x)}\,(\lambda u)=0\right\}$$

Musielak- Orlicz uzayının özel bir çeşiti olup $S(\Omega)$ kümesinin de lineer alt uzayıdır.

$$L_0^{p(x)}(\Omega)=\left\{u\in S(\Omega):\rho_{p(x)}(\lambda u)<\infty\right\}$$

uzayı, $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının bir konveks alt uzayıdır. $L_1^{p(x)}(\Omega)$ uzayıda

$$L_1^{p(x)}(\Omega)=\left\{u\in S(\Omega):\forall\lambda>0,\rho_{p(x)}(\lambda u)<\infty\right\}$$

$S(\Omega)$ nin $L_0^{p(x)}(\Omega)$ kümesinde kapsanan en büyük alt vektör uzaydır. Bu uzaylar için genel olarak

$$L_1^{p(x)}(\Omega)\subset L_0^{p(x)}(\Omega)\subset L^{p(x)}(\Omega)$$

yazılabilir.

Tanım 2.10.3: $\Omega,\mathbb{R}^N$ de açık bir bölge olsun. $p(x):\Omega\to[1,\infty)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$1\le\ p^-:=\operatorname*{essinf}_{x\in\Omega}p(x)\text{ ve }p^+:=\operatorname*{esssup}_{x\in\Omega}p(x)<\infty$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$L^{p(x)}(\Omega):=\left\{u\in S(\Omega):\int_\Omega|u|^{p(x)}dx<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya **değişken üslü Lebesgue uzayı** denir.

p nin sabit $(p(x)=p)$ olması durumunda değişken üslü Lebesgue uzayı, klasik Lebesgue uzayına dönüşür. $L_+^\infty(\Omega)$ uzayıda

$$L_+^\infty(\Omega)=\left\{h\in L^\infty(\Omega):\operatorname*{essinf}_{x\in\Omega}h(x)\ge 1\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Aksi belirtilmedikçe $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ ve $1 \leq p^- \leq p^+ < \infty$ olarak kabul edilecektir ve Sobolev kritik üssü

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

olarak alınacaktır. $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ fonksiyonun eşleneğini ise $p'(x)$ ile gösterilecektir ve

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

olarak alınacaktır.

Teorem 2.10.4: $L_1^{p(x)}(\Omega) \coloneqq L^{p(x)}(\Omega)$ olması için gerek ve yeter şart $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ olmasıdır (Fan ve Zhao 2001; Fan ve Han 2004).

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak, $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ ise

$$L^{p(x)}(\Omega) \coloneqq L_0^{p(x)}(\Omega) \coloneqq L_1^{p(x)}(\Omega)$$

yazılabilir. $p(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ olduğunda modüler fonksiyon ek olarak aşağıdaki özelliklere sahip olur.

i) $\rho_{p(x)}(u+v) \leq 2p^+ \left(\rho_{p(x)}(u) + \rho_{p(x)}(v)\right)$

ii) $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için $\lambda > 1$ ise

$$\rho_{p(x)}(u) \leq \lambda\rho_{p(x)}(u) \leq \lambda^{p-}\rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}(\lambda u) \leq \lambda^{p+}\rho_{p(x)}(u)$$

ve $0 < \lambda < 1$ ise

$$\lambda^{p+}\rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}(\lambda u) \leq \lambda^{p-}\rho_{p(x)}(u) \leq \lambda\rho_{p(x)}(u) \leq \rho_{p(x)}(u)$$

olur,

iii) $u \in L^{p(x)}(\Omega) \backslash \{0\}$ için $\rho_{p(x)}(\lambda u)$ fonksiyonu için λ ya göre sürekli konveks çift fonksiyondur ve $\lambda \in [0, \infty)$ için artandır.

$\rho_{p(x)}(\lambda u)$ modülü konveks olduğundan dolayı $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde

$$\|u\|_{p(x),\Omega} := \|u\|_{p(x)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(x)} \left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\}$$

Luxemburg normu olarak adlandırılan norm tanımlanabilir. Bu norm altında $L^{p(x)}$ (Ω) uzayı bir Banach uzayı olur.

Ayrıca; $u, v \in L^{p(x)}$ (Ω) ve h.h.h. $|u(x)| \leq |v(x)|$ ise

$$\|u\|_{p(x)} \leq \|v\|_{p(x)}$$

yazılabilir.

Değişken üslü lebesgue uzayın normunu bir örnek ile inceleyelim.

Örnek 2.10.5: $p(x) = x$, $\Omega = [1,2]$, $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, olmak üzere $\|f\|_{p(x)}$ değerini hesaplayalım.

Çözüm: $\|f\|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0,\ \rho_{p(x)}\left(\frac{f}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$

$$= \inf\left\{\lambda > 0,\ \int_1^2 \left(\frac{2^{1/x}}{\lambda}\right)^x dx \leq 1\right\}$$

$$= \inf\left\{\lambda > 0,\ \int_1^2 (2\lambda^{-x}) dx \leq 1\right\}$$

$$= \inf\left\{\lambda > 0,\ \left.\frac{2\lambda^{-x}}{-ln\lambda}\right|_1^2 \leq 1\right\}$$

$$= \inf\left\{\lambda > 0,\ \frac{\lambda - 1}{\lambda^2 ln\lambda} \leq 1\right\}$$

$$= \inf\{\lambda > 0,\ \lambda \geq 1{,}59708\}$$

$$\cong 1{,}59708$$

Teorem 2.10.6: $u \in L^{p(x)}(\Omega)\backslash\{0\}$ olsun. Bu durumda, $\|u\|_{p(x)} = \alpha$ olması için gerek ve yeter şart $\rho_{p(x)}\left(\frac{u}{\alpha}\right) = 1\}$ olmasıdır (Fan ve Zhao 2001; Fan ve Han 2004).

Teorem 2.10.7: Eğer $u \in L^{p(x)}$ (Ω) ve $\rho_{p(x)}(u)$: $L^{p(x)}$ $(\Omega) \to \mathbb{R}$ ise

i) $\|u\|_{p(x)} > 1$ $(< 1; = 1) \Leftrightarrow$ $\rho_{p(x)}$ $(u) >$ 1 $(< 1; = 1)$,

ii) Eğer $\|u\|_{p(x)} > 1$ ise $\|u\|_{p(x)}^{p-} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p+}$,

iii) Eğer $\|u\|_{p(x)} < 1$ ise $\|u\|_{p(x)}^{p+} \leq \rho_{p(x)}(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p-}$

olur (Kovăčik ve Răkosnik 1991; Fan ve Zhao 2001; Fan ve Han 2004; Fan 2005).

Teorem 2.10.8: Eğer $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $u_n \in L^{p(x)}(\Omega)$ ise, bu durumda

i) $\lim_{n\to\infty}\|u_n - u\|_{p(x)} = 0$,

ii) $\lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n - u) = 0$,

iii) Ω bölgesindeki ölçüme göre $u_n \to u$ iken $\lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}$ $(u_n) = \rho_{p(x)}$ (u),

ifadeleri eşdeğerdir (Kovăčik ve Răkosnik 1991; Fan ve Zhao 2001; Fan ve Han 2004; Fan 2005).

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.10.9: Ω üzerinde tanımlı tüm sınırlı ölçülebilir fonksiyonların kümesi $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)}\right)$ uzayında yoğundur (Willem 1996; Fan ve Zhao 2001).

Teorem 2.10.10: Eğer $p^+ < \infty$ ise, o zaman $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)}\right)$ uzayı ayrılabilir. Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, o zaman $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)}\right)$ uzayı düzgün konvenks ve dolayısıyla yansımalı bir uzay olur (Kovăčik ve Răkosnik 1991; Willem 1996; Fan ve Zhao 2001).

Teorem 2.10.11: Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bir bölge ise, o zaman $C(\Omega) \cap L^{p(x)}(\Omega)$ uzayı $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)}\right)$ uzayında yoğun olur (Willem 1996; Fan ve Zhao 2001).

Teorem 2.10.12: Eğer $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ bölgesi açık ise, bu durumda $C_0^\infty(\Omega)$ uzayı $\left(L^{p(x)}(\Omega), \|\cdot\|_{p(x)}\right)$ uzayında yoğundur (Winslow 1949; Fan ve Zhang 2003).

Teorem 2.10.13: $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı $L^{p'(x)}(\Omega)$ uzayıdır. Yani;

i) Her $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için

$$\phi(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \ \forall u \in L^{p(x)}(\Omega)$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyoneli $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir,

ii) $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde (2.10.1) şeklinde tanımlı her sürekli lineer fonksiyonel için tek bir $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ vardır (Adams 1975).

Tanım 2.10.14: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge, E kümesi Ω bölgesinin ölçülebilir bir alt kümesi ve $X_E(x)$, E nin karakteristik fonksiyonu olsun. Eğer, her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ için

$$\lim_{E\to\infty} \|u(x)X_E(x)\|_{p(x)} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, o zaman $u(x)$ fonksiyonuna $L^{p(x)}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan $\|\cdot\|_{p(x)}$ normuna göre **mutlak süreklidir** denir.

Teorem 2.10.15: Her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ fonksiyonu $\|\cdot\|_{p(x)}$ normuna göre mutlak süreklidir (Willem 1996; Fan ve Zhao. 2001).

Teorem 2.10.16 (Hölder Eşitsizliği): $L^{p'(x)}(\Omega)$ uzayı $L^{p(x)}(\Omega)$ uzayının dual uzayı ve

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$$

olmak üzere, her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ ve $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$ için

$$\left|\int_{\Omega} uvdx\right| \leq \left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{(p^-)'}\right)\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x))} \leq 2\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x))}$$

olur (Fan ve Zhao 2001; Fan 2005).

Teorem 2.10.17(Hölder Eşitsizliği): Her $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ ve $w \in L^{r(x)}(\Omega)$ için

$$\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}+\frac{1}{r(x)}=1$$

ise o zaman

$$\left|\int_{\Omega} uvwdx\right| \leq \left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^-}+\frac{1}{r^-}\right)\|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}\|w\|_{r(x)} \leq 3\|u\|_{p(x)}\|v\|_{q(x)}\|w\|_{r(x)}$$

olur (Fan ve Han 2004).

Teorem 2.10.18: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge, $0<|\Omega|<\infty$ ve $p(x), q(x) \in L_+^\infty(\Omega)$ olsun. Bu durumda $L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$ gömmesinin var olması için gerek ve yeter şart h.h.h. $x \in \Omega$ için $p(x) \leq q(x)$ olmasıdır. Ayrıca,

$$\|u\|_{p(x)} \leq C(1+|\Omega|)\|u\|_{q(x)}$$

eşitsizliği yazılabilir (Kováčik ve Răkosnik 1991).

Teorem 2.10.19 (Lebesgue Dominated Yakınsaklık Teoremi): $\Omega, \mathbb{R}^N$ de sınırlı bir bölge, Ω da $(u_n)_{n=1}^\infty$ ve ölçülebilir u fonksiyonları için Ω da h.h.h. $u_n \to u$ olsun. Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için Ω da h.h.h. $|u_n| \leq \varphi$ olacak şekilde bir $\varphi \in L^1(\Omega)$ varsa o zaman $L^1(\Omega)$ uzayında $u_n \to u$ olur (Wang 2002).

2.11. Değişken Üslü Sobolev Uzayı $\left(W^{m,p(x)}(\Omega)\right)$

Tanım 2.11.1: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de bir bölge ve $m \geq 0, m \in \mathbb{Z}$ olsun. $|\alpha| \leq m$ özellikli her α-çoklu indisi için Ω bölgesinde tanımlı $D^\alpha(u) \in L^{p(x)}(\Omega)$ şeklindeki tüm u fonksiyonlarının sınıfına **değişken üslü Sobolev uzayı** adı verilir ve

$$\left(W^{m,p(x)}(\Omega)\right) := \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega),\ \ |\alpha| \leq\ m\right\}$$

şeklinde yazılabilir. Bu uzayda tanımlanan

$$\|u\|_{W^{m,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x),m,\Omega} = \sum_{|\alpha| \leq m} |D^\alpha u|_{p(x)}$$

normu ile $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır. $W^{m,p(x)}(\Omega)$ uzayında $m = 1$ olarak alınırsa,

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\right\}$$

şeklinde tanımlanan $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayına dönüşür. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$$

olur. Bu norm ile $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayı olur.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının, $W^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayıdır. Bu uzayda tanımlanan norm

$$\|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{1,p(x)} = \|\nabla u\|_{p(x)}$$

şeklindedir. Bu norm altında $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayı da bir Banach uzayı olur.

Teorem 2.11.2: Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise $W^{m,p(x)}(\Omega)$, $W_0^{m,p(x)}(\Omega), W^{1,p(x)}(\Omega)$ ve $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ uzayları ayrılabilir ve yansımalı Banach uzaylarıdır (Willem 1996).

Teorem 2.11.3: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$sınırlı bir bölge ve $p(x), q(x) \in C(\overline{\Omega})$ olarak kabul edelim. $\forall x \in \overline{\Omega}$ için $1 \leq q(x) < p^*(x)$ ise, o zaman

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega) \text{ ve } W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli ve kompakt gömmesi vardır (Kováčik ve Răkosnik 1991; Fan vd 2001; Fan ve Zhao 2001).

Teorem 2.11.4: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $(N > 1)$ sınırlı bir bölge ve $p(x)$ fonksiyonu Ω bölgesinde sürekli ve her $x \in \Omega$ için

$$p(x) < \frac{N}{m}, \quad (m < N, m \in \mathbb{N})$$

olsun. Bu durumda

$$0 < \varepsilon < \frac{m}{N-m}$$

için

$$1 \leq q(x) \leq p^*(x) - \varepsilon, \quad \forall x \in \Omega$$

koşulunun altında

$$\|u\|_{q(x)} \leq c\|\nabla u\|_{p(x)}; \; u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti vardır (Kováčik ve Răkosnik 1991).

Aşağıdaki teoremde, Edmunds ve Răkosnik (2000) yukarıdaki teoremi $m = 1$ için ispatlamışlar.

Teorem 2.11.5: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $(N > 1)$ sınırlı bir bölge ve $p(x): \overline{\Omega} \to [1, N)$ fonksiyonu sürekli olsun. Ayrıca, $0 < \varepsilon < \frac{1}{N-1}$ ve her $x \in \Omega$ için $q(x)$ ölçülebilir fonksiyonu $1 \leq q(x) \leq p^*(x) - \varepsilon$ özelliğini sağlasın. Bu durumda

$$\|u\|_{q(x)} \leq c\|\nabla u\|_{p(x)}, u \in C_0^\infty(\Omega)$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c > 0$ sayısı vardır (Edmunds ve Răkosnik 2000).

Tanım 2.11.6: X, Y iki normlu uzay ve $f: X \to$ Y bir fonksiyon olmak üzere, herhangi $x_1, x_2 \in X$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq A|x_1 - x_2|^{\alpha}$$

olacak şekilde $A > 0$ ve $\alpha \in (0, 1]$ sayıları varsa f fonksiyonu X üzerinde **Hölder koşulunu** sağlar denir. A ve α sayılarına sırasıyla **Hölder katsayısı** ve **Hölder üssü** denir. Eğer $\alpha = 1$ ise

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

olacak şekilde negatif olmayan L sabiti varsa f fonksiyonu **Lipschitz koşulunu sağlar** veya f fonksiyonu **Lipschitz süreklidir** denir (Musayev ve Alp 2000).

Teorem 2.11.7: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $(N \geq 2)$ koni özelliğine sahip açık bir bölge, m pozitif bir sayı ve $p(x): \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \text{ ve } mp(x) < N$$

koşulunu sağlayan Lipschitz sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, $q(x): \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir fonksiyonu hemen hemen her $x \in \overline{\Omega}$ için

$$p(x) \leq q(x) \leq p^*(x)$$

sağlansın. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan vd 2001).

Teorem 2.11.8: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $(N \geq 2)$ koni özelliğine sahip açık bir bölge ve $p(x): \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \text{ ve } mp(x) < N$$

olacak şekilde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, Ω da tanımlı ölçülebilir $q(x)$ fonksiyonu hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$p(x) \leq q(x)$$

ve

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \overline{\Omega}} \big(p^*(x) - q(x)\big) > 0$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan vd 2001).

Teorem 2.11.9: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $p(x): \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \quad \text{ve} \quad mp(x) < N$$

olacak şekilde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca, Ω da tanımlı ölçülebilir $q(x)$ fonksiyonu hemen hemen her $x \in \Omega$ için

$$p(x) \leq q(x)$$

ve

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \overline{\Omega}} (p^*(x) - q(x)) > 0$$

koşulları sağlansın. Bu durumda

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli kompakt gömmesi vardır (Fan vd 2001).

Teorem 2.11.10: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge; $p(x)$ ve $q(x)$, Ω da ölçülebilir fonksiyonlar ve $p(x)$,

$$1 < p^- \leq p^+ < \frac{N}{m} \text{ ve } mp(x) < N$$

koşulunu sağlasın. Eğer

i) $p(x) \leq q(x) \leq \ p^*(x), \forall x \in \overline{\Omega},$

ii) $q(x): \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Lipschitz sürekli,

iii) $\underset{x \in \overline{\Omega}}{\operatorname{essinf}} \left(q(x) \frac{N-1}{N} - p(x) \right) > 0$

koşulları sağlanıyorsa

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow \ L^{q(x)}(\Omega)$$

sürekli gömmesi vardır (Fan vd 2001).

Teorem 2.11.11: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $x \in \Omega$ için

$$\sup_{x \in \Omega} q(x) \left[\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{N} \right] \leq 1 - \delta; \ \delta = \frac{q^+ - q^-}{N^*}, \ \ N^* = \frac{N}{N-1}$$

olacak şekilde $1 \leq q^- \leq q(x) \leq q^+ < \infty$ ve $1 \leq \ p^+ < N$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$C\ (N, p, q, \Omega) = \begin{cases} C\ (N, p, q) |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p^-} + \frac{1}{q^+}} & \text{eğer } |\Omega| \leq 1 \\ C\ (N, p, q) |\Omega|^{\frac{1}{N} - \frac{1}{p^+} + \frac{1}{q^-}} & \text{eğer } |\Omega| \geq 1 \end{cases}$$

olmak üzere, $u \in C_0^\infty \ (\Omega)$ için

$$\|u\|_{g(x)} \leq C(N, p, q, \Omega) \|\nabla u\|_{p(x)}$$

şartını sağlayan pozitif bir $C(N, p, q, \Omega)$ sayısı vardır (Çekiç 2005).

Tanım 2.11.12: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge ve $p(x): \Omega \to [1, \infty)$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in \Omega$ için

$$|p(x) - p(y)| \ \leq \frac{c}{-log|x-y|}, \ \ |x-y| < \frac{1}{2}$$

eşitsizliğini sağlayacak bir $c > 0$ sayısı varsa $p(x)$ fonksiyonuna (local olarak) **log-Hölder (Lipschitz) süreklidir** denir (Hudzik 1976).

Teorem 2.11.13: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de Lipschitz sınırına sahip açık sınırlı bir bölge, $1 < p^- \leq p^+ < N$, $\delta = \frac{q^+ - q^-}{N^*}$, $N^* = \frac{N}{N-1}$ ve $p(x)$ fonksiyonu local olarak log-Hölder sürekli olsun. Bu durumda en az bir $\delta > 0$ için $q(x) \leq p^*(x) - \delta$ özelliğindeki q fonksiyonu için

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır (Diening 2002).

Teorem 2.11.14 (Poincaré Eşitsizliği): $\Omega, \mathbb{R}^N$ de düzgün sınıra sahip bir bölge ve $p(x) \in L^\infty_+(\Omega)$ olacak şekilde bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ için

$$\|u\|_{p(x)} \leq c\|\nabla u\|_{p(x)}$$

eşitsizğini sağlayacak $c > 0$ sabiti vardır (Kováčik ve Răkosnik 1991).

2.12. Değişken Üslü Ağırlıklı Lebesgue Uzayı $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$

Tanım 2.12.1: $\Omega, \mathbb{R}^N$ de açık bir bölge ve a bir ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda $1 \leq p(x) \leq \infty$ için

$$\int_\Omega a(x)|u(x)|^{p(x)}\,dx < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların kümesine **değişken üslü ağırlıklı lebesgue uzayı** denir ve $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzay,

$$L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega) = \{u \in S(\Omega): \int_\Omega a(x)\,|u(x)|^{p(x)}\,dx < \infty;\ a: \Omega \to \mathbb{R}^+$$

şeklinde de yazılabilir. Bu uzay, değişken üslü Lebesgue uzayına benzer özellikler gösterir. $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)}(\Omega) := \|u\|_{a(x),p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0: \int a(x)\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

normu altında bir Banach uzayıdır.

Bu uzayda tanımlanan modüler fonksiyon; $\rho_{a(x),p(x)}(u)$: $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega) \to \mathbb{R}$

$$\rho_{a(x),p(x)}(u) = \int_{\Omega} a(x)|u(x)|^{p(x)}dx$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.12.2: Eğer $u \in L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için $(u_n) \in L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ ise, bu durumda

i) $u \neq 0$ için $\|u\|_{a(x),p(x)} = \lambda \Leftrightarrow \rho_{a(x),p(x)}\left(\frac{u}{\lambda}\right) = 1,$

ii) $\|u\|_{a(x),p(x)} > 1(< 1; = 1) \Leftrightarrow \rho_{a(x),p(x)}(u) > 1(< 1; = 1),$

iii) Eğer $\|u\|_{a(x),p(x)} > 1$ ise $\|u\|^{p^-}_{a(x),p(x)} \leq \rho_{a(x),p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^+}_{a(x),p(x)},$

iv) Eğer $\|u\|_{a(x),p(x)} < 1$ ise $\|u\|^{p^+}_{a(x),p(x)} \leq \rho_{a(x),p(x)}(u) \leq \|u\|^{p^-}_{a(x),p(x)},$

v) $\lim_{n\to\infty}\|u_n\|_{a(x),p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_{a(x),p(x)}(u_n) = 0,$

vi) $\|u_n\|_{a(x),p(x)} \to \infty \Leftrightarrow \rho_{a(x),p(x)}(u_n) \longrightarrow \infty$

olur (Fan ve Han 2004).

Teorem 2.12.3: Eğer $p^- > 1$ ve $p^+ < \infty$ ise, o zaman $L^{p(x)}_{a(x)}(\Omega)$ uzayı ayrılabilir ve yansımalı bir Banach uzayı olur (Fan vd 2005).

Teorem 2.12.4: $p(x)$ ve $q(x)$ ölçülebilir fonksiyonları her $x \in \Omega$ için $p(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ ve $1 \leq p(x).q(x) < \infty$ olsun. $u \in L^{q(x)}(\Omega)$, $u \neq 0$ ise o zaman

i) $\|u\|_{p(x),q(x)} \leq 1$ ise $\|u\|^{p^+}_{p(x).q(x)} \leq \left||u|^{p(x)}\right|_{q(x)} \leq |u|^{p^-}_{p(x).q(x)},$

ii) $\|u\|_{p(x),q(x)} > 1$ ise $\|u\|^{p^-}_{p(x).q(x)} \leq \left||u|^{p(x)}\right|_{q(x)} \leq |u|^{p^+}_{p(x).q(x)}$

yazılabilir. Eğer $p(x) = p$ şeklinde bir sabit ise

$$\||u|^p\|_{q(x)} = \|u\|_{pq(x)}^p$$

olur.

Teorem 2.12.5: Ω nın sınırı koni özelliğine sahip sınırlı bir bölge ve $p(x) \in C\,(\overline{\Omega})$ olsun. $x \in \Omega$ için $a(x) > 0, a(x) \in L^{r(x)}(\Omega), r(x) \in C\,(\overline{\Omega})$ ve $r^- > 1$ olarak kabul edilsin. Eğer $q(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $\forall x \in \overline{\Omega}$ için $1 \leq q(x) < \frac{r(x)-1}{r(x)} p^*(x)$ ise

$$W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega)$$

kompakt gömmesi vardır (Fan 2005).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

VARYASYONEL YAKŞLAŞIM ve VARYASYONEL YAKLAŞIMDA KULLANILAN YÖNTEMLER

Bu bölümde standart ve nonstandart büyüme koşuluna sahip kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığı için varyasyonel yaklaşım, bu yaklaşımla ilgili temel kavramlar, varyasyonel yaklaşıma ilişkin tanımlar ve teoremler ile varyasyonel yaklaşımda kullanılan yöntemler hakkında bilgi verilecektir.

Değişken üslü Lebesgue, değişken üslü Sobolev uzayları ayrılabilir ve yansımalı Banach uzaylardır. Bundan dolayı bu bölümdeki X Banach uzayı ayrılabilir ve yansımalı Banach uzay olarak alınacaktır (Kováčik ve Răkosnik 1991; Fan 2005; Diening vd 2011). Bu X Banach uzayının dual uzayı X^* ile gösterilecektir.

3.1. Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1: X bir Banach uzay ve $J: X \to \mathbb{R}$, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ sınıfından bir fonksiyonel olsun. Eğer, $\forall v \in X$;

$$\langle J'(u), v\rangle = 0$$

eşitliğini sağlayan herbir $u \in X$ e J fonksiyonelinin **kritik noktası** denir. Burada kullanılan $\langle ., . \rangle$, Hilbert uzayındaki iç çarpımdır.

Tanım 3.1.2: X bir Banach uzay ve $J: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olmak üzere $\forall\, u \in X$ elemanı için

$$|J(u)| \leq M$$

olacak şekilde $M > 0,\ M \in \mathbb{R}$ sayısı mevcutsa J fonksiyoneline **sınırlıdır** veya **iyi tanımlıdır** denir.

Tanım 3.1.3: X bir Banach uzay ve $J: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olmak üzere $\forall\, v \in X$ için

$$J(v^*) \leq J(v)$$

olacak şekilde bir X in v^* fonksiyonu varsa, bu v^* fonksiyonuna J fonksiyonelinin bir **minimumu** veya **minimize edicisi** denir ve

$$\inf_{v \in X} J(v) = J(v^*)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.1.4: X bir Banach uzay ve $J: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyonel olmak üzere $\forall\, (u_n) \subset X$ dizisi için

$$\lim_{n \to \infty} J(u_n) = \inf_{u \in X} J(u)$$

eşitliğini sağlayan (u_n) dizisine J enerji fonksiyonelinin **minimize dizisi** denir.

3.2. Varyasyonel Yaklaşım

Tanım 3.2.1: X bir Banach uzay ve $T: X \to X^*$ tanımlı bir operatör olmak üzere

$$T(\cdot) = J'(\cdot)$$

olacak şekilde bir $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli bulunabiliyorsa T operatörüne **varyasyonel operatör** denir. Eğer herhangi bir problem

$$T(\cdot) = 0$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu tip probleme **varyasyonel problem** denir.

Varyasyonel yaklaşım ile herhangi bir diferansiyel denklemi doğrudan çözmek yerine verilen diferansiyel denklemin çözümlerini ilgili enerji fonksiyonelinin kritik noktalarına veya minimize dizisine karşılık getirerek bulmak amaçlanır. $T(u) = J'(u)$ olduğu için $T(u) = 0$ denkleminin çözümü olan u fonksiyonları $J'(u) = 0$ enerji fonksiyonelinin de çözümüdür. Dolayısıyla, $J(u)$ enerji fonksiyonelini sağlayan u kritik noktaları aynı zamanda $T(u) = 0$ probleminin de zayıf çözümleridir. Diğer bir ifadeyle; X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ ve $J: X \to \mathbb{R}$ olmak üzere $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları, $F\big(x, u\,(x), \nabla u\,(x)\big) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümleri olduğundan dolayı varyasyonel yaklaşımla, herhangi bir $F(x, u(x), \nabla u\,(x)) = 0$ diferansiyel denkleminin çözümlerini bulmak için, $F\big(x, u\,(x), \nabla u\,(x)\big)$ e karşılık gelen ve

$$J(u) = \int_{\Omega} F(x, u\,(x), \nabla u\,(x))dx$$

şeklinde tanımlanan $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumları (veya kritik noktaları) olan $u = u(x)$ fonksiyonlarını elde etmek hedeflenir. $J(u)$ enerji fonksiyonelinin minimumlara sahip olması için gerek şart $J'(u)$ ya karşılık gelen Euler-Lagrange denkleminin sağlanması yani

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial(\nabla u)}\right) = 0$$

olmasıdır.

Tanım 3.2.2: X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere her $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $F(x, t) = \int_0^t f\,(x, s)ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon için

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\right|^{p(x)-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = -\operatorname{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\big) = f(x, u) \qquad (3.1.1)$$

kısmi diferansiyel denklem olmak üzere bu diferansiyel denkleme karşılık gelen

$$J(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx - \int_\Omega F(x,u)dx, \quad \forall u \in X$$

$J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyoneline **Euler-Lagrange fonksiyoneli** (enerji fonksiyoneli) denir. Bu J enerji fonksiyonelinin türevi

$$\langle J'(u), v \rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx,$$

olarak tanımlanır. Ayrıca, herbir $v \in C_0^\infty$ için

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u) v dx = 0$$

eşitliğini sağlayan her $u \in X$ e (3.1.1) diferansiyel denkleminin **zayıf çözümü** denir. Bir diferansiyel denklemin zayıf çözümleri olan $u \in X$ fonksiyonları aynı zamanda bu diferansiyel denklemin kritik noktalarıdır.

Tanım 3.2.3: X bir Banach uzay, $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(N \geq 2)$ sürekli bir fonksiyon ve her $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$ için $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)ds$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer her $x \in \Omega$ ve $|t| \geq M$ $(\exists M > 0), t \in \mathbb{R}$ için

$$0 < \theta F(x,t) \leq t f(x,t)$$

olacak şekilde en az bir tane $\theta > p^+$ sayısı varsa, f fonksiyonu **Ambrosetti - Rabinovitz koşulunu (AR)** sağlar denir.

AR koşulu bir problemin çözümü için sınırlı bir dizi bulmak gerektiğinde f fonksiyonunun sağlaması gereken önemli bir koşuldur.

Tanım 3.2.4: Yukarıda tanımladığımız (3.1.1) denkleminin,

$$I(u) = \int_\Omega \frac{1}{p(x)} |\nabla u|^{p(x)} dx$$

kısmı ve bu kısmın türevi

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v dx$$

aşağıdaki şartları sağlar.

i) $I(u)$ convex fonksiyoneldir.

ii) $I': X \to X^*$ fonksiyoneli sürekli, sınırlı ve kesin monotundur.

iii) $I': X \to X^*$ fonksiyoneli (S_+) tipindedir: Eğer $(u_n) \subset X$ dizisi için X uzayında $u_n \rightharpoonup u$ iken

$$\limsup_{n\to\infty} \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u\rangle \leq 0$$

oluyorsa o zaman X uzayında

$$u_n \to u$$

olur.

iv) $I': X \to X^*$ fonksiyoneli bir homeomorfizmdir.

Tanım 3.2.5: X bir Banach uzay, $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ sınırlı bir bölge ve $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir fonksiyonel olmak üzere f fonksiyoneli

i) Hemen hemen her $x \in \Omega$ için $\xi \longmapsto f(x, \xi)$ fonksiyoneli sürekli,

ii) Her $\xi \in \mathbb{R}$ için $x \longmapsto f(x, \xi)$ fonksiyoneli Ω da ölçülebilir

şartlarını sağlıyorsa f fonksiyoneli **Carathéodory koşulunu** sağlar denir.

Tanım 3.2.6: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ tanımlı bir fonksiyonel olmak üzere, eğer $u \in X$ için

$$\|u\|_X \to \infty \text{ iken } J(u) \to \infty$$

şartını sağlıyorsa J fonksiyoneline X üzerinde **Coercive** fonksiyoneldir denir.

3.3. Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Yöntemler

3.3.1 Nehari Manifold Yöntemi: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, X Banach uzayında tanımlı probleme karşılık gelen enerji fonksiyoneli olarak verilsin. Eğer J, X uzayında alttan sınırlı ve bir minimize sahipse o zaman bu minimize değeri J nin bir kritik noktasıdır. Bu kritik nokta aynı zamanda problemin çözümüdür. Birçok problemde; J enerji fonksiyoneli, X uzayının tamamında alttan sınırlı olmaz. Bu durumlarda X uzayının uygun bir alt uzayı üzerinde sınırlı olduğu gösterilir ve eğer uygun bir alt uzayı varsa problemin çözümleri bu uzayda araştırılır. Bütün bunlar için X in en uygun alt uzayı Nehari Manifoldu'dur. Nehari Manifoldu $(M_{\lambda}(\Omega))$;

$$M_{\lambda}(\Omega) = \{u \in X : \langle J'(u), u \rangle = 0\}$$

şeklinde tanımlanır. $\langle .,. \rangle$, X ve X^* arasındaki iç çarpımdır. Nehari Manifoldu aşağıda gösterildiği gibi local minimum $\left(M_\lambda^+(\Omega)\right)$, local maximum $\left(M_\lambda^-(\Omega)\right)$ ve dönüm noktaları $\left(M_\lambda^0(\Omega)\right)$ olarak

$$M_\lambda^+(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle J''(u), u \rangle > 0\}$$
$$M_\lambda^-(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle J''(u), u \rangle < 0\}$$
$$M_\lambda^0(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \langle J''(u), u \rangle = 0\}$$

şeklinde üç ayrı kümeye ayrılır. Bu durumda, J nin bütün kritik noktaları $M_\lambda(\Omega)$ üzerindedir. $M_\lambda(\Omega)$ üzerindeki local minimize fonksiyonu, aynı zamanda J nin kritik noktasıdır. Dolayısıyla bu kritik noktalar problemin çözümleri olur.

Wu (2007),

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x)|u|^{q-2}u + g(x)|u|^{r-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki eliptik denklemi ele almıştır. Denklemde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $1 < q < p < r < p^*(N > \text{p ise } p^* = \frac{Np}{N-p};\ N \leq \text{p ise } p^* = \infty)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve f, g ağırlık fonksiyonları $f^{\mp} = \max\{\mp f, 0\} \neq 0$ ve $g^{\mp} = \max\{\mp g, 0\} \neq 0$ olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmada, varyasyonel yaklaşımla Nehari Manifold Yöntemi kullanılarak, denklemin Superlineer ve Sublineer durumları incelenerek, denklemin en az iki pozitif çözümünün varlığı gösterilmiştir.

3.3.2 Fibrering Yöntemi: $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, X Banach uzayında tanımlı bir probleme karşılık gelen enerji fonksiyoneli ve $M_\lambda(\Omega)$ Nehari Manifold'u olarak tanımlayalım. Nehari Manifold'u $\phi_u(t) = J(tu)\ (t > 0)$ fonksiyonelinin davranışı ile yakından ilişkilidir. $\phi_u(t) = J(tu)\ (t > 0)$ fonksiyonelinin davranışı Fibrering yaklaşımı olarak adlandırılır. Nehari Manifoldu'nun tanımından,

$$u \in M_\lambda(\Omega) \Leftrightarrow \phi'_u(1) = 0$$

ve daha genel olarak,

$$\phi'_u(t) = 0 \Leftrightarrow tu \in M_\lambda(\Omega)$$

yazılabilir.

$M_\lambda(\Omega)$ nın bütün elemanları, Fibrering yaklaşımındaki durgun (stationary points) noktalara veya J fonksiyonelinin kritik noktalarına karşılık gelir. Fibrering yaklaşımı da Nehari Manifoldu yaklaşımına benzer olarak aşağıdaki gibi local minimum $\left(M_\lambda^+(\Omega)\right)$, local maximum $\left(M_\lambda^-(\Omega)\right)$ ve dönüm noktaları $\left(M_\lambda^0(\Omega)\right)$ olarak üç ayrı kümeye ayrılır.

$$M_\lambda^+(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi''_u(t) > 0\}$$
$$M_\lambda^-(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi''_u(t) < 0\}$$
$$M_\lambda^0(\Omega) = \{u \in M_\lambda(\Omega) : \phi''_u(t) = 0\}$$

Eğer u, J fonksiyonelinin local minimizesi ise o zaman ϕ_u, $t = 1$ için bir local minimuma sahiptir. Sonuç olarak, $\phi'_u(t) = 0$ ise $t = t(u)$ noktası J fonksiyonelinin bir kritik noktasıdır (Afrouzi vd 2007; Brown ve Zhang 2003).

3.4. Varyasyonel Yaklaşımda Kullanılan Teoremler

Teorem 3.4.1: X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli,

i) J enerji fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

ii) J enerji fonksiyoneli X üzerinde coercive, yani $\|u\|_X \to \infty$ iken $J(u) \to \infty$

şartlarını sağlıyorsa

$$J(u) = \inf_{v \in X} J\,(v)$$

eşitliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Alttan zayıf yarı sürekli ve coercive şartlarını sağlayan J fonksiyonelinin bir minimum noktası vardır. J enerji fonksiyoneli eğer alttan zayıf yarı sürekli ve coercive şartlarını sağlamazsa bu teorem geçersizdir. Bu teoremin geçersiz olduğu durumda Kritik Nokta Teorisi kullanılır. Kritik nokta teorisine göre, fonksiyonelin alttan sınırlı olmadığı durumlarda fonksiyoneli minimize eden global minimum değerler yerine kritik noktalar (saddle points) bulunur.

Tanım 3.4.2 (Palais-Smale Dizisi): X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi için

i) $|J(u_n)| \leq c, c \in \mathbb{R}$,

ii) X^*uzayında $n \to \infty$ için $J'(u_n) \to 0$

şartları sağlanıyorsa, (u_n) dizisine J enerji fonksiyonelinin bir **Palais-Smale dizisi** denir. Palais-Smale dizisi $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyonelini minimize yapar.

$J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli alttan sınırlı değilse, J enerji fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi hakkında kesin birşey söylenemez (Winslow 1949; Fan ve Han 2004).

Teorem 3.4.3 (Palais-Smale Koşulu): X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyonelinin her Palais-Smale dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahip ise J enerji fonksiyoneli Palais-Smale koşuluna sahiptir denir (Willem 1996; Fan ve Zhang 2003; Mihăilescu 2008; Schechter 2007).

Tanım 3.4.4: X bir Banach uzayı ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere

i) $\lim_{n\to\infty} J(u_n) = c,\ \ c \in \mathbb{R}$,

ii) X^* uzayında $n \to \infty$ için $J'(u_n) \to 0$

şartlarını sağlayan bir $(u_n) \subset X$ dizisi güçlü yakınsak bir alt diziye sahipse J enerji fonksiyoneli $c \in \mathbb{R}$ seviyesinde $(PS)_c$ koşulunu sağlar denir. Eğer J enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlarsa, o zaman her $c \in \mathbb{R}$ için $(PS)_c$ koşulunu da sağlar.

Teorem 3.4.5 (Ekeland Varyasyonel Prensibi): X bir Banach uzay ve $J: X \to (-\infty, \infty)$ tanımlı bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli,

i) J enerji fonksiyoneli X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

ii) J enerji fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlı

şartlarını sağlarsa her $\varepsilon > 0$ için

$$J(u_\varepsilon) < \inf_{u\in X} J(u) + \varepsilon$$
$$J(u_\varepsilon) < J(u) + \varepsilon \|u_\varepsilon - u\|_X,\ \ u_\varepsilon \neq u$$

olacak şekilde bir $(u_\varepsilon) \in X$ dizisi vardır. Ekeland's Varyasyonel yaklaşımıyla J enerji fonksiyonelinin Palais-Smale dizisi elde edilebilir (Willem 1996; Mihăilescu 2006; Brezis ve Nirenberg 1991).

Teorem 3.4.6 (Ekeland Varyasyonel Prensibi 2): X bir Banach uzay ve $J: X \to (-\infty, \infty)$ alttan sınırlı bir enerji fonksiyoneli ise her $\varepsilon > 0$ için

$$J(u) < \inf_{u\in X} J(u) + \varepsilon$$
$$X^* \text{ uzayında } |J'\,(u_n)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlağan bir $u \in X$ vardır (Willem 1996).

Teorem 3.4.7: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli,

i) (PS) koşulunu,

ii) X üzerinde alttan sınırlı

şartlarını sağlıyorsa

$$J(u) < \inf_{v \in X} J(v) + \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Teorem 3.4.8: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli,

i) X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

ii) X üzerinde coercive, yani $\|u\|_x \to \infty$ iken $J(u) \to \infty$,

iii) X üzerinde alttan sınırlı

şartlarını sağlıyorsa

$$J(u) < \inf_{v \in X} J(v)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Teorem 3.4.9: X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli,

i) X üzerinde alttan zayıf yarı sürekli,

ii) X üzerinde coercive, yani $\|u\|_x \to \infty$ iken $J(u) \to \infty$

şartlarını sağlıyorsa J enerji fonksiyoneli X üzerinde alttan sınırlıdır ve

$$J(u) < \inf_{v \in X} J(v)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $u \in X$ minimize fonksiyonu vardır (Willem 1996).

Tanım 3.4.10 (Cerami koşulu): X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ bir enerji fonksiyoneli olmak üzere J enerji fonksiyoneli, herhangi bir $(u_n) \subset X$ dizisi için

i) $|J(u_n| \leq C$,

ii) $n \to +\infty$ iken $(1 + \|u_n\|_X)|J'(u_n)| \to 0$

şartlarını sağlayan yakınsak bir alt diziye sahip ise J enerji fonksiyoneli Cerami koşuluna (C) sahiptir denir. Buradaki (u_n) dizisine de **Cerami dizisi** denir (Willem 1996; Schechter 2007; Zang 2008).

Teorem 3.4.11 (Mountain Pass Geometrisi): X bir Banach uzay ve $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu ve $J(0) = 0$ şartını sağlasın. Farzedelim ki J fonksiyoneli,

i) Her $u \in X$ fonksiyonu için

$$\|u\|_X = \rho \text{ iken } J(u) \geq \alpha > 0$$

koşullarını sağlayan α ve ρ pozitif sayılar vardır,

ii) $J(w) < 0$ (veya $t \to \infty$ iken $J(tw) < -\infty$) olacak şekilde $\|u\|_X > \rho$ şartını sağlayan bir $w \in X$ fonksiyonu vardır

şeklindeki geometrik şartları sağlarsa J enerji fonksiyoneli, X uzayında sıfırdan farklı en az bir kritik noktaya sahiptir (Napoli ve Mariani 2003; Vu 2005).

Mountain Pass Geometrisi, J enerji fonksiyonelinin coercive'lik özelliğinin yerine kullanılabilir. Palais-Smale koşulunu ve Mountain Pass Geometri'sini sağlayan bir J enerji fonksiyonelinin en az bir kritik noktası vardır. Bu kritik noktanın varlığı bize verilen denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğunu gösterir.

Calotă (2008),

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{q(x)-2}u + |u|^{p^*-2}u, & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip, nonstandart büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemini incelemiştir. Denklemde, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ düzgün sınıra sahip açık sınırlı bir bölge, $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $x \in \overline{\Omega}$ için $q(x) > 1$ ve $q(x) \in C\,(\overline{\Omega})$, $1 <$ p $< N$, $\lambda > 0$ bir sabit ve $\mathrm{p}^* = \frac{Np}{N-p}$ Sobolev kritik üs olarak alınmıştır. Bu çalışmada; Calotă varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass teoremi ve Ekeland prensibini kullanarak, denklemin Superlineer durumunu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümü olduğunu göstermiştir.

Teorem 3.4.12 (Genelleştirilmiş Mountain Pass Teoremi): X bir Banach uzayı, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlasın ve $J(0) = 0$ olmak üzere

i) $\|u\|_X > \rho$ iken $J(u) \leq J(0)$,

ii) $\alpha = \inf\{J(u{:}\, u \in X, \|u\| = \rho\} > 0$, olacak şekilde bir ρ pozitif sayısı ve $u \in X$ olsun. Ayrıca $\mathrm{G} \neq \emptyset$ olacak şekilde

$$\mathrm{G} = \{\, \varphi \in C([0,1], X) \colon \varphi(0) = 0, \varphi(1) = v\}$$

ve

$$\beta = \inf\{\max J\,(\varphi\,([0,1])) \colon \varphi \in G\}$$

kümeleri verilsin. Bu durumda $\alpha \leq \beta < +\infty$ için $\beta,\ J$ nin kritik noktasıdır (Ambrosetti ve Rabinowitz 1973; Duc 1989; Edmunds ve Răkosnik 2000; Mihăilescu ve Rădulescu 2006; Schechter 2007; Toan ve Ngô 2009).

Mihăilescu ve Rădulescu (2006),

$$\begin{cases} \mathrm{div}\big(a(x, \nabla u)\big) = \lambda\big(u^{\gamma-1} - u^{\beta-1}\big), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \\ u(x) \geq 0, & x \in \Omega \end{cases}$$

şeklindeki dejenere sınır koşullarına ve nonstandart büyüme koşuluna sahip denklemi incelemişler. Burada, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ sınırlı bir bölge, $\lambda > 0$, her $x \in \overline{\Omega}$ için

$1 < \beta < \gamma < \inf\limits_{x\in\Omega} p(x)$ ve $p(x) > 1$ dir. Bu makalede Mihăilescu ve Rădulescu varyasyonel yaklaşımla Kritik nokta teorisi ve Genelleştirilmiş Mountain Pass teoremi kullanıp, denklemin Sublineer durumu inceleyerek, denklemin sıfırdan farklı en az iki zayıf çözümü olduğunu göstermiştir.

Bu açıklanan yöntemlerle, verilen bir standart olmayan büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemin en az bir çözümünün varlığını göstermek için yeterlidir. Ancak, denklemin sonsuz çözümünün varlığını gösterebilmek için bazı teoremlerin de ispatlanması gerekecektir. Bunlardan bir tanesi Z_2-Symmetric Mountain Pass Lemma olarak bilinen teoremdir. Diğer önemli teorem ise Fountain Teoremi'dir.

Teorem 3.4.13 ($\mathbb{Z}_2$-Symmetric Mountain-Pass Teoremi): X sonsuz boyutlu bir Banach uzayı, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli (PS) koşulunu sağlayan çift bir fonksiyonel ve $J(0) = 0$ olmak üzere J enerji fonksiyoneli

i) Her $u \in X$ fonksiyonu için

$$\|u\|_X = \rho \text{ iken } J(u) \geq \alpha > 0,$$

olacak şekilde α ve ρ pozitif sayıları vardır,

ii) X in her sonlu boyutlu X_1 $(X_1 \subset X)$ alt uzay için

$$\{u \in X_1 : J(u) \geq 0\}$$

kümesi X de sınırlıdır

şartlarını sağlarsa J enerji fonksiyoneli, X uzayında sınırsız olan bir kiritik değerler dizisine sahiptir (Willem 1996; Napoli ve Mariani 2003; Mihăilescu 2008; Toan ve Ngô 2009).

$\mathbb{Z}_2$-Symmetric Mountain-Pass Teoremi, denklemin sonsuz çözümünün varlığını göstermek için kullanılmaktadır.

Mihăilescu (2008) ,

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p_1(x)-2}\nabla u\right) + \left(|\nabla u|^{p_2(x)-2}\nabla u\right) = \pm\left(-\lambda|u|^{m(x)-2}u + |u|^{q(x)-2}\right), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip, nonstandart büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemi incelemiştir. Burada, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ düzgün sınıra sahip sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ ve $i \in \{1,2\}$ için $p_i(x) > 1$ ve $q(x), p_i(x) \in C(\overline{\Omega}), \lambda > 0$, $m(x) = \max\{p_1(x), p_2(x)\} < q(x) < \frac{Nm(x)}{N-m(x)}$ olarak alınmaktadır. Bu çalışmada, varyasyonel yaklaşımla Mountain Pass Geometrisi kullanılarak denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu ve $\mathbb{Z}_2$-Simetrik Mountain Pass teoremini kullanılarak, denklemin sonsuz çözümünün varlığı gösterilmiştir.

Tanım 3.4.14: X yansımalı ve ayrılabilir bir Banach uzay olsun. $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ olmak üzere $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$ için

$$f_n(e_m) = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

ve

$$X = \overline{\operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}^*\}} \text{ ve } X^* = \overline{\operatorname{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}^*\}}$$

olacak şekilde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq X$ ve $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} \subseteq X^*$ vardır. Bu durumda $k \in \mathbb{N}^*$ için

$$\mathrm{X_k} = \operatorname{span}\{e_k\}, \qquad \mathrm{Y_k} = \oplus_{j=1}^{k} = X_j, \quad \mathrm{Z_k} = \overline{\oplus_{j=k}^{\infty} = X_j},$$

olmak üzere X uzayı, $X = Y_k \oplus Z_k$ şeklinde iki uzayın toplamı olarak yazılabilir.

Teorem 3.4.15 (Fountain Teorem): X bir Banach uzay, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ çift bir fonksiyonel ve X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer herbir $\mathrm{k} \in \mathbb{N}^*$için

i) $k \to \infty$ iken $\inf\limits_{u\in Z_k, \|u\|=\gamma_k} j(u) \to +\infty$,

ii) $\max\limits_{u\in Y_k, \|u\|=\rho_k} j(u) \leq 0$,

iii) Herbir $c > 0$ için J fonksiyoneli (PS) koşulu şartlarını sağlayacak şekilde $\rho_k > \gamma_k > 0$ sayıları varsa, o zaman J fonksiyoneli X uzayında sınırsız olan (∞'a yakınsayan) bir kritik değerler dizisine sahiptir (Willem 1996; Fan ve Han 2004).

Fan ve Zhang (2003),

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip, $p(x)$-Laplace operatörünü içeren, nonstandart büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemini incelemişlerdir. Bu çalışmada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bir bölge, $\Delta_{p(x)}u(x) = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$, her $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) > 1,\ p(x) \in C\,(\overline{\Omega})$ ve $f(x,u)\colon \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel şartlara (büyüme koşulu, Carathedory koşulu ve AR koşulu) sahip bir fonksiyon olmak üzere, varyasyonel yaklaşımla, AR koşulu altında Fountain teoremi kullanılıp, denklemin Sublineer durumu incelenerek, denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Teorem 3.4.16: X bir Banach uzay, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ enerji fonksiyoneli, $c \in \mathbb{R}$ ve X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olmak üzere herhangi bir $(u_{n_j}) \subset X$ dizisi için

i) $\left|J(u_{n_j})\right| < c,\ u_{n_j} \in Y_{u_{n_j}}$,

ii) $u_{n_j} \to \infty$ iken $\left(J_{Y_{u_{n_j}}}\right)'(u_{n_j}) \to 0$

şartları sağlanıyorsa (u_{n_j}) dizisine J enerji fonksiyonelinin bir $((PS)_c^*)$ dizisi denir (Willem 1996; Fan ve Han 2004; Vu 2005).

Eğer $(PS)_c^*$ dizisinin güçlü yakınsak bir alt dizisi varsa J enerji fonksiyoneli $((PS)_c^*)$ koşulunu sağlar denir. $(PS)_c^*$ dizisi J enerji fonksiyonelinin bir kritik noktasıdır.

Teorem 3.4.17 (Dual Fountain Teorem): X bir Banach uzay, $J \in C^1(X,\mathbb{R})$ bir çift fonksiyonel, X_k, Y_k ve Z_k alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer herbir $k > k_0$ için $k_0 > 0$ olacak şekilde k_0 var ve

i) $a_k \coloneqq \inf\limits_{u \in Z_k, \|u\| = \rho_k} J(u) \geq 0,$

ii) $b_k \coloneqq \max\limits_{u \in Y_k, \|u\| = \gamma_k} J(u) < 0,$

iii) $d_k \coloneqq \inf\limits_{u \in Z_k, \|u\| \leq \rho_k} J(u) \to 0, \ k \to \infty,$

iv) Herbir $c \in [d_{k_0}, 0)$ için J fonksiyoneli $((PS)_c^*)$ koşulu

şartlarını sağlayacak şekilde $\rho_k > \gamma_k > 0$ sayıları da varsa, bu durumda J fonksiyoneli X uzayında 0'a yakınsayan bir negatif kritik noktalar dizisine sahip olur (Wang 2002).

Fan (2005),

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = \lambda a_1(x) g_1(x,u) + \mu a_2(x) g_2(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki $p(x)$-Laplace operatörünü içeren, nonstandart büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemi ele almışlardır. Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ açık sınırlı bir bölge, $p(x) \in C(\overline{\Omega})$, $1 < p^- \leq p^+ < N, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2$ ve $x \in \Omega$ için $a_i \in L^{r_i(x)}$, $a_i(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, $g_i(x): \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel şartlara (büyüme koşulu ve Carathedory koşulu) sahip fonksiyon olmak üzere varyasyonel yaklaşımla Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılıp, denklemin Sublineer ve Superlineer durumları birlikte incelenerek, denklemin çözümünün varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Zang (2008),

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)} u(x) = -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip, $p(x)$-Laplace operatörünü içeren, nonstandart büyüme koşullu lineer olmayan eliptik denklemi incelemiştir. Bu çalışmada, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, $f(x,u): \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bazı özel koşulları (büyüme koşulu, Carathedory koşulu) sağlayan bir fonksiyon, her $x \in \overline{\Omega}$ için $p(x) > 1$ ve $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ olmak üzere varyasyonel yaklaşımla Cerami koşulu altında Fountain teoremi kullanılıp, denklemin Superlineer durumu incelenerek, denklemin çözümünün varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Yao (2006),

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + |u|^{p(x)-2}u = \lambda f(x,u), & x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial v} = \mu g(x,u), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Neumann sınır koşullarına sahip, nonstandart büyüme koşullu lineer olmayan denklemi ele almıştır. Bu çalışmada, $\Omega \subset \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) > 1,\ p(x) \in C(\overline{\Omega}), f$ ve g bazı özel şartları (büyüme koşulu, Carathedory koşulu ve AR koşulu) sağlayan fonksiyonlar ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ (\lambda^2 + \mu^2 \neq 0)$ olmak üzere varyasyonel yaklaşımla denklemin Sublineer durumu incelenerek, Mountain Pass Geometrisini kullanıp denklemin sıfırdan farklı en az bir çözümünün olduğu ve Fountain ile Dual Fountain teoremleriyle de denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Dai ve Hao (2009),

$$\begin{cases} -M\left(\displaystyle\int_{\Omega} \frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}dx\right)\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) = f(x,u), & x \in \Omega \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

şeklindeki Dirichlet sınır koşullarına sahip Kirchoff problemini incelemişler. Denklemde $\Omega \subset \mathbb{R}^N \quad (N \geq 2)$ sınırlı bir bölge, her $x \in \Omega$ için $p(x) \in C(\overline{\Omega})$ ve $1 < \mathrm{p}^- \leq \mathrm{p}^+ < N$, $\mathrm{f}(x,u): \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ büyüme koşulunu ve Carathedory koşulunu sağlayan lineer olmayan bir fonksiyon ve $\mathrm{M(t)}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere varyasyonel yaklaşımla Fountain ve Dual Fountain teoremleri kullanılıp denklemin çözümlerinin varlığı ve katlılığı gösterilmiştir.

Teorem 3.4.18 (Saddle Point Theorem): X bir Banach uzayı, X, V ve W alt uzayları yukarıda tanımladığımız gibi birer uzay olsunlar. Eğer $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ fonksiyonel Palais-Smale koşulunu $((PS)_c)$ sağlıyor ve

i) $J|_{\partial D} < \alpha$ olacak şekilde V uzayında 0'ın sınırlı bir D komşuluğu ve bir α sabiti vardır,

ii) $J|_W \leq \beta$ olacak şekilde $\beta > \alpha$ sabiti vardır

koşullarını da sağlıyorsa, o zaman J fonksiyoneli

$$\Gamma = \{h \in C(\overline{D}, \mathrm{E}) : \partial D\text{'da } h = \mathrm{I}(\text{özdeşlik fonksiyonu})\}$$

için

$$\mathrm{c} = \underbrace{\inf}_{h \in \Gamma} \underbrace{\max}_{x \in \overline{D}} J(h\,(u)) \geq \beta$$

olacak şekilde bir kritik değere sahiptir (Buenrostro ve Garza 2005).

Buenrostro ve Garza (2005),

$$\Delta_p u(x) = \lambda_1 h(x)|u|^{p-2}u + a(x)g(u) + f(x), u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

şeklindeki p-Laplace operatörünü içeren, Rezonans problemini ele almışlar. Denklemde; $2 < p < N, (N \geq 3)$, her $s \in \mathbb{R}$ için $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli sınırlı bir fonksiyon $(|g(s)| \leq M)$, $f \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)$ ($p^* = \frac{Np}{N-p}$ ve $(p^*)'$ ise p^*'ın dualidir), $h(x) = h(|x|)$ bir ağırlık fonksiyonu, $\alpha \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ ve $\lambda_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ uzayında p-Laplace birinci özdeğeri olarak alınmaktadır. Çalışmada; varyasyonel yaklaşımla Saddle Point Teoremi kullanılarak, problemin zayıf çözümünün varlığı gösterilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

GRADİENT İÇEREN $p(x)$ LAPLACİAN DENKLEMİ İÇİN DİRİCHLET PROBLEMİNİN MOUNTAİN PASS ve İTERASYON TEKNİKLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, doğrusal olmayan gradient çözümüne bağımlı olan homojen Dirichlet sınır değer şartı altında değişken üslü quasilinear eliptik denklemi ele alıp, Mauntain Pass tekniğine bağlı bir iterasyon kullanarak pozitif bir çözümün varlığını elde edeceğiz.

Mevcut çalışmada, herhangi bir $1 < p(x) < 2,\ x \in \bar{G}$ ve bazı özel şartları sağlayan sürekli fonksiyon f için $G \subset \mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölgede

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + |u|^{p(x)-2}u = f(x, u, |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u), & x \in G \\ u = 0, & x \in \partial G \end{cases} \tag{P}$$

probleminin çözümlerinin varlığı çalışıldı. (P) problemi $p(x)$-Laplacian operatörü olarak bilinen $\Delta_{p(x)}u := \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$ ifadesini içerir. $p(x)$-Laplacian operatörü p-Laplacian opearatörünün genelleştirilmiş bir halidir. Nonlinear f fonksiyonu gradientine bağımlı olduğu için, (P) denklemi varyasyonel değildir. Bu yüzden iyi gelişmiş Kritik Nokta teorisi doğrudan uygulanamaz. $\mathbb{R}^N$ nin G sınırlı bölgesinde f nin sublineer ve superlineer durumları incelenerek aşağıdaki Drichlet probleminin çözümün sınırlılığı

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, \nabla u), & x \in G \\ u = 0, & x \in \partial G \end{cases} \tag{4.1}$$

ile ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin Wang ve Ding (1995); Ruiz ve Suarez (2007). $p > 1$ reel sabit olan p-Laplacian operatörü içeren durum yani $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ Montenegro ve Montenegro (2000); Ruiz (2004); Iturriaga ve Lorca (2007) makalelerinde çalışıldı. Bu çalışmalarda araştırmacılar sublineer ve superlineer çözümler metodu kullanarak topolojik derece ve blow-up (patlama) durumlarını incelemişlerdir. Son zamanlarda (4.1) problemi için farklı araştırmacılar tarafından bazı yeni ve ilginç metodlar geliştirildi. Figueiredo vd (2004) makalesinde D. De Figueiredo $G \in \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ düzgün sınırlı bölgede

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, u, \nabla u), & x \in G \\ u = 0, & x \in \partial G \end{cases} \tag{4.2}$$

yarı lineer eliptik problem için varyasyonel tipin oldukça farklı tipini geliştirdi. Bu çalışmada varyasyonel ve iterasyon şeması, yarı eliptik problemlerin bir ailesi ile ilişkilendirilerek oluşturulan bu teknik çözümlerin gradientinden bağımsızdır. İkinci değişkenin sonsuza ve sıfıra yaklaşmasıyla f nin superlineer subcritical büyümeye sahip olduğu varsayımları altında Mountain Pass teoremi ve iterasyon teknikleri kullanarak (4.2) nin pozitif ve negatif çözümlerinin varlığını elde ettiler. Sonra Figueiredo (2008) de G.M. Figueiredo $1 < p < N$, gradient içeren fonksiyon olan sağdan sürekli nonlineer $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2}u = f(u, |\nabla u|^{p-2}\nabla u), \tag{4.3}$$

$\mathbb{R}^N$ de quasilinear eliptik problem için bu metodu uyguladı ve (4.3) için pozitif bir çözüm elde etti.

Yukarıda adı geçen çalışmaları, sınırlı G bölgesinde p sabiti yerine $p(x)$ fonksiyonunu ve $f(u, |\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ yerine $f\left(x, u, |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$ alarak genelleştirdik. Çözümün gradientinden bağımsız değişken üslü bir eliptik denklemle ilgili az sayıda çalışma mevcuttur. Bu çalışmalardan biri, Ayazoğlu ve Ekincioğlu (2016) dır. Bu çalışmada (P) probleminin $p(x) > 2$ durumu incelenmiştir.

$p(x)$-Laplacian operatörü ile p-Laplacian opearatörü arasındaki ana fark p-Laplacian operatörü $(p-1)$-nonlineer ve homejendir, fakat $p(x)$-Laplacian operatörü $p(x)$ sürekli olmadığından nonlineer ve nonhomojen olma özelliğine sahiptir. Bu yüzden birçok problemde Sobolev uzayların teorisi gibi bazı klasik teori ve metodlar uygulanamaz. Dahası $p(x)$-Laplacian operatör içeren nonlinear problemler electroreheolojik akışkanlar ve elastic mekaniklerin çalışmasından ortaya çıkan dinamik fenomenler modeli için kullanılabildiğinden oldukça çekicidir. Değişken üslü büyüme koşullu problemlere ayrıca Non-Newtonian akışkanlarının sabit thermorheological viskoz modellemesinde ve ideal bir barotrapik gazın gözenekli ortam boyunca süzme sürecinin matematiksel modellemesinde rastlanır. $p(x)$-Laplacian'ın detaylı uygulamaları Růžička (2000); Fan ve Zhao (2001); Boureanu vd (2011); Diening vd (2011); Chung (2013) çalışmalarında verilmiştir.

4.1 Ön Bilgiler:

Çalışmamızın bu kısmında $G \subset \mathbb{R}^N$ sınırlı bölgesinde değişken üslü Lebesgue ve Sobolev uzaylarının bazı temel özelliklerini ifade ettik. Detaylar için Kováčik ve Răkosnik (1991); Fan vd (2001); Fan ve Zhao (2001); Diening vd (2011) e bakınız.

$$\forall x \in \bar{G};\ C_+(\bar{G}) = \{f : f \in C(G), f(x) > 1\}$$

olsun.

$$f^- = \min_{x \in \bar{G}} f(x) \text{ ve } f^+ = \max_{x \in \bar{G}} f(x),\ \forall f \in C_+(\bar{G})$$

olarak tanımlayalım. Herhangi bir $p \in C_+(\bar{G})$ için

$$L^{p(x)}(G) = \left\{ u \,\middle|\, u: G \to \mathbb{R} \text{ ölçülebilir}, \quad \int_G |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \right\}$$

olarak değişken üslü Lebesgue uzayını tanımlayalım, sonra $L^{p(x)}(G)$

$$\|u\|_{L^{p(x)}(G)} := \|u\|_{p(x)} = \inf\left\{ \lambda > 0: \int_G \left| \frac{u(x)}{\lambda} \right| dx \le 1 \right\}$$

Luxemburg normuyla donatalım.

$\rho: L^{p(x)}(G) \to \mathbb{R}$ dönüşümü olan $L^{p(x)}(G)$ in modüleri her $u \in L^{p(x)}(G)$ için

$$\rho_{p(x)}(u) = \int_G |u|^{p(x)} dx$$

olarak tanımlanır.

Önerme 4.1.1: Eğer $u, u_n \in L^{p(x)}(G)$ $(n = 1,2, \dots)$ ise aşağıdaki ifadeler birbirine denktir (Kováčik ve Rákosnik 1991; Fan vd 2001).

i) $\lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n - u) = 0$;

ii) $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = 0$;

iii) $u_n \to u$, (G deki ölçüme göre) ve $\lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n) = \rho_{p(x)}(u)$.

Önerme 4.1.2: Eğer $u, u_n \in L^{p(x)}(G)$ $(n = 1,2, \dots)$ ise

i) $\|u\|_{p(x)} > 1 (< 1; = 1) \Leftrightarrow \rho_{p(x)}(u) > 1\ (< 1; = 1)$;

ii) $\|u\|_{p(x)} < 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^+} \le \rho_{p(x)}(u) \le \|u\|_{p(x)}^{p^-}$;

$\|u\|_{p(x)} > 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^-} \le \rho_{p(x)}(u) \le \|u\|_{p(x)}^{p^+}$;

iii) $\lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(u_n) = 0$;

$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{p(x)} = \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \rho_{p(x)}(u_n) = \infty$

dır (Kováčik ve Rákosnik 1991; Fan vd 2001).

$W^{1,p(x)}\ (G)$ değişken üslü Sobolev uzayı $\forall u \in W^{1,p(x)}\ (G)$ için

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}\ (G)} := \|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}$$

normuyla

$$W^{1,p(x)}(G) = \{u \in L^{p(x)}(G) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(G)\}$$

olarak tanımlanır.

$W^{1,p(x)}(G)$ de $C_0^\infty(G)$ nın kapanışı $W_0^{1,p(x)}(G)$ dır ve $\|\nabla u\|_{p(x)}$, $W_0^{1,p(x)}(G)$ deki norma eşdeğerdir. Eğer $1 < p^- \le p^+ < \infty$ ise $L^{p(x)}(G), W^{1,p(x)}(G)$ ve $W_0^{1,p(x)}(G)$ uzaylarının ayrılabilir ve yansımalı Banach uzay olduğu iyi bilinir (Kováčik ve Rákosnik 1991; Fan 2005; Diening vd 2011).

Eğer $\rho_{p(x)}(u)$ yerine

$$\delta_{p(x)}(u)=\int_G \left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx$$

alınırsa Önerme 4.1.1 ve Önerme 4.1.2 ifadeleri $u, u_n \in W^{1,p(x)}(G)$ içinde sağlanır.

Önerme 4.1.3 (Young Eşitsizliği): Her $x \in$ G ve $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$ için $p(x)>1$ olsun. Öyleyse her $a, b \geq 0$ için

$$ab \leq \frac{|a|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{|b|^{p'(x)}}{p'(x)}$$

dır (Diening vd 2011).

Önerme 4.1.4 (Hölder Tip Eşitsizlik): Eğer $p \in C_+(\bar{G})$ ise $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1$ olmak üzere $L^{p(x)}(G)$ nin eşlenik uzayı $L^{p'(x)}(G)$ uzayıdır. Herhangi bir $u \in L^{p(x)}(G)$ ve $v \in L^{p'(x)}(G)$ için

$$\int_G uvdx \leq \left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{(p^-)'}\right)\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x)} \leq 2\,\|u\|_{p(x)}\|v\|_{p'(x)}$$

dır (Diening vd 2011).

Önerme 4.1.5 (Poincaré Eşitsizliği) :

i) G bölgesinin ∂G sınırının koni özelliğine sahip olduğunu ve $p \in C(\bar{G})$ olduğunu kabul edelim. Eğer herhangi bir $x \in \overline{\mathrm{G}}$ için $1 \leq q(x) < p^*(\mathrm{x})$ ve $q \in C(\bar{G})$ ise $W^{1,p(x)}(G) \hookrightarrow\hookrightarrow L^{q(x)}(G)$ dir.

ii) Eğer herhangi bir $x \in \bar{G}$ için $p(x) \leq q(x)$ ve $p, q \in C(\bar{G})$ ise $W^{1,p(x)}(G) \hookrightarrow L^{q(x)}(G)$ dır. Ayrıca $c>0$ olmak üzere $\forall u \in W_0^{1,p(x)}(G)$ için

$$\|u\|_{q(x)} \leq c\|u\|_{1,p(x)}$$

dir (Kováčik ve Răkosnik 1991; Fan vd 2001).

Önerme 4.1.6: L operatörü aşağıdaki önermeleri sağlar.

i) $L: W_0^{1,p(x)}(G) \to \left(W_0^{1,p(x)}(G) \right)^*$ sürekli, sınırlı ve kesin monoton bir operatördür.

ii) L, (S_+) tipinde bir dönüşümdür. Yani; Eğer $W_0^{1,p(x)}(G)$ de $u_n \rightharpoonup u$ (zayıf yakınsak) ve $\overline{\lim_{n\to\infty}}(L(u_n) - L(u), u_n - u) \leq 0$ ise $W_0^{1,p(x)}(G)$ de $u_n \to u$ (kuvvetli yakınsak)

dır (Fan ve Zhao 2001).

Tanım 4.1.7: X bir Banach Uzay ve $J: X \to \mathbb{R}$ bir C^1-fonksiyonel olsun. $n \to \infty$ iken $J'(u_n) \to 0$ ve $J(u_n)$ sınırlı olduğunda eğer herhangi bir (u_n) dizisi yakınsak bir alt diziye sahip ise J fonksiyonelinin Palais-Smale (Kısaca (PS)) şartını sağladığı söylenir.

4.2 Ana Sonuçlar:

İlk olarak (P) probleminde görünen, lineer olmayan f ye yüklenen şartları ifade edelim. $f: \bar{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(f_1) $f\left(x, r, |\zeta|^{p(x)-2}\zeta\right) = 0,\ \forall r \leq 0, \forall (x, \zeta) \in \bar{G} \times \mathbb{R}^N$.

(f_2) $\lim_{r\to 0} \frac{f\left(x,r,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\right)}{|r|^{p(x)-1}} = 0,\ x \in \bar{G}$ ve $\zeta \in \mathbb{R}^N$.

(f_3) $\lim_{r\to \infty} \frac{f\left(x,r,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\right)}{|r|^{q(x)-1}} = 0,\ x \in \bar{G}$ ve $\zeta \in \mathbb{R}^N$

$\forall x \in \bar{G}$ için $p^+ < q^- \leq q^+ < (p^*)^-$ ve

$$(p^*)^- = \begin{cases} \dfrac{Np^-}{N - p^-}, & N > p^- \\ +\infty, & N \leq p^- \end{cases}$$

olarak verilen $(p^*)^-$ Sobolev kritik üstür.

(f_4) (Ambrosetti-Rabinowitz şartı) $\forall |r| \geq r_0,\ x \in \bar{G}$ ve $\zeta \in \mathbb{R}^N$ için $\theta > p^+$ ve $r_0 > 0$ için

$$0 < \theta\, F\big(x,r,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big) = \theta \int_0^r f\big(x,s,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big)\, ds \le rf\big(x,r,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big)$$

dır.

(f_5) Pozitif a_1 ve a_2 sabitleri için

$$F\big(x,r,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big) \ge a_1 r^{\theta} - a_2,\ \ \forall r > 0, \forall (x,\zeta) \in \bar{G} \times \mathbb{R}^N$$

dir.

(f_6) $\forall r_1, r_2 \in [0,\rho_1]$ $(r_1 \neq r_2)$ ve $\forall |\zeta| \le \rho_2$ için $1 < p(x) < 2$ olmak üzere

$$f\big(x,r_1,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big) - f\big(x,r_2,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big) \le L_1|r_1 - r_2|^{p(x)-1} - \frac{M}{|r_1 - r_2|}$$

eşitsizliğini sağlayan M ve $L_1 = L_{\rho_1}$ pozitif sabitlerinin olduğunu varsayalım.

(f_7) $\forall r \in [0,\rho_1]$ ve $\forall\ |\zeta_1|, |\zeta_2| \le \rho_2$ için $1 < p(x) < 2$ olmak üzere

$$f\big(x,r,|\zeta_1|^{p(x)-2}\zeta_1\big) - f\big(x,r,|\zeta_2|^{p(x)-2}\zeta_2\big) \le L_2|\zeta_1 - \zeta_2|^{p(x)-1}$$

eşitsizliğini sağlayan $L_2 = L_{\rho_2}$ pozitif sabitinin olduğunu varsayalım.

Ayrıca, (P) problemi ile ilgili ana sonucun ispatında, “.” $\mathbb{R}^N$ de iç çarpım olmak üzere $\forall x \in \bar{G}$ ve $\eta, \psi \in \mathbb{R}^N$ için

$$\big(|\eta|^{p(x)-2}\eta - |\psi|^{p(x)-2}\psi\big).(\eta - \psi) \ge (p^- - 1)\frac{|\eta-\psi|^2}{(|\eta|+|\psi|)^{2-p(x)}},\ \ 1 < p(x) < 2 \qquad (4.2.1)$$

olarak bilinen vektör eşitsizliğini kullanırız (Mitrinoviċ vd 1993).

Aşağıdaki teorem mevcut çalışmanın ana sonuçlarını elde etmek için önemlidir.

Teorem A (a) 4.2.1: Fan ve Zhao (1999)’daki Teorem (4.1)’e göre Eğer f $\forall x \in \bar{G}$ için $q(x) < p^*(x)$ olan $q \in C_+(\bar{G})$ ve $C_1, C_2, C_3 > 0$ iken

$$\big|f\big(x,r,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big)\big| \le C_1|r|^{p(x)-1} + C_2|r|^{q(x)-1} + C_3,\ \ \forall (x,r,\zeta) \in \bar{G} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$

büyüme şartını sağlarsa, (P) nin her u zayıf çözümü için $u \in L^{\infty}(G)$ dur.

(b) Fan ve Zhao (1999)'daki Teorem (4.4)'e göre $u \in W_0^{1,p(x)}(G) \cap L^{\infty}(G)$, (P) probleminin bir çözümü olsun. Eğer s fonksiyonu $\bar{G}$ üzerinde log-Hölder sürekli ise yani

$$|s(x) - s(y)| \leq \frac{H}{-\log|x-y|}, \; |x - y| \leq \frac{1}{2} \text{ ile } x, y \in \bar{G} \text{ için} \qquad (4.2.2)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir H sabiti varsa $\alpha \in (0,1)$ için $u \in C^{0,\alpha}(\bar{G})$ dır.

(c) Fan (2007)'deki Teorem (1.2)'e göre $u \in W_0^{1,p(x)}(G) \cap L^{\infty}(G)$, (P) probleminin bir çözümü olsun. Eğer s fonksiyonu $\bar{G}$ üzerinde Hölder sürekli ise yani

$$|s(x) - s(y)| \leq H|x - y|^{\alpha}, \; x, y \in \bar{G} \text{ için} \qquad (4.2.3)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir H sabiti varsa $\alpha \in (0,1)$ için $u \in C^{1,\alpha}(\bar{G})$ dır.

Çalışmamızın ana teoremi aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 4.2.2: (P) problemindeki f fonksiyonelinin $(f_1) - (f_7)$ şartlarını sağladığını kabul edelim. $\forall x \in \bar{G}$ için $1 < p^- \leq p(x) \leq p^+ < 2$ olmak üzere p fonksiyonu (4.2.3) şartını sağlasın, Bu durumda (P) problemi $L_3, L_4 \geq 1$ iken

$$L_1 L_3 p^- + L_2 L_4 p^+ < \frac{p^-(p^- - 1)}{2} \qquad (4.2.4)$$

şartını sağlayan pozitif bir çözüme sahiptir. L_3 ve L_4 (4.2.8) ile ifade edilmiştir. Ayrıca elde edilen çözüm $\alpha \in (0,1)$ için $C^{1,\alpha}(\bar{G})$ sınıfındandır.

Teorem 4.2.2'nin ispatı aşağıdaki gibi birkaç parçaya ayrılır.

Aslında f fonksiyonunda gradient olduğundan dolayı (P) problemi varyasyonel değildir. Fakat eğer gradient değişkeni dondurulursa (sabitlenirse), yani değişken üslü $W_0^{1,p(x)}(G)$ uzayında herhangi bir ω'ye bağlarsak

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right) + |u|^{p(x)-2}u = f(x,u,|\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega), & x \in G \\ u = 0, & x \in \partial G \end{cases} \qquad (\mathrm{P}_\omega)$$

şeklinde bir problem elde ederiz. Bunun sebebi bir iterasyon sayesinde herhangi bir varyasyonel yaklaşım probleminin u_n gibi pozitif bir Mountain Pass çözümüne sahip olan (P_ω) şeklindeki problemlerin bir sınıfını incelemektir.
(P_ω) problemi bir varyasyonel yaklaşımın içinde olduğu için onun zayıf çözümleri

$$I_\omega(u) = \int_G \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx - \int_G F(x,u,|\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx$$

olarak tanımlanan $I_\omega : W_0^{1,p(x)}(G) \to \mathbb{R}$ eş fonksiyonelinin kritik noktalarıdır.

Standart bir yolla $I_\omega \in C^1\left(W_0^{1,p(x)}(G), \mathbb{R}\right)$ olduğunu ispatlayabiliriz. Bizim ilk sonuçlarımız (P_ω) probleminin çözümlerinin sınır tahminleri ve çözülebilirliliği hakkında olacaktır.

$\forall u \in W_0^{1,p(x)}(G) \setminus \{0\}, \varphi \in W_0^{1,p(x)}(G)$ için

$$\langle I'_\omega(u_\omega), \varphi\rangle = \int_G |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi dx - \int_G f(x,u,|\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)\varphi dx$$

olmak üzere $I_\omega \in C^0\left(W_0^{1,p(x)}(G), \mathbb{R}\right) \cap C^1\left(W_0^{1,p(x)}(G) \setminus \{0\}, \mathbb{R}\right)$ dır.

Eğer $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(G)$ iken

$$\int_G |\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla\varphi dx + \int_G |\mathrm{u}|^{p(x)-2}u\varphi\, dx = \int_G f(x,u,|\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)\varphi dx$$

olursa $u \in W_0^{1,p(x)}(G)$, (P_ω) nin bir zayıf çözümü olur.

$$J(u) = \int_G \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx\,, \forall u \in W_0^{1,p(x)}(G)$$

olmak üzere $L = J' : W_0^{1,p(x)}(G) \to \left(W_0^{1,p(x)}(G)\right)^*$ fonksiyoneli yardımıyla $W_0^{1,p(x)}(G)$ değişken üslü sobolev uzayında iç çarpım $\forall u, v \in W_0^{1,p(x)}(G)$ için

$$\langle L(u), v\rangle = \int_G \left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u \nabla v + |u|^{p(x)-2}uv\right)dx$$

biçiminde tanımlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.3: E bir reel Banach uzay olsun. $I \in C^1(E, \mathbb{R})$, Palais-Smale (PS) şartını sağlasın.

i) $B_\rho = \left\{u \in W_0^{1,p(x)}(G) : \|u\| \leq \rho\right\}$ olmak üzere $I|_{\partial B\rho} \geq I(0) + \alpha$ eşitsizliğini sağlayan $\rho > 0,\ \alpha > 0$ sabitleri vardır,

ii) $I(e) \leq I(0)$ olacak şekilde $e \in E$ ve $\|e\| > \rho$,

olduklarını kabul edelim. Bu durumda $I(u)$,

$$c_\omega = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{u\in\gamma([0,1])} I_\omega(u)$$

olarak karakterize edilebilen bir c kritik değerine sahiptir. Burada

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}$$

dır (Willem 1996).

Sonuç 4.2.4: Eğer E deki herhangi bir (u_n) dizisi (güçlü) yakınsak ($\{I(u_n)\}$ ve $n \to \infty$; $I'(u_n) \to 0$) bir alt diziye sahipse I fonksiyoneli Palais-Smale (PS) şartını sağlar.

Yardımcı Teorem 4.2.5: $\omega \in W_0^{1,p(x)}(G)$ olsun. Bu durumda

i) $B_\rho = \left\{u \in W_0^{1,p(x)}(\mathrm{G}) : \|u\| \leq \rho\right\}$ ile $I|_{\partial B\rho} \geq \alpha$ olan $\rho > 0,\ \alpha > 0$ sabitleri vardır.

ii) $\|\sigma\| = 1$ normuyla $\sigma \in C_0^\infty(G)$ için, $r \to \infty$ iken $I_\omega(r\sigma) \to -\infty$ dur.

İspat: i) $\|u\|_{1,p(x)} < 1$ olsun. (f_2) ve (f_3) den

$$F\big(x,r,|\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big) \leq \tfrac{1}{2p^+}|r|^{p(x)} + C_1|r|^{q(x)}$$

eşitsizliğini sağlayan ω den bağımsız pozitif bir C_1 sabiti vardır. Bu durumda Önerme 4.1.2 ve Önerme 4.1.5 i kullanarak

$$I_\omega(u) = \int_G \frac{1}{p(x)}\big(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\big)dx - \int_G F(x,u,|\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx$$

$$\geq \frac{1}{p^+}\int_G \big(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\big)dx - \frac{1}{2p^+}\int_G |u|^{p(x)}\,dx - C_1\int_G |u|^{q(x)}\,dx$$

$$\geq \tfrac{1}{2p^+}\|u\|_{1,p(x)}^{p^+} - C_1 max\left\{\|u\|_{q(x)}^{q^-}, \|u\|_{q(x)}^{q^+}\right\}$$

$$\geq \tfrac{1}{2p^+}\|u\|_{1,p(x)}^{p^+} - C_2 max\left\{\|u\|_{1,p(x)}^{q^-}, \|u\|_{1,p(x)}^{q^+}\right\}$$

elde ederiz. $q^- > p^+$ olduğu için öyle pozitif iki ρ ve α reel sayıları vardır ki $\|u\| \leq \rho$ ile

$$I_\omega(u) \geq \alpha > 0, \qquad u \in W_0^{1,p(x)}(G)$$

elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 4.2.5 in (i) kısmı ispatlanmış olur.

ii) Keyfi bir $v_0 \in W_0^{1,p(x)}(G) \setminus \{0\}$ alarak ve (f_5) i kullanarak,

$$I_\omega(rv_0) \leq \int_G \frac{1}{p(x)}\big(|\nabla rv_0|^{p(x)} + |rv_0|^{p(x)}\big)dx - \int_G F(x,rv_0,|\nabla G|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx$$

$$\leq \frac{r^{p^+}}{p^-}\int_G \big(|\nabla v_0|^{p(x)} + |v_0|^{p(x)}\big)dx - a_1 r^\theta \int_G |v_0|^\theta dx + a_2|G|$$

elde ederiz. $\theta > p^+$ ve $|v_0|^\theta \neq 0$ olduğu için $r \to \infty$ a giderken $I_\omega(rv_0) \to -\infty$ olur. Böylece Yardımcı Teorem 4.2.5 in (ii) kısmı ispatlanmış olur.

Mountain Pass teoremi

$$I_\omega(u_n) \to c_\omega \text{ ve } I'_\omega(u_n) \to 0 \tag{4.2.5}$$

olan bir $u_n \in W_0^{1,p(x)}(G)$ dizisinin varlığını elde eder (Pucci ve Serrin 1984; Willem 1996).

Yardımcı Teorem 4.2.6: $\omega \in W_0^{1,p(x)}(G)$ olsun. Bu durumda I_ω fonksiyoneli Palais-Smale (PS) şartını sağlar.

İspat: İlk olarak (u_n) dizisinin $W_0^{1,p(x)}(G)$ de sınırlı olduğunu göstereceğiz. Bunun için tersini kabul ederek çelişki oluşturacağız. (u_n) ile gösterilen bir alt dizi alalım. $n \to \infty$ için $\|u_n\| \to 0$ olsun. (f_4) ü ve (4.2.5) i kullanarak yeterince büyük n'ler için

$$1 + c_\omega + \|u_n\|_{1,p(x)}$$

$$\geq I_\omega(u_n) - \frac{1}{\theta}\langle I'_\omega(u_n), u_n\rangle$$

$$\geq \frac{1}{p^+}\int_G \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)dx - \int_G F(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx$$

$$-\frac{1}{\theta}\int_G \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)dx - \int_G \frac{1}{\theta}u_n f(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx$$

$$\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\int_G \left(|\nabla u_n|^{p(x)} + |u_n|^{p(x)}\right)dx$$

$$- \int_{\{x\in G: u_n(x)\geq r_0\}} \left[\frac{1}{\theta}u_n f(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega - F(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)\right]dx$$

$$- \int_{\{x\in G: u_n(x)< r_0\}} \left[\frac{1}{\theta}u_n f(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega - F(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)\right]dx$$

$$\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta}\right)\|u_n\|_{1,p(x)}^{p^-}$$

$$- \int_{\{x\in G: u_n(x)\geq r_0\}} \left[\frac{1}{\theta}u_n f(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega - F(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)\right]dx$$

$$-M|G|$$

elde edilir.

$\left(M = \sup\left\{\frac{1}{\theta} rf(x, r, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega - F(x, r, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega), \ |r| < r_0\right\}\right)$. (f_4) (AR şartı) şartının sağlandığı göz önüne alınırsa $n \to \infty$ için çelişki elde edilir. Dolayısıyla (u_n) dizisi $W_0^{1,p(x)}(G)$ de sınırlıdır.

$g(u) = \int_G F(x, u, .)dx$ olsun. Öyleyse $g'(u_n) \to g'(u)$ dur. $I'_\omega(u_n) = L(u_n) - g'(u_n) \to 0$ olduğundan dolayı $L(u_n) \to g'(u_n)$ dir. Önerme 4.1.6 dan dolayı $u_n \to u$ dur. Bundan dolayı I_ω Palais-Smale dizisini sağlar.

Yardımcı Teorem 4.2.7: (P) problemindeki f fonksiyoneli $(f_1) - (f_7)$ şartlarını sağlasın. Eğer ayrıca p (4.2.3) Hölder süreklilik şartını sağlarsa (P_ω) problemi herhangi bir $\omega \in W_0^{1,p(x)}(G) \cap C^{1,\alpha}(G)$ ve en az pozitif bir $\alpha \in (0,1)$ için $u_\omega \in C^{1,\alpha}(G)$ çözümüne sahiptir. Ayrıca $\|u_\omega\|_{C^{0,\alpha}(G)} \le \rho_1$ ve $\|\nabla u_\omega\|_{C^{0,\alpha}(G)} \le \rho_2$ eşitsizliklerini sağlayan ω den bağımsız ρ_1 ve ρ_2 pozitif sabitleri vardır.

İspat: Yardımcı Teorem 4.2.5 ve Yardımcı Teorem 4.2.6, I_ω fonksiyonelinin Mountain-Pass geometrisini sağladığını ifade eder (Willem 1996). Öyleyse Mountain-Pass teoremini kullanarak Ambrosetti ve Rabinowitz (1973); Pucci ve Serrin (1984) de idda edilen (PS) şartı olmaksızın bir $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(G)$ dizisi vardır (elde edilir) öyle ki

$$I_\omega\,(u_n) \to c_\omega \text{ ve } I'_\omega(u_n) \to 0$$
$$c_\omega = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{r\in[0,1]} I_\omega\big(\gamma(r)\big) > 0$$

ve Yardımcı Teorem 4.2.6 da verilen bazı v_0 ve T için

$$\Gamma = \left\{\gamma \in C\left([0,1], W_0^{1,p(x)}(G)\right) : \gamma(0) = 0, \gamma(1) = Tv_0\right\}$$

dır. $(u_n), W_0^{1,p(x)}(G)$ de sınırlı olduğundan ve Önerme 4.1.5 (i) den dolayı (u_n) dizisinin yine (u_n) ile gösterilen bir alt dizisinin olduğu anlaşılır ve

$$W_0^{1,p(x)}(G) \text{ de } u_n \rightharpoonup u_\omega \text{ (zayıf yakınsak)},$$
$$p^*(x) > p(x) \text{ için } L^{p(x)}(G) \text{ de } u_n \to u_\omega \text{ (güçlü yakınsak) ve}$$

$$G \text{ bölgesinde hemen hemen her yerde } u_n(x) \to u_\omega(x)$$

dır. Ayrıca Gonçalves ve Alves (1998) i kullanarak G bölgesinde hemen hemen her yerde

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}(x) \to \frac{\partial u_\omega}{\partial x_i}(x)$$

elde edilir. Dahası Brezis ve Lieb (1983) de iddaa edilen sonuç ve Önerme 4.1.1 i kullanarak her $\varphi \in W^{1,p(x)}(G)$ için

$$\int_G |\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n \nabla\varphi dx \to \int_G |\nabla u_\omega|^{p(x)-2}\nabla u_\omega \nabla\varphi\, dx$$

ve

$$\int_G |u_n|^{p(x)-2}u_n\varphi dx \to \int_G |u_\omega|^{p(x)-2}u_\omega\varphi dx$$

olur. Ayrıca Brezis ve Lieb (1983) ü kullanarak $\forall\varphi \in W_0^{1,p(x)}(G)$ için

$$\int_G f(x, u_n, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)\varphi dx \to \int_G f(x, u_\omega, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)\varphi\, dx$$

elde edilir. Böylece her $\varphi \in W_0^{1,p(x)}(G)$ için $\langle I'_\omega(u_\omega), \varphi\rangle = 0$ ı elde ederiz. (f_2) ve (f_3) den $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $\zeta \in \mathbb{R}^N$ için $f\big(x, r, |\zeta|^{p(x)-2}\zeta\big) \le \varepsilon|r|^{p(x)-1} + C_\varepsilon|r|^{q(x)-1}$ şartını sağlayan ω den bağımsız pozitif bir C_ε sabiti olduğu görülür. Diğer taraftan $q \in C_+(\bar{G})$ olduğundan dolayı $\forall x \in \bar{G}$ için $q(x) < p^*(x)$ iken Teorem A (a) yı kullanarak $u_\omega \in L^\infty(G)$ elde ederiz ve bu yüzden $u_\omega \in W^{1,p(x)}(G) \cap L^\infty(G)$ dır. Ayrıca p fonksiyonu $\bar{G}$ da Hölder sürekli olduğu için Teorem A (c) yi kullanarak $\alpha \in (0,1)$ ile $\forall\omega \in W_0^{1,p(x)}(G) \cap C^{1,\alpha}(G)$ için $u_\omega \in C^{1,\alpha}(G)$ elde edilir.

Sonuç 4.2.8: Yardımcı Teorem (4.2.7) deki (4.2.3) (Hölder sürekliliği) ifadesi (4.2.2) (log-Hölder sürekliliği) olarak değiştirilirse Teorem A (b) yi kullanarak $\alpha \in (0,1)$ ile $\forall\omega \in W_0^{1,p(x)}(G) \cap C^{1,\alpha}(G)$ için $u_\omega \in C^{0,\alpha}(G)$ sonucu elde edilir.

Yardımcı Teorem 4.2.9: $\omega \in W_0^{1,p(x)}(G)$ olsun. Yardımcı Teorem 4.2.7 de elde edilen bütün u_ω çözümleri için $\|u_\omega\|_{1,p(x)} \geq C_*$ olacak şekilde ω den bağımsız pozitif bir C_* sabiti vardır.

İspat: $u_\omega \neq 0$, (P_ω) probleminin bir çözümü olduğu için

$$\int_G \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_\omega|^{p(x)} + |u_\omega|^{p(x)}\right)dx = \int_G f(x, u_\omega, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)u_\omega dx$$

elde edilir. (f_2) ve (f_3) den her $\zeta \in \mathbb{R}^N$ için $f\left(x, r, |\zeta|^{p(x)-2}\zeta\right) \leq \varepsilon|r|^{p(x)-1} + C_\varepsilon|r|^{q(x)-1}$ şartını sağlayan ω den bağımsız pozitif bir C_ε sabiti olduğu görülür. Bu da sadece $\|u_\omega\|_{1,p(x)} < 1$ durumunu düşünmek için yeterlidir. Böylece Önerme 4.1.2 ve Önerme 4.1.5 i kullanarak

$$\frac{1}{2p^+}\int_G |u_\omega|^{p(x)}dx + C_3\int_G |u_\omega|^{q(x)}dx \geq \frac{1}{p^+}\int_G \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx$$

$$C_3\int_G |u_\omega|^{q(x)}dx \geq \frac{1}{2p^+}\|u_\omega\|_{1,p(x)}^{p^+}$$

$$C_4\|u_\omega\|_{1,p(x)}^{q^-} \geq \frac{1}{2p^+}\|u_\omega\|_{1,p(x)}^{p^+}$$

$$\|u_\omega\|_{1,p(x)} \geq \left(\frac{1}{2p^+C_4}\right)^{\frac{1}{q^- - p^+}} := C_*$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Yardımcı Teorem 4.2.10: $\omega \in W_0^{1,p(x)}(G)$ olsun. Lemma 4.2.9 da elde edilen bütün u_ω çözümleri için $\|u_\omega\|_{1,p(x)} \leq C^*$ olacak şekilde ω den bağımsız pozitif bir C^* sabiti vardır.

İspat: İlk önce

$$I_\omega(u_\omega) \leq \max_{t\geq 0} I_\omega(rv_0),$$

olduğunu hatırlatalım. $u_\omega = rv_0$ olarak alınırsa

$$I_\omega(u_\omega) = I_\omega(rv_0) = \int_G \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla rv_0|^{p(x)} + |rv_0|^{p(x)}\right)dx - a_1\int_G |rv_0|^\theta dx - a_2|G|$$

$$\leq \frac{r^{p^+}}{p^-}\int_G \left(|\nabla v_0|^{p(x)} + |v_0|^{p(x)}\right)dx - a_1 r^\theta \int_G |v_0|^\theta dx - a_2|G|$$

olur. $\theta > p^+$ ve $|v_0|^\theta \neq 0$ olduğu için

$$r \in \mathbb{R} \longmapsto \frac{r^{p^+}}{p^-}\int_G \left(|\nabla v_0|^{p(x)} + |v_0|^{p(x)}\right)dx - a_1 r^\theta \int_G |v_0|^\theta dx - a_2|G|$$

dönüşümü ω den bağımsız pozitif bir maksimum değere ulaşır. Böylece

$$I_\omega(u_\omega) \leq C \tag{4.2.6}$$

olan bir $C > 0$ sabiti bulunur. (4.2.6) yı kullanarak

$$\int_G \frac{1}{p(x)}\left(|\nabla u_\omega|^{p(x)} + |u_\omega|^{p(x)}\right)dx \leq C + \int_G F(x, u_\omega, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx \tag{4.2.7}$$

elde edilir. (f_4) de verilen r_0 ile $D = \{x \in G: |u_w| > r_0 > 1\}$ kümesini tanımlayalım. u_ω nin bir çözüm olduğunu hatırlayalım. (f_2) ve (f_4) den

$$\int_G F(x, u_\omega, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx$$

$$\leq \int_{G\setminus D} F(x, u_\omega, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx + \int_G F(x, u_\omega, |\nabla\omega|^{p(x)-2}\nabla\omega)dx$$

$$\leq c_5\left(r_0 + \frac{|r_0|^{p(x)}}{p(x)}\right)|G \setminus D| + \int_G \frac{|\nabla u_\omega|^{p(x)}}{\theta}dx$$

$$\leq c_5\left(r_0 + \frac{|r_0|^{p^+}}{p^-}\right)|G \setminus D| + \int_G \frac{1}{\theta}\left(|\nabla u_\omega|^{p(x)} + |u_\omega|^{p(x)}\right)dx$$

olur. (4.2.7) denkleminden

$$\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{\theta}\right)\int_G \left(|\nabla u_\omega|^{p(x)}+|u_\omega|^{p(x)}\right)dx \le C + C_5\left(r_0+\frac{|r_0|^{p^+}}{p^-}\right)|G \setminus D|$$

elde ederiz.($|G \setminus D|$, $G \setminus D$ nin $\mathbb{R}^N$ de Lebesque ölçümünü ifade eder.) Ayrıca

$$\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{\theta}\right)\|u_\omega\|_{1,p(x)}^{p^-} \le C + C_5\left(r_0+\frac{|r_0|^{p^+}}{p^-}\right)|G \setminus D| \coloneqq \tilde{C}^*$$

olup buradan

$$\|u_\omega\|_{1,p(x)} \le \left[\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{\theta}\right)^{-1}\tilde{C}^*\right]^{\frac{1}{p^-}} \coloneqq C^*$$

olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi (P) probleminin pozitif bir çözümü olduğunu göstermek için hazırız.

Teorem 4.2.2 nin İspatı:

$|u_\omega|_{C^0(G)} \le \rho_1$ ve $|\nabla u_\omega|_{C^0(G)} \le \rho_2$ olmak üzere keyfi bir $u_0 \in W_0^{1,p(x)}(G) \cap C^{1,\alpha}(G)$ ile başlayarak Yardımcı Teorem 4.2.7 deki Mountain Pass teoremi kullanılarak elde edilen

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u_n + |u_n|^{p(x)-2}u_n = f(x,u_n,|\nabla u_{n-1}|^{p(x)-2}\nabla u_{n-1}), & x \in G \\ u_n = 0, & x \in \partial G \end{cases} \qquad ((P)_n)$$

probleminin çözümleri olarak bir $(u_n) \subset W_0^{1,p(x)}(\mathrm{G}) \cap C^{1,\alpha}(\mathrm{G})$ dizisi göz önüne alalım. Diğer taraftan $(P)_{n+1}$ ve $(P)_n$ kullanılarak

$$\int_G |\nabla u_{n+1}|^{p(x)-2}\,\nabla u_{n+1}(\nabla u_{n+1}-\nabla u_n)dx + \int_G |u_{n+1}|^{p(x)-2}\,u_{n+1}(u_{n+1}-u_n)dx$$

$$= \int_G f(x, u_{n+1}, |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (u_{n+1} - u_n) dx$$

ve

$$\int_G |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n (\nabla u_{n+1} - \nabla u_n) dx + \int_G |u_n|^{p(x)-2} u_n (u_{n+1} - u_n) dx$$

$$= \int_G f(x, u_n, |\nabla u_{n-1}|^{p(x)-2} \nabla u_{n-1)} (u_{n+1} - u_n) dx$$

elde edilir. Sonra

$$\int_G \left(|\nabla u_{n+1}|^{p(x)-2} \nabla u_{n+1} - |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \right) (\nabla u_{n+1} - \nabla u_n) dx$$

$$+ \int_G \left(|u_{n+1}|^{p(x)-2} u_{n+1} - |u_n|^{p(x)-2} u_n \right) (u_{n+1} - u_n) dx$$

$$= \int_G \left(f(x, u_{n+1}, |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n) - f(x, u_n, |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n) \right) (u_{n+1} - u_n) dx$$

$$+ \int_G \left(f(x, u_n, |\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n) - f(x, u_n, |\nabla u_{n-1}|^{p(x)-2} \nabla u_{n-1}) \right) (u_{n+1} - u_n) dx$$

elde ederiz. $\int_G |\eta - \psi|^{p(x)} dx$ ifadesinde

$$\frac{1}{\frac{2}{p(x)}} + \frac{1}{\frac{2}{2 - p(x)}} = 1$$

olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\int_G |\eta - \psi|^{p(x)} dx = \int_G \frac{|\eta - \psi|^{p(x)}}{(|\eta| + |\psi|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}} (|\eta| + |\psi|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}} dx$$

$$\leq 2\left\|\frac{|\eta-\psi|^{p(x)}}{(|\eta|+|\psi|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}}\right\|_{L^{\frac{2}{p(x)}}(G)}\left\|(|\eta|+|\psi|)^{\frac{p(x)(2-p(x))}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{2-p(x)}}(G)}$$

$$\leq 2\max_{p\in\{p^-,p^+\}}\left\|\frac{|\eta-\psi|^2}{(|\eta|+|\psi|)^{2-p(x)}}\right\|^{p/2}_{L^{\frac{2}{p(x)}\cdot\frac{p(x)}{2}}(G)}\left\|(|\eta|+|\psi|)^{p(x)}\right\|^{(2-p)/2}_{L^{\frac{2}{2-p(x)}\cdot\frac{2-p(x)}{2}}(G)}$$

$$= 2\max_{p\in\{p^-,p^+\}}\left(\int_G\frac{|\eta-\psi|^2}{(|\eta|+|\psi|)^{2-p(x)}}dx\right)^{p/2}\left(\int_G(|\eta|+|\psi|)^{p(x)}dx\right)^{(2-p)/2}$$

$$\leq 2\max_{p\in\{p^-,p^+\}}\left(\int_G\frac{|\eta-\psi|^2}{(|\eta|+|\psi|)^{2-p(x)}}dx\right)^{p/2}\left(1+\int_G(|\eta|+|\psi|)^{p(x)}dx\right)^{1/2}$$

elde edilir. Benzer şekilde yine Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\int_G|\nabla\eta-\nabla\psi|^{p(x)}\,dx\leq 2\max_{p\in\{p^-,p^+\}}\left(\int_G\frac{|\nabla\eta-\nabla\psi|^2}{(|\nabla\eta|+|\nabla\psi|)^{2-p(x)}}dx\right)^{p/2}\left(1+\int_G(|\nabla\eta|+|\nabla\psi|)^{p(x)}dx\right)^{1/2}$$

olur. $1<p^-\leq p^+<2$ olduğu düşünülerek ve (4.2.1) i uygulanırsa

$$\max_{p\in\{p^-,p^+\}}\left(\int_G\frac{|\eta-\psi|^2}{(|\eta|+|\psi|)^{2-p(x)}}dx\right)^{p/2}$$

$$\leq\max_{p\in\{p^-,p^+\}}\left(\frac{1}{p^--1}\int_G\left(|\eta|^{p(x)-2}\eta-|\psi|^{p(x)-2}\psi\right).(\eta-\psi)dx\right)^{p/2}$$

$$\leq\frac{1}{p^--1}\left(1+\int_G\left(|\eta|^{p(x)-2}\eta-|\psi|^{p(x)-2}\psi\right).(\eta-\psi)dx\right)$$

ve

$$\max_{p\in\{p^-,p^+\}}\int_G\frac{|\nabla\eta-\nabla\psi|^2}{(|\nabla\eta|+|\nabla\psi|)^{2-p(x)}}dx$$

$$\leq \frac{1}{p^{-}-1}\left(1+\int_G \left(|\nabla\eta|^{p(x)-2}\nabla\eta - |\nabla\psi|^{p(x)-2}\nabla\psi\right).(\nabla\eta-\nabla\psi)dx\right)$$

elde edilir.

$$\left(1+\int_G \left(|\eta|+|\psi|\right)^{p(x)}dx\right)^{1/2} := L_3\ ,\ \left(1+\int_G \left(|\nabla\eta|+|\nabla\psi|\right)^{p(x)}dx\right)^{1/2} := L_4 \quad (4.2.8)$$

olsun. Öyleyse L_3, L_4 sınırlıdır ve $L_3, L_4 \geq 1$ dir. Bundan dolayı

$$\int_G |\eta-\psi|^{p(x)}\,dx \leq \frac{2L_3}{p^{-}-1}+\frac{2L_3}{p^{-}-1}\int_G \left(|\eta|^{p(x)-2}\eta-|\psi|^{p(x)-2}\psi\right).(\eta-\psi)dx \qquad (4.2.9)$$

ve

$$\int_G |\nabla\eta-\nabla\psi|^{p(x)}\,dx$$

$$\leq \frac{2L_4}{p^{-}-1}+\frac{2L_4}{p^{-}-1}\int_G \left(|\nabla\eta|^{p(x)-2}\nabla\eta-|\nabla\psi|^{p(x)-2}\nabla\psi\right).(\nabla\eta-\nabla\psi)dx \qquad (4.2.10)$$

dır. Böylece (4.2.9) ve (4.2.10) eşitsizliklerinde $\eta = u_{n+1}$, $\psi = u_n$, $\rho_{p(x)}(u_{n+1} - u_n) \geq 1$ ve $M|G| = \frac{2L_3+2L_4}{p^{-}-1}$ alınırsa

$$\delta_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) = \int_G \left(|u_{n+1}-u_n|^{p(x)}+|\nabla u_{n+1}-\nabla u_n|^{p(x)}\right)dx$$

$$\leq \frac{2L_3+2L_4}{p^{-}-1}+\frac{2L_1L_3}{p^{-}-1}\rho_{p(x)}(u_{n+1}-u_n)$$

$$+\frac{2L_2L_4}{p^{-}-1}\int_G |\nabla u_n-\nabla u_{n-1}|^{p(x)-1}|u_{n+1}-u_n|dx - M|G|$$

$$=\frac{2L_1L_3}{p^{-}-1}\rho_{p(x)}(u_{n+1}-u_n)$$

$$+\frac{2L_2L_4}{p^{-}-1}\int_G |\nabla u_n-\nabla u_{n-1}|^{p(x)-1}|u_{n+1}-u_n|dx$$

olur. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ kısmındaki integral altındaki ifadeye önerme (4.1.3) ü (Young Eşitsizliği) uygularsak

$$\begin{aligned}
\delta_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) &\le \frac{2L_1L_3}{p^- -1}\rho_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) \\
&\quad + \frac{2L_2L_4}{p^- -1}\left[\frac{1}{p^-}\rho_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) + \frac{p^+ -1}{p^-}\rho_{p(x)}(\nabla u_n - \nabla u_{n-1})\right] \\
&\le \left(\frac{2L_1L_3}{p^- -1} + \frac{2L_2L_4}{(p^- -1)p^-}\right)\rho_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) \\
&\quad + \frac{2L_2L_4(p^+ -1)}{(p^- -1)p^-}\rho_{p(x)}(\nabla u_n - \nabla u_{n-1}) \\
&\le \frac{2L_1L_3p^- + 2L_2L_4}{(p^- -1)p^-}\delta_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) \\
&\quad + \frac{2L_2L_4(p^+ -1)}{(p^- -1)p^-}\delta_{p(x)}(u_n - u_{n-1})
\end{aligned}$$

veya

$$\left(1 - \frac{2L_1L_3p^- + 2L_2L_4}{(p^- -1)p^-}\right)\delta_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) \le \frac{2L_2L_4(p^+ -1)}{(p^- -1)p^-}\delta_{p(x)}(u_n - u_{n-1}) \qquad (4.2.11)$$

elde edilir. (4.2.11) den dolayı $1 - \frac{2L_1L_3p^- + 2L_2L_4}{(p^- -1)p^-} > 0$ olur. Böylece

$$\delta_{p(x)}(u_{n+1}-u_n) \le \frac{2L_2L_4(p^+ -1)}{(p^- -1)p^- - 2L_1L_3p^- - 2L_2L_4}\delta_{p(x)}(u_n - u_{n-1})$$

olur. $\frac{2L_2L_4(p^+ -1)}{(p^- -1)p^- - 2L_1L_3p^- - 2L_2L_4} =: K$ olsun. (4.2.4) e göre $K < 1$ elde edilir. Şimdi ardışık bir şekilde üçgen eşitsizliğini uygulayarak

$$\int_G |\nabla u_{n+i} - \nabla u_n|^{p(x)}dx$$

$$\le \left(2^{p^+ -1}K^{n+i-1} + 2^{2(p^+ -1)}K^{n+i-2} + \cdots + 2^{(i-1)(p^+ -1)}K^n\right)\int_G |\nabla u_1 - \nabla u_0|^{p(x)}dx$$

$$\le \left(2^{(i-1)(p^+ -1)}K^{n+i-1} + 2^{(i-1)(p^+ -1)}K^{n+i-2} + \cdots + 2^{(i-1)(p^+ -1)}K^n\right)\int_G |\nabla u_1 - \nabla u_0|^{p(x)}dx$$

$$\leq 2^{(i-1)(p^+-1)} \frac{1-K^i}{1-K} K^n \int_G |\nabla u_1 - \nabla u_0|^{p(x)} dx$$

yazılabilir. Böylece

$$\delta_{p(x)}(u_{n+i} - u_n) \leq 2^{(i-1)(p^+-1)+1} \frac{1-K^i}{1-K} K^n \delta_{p(x)}(u_1 - u_0)$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. $\lim_{n\to\infty} K^n = 0$ olduğu için önerme 4.1.1 i kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{n+i} - u_n\|_{1,p(x)} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $(u_n) \in W_0^{1,p(x)}(G)$ dizisi herhangi bir $u \in W_0^{1,p(x)}(G)$ fonksiyonuna güçlü yakınsar. Böylece $(u_n) \in W_0^{1,p(x)}(G)$ dizisinin bir Cauchy Dizisi olduğu anlaşılır. $\forall n$ için $\|u_n\|_{1,p(x)} \geq C_*$ olduğundan $W_0^{1,p(x)}(G)$ de sıfırdan büyük bir u fonksiyonu vardır. Böylece (P) denkleminin G bölgesinde bir sabit noktasının olduğu gösterilmiş olur. Bu da bize (P_ω) probleminin $u > 0$ şeklinde bir çözümü olduğunu gösterir. Böylece Teorem 4.2.2 ispatlanmış olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu bölümde çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilecektir.

Bizim çalışmamız önceki Figueiredo vd (2004); Figueiredo (2008) araştırmaların genişletilmesi olarak düşünülebilir. Dolayısıyla biz adı geçen yazarların çalışmalarında yer alan $\Delta_p u$-Laplacian ve $f(u,|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ yerine daha genel olan $\Delta_{p(x)}u$, $f\big(x,u,|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\big)$ ifadelerini içeren Dirichlet problemini inceledik. Yani Figueiredo (2008)'in $\mathbb{R}^N$ deki $-\Delta_p u+|u|^{p-2}u=f(u,|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ problemini genişleterek herhangi bir $1<p(x)<2,\ x\in\bar{G}$ ve bazı özel şartları sağlayan f sürekli fonksiyonu için $G\subset\mathbb{R}^N$ düzgün sınırlı bir bölgede

$$\begin{cases}-\mathrm{div}\big(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\big)+|u|^{p(x)-2}u=f(x,u,|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u), & x\in G\\ u=0, & x\in\partial G\end{cases}\qquad (\mathrm{P})$$

probleminin varlık problemini inceledik.

Bunun için varyasyonel metod kullandık. Fakat f fonksiyonu gradient içerdiğinden ele aldığımız problem varyasyonel değildir. Bu problemde varyasyonel yöntemi kullanabilmek için gradient'i sabitleme "Freeze" işlemi gerçekleştirdik, böylece varyasyonel problem elde ettik. Bu problem için Mountain Pass ve iterasyon teknikleri kullanılarak çözümün varlığı elde edildi. Doğal olarak bu çözüm $W_0^{1,p(x)}(G)$ uzayındadır.

KAYNAKLAR

Acerbi, E., Mingione, G., 2000. Regularity results for stationary electrorheological fluids. Arch. Ration. Mech. Anal., 164, 213-259.

Adams, R. A., 1975. Sobolev Spaces. Academic Press. New York.

Afrouzi, G. A., Mahdavi, S., Naghizadeh, Z., 2007. The Nehari Manifold for p-Laplacian Equation with Dirichlet Boundary Condition. Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 12 (2), 143-155.

Alves, C. O., Souto, M. A. S., 2005. Existence of Solutions for a Class of Problems involving the $p(x)$-Laplacian. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Appl., 66, 17-32.

Ambrosetti, A., Rabinowitz, P. H., 1973. Dual variational methods in critical point theory and applications. J. Funct. Anal.14, 349-381.

Ayazoglu (Mashiyev), R., Ekincioglu, I., 2016. Electrorheological fluids equations involving variable exponent with dependence on the gradiant via Mountain Pass techniques. Numerical Functional Analysis and Optimization, 37 (9), 1144-1157.

Bocardo, L., Marcellini, P., Sbordone, C., 1990. L^{∞}-regularity for variational problems with sharp nonstandard growth conditions. Boll. Un. Math. Ital. A (7) 4 , 219-225.

Boureanu, M. M., 2006. Existence of solutions for an elliptic equation involving the $p(x)$-Laplacian operator. Electronic Journal of Differential Equations, 97, 1-10.

Boureanu, M. M., Pucci, P.and Radulescu, V. D., 2011. Multiplicity of solutions for a class of anisotropic elliptic equations with variable exponent. Complex Variables and Elliptic Equations, 56, 755-767.

Brezis, H. and Lieb E.H., 1983. A relation between pointwise convergence of functions and convergence functionals. Proceedings of the American Mathematical Society, 8, 486-490.

Brezis, H. and Nirenberg, L., 1991. Remarks on finding critical points. Comm. Pure Appl. Math., 44, 939-96.

Brown, K. J., Zhang, Y., 2003. The Nehari manifold for a semilinear elliptic equation with a sign-changing weight function. J. Dif. Equ., 193, 481-499.

Buenrostro, G. I., Garza, G. L., 2005. A resonance problem for the p-Laplacian in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Electronic Journal of Differential Equations, 2005 (112), 1-8.

Buhrii, O. M., Mashiyev, R. A., 2009. Uniqueness of solutions of the parabolic variation inequality with variable exponent of nonlinearity. Nonlinear Analysis-Theory Methods& Appl., 70 (6), 2325-2331.

Calotâ, L., 2008. On some quasilinear elliptic equations with critical Sobolev exponents and non-standard growth conditions. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin, 15, 249-256.

Chen, Y., Levine, S., Rao, R., 2006. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration. SIAM J. Appl. Math., 66 (4), 1383–1406.

Chung, N.T., 2013. Multiple solutions for a class of $p(x)$-Kirchhoff type problems with Neumann boundary conditions. Advances in Pure and Applied Mathematics, 4 (2), 165-177.

Çekiç, B., 2005. Degisken Üslü Lebesgue ve Sobolev Uzaylarında Gömme Tipli Eşitsizlikler. Doktora Tezi, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Diyarbakır.

Dai, G., Hao, R., 2009. Existence of solutions for a $p(x)$-Kirchhoff-type equation. J. Math. Anal. Appl., 359, 275-284.

Diening, L., 2002. Theoretical and Numerical Results for Electrorheo-logical Fluids. Ph.D. thesis, University of Frieburg, Germany.

Diening, L., Harjuletho, P., Hästö, P. and Růžička, M.; 2011. Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents. Springer-Verlag, 509, Berlin.

Drabek, P., Kufner, A., Nicolosi, F., 1996. Nonlinear Elliptic equations. University of West Bohemia in Pilsen.

Duc, D. M., 1989. Nonlinear singular elliptic equations. Journal of the London Mathematical Society, 2(3), 420-440.

Duc, D. M., Vu, N.T., 2005. Nonuniformly elliptic equations of p-Laplacian type. Nonlinear Anal., 61, 1483-1495.

Edmunds, D., Răkosnik, J., 2000. Sobolev embeddings with variable exponent. Studia Math., 143, 267-293.

Fan, X.L. and Zhao, D., 1999. A class of De Giorgi type and Hölder continuity. Nonlinear Anal., 36, 295-318.

Fan, X. L., Shen, J. S., Zhao, D., 2001. Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl., 262, 749-760.

Fan, X. L., Zhao, D., 2001. On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$. J. Math. Anal. Appl., 263, 424-446.

Fan, X. L., Zhang, Q. H., 2003. Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems. Nonlinear Anal., 52, 1843-1852.

Fan, X. L., Han, X., 2004. Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Nonlinear Anal., 59, 173-188.

Fan, X. L., 2005. Solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems with singular coefficients. J. Math. Anal. Appl., 312, 464-477.

Fan, X. L., Zhang, Q., Zhao, D., 2005. Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem. J. Math. Anal. Appl., 302, 306-317.

Fan, X.L., 2007. Global $C^{1,\alpha}$ regularity for variable exponent elliptic equations in divergence form. J. Dif. Equ., 235, 397-417.

Fan X. L. 2010. On nonlocal $p(x)$-Laplacian Dirichlet problems. Nonlinear Anal., 72, 3314-3323.

Figueiredo, D.D., Girardi, M. and Matzeu, M., 2004. Semilinear elliptic equations with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques. Diff. Integ. Equ., 17, 119-126.

Figueiredo, G.M., 2008. Quasilinear equations with dependence on the gradient via Mountain Pass techniques in $\mathbb{R}^N$. Applied Mathematics and Comp., 203, 14-18.

Gonçalves, J. V. A. and Alves, C. O., 1998 Existence of positive solutions for m-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical Sobolev exponents. Nonlinear Anal., 32 (1), 53-70.

Harjulehto, P., Hästö, P., 2008. Sobolev inequalities with variable exponent attaining the values 1 and n. Publicacions Matematiques, 52 (2), 347-363.

Harjulehto, P., Hästö, P., Koskenoja, M., Varonen, S., 2006. The Dirichlet energy integral and variable exponent Sobolev spaces with zero boundary values. Potential Anal., 25 (3), 205-222.

Hästö, P., 2007. The $p(x)$-Laplacian and applications. J. Anal., 15, 53-62.

Hudzik, H. 1976. A generalization of Sobolev spaces II. Funct. Approx. Comment. Math., 3, 77-85.

Hudzik, H., 1977. On problem of density of $C_0^\infty(\Omega)$ in generalized Orlicz-Sobolev space $W_M^k(\Omega)$ for every open set $(\Omega) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$. Comment. Math. Parce Mat., 20, 65-78.

Hudzik, H., 1979. Density of $C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$ in generelized Orlicz-Sobolev space $W_M^k(\mathbb{R}^{\mathrm{n}})$. Funct. Approx. comment. Math., 7, 15-21.

Iturriaga, L. and Lorca, S., 2007. Existence and multiplicity results of degenerate elliptic equatinos with dependence on the gradient. Hindawi Publishing Corporation Boundary Value Problems, 2007, Art. ID 47218, doi:10.1155/2007/47218.

Kami'nska, A.,1982. Flat Orlicz-Musielak sequence spaces. Bull. Acad. Polon. Sci. Math., 30 (7-8), 347-352.

Kovăčik, O., Răkosnik, J., 1991. On the Space $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{k,p(x)}(\Omega)$. Czechoslovak Math. J., 41, 592-618.

Marcellini, P., 1989. Regularity of minimizers of integrals of the calculus of variations with non-standard growth conditions. Arch. Rational Mech Anal., 105, 267-284.

Marcellini, P., 1991. Regularity and existence of solutions of elliptic equation with p,q-growth conditions. J. Differential Equations , 50 (1), 1-30.

Mashiyev, R. A., Ogras, S., Yucedag, Z., Avci, M., 2010. The Nehari manifold approach for Dirichlet problem involving the $p(x)$-Laplacian equation. J. Korean Math. Soc., 47 (4), 845-860.

Mihăilescu, M., Rădulescu, V., 2006. A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids. Proceedings of the Royal Society A., 462, 2625-2641.

Mihâilescu, M., 2006. Elliptic problems in variable exponent spaces. Austral. Math. Soc., 74, 197-206.

Mihăilescu, M., 2006. Existence and multiplicity of solutions for an elliptic equation with $p(x)$-growth conditions. Glasgow Math. J., 48, 411-418.

Mihăilescu, M., Rădulescu, V., 2007. On a nonhomogeneous quasilinear eigenvalue problem in Sobolev spaces with variable exponent, Proceedings Amer. Math. Soc., 135 (9), 2929-2937.

Mihăilescu, M., 2008. On a class of nonlinear problems involving a-Laplace type operator. Czechoslovak Math. J., 58 (133), 155-172.

Mitrinoviċ, D. S., Pečariċ, J. E. and Finj, A. M., 1993. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Montenegro, M. and Montenegro, M., 2000. Existence and nonexistence of solutions for quasilinear elliptic equations. J. Math. Anal. Appl., 245, 303-316.

Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları Tic. Ltd. Sti., Kütahya.

Musielak, J., Orlicz, W., 1959. On modular spaces. Studia Math., 18, 49-65.

Nakano, H., 1950. Modulared Semi-ordered Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

Nakano, H., 1951. Topology and Topological Linear Spaces. Maruzen Co. Ltd., Tokyo.

Napoli, P. D., Mariani, M. C., 2003. Mountain pass solutions to equations of p-Laplacian type. Nonlinear Anal., 54, 1205-1219.

Ogras, S., Mashiyev, R. A., Avci, M., Yucedag, Z., 2008. Existence of Solutions for a Class of Elliptic Systems in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ Involving the $(p(x), q(x))$-Laplacian. Journal of Inequalities and Applications, 2008(1), 1-16.

Orlicz, W., 1931. Über konjugierte Exponentenfolgen. Studia Math., 3, 200-212.

Papageorgiou, N. S., Kyritsi-Yiallourou S. T., 2009. Handbook of Applied Analysis (Vol. 19). Springer Science & Business Media

Pucci, P. and Serrin, J., 1984 Extensions of the mountain pass theorem. J. Funct. Anal., 59, 185-210.

Ruiz, D. and Suarez, A., 2007. Existence and uniqueness of positive solution of a logistic equation with nonlinear gradient term. Proc. R. Soc. Edinburgh, 137(3), 555-566.

Ruiz, D., 2004. A priori estimates and existence of positive solutions for strongly nonlinear problems. J. Dif. Equ., 199, 96-114.

Růžička, M., 2000. Electrorheological Fluids: Modeling and Mathematical Theory. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin.

Schechter, M., (2007, June). The use of cerami sequences in critical point theory. In Abstract and Applied Analysis (Vol.2007). Hindawi Publishing Corporation.

Sharapudinov, I. I., 1979. On the topology of the space $L^{p(t)}([0;1])$. Math. Notes 26 (3-4), 796-806. [Translation of Mat. Zametki 26 (4), 613-632.]

Toan, H. Q., Ngô, Q. A., 2009. Multiplicity of weak solutions for a class of nonuniformly elliptic equations of p-Laplacian type. Nonlinear Anal., 70 (4), 1536-1546.

Tsenov, I. V., 1961. Generalization of the problem of best approximation of a function in the space L^s. (Russian) Uch. Zap. Dagestan Gos. Univ., 7, 25-37.

Vu, N. T., 2005. Mountain pass theorem and nonuniformly elliptic equations. Vietnam J. of Math., 33 (4), 391-408.

Wang, X. and Ding, Y., 1995. Existence of multiple solutions to nonlinear elliptic equations in nondivergece form. J. Math. Anal. Appl., 189, 617-630.

Wang, H. C., 2002. On the compactness and the minimization. Taiwanese J. Math., 6 (4), 441-464.

Willem, M., 1996. Minimax Theorems. Birkhäuser, 165, Boston.

Winslow, W. M., 1949. Induced fibration of suspensions. J. Appl. Physics, 20, 1137-1140.

Wu, T. F., 2007. Multiplicity of Positive Solution of p-Laplacian problems with sign-changing weight functions. Int. J. Math. Anal., 1 (12), 557-563.

Yao, J., 2006. Solutions for Neumann boundary value problems involving $p(x)$-Laplacian operators. Nonlinear Anal. accepted 11 December 2006.

Zang, A., 2008. $p(x)$-Laplacian equations satisfying Cerami condition. J. Math. Anal. Appl., 337, 547-555.

Zhikov, V. V. E., 1987. Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory. Izvestiya: Mathematics, 29 (1), 33-36.

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Bayburt'ta doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi Bayburt'ta tamamladım. 2000 yılında 19 Mayıs Üniversitesi Amasya Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldum. 2000 yılında Bayburt Şehit Recep Eşiyok İlköğretim okulunda Matematik öğretmeni olarak göreve başladım. 2001-2010 yılları arasında Bayburt Rekabet Kurumu Anadolu Öğretmen Lisesinde görev yaptım. 2010 yılından beri Bayburt Üniversitesi Bayburt Meslek Yüksekokulunda öğretim görevlisi olarak çalışıyorum. 2013 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans öğrenimine başladım. Evli ve iki çocuk babasıyım.