67004

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

İKİ YANSITAN BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ

Sema DİKMENOĞLU

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

"Doktor"

Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13. 06. 1997

Tezin Sözlü Savunma Tarihi : 26. 09. 1997

Tez Danışmanı : Doç. Dr. İhsan ÜNVER

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Tahir A. KHANİEV

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Fikri ÖZTÜRK

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Fazlı ARSLAN

Haziran 1997

TRABZON

ÖNSÖZ

Bu çalışmada "İki Yansıtan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci" olarak adlandırılan bir stokastik süreç ele alınmış ve detaylı bir biçimde incelenmiştir. Tezin konusu Azerbaycan Cumhuriyeti Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyesi Sayın Doç. Dr. Tahir A. KHANİEV tarafından koyulmuştur.

Doktora tezi danışmanlığımı üslenerek çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. İhsan ÜNVER'e, konunun hazırlanışında her türlü yardımda bulunan Azerbaycan Cumhuriyeti Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyeleri Sayın Prof. Dr. Tamilla H. NASİROVA'ya ve Sayın Doç. Dr. Tahir A. KHANİEV'e en içten duygularımla teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca değerli öneri ve yardımlarından dolayı Sayın Arş. Gör. Dr. Selahattin MADEN'e ve Sayın Arş. Gör. Dr. Halim ÖZDEMİR'e, tezi bilgisayarda yazarken bilgisinden yararlandığım Sayın Arş. Gör. Zafer KÜÇÜK'e ve doktora süresince gösterdiği sabır ve desteğinden dolayı eşim Öğr. Gör. Taylan DİKMENOĞLU'na da teşekkür ederim.

Trabzon, Haziran 1997 Sema DİKMENOĞLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa Numarası

ÖZET

Özellikle stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin pek çok önemli problemi, iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilir. Hem teorik hem de pratik yönden önemli olmasından dolayı, bu süreçler hakkında pek çok ilginç çalışma yapılmıştır. Fakat bu çalışmaların çoğu, sonlu durum uzayına sahip rastgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemlerine aittir. Sınır-değer problemleri önemli olmasına rağmen, ele alınan süreçlerin kendi karakteristiklerinin incelenmesi de önemlidir. Bu konuda da bazı çalışmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmaları daha da ilerletmek gerekliliği vardır. Özellikle bariyerlerin her ikisinin de yansıtan olması durumunda, rastgele yürüyüş süreçleri daha az incelendiğinden, bu süreçlerin kurulması ve incelenmesi hem teorik hem de pratik yönden önemlidir. Bundan başka, rastgele yürüyüş süreçlerinin yerine, bunlardan daha genel bir sınıf olan yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerine bakmak daha ilginçtir.

Hazırlanan bu çalışmada, 0 (sıfır) ve β ($\beta > 0$)-seviyelerinde iki yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci X(t) ve bu sürecin önemli bir sınır fonksiyonali olan, sürecin ilk kez aşağı yansıtan bariyerden yansıma anı τ_1 matematiksel olarak kurulmuş, τ_1 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu ve momentleri için açık formüller verilmiştir. X(t) sürecinin bir boyutlu stasyoner olmayan dağılım fonksiyonları bir $\{T_n\}_{n\geq 0}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin belli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Sürecin iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel ve Erlang dağılımına sahip olması durumlarında, X(t) sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu için aşikar bir formül verilmiştir. Ayrıca, en genel şartlar altında, X(t) süreci için ergodik teorem ispatlanmış ve sürecin en genel ergodik dağılım fonksiyonu, $\{T_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ süreçlerinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Son olarak, ele alınan sürecin dizisi için limit teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Stokastik Süreç, Rastgele Yürüyüş Süreci, Yenileme Süreci, Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci, Yansıtan Bariyer, Tutan Bariyer, Laplace Dönüşümü, Üstel Dağılım, Erlang Dağılımı, Ergodik, Limit Süreci.

SUMMARY

The Semi-Markov Random Walk Process With Two Reflecting Barriers

In particular, a number of very interesting problems of stock control, queuing and reliability theories can be expressed by means of random walk processes with two barriers. Numerous studies have been done about these processes because of their theoretical and practical importance. But most of these studies belong to the boundary-value problems for the random walk processes which has a finite state space. The boundary-value problems are important, so are the investigation of proper characteristics of processes at hand. For this reason although there are some studies on proper characteristics of random walk processes with two barriers, more detailed studies in this field have to carried out. In particular, random walk processes with two reflecting barriers are not studied well. Therefore, it is necessary to construct and investigate this process since it has theoretical and practical importance. Moreover, it is more interesting to look at semi-Markov random walk processes that is a general class instead of random walk processes.

In this study, the semi-Markov random walk process X(t) that has a denumerable space with two reflecting barriers on the 0(zero)-level and on the β $(\beta > 0)$-level and the important boundary functional of it, τ_1-the first reflection moment of the process from the lower reflecting barrier are constructed mathematically, explicit formulae are given for the moment generating functions of τ_1. One dimensional non-stationary distribution functions of X(t) are expressed by means of the probability characteristics of a renewal process $\{T_n\}_{n\geq o}$ and a random walk process $\{Y_n\}_{n\geq o}$. In the special cases in which the duration between two jump instants has exponential or Erlang distributions explicit formulae are obtained for one dimensional distribution functions of X(t). Furthermore, under the most general conditions, the ergodic theorem for the process X(t) is proved and the most general ergodic distribution function of the process X(t) is given by means of the probability characteristics of the processes $\{T_n\}_{n\geq o}$ and $\{Y_n\}_{n\geq o}$. Finally, the limit theorem is proved for the sequence of the process mentioned earlier.

Key words : Stochastic Process, Random Walk Process, Renewal Process, Semi-Markov Random Walk Process, Reflecting Barrier, Delaying Barrier, Laplace Transform, Exponential Distribution, Erlang Distribution, Ergodic, Limit Process.

ŞEKİL LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$a = b$	:	a eşittir b
$a := b$	:	a tanım olarak eşittir b
$a :\Leftrightarrow b$	:	a, b ile tanımlıdır
$a \neq b$	:	a farklıdır b
$a<b$	:	a küçüktür b
$a>b$	:	a büyüktür b
$a \leq b$	:	a küçüktür veya eşittir b
$a \geq b$	:	a büyüktür veya eşittir b
$a \in A$	:	a A nın elemanıdır
$a \notin A$	:	a A nın elemanı değildir
(a,b)	:	açık aralık
$(a,b]$	:	soldan açık, sağdan kapalı aralık
$[a,b)$	:	soldan kapalı, sağdan açık aralık
$[a,b]$	:	kapalı aralık
$\|a\|$	:	a sayısının mutlak değeri
$[\|a\|]$	:	a sayısının tam kısmı
$a < \infty$	:	a sonludur
$\forall$	:	her
$\exists$	:	en az bir
:	:	öyleki
IR	:	Reel Sayılar Kümesi
IR^+	:	$IR \cup \{0\} = [0, \infty)$
$A \subset B$	:	A kümesi B kümesinin altkümesidir (B kümesi Akümesini içerir)
$A \supset B$	:	A kümesi B kümesini içerir
$A \subseteq B$	:	A kümesi B kümesinin altkümesidir veya A, B kümeleri eşittir
$A \supseteq B$	:	A kümesi B kümesini içerir veya A, B kümeleri eşittir
min A	:	A kümesinin minimumu
max A	:	A kümesinin maksimumu

$\inf A$	:	A kümesinin infumumu
$\sup A$	:	A kümesinin supremumu
$\sum_{k=1}^{m} a_k$	:	$a_1, a_2, \ldots, a_m$ sayılarının toplamı
$\prod_{k=1}^{m} a_k$	:	$a_1, a_2, \ldots, a_m$ sayılarının çarpımı
$\prod_{k=1}^{m}{}_{*}(a_n^{(k)})$	:	$a_n^{(1)}, a_n^{(2)}, \ldots, a_n^{(m)}$ dizilerinin konvolüsyon çarpımı
$\prod_{k=1}^{m}{}_{*} f_k$	:	$f_1, f_2, \ldots, f_n$ fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
$P\{.\}$	:	$\{.\}$ olayının olasılığı
$P_z\{.\}$	:	$\{.\}$ olayının koşullu olasılığı
$E[\xi]$	:	ξ rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z\{\xi]$	:	ξ rastgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E[\xi^n]$	:	ξ rastgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$V[\xi]$	:	ξ rastgele değişkeninin varyansı
$V_z[\xi]$	:	ξ rastgele değişkeninin koşullu varyansı
$f(x)\big\|_{x=0}$	:	$f(x)$ fonksiyonunun $x = 0$ noktasındaki değeri
$d_x F(x,y)$	:	$F(x,y)$ fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli
$\frac{\partial^n}{\partial x^n} F(x,y)$	:	$F(x,y)$ fonksiyonunun x değişkenine göre n. kısmi türevi
$\lim_{x\to\infty} f(x)$	:	$f(x)$ fonksiyonunun, $x \to \infty$ için limiti

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş ve Ön Bilgiler

Olasılık teorisinde stokastik kavramı ilk kez bu teorinin kurucularından olan J. Bernovilli (1654-1705) tarafından kullanılmaya başlanmıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç'in (1868-1913) büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden kullanılmaya başlanmıştır.

Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A. N. Kolmogorov ve A.Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A. N. Kolmogorov günümüzde "Markov tipli süreç" olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken A.Y. Hinçin çalışmalarında "stasyoner süreçler" olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Bu alanda emeği geçen bilim adamları arasında N. Wiener, W. Feller, J. Dobb, R. Fisher, J. Newmann ve H. Cramer gibi olasılıkçıların isimlerini anabiliriz.

Şimdi, çalışmada geçen bazı tanım ve kavramları verelim.

Bir (Ω, F, P) olasılık uzayı verilsin. $X:\Omega \to IR$ ölçülebilen bir fonksiyon yani, her $x \in IR$ için $\{\omega : X(\omega) \leq x\} \in F$ ise X e bir boyutlu ***rastgele değişken*** ve

$$F(x) := P\{\omega : X(\omega) \leq x\} \equiv P\{X \leq x\}$$

olasılık fonksiyonuna X rastgele değişkeninin ***dağılım fonksiyonu*** denir.

$t \in T \subset IR^+$ için X_t ler aynı bir olasılık uzayı üzerinde tanımlı rastgele değişkenler olmak üzere, $\{X_t : t \in T\}$ ailesine bir ***stokastik süreç*** (kısaca süreç) denir ve X(t) ile de gösterilir. Buradaki t parametresi zaman olarak düşünülebilir. T kümesi sonlu veya sayılabilir ise sürece ***diskret zamanlı stokastik süreç***, T kümesi bir aralık (sonlu veya sonsuz) ise sürece ***sürekli zamanlı stokastik süreç*** adı verilir.

n=2,3,... olmak üzere, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ özelliğini sağlayan $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ ler için $X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ rastgele değişkenleri bağımsız ise X(t) sürecine ***bağımsız artımlı süreç*** denir.

$x, y \in IR$ olmak üzere, yine $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ özelliğini sağlayan $t_0, t_1, \ldots, t_n \in T$ ler için

$$P\left\{X_{t_n} < y \mid X_{t_{n-1}} = x,\ X_{t_{n-2}} = x_{n-2},\ \ldots,\ X_{t_1} = x_1,\ X_{t_0} = x_0\right\} = P\left\{X_{t_n} < y \mid X_{t_{n-1}} = x\right\}$$

eşitliği her $x_{n-2}, \ldots, x_0 \in IR$ için sağlanıyorsa X(t) sürecine bir ***Markov süreci*** denir. Bu durumda, $t_1, t_2 \in T$ ve $t_1 < t_2$ olmak üzere,

$$F(t_1, x, t_2, y) := P\left\{X_{t_2} < y \mid X_{t_1} = x\right\}$$

dağılım fonksiyonu $t < t_1$ olan $t \in T$ ler için X_t değerlerinden bağımsızdır. Eğer bu fonksiyon sadece $t = t_2 - t_1$ farkına bağlı ise X(t) Markov sürecine ***homojendir*** denir.

X_i $(i \in IN)$ rastgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olmak üzere, $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ ile tanımlı $\{Y_n : n \in IN\} = \{Y_n\}_{n \in IN}$ sürecine

a) X_i ler pozitif değerli ise, bir ***yenileme süreci***,

b) X_i ler hem pozitif hem de negatif değerli ise, bir ***rastgele yürüyüş süreci*** denir.

$t \in IR$ olmak üzere, aşağıdaki koşulları sağlayan W(t) sürecine bir ***Wiener süreci*** denir:

1) W(0)=0,
2) $s \leq t$ için $W(t) - W(s) \approx N(0, \sigma^2 (t-s))$ (σ^2 bir sabit),
3) W(t) süreci bağımsız artımlıdır.

Diskret zamanlı bir Markov sürecine, Markov zinciri denir. Yani,

$$P\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i,\ X_{n-2} = x_{n-2},\ \ldots,\ X_1 = x_1,\ X_0 = x_0\right\} = P\left\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\right\} =: P_{ij}$$

eşitliği her $x_{n-2}, \ldots, x_0 \in IR$ için sağlanıyorsa $\{X_n : n \in IN\} = \{X_n\}_{n \in IN}$ sürecine (dizisine) bir ***Markov zinciri*** ve P_{ij} ye de i durumundan j durumuna bir adımda geçiş olasılığı denir.

Şimdi bir $\{X_n\}_{n \in IN}$ Markov zinciri verilsin.

$$f_{ii}(n) := P\left\{X_n = i,\ X_{n-1} \neq i,\ \ldots,\ X_1 \neq i \mid X_0 = i\right\}$$

$$P_{ij}(n) := P\left\{X_{m+n} = j \mid X_m = i\right\}$$

olmak üzere

$$F_{ii} := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n)\ ,\ R_{ii} := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}(n) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}(n)$$

tanımlansın. F_{ii}, başlangıçta i durumunda olan zincirin eninde sonunda i durumuna gelme olasılığıdır. R_{ii} ye i durumunun ortalama tekrarlama zamanı denir. Eğer

1) $F_{ii} = 1$ ise i ye ***tekrarlanan durum*** denir.

2) i tekrarlanan durum ve $R_{ii} = +\infty$ ise i ye ***sıfır (null) durum***, $R_{ii} < \infty$ ise i ye ***sıfır olmayan (non-null) durum*** denir.

3) $P_{ii}(n_1) > 0,\ P_{ii}(n_2) > 0, \ldots$ ve $n_1 > n_2 > \ldots$ olan $n_1, n_2, \ldots$ sayıları için $d_i = (n_1, n_2, \ldots) > 1$ ise i ye d_i periyodlu ***periyodik durum***, $d_i = 1$ ise i ye ***periyodik olmayan durum*** denir. (Buradaki parantez, içindeki sayıların en büyük ortak bölenidir).

Bu tanımlardan sonra, şimdi ergodik durumu tanımlayabiliriz.

Tekrarlanan, sıfır olmayan ve periyodik olmayan bir duruma ***ergodik durum*** denir.

Bir Markov zincirinin ergodikliği, bütün durumlarının ergodik olması ile tanımlanır. Bir Markov sürecinin ergodikliği ise aşağıdaki gibi verilir:

X(t) bir Markov süreci olsun. f(x) sınırlı, ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere,

$$\lim_{T \to \infty} \int_0^T f(X(t))dt$$

limiti mevcut, sonlu ve rastgele değişken değil (yani X(0)=z ve t değerlerinden bağımsız) ise bu X(t) Markov sürecine ***ergodiktir*** denir ve bu limit değerine de sürecin ***en genel ergodik dağılım fonksiyonu*** adı verilir.

Bir Markov sürecinin ergodik olması için, bu süreçten ergodik bir Markov zincirinin inşa edilebilmesi gerekir. Ancak bu yeterli değildir (bkz. [5], sh. 243).

$\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ rastgele değişken dizisi ve X rastgele değişkeni aynı bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı olsun. Bunların dağılım fonksiyonlarını sırasıyla $F_n(x)$ ve $F(x)$ ile gösterelim ve aşağıdaki kavramları verelim:

Dağılıma göre yakınsaklık:

Eğer $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ ise $\{X_n\}_{n\in IN}$ rastgele değişken dizisi X rastgele değişkenine ***dağılıma göre yakınsaktır*** denir ve $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{d} X(\omega)$ şeklinde yazılır. Böylece,

$$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{d} X(\omega) \;:\Leftrightarrow\; F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$$
$$:\Leftrightarrow\; P\left\{X_n(\omega) \le x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} P\left\{X(\omega) \le x\right\}.$$

Bir $\{X_n(t)\}_{n\in IN}$ süreç dizisinin bir X(t) sürecine dağılıma göre yakınsaması da benzer şekilde tanımlanır. Bu durumda X(t) ye, $\{X_n(t)\}_{n\in IN}$ süreç dizisinin dağılıma göre ***limit süreci*** denir.

Olasılığa göre yakınsaklık:

Eğer her $\varepsilon > 0$ için $P\left\{X_n(\omega) > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)$ ise $\{X_n\}_{n\in IN}$ rastgele değişken dizisi X rastgele değişkenine ***olasılığa göre yakınsaktır*** denir ve $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{p} X(\omega)$ şeklinde yazılır. Böylece,

$$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{p} X(\omega) :\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \text{ için } P\left\{X_n(\omega) > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega).$$

1 olasılığı ile yakınsaklık:

Eğer ölçüsü sıfır olan bir kümenin dışında $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{p} X(\omega)$ ise $\{X_n\}_{n\in IN}$ rastgele değişken dizisi X rastgele değişkenine ***1 olasılığı ile yakınsaktır*** denir ve $X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{1} X(\omega)$ şeklinde yazılır. Böylece,

$$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{1} X(\omega) :\Leftrightarrow P(N) = 0 \text{ olan } \exists N \subset \Omega \text{ ök. } \forall\omega \in \Omega / N \text{ için}$$
$$X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{p} X(\omega).$$

Ortalama karesel yakınsaklık:

$E\left[\,|X_n(\omega) - X(\omega)|^2\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ise $\{X_n\}_{n\in IN}$ rastgele değişken dizisi X rastgele değişkenine ***ortalama karesel yakınsaktır*** denir.

Olasılığa göre sınırlılık:

$$\forall\varepsilon > 0 \text{ ve } \forall n \ge 1 \text{ için } \exists\, M > 0 \text{ ök. } P\left\{|X_n(\omega)| \le M\right\} \ge 1 - \varepsilon$$

ise $\{X_n\}_{n\in IN}$ rastgele değişken dizisi ***olasılığa göre sınırlıdır*** denir.

Bir $\{X_n(t)\}_{n\in IN}$ süreç dizisinin olasılığa göre sınırlı olması da benzer şekilde tanımlanır.

1.2. Literatür Araştırması

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir kısmını oluşturan "İki Bariyerli Rastgele Yürüyüş Süreçleri"nin özel bir durumu olan "İki Yansıtan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci" ele alınmıştır. Bu nedenle önce, yarı-Markov süreçlerinin ve yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin son yıllardaki gelişimini kısaca verelim.

Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri, yarı-Markov süreçlerinin özel bir durumudur. "Yarı-Markov Süreci" kavramı ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, ünlü olasılıkçılar Levy [1], Smith [2] ve Takacs [3] tarafından verilmiştir. Bu tanımlardan Levy'nin 1954 yılında vermiş olduğu tanımı kısaca verelim:

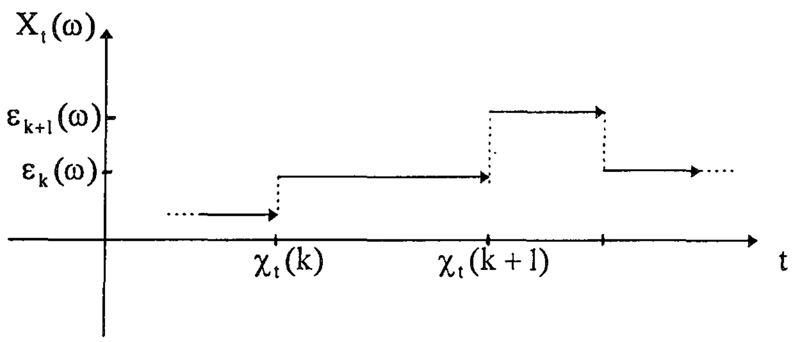
$X_t(\omega)$ sürecinin durumlar uzayı $\{0,1,2,...\}$ olsun. Eğer $X_t(\omega)$ sürecinin geçiş olasılıkları aşağıdaki fonksiyonlar ailesi ile belirlenirse, bu sürece bir ***"yarı-Markov süreci"*** denir:

$$f_t(i,j,u) = P\left\{\varepsilon_{k-1}(\omega)\ ;\ \tau_t(\varepsilon_k(\omega)) < u\ ;\ \varepsilon_k(\omega) = i\right\}\ ;\ i,j = 0,1,2,...,s\ ,$$

burada $\varepsilon_k(\omega)$, k.sıçramada sistemin durumu ve $\chi_t(k)$, k.sıçrama anı olmak üzere

$$\tau_t(\varepsilon_k(\omega)) = \chi_t(k+1) - \chi_t(k)$$

dır. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 1 de görülmektedir.



Şekil 1.Yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Fakat bu tanımda, durum uzayı sonlu elemanlı olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlenebildiğinden, bu tanımın genelleştirilmesi ve matematikselleştirilmesi gereği vardı. Bu nedenle Çınlar [4], Gihman ve Skorohod [5], Serfoza [6], Ezhov ve Koroljuk [7], çalışmalarında "genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci" tanımlarını vermişler ve böylece yukarıdaki tanımı genelleştirmişlerdir. Bu tanımlardan Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu tanımı özetleyelim:

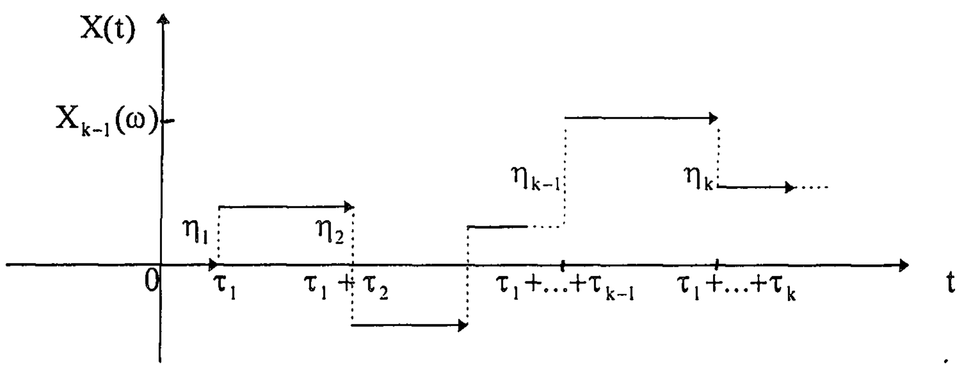
(Ω, F, P_x), $x \in X$, olasılık uzayları ailesi ve bir (Ω, σ, P_x) olasılık uzayında bir $\{X_n(\omega)\,;\ n = 0,1,2,\ldots\}$ Markov zinciri verilsin. Bu zincirin, $P_x\{X_0(\omega) = x\} = 1$ olmak üzere, durum uzayı (X, B) ve geçiş olasılığı $\pi(x, B)$ dir. Kabul edelimki $\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \ldots$ bağımsız, aynı tür dağılıma sahip ve $\{X_n(\omega)\,;\ n = 0,1,2,\ldots\}$ ailesinden $[0,1]$ de düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$, herhangi bir negatif olmayan rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olmak üzere, $[0,1]$ de öyle bir negatif olmayan $\varphi_{x,y}(t)$ fonksiyonu belirleyelimki, $\varphi_{x,y}(\xi)$ nin $[0,1]$ de dağılım fonksiyonu $F_{x,y}(t)$ olsun (burada ξ, $[0,1]$ de düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişkendir). Bu takdirde

$$\tau_k = \varphi_{X_{k-1}, X_k}(\eta_k)$$

olmak üzere

$$X(t) = X_{k-1}(\omega)\,, \text{ eğer } \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \le t < \sum_{i=1}^{k} \tau_i \text{ ise } \left(\sum_{1}^{0} := 0\right)$$

ile tanımlanan $X(t)$ sürecine bir *"yarı-Markov süreci"* denir. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 2 de görülmektedir.



Şekil 2. Yarı-markov sürecinin bir görünüşü

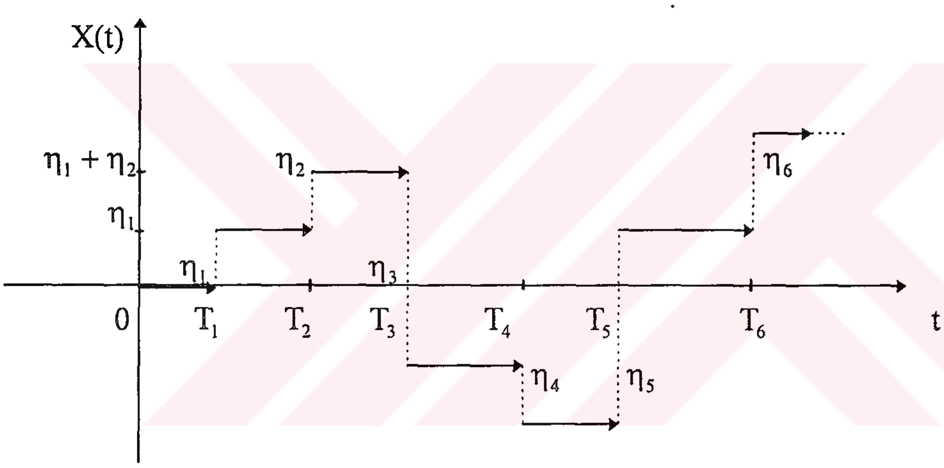
Yarı-Markov sürecinin diğer bir tanımını da Shurenkov [8] 1987 yılında vermiş ve bu tanımın, Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu tanıma denk olduğu gösterilmiştir.

Nasirova [9] ise 1970 yılında, Skorohod'un vermiş olduğu "yarı-Markov süreci" kavramının özel bir durumu olan "yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" kavramını şu şekilde vermiştir:

$\left\{(\xi_i,\eta_i)\ ;\ i=1,2,\ldots\right\}$ bir (Ω,F,P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\ ,\ \text{eğer}\ T_n\le t<T_{n+1}\ \text{ise}\ ;\ \ T_n:=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\ n\ge 1\ ;\ T_0:=0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine bir ***"yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 3 de görülmektedir.



Şekil 3. Yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova, bu şekilde inşa ettiği sürecin dağılımını, sürecin supremumunun dağılımını, sürecin verilen bir seviyeye ilk defa ulaşma anı ile sıçrama anlarının birleşik dağılımını, sürecin supremumu ile infimumunun birleşik dağılımını ve süreç için limit teoremlerini çalışmıştır.

Yarı-Markov süreçleri ile ilgili pek çok önemli problem, Borovkov [10,11,12], Koroljuk ve Turbin [13], Çınlar [4,14,15], Takacs [3,16], Koroljuk ve Pirliev [17], Tomko [18], Smith [2,19,20], Spitzer [21,22], Feller [23,24], Anisimov [25,26], Gnedenko ve Kovalenko [27], Shurenkov [28,29,30], Koroljuk, Brodi ve Turbin [31], Harlamov [32,33], v.s. çalışmalarında detaylı olarak incelenmiştir.

Stokastik süreçlerin esas sınır fonksiyonallerinin incelenmesi de önemli problem-lemlerden biridir. Bu konuda ilk çalışmayı Spitzer [22] yapmıştır. Onun çalışmalarını Rogozin [34], Gusak ve Koroljuk [35] toplam dizisi için genelleştirmiştir. Daha sonra Rogozin [36] aynı çalışmaları, artımları bağımsız olan süreçler için de genelleştirmiştir. Gusak [37] sıçrama anı ve değerinin birleşik dağılımı için genel sonuçlar elde ederken Gusak ve Koroljuk [38] sürecin değerinin ve supremumunun birleşik dağılımını vermiştir. Baxter ve Donsker [39] ise simetrik süreçlerin modülünün maksimumunun dağılımını elde etmiştir. Sıçramalarının işareti aynı olan süreçler ile, Skorohod [40] çalışmaya başlamış ve bu süreçlerin karakteristikleri ile, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anı arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur. Borovkov [12] ve Zolotorev [41] sıçramalarının işareti aynı, artımları bağımsız olan süreçlerin, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımı ile, sürecin değerinin dağılımı arasındaki ilişkileri vermişlerdir. Levy [1] ise aynı sürecin değerinin infimumu ve supremumunun birleşik dağılımını elde etmiştir.

İncelenen bu tip süreçler, stokastik süreçlerin yeni tiplerinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Örneğin Ezhov [42] "yarı-Markov karışımlı Markov süreçleri" olarak adlandırılan stokastik süreçler sınıfını ortaya koyarken Pyke ve Schaufele [43] "Markov yenileme süreçleri" kavramını ortaya koydular ve incelediler.

Aynı yıllarda, yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin çalışılmasıyla paralel olarak, bu süreçlerle ilgisi olan ve "yarı-sürekli (yani pozitif ya da negatif akımlı (meyilli)) yarı-Markov süreci" olarak adlandırılan özel bir stokastik süreçler sınıfı çalışılmaya başlandı. Şimdi bunlardan bir kaç tanesini özetleyelim.

Dzhafarov ve Skorohod [44] aşağıdaki süreci ele almışlardır:

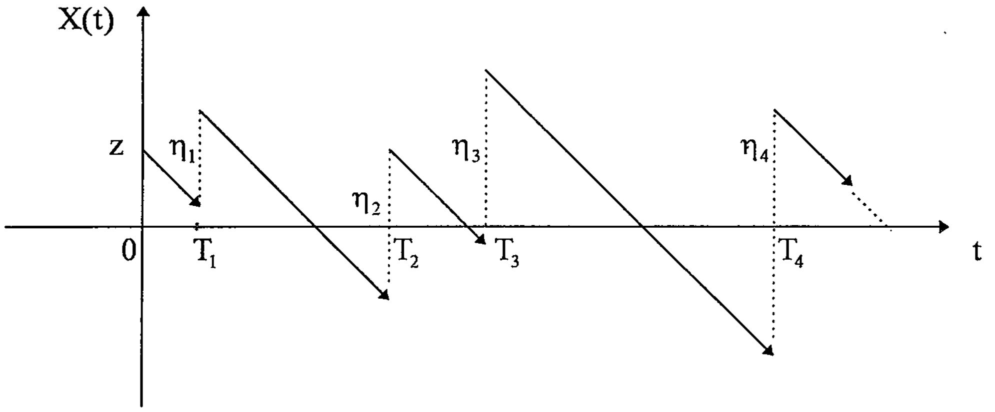
$\left\{(\xi_i,\eta_i)\ ;\ i=1,2,...\right\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i, η_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde, $\varsigma(t)$ yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci, yani

$$\varsigma(t)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\ ,\ \text{eğer}\ T_n \le t < T_{n+1}\ \text{ise}\ ;\ T_n:=\sum_{i=1}^{n}\xi_i,\ n\ge 1\ ;\ T_0:=0$$

olmak üzere

$$X(t)=z+\varsigma(t)-t\ ,\ \text{eğer}\ T_n \le t < T_{n+1}\ \text{ise}\ ,$$

ile tanımlanan $X(t)$ sürecine ***"negatif akımlı (meyilli), pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreci"*** denir. Burada $z\ge 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu tip süreçlerin esas olasılık özellikleri incelenmiştir. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 4 de görülmektedir.



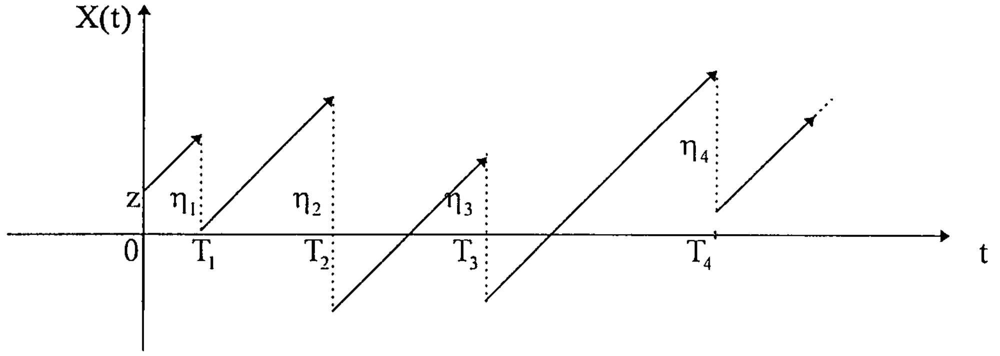
Şekil 4. Negatif akımlı, pozitif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Ahmedova [45] ise aşağıdaki süreci ele almıştır:

$\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,...\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif, η_i ler negatif değerli olsun. Bu takdirde, yine $\varsigma(t)$ yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olmak üzere

$$X(t) = z + t - \varsigma(t) = z - (\varsigma(t) - t)\ , \text{ eğer } T_n \le t < T_{n+1} \text{ ise },$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"pozitif akımlı (meyilli), negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreci"*** denir. Burada da $z \ge 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu tip süreçlerin de esas olasılık özellikleri incelenmiştir. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 5 de görülmektedir.



Şekil 5. Pozitif akımlı, negatif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri ile ilgili fakat daha karmaşık olan süreçlerden biri de "yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci" olarak adlandırılan bir süreçtir. Bu süreçlere örnek olarak, Nasirova [9] nın ele aldığı bir süreç gösterilebilir. Şimdi bu süreci özetleyelim:

$\left\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-)\ ;\ i=1,2,\ldots\right\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi ve $\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-$ ler pozitif, η_i^- ler negatif değerli olsun. Bu takdirde

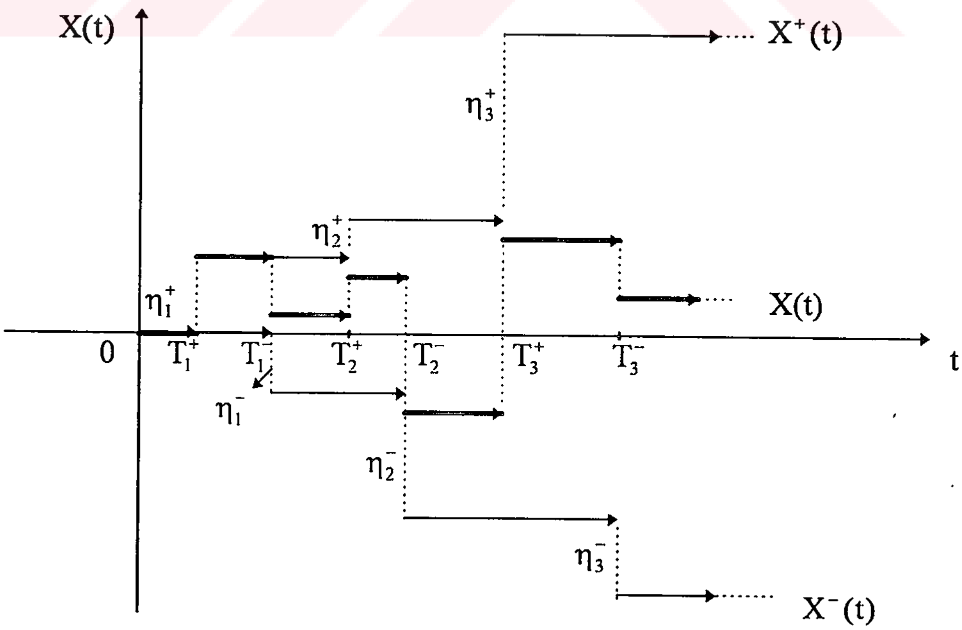
$$X^+(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^+ \text{ , eğer } T_n^+ \le t < T_{n+1}^+ \text{ ise ; } T_n^+ := \sum_{i=1}^{n} \xi_i^+ \text{ , } n \ge 1 \text{ ; } T_0^+ := 0 \text{ ,}$$

$$X^-(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^- \text{ , eğer } T_n^- \le t < T_{n+1}^- \text{ ise ; } T_n^- := \sum_{i=1}^{n} \xi_i^- \text{ , } n \ge 1 \text{ ; } T_0^- := 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X^+(t) - X^-(t)$$

ile tanımlanan X(t) sürecine bir ***"yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Bu süreç için önemli olan bütün olasılık karakteristikleri incelenmiştir. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 6 da görülmektedir.



Şekil 6. Yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve süreçlerin ergodik dağılımları da hem teorik hem de pratik bakımdan oldukça önemlidir. Yarı-Markov sınıfına ait olan yenileme süreçleri için esas ergodik teorem, 1975 yılında Smith tarafından ispatlanmıştır. Yarı-Markov süreçleri için ergodik teorem ise Ezhov ve Shurenkov [46] tarafından verilmiştir. Shurenkov [28] yarı-Markov süreçlerinin ergodik dağılımının varlığı için gerek ve yeter şart elde etmiştir.

Yarı-Markov süreçleri için en genel durumda limit teoremlerini Anisimov [25,26], Sil'vestrov [47,48], Dzhafarov, Nasirova ve Skorohod [44], Koroljuk ve Svishchuk [49] vermişlerdir. Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri için limit teoremleri ise Skorohod ve Slobodenyuk [50], Nasirova [9] ve Harlamov [33] çalışmalarında incelenmiştir.

Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin incelenmesinden sonra, uygulamada ortaya çıkan bazı problemlerin incelenmesi ve çözümlenmesi için bu süreçlerin bariyerli tipleri incelenmeye başlandı. Bu tip süreçler bir bariyerli ve iki bariyerli olarak sınıflandırılabilir. Bariyerler ise ortaya çıkan somut problemlere bağlı olarak yansıtan, tutan, yutan, elastik, v.s. olabilir.

Nasirova [9] "0 (sıfır)-seviyesinde tutan bariyere sahip olan bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" ni şu şekilde kurmuştur:

$\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,\ldots\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = \text{maks}\ \{0, X_{n-1} + \eta_n\}\ ,\ n \geq 1\ ;\ X_0 = z \geq 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise};\ \ T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ n \geq 1\ ;\ T_0 := 0$$

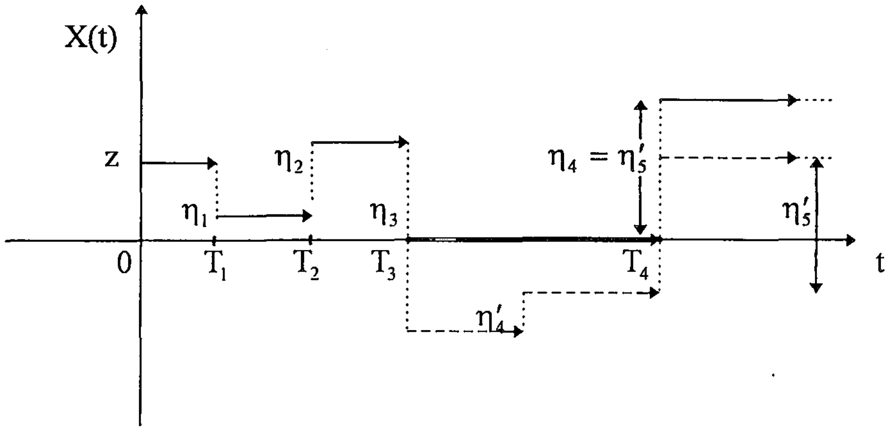
ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Aynı varsayımlar altında, sıfırda tutan bariyer yoksa, süreç,

$$X_n = X_{n-1} + \eta_n\ ,\ n \geq 1\ ;\ X_0 = z \geq 0$$

olmak üzere,

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise};\ \ T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ n \geq 1\ ;\ T_0 := 0$$

şeklinde olur. Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 7 de görülmektedir.



Şekil 7. 0 (sıfır)-seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Bu süreç için Nasirova [9,51] dağılımı ve esas sınır fonksiyonallerinin dağılımını, Nasirova ve Skorohod [52,53] ergodik teoremi, ergodik dağılım fonksiyonunu, Nasirova [9] ve Borovkov [11] ise seriler şeklinde limit teoremlerini vermişlerdir.

Benzer şekilde "β $(\beta > 0)$-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" de kurulmuş ve incelenmiştir. Şimdi bu sürecin tanımını verelim:

Aynı varsayımlar altında,

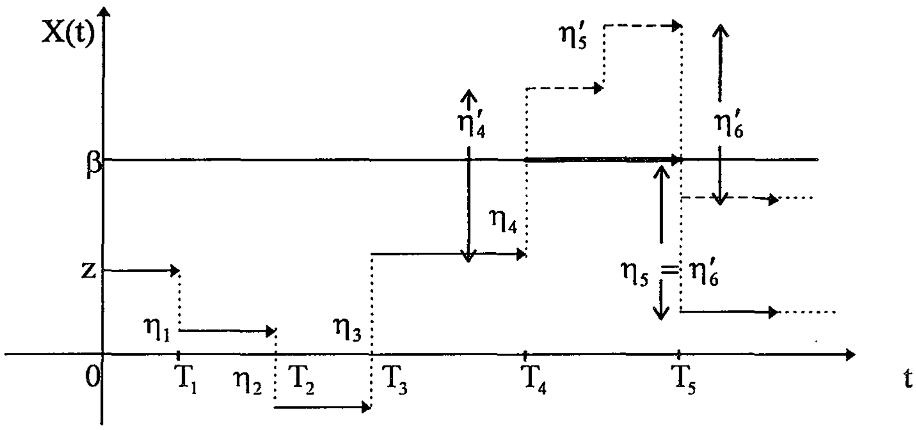
$$X_n = \min\{\beta, X_{n-1} + \eta_n\}, \; n \geq 1 \; ; \; X_0 = z \in [0, \beta]$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \, , \text{ eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise} ; \;\; T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, , \; n \geq 1 \; ; \; T_0 := 0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine "β $(\beta > 0)$***-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci*"** denir. Burada da $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 8 de görülmektedir.

Nasirova ve Skorohod [52] bu süreç için ergodik teoremi ispatlamışlar ve sürecin ergodik dağılımını vermişlerdir. Ayrıca bu tipten stokastik süreçler Feller [23], Spitzer [21], Smith [19] gibi matematikçiler tarafından da çalışılmıştır.



Şekil 8. β $(\beta > 0)$-seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Benzer şekilde "$-\beta$ $(\beta > 0)$-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" de tanımlanabilir:

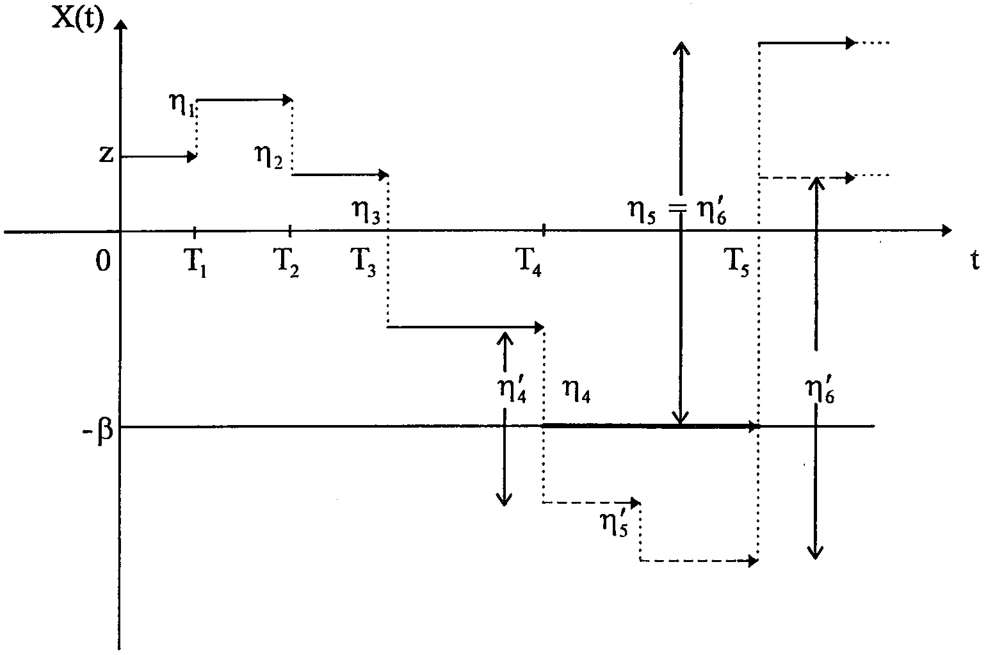
Aynı varsayımlar altında,

$$X_n = \text{maks}\,\{-\beta, X_{n-1} + \eta_n\}\ ,\ n \geq 1\ ;\ X_0 = z \geq 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise};\ \ T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ n \geq 1\ ;\ T_0 := 0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"$-\beta$ $(\beta > 0)$-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada da $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 9 da görülmektedir.



Şekil 9. $-\beta$ $(\beta > 0)$ -seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova daha sonra, 0 (sıfır)-seviyesinde tutan bariyerli daha karmaşık süreçleri de ele almıştır ([9]).

Dzhafarov [54] aşağıdaki süreci tanımlamış ve sürecin esas olasılık karakteristikleri incelemiştir:

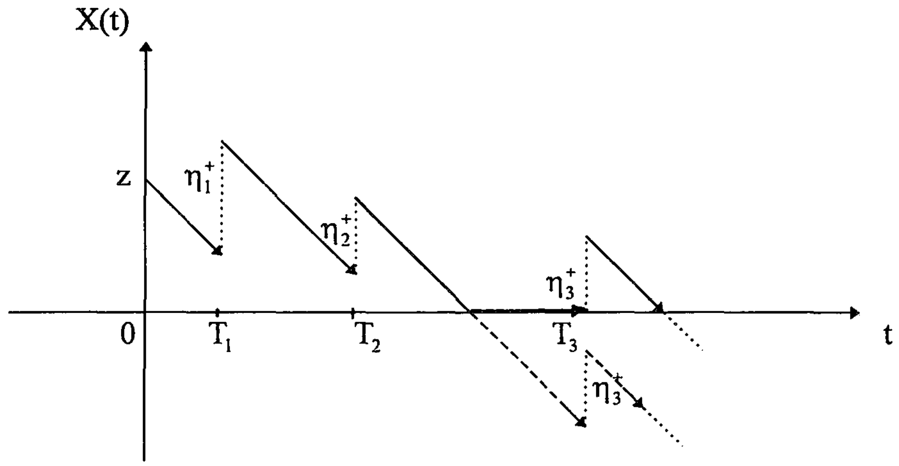
$\{(\xi_i, \eta_i^+)\ ;\ i = 1,2,...\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i, η_i^+ ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = \text{maks}\ \{0, X_{n-1} + \eta_n^+ - t\}\ ,\ n \geq 1\ ;\ X_0 = \text{maks}\ \{0, z - t\}$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise};\ \ T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ n \geq 1\ ;\ T_0 := 0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)- seviyesinde tutan bariyere sahip negatif akımlı (meyilli), pozitif sıçramalı bir yarı-Markov süreci"*** denir. Burada $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 10 da görülmektedir.



Şekil 10. 0 (sıfır)- seviyesinde tutan bariyere sahip negatif akımlı (meyilli), pozitif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Ahmedova [55] ise "0 (sıfır)-seviyesinde tutan bariyere sahip pozitif akımlı (meyilli) yarı-Markov süreci"ni ele almıştır. Bu süreç için de ilginç olan olasılık karakteristikleri detayları ile incelenmiştir. Şimdi bu sürecin tanımını verelim:

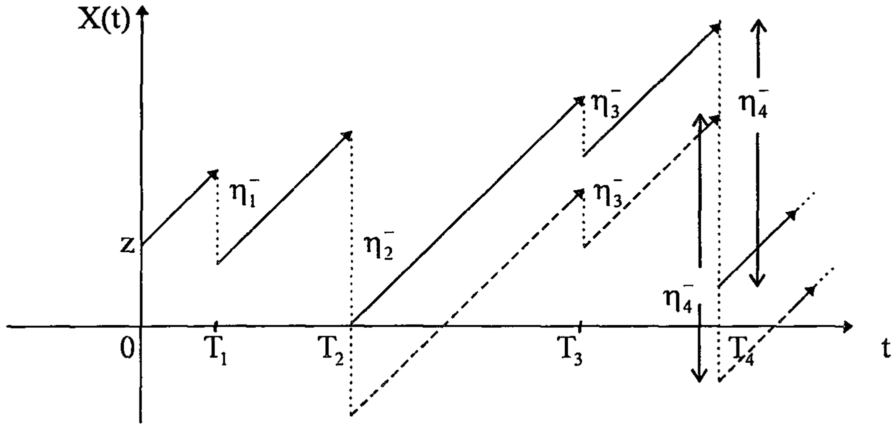
$\left\{(\xi_i,\eta_i^-)\ ;\ i=1,2,...\right\}$ bir (Ω,F,P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif, η_i^- ler negatif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = \text{maks}\ \{0, X_{n-1} - \eta_n^- + t\}\ ,\ n \geq 1\ ;\ X_0 = \text{maks}\ \{0, t-z\}$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer}\ T_n \leq t < T_{n+1}\ \text{ise};\ \ T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ n \geq 1\ ;\ T_0 := 0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)- seviyesinde tutan bariyere sahip pozitif akımlı (meyilli), negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreci"*** denir. Burada $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 11 de görülmektedir.



Şekil 11. 0 (sıfır)- seviyesinde tutan bariyere sahip pozitif akımlı (meyilli), negatif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Bir tane tutan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin en genel şeklini Borovkov [10] şu şekilde vermiştir:

X(t) bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci olmak üzere

$$X_0^*(t) = X(t) - \inf_{0 \le s < t} \{0, X(s)\}$$

ile tanımlı $X_0^*(t)$ sürecine ***"0-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"***,

$$X_\beta^*(t) = \beta + X(t) - \sup_{0 \le s < t} \{\beta, X(s)\}$$

ile tanımlı $X_\beta^*(t)$ sürecine ***"β-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"***,

$$X_{-\beta}^*(t) = -\beta + X(t) - \inf_{0 \le s < t} \{-\beta, X(s)\}$$

ile tanımlı $X_{-\beta}^*(t)$ sürecine ***"-β-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir.

Bu tanımların, diğer tanımlara denk olduğu gösterilmiştir.

Skorohod ve Nasirova [56,57] çalışmalarında benzer süreçleri ele alıp detayları ile incelemişlerdir.

Ayrıca Nasirova [9] aşağıdaki şekilde tanımlanan "0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci"ni kurmuş ve çalışmıştır:

$\left\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-) \; ; \; i = 1,2,\ldots\right\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi ve $\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-$ ler pozitif, η_i^- ler negatif değerli olsun.

$$T_n^+ := \sum_{i=1}^{n} \xi_i^+ \; , \; T_n^- := \sum_{i=1}^{n} \xi_i^- \; , \; n \geq 1 \; ; \; T_0^+ := T_0^- := 0$$

olmak üzere, T_n^+, T_n^- rastgele değişkenlerini artan sırada yeniden düzenleyelim. Bu düzenlemeyi T_n ile gösterelim ve

$$\eta_n := \begin{cases} \eta_i^+ \; , & T_n = T_i^+ \\ -\eta_j^- \; , & T_n = T_j^- \end{cases}$$

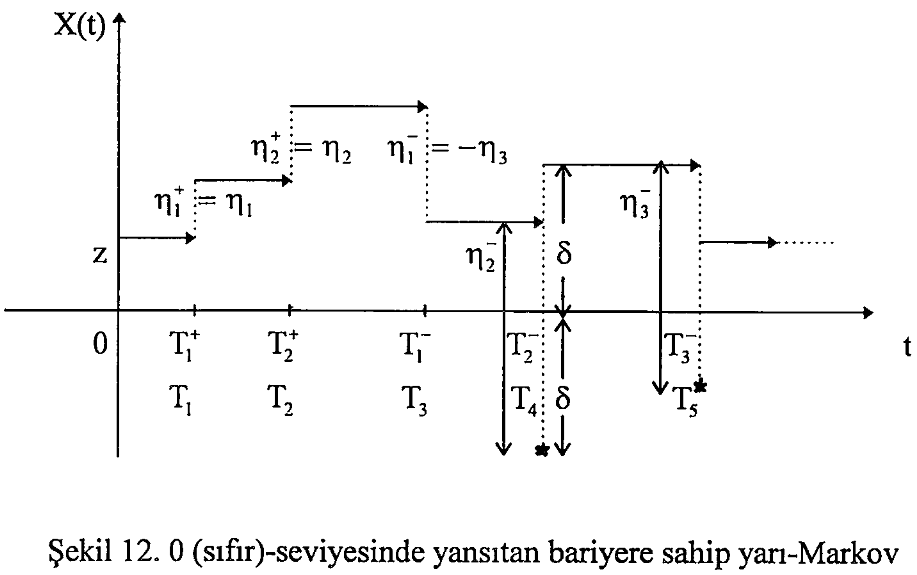
rastgele değişkenini tanımlayalım. Bu takdirde

$$X_n = |X_{n-1} + \eta_n| \, , \; n \geq 1 \; ; \; X_0 = z \geq 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n \; , \; \text{eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise},$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip bir yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 12 de görülmektedir.



Şekil 12. 0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova [9] bu sürecin yansıtan bariyere ilk kez düşme anının dağılımını, sürecin verilen bir seviyeye ilk kez düşme anının dağılımını, sürecin dağılımının Laplace dönüşümünü çalışmış, süreç için limit teoremini ifade ve ispat etmiş, sürecin ergodikliğini incelemiştir.

Bundan başka, "0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" ve "β $(\beta > 0)$-seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" de kurulmuş ve bu süreçler için limit teoremi ispatlanmıştır. Şimdi bu süreçlerin tanımını verelim:

$\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,...\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = |X_{n-1} + \eta_n|\ ,\ n \geq 1\ ;\ X_0 = z \geq 0$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer}\ T_n \leq t < T_{n+1}\ \text{ise}\ ;\ T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ n \geq 1\ ;\ T_0 := 0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada da $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur.

Aynı varsayımlar altında,

$$X_n = \beta - |X_{n-1} + \eta_n - \beta| = \begin{cases} X_{n-1} + \eta_n & ,\ X_{n-1} + \eta_n \leq \beta \\ 2\beta - (X_{n-1} + \eta_n) & ,\ X_{n-1} + \eta_n > \beta \end{cases}\ ,\ n \geq 1$$

$$X_0 = z \in [0, \beta]$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer}\ T_n \leq t < T_{n+1}\ \text{ise},$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"β $(\beta > 0)$-seviyesinde yansıtan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada da $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur.

Benzer şekilde, "$-\beta$ $(\beta > 0)$-seviyesinde yansıtan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" de tanımlanabilir:

Aynı varsayımlar altında,

$$X_n = |X_{n-1} + \eta_n + \beta| - \beta = \begin{cases} X_{n-1} + \eta_n & ,\ X_{n-1} + \eta_n \geq -\beta \\ -2\beta - (X_{n-1} + \eta_n) & ,\ X_{n-1} + \eta_n < -\beta \end{cases}\ ,\ n \geq 1$$

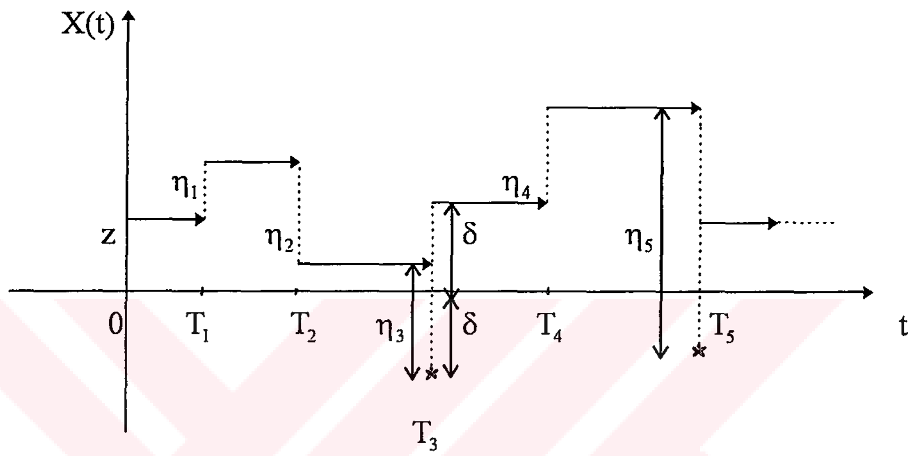
$$X_0 = z \in [0, \beta]$$

olmak üzere

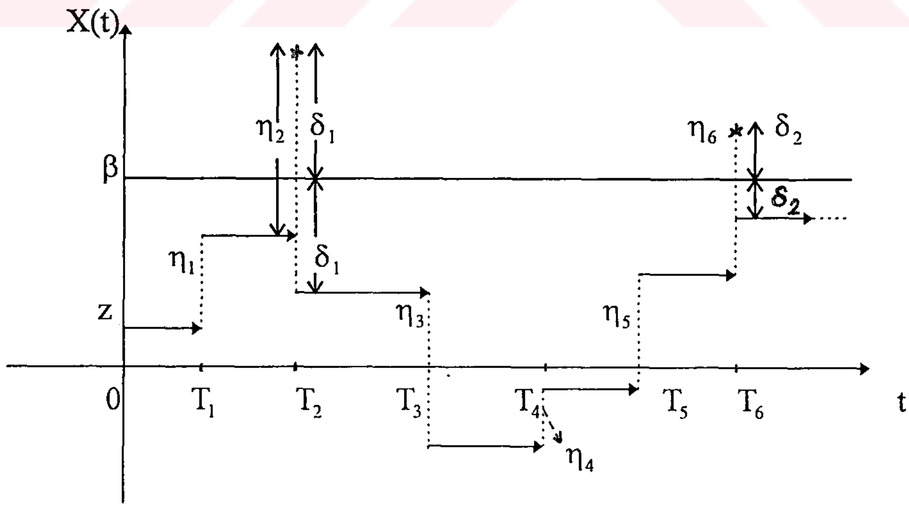
$$X(t) = X_n \text{ , eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"-β (β > 0)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir.Burada da $z \geq 0$, sürecin başlangıçtaki durumudur.

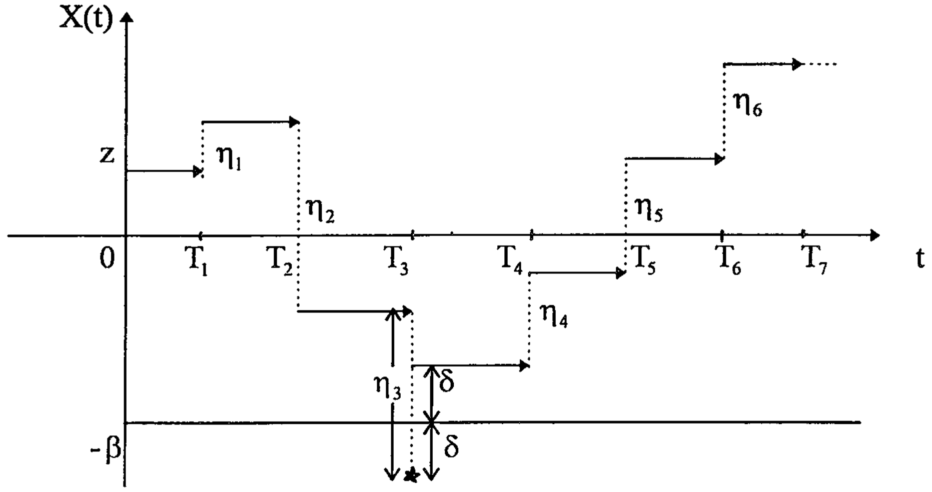
Bu süreçlerin karşılaştırmalı görünüşlerinden birer tanesi sırasıyla Şekil 13, Şekil 14 ve Şekil 15 de görülmektedir.



Şekil 13. 0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü



Şekil 14. β (β > 0) -seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü



Şekil 15. $-\beta$ ($\beta > 0$) -seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Bariyerli veya bariyersiz yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri, detaylı olarak ele alınmış olmalarına rağmen, hayatta karşılaşılan problemlerin bir çoğunu bu tip süreçlerin yardımı ile çözmek mümkün değildir. Özellikle stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerinin pek çok önemli problemi, iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilir. Örneğin bekleme zamanı sonlu olan kuyruk sistemlerini veya sonlu hacimli depolardaki stokların rastgele seviyelerini, iki tutan bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla vermek mümkündür. Ayrıca yedek alete sahip stokastik sistemlerin çalışması da biri tutan, diğeri ise herhangi bir özelliğe sahip iki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri yardımıyla verilebilir.

İki bariyerli rastgele yürüyüş süreçleri Feller [23], Spitzer [21], Borovkov [11], Lotov [58], Afanas'eva ve Bulinskaya [59,60,61], Khaniev [62,63,64,65], Zhang [66], v.s. çalışmalarında ele almıştır. Örneğin Feller [23] bariyerlerinin her ikisi de yansıtan veya her ikisi de yutan olan bir boyutlu rastgele yürüyüş süreçlerini kurmuş ve bunların bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamıştır. Fakat bu sonuçlar genel karakterleri taşımadıklarından ve ayrıca yapılan bu çalışmaların çoğu sonlu durum uzayına sahip rastgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemlerine ait olduğundan (Koroljuk ve Borovskikh [67], Lotov [68, 69], Prabhu [70], Zhang [66], El-Shehawey [71], Weesakul [72], Kastenbaum [73], v.s.), ortaya çıkan bazı fiziksel problemlerin çözülmesi için iki bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerini genişçe inceleme zorunluluğu doğmuştur.

Şimdi, iki bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri ile ilgili yapılan çalışmaların bazılarından sözedelim.

Khaniev [64,65] "iki tutan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri"ni incelemiş, sürecin dağılımını, sürecin verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımını, sürecin beklenen değer ve varyans gibi bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamış, süreç için ergodik teoremi ifade ve ispat etmiştir. Ayrıca bu süreç için limit teoremlerini ve sürecin asimtotik durumunu incelemiştir. Şimdi bu sürecin tanımını verelim:

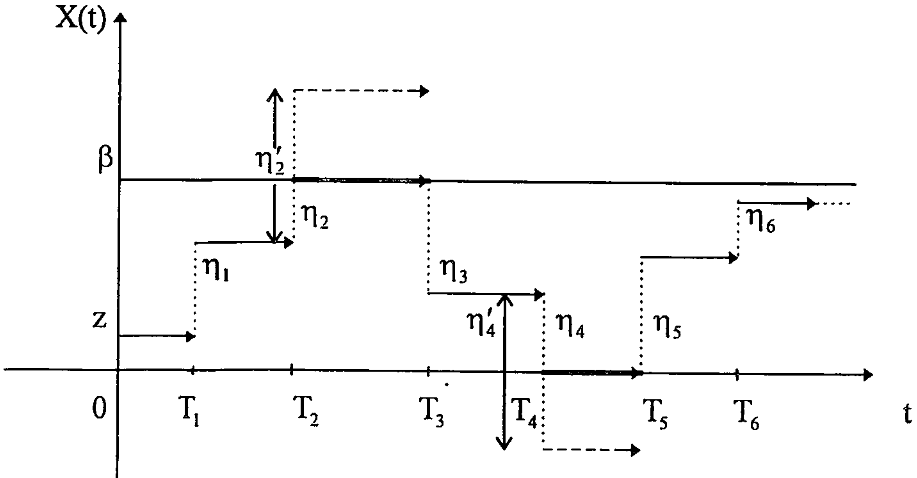
$\left\{(\xi_i,\eta_i)\ ;\ i=1,2,\ldots\right\}$ bir (Ω,F,P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = \min\left\{\beta, \text{maks}\ \{0, X_{n-1}+\eta_n\}\right\},\ n\geq 1\ ;\ X_0 = z\in[0,\beta]$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer}\ T_n \leq t < T_{n+1}\ \text{ise}\ ;\ T_n := \sum_{i=1}^{n}\xi_i\ ,\ n\geq 1\ ;\ T_0 := 0,$$

ile tanımlanan $X(t)$ sürecine ***"0 (sıfır)- ve*** β $(\beta>0)$ ***-seviyelerinde tutan bariyerlere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada $z\in[0,\beta]$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu süreçlerin (bariyerli ve bariyersiz) karşılaştırmalı görünüşlerinden bir tanesi Şekil 16 da görülmektedir.



Şekil 16. 0 (sıfır)- ve β $(\beta>0)$ -seviyelerinde tutan bariyerlere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Nasirova, Yapar ve Khaniev [74] "0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan ve β $(\beta > 0)$-seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci"ni kurmuş ve incelemişler, bu sürecin dağılımının Laplace dönüşümü ile, ilk kez yansıma ve tutulma anlarının dağılımlarını vermişlerdir. Şimdi bu süreci tanımlayalım:

$\left\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-)\ ;\ i = 1,2,...\right\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler dörtlüleri dizisi ve $\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-$ ler pozitif, η_i^- ler negatif değerli olsun.

$$T_n^+ := \sum_{i=1}^{n} \xi_i^+\ ,\ T_n^- := \sum_{i=1}^{n} \xi_i^-\ ,\ n \geq 1\ ;\ T_0^+ := T_0^- := 0$$

olmak üzere, T_n^+, T_n^- rastgele değişkenlerini artan sırada yeniden düzenleyelim. Bu düzenlemeyi T_n ile gösterelim ve

$$\eta_n := \begin{cases} \eta_i^+\ , & T_n = T_i^+ \\ -\eta_j^-\ , & T_n = T_j^- \end{cases}$$

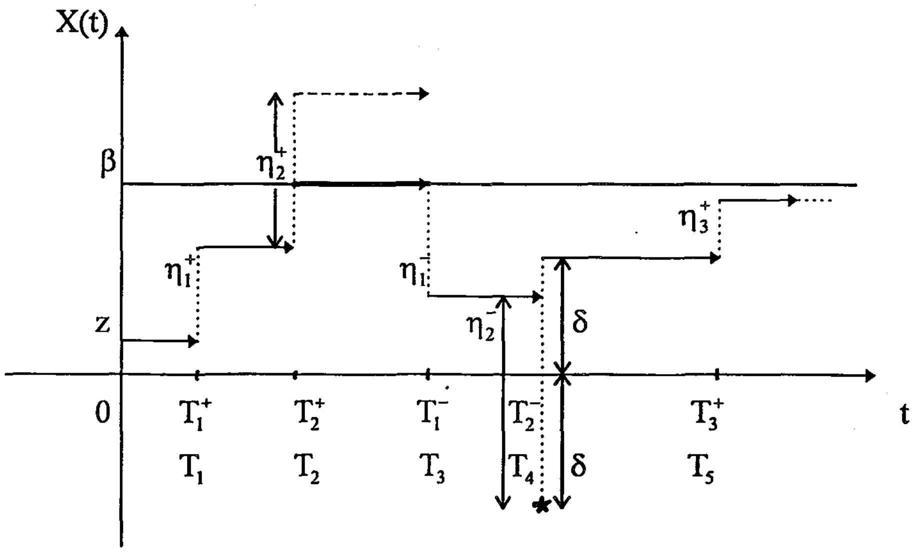
rastgele değişkenini tanımlayalım. Bu takdirde

$$X_n = \min\left\{\beta, |X_{n-1} + \eta_n|\right\}\ ,\ n \geq 1\ ;\ X_0 = z \in [0,\beta]$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer } T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise},$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan ve*** β $(\beta > 0)$ ***-seviyesinde tutan bariyere sahip bir yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada $z \in [0,\beta]$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 17 de görülmektedir.



Şekil 17. 0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan ve β $(\beta > 0)$-seviyesinde tutan bariyere sahip yarı-Markov toplam rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Özdemir [76] "yansıtan ve tutan bariyerlere sahip pozitif akımlı (meyilli), negatif sıçramalı yarı-Markov süreci"ni aşağıdaki şekilde kurmuştur:

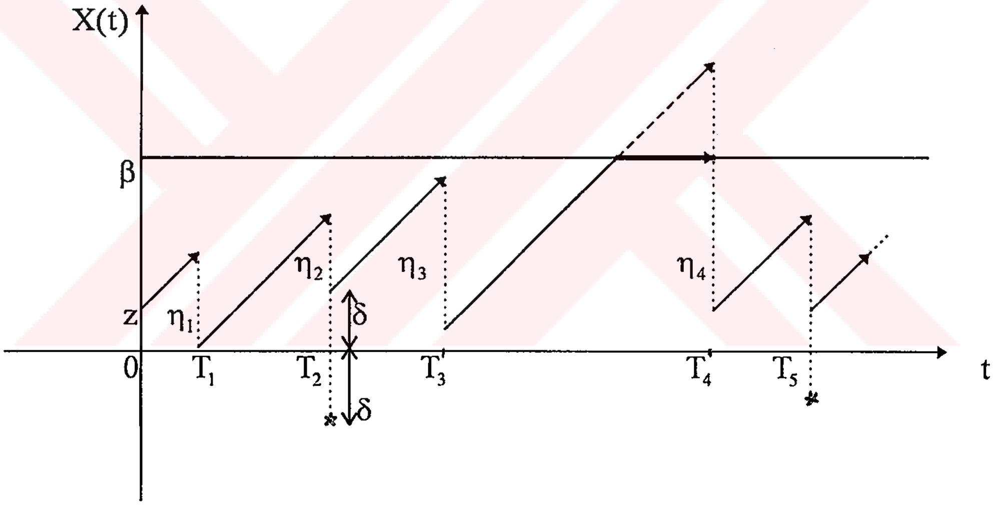
$\left\{(\xi_i,\eta_i)\ ;\ i=1,2,...\right\}$ bir(Ω,F,P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ,η_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = \min\left\{\beta,\left|\min\{\beta,X_{n-1}+\eta_n\}-\eta_n\right|\right\},\ n\geq 1\ ;\ X_0 = z\in[0,\beta]$$

olmak üzere

$$X(t)=\min\left\{\beta,t+X_{n-1}-T_{n-1}\right\},\ \text{eğer } T_{n-1}\leq t<T_n \text{ ise }\ ;\ T_n:=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\ ,\ n\geq 1\ ;\ T_0:=0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan ve*** β $(\beta>0)$ ***-seviyesinde tutan bariyerlere sahip pozitif akımlı (meyilli), negatif sıçramalı bir yarı-Markov süreci"*** denir. Burada $z\in[0,\beta]$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 18 de görülmektedir.



Şekil 18. 0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan ve β $(\beta>0)$ -seviyesinde tutan bariyerlere sahip pozitif akımlı (meyilli), negatif sıçramalı yarı-Markov sürecinin bir görünüşü

Özdemir [76] bu süreç için,

1) Bir boyutlu dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümünü belirlemiş,
2) Bazı sınır fonksiyonallerinin esas olasılık karakteristiklerini hesaplamış,
3) Ergodik teoremi ispat etmiş ve sürecin ergodik dağılımını elde etmiştir.

Maden [77] "yansıtan ve tutan bariyerlere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süre-ci"ni aşağıdaki şekilde kurmuştur:

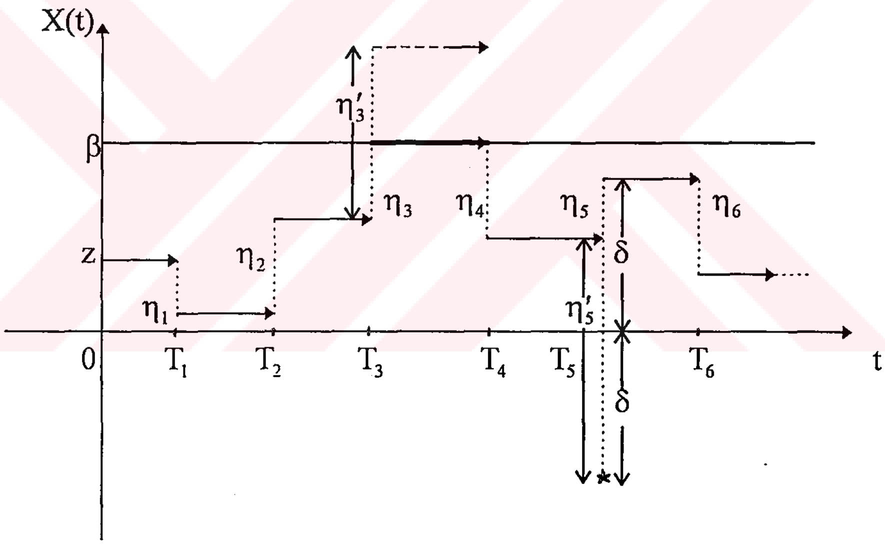
$\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,...\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X_n = \min\{\beta,\ |X_{n-1} + \eta_n|\}\ ,\ n \ge 1\ ;\ X_0 = z \in [0, \beta]$$

olmak üzere

$$X(t) = X_n\ ,\ \text{eğer } T_n \le t < T_{n+1} \text{ ise}\ ;\ T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ n \ge 1\ ;\ T_0 := 0$$

ile tanımlanan X(t) sürecine ***"0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan ve*** β $(\beta > 0)$ ***-seviyesinde tutan bariyerlere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir. Burada $z \in [0, \beta]$, sürecin başlangıçtaki durumudur. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 19 da görülmektedir.



Şekil 19. 0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan ve β $(\beta > 0)$ -seviyesinde tutan bariyerlere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Maden [77] bu süreç için,

1) İlk kez yansıma ve ilk kez tutulma anlarının dağılımlarını, moment çıkaran fonksiyonlarını ve bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamış,

2) Sonlu boyutlu dağılım fonksiyonunu belirlemiş,

3) Ergodik teoremi ispat etmiş ve sürecin ergodik dağılımını elde etmiştir.

Görüldüğü gibi, iki bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri ile ilgili bazı çalışmalar mevcuttur. Ancak bu çalışmaları daha da ilerletmek gereği vardır. Özellikle bariyerlerden her ikisinin de yansıtan olması durumunda, rastgele yürüyüş süreçleri daha az incelenmiş olup literatürdeki çalışma sayısı çok azdır. Bunların önemli olanlarından biri de W. Feller'e aittir ve bu da çok özel bir hale kısıtlanmış olup, sürecin yanlız dağılım fonksiyonunun bulunması ile ilgilidir. Bu nedenle, iki yansıtan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin kurulması ve incelenmesi, hem teorik hem de pratik yönden gereklidir.

Yapılan bu çalışmada, sayılamaz durum uzayına sahip "iki yansıtan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" adını verdiğimiz X(t) süreci kurulmuş ve bu süreç detaylı bir şekilde incelenmiştir.

2. *YAPILAN ÇALIŞMALAR*

2.1. Fiziksel Model

Çalışmada ele alınacak olan "0 (sıfır) ve β $(\beta > 0)$-seviyelerinde iki yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" aşağıdaki fiziksel modeli ifade etmektedir:

$\beta > 0$ olmak üzere, başlangıç anında $X_0 \in [0,\beta]$ durumunda olan bir parçacığın, iki yansıtan bariyerle sınırlanan bir şeritteki rastgele hareketini izlediğimizi varsayalım. Bu bariyerlerden birinin 0 (sıfır)-seviyesinde, diğerinin ise β $(\beta > 0)$-seviyesinde olduğunu kabul edelim. Bu hareket aşağıdaki kurallara uygun olarak gerçekleşsin:

Parçacık X_0 başlangıç durumunda rastgele bir ξ_1 süresi kaldıktan sonra, bir sıçrayışla $X_0 + \eta_1$ durumuna ulaşmaya çalışıyor. Eğer,

1) $X_0 + \eta_1 \in [0,\beta]$ ise, parçacığın pozisyonu $X_1 = X_0 + \eta_1$ ile belirlenecektir.

2) $X_0 + \eta_1 < 0$ ise, 0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyer olduğundan, parçacık bu bariyerden $\delta_1^- = |X_0 + \eta_1|$ kadar yukarıya doğru yansıyacaktır. Bu durumda eğer,

a) $\delta_1 \leq \beta$ ise, parçacık $X_1 = \delta_1$ pozisyonunda bulunacaktır.

b) $\delta_1 > \beta$ ise, β-seviyesinde yansıtan bariyer olduğundan, parçacık şimdi bu bariyerden $\delta_1' = \delta_1 - \beta$ kadar aşağıya doğru yansıyacaktır. $\delta_1' \leq \beta$ ise, parçacık $X_1 = \beta - \delta_1'$ pozisyonunda kalacak, $\delta_1' > \beta$ ise, parçacık yeniden aşağıdaki yansıtan bariyere ulaştığından, $\delta_1'' = |\beta - \delta_1'|$ kadar yukarıya doğru yansıyacaktır.

Parçacık bu şekilde o kadar yansıyacakki, nihayette sonuncu bariyerden yansıma uzunluğu β yı geçmeyecektir. Bu takdirde parçacık belirli bir $X_1 \in [0,\beta]$ pozisyonuna ulaşmış olacaktır.

3) $X_0 + \eta_1 > \beta$ ise, parçacık β-yansıtan bariyerinden $\delta_1 = X_0 + \eta_1 - \beta$ kadar aşağıya doğru yansıyacaktır ve yukarıda belirtilen kurallara uygun olarak, bu iki bariyer arasında hareketine devam edecek, nihayette sonuncu bariyerden yansıma uzunluğu β yı geçmeyecektir. Bu takdirde parçacık belirli bir $X_1 \in [0,\beta]$ pozisyonunda kalacaktır.

Parçacık X_1 pozisyonunda rastgele bir ξ_2 süresi kadar bekledikten sonra yeniden yukarıdaki kurallarla X_2 pozisyonuna geçecektir ve hareketini bu kurallara uygun olarak sürdürecektir.

Bu türlü bir fiziksel modeli, "İki Yansıtan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci" olarak adlandırılan bir stokastik süreç yardımıyla ifade etmek mümkündür. Şimdiki amacımız bu stokastik süreci matematiksel olarak kurmaktır.

2.2. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

$\{(\xi_i, \eta_i)\ ; i = 1,2,...\}$ herhangi bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çifti dizisi olmak üzere, ξ_i ler yanlız pozitif değerler ve η_i ler ise hem pozitif hem de negatif değerler alsın. Yani,

$$P\{\xi_i > 0\} = 1,\ P\{\eta_i > 0\} > 0,\ P\{\eta_i < 0\} > 0\ ;\ i = 1,2,...$$

olsun. ξ_1 ve η_1 in dağılım fonksiyonlarını sırasıyla $\Phi(t)$ ve $F(x)$ ile gösterelim;

$$\Phi(t) := P\{\xi_1 \leq t\}\ ,\ F(x) := P\{\eta_1 \leq x\}\ ;\ t \in IR^+\ ,\ x \in IR,$$

ve bu dağılım fonksiyonları biliniyor olsun. Önce, bu rastgele değişkenler yardımıyla $\{T_n\}_{n\geq 0}$ yenileme sürecini ve $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecini aşağıdaki şekilde kuralım:

$$T_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i\ ,\ Y_n := \sum_{i=1}^{n} \eta_i\ ,\ n = 1,2,...;\ T_0 := Y_0 := 0.$$

Bu $\{T_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ süreçlerinin esas olasılık karakteristikleri iyi bilinmektedir [23,24].

Şimdi amacımız, başlangıçta verilen rastgele değişken çiftlerinin yardımıyla, ele alacağımız X(t) sürecini matematiksel olarak kurmaktır. Bunun için önce $\{X_n\}_{n\geq 0}$ iki yansıtan bariyerli rastgele yürüyüş sürecini, tanımlayacağımız $\psi(v)$ özel fonksiyonunu kullanarak kuralım.

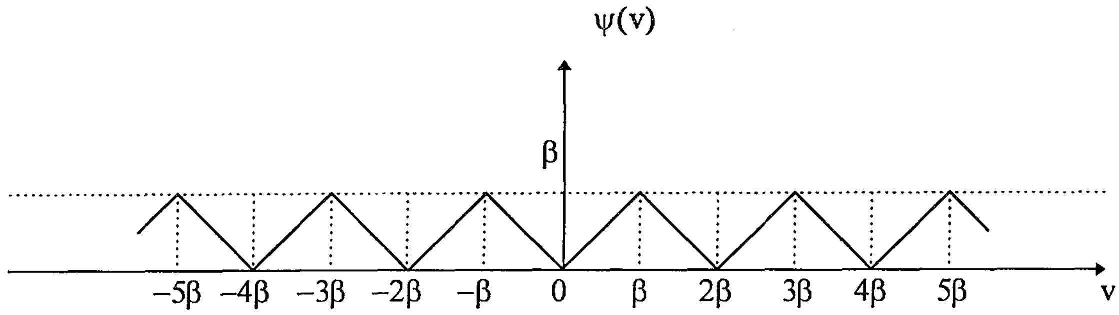
$v \in IR^+$ keyfi sayısı için $[|v|]$, v sayısının tam kısmını göstermek üzere,

$v(\mathrm{mod}\, 2\beta) := v - 2\beta.[|v/2\beta|]$

idi. Bu notasyonlar altında $\psi(v)$ fonksiyonunu

$$\psi(v) := \beta - \left|\beta - |v|(\mathrm{mod}\, 2\beta)\right|,\ v \in IR$$

şeklinde tanımlayalım. Bu fonksiyon sınırlı, sürekli ve 2β periyotlu periyodik bir fonksiyon olup, IR den $[0,\beta]$ aralığına tanımlanmıştır. Bu fonksiyonun grafiği Şekil 20 de görülmektedir.



Şekil 20. $\psi(v)$ fonksiyonunun grafiği

Kısalık amacıyla, $\psi(v)$ fonksiyonunu bazen $\bar{v}$ sembolü ile göstereceğiz. Yani herhangi bir $v \in IR$ sayısı için

$$\bar{v} := \psi(v) = \beta - \left|\beta - |v|(\mathrm{mod}\, 2\beta)\right|$$

yazacağız.

Şimdi bu $\psi(v)$ fonsiyonu yardımıyla aşağıdaki Markov zincirini kuralım:

$$X_n := \psi(X_{n-1} + \eta_n) \equiv \beta - \left|\beta - |X_{n-1} + \eta_n|(\mathrm{mod}\, 2\beta)\right|, \; n \geq 1 \; ,$$

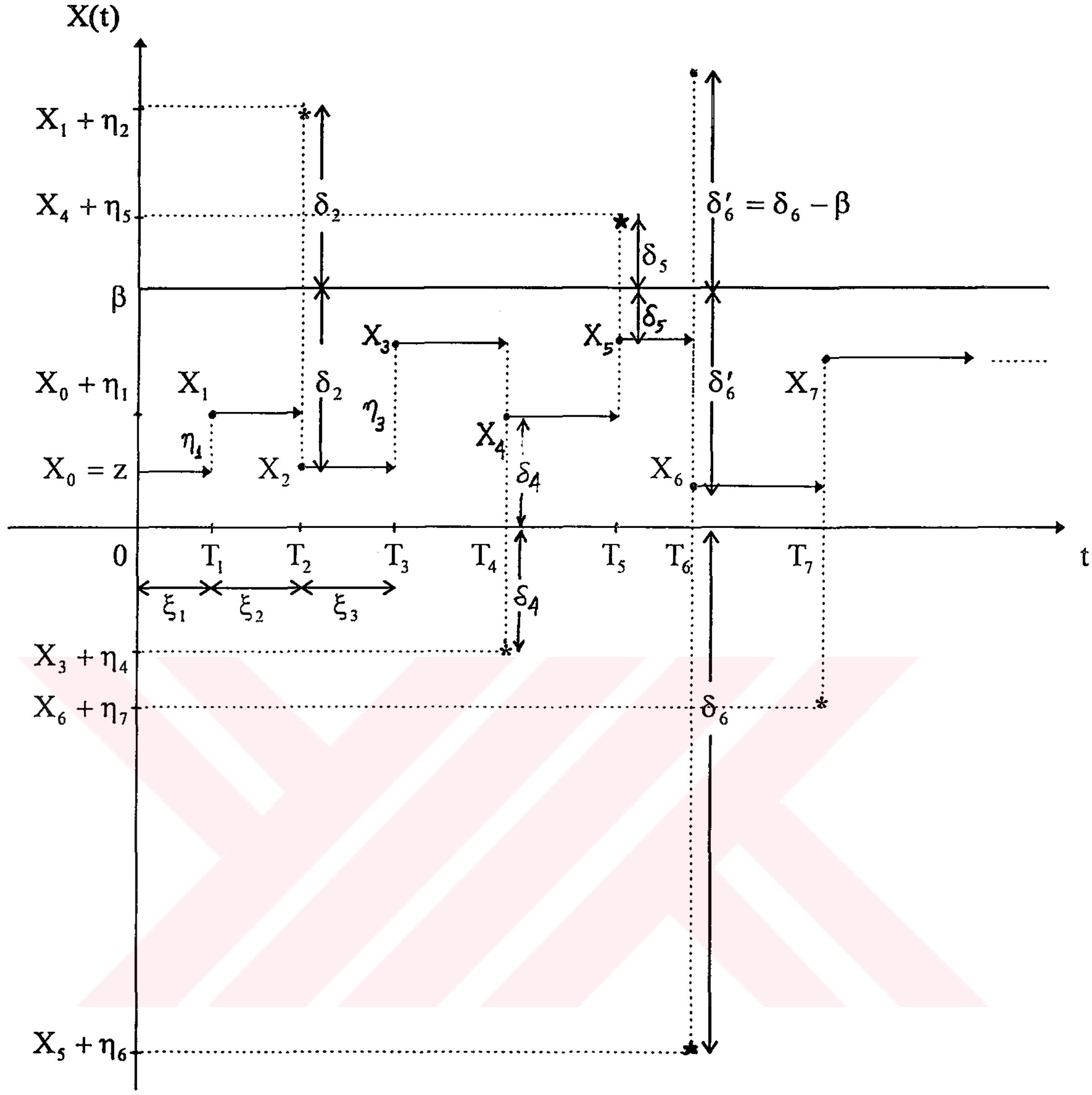
$$X_0 := z \in [0,\beta]$$

burada z, sürecin başlangıçtaki durumunu göstermektedir. Bu şekilde kurulan $\{X_n\}_{n\geq 0}$ Markov zinciri, "0 (sıfır)- ve β $(\beta > 0)$-seviyelerinde iki yansıtan bariyere sahip bir rastgele yürüyüş süreci" oluşturur. Bu rastgele yürüyüş sürecini kullanarak da ele alacağımız X(t) sürecini şu şekilde tanımlayabiliriz:

$$X(t) := X_n \;, \text{ eğer } \; T_n \leq t < T_{n+1} \text{ ise } ; \; n = 0,1,2,\ldots \; .$$

Bu şekilde tanımlanan X(t) rastgele yürüyüş sürecine ***"0 (sıfır)- ve*** β $(\beta > 0)$ ***-seviyelerinde iki yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci"*** denir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe kastedilen süreç, bu süreç olacaktır. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 21 de görülmektedir.



Şekil 21. İki yansıtan bariyerli yarı-Markov rastgele

yürüyüş sürecinin bir görünüşü

(bariyerler 0- ve β - seviyesindedir)

2.3. Sürecin Aşağı Yansıtan Bariyerden Ardışık Yansıma Anlarının Kurulması ve İncelenmesi

$X(t)$ sürecinin esas olasılık karakteristikleri olan sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarını incelemek için, bu sürecin önemli bir sınır fonksiyonali sayılan ve "aşağı yansıtan bariyerden ardışık yansıma anları" olarak adlandırılan $\{\tau_k\}_{k\geq 0}$ özel rastgele değişkenler dizisinden yararlanacağız. Bu nedenle, önce bu $\{\tau_k\}_{k\geq 0}$ dizisini matematiksel olarak kuralım. Bu amaçla, $k \geq 0$ için ν_k doğalsayı değerli rastgele değişkenlerini aşağıdaki tekrarlı ilişkiler yardımı ile tanımlayalım:

$$\nu_k := \inf\left\{n > \nu_{k-1} : X_{n-1} + \eta_n < 0\right\},\ k \geq 1 \,;\ \nu_0 := 0 \ .$$

Şimdi ν_k rastgele değişkenlerini kullanarak τ_k rastgele değişkenlerini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\tau_k := \sum_{i=1}^{\nu_k} \xi_i \equiv T_{\nu_k},\ k \geq 1 \,;\ \tau_0 := 0 \ .$$

Böylece $X(t)$ sürecinin aşağı yansıtan bariyerden ardışık yansıma anları olan $\{\tau_k\}_{k\geq 0}$ dizisini matematiksel olarak kurmuş olduk. Bu sınır fonksiyonallerinden özellikle, sürecin aşağı yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anı olan τ_1, sürecin hem sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarının hesaplanmasında, hem de ergodik dağılım fonksiyonunun elde edilmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu nedenle, bu kısımda τ_1 in bazı olasılık karakteristiklerini inceleyeceğiz ve bunları $\left\{T_n\right\}_{n\geq 0}$ yenileme süreci ve $\left\{Y_n\right\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edeceğiz. Bununla ilgili olarak önce aşağıdaki notasyonları verelim:

$\left\{T_n\right\}_{n\geq o}$ yenileme sürecinin dağılım fonksiyonunu $\Phi_n(t)$ ile gösterelim:

$$\Phi_n(t) := P\{T_n \leq t\},\ n \geq 1 \,;\ \Phi_0(t) := \varepsilon(t)\ \text{, burada } \varepsilon(u) := \begin{cases} 1, & u \geq 0 \\ 0, & u < 0 \end{cases} .$$

$\left\{Y_n\right\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin bazı olasılık karakteristikleri: $n \geq 1$ için

$$a_n(z;x) := P\left\{z + Y_i \in [0,\beta] \,;\ 1 \leq i \leq n \,;\ z + Y_n \in [0,x]\right\},\ x \in [0,\beta]$$

$$b_n(z;dv) := P\left\{z + Y_i \in [0,\beta] \,;\ 1 \leq i \leq n-1 \,;\ z + Y_n \in dv\right\},\ v > \beta$$

$$c_n(z;dv) := P\left\{z + Y_i \in [0,\beta] \,;\ 1 \leq i \leq n-1 \,;\ z + Y_n \in dv\right\},\ v < 0$$

n=0 için

$$a_0(z;x) := \varepsilon(x-z)\ ,\ b_0(z;dv) := c_0(z;dv) := 0\ .$$

Burada

$$b_n(z;dv) = d_v b_n(z;v)\quad ,\quad c_n(z;dv) = d_v c_n(z;v)$$

olduğunu belirtelim.

Ayrıca $\alpha_n(.)*\beta_n(.)$ ile, $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin aşağıdaki şekilde tanımlanan konvolüsyon çarpımını gösterelim:

$$\alpha_n(.)*\beta_n(.) := \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(.)*\beta_{n-k}(.)\ ,\ n\geq 0.$$

Benzer şekilde, $\left\{\alpha_n^{(k)}\right\}$, $k=1,2,\dots,m,\ m\geq 2$, dizilerinin m-katlı konvolüsyon çarpımı aşağıdaki formül ile verilir:

$$\prod_{k=1}^{m}{}_{*}\left(\alpha_n^{(k)}\right) := \left[\prod_{k=1}^{m-1}{}_{*}\left(\alpha_n^{(k)}\right)\right]*\alpha_n^{(m)} \equiv \sum_{i_1+i_2+\dots+i_m=n}\alpha_{i_1}^{(1)}.\alpha_{i_2}^{(2)}.\ \dots\ .\alpha_{i_m}^{(m)}\quad ,\quad m\geq 2$$

$P_z(A)$ ile de, A olayının aşağıdaki koşullu olasılığını gösterelim:

$$P_z(A) := P\left\{A\,|\,X(0)=z\right\}\ ,\ z\in[0,\beta]\ ,\ A\in F.$$

Şimdi X(t) sürecinin aşağı yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anındaki adım (sıçrama) sayısı olan ν_1 ile, süreci oluşturan $\left\{X_n^{*}\right\}_{n\geq 0}$ Markov zinciri arasındaki birleşik dağılım fonksiyonunu g(n,z,x) ile gösterelim. Yani, her $z,x\in[0,\beta]$ için

$$g(n;z;x) := P_z\left\{\nu_1 > n\ ;\ X_n \leq x\right\}\ ,\ n\geq 0 \tag{1}$$

olsun. Bu g(n,z,x) fonksiyonu için aşağıdaki yardımcı teoremi verebiliriz:

Yardımcı Teorem 1. Her $n\geq 0$ için $g(n;z;x)$ birleşik dağılım fonksiyonunu $\left\{Y_n\right\}_{n\geq 0}$ başlangıç rastgele yürüyüş sürecinin yukarıda verilen olasılık karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$g(n;z;x) = a_n(z;x) + \sum_{m=1}^{n}\int_{\beta}^{\infty}\dots(m)\dots\int_{\beta}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}{}_{*}\left(b_n(\overline{v}_{i-1};dv_i)\right)*a_n(\overline{v}_m;x)\ ,\ n\geq 1\ , \tag{2}$$

$$g(0;z;x) = a_0(z;x) = \varepsilon(x-z),$$

burada $\overline{v}_0 = z$ ve $k\geq 1$ için $\overline{v}_k = \psi(v_k)$ dır.

İspat. Önce $\nu_\beta(n)$ ile, $\{X_n\}_{n\geq 0}$ Markov zincirinin ilk n adım süresinde (n. adım dahil) ilk kez yukarı yansıtan bariyerden yansımalarının sayısını gösterelim. $\nu_\beta(n)$ nin tanımını ve toplam olasılık formülünü kullanarak, $n \geq 1$ olduğunda $g(n;z;x)$ i

$$g(n;z;x) := P_z\{\nu_1 > n\,;\; X_n \leq x\}$$

$$= \sum_{m=0}^{n} P_z\{\nu_\beta(n) = m\,;\; \nu_1 > n\,;\; X_n \leq x\} \tag{3}$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi (3) formülündeki terimleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$m = 0$ özel durumunda,

$$P_z\{\nu_\beta(n) = 0\,;\; \nu_1 > n\,;\; X_n \leq x\}$$

$$= P\{z + Y_1 \in [0,\beta]\,,\; z + Y_2 \in [0,\beta]\,, \ldots,\; z + Y_n \in [0,\beta]\,,\; z + Y_n \in [0,x]\}$$

$$= P\{z + Y_i \in [0,\beta]\,;\; 1 \leq i \leq n\,;\; z + Y_n \in [0,x]\}$$

$$= a_n(z;x) \tag{4}$$

elde edilir. Böylece (3) formülündeki birinci terimi hesaplamış olduk. Şimdi ikinci terimi hesaplayalım. Bunun için, $m = 1$ durumunu göz önüne alalım.

$$P_z\{\nu_\beta(n) = 1\,;\; \nu_1 > n\,;\; X_n \leq x\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_\beta^\infty P\{z + Y_i \in [0,\beta]\,;\; 1 \leq i \leq k-1\,;\; z + Y_k \in dv\}$$

$$.P\{\overline{v} + Y_i \in [0,\beta]\,;\; 1 \leq i \leq n-k\,;\; \overline{v} + Y_{n-k} \in [0,x]\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_\beta^\infty b_k(z;dv).a_{n-k}(\overline{v};x)$$

$$= \int_\beta^\infty \sum_{k=0}^{n} b_k(z;dv).a_{n-k}(\overline{v};x)$$

$$= \int_\beta^\infty b_n(z;dv) * a_n(\overline{v};x)$$

elde edilir (burada $b_0(z;dv) \equiv 0$ eşitliği kullanılmıştır).

Şimdi de (3) formülündeki üçüncü terimi hesaplamak için $m = 2$ durumunu düşünelim.

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=2\,;\ \nu_1>n\,;\ X_n\le x\right\}$$

$$=\sum_{2\le k_1+k_2\le n}\int_\beta^\infty\int_\beta^\infty P\left\{z+Y_i\in[0,\beta]\,;\ 1\le i\le k_1-1\,;\ z+Y_{k_1}\in dv_1\right\}$$

$$.P\left\{\overline{v}_1+Y_i\in[0,\beta]\,;\ 1\le i\le k_2-1\,;\ \overline{v}_1+Y_{k_2}\in dv_2\right\}$$

$$.P\left\{\overline{v}_2+Y_i\in[0,\beta]\,;\ 1\le i\le n-k_1-k_2\,;\ \overline{v}_2+Y_{n-k_1-k_2}\in[0,x]\right\}$$

$$=\sum_{2\le k_1+k_2\le n}\int_\beta^\infty\int_\beta^\infty b_{k_1}(z;dv_1).\,b_{k_2}(\overline{v}_1;dv_2).\,a_{n-k_1-k_2}(\overline{v}_2;x)$$

$$=\int_\beta^\infty\int_\beta^\infty\sum_{0\le k_1+k_2\le n} b_{k_1}(z;dv_1).\,b_{k_2}(\overline{v}_1;dv_2).\,a_{n-k_1-k_2}(\overline{v}_2;x)$$

$$=\int_\beta^\infty\int_\beta^\infty b_n(z;dv_1)*b_n(\overline{v}_1;dv_2)*a_n(\overline{v}_2;x)$$

(burada $b_0(z;dv_1)=b_0(z;dv_2)=0$ olduğu kullanılmıştır) ve sonuç olarak, matematiksel indüksiyon metodunu kullanarak, $m\ge 2$ için

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=m\,;\ \nu_1>n\,;\ X_n\le x\right\}$$

$$=\int_\beta^\infty\ldots(m)\ldots\int_\beta^\infty b_n(z;dv_1)*b_n(\overline{v}_1;dv_2)*\ldots*b_n(\overline{v}_{m-1};dv_m)*a_n(\overline{v}_m;x)$$

$$=\int_\beta^\infty\ldots(m)\ldots\int_\beta^\infty\prod_{k=1}^{m}{}_{*}\left(b_n(\overline{v}_{k-1};dv_k)\right)*a_n(\overline{v}_m;x)\tag{5}$$

elde edilir. Burada $\overline{v}_0=z$ ve $k\ge 1$ için $\overline{v}_k=\psi(v_k)$ dır.

(3) formülündeki terimler için elde edilen (4) ve (5) ifadeleri, (3) de yerine yazılırsa, her $z,x\in[0,\beta]$ için

$$g(n;z;x)=a_n(z;x)+\sum_{m=1}^{n}\int_\beta^\infty\ldots(m)\ldots\int_\beta^\infty\prod_{i=1}^{m}{}_{*}\left(b_n(\overline{v}_{i-1};dv_i)\right)*a_n(\overline{v}_m;x)\ ,\ n\ge 1$$

elde edilir. $n=0$ iken

$$g(0;z;x)=P_z\left\{\nu_1>0\,;X_0\le x\right\}=P\{z\le x\}=a_0(z;x)=\varepsilon(x-z)$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece Yardımcı Teorem 1 ispatlanmış olur.//

Sonuç 1. ν_1 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu aşağıdaki şekilde vermek mümkündür:

$$P\left\{\nu_1 \le n\right\} = 1 - g(n;z;\beta)$$

$$= 1 - a_n(z;\beta) - \sum_{m=1}^{n} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m}{}_{*}\left(b_n(\bar{v}_{i-1};dv_i)\right) * a_n(\bar{v}_m;\beta)\ ,\ n \ge 0$$

İspat: $g(n;z;x)$ için verilen (2) formülünde $x = \beta$ koyulursa

$$g(n;z;\beta) = P_z\left\{\nu_1 > n\ ;\ X_n \le \beta\right\} = P_z\{\nu_1 > n\}$$

elde edilir. Böylece

$$P\left\{\nu_1 \le n\right\} = 1 - g(n;z;\beta)$$

dir. //

Şimdi ν_1 rastgele değişkeninin olasılık karakteristiklerini hesaplamak için aşağıdaki dönüşümü tanımlayalım:

$$\tilde{g}(s;z;x) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n.g(n;z;x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n.P_z\left\{\nu_1 > n\ ;\ X_n \le x\right\}\ ,\ |s| \le 1. \tag{6}$$

Yakın amacımız $\tilde{g}(s;z;x)$ fonksiyonunu, $\left\{Y_n\right\}_{n\ge 0}$ başlangıç rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki notasyonları ilave edelim: $z, x \in [0,\beta]$, $v > \beta$ ve $s \in IR$, $|s| < 1$ olmak üzere

$$\tilde{a}(s;z;x) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n.a_n(z;x) \tag{7}$$

$$\tilde{b}(s;z;dv) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n.b_n(z;dv) = \sum_{n=1}^{\infty} s^n.b_n(z;dv) \tag{8}$$

($b_0(z;dv) = 0$ olduğundan)

$$\tilde{a}(1;z;x) := \lim_{s\to 1} \tilde{a}(s;z;x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z;x) \tag{9}$$

$$\tilde{b}(1;z;dv) := \lim_{s\to 1} \tilde{b}(s;z;dv) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z;dv) \tag{10}$$

ve aşağıdaki yardımcı teoremi verelim:

Yardımcı Teorem 2. $|s| \leq 1$ olan her $s \in IR$ için $\tilde{g}(s;z;x)$ fonksiyonunu, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$\tilde{g}(s;z;x) = \tilde{a}(s;z;x) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots (m) \ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \tilde{b}(s;\bar{v}_{i-1};dv_i).\tilde{a}(s;\bar{v}_m;x), \qquad (11)$$

burada $\bar{v}_0 = z$ ve $k \geq 1$ için $\bar{v}_k = \psi(v_k)$ dır.

İspat. Önce ispatta kullanacağımız bir eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n [b_n(z;dv) * a_n(\bar{v};x)] = \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left(\sum_{k=0}^{n} b_k(z;dv).a_{n-k}(\bar{v};x) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} s^n.b_k(z;dv).a_{n-k}(\bar{v};x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} s^k.b_k(z;dv).s^{n-k}.a_{n-k}(\bar{v};x)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} s^k.b_k(z;dv) \right).\left(\sum_{m=0}^{\infty} s^m.a_m(\bar{v};x) \right) \qquad (m=n-k)$$

$$= \tilde{b}(s;z;dv).\tilde{a}(s;\bar{v};x)$$

yani

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n [b_n(z;dv) * a_n(\bar{v};x)] = \tilde{b}(s;z;dv).\tilde{a}(s;\bar{v};x)$$

ve benzer şekilde

$$\sum_{n=0}^{\infty} s^n [b_n(z;dv_1) * b_n(\bar{v}_1;dv_2) * \ldots * b_n(\bar{v}_{m-1};dv_m) * a_n(\bar{v}_m;x)]$$

$$= \tilde{b}(s;z;dv_1).\tilde{b}(s;\bar{v}_1;dv_2).\ \ldots\ .\tilde{b}(s;\bar{v}_{m-1};dv_m).\tilde{a}(s;\bar{v}_m;x)] \qquad (12)$$

ifadesinin de doğru olduğu görülür. Şimdi,

$$\tilde{g}(s;z;x) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n.g(n;z;x), \ |s| \leq 1$$

olduğundan, g(n;z;x) için Yardımcı Teorem 1 de verilen (2) formülünün her iki tarafını s^n ile çarpıp, n üzerinden toplam alarak ve (12) ifadesini kullanarak istenen sonuç aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\tilde{g}(s;z;x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n.a_n(z;x) + \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left[\sum_{m=1}^{n} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} * \left(b_n(\bar{v}_{i-1};dv_i) \right) * a_n(\bar{v}_m;x) \right]$$

$$= \tilde{a}(s;z;x) + \sum_{m=1}^{n} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left[\prod_{i=1}^{m} * \left(b_n(\bar{v}_{i-1};dv_i) \right) * a_n(\bar{v}_m;x) \right]$$

$$= \tilde{a}(s;z;x) + \sum_{m=1}^{n} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \tilde{b}(s;\bar{v}_{i-1};dv_i).\tilde{a}(s;\bar{v}_m;x).$$

Böylece Yardımcı Teorem 2 ispatlanmış olur. //

Yardımcı Teorem 2 de $\tilde{g}(s;z;x)$ için verilen (11) formülü özel bir önem taşır. Çünkü ν_1 rastgele değişkeninin mevcut olan tüm momentleri için uygun formüller, bu formülden verilebilir. ν_1 in özellikle beklenen değeri ve varyansı için bir ifade elde etmek mümkündür. Bu sonucu kapalı formda ifade etmeden önce aşağıdaki notasyonları verelim: $z \in [0,\beta]$ ve $v > \beta$ olmak üzere

$$A(z;\beta) := \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ z + Y_i \in z \in [0,\beta] \,;\, 0 \le i \le n \right\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z;\beta) \tag{13}$$

$$B(z;dv) := \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ z + Y_i \in [0,\beta] \,;\, 1 \le i \le n-1 \,;\, z + Y_n \in dv \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z;dv) \tag{14}$$

$$A_1(z;\beta) := \sum_{n=1}^{\infty} n.P\left\{ z + Y_i \in [0,\beta] \,;\, 0 \le i \le n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z;\beta) \tag{15}$$

$$B_1(z;dv) := \sum_{n=1}^{\infty} n.P\left\{ z + Y_i \in [0,\beta] \,;\, 1 \le i \le n-1 \,;\, z + Y_n \in dv \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} nb_n(z;dv). \tag{16}$$

Buradaki $A(z;\beta)$, sürecin $[0,\beta]$ aralığından hiç çıkmama olasılıkları toplamı, $B(z;dv)$ de sürecin $[0,\beta]$ aralığından ilk kez çıkma olasılıkları toplamı olarak yorumlanabilir. Şimdi aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 2. ν_1 in beklenen değeri ve varyansını (mevcut ise) aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$E_z[\nu_1] = \tilde{g}(1;z;\beta) \tag{17}$$

$$V_z[\nu_1] = 2\tilde{g}_s'(1;z;\beta) - \tilde{g}(1;z;\beta)\left[\tilde{g}(1;z;\beta) - 1 \right], \tag{18}$$

burada

$$\tilde{g}(1;z;\beta) := \lim_{s\to 1} \tilde{g}(s;z;\beta)\ ,\ \tilde{g}_s'(1;z;\beta) := \lim_{s\to 1} \frac{\partial}{\partial s}\tilde{g}(s;z;\beta)$$

olup $\tilde{g}(1;z;\beta)$ ve $\tilde{g}_s'(1;z;\beta)$ aşağıdaki şekildedir:

$$\tilde{g}(1;z;\beta) = A(z;\beta) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A(\overline{v}_m;\beta) \tag{19}$$

$$\tilde{g}_s'(1;z;\beta) = A_1(z;\beta) + \sum_{m=1}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty}\ldots(m)\ldots\int_{\beta}^{\infty}\left\{\prod_{i=1}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A_1(\overline{v}_m;\beta)\right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m}\left(B_1(\overline{v}_{j-1};dv_j).\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A(\overline{v}_m;\beta)\right)\right\}. \tag{20}$$

İspat. $\tilde{g}(s;z;x)$ in (6) ile verilen tanımında, yani

$$\tilde{g}(s;z;x) := \sum_{n=0}^{\infty} s^n.g(n;z;x) = \sum_{n=0}^{\infty} s^n.P_z\left\{\nu_1 > n\ ;\ X_n \le x\right\}\ ,\ |s| \le 1$$

ifadesinde $x = \beta$ koyup $s \to 1$ için limit alarak

$$\begin{aligned}\tilde{g}(1;z;\beta) := \lim_{s\to 1} \tilde{g}(s;z;\beta) &= \lim_{s\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} s^n.P_z\left\{\nu_1 > n\ ;\ X_n \le \beta\right\} \\ &= \lim_{s\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} s^n.P_z\{\nu_1 > n\} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{\nu_1 > n\} \\ &= E_z[\nu_1]\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer yandan $\tilde{g}(1;z;\beta)$ in değeri $\tilde{g}(s;z;x)$ için Yardımcı Teorem 2 de verilen (11) formülünde $x = \beta$ koyup $s \to 1$ için limit alarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(1;z;\beta) &:= \lim_{s\to 1} \tilde{g}(s;z;\beta) \\ &= \lim_{s\to 1} \tilde{a}(s;z;\beta) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} \lim_{s\to 1} \tilde{b}(s;\overline{v}_{i-1};dv_i).\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)\end{aligned}$$

(9),(10),(13) ve (14) ile elde edilen

$$\left.\begin{aligned}
&\lim_{s\to 1}\tilde{a}(s;z;\beta)=\tilde{a}(1;z;\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z;\beta)=A(z;\beta)\\
&\lim_{s\to 1}\tilde{b}(s;\overline{v}_{i-1};dv_i)=\tilde{b}(1;\overline{v}_{i-1};dv_i)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n(\overline{v}_{i-1};dv_i)=B(\overline{v}_{i-1};dv_i)\\
&\lim_{s\to 1}\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)=\tilde{a}(1;\overline{v}_m;\beta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\overline{v}_m;\beta)=A(\overline{v}_m;\beta)
\end{aligned}\right] \quad (21)$$

ifadeleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\tilde{g}(1;z;\beta)=A(z;\beta)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty}\ldots(m)\ldots\int_{\beta}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A(\overline{v}_m;\beta)$$

elde edilir. Böylece (17) ve (19) un ispatı yapılmış olur.

$\tilde{g}_s'(1;z;\beta)$ in değeri ise, aynı $\tilde{g}(s;z;x)$ formülünde $x=\beta$ koyup, s ye göre kısmi türev alıp $s\to 1$ için limite geçerek aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\tilde{g}(s;z;\beta)=\tilde{a}(s;z;\beta)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty}\ldots(m)\ldots\int_{\beta}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}\tilde{b}(s;\overline{v}_{i-1};dv_i).\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)$$

ifadesinden

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{g}(s;z;\beta)=\frac{\partial}{\partial s}\tilde{a}(s;z;\beta)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty}\ldots(m)\ldots\int_{\beta}^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left(\prod_{i=1}^{m}\tilde{b}(s;\overline{v}_{i-1};dv_i).\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)\right)$$

dir. $\tilde{a}(s;z;x)$ in (7) deki tanımı gereğince

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{a}(s;z;\beta)=\frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=0}^{\infty}s^n.a_n(z;\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}ns^{n-1}.a_n(z;\beta) \quad (22)$$

ve bir çarpımın kısmi türevi tanımı ile,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\left(\prod_{i=1}^{m}\tilde{b}(s;\overline{v}_{i-1};dv_i).\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)\right)\\
&\qquad=\prod_{i=1}^{m}\tilde{b}(s;\overline{v}_{i-1};dv_i).\frac{\partial}{\partial s}\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)\\
&\qquad\qquad+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial}{\partial s}\tilde{b}(s;\overline{v}_{j-1};dv_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}\tilde{b}(s;\overline{v}_{i-1};dv_i).\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)\right)
\end{aligned}$$

olup bu son eşitlikteki kısmi türevler ise (8) ve (7) gereğince

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)=\frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=0}^{\infty}s^n a_n(\overline{v}_m;\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}ns^{n-1}a_n(\overline{v}_m;\beta) \tag{23}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\tilde{b}(s;\overline{v}_{j-1};dv_j)=\frac{\partial}{\partial s}\sum_{n=1}^{\infty}s^n b_n(\overline{v}_{j-1};dv_j)=\sum_{n=1}^{\infty}ns^{n-1}b_n(\overline{v}_{j-1};dv_j) \tag{24}$$

şeklinde hesaplanabilir. (22), (23), (24) ifadelerinde $s \to 1$ için limit alarak elde edilen

$$\lim_{s\to 1}\frac{\partial}{\partial s}\tilde{a}(s;z;\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(z;\beta)=A_1(z;\beta)$$

$$\lim_{s\to 1}\frac{\partial}{\partial s}\tilde{a}(s;\overline{v}_m;\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}na_n(\overline{v}_m;\beta)=A_1(\overline{v}_m;\beta)$$

$$\lim_{s\to 1}\frac{\partial}{\partial s}\tilde{b}(s;\overline{v}_{j-1};dv_j)=\sum_{n=1}^{\infty}nb_n(\overline{v}_{j-1};dv_j)=B_1(\overline{v}_{j-1};dv_j)$$

ifadeleri ve (21) deki ifadeler ilgili yerlere yazılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{g}_s'(1;z;\beta) &:= \lim_{s\to 1}\frac{\partial}{\partial s}\tilde{g}(s;z;\beta)\\ &= A_1(z;\beta)+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty}\ldots(m)\ldots\int_{\beta}^{\infty}\Bigg\{\prod_{i=1}^{m}B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A_1(\overline{v}_m;\beta)\\ &\qquad+\sum_{j=1}^{m}\Bigg(B_1(\overline{v}_{j-1};dv_j).\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A(\overline{v}_m;\beta)\Bigg)\Bigg\}\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece (20) ispatlanmış olur. $V_z[\nu_1]$ ise, uygun hesaplamaları yaparak elde edilir.

Burada $E_z[\nu_1]$ in sonlu olması için $0 < F(0) < 1$ koşulunun yeterli olduğunu belirtelim ($F(0):= P\{\eta_1 \le 0\}$ idi) (bkz. Feller [24]). //

Şimdi de $X(t)$ sürecinin aşağı yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anı olan τ_1 ile, $X(t)$ sürecinin t anındaki değeri arasındaki birleşik dağılım fonksiyonunu hesaplayalım. Bu olasılığı $G(t;z;x)$ ile gösterelim. Yani her $z,x \in [0,\beta]$ için

$$G(t;z;x) := P_z\left\{\tau_1 > t\,;X(t) \le x\right\} \tag{25}$$

olsun.

Yardımcı Teorem 3. $G(t;z;x)$ birleşik dağılım fonksiyonunu $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş süreci ve $\{T_n\}_{n\geq 0}$ yenileme sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla, aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$G(t;z;x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n;z;x).\Delta\Phi_n(t) \tag{26}$$

burada

$$\Delta\Phi_n(t) := \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)$$

olup g(n;z;x), Yardımcı Teorem 1 de verilen (2) deki gibidir.

İspat. Önce dikkat edelimki,

$$\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t) = P\{T_n \leq t\} - P\{T_{n+1} \leq t\} = P\{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

dir. Şimdi toplam olasılık formülünü, yukarıdaki eşitliği ve g(n;z;x) in (1) ile verilen tanımını kullanarak

$$\begin{aligned}
G(t;z;x) &:= P_z\{\tau_1 > t\,;\, X(t) \leq x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\left\{T_n \leq t < T_{n+1}\,;\, \tau_1 = \sum_{i=1}^{\nu_1}\xi_i > t\,;\, X(t) \leq x\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\{T_n \leq t < T_{n+1}\,;\, \nu_1 = k\,;\, T_k > t\,;\, X_n \leq x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\{\nu_1 = k\,;\, X_n \leq x\}.P\{T_n \leq t < T_{n+1}\,;\, T_k > t\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} P_z\{\nu_1 = k\,;\, X_n \leq x\}.P\{T_n \leq t < T_{n+1}\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{\nu_1 > n\,;\, X_n \leq x\}\Delta\Phi_n(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} g(n;z;x).\Delta\Phi_n(t)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 3 ispatlanmış olur. //

Sonuç 3. τ_1 rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu aşağıdaki şekilde vermek mümkündür:

$$P_z\{\tau_1 \leq t\} = 1 - G(t;z;\beta) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} g(n;z;\beta).\Delta\Phi_n(t).$$

İspat: $G(t;z;x)$ için verilen (25) formülünde $x = \beta$ koyarak,

$$G(t;z;\beta) = P_z\left\{\tau_1 > t\ ;\ X(t) \le \beta\right\} = P_z\left\{\tau_1 > t\right\}$$

elde edilir. Böylece

$$P_z\{\tau_1 \le t\} = 1 - G(t;z;\beta)$$

dir. //

τ_1 in olasılık karakteristiklerini hesaplamak için, $G(t;z;x)$ in t ye göre Laplace dönüşümünden yararlanmak mümkündür. Bu nedenle bir $M(t;z;x)$ fonksiyonunun t ye göre Laplace dönüşümünü $\widetilde{M}(\lambda;z;x)$ ile gösterelim. Yani,

$$\widetilde{M}(\lambda;z;x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} M(t;z;x)dt$$

olsun. Ayrıca

$$\widetilde{M}(0;z;x) := \lim_{\lambda\to 0} \widetilde{M}(\lambda;z;x)$$

notasyonunu tanımlayalım. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 1. $G(t;z;x)$ fonksiyonunun t ye göre Laplace dönüşümünü $\left\{Y_n\right\}_{n\ge o}$ ve $\left\{T_n\right\}_{n\ge o}$ süreçlerinin olasılık karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$\widetilde{G}(\lambda;z;x) = \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\widetilde{g}(\varphi(\lambda);z;x) \tag{27}$$

burada

$$\varphi(\lambda) := E[e^{-\lambda\xi_1}] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d\Phi(t)\ \ ,\ \lambda > 0$$

ve $|s| \le 1$ olan herhangi bir $s \in IR$ için $\widetilde{g}(s;z;x)$, Yardımcı Teorem 2 de verilen (11) deki gibidir.

İspat. G(t;z;x) için Yardımcı Teorem 3 de verilen (26) formülünün her iki tarafına t ye göre Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$\widetilde{G}(\lambda;z;x) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} G(t;z;x)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^\infty g(n;z;x).\Delta\Phi_n(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^\infty g(n;z;x) \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Delta\Phi_n(t)\,dt \tag{28}$$

elde edilir. Diğer yandan $n \ge 0$ için

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)]\,dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_n(t)\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Phi_{n+1}(t)\,dt$$

olur. Buradaki integrallerin her birine kısmi integrasyon metodu uygulayıp

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}d\Phi_n(t) = (E[e^{-\lambda\xi_1}])^n = [\varphi(\lambda)]^n$$

eşitliği ve $\Phi_n(0) = P\{T_n \leq 0\} = 0$ olduğu kullanılırsa

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\Delta\Phi_n(t)dt = \frac{1}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^n - \frac{1}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^{n+1} = \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^n$$

elde edilir. Bu ifade (28) de yerine koyulursa

$$\tilde{G}(\lambda; z; x) = \sum_{n=0}^\infty g(n; z; x)\ \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}[\varphi(\lambda)]^n$$

$$= \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=0}^\infty g(n; z; x)\ [\varphi(\lambda)]^n$$

bulunur. Herhangi bir $\lambda > 0$ için $|\varphi(\lambda)| \leq 1$ olduğu dikkate alınırsa, (6) gereğince

$$\tilde{G}(\lambda; z; x) = \frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\tilde{g}(\varphi(\lambda); z; x)$$

yazılabilir. Böylece Teorem 1 ispatlanmış olur. //

τ_1 in momentlerini hesaplamak için bu $\tilde{G}(\lambda; z; x)$ fonksiyonundan yararlanılabilir. Çünkü (25) ile,

$$\tilde{G}(\lambda; z; \beta) := \int_0^\infty e^{-\lambda t}G(t; z; \beta)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}P_z\{\tau_1 > t\,;\ X(t) \leq \beta\}dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}P_z\{\tau_1 > t\}dt \tag{29}$$

dir. τ_1 in özellikle beklenen değer ve varyansını hesaplamak mümkündür. Bunu aşağıdaki sonuç ile verelim:

Sonuç 4. ξ_1 ve η_1 rastgele değişkenlerinin ilk iki momentleri mevcut ve sonlu ise τ_1 in beklenen değer ve varyansı aşağıdaki şekildedir:

$$E_z[\tau_1] = E_z[\nu_1].E[\xi_1] \tag{30}$$

$$V_z[\tau_1] = E_z[\nu_1].V[\xi_1] + V_z[\nu_1].\left[E[\xi_1]\right]^2, \tag{31}$$

burada $E_z[\nu_1]$ ve $V_z[\nu_1]$ Sonuç 2 de verilen (17) ve (18) deki gibidir.

İspat. (29) daki eşitliğe göre

$$\begin{aligned}\tilde{G}(0;z;\beta) = \lim_{\lambda\to 0}\tilde{G}(\lambda;z;\beta) &= \lim_{\lambda\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t}P_z\{\tau_1 > t\}dt \\ &= \int_0^\infty P_z\{\tau_1 > t\}dt \\ &= E_z[\tau_1] \end{aligned} \tag{32}$$

dir. Diğer yandan, Teorem 1 de $\tilde{G}(\lambda;z;x)$ için verilen (27) ifadesinde $x = \beta$ koyup $\lambda \to 0$ için limit alarak

$$\tilde{G}(0;z;\beta) := \lim_{\lambda\to 0}\tilde{G}(\lambda;z;\beta) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\tilde{g}(\varphi(\lambda);z;\beta)$$

olur. Şimdi

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} \quad , \quad \lim_{\lambda\to 0}\tilde{g}(\varphi(\lambda);z;\beta)$$

değerlerini hesaplayalım.

$$e^{-\lambda\xi_1} = 1-(\lambda\xi_1)+\frac{(\lambda\xi_1)^2}{2!}-\frac{(\lambda\xi_1)^3}{3!}+\ldots+(-1)^n\frac{(\lambda\xi_1)^n}{n!}+\ldots$$

olduğundan

$$\varphi(\lambda) = E[e^{-\lambda\xi_1}] = 1-\lambda E[\xi_1]+\frac{\lambda^2}{2!}E[\xi_1^{\,2}]-\frac{\lambda^3}{3!}E[\xi_1^{\,3}]+\ldots+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}E[\xi_1^{\,n}]+\ldots$$

olur ve buradan

$$\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} = E[\xi_1]-\frac{\lambda}{2!}E[\xi_1^{\,2}]+\frac{\lambda^2}{3!}E[\xi_1^{\,3}]-\ldots+(-1)^n\frac{\lambda^{n-1}}{n!}E[\xi_1^{\,n}]+\ldots$$

elde edilir. Böylece

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} = E[\xi_1]$$

olduğu görülür. Bu limit, $\varphi(0) = E[e^0] = E[1] = 1$ olduğundan, L'Hospital kuralı ile

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{-\varphi'(\lambda)}{1}=-\lim_{\lambda\to 0}E[-\xi_1 e^{-\lambda\xi_1}]=E[\xi_1]$$

şeklinde de hesaplanabilir. Ayrıca, Sonuç 2 deki (17) ifadesi ile

$$\lim_{\lambda\to 0}\tilde{g}(\varphi(\lambda);z;\beta)=\tilde{g}(\varphi(0);z;\beta)=\tilde{g}(1;z;\beta)=E_z[\nu_1]$$

dir. Bu değerler yukarıda yerine yazılırsa

$$\tilde{G}(0;z;\beta)=\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}.\lim_{\lambda\to 0}\tilde{g}(\varphi(\lambda);z;\beta)\ =E[\xi_1].E_z[\nu_1] \tag{33}$$

olur. Sonuç olarak (32) ve (33) ile

$$E_z[\tau_1]=E_z[\nu_1].E[\xi_1]$$

elde edilir.

$V_z[\tau_1]$ ise, (29) daki $\tilde{G}(\lambda;z;\beta)$ formülünde λ ya göre türev alıp $\lambda\to 0$ için limite geçerek ve uygun hesaplamaları yaparak elde edilir. //

Not 1. τ_1 in beklenen değer ve varyansını "Wald özdeşliği"ni kullanarak da hesaplamak mümkündür: $\tau_1=\sum_{i=1}^{\nu_1}\xi_i$ ve ν_1 rastgele değişkeni ξ_i lerden bağımsız olduğundan, Wald özdeşliği'ne göre

$$E_z[\tau_1]=E_z[\nu_1].E[\xi_1]$$

$$V_z[\tau_1]=E_z[\nu_1].V[\xi_1]+V_z[\nu_1].\left[E[\xi_1]\right]^2$$

elde edilir (bkz. Feller [24]). //

Sonuç 5. (29) formülünde her iki tarafın λ ya göre türevini alarak ve daha sonra da $\lambda\to 0$ için limite geçerek τ_1 in daha yüksek mertebeden momentleri için bir formül elde etmek mümkündür. Özellikle $n\geq 2$ için, τ_1 in beklenen değerinin mevcut ve sonlu olması şartıyla

$$E_z[\tau_1^n]=(-1)^{n-1}n.\lim_{\lambda\to 0}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\lambda^{n-1}}\tilde{G}(\lambda;z;\beta)$$

yazılabilir. //

2.4. Sürecin Bir Boyutlu Dağılım Fonksiyonlarının Belirlenmesi

Rastgele süreçlerin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarının, bu süreçlerle ilgili esas olasılık problemlerinin çözümlenmesinde önemli bir rol oynadıkları bilinmektedir. Bununla ilgili olarak bu paragrafta, ele alınan $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları belirlenmiştir. $X(t)$ sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarının belirlenmesindeki zorluk ve karmaşıklık, ele alınan modelde iki yansıtan bariyer bulunmasından kaynaklanmaktadır. Kaynaklanan bu zorluklara bakmayarak, burada $X(t)$ sürecinin, bir çok hallerde olduğu gibi Laplace dönüşümü değil, bir boyutlu dağılım fonksiyonunun kendisi belirlenmiştir. Elde edilen bu sonucu vermek için, $Q(t;z;x)$ ve h(n;z;dv) ile

$$Q(t;z;x) := P_z\{X(t) \le x\} = P\{X(t) \le x \mid X(0) = z\} \tag{34}$$

$$h(n;z;dv) := P_z\{\nu_1 = n\,;\ X_{n-1} + \eta_n \in dv\}\ ,\ n \ge 1\ ;\ h(0;z;dv) := 0\ ,\ v < 0$$

koşullu olasılıklarını gösterelim. Böylece aşağıdaki yardımcı teoremi ve bu paragrafın asıl amacı olan teoremi verebiliriz:

Yardımcı Teorem 4. Her $n \ge 1$ için h(n;z;dv) fonksiyonunu $\{Y_n\}_{n\ge0}$ sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$h(n;z;dv) = c_n(z;dv) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_\beta^\infty \ldots(k)\ldots \int_\beta^\infty \prod_{i=1}^{k-1}\!{}_\star\big(b_n(\bar{v}_{i-1};dv_i)\big) * c_n(\bar{v}_k;dv)\ ,\ n \ge 2$$

$$h(1;z;dv) = c_1(z;dv)$$

burada $\bar{v}_0 = z$ ve $i \ge 1$ için $\bar{v}_i = \psi(v_i)$ dir.

İspat. $\nu_\beta(n)$ nin tanımını göz önüne alarak, toplam olasılık formülü ile $h(n;z;dv)$ fonksiyonu

$$h(n;z;dv) = \sum_{k=0}^{n-1} P_z\left\{\nu_\beta(n) = k\,;\ \nu_1 = n\,;\ X_{n-1} + \eta_n \in dv\right\}\ ,\ v < 0$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi bu toplamdaki terimleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$k = 0$ olduğunda

$$P_z\left\{\nu_\beta(n) = 0\,;\ \nu_1 = n\,;\ X_{n-1} + \eta_n \in dv\right\}$$

$$= P\left\{z + Y_i \in [0,\beta]\,;\ 1 \le i \le n-1\,;\ z + Y_n \in dv\right\}$$

$$= c_n(z;dv) \tag{35}$$

elde edilir. $k=1$ olduğunda ise

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=1\ ;\ \nu_1=n\ ;\ X_{n-1}+\eta_n\ \in dv\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\int_\beta^\infty P\left\{z+Y_i\ \in[0,\beta]\ ;\ 1\le i\le k-1\ ;\ z+Y_k\ \in dv_1\right\}$$

$$.P\left\{\overline{v}_1+Y_i\ \in[0,\beta]\ ;\ 1\le i\le n-k-1\ ;\ \overline{v}_1+Y_{n-k}\ \in dv\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}\int_\beta^\infty b_k(z;dv_1).c_{n-k}(\overline{v}_1;dv)$$

$$=\int_\beta^\infty\sum_{k=1}^{n-1}b_k(z;dv_1).c_{n-k}(\overline{v}_1;dv)$$

$$=\int_\beta^\infty b_n(z;dv_1)*c_n(\overline{v}_1;dv)$$

elde edilir (burada $b_0(z;dv_1)=c_0(\overline{v}_1;dv)\equiv 0$ olduğu kullanılmıştır). $k=2$ olduğunda da benzer yöntemle

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=2\ ;\ \nu_1=n\ ;\ X_{n-1}+\eta_n\ \in dv\right\}=\int_\beta^\infty\int_\beta^\infty b_n(z;dv_1)*b_n(\overline{v}_1;dv_2)*c_n(\overline{v}_2;dv)$$

olduğu gösterilebilir, burada

$$b_n(.)*b_n(.)*c_n(.)=\sum_{\substack{0\le k_1+k_2\le n\\ k_1,k_2\ge 0}}b_{k_1}(.)\,b_{k_2}(.)\,c_{n-k_1-k_2}(.)$$

dir. Nihayet matematiksel indüksiyon metodu ile, $1\le k\le n-1$ ve $n\ge 2$ için

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=k\ ;\ \nu_1=n\ ;\ X_{n-1}+\eta_n\ \in dv\right\}$$

$$=\int_\beta^\infty\ldots(k)\ldots\int_\beta^\infty b_n(z;dv_1)*b_n(\overline{v}_1;dv_2)*\ldots*b_n(\overline{v}_{k-1};dv_k)*c_n(\overline{v}_k;dv) \qquad (36)$$

genel formülü elde edilir. (35) ve (36) formüllerini $k=1,2,\ldots,n-1$ üzerinden toplayarak $n\ge 2$ için

$$h(n;z;dv)=c_n(z;dv)+\sum_{k=1}^{n-1}\int_\beta^\infty\ldots(k)\ldots\int_\beta^\infty b_n(z;dv_1)*b_n(\overline{v}_1;dv_2)*\ldots$$

$$\ldots*b_n(\overline{v}_{k-1};dv_k)*c_n(\overline{v}_k;dv)$$

elde edilir. n=1 için

$$h(1;z;dv)=P\left\{z+\eta_1\ \in dv\right\}=c_1(z;dv)$$

olduğu kolayca görülür. Böylece Yardımcı Teorem 4 ün ispatı tamamlanmış olur. //

Teorem 2. ξ_i ve η_i rastgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsun. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonlarını $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{T_n\}_{n\geq 0}$ süreçlerinin olasılık karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade etmek mümkündür:

$$Q(t;z;x)=\sum_{n=0}^{\infty} g(n;z;x).\Delta\Phi_n(t)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k=1}^{\infty}\ \sum_{n_{k+1}=0}^{\infty}\int_{-\beta}^{0}\ldots(k)\ldots\int_{-\beta}^{0}\prod_{i=1}^{k} h(n_i;\overline{v}_{i-1};dv_i)g(n_{k+1};\overline{v}_k;x)\Delta\Phi_{N_k}(t), \qquad (37)$$

burada

$$N_k=n_1+n_2+\ldots+n_{k+1}$$

ve $h(n;z;dv)$ Yardımcı Teorem 4 de, $g(n;z;x)$ ise Yardımcı Teorem 1 de verildiği gibi olup $\overline{v}_0=z$ ve $i\geq 1$ için $\overline{v}_i=\psi(v_i)$ dir.

İspat. τ_k ile, $X(t)$ sürecinin, aşağı yansıtan bariyerden k. kez yansıma anını gösterdiğimizi hatırlayarak ve toplam olasılık formülünü kullanarak $Q(t;z;x)$ fonksiyonu

$$Q(t;z;x):=P_z\{X(t)\leq x\}=\sum_{k=0}^{\infty}P_z\{\tau_k\leq t<\tau_{k+1}\ ;\ X(t)\leq x\}$$

şeklinde yazılabilir. $q_k(t;z;x)$ ile,

$$q_k(t;z;x):=P_z\{\tau_k\leq t<\tau_{k+1}\ ;\ X(t)\leq x\}$$

olasılığını gösterelim. Böylece,

$$Q(t;z;x)=\sum_{k=0}^{\infty}q_k(t;z;x)=q_0(t;z;x)+\sum_{k=1}^{\infty}q_k(t;z;x) \qquad (38)$$

olur. Amacımız (38) serisinin terimlerini $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{T_n\}_{n\geq 0}$ süreçlerinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Bununla ilgili olarak, serinin ilk birkaç terimini hesaplayalım. $q_0(t;z;x)$ için, $\tau_0=0$ olduğu hatırlanır ve (25) ile (26) ifadeleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}q_0(t;z;x)=P_z\{\tau_0\leq t<\tau_1\ ;\ X(t)\leq x\}&=P_z\{\tau_1>t\ ;\ X(t)\leq x\}\\&=G(t;z;x)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}g(n;z;x).\Delta\Phi_n(t)\end{aligned} \qquad (39)$$

elde edilir. Şimdi de $q_1(t;z;x)$ i hesaplayalım. Toplam olasılık formülü ve $T_k=\sum_{i=1}^{k}\xi_i$ olduğu kullanılırsa

$$q_1(t;z;x) = P_z\{\tau_1 \le t < \tau_2 \ ; \ X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_z\{T_n \le t < T_{n+1} \ ; \ \tau_1 \le t < \tau_2 \ ; \ X(t) \le x\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P_z\left\{\nu_1 = k \ ; \ \tau_1 = \sum_{i=1}^{\nu_1} \xi_i \le t < \tau_2; \ T_n \le t < T_{n+1} \ ; \ X_n \le x\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P_z\left\{\nu_1 = k \ ; \ T_k \le t < \tau_2; \ T_n \le t < T_{n+1} \ ; \ X_n \le x\right\}$$

$$= \int_{v=-\infty}^{0} \int_{u=0}^{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P_z\left\{\nu_1 = k \ ; \ X_{k-1} + \eta_k \in dv \ ; \ T_k \in du\right\}$$

$$.P_{\bar{v}}\{\tau_1 > t-u \ ; \ T_{n-k} \le t-u < T_{n-k+1} \ ; \ X_{n-k} \le x\}$$

$$= \int_{v=-\infty}^{0} \int_{u=0}^{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} P_z\left\{\nu_1 = k \ ; \ X_{k-1} + \eta_k \in dv\right\}.P\{T_k \in du\}$$

$$.P_{\bar{v}}\left\{\nu_1 > n-k \ ; \ X_{n-k} \le x\right\}.P\left\{T_{n-k} \le t-u < T_{n-k+1}\right\}$$

yazılabilir. Burada h(k;z;dv), $\Phi_n(t)$, g(n;z;x) ve $\Delta\Phi_n(t)$ nin tanımları göz önüne alınırsa yukarıdaki ifade

$$q_1(t;z;x) = \int_{v=-\infty}^{0} \int_{u=0}^{t} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} h(k;z;dv)\ \Phi_k(du)\ g(n-k;\bar{v};x)\ \Delta\Phi_{n-k}(t-u)$$

$$= \int_{v=-\infty}^{0} \int_{u=0}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} h(k;z;dv)\ \Phi_k(du) \sum_{n=k}^{\infty} g(n-k;\bar{v};x)\ \Delta\Phi_{n-k}(t-u)$$

$$= \int_{v=-\infty}^{0} \int_{u=0}^{t} \sum_{k=1}^{\infty} h(k;z;dv)\ \Phi_k(du) \sum_{n=0}^{\infty} g(n;\bar{v};x)\ \Delta\Phi_n(t-u)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{0} h(k;z;dv)\ g(n;\bar{v};x) \int_{u=0}^{t} \Phi_k(du)\ \Delta\Phi_n(t-u)$$

şekline gelir. Burada, $\int_0^t \Phi_k(du)\ \Phi_n(t-u) = \Phi_{k+n}(t)$ eşitliği kullanılarak

$$\int_0^t \Phi_k(du)\ \Delta\Phi_n(t-u) = \Delta\Phi_{k+n}(t)$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece,

$$q_1(t;z;x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} h(k;z;dv)\ g(n;\bar{v};x)\ \Delta\Phi_{k+n}(t)$$

elde edilir. Benzer bir irdeleme ile

$$q_2(t;z;x) = \sum_{n_1,n_2=1}^{\infty} \sum_{n_3=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} h(n_1;z;dv_1)\, h(n_2;\overline{v}_1;dv_2)\, g(n_3;\overline{v}_2;x)\, \Delta\Phi_{n_1+n_2+n_3}(t)$$

olduğu gösterilebilir ve matematiksel indüksiyon metodu ile, her $k \geq 1$ için

$$q_k(t;z;x) = \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k=1}^{\infty} \sum_{n_{k+1}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \dots (k) \dots \int_{-\infty}^{0} h(n_1;z;dv_1)\, h(n_2;\overline{v}_1;dv_2)\dots$$

$$\dots h(n_k;\overline{v}_{k-1};dv_k)\, g(n_{k+1};\overline{v}_k;x)\, \Delta\Phi_{N_k}(t) \qquad (40)$$

genel formülü elde edilir, burada $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_{k+1}$ dir. (38) formülündeki terimler için elde edilen (39) ve (40) ifadeleri (38) da yerine yazılırsa

$$Q(t;z;x) = q_0(t;z;x) + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t;z;x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} g(n;z;x)\, \Delta\Phi_n(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k=1}^{\infty} \sum_{n_{k+1}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \dots (k) \dots \int_{-\infty}^{0} h(n_1;z;dv_1).$$

$$.h(n_2;\overline{v}_1;dv_2)\dots h(n_k;\overline{v}_{k-1};dv_k)\, g(n_{k+1};\overline{v}_k;x)\, \Delta\Phi_{N_k}(t)$$

elde edilir. Böylece Teorem 2 ispatlanmış olur. //

Pek çok pratik problemin çözümlenmesinde, özel olarak ξ_1 rastgele değişkeninin üstel dağılıma veya m-mertebeli Erlang dağılımına sahip olması halinde, $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonunun belirlenmesi istenebilir. Bu nedenle, bu iki özel durum için $Q(t;z;x)$ kapalı formda verilebilir. Bu gerçekleri aşağıdaki sonuçlarla ifade edelim:

Sonuç 6. ξ_i ve η_i rastgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve ξ_1, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t;z;x)$ aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$Q(t;z;x) = e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{\infty} g(n;z;x) \frac{(\mu t)^n}{n!}$$

$$+ e^{-\mu t} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n_1,n_2,\dots,n_k=1}^{\infty} \sum_{n_{k+1}=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \dots (k) \dots \int_{-\infty}^{0} \prod_{i=1}^{k} h(n_i;\overline{v}_{i-1};dv_i)\, g(n_{k+1};\overline{v}_k;x) \frac{(\mu t)^{N_k}}{N_k!},$$

burada $\overline{v}_0 = z$, $k \geq 1$ için $\overline{v}_k = \psi(v_k)$ ve $N_k = n_1 + n_2 + \dots + n_{k+1}$ dir.

İspat. ξ_1 rastgele değişkeni, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğundan, $T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, $\mu > 0$ parametreli, n-mertebeli Erlang dağılımına sahiptir. Dolayısıyla

$$P\{T_n \le t\} = 1 - e^{-\mu t}\left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}\right)$$

ve benzer şekilde

$$P\{T_{n+1} \le t\} = 1 - e^{-\mu t}\left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\mu t)^{n}}{n!}\right)$$

yazılabilir. Böylece

$$\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+}(t) = P\{T_n \le t\} - P\{T_{n+1} \le t\} = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \ , \ n \ge 0$$

olduğundan bunu, Teorem 1 de $Q(t;z;x)$ için verilen (37) formülünde yerine yazarak istenen sonuç elde edilir. //

Sonuç 7. ξ_i ve η_i rastgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve ξ_1, $\mu > 0$ parametreli $m\ (m \ge 1)$-mertebeli Erlang dağılımına sahip olsun. Bu takdirde $X(t)$ sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu $Q(t;z;x)$ aşağıdaki şekilde verilebilir:

$$Q(t;z;x) = e^{-\mu t}\sum_{n=0}^{\infty} g(n;z;x)\sum_{i=nm}^{nm+m-1}\frac{(\mu t)^i}{i!}$$

$$+e^{-\mu t}\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{n_1,n_2,\ldots,n_k=1}^{\infty}\ \sum_{n_{k+1}=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{0}\ldots(k)\ldots\int_{-\infty}^{0}\prod_{i=1}^{k} h(n_i;\overline{v}_{i-1};dv_i)\ g(n_{k+1};\overline{v}_k;x)\sum_{i=m.N_k}^{m.N_k+m-1}\frac{(\mu t)^i}{i!}$$

burada $\overline{v}_0 = z$, $k \ge 1$ için $\overline{v}_k = \psi(v_k)$ ve $N_k = n_1 + n_2 + \ldots + n_{k+1}$ dir.

İspat. ξ_1 rastgele değişkeni, $\mu > 0$ parametreli ve m-mertebeli Erlang dağılımına sahip olduğundan, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip m tane rastgele değişkenin toplamı olarak düşünülebilir. Dolayısıyla $T_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, $\mu > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip n.m tane rastgele değişkenin toplamı olacağından, n.m tertipli Erlang dağılımına sahiptir. O halde

$$P\{T_n \le t\} = 1 - e^{-\mu t}\left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\mu t)^{nm-1}}{(nm-1)!}\right)$$

ve benzer şekilde

$$P\{T_{n+1} \le t\} = 1 - e^{-\mu t}\left(1 + \mu t + \frac{(\mu t)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\mu t)^{(n+1)m-1}}{[(n+1)m-1]!}\right)$$

yazılabilir. Böylece

$$\Delta\Phi_n(t) = \Phi_n(t) - \Phi_{n+}(t) = P\{T_n \le t\} - P\{T_{n+1} \le t\} = \sum_{i=nm}^{nm+m-1}\frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t} \ , \ n \ge 0$$

olduğundan bunu, Teorem 1 de $Q(t;z;x)$ için verilen (37) formülünde yerine yazarak istenen sonuç elde edilir. //

2.5. Sürecin Ergodikliği

Bu kısımda amacımız X(t) süreci için en genel şartlar altında ergodik teoremini ifade edip ispatlamak ve sürecin ergodik olması durumunda en genel ergodik dağılım fonksiyonu için aşikar bir formül vermektir.

Şimdi bu kısmın esas sonuçlarından birincisini yani X(t) sürecinin ergodik olduğunu ifade eden teoremi verelim. Bu teoremin ispatını yaparken iki tane yardımcı teorem ispatlayacağız.

Teorem 3. $\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,...\}$ daha önce tanımladığımız rastgele değişkenler çifti dizisi olsun. Bu dizi ayrıca aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X(t) süreci ergodiktir:

1) η_1 rastgele değişkeni aritmetik olmayan bir dağılıma sahiptir,

2) $P\{\eta_1 > 0\} > 0$ ve $P\{\eta_1 < 0\} > 0$,

3) $E[\xi_1] < \infty$.

İspat. X(t) sürecinin ergodik olduğunu ispatlamak için "kesikli şans karışımlı süreçler için ergodik teoremi"nin (bkz. [5], s.243) koşullarının sağlandığını ispatlamak yeterli olacaktır. Bu teoreme göre,

1) Belli bir $\{H_n\}_{n\geq 0}$ içerilen Markov zinciri kurmak, bu zincirin ergodik olduğunu göstermek ve zincirin invaryant dağılım fonksiyonunu, bilinen olasılık karakteristikleri yardımı ile ifade edebilmek,

2) Bu içerilen Markov zincirinin herhangi ardışık iki sıçrama anı arasındaki sürenin beklenen değerinin sonlu olduğunu göstermek gerekir.

Buna göre,

1) $\{X_n\}_{n\geq 0}$ Markov zincirinde istenilen "içerilen Markov zinciri" olarak, $\{H_n\}_{n\geq 0}$ rastgele değişkenler dizisini

$$H_n := X(\tau_n + 0)\ ,\ n \geq 1\ ;\ H_0 := X_0 = z$$

şeklinde tanımlayalım. Burada

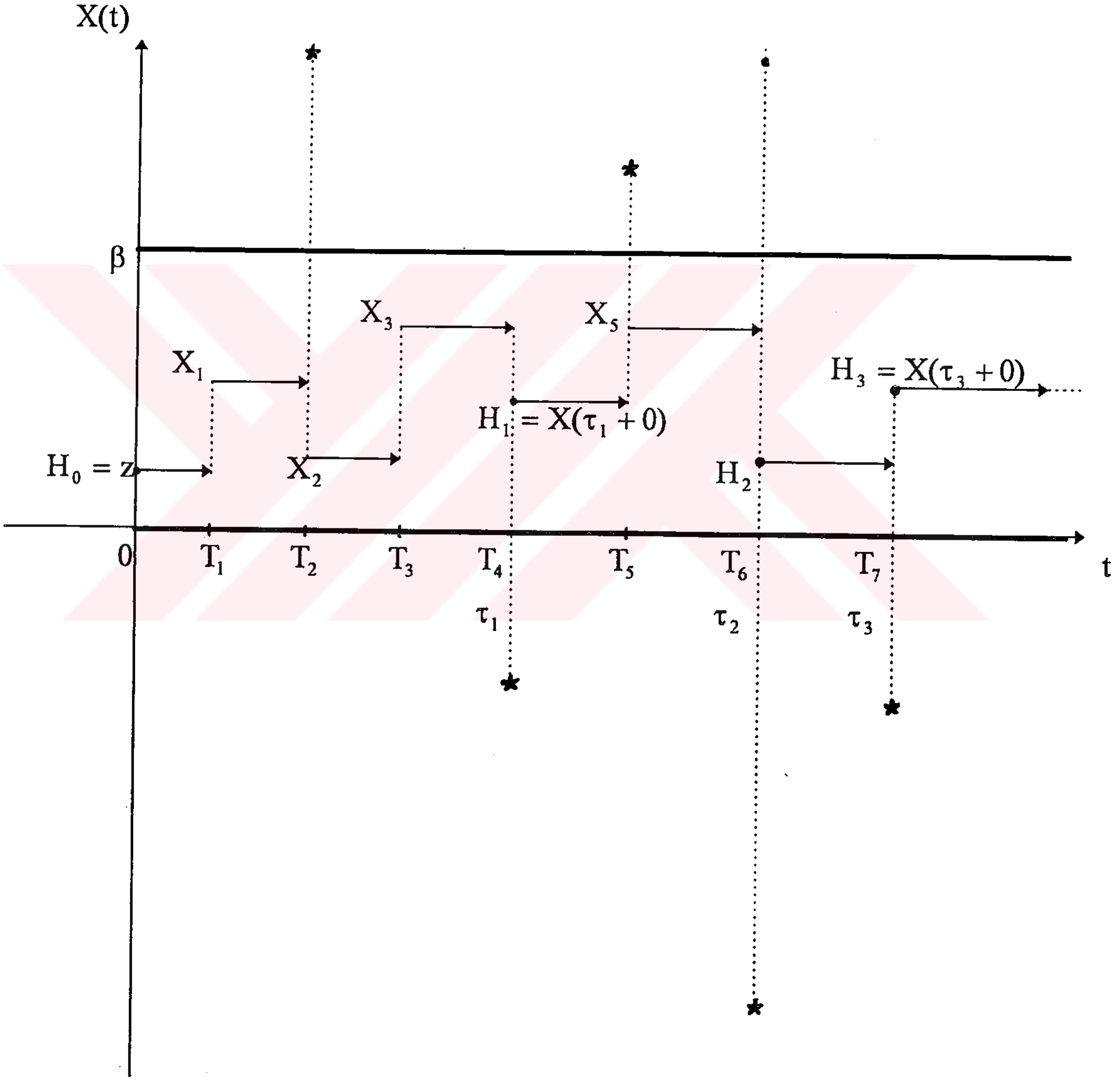
$$\nu_k := \inf\left\{n > \nu_{k-1} : X_{n-1} + \eta_n < 0\right\}\ ,\ k \geq 1\ ;\ \nu_0 := 0$$

(ν_k, X(t) sürecinin aşağı yansıtan bariyerden k. kez düşme anındaki adım sayısı) olmak üzere

$$\tau_k := T_{\nu_k} \equiv \sum_{i=1}^{\nu_k} \xi_i\ \ ,\ k \geq 1\ ;\ \tau_0 := 0$$

(τ_k, X(t) sürecinin aşağı yansıtan bariyerden k. kez düşme anı) idi.

Bu şekilde tanımlanan $\{H_n\}_{n\geq 0}$ bir içerilen Markov zinciri oluşturur. Bu Markov zincirinin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 22 de görülmektedir. Ayrıca 0- ve β-seviyelerinde yansıtan bariyer bulunmasından ve hem pozitif hem de negatif değerler alan η_1 rastgele değişkeninin aritmetik olmayan bir dağılıma sahip olmasından dolayı, bu zincir ergodiktir (bkz. [8] ve [10]) .



Şekil 22. $\{H_n\}_{n\geq 0}$ içerilen Markov zincirinin bir görünüşü

Bu $\{H_n\}_{n\geq 0}$ içerilen Markov zincirinin invaryant dağılım fonksiyonunu $\pi(x)$ ile gösterelim. Bu $\pi(x)$ dağılım fonksiyonu

$$\pi(x) = \int_0^\beta P(z;x)\, d\pi(z)$$

integral denklemi ile elde edilir (bkz. Kolmogorov-Chapman Teoremi). Burada integral denkleminin çekirdeği olan $P(z;x)$, $\{H_n\}_{n\geq 0}$ Markov zincirinin bir adımlı geçiş olasılıklarını belirleyen fonksiyon olup

$$P(z;x) := P\left\{H_1 \in (0,x) \mid H_0 = z\right\} = P_z\left\{H_1 \in (0,x)\right\} \; ; \; z,\, x \in [0,\beta]$$

ile tanımlanır. Şimdi $P(z;x)$ fonksiyonunu, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edelim.

τ_k, T_k ile $\nu_\beta(n)$ nin tanımlarını ve toplam olasılık formülünü kullanarak P(z;x),

$$\begin{aligned}
P(z;x) &= P_z\left\{H_1 \in (0,x)\right\} \\
&= P_z\left\{X(\tau_1 + 0) \in (0,x)\right\} \\
&= \int_{t=0}^{\infty} P_z\left\{\tau_1 \in dt\, ;\, X(t) \in (0,x)\right\} \\
&= \int_0^{\infty} P_z\left\{\sum_{i=1}^{\nu_1} \xi_i \in dt\, ;\, X(t) \in (0,x)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P_z\left\{\nu_1 = n\, ;\, T_n \in dt\, ;\, X_n \in (0,x)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} P_z\left\{\nu_1 = n\, ;\, X_n \in (0,x)\right\} . \, P\left\{T_n \in dt\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_z\left\{\nu_1 = n\, ;\, X_n \in (0,x)\right\} . \int_0^{\infty} P\left\{T_n \in dt\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_z\left\{\nu_1 = n\, ;\, X_n \in (0,x)\right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} P_z\left\{\nu_\beta(n) = m\, ;\, \nu_1 = n\, ;\, X_n \in (0,x)\right\} \qquad (41)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu (41) serisindeki terimleri ayrı ayrı hesaplayalım.

$z, x \in [0,\beta]$ olmak üzere, $r_n(z;x)$ ile aşağıdaki olasılığı gösterelim:

$$r_n(z;x) := P_z\left\{\nu_\beta(n)=0\ ;\ \nu_1=n\ ;\ X_n\in(0,x)\right\}\ ,\ n\geq 1 \tag{42}$$

ve $r_0(z;x):=0$ kabul edelim.

1. Terim:

$$r_n(z;x)=P\left\{z+Y_i\in[0,\beta]\ ,\ 1\leq i\leq n-1\ ;\ z+Y_n\in(-x,0)\right\}+$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left\{z+Y_i\in[0,\beta]\ ,1\leq i\leq n-1\ ;\ z+Y_n\in(-2\beta k-x,-2\beta k+x)\right\}$$

$$=c_n(z;0)-c_n(z;-x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[c_n(z;-2\beta k+x)-c_n(z;-2\beta k-x)\right] \tag{43}$$

2. Terim:

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=1\ ;\ \nu_1=n\ ;\ X_n\in(0,x)\right\}$$

$$=\int_{v=\beta}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}P\left\{z+Y_i\in[0,\beta]\ ;\ 1\leq i\leq k-1\ ;\ z+Y_k>\beta\ ;\ z+Y_k\in dv\right\}$$

$$.P_{\overline{v}}\left\{\nu_\beta(n-k)=0\ ;\ \nu_1=n-k\ ;\ X_{n-k}\in(0,x)\right\}$$

$$=\int_{\beta}^{\infty}\sum_{k=1}^{n-1}b_k(z;dv).r_{n-k}(\overline{v};x)$$

$$=\int_{\beta}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}b_k(z;dv).r_{n-k}(\overline{v};x)$$

$$=\int_{\beta}^{\infty}b_n(z;dv)*r_n(\overline{v};x)\,.$$

Burada $\overline{v}=\psi(v),\ v>\beta$ dır ve $b_0(z;dv)=r_0(z;x)=0$ olduğu kullanılmıştır. Benzer düşünce ile 3. terimin

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=2\ ;\ \nu_1=n\ ;\ X_n\in(0,x)\right\}=\int_{\beta}^{\infty}\int_{\beta}^{\infty}b_n(z;dv_1)*b_n(\overline{v}_1;dv_2)*r_n(\overline{v}_2;x)$$

olduğu gösterilebilir, burada $\overline{v}_0=z$ ve $k\geq 1$ için $\overline{v}_k=\psi(v_k)$ dır. Nihayet matematiksel indüksiyon metodu ile, keyfi $1\leq m\leq n-1$ için

$$P_z\left\{\nu_\beta(n)=m\ ;\ \nu_1=n\ ;\ X_n\in(0,x)\right\}$$

$$=\int_{\beta}^{\infty}\ldots(m)\ldots\int_{\beta}^{\infty}b_n(z;dv_1)*b_n(\overline{v}_1;dv_2)*\ldots*b_n(\overline{v}_{m-1};dv_m)*r_n(\overline{v}_m;x)$$

$$=\int_{\beta}^{\infty}\ldots(m)\ldots\int_{\beta}^{\infty}\prod_{i=1}^{m}*\left(b_n(\overline{v}_{i-1};dv_i)\right)*r_n(\overline{v}_m;x) \tag{44}$$

elde edilir. (42) ve (44) ifadeleri, (41) de yerine yazılır, $b_0(z;v) = r_0(z;x) = 0$ olduğu ve dizilerin konvolüsyon çarpımı tanımı kullanılırsa

$$P(z;x) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n(z;x) + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{n-1} \int_{\beta}^{\infty} \ldots (m) \ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} {}_{*}\left(b_n(\overline{v}_{i-1}; dv_i)\right) * r_n(\overline{v}_m; x)$$

ifadesi elde edilir. Burada $r_n(z;x)$, (43) de verildiği gibidir. Yani

$$r_n(z;x) = c_n(z;0) - c_n(z;-x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_n(z;-2\beta k + x) - c_n(z;-2\beta k - x)\right]$$

şeklindedir.

Böylece $\{H_n\}_{n\geq 0}$ içerilen Markov zincirinin bir adımlı geçiş olasılıklarını belirleyen $P(z;x)$ fonksiyonlarını, dolayısıyla bu zincirin invaryant dağılım fonksiyonunu, $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade etmiş olduk. Sonuç olarak, bizim teoremin hipotezleri altında "kesikli şans karışımlı süreçler için ergodik teoremi" (bkz. [5]) nin 1. koşulu sağlanmış olur.

2) Şimdi 2. koşulun sağlandığını, yani bizim notasyonlar altında $E[\tau_1] < \infty$ olduğunu gösterelim. Bu amaçla aşağıdaki iki yardımcı teoremi verelim:

Yardımcı Teorem 5. Teoremin koşulları sağlansın. Bu takdirde

$$\sup_{0\leq z\leq \beta} P_z\{\tau_1 \geq T_\alpha\} \leq \alpha < 1$$

olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ ve $T_\alpha < \infty$ sabitleri vardır.

İspat. $E[\xi_1] < \infty$ olduğundan

$$\Phi(M) = P\{\xi_1 \leq M\} > 0 \tag{45}$$

olacak şekilde bir $0 < M < \infty$ sabiti vardır. Ayrıca $P\{\eta_1 < 0\} > 0$ olduğundan

$$F(-h) = P\{\eta_1 \leq -h\} > 0 \tag{46}$$

olacak şekilde bir $0 < h < \infty$ sabiti vardır. Şimdi

$$\delta := \Phi(M).F(-h) \tag{47}$$

tanımlayalım. (45), (46) ve (47) den $\delta > 0$ olduğu açıktır.

$\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,\ldots\}$ rastgele değişken çifti dizisi bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğundan

$$
\begin{aligned}
P\{T_1 \le M\,;\, Y_1 \le -h\} = P\{\xi_1 \le M\,;\, \eta_1 \le -h\} &= P\{\xi_1 \le M\}.P\{\eta_1 \le -h\} \\
&= \Phi(M).F(-h) \\
&= \delta
\end{aligned}
\tag{48}
$$

$$
\begin{aligned}
&P\{T_2 \le 2M\,;\, Y_2 \le -2h\} \\
&\quad = P\left\{\xi_1 + \xi_2 \le 2M\,;\, \eta_1 + \eta_2 \le -2h\right\} \\
&\quad = \int_{t=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} P\left\{\xi_2 \in dt\,;\, \eta_2 \in dv\right\}.P\left\{\xi_1 \le 2M - t\,;\, \eta_1 \le -2h - v\right\} \\
&\quad \ge \int_{t=0}^{M} \int_{v=-\infty}^{-h} P\left\{\xi_2 \in dt\right\}.P\left\{\eta_2 \in dv\right\}.P\left\{\xi_1 \le 2M - t\right\}.P\left\{\eta_1 \le -2h - v\right\} \\
&\quad = \int_{t=0}^{M} \int_{v=-\infty}^{-h} \Phi(2M - t)\,.F(-2h - v)\, d\Phi(t)\, dF(v) \\
&\quad \ge \int_{t=0}^{M} \int_{v=-\infty}^{-h} \Phi(M)\,.F(-h)\, d\Phi(t)\, dF(v) \\
&\quad = \Phi(M).F(-h) \int_{0}^{M} d\Phi(t) \int_{-\infty}^{-h} dF(v) \\
&\quad = \delta^2
\end{aligned}
\tag{49}
$$

elde edilir. Şimdi matematiksel indüksiyon metodu ile, keyfi $n \ge 1$ için

$$
P\{T_n \le nM\,;\, Y_n \le -nh\} \ge \delta^n \tag{50}
$$

olduğunu gösterelim.

Bu eşitsizliğin $n = 1$ ve $n = 2$ için doğru olduğu (48) ve (49) ifadelerinden görülmektedir. (50) eşitsizliği $n = k > 2$ için doğru, yani

$$
P\{T_k \le kM\,;\, Y_k \le -kh\} \ge \delta^k\,,\ k > 2 \tag{51}
$$

olsun. (50) eşitsizliğinin $n = k + 1$ için de doğru olduğunu göstermeliyiz. (51) eşitsizliğini kullanarak

$$
\begin{aligned}
&P\left\{T_{k+1} \le (k+1)M\,;\, Y_{k+1} \le -(k+1)h\right\} \\
&\quad = \int_{t=0}^{\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} P\left\{T_k \le (k+1)M - t\,;\, Y_k \le -(k+1)h - v\right\} d\Phi(t)\, dF(v) \\
&\quad \ge \int_{0}^{M} \int_{-\infty}^{-h} P\left\{T_k \le kM + (M - t)\,;\, Y_k \le -kh + (-h - v)\right\} d\Phi(t)\, dF(v) \\
&\quad \ge \int_{0}^{M} \int_{-\infty}^{-h} P\left\{T_k \le kM\,;\, Y_k \le -kh\right\} d\Phi(t)\, dF(v) \\
&\quad \ge \delta^k . \int_{0}^{M} \int_{-\infty}^{-h} d\Phi(t)\, dF(v) = \delta^{k+1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Yani (50) ifadesi, $n = k+1$ için de doğrudur. Sonuç olarak (50) eşitsizliği her $n \geq 1$ için doğrudur.

Şimdi $N = \left[\left|\beta / h\right|\right] + 1$ olsun. Açık olarak $N > \beta / h$ ve $N < \infty$ dir. Buradan,

$$P\{Y_N \leq -\beta\} > P\{Y_N \leq -Nh\} \tag{52}$$

ve sonuç olarak (50) ve (52) ifadelerinden,

$$P\{T_N \leq NM \,;\, Y_N \leq -\beta\} > P\{T_N \leq NM \,;\, Y_N \leq -Nh\} \geq \delta^N > 0 \tag{53}$$

elde edilir.

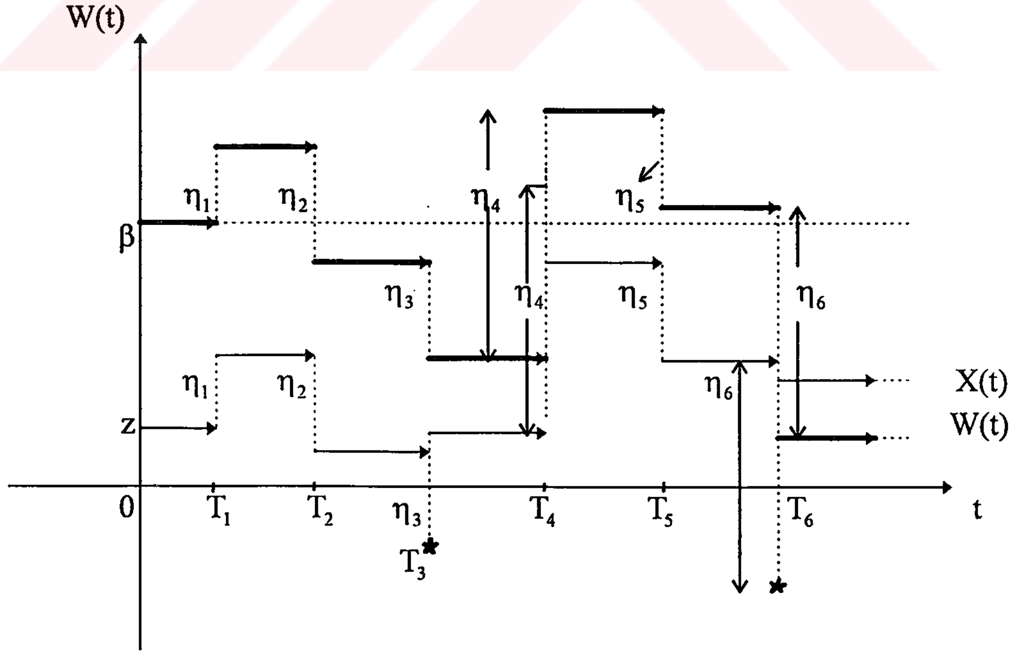
Diğer yandan

$$W(t) := W_n := \begin{cases} \beta & , \; n = 0 \\ \beta + Y_n \,, & n \geq 1 \end{cases} \quad , \; T_n \leq t < T_{n+1} \,,\; n \geq 0$$

tanımlayalım. Tanımdan görüleceği gibi, W(t)

$$W(t) = W_n = W_{n-1} + \eta_n \;\; ; \;\; T_n \leq t < T_{n+1} \;\; , \; n \geq 0$$

şeklinde de yazılabilir. W(t) başlangıç durumu $W(0) = W_0 = \beta$ olan bariyersiz bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur. X(t) ve W(t) süreçlerinin karşılaştırmalı bir görünüşü Şekil 23 de görülmektedir.



Şekil 23. X(t) ve W(t) süreçlerinin bir karşılaştırmalı görünüşü

$\gamma_{1\beta}$ ile, W(t) sürecinin 0 (sıfır)-seviyesinden ilk kez düşmesi anını gösterelim. Yani,

$\gamma_{1\beta} := \inf \{ t > 0 \, ; \, W(t) < 0 \}$

tanımlayalım. Keyfi ve sabit $n \geq 1$ için

$$P\{\gamma_{1\beta} \leq t\} \geq P\left\{T_n \leq t \, ; \, \beta + Y_n < 0\right\} \tag{54}$$

olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\omega_0 \in \left\{\omega \mid T_n \leq t \, ; \, \beta + Y_n < 0\right\} \tag{55}$$

olsun. $W(T_n) = \beta + Y_n$ olduğundan

$$\omega_0 \in \left\{\omega \mid T_n \leq t \, ; \, W(T_n) < 0\right\}$$

ve $\gamma_{1\beta}$ rastgele değişkeninin tanımından

$$\omega_0 \in \left\{\omega \mid T_n \leq t \, ; \, \gamma_{1\beta} \leq T_n\right\} \tag{56}$$

elde edilir. $\left\{\omega \mid T_n \leq t \, ; \, \gamma_{1\beta} \leq T_n\right\} \subseteq \left\{\omega \mid \gamma_{1\beta} \leq t\right\}$ olduğundan (56) gereğince

$$\omega_0 \in \left\{\omega \mid \gamma_{1\beta} \leq t\right\} \tag{57}$$

olur. Böylece (55) ve (57) ifadelerinden

$$\left\{\omega \mid T_n \leq t \, ; \, \beta + Y_n < 0\right\} \subseteq \left\{\omega \mid \gamma_{1\beta} \leq t\right\}$$

olduğu görülür. Bunun sonucu olarak, keyfi ve sabit $n \geq 1$ için (54) ifadesi sağlanmış olur.

Şimdi (54) eşitsizliğinde $n = N$ and $t = NM$ alınırsa ve (53) eşitsizliği kullanılırsa

$$P\left\{\gamma_{1\beta} \leq NM\right\} \geq P\left\{T_N \leq NM \, ; \, \beta + Y_N < 0\right\} \geq \delta^N > 0$$

yani

$$P\left\{\gamma_{1\beta} \leq NM\right\} \geq \delta^N > 0 \tag{58}$$

ifadesi elde edilir.

Diğer yandan, β-seviyesinde yansıtan bariyer olması ve X(t) ile W(t) süreçlerinin tanımlarından dolayı, keyfi $z \in [0, \beta]$ başlangıç durumu için 1 olasılığı ile $\tau_1 \leq \gamma_{1\beta}$ olduğu kolayca görülür. Bu nedenle keyfi $t \in IR^+$ ve $z \in [0, \beta]$ için

$$P_z\{\tau_1 \leq t\} \geq P\{\gamma_{1\beta} \leq t\}$$

dir. Burada da özel olarak $n = N$ ve $t = NM$ alınır ve (58) eşitsizliği kullanılırsa

$$P_z\left\{\tau_1 \leq NM\right\} \geq P\left\{\gamma_{1\beta} \leq NM\right\} \geq \delta^N > 0$$

ifadesi elde edilir. Böylece keyfi $z \in [0,\beta]$ için

$$P_z\{\tau_1 \geq NM\} \leq 1-\delta^N \tag{59}$$

olur. Şimdi $\alpha := 1-\delta^N$ ve $T_\alpha := NM$ tanımlayalım. $\delta > 0$, $N < \infty$ ve $0 < M < \infty$ olduğundan

$$\alpha < 1\ ,\ T_\alpha < \infty \tag{60}$$

elde edilir. Böylece, (59) ve (60) göz önüne alınırsa, keyfi $z \in [0,\beta]$ için $P_z\{\tau_1 \geq T_\alpha\} \leq \alpha$ olacak şekilde $\alpha \in [0,1)$ ve $T_\alpha < \infty$ sabitlerinin mevcut olduğu görülür. α ve T_α sabitleri z parametresinden bağımsız olduklarından

$$\sup_{0 \leq z \leq \beta} P_z\{\tau_1 \geq T_\alpha\} \leq \alpha < 1$$

yazılabilir. Böylece Yardımcı Teorem 5 ispatlanmış olur. //

Şimdi $E[\tau_1] < \infty$ olduğunu ispatlayabiliriz.

Yardımcı Teorem 6. Teoremin koşulları sağlansın. Bu takdirde $E[\tau_1] < \infty$ dır.

İspat. Yardımcı Teorem 5 de

$$\exists \alpha \in [0,1)\ ,\ T_\alpha < \infty\ ;\ \forall z \in [0,\beta] \text{ için } P_z\{\tau_1 \geq T_\alpha\} \leq \alpha < 1 \tag{61}$$

olduğunu ispatladık. Bu ifade kullanılırsa

$$\begin{aligned} P_z\{\tau_1 \geq 2T_\alpha\} &= \int_0^\beta P_z\{\tau_1 \geq 2T_\alpha\ ;\ X(T_\alpha) \in dv\} \\ &= \int_0^\beta P_z\{\tau_1 \geq T_\alpha ; X(T_\alpha) \in dv\}.P_v\{\tau_1 \geq T_\alpha\} \quad \text{(Kolmogorov-Chapman öz.)} \\ &\leq \int_0^\beta P_z\{\tau_1 \geq T_\alpha\ ;\ X(T_\alpha) \in dv\}.\alpha \\ &= \alpha\,.P_z\{\tau_1 \geq T_\alpha\} \\ &\leq \alpha^2 \end{aligned}$$

yani

$$P_z\{\tau_1 \geq 2T_\alpha\} \leq \alpha^2 \tag{62}$$

elde edilir. Şimdi matematiksel indüksiyon metodu ile, keyfi $n \geq 1$ ve $z \in [0,\beta]$ için

$$P_z\{\tau_1 \geq nT_\alpha\} \leq \alpha^n \tag{63}$$

olduğunu gösterelim.

(63) eşitsizliğinin $n=1$ ve $n=2$ için sağlandığı (61) ve (62) ifadelerinden görülmektedir. Bu eşitsizlik $n=k>2$ için doğru, yani

$$P_z\{\tau_1 \geq kT_\alpha\} \leq \alpha^k \ , \ k>2 \tag{64}$$

olsun. (63) eşitsizliğinin $n=k+1$ için de doğru olduğunu göstermeliyiz. (64) ifadesi ile

$$\begin{aligned}
P_z\left\{\tau_1 \geq (k+1)T_\alpha\right\} &= \int_0^\beta P_z\left\{\tau_1 \geq kT_\alpha + T_\alpha \ ; \ X(kT_\alpha) \in dv\right\} \\
&= \int_0^\beta P_z\left\{\tau_1 \geq kT_\alpha \ ; \ X(kT_\alpha) \in dv\right\} . \ P_v\left\{\tau_1 \geq T_\alpha\right\} \\
&\leq \alpha \ . \int_0^\beta P_z\left\{\tau_1 \geq kT_\alpha \ ; \ X(kT_\alpha) \in dv\right\} \\
&= \alpha \ . P_z\{\tau_1 \geq kT_\alpha\} \\
&\leq \alpha^{k+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani (63) ifadesi, $n=k+1$ için de doğrudur. Sonuç olarak (63) eşitsizliği her $n \geq 1$ için doğrudur.

Şimdi (63) eşitsizliğini ve $|\alpha| \leq 1$ olduğunu kullanarak $E_z[\tau_1]$ i aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\begin{aligned}
E_z[\tau_1] = \int_0^\infty P_z\{\tau_1 \geq t\}\, dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)T_\alpha}^{nT_\alpha} P_z\left\{\tau_1 \geq t\right\} dt \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)T_\alpha}^{nT_\alpha} P_z\left\{\tau_1 \geq (n-1)T_\alpha\right\} dt \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P_z\left\{\tau_1 \geq (n-1)T_\alpha\right\} . T_\alpha \\
&= T_\alpha \, . \sum_{n=0}^{\infty} P_z\left\{\tau_1 \geq nT_\alpha\right\} \\
&\leq T_\alpha \, . \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n = \frac{T_\alpha}{1-\alpha} .
\end{aligned}$$

$\alpha < 1$ ve $T_\alpha < \infty$ olduğundan, keyfi $z \in [0,\beta]$ için

$$E_z[\tau_1] \leq \frac{T_\alpha}{1-\alpha} < \infty$$

yazılabilir. $\pi_0\{dz\}$, $X(0)$ rastgele değişkeninin $[0,\beta]$ aralığında konsantre olunmuş dağılımı, yani

$$\pi_0\left\{dz\right\} = \begin{cases} P\{X(0) \in dz\} \ , & z \in [0,\beta] \\ \quad 0 \ , & z \in IR \setminus [0,\beta] \end{cases}$$

olsun. Böylece

$$E[\tau_1] = \int_0^\beta E_z[\tau_1].\pi_0\{dz\} \le \int_0^\beta \frac{T_\alpha}{1-\alpha}\pi_0\{dz\}$$

yazılabilir. α ve T_α sabitleri z den bağımsız olduğundan

$$E[\tau_1] \le \frac{T_\alpha}{1-\alpha}\int_0^\beta \pi_0\{dz\} = \frac{T_\alpha}{1-\alpha} < \infty$$

elde edilir. Böylece Yardımcı Teorem 6 ispatlanmış olur. //

Sonuç olarak, ergodiklik teoreminin 2. koşulunun da sağlandığını yani $E[\tau_1] < \infty$ olduğunu ispatlamış olduk. Böylece ergodiklik teoremi gereğince, X(t) süreci ergodiktir. Bu da Teorem 3 ün ispatını tamamlar. //

Şimdi de X(t) sürecinin en genel ergodik dağılımını, $\{T_n\}_{n\ge 0}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}_{n\ge 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade eden teoremi verelim.

Teorem 4. Teorem 3 ün hipotezleri sağlansın. Bu takdirde, f(x) sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, X(t) süreci için en genel ergodik dağılım fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade etmek mümkündür:

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \frac{\overline{\overline{A}}_{\pi f}(*;*) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_\beta^\infty \ldots(m)\ldots \int_\beta^\infty \overline{B}_\pi(*;dv_1).\prod_{i=2}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).\overline{A}_f(\overline{v}_m;*)}{\overline{\overline{A}}_{\pi 1}(*;*) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_\beta^\infty \ldots(m)\ldots \int_\beta^\infty \overline{B}_\pi(*;dv_1).\prod_{i=2}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).\overline{A}_1(\overline{v}_m;*)} \qquad (65)$$

burada

$$\overline{A}_f(z;*) := \int_{x=0}^{\beta} f(x).A(z;dx)$$

$$\overline{B}_\pi(*;dv) := \int_{z=0}^{\beta} B(z;dv)\, d\pi(z)$$

$$\overline{\overline{A}}_{\pi f}(*;*) := \int_{z=0}^{\beta}\int_{x=0}^{\beta} f(x).A(z;dx)\, d\pi(z) \equiv \int_{z=0}^{\beta} \overline{A}_f(z;*)\, d\pi(z)$$

$$\overline{A}_1(z;*) := \overline{A}_f(z;*)\big|_{\substack{f=1\\ x=\beta}} \equiv A(z;\beta) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z;\beta)$$

$$\overline{\overline{A}}_{\pi 1}(*;*) := \overline{\overline{A}}_{\pi f}(*;*)\big|_{\substack{f=1\\ x=\beta}} \equiv \int_{z=0}^{\beta} A(z;\beta)\, d\pi(z) = \int_{z=0}^{\beta}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z;\beta)\, d\pi(z) =: \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a}_n(*;\beta)$$

şeklinde tanımlanmışlardır.

İspat. Teoremin hipotezleri altında, X(t) sürecinin ergodik olduğunu Teorem 3 de göstermiştik. Bu durumda, f(x) sınırlı ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, X(t) sürecinin en genel ergodik dağılım fonksiyonu için, aşağıdaki ifade doğrudur (bkz. Gihman ve Skorohod [5], sh.243) :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \frac{\int_{z=0}^{\beta}\int_{x=0}^{\beta}\int_{t=0}^{\infty} f(x).P_z\left\{\tau_1 > t\,;\, X(t)\in dx\right\} dt\, d\pi(z)}{\int_{z=0}^{\beta}\int_{t=0}^{\infty} P_z\left\{\tau_1 > t\right\} dt\, d\pi(z)}. \tag{66}$$

Amacımız (66) formülündeki kesrin pay ve paydasını, $\{T_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ süreçlerinin belirli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade etmektir. Kesrin payını I_1, paydasını I_2 ile gösterelim ve önce I_1 i hesaplayalım.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{z=0}^{\beta}\int_{x=0}^{\beta}\int_{t=0}^{\infty} f(x).P_z\left\{\tau_1 > t\,;\, X(t)\in dx\right\}dt\, d\pi(z) \\ &= \int_{z=0}^{\beta}\int_{x=0}^{\beta} f(x)\, d_x\left(\int_{t=0}^{\infty} P_z\left\{\tau_1 > t\,;\, X(t)\leq x\right\}dt\right) d\pi(z) \end{aligned}$$

dir. Parantez içindeki integral için,

$$\begin{aligned} \tilde{G}(0;z;x) &:= \lim_{\lambda\to 0} \tilde{G}(\lambda;z;x) = \lim_{\lambda\to 0} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t}\, G(t;z;x)\, dt \\ &= \lim_{\lambda\to 0} \int_{t=0}^{\infty} e^{-\lambda t} P_z\left\{\tau_1 > t\,;\, X(t)\leq x\right\}dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} P_z\left\{\tau_1 > t\,;\, X(t)\leq x\right\}dt \end{aligned}$$

eşitliği kullanılırsa I_1

$$I_1 = \int_{z=0}^{\beta}\int_{x=0}^{\beta} f(x)\, d_x\tilde{G}(0;z;x)\, d\pi(z)$$

şeklinde yazılabilir. $\tilde{G}(0;z;x)$ için bu kez Teorem 1 de $\tilde{G}(\lambda;z;x)$ için verilen (27) ifadesi kullanılır ve $\varphi(\lambda) := E[e^{-\lambda\xi_1}]$ olmak üzere $\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda} = E[\xi_1]$, $\varphi(0)=1$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \tilde{G}(0;z;x) &:= \lim_{\lambda\to 0} \tilde{G}(\lambda;z;x) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}.\tilde{g}(\varphi(\lambda);z;x) \\ &= E[\xi_1].\tilde{g}(1;z;x) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade I_1 de yerine yazılırsa

$$I_1 = \int_{z=0}^{\beta} \int_{x=0}^{\beta} f(x)\, d_x\Big[E[\xi_1].\tilde{g}(1;z;x)\Big]\, d\pi(z)$$

$$= E[\xi_1] \int_{z=0}^{\beta} \int_{x=0}^{\beta} f(x)\, d_x \tilde{g}(1;z;x)\, d\pi(z)$$

şekline gelir. Şimdi de Sonuç 2 de $\tilde{g}(1;z,\beta)$ için verilen (19) ifadesinde $\beta = x$ yazarak elde edilen

$$\tilde{g}(1;z,x) = A(z,x) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A(\overline{v}_m;x)$$

ifadesi I_1 de yerine yazılırsa

$$I_1 = E[\xi_1] \int_{z=0}^{\beta} \int_{x=0}^{\beta} f(x)\, d_x \left[A(z,x) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A(\overline{v}_m;x) \right] d\pi(z)$$

$$= E[\xi_1] \int_{z=0}^{\beta} \int_{x=0}^{\beta} f(x) \left[A(z,dx) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \prod_{i=1}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).A(\overline{v}_m;dx) \right] d\pi(z)$$

elde edilir. Buradan

$$I_1 = E[\xi_1] \left\{ \int_{z=0}^{\beta} \left[\int_{x=0}^{\beta} f(x)A(z,dx) \right] d\pi(z) + \right.$$

$$\left. \int_{z=0}^{\beta} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} B(z;dv_1).B(\overline{v}_1;dv_2).\ \ldots\ .B(\overline{v}_{m-1};dv_m) \int_{x=0}^{\beta} f(x).A(\overline{v}_m;dx) \right] d\pi(z) \right\}$$

ve $\overline{A}_f(z;*)$, $\overline{A}_f(\overline{v}_m;*)$ notasyonları kullanılırsa

$$I_1 = E[\xi_1] \left\{ \int_{z=0}^{\beta} \overline{A}_f(z;*)\, d\pi(z) + \right.$$

$$\left. \int_{z=0}^{\beta} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} B(z;dv_1).B(\overline{v}_1;dv_2).\ \ldots\ .B(\overline{v}_{m-1};dv_m).\overline{A}_f(\overline{v}_m;*) \right] d\pi(z) \right\},$$

ve $\overline{\overline{A}}_{\pi f}(*;*)$, $\overline{B}_\pi(*;dv_1)$ notasyonları kullanılırsa

$$I_1 = E[\xi_1] \left\{ \overline{\overline{A}}_{\pi f}(*;*) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} \ldots(m)\ldots \int_{\beta}^{\infty} \overline{B}_\pi(*;dv_1).\prod_{i=2}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).\overline{A}_f(\overline{v}_m;*) \right\} \quad (67)$$

ifadesi elde edilir. Şimdi I_2 yi hesaplayalım. (66) ifadesine dikkat edilirse, (67) deki I_1 de $f(x)=1$ ve $x = \beta$ alınırsa I_2 ifadesi elde edilir. Böylece

$$I_2 := \int_{z=0}^{\beta} \int_{t=0}^{\infty} P_z\left\{\tau_1 > t\right\} dt\, d\pi(z)$$

$$I_2 = E[\xi_1]\left\{\overline{\overline{A}}_{\pi 1}(*;*) + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\beta}^{\infty} ...(m)... \int_{\beta}^{\infty} \overline{B}_{\pi}(*;dv_1).\prod_{i=2}^{m} B(\overline{v}_{i-1};dv_i).\overline{A}_1(\overline{v}_m;*)\right\} \quad (68)$$

bulunur. Burada $\overline{A}_1(z;*)$, $\overline{A}_f(z;*)$ ifadesinde ve $\overline{\overline{A}}_{\pi 1}(*;*)$ de $\overline{\overline{A}}_{\pi f}(*;*)$ ifadesinde f(x)=1, $x = \beta$ alınmasıyla elde edilmiştir. Yani teoremin ifadesinde verildiği gibidir.

Sonuç olarak, $0 < E[\xi_1] < \infty$ olduğu dikkate alınarak, (67) ve (68) yardımıyla $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \frac{I_1}{I_2}$ den istenilen (65) ifadesi elde edilir. Böylece Teorem 4 ispatlanmış olur. //

Not 2. $0 \le t \le \beta$ olmak üzere Teorem 4 de

$$f(x) = I_{[0,t]}(x) = \begin{cases} 1 & , \; x \in [0,t] \\ 0 & , \; x \in IR \setminus [0,t] \end{cases}$$

alınırsa X(t) sürecinin ergodik dağılımı elde edilir. //

2.6. Süreç İçin Limit Teoremi

Bu kısımda amacımız, X(t) süreci için limit teoremini ifade etmek ve ispatlamaktır. Bu nedenle önce, Kısım 2.2 de kurduğumuz X(t) sürecini bu kez farklı bir şekilde (Borovkov manada) kurarak söz konusu olan sürecin dizini oluşturacağız. Sonra da bu süreç dizisinin yakınsaklığı hakkındaki teoremi ifade ve ispat edeceğiz.

2.6.1. Sürecin ve Süreç Dizisinin Kuruluşu

$\left\{(\xi_i, \eta_i)\ ; i = 1,2,...\right\}$ daha önce verildiği gibi, yani herhangi bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çifti dizisi öyleki ξ_i ler pozitif değerli, ayrıca ξ_i ve η_i ler de kendi aralarında bağımsız olsun.

$$T_k := \sum_{i=1}^{k} \xi_i\ ,\ k \ge 1\ ;\ T_0 := 0$$

olmak üzere

$$\nu(t) := \inf\left\{k \geq 0 : T_{k+1} > t\right\},\ t > 0\ ;\ \nu(0) := 0$$

rastgele değişkenini tanımlayalım.

$$\chi(t) := \sum_{i=1}^{\nu(t)} \eta_i\ ,\ t > 0\ ;\ \chi(0) := 0 \tag{69}$$

ile tanımlı $\chi(t)$, bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci oluşturur. Buradaki $\nu(t)$, $\chi(t)$ sürecinin t zamanı esnasındaki sıçrama sayısı olarak yorumlanabilir.

Bu $\chi(t)$ sürecine önce β $(\beta > 0)$-seviyesinde bir yansıtan bariyer koyup $\widetilde{\chi}_\beta(t)$ ile göstereceğimiz süreci, daha sonra da bu yeni sürece 0 (sıfır)-seviyesinde bir yansıtan bariyer koyup $\widetilde{\widetilde{\chi}}_{0,\beta}(t)$ ile göstereceğimiz iki yansıtan bariyere sahip süreci oluşturacağız.

Önce bariyersiz $\chi(t)$ sürecine β-seviyesinde yansıtan bariyer koyalım. Bunun için u_1 ve U_1 rastgele değişkenlerini

$$u_1 := \inf\left\{m > 0 : \chi(T_m) = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_m \geq \beta\right\} \tag{70}$$

$$U_1 := T_{u_1} \tag{71}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre U_1, $\chi(t)$ sürecinin β-bariyerinden ilk kez yansıma anıdır. Ψ_1 rastgele değişkenini

$$\Psi_1 := \beta - [\chi(U_1) - \beta] = 2\beta - \chi(U_1) =: \beta - \overline{\eta}_{\nu(U_1)} \tag{72}$$

$$= 2\beta - [\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{\nu(U_1)}]$$

ile tanımlayalım. Burada

$$\overline{\eta}_{\nu(U_1)} := \chi(U_1) - \beta,$$

$\eta_{\nu(U_1)}$ in β-seviyesini aşma miktarı (yani β-bariyerinden yansıma miktarı) dır.

Şimdi u_2 ve U_2 rastgele değişkenlerini

$$u_2 := \inf\left\{m > u_1 : \Psi_1 + \eta_{\nu(U_1)+1} + \ldots + \eta_{\nu(T_m)} \geq \beta\right\} \tag{73}$$

$$U_2 := T_{u_2} \tag{74}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre U_2, $\chi(t)$ sürecinin β-bariyerinden ikinci kez yansıma anıdır. Ψ_2 rastgele değişkenini

$$\Psi_2 := \beta - \left[\Psi_1 + \eta_{\nu(U_1)+1} + \ldots + \eta_{\nu(U_2)} - \beta\right] \tag{75}$$

olarak inşa edelim. Ψ_2 yi, $\chi(t)$ nin tanımını kullanarak

$$\Psi_2 = \beta - \left[\Psi_1 + \chi(U_2) - \chi(U_1) - \beta\right] =: \beta - \overline{\eta}_{\nu(U_2)}$$

$$= 2\beta - \left[\Psi_1 + \chi(U_2) - \chi(U_1)\right]$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\overline{\eta}_{\nu(U_2)} := \Psi_1 + \chi(U_2) - \chi(U_1) - \beta,$$

$\eta_{\nu(U_2)}$ nin β-bariyerinden yansıma miktarıdır.

Benzer şekilde $k \geq 1$ için

$$u_k := \inf\left\{m > u_{k-1} : \Psi_{k-1} + \eta_{\nu(U_{k-1})+1} + \ldots + \eta_{\nu(T_m)} \geq \beta\right\} \quad (u_0 := 0) \tag{76}$$

$$U_k := T_{u_k} \quad (U_0 := 0) \tag{77}$$

rastgele değişkenlerini tanımlayalım. Burada U_k, $\chi(t)$ sürecinin β-bariyerinden k. kez yansıma anıdır. Ψ_k rastgele değişkenini de $k \geq 1$ için

$$\Psi_k := \beta - \left[\Psi_{k-1} + \eta_{\nu(U_{k-1})+1} + \ldots + \eta_{\nu(U_k)} - \beta\right] =: \beta - \overline{\eta}_{\nu(U_k)}$$

$$= 2\beta - \left[\Psi_{k-1} + \chi(U_k) - \chi(U_{k-1})\right] \tag{78}$$

olarak inşa edelim $(\Psi_0 := 0)$. Burada

$$\overline{\eta}_{\nu(U_k)} := \Psi_{k-1} + \chi(U_k) - \chi(U_{k-1}) - \beta,$$

$\eta_{\nu(U_k)}$ nin β-bariyerinden yansıma miktarıdır. Şimdi aşağıdaki rastgele değişkeni tanımlayalım:

$$\mu_1(t) := \inf\left\{k \geq 0 : U_{k+1} > t\right\}, t > 0 \; ; \; \mu_1(0) := 0 \, . \tag{79}$$

Tanımdan görüldüğü gibi $\mu_1(t)$, $\chi(t)$ sürecinin t zamanı esnasında β-bariyerinden yansımalarının sayısıdır. Kısalık amacıyla

$$U(t) := U_{\mu_1(t)} \;, \; \Psi(t) := \Psi_{\mu_1(t)} \tag{80}$$

notasyonlarını tanımlayalım. Dikkat edilirse U(t),

$$U(t) = \sum_{i : U_i < t} \overline{U}_i \;; \; \overline{U}_i := U_{i+1} - U_i \,, \; i \geq 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\overline{U}_i$ ler bağımsız, aynı tür dağılıma sahip, pozitif değerli rastgele değişkenlerdir. Ayrıca (80) ve (78) ifadeleri gereğince

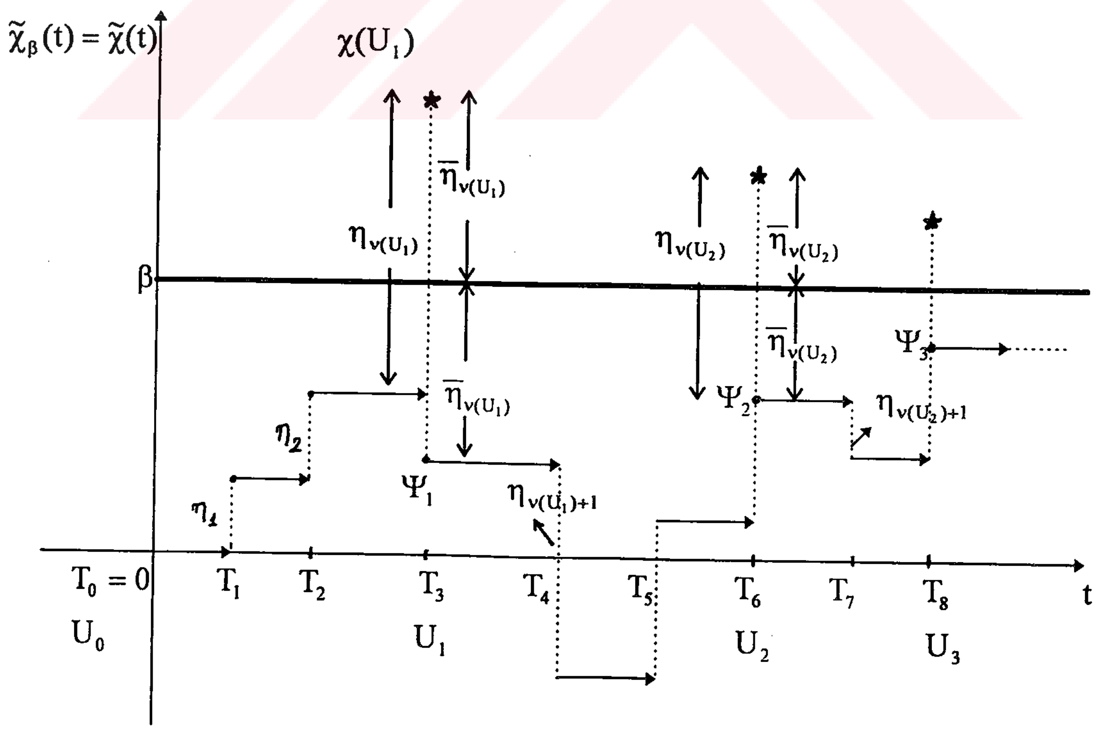
$$\Psi(t) = 2\beta - \left[\Psi_{\mu_1(t)-1} + \chi(U_{\mu_1(t)}) - \chi(U_{\mu_1(t)-1})\right] = \beta - \overline{\eta}_{v(U_{\mu_1}(t))}$$
$$= \beta - \overline{\eta}_{v(U(t))}$$

olup $\overline{\eta}_{v(U_{\mu_1(t)})}$, $\eta_{v(U_{\mu_1(t)})}$ nin β-bariyerinden yansıma miktarıdır.

Şimdi $\widetilde{\chi}_\beta(t)$ sürecini aşağıdaki şekilde kurabiliriz:

$$\widetilde{\chi}_\beta(t) := \Psi_{\mu_1(t)} + \eta_{v(U_{\mu_1(t)})+1} + \ldots + \eta_{v(t)} = \Psi_{\mu_1(t)} + \chi(t) - \chi(U_{\mu_1(t)})$$
$$= \Psi(t) + \chi(t) - \chi(U(t))$$
$$= \beta - \overline{\eta}_{v(U(t))} + \chi(t) - \chi(U(t)).$$

Bu şekilde kurulan $\widetilde{\chi}_\beta(t)$ süreci, "β ($\beta > 0$)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" oluşturur. Bu süreci kısaca $\widetilde{\chi}(t)$ ile göstereceğiz. Bu sürecin görünüşlerinden bir tanesi Şekil 24 de görülmektedir.



Şekil 24. β ($\beta > 0$)-seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Şimdi bu $\tilde{\chi}(t)$ sürecine 0 (sıfır)-seviyesinde yansıtan bariyer koyalım. Bunun için önce l_1 , L_1 rastgele değişkenlerini

$$l_1 := \inf\left\{m > 0 : \tilde{\chi}(T_m) \leq 0\right\} \tag{81}$$

$$L_1 := T_{l_1} \tag{82}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre L_1, $\tilde{\chi}(t)$ sürecinin ilk kez 0-bariyerinden, ilk kez yansıma anıdır. φ_1 rastgele değişkenini

$$\varphi_1 := \begin{cases} \gamma_1 \ (\mathrm{mod}\ \beta), & -(2r+1)\beta < \gamma_1' \leq -2r\beta \ ; \ r = 0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma_1 \ , & -2r\beta < \gamma_1' \leq -(2r-1)\beta \ ; \ r = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{83}$$

olarak inşa edelim. Burada,

$$\gamma_1 := |\tilde{\chi}(L_1)| = \left|\ \Psi(L_1) + \chi(L_1) - \chi(U(L_1))\ \right| := |\gamma_1'|$$

dır($\Psi(L_1) = \beta - \overline{\eta}_{v(U(L_1))}$ idi). $\overline{\eta}_{v(L_1)}$, $\eta_{v(L_1)}$ nin $r\beta$ (r=0,1,2,...) bariyerinden yansıma miktarı olmak üzere, her iki durumda da $\varphi_1 = \overline{\eta}_{v(L_1)}$ dir.

Şimdi l_2 , L_2 rastgele değişkenlerini

$$l_2 := \inf\left\{m > l_1 : \varphi_1 + \eta_{v(L_1)+1} + \ldots + \eta_{v(T_m)} \leq 0\right\} \tag{84}$$

$$L_2 := T_{l_2} \tag{85}$$

şeklinde tanımlayalım. Buna göre L_2, $\tilde{\chi}(t)$ sürecinin ilk kez 0-bariyerinden, ikinci kez yansıma anıdır. φ_2 rastgele değişkenini

$$\varphi_2 := \begin{cases} \gamma_2 \ (\mathrm{mod}\ \beta), & -(2r+1)\beta < \gamma_2' \leq -2r\beta \ ; \ r = 0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma_2 \ , & -2r\beta < \gamma_2' \leq -(2r-1)\beta \ ; \ r = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{86}$$

olarak inşa edelim. Burada,

$$\gamma_2 := \left|\ \varphi_1 + \eta_{v(L_1)+1} + \ldots + \eta_{v(L_2)}\ \right| = \left|\ \varphi_1 + \chi(L_2) - \chi(L_1)\ \right| := |\gamma_2'|$$

dır. $\overline{\eta}_{v(L_2)}$, $\eta_{v(L_2)}$ nin $r\beta$ (r=0,1,2,...) bariyerinden yansıma miktarı olmak üzere, her iki durumda da $\varphi_2 = \overline{\eta}_{v(L_2)}$ dir.

Benzer şekilde $k \geq 1$ için

$$l_k := \inf\left\{m > l_{k-1} : \varphi_{k-1} + \eta_{v(L_{k-1})+1} + \ldots + \eta_{v(T_m)} \leq 0\right\} \quad (l_0 := 0) \tag{87}$$

$$L_k := T_{l_k} \quad (L_0 := 0) \tag{88}$$

rastgele değişkenlerini tanımlayalım. Burada L_k, $\tilde{\chi}(t)$ sürecinin ilk kez 0-bariyerinden, k. kez yansıma anıdır. φ_k rastgele değişkenini de

$$\varphi_k := \begin{cases} \gamma_k \ (\mathrm{mod}\ \beta), & -(2r+1)\beta < \gamma'_k \leq -2r\beta \ ; \ r=0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma_k \quad , & -2r\beta < \gamma'_k \leq -(2r-1)\beta \ ; \ r=1,2,3,\ldots \end{cases} \quad (\varphi_0 := 0) \tag{89}$$

olarak inşa edelim. Burada ise

$$\gamma_k := \left| \varphi_{k-1} + \eta_{\nu(L_{k-1})+1} + \ldots + \eta_{\nu(L_k)} \right| = \left| \varphi_{k-1} + \chi(L_k) - \chi(L_{k-1}) \right| := |\gamma'_k| \tag{90}$$

dır. $\overline{\eta}_{\nu(L_k)}$, $\eta_{\nu(L_k)}$ nın $r\beta$ (r=0,1,2,...) bariyerinden yansıma miktarı olmak üzere, her iki durumda da $\varphi_k = \overline{\eta}_{\nu(L_k)}$ dır.

Şimdi aşağıdaki rastgele değişkeni tanımlayalım:

$$\mu_2(t) := \inf\left\{k \geq 0 : L_{k+1} > t\right\}, t > 0 \ ; \ \mu_2(0) := 0 \ . \tag{91}$$

Tanımdan görüldüğü gibi $\mu_2(t)$, $\tilde{\chi}(t)$ sürecinin t zamanı esnasında ilk kez 0-bariyerinden yansımalarının sayısıdır. Kısalık amacıyla

$$L(t) := L_{\mu_2(t)} \ , \ \varphi(t) := \varphi_{\mu_2(t)} \tag{92}$$

notasyonlarını tanımlayalım. Dikkat edilirse L(t),

$$L(t) = \sum_{i : L_i < t} \overline{L}_i \ ; \ \overline{L}_i := L_{i+1} - L_i \ , \ i \geq 0 \tag{93}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\overline{L}_i$ ler bağımsız, aynı tür dağılıma sahip, pozitif değerli rastgele değişkenlerdir. Ayrıca (89) ve (90) den kolayca görüleceği gibi

$$\varphi(t) = \begin{cases} \gamma_{\mu_2(t)} \ (\mathrm{mod}\ \beta), & -(2r+1)\beta < \gamma'_{\mu_2(t)} \leq -2r\beta \ ; \ r=0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma_{\mu_2(t)} \quad , & -2r\beta < \gamma'_{\mu_2(t)} \leq -(2r-1)\beta \ ; \ r=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

olup burada

$$\gamma_{\mu_2(t)} = \left| \varphi_{\mu_2(t)-1} + \eta_{\nu(L_{\mu_2(t)-1})+1} + \ldots + \eta_{\nu(L_{\mu_2(t)})} \right| = \left| \varphi_1 + \chi(L_{\mu_2(t)}) - \chi(L_{\mu_2(t)-1}) \right| = |\gamma'_{\mu_2(t)}|$$

dir ve

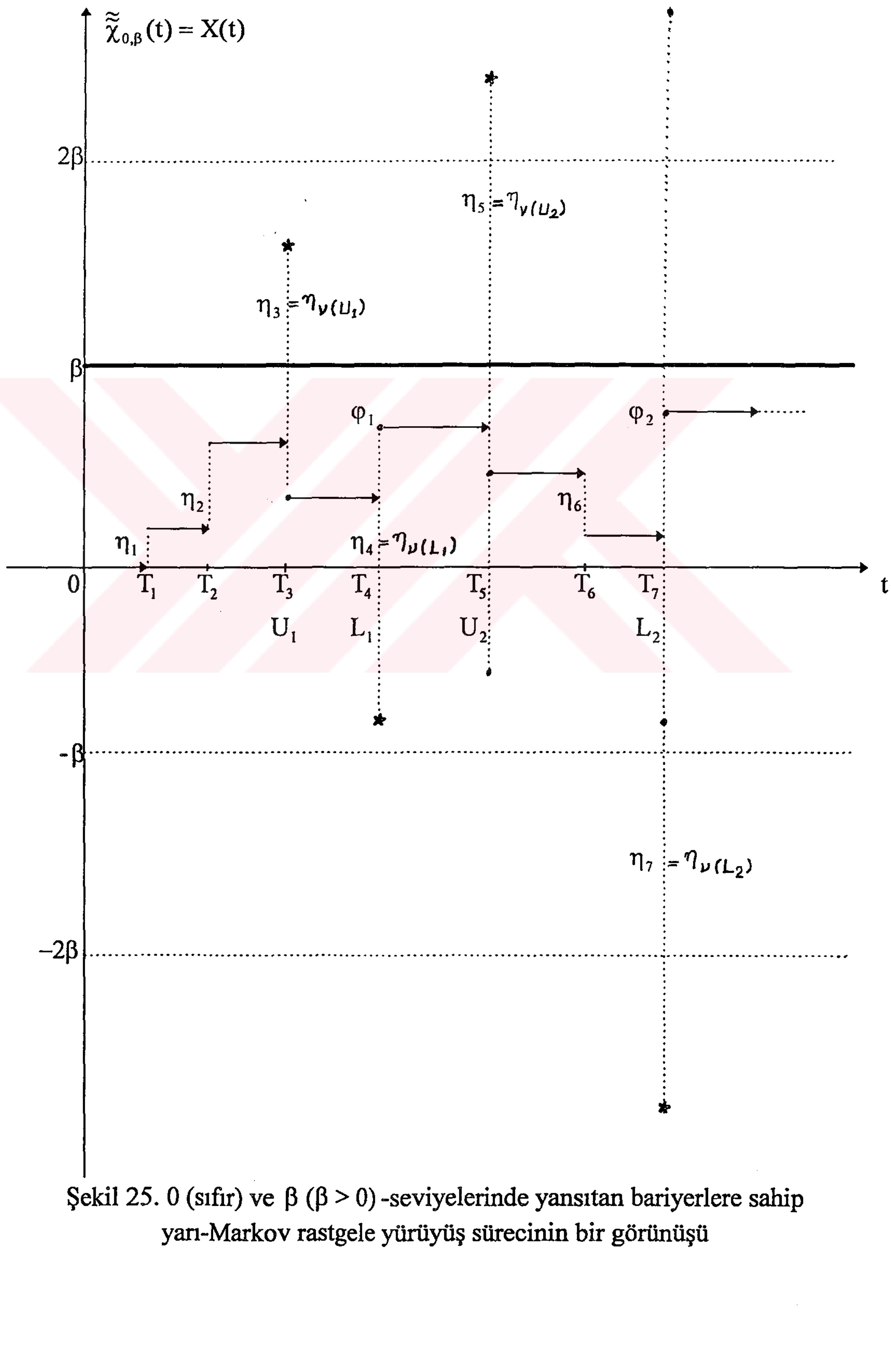
$$\left.\begin{array}{l} \gamma_{\mu_2(t)} (\mathrm{mod}\ \beta) < \eta_{\nu(L_{\mu_2(t)})} \\ 2r\beta - \gamma_{\mu_2(t)} = \beta - [\gamma_{\mu_2(t)} - (2r-1)\beta] < \beta - \eta_{\nu(L_{\mu_2(t)})} \end{array}\right] \tag{94}$$

olduğu açıktır.

Şimdi $\tilde{\tilde{\chi}}_{0,\beta}(t)$ sürecini aşağıdaki şekilde kurabiliriz:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\chi}}_{0,\beta}(t) &= \varphi_{\mu_2(t)} + \eta_{\nu(L_{\mu_2(t)})+1} + \ldots + \eta_{\nu(t)} = \varphi_{\mu_2(t)} + \chi(t) - \chi(L_{\mu_2(t)}) \\ &= \varphi(t) + \chi(t) - \chi(L(t)) \end{aligned} \tag{95}$$

Bu şekilde kurulan $\tilde{\tilde{\chi}}_{0,\beta}(t)$ süreci, "0 (sıfır) ve β (β > 0) -seviyelerinde yansıtan bariyerlere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" oluşturur. Bu süreci kısaca X(t) ile göstereceğiz. Bu sürecin (bu kısımdaki notasyonlar ile) görünüşlerinden bir tanesi Şekil 25 de görülmektedir.



Şekil 25. 0 (sıfır) ve β (β > 0) -seviyelerinde yansıtan bariyerlere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü

Bu kısımda amacımız, ele aldığımız süreç için limit teoremini ifade etmek ve ispatlamak olduğundan, şimdi söz konusu olan sürecin dizisini oluşturalım.

$\left\{(\xi_i^{(n)}, \eta_i^{(n)})\ ; i = 1,2,...\right\}_{n=1}^{\infty}$ aynı (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip rastgele değişkenler çifti dizisi öyleki tüm $\xi_i^{(n)}$ ler pozitif değerli, ayrıca $\xi_i^{(n)}$ ve $\eta_i^{(n)}$ ler de kendi aralarında bağımsız ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\xi_i^{(n)} > \varepsilon\right\} = 0\ ,\ \lim_{n\to\infty} P\left\{|\eta_i^{(n)}| > \varepsilon\right\} = 0 \quad (i=1,2,...) \tag{96}$$

sağlansın.

$$T_k^{(n)} := \sum_{i=1}^{k} \xi_i^{(n)}\ ,\ k \geq 1\ ;\ T_0^{(n)} := 0$$

$$\nu_n(t) := \inf\left\{k \geq 0 : T_{k+1}^{(n)} > t\right\}\ ,\ t > 0\ ;\ \nu_n(0) := 0$$

olmak üzere $\chi_n(t)$ yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri dizisini aşağıdaki şekilde kurabiliriz:

$$\chi_n(t) := \sum_{i=1}^{\nu_n(t)} \eta_i^{(n)}\ ,\ t > 0\ ;\ \chi_n(0) := 0. \tag{97}$$

Şimdi $\widetilde{\chi}_n(t)$ β $(\beta > 0)$-seviyesinde yansıtan bariyere sahip yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçlerinin dizisini kuralım. (70), (71) ve (72) ifadelerinden yararlanarak

$$u_1^{(n)} := \inf\left\{m \geq 1 : \chi_n(T_m^{(n)}) \geq \beta\right\}$$

$$U_1^{(n)} := T_{u_1^{(n)}}^{(n)} = \xi_1^{(n)} + ... + \xi_{u_1^{(n)}}^{(n)}$$

olmak üzere

$$\Psi_1^{(n)} := 2\beta - \chi_n(U_1^{(n)}) =: \beta - \overline{\eta}_{\nu_n(U_1^{(n)})}$$

olur. (73), (74) ve (75) ifadelerinden yararlanarak

$$u_2^{(n)} := \inf\left\{m > u_1^{(n)} : \Psi_1^{(n)} + \eta_{\nu_n(U_1^{(n)})+1}^{(n)} + ... + \eta_{\nu_n(T_m^{(n)})}^{(n)} \geq \beta\right\}$$

$$U_2^{(n)} := T_{u_2^{(n)}}^{(n)}$$

olmak üzere

$$\Psi_2^{(n)} := 2\beta - \left[\Psi_1^{(n)} + \eta_{\nu_n(U_1^{(n)})+1}^{(n)} + ... + \eta_{\nu_n(U_2^{(n)})}^{(n)}\right]$$

olur.

Benzer şekilde (76), (77) ve (78) ifadelerinden yaralanarak, $k \geq 1$ için

$$u_k^{(n)} := \inf\left\{m > u_{k-1}^{(n)} : \Psi_{k-1}^{(n)} + \eta^{(n)}_{\nu_n(U_{k-1}^{(n)})+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{\nu_n(T_m^{(n)})} \geq \beta\right\} \quad \left(u_0^{(n)} := 0\right)$$

$$U_k^{(n)} := T^{(n)}_{u_k^{(n)}} \quad \left(U_0^{(n)} := 0\right)$$

olmak üzere

$$\Psi_k^{(n)} := 2\beta - \left[\Psi_{k-1}^{(n)} + \eta^{(n)}_{\nu_n(U_{k-1}^{(n)})+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{\nu_n(U_k^{(n)})}\right]$$

$$= 2\beta - \left[\Psi_{k-1}^{(n)} + \chi_n(U_k^{(n)}) - \chi_n(U_{k-1}^{(n)})\right] \tag{98}$$

$(\Psi_0^{(n)} := 0)$ elde edilir. Şimdi (79) ve (80) ifadelerinden yararlanarak

$$\mu_1^{(n)}(t) := \inf\left\{k \geq 0 : U_{k+1}^{(n)} > t\right\}, t > 0 \ ; \ \mu_1^{(n)}(0) := 0$$

$$U_n(t) := U^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)} \ , \ \Psi_n(t) := \Psi^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)}$$

tanımlayalım. (98) ifadesinden kolayca görüleceği gibi

$$\Psi_n(t) = 2\beta - \left[\Psi^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)-1} + \chi_n(U^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)}) - \chi_n(U^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)-1})\right] \tag{99}$$

dir. Burada belirtelimki

$$U_n(t) = \sum_{i : U_i^{(n)} < N_n . t} \overline{U}_i^{(n)} \ ; \ \overline{U}_i^{(n)} := U_{i+1}^{(n)} - U_i^{(n)} \ , \ i \geq 0 \quad (U_0^{(n)} = 0)$$

ve $\overline{U}_i^{(n)}$ ler bağımsız, aynı tür dağılıma sahip, pozitif değerli rastgele değişkenler olup $n \to \infty$ iken $N_n \to \infty$ dir.

Şimdi $\tilde{\chi}_n(t)$ süreç dizisini aşağıdaki şekilde kurabiliriz:

$$\tilde{\chi}_n(t) = \Psi^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)} + \eta^{(n)}_{\nu_n\left(U^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)}\right)+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{\nu_n(t)} = \Psi^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)} + \chi_n(t) - \chi_n(U^{(n)}_{\mu_1^{(n)}(t)})$$

$$= \Psi_n(t) + \chi_n(t) - \chi_n(U_n(t))$$

$$= \beta - \overline{\eta}^{(n)}_{\nu_n(U_n(t))} + \chi_n(t) - \chi_n(U_n(t)).$$

Burada $\Psi_n(t)$ ve $\chi_n(t)$, sırasıyla (99) ve (97) de verildiği gibidir.

Şimdi bu $\tilde{\tilde{\chi}}_n(t)$ süreç dizisini kuralım. (81), (82) ve (83) ifadelerinden yararlanarak,

$$l_1^{(n)} := \inf\left\{m > 0 : \tilde{\chi}_n(T_m^{(n)}) \leq 0\right\}$$

$$L_1^{(n)} := T^{(n)}_{l_1^{(n)}} = \xi_1^{(n)} + \ldots + \xi^{(n)}_{l_1^{(n)}}$$

olmak üzere

$$\varphi_1^{(n)} := \begin{cases} \gamma_1^{(n)} \pmod \beta\,, & -(2r+1)\beta < \gamma_1'^{(n)} \le -2r\beta \;;\; r=0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma_1^{(n)} \,, & -2r\beta < \gamma_1'^{(n)} \le -(2r-1)\beta \;;\; r=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

olur. Burada

$$\gamma_1^{(n)} := |\tilde{\chi}_n(L_1)| =: |\gamma_1'^{(n)}|$$

dır. Yine her iki durumda da $\varphi_1^{(n)} = \overline{\eta}^{(n)}_{\nu_n(L_1^{(n)})}$ olduğu açıktır. Burada $\overline{\eta}^{(n)}_{\nu_n(L_1^{(n)})}$, $\eta^{(n)}_{\nu_n(L_1^{(n)})}$ nin $r\beta$ ($r=0,1,2,\ldots$) bariyerinden yansıma miktarıdır.

(84), (85) ve (86) ifadelerinden yaralanarak

$$l_2^{(n)} := \inf\left\{ m > l_1^{(n)} : \varphi_1^{(n)} + \eta^{(n)}_{\nu_n(L_1^{(n)})+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{\nu_n(T_m^{(n)})} \le 0 \right\}$$

$$L_2^{(n)} := T^{(n)}_{l_2^{(n)}}$$

olmak üzere

$$\varphi_2^{(n)} := \begin{cases} \gamma_2^{(n)} \pmod \beta\,, & -(2r+1)\beta < \gamma_2'^{(n)} \le -2r\beta \;;\; r=0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma_2^{(n)} \,, & -2r\beta < \gamma_2'^{(n)} \le -(2r-1)\beta \;;\; r=1,2,3,\ldots \end{cases}$$

olur. Burada

$$\gamma_2^{(n)} := \left| \varphi_1^{(n)} + \eta^{(n)}_{\nu_n(L_1^{(n)})+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{\nu_n(L_2^{(n)})} \right| =: |\gamma_2'^{(n)}|$$

olup her iki durumda da $\varphi_2^{(n)} = \overline{\eta}^{(n)}_{\nu_n(L_2^{(n)})}$ olduğu açıktır. Burada $\overline{\eta}^{(n)}_{\nu_n(L_2^{(n)})}$, $\eta^{(n)}_{\nu_n(L_2^{(n)})}$ nin $r\beta$ ($r=0,1,2,\ldots$) bariyerinden yansıma miktarıdır.

Benzer şekilde (87), (88), (89) ve (90) ifadelerinden yaralanarak, $k \ge 1$ için

$$l_k^{(n)} := \inf\left\{ m > l_{k-1}^{(n)} : \varphi_{k-1}^{(n)} + \eta^{(n)}_{\nu_n(L_{k-1}^{(n)})+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{\nu_n(T_m^{(n)})} \le 0 \right\} \quad \left(l_0^{(n)} := 0 \right)$$

$$L_k^{(n)} := T^{(n)}_{l_k^{(n)}} \quad \left(L_0^{(n)} := 0 \right)$$

olmak üzere

$$\varphi_k^{(n)} := \begin{cases} \gamma_k^{(n)} \pmod \beta\,, & -(2r+1)\beta < \gamma_k'^{(n)} \le -2r\beta \;;\; r=0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma_k^{(n)} \,, & -2r\beta < \gamma_k'^{(n)} \le -(2r-1)\beta \;;\; r=1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{100}$$

elde edilir, burada

$$\gamma_k^{(n)} := \left| \varphi_{k-1}^{(n)} + \eta^{(n)}_{\nu_n(L_{k-1}^{(n)})+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{\nu_n(L_k^{(n)})} \right| =: |\gamma_k'^{(n)}|$$

dir. Her iki durumda da $\varphi_k^{(n)} = \overline{\eta}^{(n)}_{\nu_n(L_k^{(n)})}$ olduğu açıktır. Burada $\overline{\eta}^{(n)}_{\nu_n(L_k^{(n)})}$, $\eta^{(n)}_{\nu_n(L_k^{(n)})}$ nin $r\beta$ ($r=0,1,2,\ldots$) bariyerinden yansıma miktarıdır.

Şimdi (91) ve (92) ifadelerinden yararlanarak

$$\mu_2^{(n)}(t) := \inf\left\{k \ge 0 : L_{k+1}^{(n)} > t\right\}, t > 0 \ ; \ \mu_2^{(n)}(0) := 0$$

$$L_n(t) := L^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} \ , \ \varphi_n(t) := \varphi^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)}$$

tanımlayalım. (100) ifadesinden kolayca görüleceği gibi

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \gamma^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} \ (\bmod \beta), & -(2r+1)\beta < \gamma'^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} \le -2r\beta \ ; \ r = 0,1,2,\ldots \\ 2r\beta - \gamma^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} \ , & -2r\beta < \gamma'^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} \le -(2r-1)\beta \ ; \ r = 1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{101}$$

dir, burada

$$\gamma^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} := \left| \varphi^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)-1} + \eta^{(n)}_{v_n\left(L^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)-1}\right)+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{v_n\left(L^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)}\right)} \right| =: \left|\gamma'^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)}\right| \tag{102}$$

olup

$$2r\beta - \gamma^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} = \beta - \left[\tilde{\chi}_n\left(L^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)-1}\right) - (2r-1)\beta\right],$$

$\eta^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)}$ uzunluğunun bir parçasıdır. Ayrıca (92) deki düşünce ile $L_n(t)$

$$L_n(t) = \sum_{i : L_i^{(n)} < N_n . t} \overline{L_i^{(n)}} \ ; \ \overline{L_i^{(n)}} := L_{i+1}^{(n)} - L_i^{(n)} \ , \ i \ge 0 \ \ (L_0^{(n)} = 0)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\overline{L_i^{(n)}}$ ler bağımsız, aynı tür dağılıma sahip, pozitif değerli rastgele değişkenler olup $n \to \infty$ iken $N_n \to \infty$ dir.

Bunlardan sonra (95) ifadesinin yardımıyla $\tilde{\tilde{\chi}}_n(t)$ süreç dizisini aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{\chi}}_n(t) &= \varphi^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} + \eta^{(n)}_{v_n\left(L^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)}\right)+1} + \ldots + \eta^{(n)}_{v_n(t)} \\ &= \varphi^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} + \chi_n(t) - \chi_n(L^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)}) \\ &= \varphi_n(t) + \chi_n(t) - \chi_n(L_n(t)). \end{aligned} \tag{103}$$

Bu şekilde tanımlı $\tilde{\tilde{\chi}}_n(t)$, β- ve 0-seviyelerinde yansıtan bariyerlere sahip bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci dizisi olur. Bu süreç dizisini kısaca $X_n(t)$ ile göstereceğiz.

2.6.2. Limit Teoremi

Bariyersiz $\chi_n(t)$ süreç dizisi için limit teoremi, yani bu sürecin belirli koşullar altında bir Y(t) sürecine yakınsadığı ispatlanmıştır ([9]). Biz iki yansıtan bariyerli $\tilde{\tilde{\chi}}_n(t) = X_n(t)$ süreç dizisinin yakınsaklığı hakkındaki teoremi ifade edeceğiz ve ispatlayacağız. Bundan önce, gerekli bazı kavramları ekleyelim.

Önce aşağıdaki $\xi(t)$ yenileme sürecini ve $\eta(t)$ rastgele yürüyüş sürecini

$$\xi(t) := \sum_{i:i<t} \xi_i \ , \ \eta(t) := \sum_{i:i<t} \eta_i \tag{104}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca

$$\xi^{-1}(t) := s \ , \text{ eğer } \xi(s-0) \le t < \xi(s) \text{ ise,}$$

olsun. Böylece (69) ve (104) ifadeleri dikkate alınırsa $\chi(t)$ bariyersiz süreci

$$\chi(t) = \sum_{i=1}^{\nu(t)} \eta_i = \sum_{i:i\le\nu(t)} \eta_i = \sum_{i:i<\xi^{-1}(t)} \eta_i = \eta(\xi^{-1}(t))$$

şeklinde yazılabilir. Sonuç olarak $\chi(t)$ süreci,

$$\chi(t) = \eta(\xi^{-1}(t)) \ ; \ \xi^{-1}(t) = s \ , \text{ eğer } \xi(s-0) \le t < \xi(s) \text{ ise,}$$

şeklinde ifade edilebilir. Benzer düşünce ile, $\chi_n(t)$ süreç dizisi de

$$\chi_n(t) = \eta_n(\xi_n^{-1}(t)) \ ; \ \xi_n^{-1}(t) = s \ , \text{ eğer } \xi_n(s-0) \le t < \xi_n(s) \text{ ise,}$$

şeklinde yazılabilir.

Bunlardan sonra aşağıdaki teorem ispatlanabilir:

Teorem 5. $\chi_n(t)$ süreç dizisinin sonlu boyutlu dağılımları bir Y(t) sürecinin sonlu boyutlu dağılımlarına yakınsasın. Yani $\chi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y(t)$ olsun.

Bu takdirde bağımsız artımlı, homojen bir $\breve{\eta}(t)$ süreci ve bağımsız artımlı, pozitif, kırılan bir $\breve{\xi}(t)$ süreci vardır ve bu süreçler birbirinden bağımsızdır öyleki, Y(t) limit süreci aşağıdaki gibidir:

$$Y(t) = \breve{\eta}(\breve{\xi}^{-1}(t)), \text{ burada } \breve{\xi}^{-1}(t) = s \ , \text{ eğer } \breve{\xi}(s-0) \le t < \breve{\xi}(s) \text{ ise,}$$

dir ([9]).

Bu teoremin ispatı incelenirse aşağıdakiler görülür:

$\breve{\eta}(t)$, $\eta_n(t) = \sum_{i:i<N_n \cdot t} \eta_i^{(n)}$ süreç dizisinin dağılıma göre limit sürecidir.

$\breve{\xi}(t)$, $\xi_n(t) = \sum_{i:i<N_n \cdot t} \xi_i^{(n)}$ süreç dizisinin dağılıma göre limit sürecidir.

$\breve{\xi}^{-1}(t)$, $\xi_n^{-1}(t)$ süreç dizisinin dağılıma göre limit sürecidir.

Şimdi bu kısmın esas teoremini verelim.

Teorem 6. $\chi_n(t)$ süreç dizisi olasılığa göre sınırlı ve

$$\chi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y(t) \;,\; X_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} X(t) \text{ olsun.}$$

Bu takdirde bağımsız artımlı, homojen bir $\breve{\eta}(t)$ süreci ve bağımsız artımlı, pozitif, kırılan $\breve{\xi}(t)$, $\breve{L}(t)$ süreçleri vardır ve bunlar birbirinden bağımsızdır öyleki, $\tilde{\tilde{\chi}}_n(t) = X_n(t)$ süreç dizisinin limit süreci $\tilde{\tilde{\chi}}(t) = X(t)$ aşağıdaki gibidir:

$$X(t) = \begin{cases} Y(t) - Y(\breve{L}(t)) & , p \\ \beta + Y(t) - Y(\breve{L}(t)) & , q \end{cases} \tag{105}$$

burada

$$Y(t) = \breve{\eta}(\breve{\xi}^{-1}(t)) \;;\; \breve{\xi}^{-1}(t) = s, \text{ eğer } \breve{\xi}(s-0) \le t < \breve{\xi}(s) \text{ ise},$$

ve

$$p = \sum_{r=0}^{\infty} P\left\{-(2r+1)\beta < \tilde{\chi}(L_1) \le -2r\beta\right\} \;,\; q = \sum_{r=0}^{\infty} P\left\{-2r\beta < \tilde{\chi}(L_1) \le -(2r-1)\beta\right\}$$

şeklindedir.

İspat. $X_n(t)$ süreç dizisinin, (103) gereğince

$$X_n(t) = \varphi_n(t) + \chi_n(t) - \chi_n(L_n(t))$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz.

i) (101) ve (96) ifadeleri gereğince

$$\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \begin{cases} 0 \,, & -(2r+1)\beta < \gamma'^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} \le -2r\beta \;;\; r = 0,1,2,\dots \\ \beta \,, & -2r\beta < \gamma'^{(n)}_{\mu_2^{(n)}(t)} \le -(2r-1)\beta \;;\; r = 1,2,3,\dots \end{cases} \tag{106}$$

olduğu görülür.

ii) $\chi_n(t) \xrightarrow[n\to\infty]{d} Y(t)$ olduğundan Teorem 5 gereğince, bağımsız artımlı, homojen bir $\breve{\eta}(t)$ süreci ve bağımsız artımlı, pozitif, kırılan bir $\breve{\xi}(t)$ süreci vardır ve bunlar birbirinden bağımsızdır öyleki, Y(t) limit süreci

$$Y(t) = \breve{\eta}(\breve{\xi}^{-1}(t)) \ , \ \text{burada } \breve{\xi}^{-1}(t) = s \ , \ \text{eğer } \breve{\xi}(s-0) \le t < \breve{\xi}(s) \text{ ise,} \tag{107}$$

şeklindedir.

iii) Şimdi $L_n(t)$ süreç dizisinin limit sürecini belirlemeliyiz. Daha önceden,

$$L_n(t) = \sum_{i\,:\,L_i^{(n)} < N_n . t} \overline{L}_i^{(n)} \ ; \ \overline{L}_i^{(n)} := L_{i+1}^{(n)} - L_i^{(n)} \ , \ i \ge 0 \quad (L_0^{(n)} = 0)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi

$$Z_n(t) = e^{-L_n(t)} = e^{-\sum\limits_{i\,:\,L_i^{(n)} < N_n . t} \overline{L}_i^{(n)}} \ge 0$$

süreç dizisini düşünelim.

<u>İddia I.</u> $n \in \mathrm{IN}$ keyfi ve sabit olmak üzere, $Z_n(t)$ bir multiplikatif süreçtir.

Bunun için aşağıdaki iki özelliğin sağlandığını göstermeliyiz:

$$Z_n(t) := Z_n([0,t)) \ \text{ve} \ Z_n([a,b)) := \frac{Z_n([0,b))}{Z_n([0,a))} = \frac{Z_n(b)}{Z_n(a)}$$

ve $a, b, c \in \mathrm{IR}^+$, $a \ne b \ne c$ olmak üzere keyfi $\Delta_1 = [a,b)$, $\Delta_2 = [b,c)$, $\Delta_3 = [a,c)$ ayrık aralıkları için

1) $Z_n(\Delta_1)$, $Z_n(\Delta_2)$, $Z_n(\Delta_3)$ rastgele değişkenleri bağımsızdır.

2) $Z_n(\Delta_3) = Z_n(\Delta_1).Z_n(\Delta_2)$ dir.

Burada, $\Delta \subset (o,+\infty)$ olmak üzere, $Z_n(\Delta) = e^{-L_n(\Delta)} = e^{-\sum\limits_{i\,:\,i/N_n \in \Delta} \overline{L}_i^{(n)}}$ şeklinde yazılabilir.

$$1)\ P\left\{Z_n(\Delta_1) < x \ ; \ Z_n(\Delta_2) < y\right\} = P\left\{e^{-\sum\limits_{i\,:\,i/N_n \in \Delta_1} \overline{L}_i^{(n)}} < x \ ; \ e^{-\sum\limits_{i\,:\,i/N_n \in \Delta_2} \overline{L}_i^{(n)}} < y\right\}$$

$$= P\left\{e^{-\sum\limits_{i\,:\,i/N_n \in \Delta_1} \overline{L}_i^{(n)}} < x\right\}. \ P\left\{e^{-\sum\limits_{i\,:\,i/N_n \in \Delta_2} \overline{L}_i^{(n)}} < y\right\}$$

$$= P\left\{Z_n(\Delta_1) < x\right\}. \ P\left\{Z_n(\Delta_2) < y\right\}$$

olduğundan $Z_n(\Delta_1)$, $Z_n(\Delta_2)$ rastgele değişkenleri bağımsızdır. Benzer şekilde $Z_n(\Delta_1)$, $Z_n(\Delta_3)$ ve $Z_n(\Delta_2)$, $Z_n(\Delta_3)$ rastgele değişkenlerinin de bağımsızlığı görülür.

2) Üstel fonksiyonun $e^x.e^y = e^{x+y}$ özelliğinden kolayca elde edilir.

Böylece, keyfi ve sabit bir $n \in \mathbb{N}$ için $Z_n(t) = e^{-L_n(t)}$ nin bir multiplikatif süreç olduğunu göstermiş olduk.

<u>İddia II.</u> $n \in \mathbb{N}$ keyfi ve sabit olmak üzere, $-\log Z_n(t) = L_n(t)$ bir kırılan süreçtir.

Bunun için aşağıdaki dört özelliğin sağlandığını göstermeliyiz:

1) $L_n(t)$, $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ de artımları bağımsız olan homojen bir Markov sürecidir.

2) ∞, $L_n(t)$ sürecinin bir yutan durumudur.

3) Her $A \subset \mathbb{R}$ Borel kümesi için $P\{t,x,A\} = P\{t,0,A_{-x}\}$ dir.

4) $P\{t,x,\{\infty\}\}$ olasılığı x den bağımsızdır.

(Burada $P(t,x,A) := P\{L_n(t) \in A \mid L_n(0) = x\}$ ve $A_{-x} := \{y \mid x + y \in A\}$ ile tanımlıdır).

1) $L_n(t)$ sürecinin kuruluşundan dolayı aşikardır.

2) t, $L_n(t) = -\log Z_n(t)$ süreç dizisinin bir yutan durumu olsun. O halde

$$L_n(t) = -\log Z_n(t) = \log \frac{1}{Z_n(t)} = \infty$$

yazılabilir. Buradan

$$Z_n(t) = e^{-L_n(t)} = \frac{1}{e^{\sum_{i:L_i^{(n)}<N_n.t} \overline{L}_i^{(n)}}} = 0 \Leftrightarrow e^{\sum_{i:L_i^{(n)}<N_n.t} \overline{L}_i^{(n)}} = +\infty \Leftrightarrow \sum_{i:L_i^{(n)}<N_n.t} \overline{L}_i^{(n)} \to +\infty \Leftrightarrow t = +\infty$$

elde edilirki bu da istenilendir.

3) $P(t,0,A_{-x}) := P\{L_n(t) \in A_{-x} \mid L_n(0) = 0\}$, $\quad$ ($A \subset R$ keyfi bir Borel kümesi)

$$= P\{x + L_n(t) \in A \mid L_n(0) = 0\}$$

$$= P\{L_n(t) \in A \mid L_n(0) = x\} =: P\{t,x,A\}.$$

4) $P\{t,x,\{\infty\}\} := P\{L_n(t) \in \{\infty\} \mid L_n(0) = x\}$

$$= P\{x + L_n(t) \in \{\infty\} \mid L_n(0) = 0\}$$

$$= P\{L_n(t) = \infty - x \mid L_n(0) = 0\}$$

$$= P\{L_n(t) = \infty \mid L_n(0) = 0\}$$

olup $P\{L_n(t)=\infty \mid L_n(0)=0\}$ olasılığı x den bağımsız olduğundan $P\{t,x,\{\infty\}\}$ olasılığı da x den bağımsızdır.

Böylece, keyfi ve sabit bir $n\in IN$ için, $L_n(t)$ nin bir kırılan süreç olduğunu göstermiş olduk.

İddia I ve İddia II nin sonucu olarak, bir $\{n_m\}\subset IN$ alt dizisi vardır öyleki $L_{n_m}(t)$, bağımsız artımlı, pozitif ve kırılan bir $\breve{L}(t)$ sürecine, dağılıma göre yakınsayacaktır ([9]).

Bu ve (106), (107) ile istenilen (105) sonucu elde edilir. Böylece Teorem 6 nın ispatı tamamlanmış olur. //

Örnek. $b\in IR$ ve $c,d,\delta\in IR^+$ olmak üzere

$$E\left[\xi_k^{(n)}\right]=\frac{d}{n}\ ,\ E\left[\left(\xi_k^{(n)}\right)^{1+\delta}\right]=O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$E\left[\eta_k^{(n)}\right]=\frac{b}{n}\ ,\ V\left[\eta_k^{(n)}\right]=\frac{c}{n}\ ,\ E\left[\left|\eta_k^{(n)}\right|^{2+\delta}\right]=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

olduğunu varsayalım. Bu takdirde

$$\sum_{k\le n.t}\xi_k^{(n)}\ \underset{n\to\infty}{\overset{p}{\to}}\ \xi(t)=d.t$$

ve W(t) bir Wiener süreci olmak üzere

$$\sum_{k\le n.t}\eta_k^{(n)}\ \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\to}}\ \eta(t)=b.t+\sqrt{c}\,W(t)$$

olduğu bilinmektedir. Ayrıca $\xi^{-1}(t)=\dfrac{t}{d}$ olduğu açıktır. Böylece Y(t) limit süreci aşağıdaki şekilde olacaktır:

$$Y(t)=\eta(\xi^{-1}(t))=\eta\left(\frac{t}{d}\right)=b\frac{t}{d}+\sqrt{c}\,W\left(\frac{t}{d}\right)=\frac{b}{d}t+\sqrt{\frac{c}{d}}\,W(t). \tag{108}$$

Şimdi $\breve{L}(t)$ sürecini belirlemeliyiz. Bu süreç $\xi(t)$ formundadır. Biz

$$E\left[\breve{L}_k^{(n)}\right]=\frac{\alpha}{n};\ \alpha>d$$

ifadesindeki α yı bilmeliyiz. $E\left[L_1^{(n)}\right]$ yi hesaplamak stokastik süreçler teorisinde zor problemlerden bir tanesidir. Ancak α nın, $n \to \infty$ için d den çok az bir farkı olduğu bilinmektedir ([5]). Böylece $\breve{L}(t) = \alpha t$ alınabilir. Bu değer (108) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} Y(\breve{L}(t)) = Y(\alpha t) = \eta\left(\xi^{-1}(\alpha t)\right) = \eta\left(\frac{\alpha t}{d}\right) \\ = b\frac{\alpha t}{d} + \sqrt{c}\, W\left(\frac{\alpha t}{d}\right) \\ = \frac{b}{d}\alpha t + \sqrt{\frac{c}{d}}\frac{W(t)}{\sqrt{\alpha}} \\ = \frac{b}{d}\alpha t + \sqrt{\frac{c}{\alpha d}}W(t) \end{aligned} \tag{109}$$

olur. Sonuç olarak (108) ve (109) ifadeleri ile

$$\begin{aligned} Y(t) - Y(\breve{L}(t)) &= \left[\frac{b}{d}t + \sqrt{\frac{c}{d}}W(t)\right] - \left[\frac{b}{d}\alpha t + \sqrt{\frac{c}{\alpha d}}W(t)\right] \\ &= \frac{b}{d}(1-\alpha)t + \sqrt{\frac{c}{d}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)W(t) \end{aligned}$$

olacağından, bu ifade (105) ile verilen

$$X(t) = \begin{cases} Y(t) - Y(\breve{L}(t)) & , p \\ \beta + Y(t) - Y(\breve{L}(t)) & , q \end{cases}$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$X(t) = \begin{cases} \dfrac{b}{d}(1-\alpha)t + \sqrt{\dfrac{c}{d}}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)W(t) & , p \\ \beta + \dfrac{b}{d}(1-\alpha)t + \sqrt{\dfrac{c}{d}}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)W(t) & , q \end{cases}$$

elde edilir. //

3. SONUÇLAR VE BULGULAR

Bu çalışmada stok kontrol, kuyruk ve güvenilirlik teorilerindeki önemli bazı problemlerin çözümlenmesinde kullanılabilecek olan özel bir stokastik süreç ele alınmıştır. Sayılamaz durum uzayına sahip "iki yansıtan bariyerli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" adını verdiğimiz ve X(t) ile gösterdiğimiz bu süreç, olasılık karakteristikleri iyi bilinen bir $\{T_n\}_{n\geq 0}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak kurulmuş ve bu süreç ile ilgili aşağıdaki teorik sonuçlar elde edilmiştir:

1. Sürecin önemli bir sınır fonksiyonali olan aşağı yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anına kadarki sıçrama sayısı ν_1 ile, X(t) sürecini oluşturan $\{X_n\}_{n\geq 0}$ yarı-Markov zinciri arasındaki birleşik dağılım fonksiyonu, $\{T_n\}_{n\geq 0}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin belirli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir.

2. ν_1 rastgele değişkeninin bir boyutlu dağılım fonksiyonu belirlenmiş, beklenen değeri ve varyansı hesaplanmıştır.

3. Sürecin önemli bir sınır fonksiyonali olan aşağı yansıtan bariyerden ilk kez yansıma anı, diğer bir deyişle ilk kez 0 (sıfır)-seviyesine düşme anı τ_1 ile, X(t) sürecinin t anındaki değeri arasındaki birleşik dağılım fonksiyonu belirlenmiş ve bu fonksiyonun Laplace dönüşümü, $\{T_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ süreçlerinin belirli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir.

4. τ_1 rastgele değişkeninin bir boyutlu dağılım fonksiyonu belirlenmiş, beklenen değeri ve varyansı hesaplanmış, yüksek mertebeden momentleri için bir formül elde edilmiştir.

5. Sürecin bir boyutlu dağılım fonksiyonu yine $\{T_n\}_{n\geq o}$ ve $\{Y_n\}_{n\geq o}$ süreçlerinin belirli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Ayrıca iki sıçrama anı arasındaki sürenin üstel ve Erlang dağılımlarına sahip olması özel durumlarında, bu dağılım fonksiyonu için aşikar formüller verilmiştir.

6. En genel şartlar altında, sürecin ergodik olduğu ispatlanmış ve sürecin ergodik olması durumunda, en genel ergodik dağılım fonksiyonu da yine $\{T_n\}_{n\geq o}$ ve $\{Y_n\}_{n\geq o}$ süreçlerinin belirli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir.

7. Süreç için limit teoremi ifade ve ispat edilmiştir.

4. İRDELEME

Çalışmada ele alınan stokastik süreç sayılamaz durum uzayına sahip özel bir rastgele yürüyüş süreci olup süreç en genel şekilde ele alınmıştır. Süreç, iki bariyerli ve bariyerlerin ikisi de yansıtan olduğundan, ilginç ve bazen de karmaşıktır. Örneğin sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarının hesaplanmasındaki zorluk ve karmaşıklık, ele alınan modelde iki yansıtan bariyer bulunmasından kaynaklanmaktadır. (β ($\beta > 0$) -seviyesindeki bariyerin tutan olması durumunda bu hesaplamalar, buradakine göre daha kolaydır (bkz. [77])). Kaynaklanan bu zorluklara bakmayarak, burada X(t) sürecinin, bir çok durumlarda olduğu gibi Laplace dönüşümü değil, bir boyutlu dağılım fonksiyonunun kendisi hesaplanmıştır.

Ele alınan sürecin bir başka özelliği ise sürecin yarı-Markovluk özelliğine sahip olmasıdır. Bir başka deyişle, sadece sıçrama anları dikkate alındığında, sürecin Markov özelliğine sahip olmasıdır. Çalışma bu özellikleri ile literatürde yapılmış olanlardan farklıdır ve bu nedenle de oldukça önemlidir.

Çalışmada sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonları ve en genel ergodik dağılım fonksiyonu bir $\{T_n\}_{n\geq 0}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ rastgele yürüyüş sürecinin belli olasılık karakteristikleri yardımıyla ifade edilmiştir. Ancak bunlar teorik ve kullanılması oldukça güç ifadelerdir. Bu nedenle bazı hesaplamaları daha kolay yapabilmek için dağılım fonksiyonunu hesaplamaksızın onun Laplace dönüşümünü hesaplamak ve onunla çalışmak da mümkündür. Hatta çalışmada verilen sınır fonksiyonallerinin de Laplace dönüşümlerini hesaplamak ve bu dönüşümleri kullanarak bu fonksiyonallerin yüksek mertebeden momentlerini hesaplamak, bu sınır fonksiyonallerinin dağılımlarını kullanmaktan daha kolay olabilir.

Yeni bir çalışma olmasına rağmen, çalışmada bazı değişiklikler yapmak ve varsayımlarla oynamak mümkündür. Örneğin bariyerlerin yerleri ve tipleri şu şekilde değiştirilebilir: Yansıtan bariyerler 0 (sıfır) ve $-\beta$ $(\beta > 0)$ seviyelerinde olabilir (ki bu bizim sürecimizin eksi işaretlisi olacaktır) veya 0 (sıfır)-seviyesinde tutan, β $(\beta > 0)$ -seviyesinde yansıtan bariyer olabilir. Ayrıca $\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,\ldots\}$ rastgele değişkenler çifti dizisi üzerindeki varsayımları da değiştirmek mümkündür: Aynı sistemin, aynı dağılıma uygun olarak çalışması, beklenen bir durum olmasına rağmen dizinin aynı dağılıma sahip olması varsayımı değiştirilebilir veya bağımsızlık varsayımı kaldırılabilir (ki bu durumlarda çalışma daha da güçleşecektir). Yani ele alınacak probleme uygun olarak bariyerleri değiştirmek veya varsayımlar üzerinde değişiklikler yapmak suretiyle yeni problemler ortaya çıkarılabilir.

5. ÖNERİLER

Bu çalışmada ele alınan konunun aşağıdaki şekilde geliştirilmesi mümkündür:

1. $\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,\ldots\}$ rastgele değişkenler çifti dizisinin bileşenlerinin bağımlı olması durumunda sürecin yeniden ele alınması ve benzer çalışmaların yapılması.

2. Sürecin bariyerlerinin değiştirilmesi. Örneğin, 0 (sıfır)-seviyesinde tutan, β $(\beta > 0)$-seviyesinde yansıtan bariyer olması veya yansıtan bariyerlerin $-\beta$ ve β seviyelerinde olması durumunda benzer incelemelerin yapılması.

3. Süreçle ilgili bazı sayısal karakteristiklerin hesaplanması için gerekli olan bilgisayar programlarının geliştirilmesi.

4. Çalışmada ele alınan özel dağılımların (üstel, Erlang) dışındaki bazı dağılımlar için de benzer hesaplamaların yapılması.

5. Çalışmada teorik olarak elde edilen sonuçların bazı yaklaşık değerlerinin, simülasyon metodlarını da kullanarak, hesaplanması. Ayrıca bu sonuçların uygulanabileceği alanların tespit edilmesi ve uygulanması.

6. Ele alınacak olan sürecin dağılım fonksiyonunun hesaplanmasının güç olduğu durumlarda, dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümünün hesaplanması.

7. En genel şekilde ele alınan bu çalışmanın, özel durumlara indirgenmesi. Örneğin, $\{(\xi_i, \eta_i)\ ;\ i = 1,2,\ldots\}$ rastgele değişkenler çifti dizisinin dağılım tipini üstel, poisson, normal, v.s. olarak alıp çalışmadaki sonuçların özel durumlarının elde edilmesi.

8. Sürecin asimtotik davranışının incelenmesi.

6. KAYNAKLAR

1. Levy, P., Processus Semi - Markoviens, Proc. III. Internat. Congr. Math., 1954 Amsterdam, 416-426.

2. Smith, W. L., Regenerative Stochastic Processes, Proc. Roy. Soc. Edinburg Ser. A, 232 (1955) 6-31.

3. Takacs, L., Bizonyus Tipusu Requrren Sztochasztikus Folyamotok Vizsgalatarol Magyartud. Akad. Math. Kutato. Int. Kozl., k3, 1954, 1-2.

4. Çınlar, E., Some Joint Distributions for Markov Renewal Processes, Austral. J. Stat., 10 (1968) 1.

5. Gihman, I. I. ve Skorohod, A. V., Theory of Stochastic Processes 2, Springer-Verlag, New York, 1975.

6. Serfoza, R. F., Functions of Semi-Markov Processes, SIAM J. Appl. Math., 20 (1971) 3.

7. Ezhov, I. I. ve Koroljuk, V. S., Semi-Markovian Processes and Their Applications (Russian), Cybernetica, 5, Kiev 1967, 58-65.

8. Shurenkov, V. M., Ergodik Markov Processes (Russian), Ed. By A. N. Kolmogorov, Teoriya Veroyatnostej i Matematichheskaya Statistika, 41, Moskva: Nauka, 1987.

9. Nasirova, T. H., Processes of Semi-Markov Walk (Russian), Baku : EHLM, 1970.

10. Borovkov, A. A., Stochastic Processes in Queueing Theory., X1, Springer-Verlag. X1., New York, 1976.

11. Borovkov, A. A., On a Walk in a Strip with Inhibitory Boundaries, Math. Notes, 17 (1975) 385-389.

12. Borovkov, A. A., On the First Passage Time for One Class of Processes with Independent Increments, Theor. Prob. Appl., 10 (1965) 331-334.

13. Koroljuk, V. S. ve Turbin, A. F., Semi - Markov Processes and Their Applications (Russian), Kiev : Izdatel'stvo, Nauka Dumka, R. 1. 12, 1976.

14. Çınlar, E., Introduction to Stochastic Processes, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.

15. Çınlar, E., Markov Renewal Theory, Adv. Appl. Probab., 1 (1975) 123-187.

16. Takacs, L., Combinatorial Methods in The Theory of Stochastic Processes, 2nd ed , Huntington, New York : Robert E. Krieger Publishing Co. X1, 1977.

17. Koroljuk, V.S. ve Pirliev, B., Random Walk on a Semi-Axis on a Superposition of Two Renewal Processes (Russian), Ukr. Math. Zh., 36, 4 (1984) 433-436.

18. Tomko, J., On the Theory of Semi-Markov Processes with a General State Space (Russian), Teor. Veroyatn. Primen., 34, 2 (1989) 314-329.

19. Smith, W. L., Renewal Theory and its Ramifications, Journ. Roy. Statist. Soc., 20 (1958) 243-302.

20. Smith,W.L., Some Peculier Semi-Markov Processes, Proc.5-Th Berkelly Symp. Math.Statist. And Probab., 2, 2, 1965-1966, 255-263.

21. Spitzer, F., Principles of random walk, Princeton, N. J.: D. Van Nostrand, 1964.

22. Spitzer, F., A Combinatorial Lemma and its Applications to Probability Theory, Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956) 323-339.

23. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications II , 2nd Ed., Wiley, New York, 1971.

24. Feller, W., On semi-Markov processes, Proc. Nat. Acad. Sci.USA ,51, 4, 1964.

25. Anisimov, V. V., Limit Distributions of Functionals of a Semi-Markov Process Given on a Fixed Set of States, up to the Time of First Exit, Überstzung in Soviet Math., 11 (1970) 1002-1004.

26. Anisimov, V. V., The Limiting Behaviour of a Semi -Markov Process with a Decomposable State Space, Soviet Math., 13 (1973) 1276-1279.

27. Gnedenko, I. I. ve Kovalenko, I. N., Introduction to Queing Theory, IX, Translation Edited by D. Louvish, Jerussalem : Israel Program for Scientific Translation, 1968.

28. Shurenkov, V. M., Ergodic Markov processes (Russian), Ed. By A. N. Kolmogorov, Teoriya, Veroyatnostej i Matematichheskaya statistica, 41, Moskva Nauka, 1989.

29. Shurenkov, V. M., Ergodic Theorems and Related Questions of the Theory of Random processes (Russian), Kiev, Naukova Dumka, 1981.

30. Shurenkov, V. M., On the Markov Renewal Theory, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 2 (1984) 248-263.

31. Koroljuk, V. S., Brodi, S. M. ve Turbin, A. F., Semi - Markov Processes and Their Applications, J. Soviet Math. , 4 (1976) 244-280.

32. Harlamov, B. P., Random Time Substitution and Continuous Semi -Markov Processes, J. Soviet Math. , 3 (1975) 736-742.

33. Harlamov, B. P., On Convergence of Semi-Markov Walks to a Continuous Semi-Markov Process, Theor. Probab. Appl., 21 (1977) 482-498.

34. Rogozin, B. A., On the Distribution of the First Jump, Theory Probab. Appl., 9 (1964) 450-464.

35. Gusak, D. V. ve Korolyuk, V. S., On the First Passage Time Across a Given Level for Processes with Independent Increments, Theor. Probab. Appl., 13 (1968) 448-456.

36. Rogozin, B. A., On Some Classes of Processes with Independent Increments, Theory Probab. Appl., 10 (1965) 479-483.

37. Gusak, D. V., On the Joint Distribution of the First Exit Time and Exit Value for Homogeneous Process with Independent Increments, Theor. Probab. Appl., 14 (1969) 14-23.

38. Gusak, D. V. ve Koroljuk, V. S., On the Joint Distribution of the Process with Stationary Movements and its Maximum, Theor. Probab. Appl., 14 (1969) 400-469.

39. Baxter, J. ve Donsker, M., On the Distribution of the Supremum Functional for Processes with Stationary, Independent Increments, Trans. Amer. Math. Soc. , 85 (1957).

40. Skorohod, A. V., Random Processes with Independent Increments, Moscow: Nauka, 1967.

41. Zolotarev, B. M., The First Passage Time of a Level and the Behavior at Infinity of a Class of Processes with Independent Increments, Theor. Prob. Appl. , 9 (1964).

42. Ezhov, I. I., Markov Chains with Discrete Interference of an Event Forming a Semi-Markov Process, Ukrain. Mat. Zurn. 18, 1 (1966) (Russisch) 48-65.

43. Pyke, R. Ve Schaufele, R. A., Limit Theorems for Markov Renewal Processes, Ann. Math. Stat. ,35 (1964) 4.

44. Dzhafarov, V. S., Nasirova, T. H. ve Skorohod, A. V., On the Limit of Certain Process with Semi Independent Increments, Theor. Probab. Math. Statist., 5 (1976) 52-57.

45. Ahmedova, H. M., Processes with Negative Jumps and a Positive Drift (Russian), Problems of the Theory of Probability Distributions , Kiev 1983, Collect. Sci. Works, 106-123.

46. Ezhov, I. I. ve Shurenkov, V. S., Ergodic Theorems Connected with the Markov Property of Random , Theor. Probab. Appl., 21 (1977) 620-624.

47. Sil'vestrov, D. S., Limit Theorems for Semi - Markov Processes and Their Applications I., Theor. Probab. Math. Statist., 3 (1975) 159-176.

48. Sil'vestrov, D. S., Limit Theorems for Semi - Markov Processes and Their Applications II., Theor. Probab. Math. Statist., 3 (1975) 177-198.

49. Koroljuk, V. S. ve Svishchuk, A.V., Limit Representation of Continuous semi-Markovian Random Evolutions in as Sheme of Series (Russian), Ukr. Math. Zh., 41, 11 (1989) 1476-1482.

50. Skorohod, A. V. ve Slobodenyuk, N. P., Limit theorems for random walks, Ukr. SSSR; Nauka Dumka, 1970.

51. Nasirova, T. H., Distribution of a Semi-Markov Walk Process with Delaying Barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20 (1979) 90-97.

52. Nasirova, T. H. ve Skorohod, A. V., On a Class of Jump Processes with Delaying Barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16 (1978) 81-94.

53. Nasirova, T. H., On Ergodic Theorems for Some Semi-Markov Processes with Delaying Barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20 (1979) 90-97.

54. Dzhafarov, K. M., A Distribution of the Time of Lowest Level Reaching for a Process with Positive Jumps and Negative Drift (Russian), Teor. Sluchajnykh Protsessov , 7 (1979) 7-13.

55. Ahmedova, H.M., The Distribution of Main Functionals of Generalized Poisson Process with Delaying Screen (Russian, English Summary), Theor. Verojatn. Mat. Stat. , 20 (1981) 3-10.

56. Skorohod, A. V. ve Nasirova, T. H., On the Asymptotic Behavior of Processes in an Inventory Control Model, Theory. Probab. Math. Stat., 23 (1981) 137-142.

57. Skorohod, A. V. ve Nasirova, T. H., On an Ergodic Theorem for a Class of Processes Constructed from Sums of Independent Random Variables, Theory. Probability. Math. Stat. , 22 (1981) 151-161.

58. Lotov, V. I., On Asymptotics of Distributions Related to the Departure of a Non-Discrete Random Walk From an Interval (Russian), Predel'nye Teoremy Teorii Veroyatnoste i Smezhnye Vpoprosy, 1 (1982) 18-25.

59. Afanas'eva, L.G. ve Bulinskaya, E. V., Stochastic Processes in The Theory of Queues and Inventory Control (Russian), Moskva, 1980.

60. Afanas'eva, L. G. ve Bulinskaya, E. V., Storage Capacity Optimization, Eng. Cybern., 19, 5 (1981) 49-57.

61. Afanas'eva, L. G. ve Bulinskaya, E. V., Some Asyptotic Results on Random Walks in a Stripe, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 4 (1984) 654-668.

62. Khaniev, T. A., Distribution of a Semi-Markov Walk With Two Delay Screens (Russian), Some Questions of the Theory of Stochastic Processes, Kiev 1984, Collect Sci. Works, 106-113.

63. Khaniev, T.A., An Ergodic Theorem for a Semi-Markov Walk with Two Delay Screens (Russian), İzv. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 4 (1986) 37-42.

64. Khaniev, T. A., The Explicit Form of the Ergodic Distribution of the Process of Semi-Markov Walk Dependent Components (Russian), Probabilistic method for the Investigation of Systems with an Infinite Number of Degrees of Freedom, Kiev, 1986, Collect. Sci. Works, 119-125.

65. Khaniev, T. A., Distribution of a Process of Semi-Markov Walk on a Closed Interval with Exponentially Distributed Components, İzv.Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math.Nauk, 1 (1988) 45-50.

66. Zhang, Y. L., Some Problems on a One Dimensional Correlated Random Walk with Various Types of Barriers, J. Appl. Probab., 29 (1992) 196-201.

67. Korolyuk, V. S. ve Borovskikh, Y. U., Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Nauka Dumka, Kiev, 240 shf.

68. Lotov, V. I., On Random Walks Within a Stripe, Theor.Veroyatn. Primen., 36, 1 (1991) 160-165.

69. Lotov, V. I., On the Asymptotics of Distributions in Two-Sided Boundary Problems for Random Walks Defined on a Markov Chain, Sib. Adv. Math., 1, 3 (1991) 26-51.

70. Prabhu, N. U., Stochastic storage processes, New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 140 shf.

71. El-Shehawey, M. A., Limit Distribution of First Hitting Time of Delayed Random Walk, J. Ind. Soc. Oper. Res., 13, 1-4 (1992) 63-72.

72. Weesakul, B., The Random Walk Between a Reflecting and an Absorbing Barrier, Ann. Math. Statist., 23 (1961) 765- .

73. Kastenbaum, M. A., A Dialysis System with One Absorbing and One Semi-Reflecting State, J.Appl. Probab., 3 (1966) 363- .

74. Nasirova, T. H., Yapar, C. ve Khaniev, T. A., On Some Probability Characteristics of the Complex Semi-Markovian Random Walk with Reflecting and Delaying Screens, Cybernetica and System Analysis, (1997).

75. Khaniev, T. A., Özdemir, H., On the Laplace Transform of Finite Dimensional Distribution Functions of Semi-Continuous Random Process with Reflecting and Delaying Screens, Exploring Stochastic Laws, VSP, Zeist, The Netherlands, (1995) 167-174.

76. Özdemir, H., Yansıtan ve Tutan Bariyerli Pozitif Akımlı Yarı-Markov Süreci, Doktora Tezi, KTÜ. Fen-Edebiyat Fakültesi, Trabzon, 1996.

77. Maden, S., Yansıtan ve Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci Üzerine, Doktora Tezi, KTÜ. Fen-Edebiyat Fakültesi, Trabzon, 1997.

8. ÖZGEÇMİŞ

Sema Dikmenoğlu 21.08.1964 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini sırasıyla Gülbaharhatun İlkokulu'nda, Cumhuriyet Ortaokulu'nda ve Trabzon Lisesi'nde tamamladı. 1981-1982 eğitim-öğretim yılında ogünkü adıyla, İstanbul Devlet Güzel Sanatlar Akademisi (Mimar Sinan Üniversitesi) Yüksek Mimarlık Fakültesi'ni kazandı. Bir yarıyıl devam ettikten sonra fakülteden kendi isteği ile ayrıldı. 1982-1983 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyet Fakültesi Matematik Bölümü'ne başladı. İkinci sınıfta "Prof. Dr. Nazım Terzioğlu Özel Matematik Ödülü"nü alan Sema Dikmenoğlu, Temmuz 1986 da bu bölümden birincilikle mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı'na başladı. İki yıllık ingilizce hazırlık sınıfının ikinci yarıyılı başında, kaydını iki yarıyıl dondurup Niğde 12-Eylül Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Daha sonra Akçaabat Endüstri Meslek Lisesi'nde olmak üzere, toplam üç yıl birbuçuk ay öğretmenlik yaptı. Şubat 1990 da K.T.Ü. Fen-Edebiyet Fakültesi Matematik Bölümü'nde "Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı"na araştırma görevlisi olarak atandı. Şubat 1991 de yüksek lisans proğramını tamamladı. 1991-1992 eğitim-öğretim yılının ikinci yarıyılında, aynı enstitünün aynı anabilim dalında doktora proğramına kayıt oldu. 4 Ocak 1993 tarihinde evlenen Sema Dikmenoğlu, Berk isminde bir erkek çocuk annesi olup halen K.T.Ü. deki görevine devam etmektedir.