24155

BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLARDA KUVVETLİ SÜREKLİLİKLER

Canan YANIK

Hacettepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
BİLİM UZMANLIĞI TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Temmuz - 1992

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

İşbu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında BİLİM UZMANLIĞI TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Haydar Eş

Üye : Prof. Dr. Doğan Çoker

Üye : Lawrence M. Brown

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

/ /1992

Prof.Dr. Gültekin GÜNAY

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖZET

Dört bölümden oluşan bu çalışmada, belirtisiz topolojik uzaylar arasında çeşitli türdeki fonksiyonlarla bunların arasındaki ilişkiler üzerinde yapılan çalışmaların bir derlemesi yapıldı.

Birinci bölüm, çalışmanın konusuyla ilgili temel kavramların tanıtılmasına ayrılmış; belirtisiz küme, belirtisiz topolojik uzay, belirtisiz nokta, belirtisiz düzenli açık ve düzenli kapalı küme kavramları tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, Mukherjee ve Sinha tarafından tanımlanan bazı yakın sürekli fonksiyonlar ele alınarak, bunlar arasındaki ilişkiler "ters örnekler" yardımıyla açıklanılmaya çalışılmıştır.

Üçüncü bölümde, Çoker-Eş ve Mukherjee-Ghosh tarafından tanımlanmış olan belirtisiz kuvvetli sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişkiler yine "ters örnekler" ile incelendikten sonra, İkinci Bölümde yer alan fonksiyonlarla aralarındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde ise, ikinci ve üçüncü bölümlerde yer alan fonksiyonların yanına, bu kez de Malakar ve Yalvaç tarafından tanımlanmış olan belirtisiz kararsız, belirtisiz yarı kararsız ve belirtisiz kuvvetli kararsız fonksiyonlar eklenerek belirtisiz süreklilik ile bunlar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

SUMMARY

This work consists of four chapters, and comprises a collection of studies made on various types of functions between fuzzy topological spaces and the relations between these functions.

The first chapter is devoted to the introduction of the fundamental concepts related to the study; the concepts of fuzzy sets, fuzzy topolojical spaces, fuzzy points, fuzzy regular open and regular closed sets are introduced.

In the second chapter, some notions of near fuzzy continous functions, which were defined by Mukherjee and Sinha, are dealt with and the relations between them are explained by means of "counter-examples".

In the third chapter, after the relations between fuzzy strongly continuous functions, which were defined by Çoker-Eş and Mukherjee-Ghosh, are detailed through "counter-examples", the relations between them and the functions in the second chapter are investigated.

In the fourth chapter, in addition to the functions in the second and the third chapters, fuzzy irresolute, fuzzy semi-irresolute and fuzzy strongly irresolute functions, which were defined by Malakar and Yalvaç, are added and the relations between fuzzy continuity and these concepts are examined.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı yöneten ve bugüne dek yardımlarını esirgemeyen Doç.Dr. Haydar Eş'e, çalışmanın gerçekleşmesinde katkıları olan Prof.Dr. Doğan Çoker'e, Dr.L.M.Brown'a, değerli görüş ve yardımlarından dolayı Prof.Dr. Hüseyin Salihoğlu, Yrd.Doç.Dr. Armağan Ethemoğlu, Fen Fakültesi Matematik Bölümü ve Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Bölümü elemanlarına (Hacettepe Üniversitesi) içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

1. ÖN BİLGİLER

1.1. Giriş

İlk kez 1965 yılında Zadeh tarafından belirtisiz küme (Fuzzy Set) kavramı tanıtıldı. Bunun sonucu olarak matematiğin bu yeni küme kavramına göre yeniden düzenlenmesi gereksinimi ortaya çıktı.

Belirtisiz küme kavramı kullanılarak, belirtisiz topolojik uzaylar, belirtisiz gruplar, belirtisiz ölçümler, belirtisiz integraller v.b. konularda çeşitli araştırmalar yapılmıştır.

1.2. Belirtisiz küme kavramı

Bu kesimde belirtisiz küme kavramı ile ilgili temel kavramlar ve özellikler kısaca hatırlatılacaktır.

1.2.1. Tanım: X boş olmayan bir küme ve $F(X)=\{A \mid A:X \to [0,1]\}$ olsun. $F(X)$'in her elemanına X'in bir belirtisiz kümesi denir [ZADEH, 1965]. $A \in F(X)$ belirtisiz kümesi verildiğinde her $x \in X$ için $(1-A)(x)=1-A(x)=A^t(x)$ olmak üzere $A^t:X \to [0,1]$ ile tanımlı belirtisiz kümeye A'nın tümleyeni denir. 0 ve 1 sabit fonksiyonlarına karşılık gelen belirtisiz kümeler $\emptyset$ ve X'tir. Buna göre, X belirtisiz kümesini, her $x \in X$ için $1_X:X \to [0,1]$, $1_X(x)=1$; $\emptyset$ belirtisiz kümesini de, her $x \in X$ için $0_X:X \to [0,1]$, $0_X(x)=0$ ile tanımlayacağız.

1.2.2. Tanım: $A_1, A_2 \in F(X)$ olsun.

1) $A_1 \leq A_2 \Leftrightarrow$ her $x \in X$ için $A_1(x) \leq A_2(x)$,

2) A_1 ile A_2'nin maksimumu denilen belirtisiz küme, her $x \in X$ için

$$\max\{A_1(x), A_2(x)\} = A_1(x) \vee A_2(x) = (A_1 \vee A_2)(x),$$

3) A_1 ile A_2'nin minimumu denilen belirtisiz küme, her $x \in X$ için

$$\min\{A_1(x), A_2(x)\} = A_1(x) \wedge A_2(x) = (A_1 \wedge A_2)(x)$$

biçiminde tanımlanır [ZADEH, 1965].

1.2.3. Tanım: $\{A_i\}_{i\in I}$, X'de belirtisiz kümelerin bir ailesi olsun. A_i belirtisiz kümelerinin supremumu olan belirtisiz küme, her $x\in X$ için

$$(\bigvee_{i\in I} A_i)(x) = \sup_{i\in I} A_i(x),$$

olarak, A_i belirtisiz kümelerinin infimumu olan belirtisiz küme, her $x\in X$ için

$$(\bigwedge_{i\in I} A_i)(x)=\inf_{i\in I} A_i(x)$$

olarak tanımlanır [ZADEH, 1965].

1.2.4. Tanım:

1) $f:X\to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. A, X'in bir belirtisiz kümesi ise, A'nın f altındaki görüntüsü denilen f(A) belirtisiz kümesi, her $y\in Y$ için

$$f(A)(y)=\begin{cases} \bigvee_{x\in f^{-1}(y)} A(x) & , \quad f^{-1}(y)\neq\emptyset \text{ ise} \\ 0 & , \quad f^{-1}(y)=\emptyset \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $f(A):Y\to[0,1]$ diye tanımlanan belirtisiz kümedir.

2) $f:X\to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. B, Y'nin bir belirtisiz kümesi ise, B'nin f altındaki ters görüntüsü ya da öngörüntüsü adını alan $f^{-1}(B)$ belirtisiz kümesi, her $x\in X$ için

$$f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$$

olmak üzere $f^{-1}(B):X\to[0,1]$ diye tanımlanan belirtisiz kümedir [CHANG, 1968].

1.2.5. Teorem: $f:X\to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

a) A_1, X'in belirtisiz kümesi ise,
$(f(A_1))^t \leq f(A_1^t)$'dir.

b) B, Y'nin belirtisiz kümesi ise,
$f^{-1}(B^t) = (f^{-1}(B))^t$ dir.

c) A_1 ve A_2, X'in belirtisiz kümeleri ve $A_1 \leq A_2$ ise,

$f(A_1) \leq f(A_2)$'dir.

d) B_1 ve B_2, Y'nin belirtisiz kümeleri ve $B_1 \leq B_2$ ise,

$f^{-1}(B_1) \leq f^{-1}(B_2)$'dir.

e) A_1, X'in belirtisiz kümesi ise,

$A_1 \leq f^{-1}(f(A_1))$'dir.

f) B,Y'nin belirtisiz kümesi ise,

$f(f^{-1}(B)) \leq B$'dir.

g) Her $i \in I$ için $A_i \in F(X)$ ise,

$f(\bigvee_{i \in I} A_i) = \bigvee_{i \in I} f(A_i)$'dir.

h) Her $i \in I$ için $B_i \in F(Y)$ ise,

$f^{-1}(\bigvee_{i \in I} B_i) = \bigvee_{i \in I} f^{-1}(B_i)$'dir.

ı) f örten ve $B \in F(Y)$ ise,

$f(f^{-1}(B)) = B$'dir.

i) f bire-bir ve $A_1 \in F(X)$ ise,

$f^{-1}(f(A_1)) = A_1$'dir.

j) Her $i \in I$ için $A_i \in F(X)$ ise,

$f(\bigwedge_{i \in I} A_i) \leq \bigwedge_{i \in I} f(A_i)$'dir.

k) Her $i \in I$ için $B_i \in F(Y)$ ise,

$f^{-1}(\bigwedge_{i \in I} B_i) = \bigwedge_{i \in I} f^{-1}(B_i)$'dir.

l) $g: Y \rightarrow Z$ fonksiyonu verilmiş olsun. C,Z'nin bir belirtisiz kümesi ise

$(gof)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$'dir.

Yukardaki özellikler; [CHANG, 1968], [WARREN, 1978],[AZAD,1981], [AYDIN, 1980] ve [MİNG ve MİNG, 1980] 'de bulunabilir.

1.3. Belirtisiz Topolojik Uzaylar

Bu kesimde, belirtisiz topolojik uzayların önemli tanım ve teoremlerini hatırlatmak istiyoruz.

1.3.1. Tanım: $T_X \subseteq F(X)$ olsun. Eğer

1) $0_X \in T_X$ ve $1_X \in T_X$'dir,
2) $A, B \in T_X$ ise, $A \wedge B \in T_X$'dir,
3) Her $i \in I$ için $A_i \in T_X$ ise, $\bigvee_{i \in I} A_i \in T_X$ dir,

koşulları sağlanıyor ise, T_X ailesine X'de bir belirtisiz topoloji, (X, T_X) ikilisine de belirtisiz topolojik uzay adları verilir [CHANG, 1968].

Bu çalışmada X, Y ile evrensel kümeleri ve bunlar üzerinde tanımlı belirtisiz topolojileri de sırasıyla T_X ve T_Y ile göstereceğiz. Kısalık olsun diye, bazen "(X, T_X) belirtisiz uzayı" yerine "X belirtisiz uzayı" simgesi kullanılacaktır.

1.3.2. Tanım: (X,T_X) belirtisiz topolojik uzayı verilmiş olsun. Eğer $A \in T_X$ ise, A belirtisiz kümesine T_X belirtisiz topolojisine göre belirtisiz açık küme denir. Eğer $A^t \in T_X$ ise, A belirtisiz kümesi de, T_X belirtisiz topolojisine göre belirtisiz kapalı küme diye adlandırılır [CHANG, 1968].

1.3.3. Tanım: (X, T_X) belirtisiz topolojik uzayı verilmiş olsun. $A \in F(X)$ için

$$\bar{A} = \inf\{B : A \leq B,\ B^t \in T_X\}$$

belirtisiz kümesine, A belirtisiz kümesinin kapanışı,

$$\overset{o}{A} = \sup\{B : B \leq A,\ B \in T_X\}$$

belirtisiz kümesine de, A belirtisiz kümesinin içi denir [AZAD, 1981] .
Bu tanımları kullanarak belirtisiz kümelerin içi ve kapanışı ile ilgili aşağıdaki özellikleri verelim:

1.3.4. Teorem: (X, T_X) belirtisiz topolojik uzay olmak üzere, belirtisiz kümelerin kapanışı ve içi için aşağıdaki özellikler vardır:

a) Her $A \in F(X)$ için $A \leq \bar{A}$ ve $\bar{A} = \bar{\bar{A}}$'dır,

b) Her $A \in F(X)$ için $\mathring{A} \leq A$ ve $(\mathring{A})^{o} = \mathring{A}$'dir,

c) Her $A,B \in F(X)$ için $A \leq B$ ise, $\bar{A} \leq \bar{B}$'dır,

d) Her $A,B \in F(X)$ için $A \leq B$ ise, $\mathring{A} \leq \mathring{B}$'dir.

e) $A \in F(X)$ belirtisiz kümesi kapalıdır. $\Longleftrightarrow A = \bar{A}$'dır,

f) $A \in F(X)$ belirtisiz kümesi açıktır. $\Longleftrightarrow A = \mathring{A}$'dir,

g) Her $A,B \in F(X)$ için $\bar{A} \vee \bar{B} = \overline{A \vee B}$ ve $\bar{A} \wedge \bar{B} \geq \overline{A \wedge B}$'dir,

h) Her $A,B \in F(X)$ için $\mathring{A} \wedge \mathring{B} = (A \wedge B)^{o}$ ve $\mathring{A} \vee \mathring{B} \leq (A \vee B)^{o}$'dir,

ı) Her $A \in F(X)$ için $1-\bar{A} = (1-A)^{o}$'dır.

[WARREN, 1978].

1.3.5. Tanım: (X, T_X) belirtisiz topolojik uzayı verilmiş olsun. $\mathbf{B} \subseteq T_X$ olmak üzere, her $A \in T_X$ kümesi her $i \in I$ için $A_i \in \mathbf{B}$ olmak üzere $A = \bigvee_{i \in I} A_i$ şeklinde yazılabiliyorsa, **B** belirtisiz kümeler ailesine T_X belirtisiz topolojisinin belirtisiz tabanı denir [WONG, 1974].

1.3.6. Tanım: (X, T_X) belirtisiz topolojik uzayı verilmiş olsun. $S \subset T_X$ olmak üzere, **S**'ye ait belirtisiz kümelerin sonlu arakesitlerinin ailesi T_X için bir taban ise, **S**'ye T_X belirtisiz topolojisinin bir alt tabanı denir [GOGUEN, 1973].

1.4. Belirtisiz Nokta, Belirtisiz Eleman Olma Kavramları

1.4.1. Tanım: $x \in X$ ve $\lambda \in (0,1]$ olsun. X'deki x_λ belirtisiz noktası,

$$x_\lambda (y) = \begin{cases} \lambda & ,y = x \text{ ise} \\ 0 & ,y \neq x \text{ ise} \end{cases} \qquad (\forall y \in X)$$

ile tanımlı olan belirtisiz kümedir. x_λ belirtisiz noktasının 0' dan farklı değer aldığı tek x noktasına x_λ 'nın dayanağı, λ'ya da değeri denir [MİNG — MİNG, 1980].

1.4.2. Tanım: x_λ belirtisiz nokta ve A bir belirtisiz küme olmak üzere, $\lambda \leq A(x)$ ise, x_λ belirtisiz noktası A'nın elemanıdır denir ve $x_\lambda \varepsilon A$ ile gösterilir [MİNG-MİNG, 1980].

1.4.3. Tanım: (X, T_X) belirtisiz topolojik uzayında A belirtisiz kümesi ve x_λ belirtisiz noktası için, $x_\lambda \varepsilon B \leq A$ olacak şekilde bir $B \varepsilon T_X$ varsa, A belirtisiz kümesine x_λ belirtisiz noktasının komşuluğu denir.

Bir x_λ belirtisiz noktasının bütün komşuluklarının ailesine x_λ 'nın komşuluklar sistemi denir.

1.4.4. Tanım: X'deki x_λ belirtisiz noktası ve A belirtisiz kümesi için, $\lambda + A(x) > 1$ $(\lambda > A^t(x))$ ise, x_λ belirtisiz noktası A ile çağımsıdır denir. x_λ, A ile çakışığımsı ise, $x_\lambda q A$ simgesiyle gösterilir [MİNG-MİNG, 1980]

1.4.5. Tanım: $A, B \varepsilon F(X)$ için $A(x)+B(x) > 1$ $(A(x) > B^t(x))$ olacak şekilde bir $x \varepsilon X$ varsa, A ile B çakışığımsıdır (quasi-coincident) denir. A ile B çakışığımsı ise, A q B gösterimini kullanacağız.

1.4.6. Tanım: (X, T_X) belirtisiz topolojik uzayındaki A belirtisiz kümesine, $x_\lambda q B \leq A$ olmak üzere bir $B \varepsilon T_X$ varsa, x_λ belirtisiz noktasının q-komşuluğudur denir x_λ belirtisiz noktasının bütün q-komşuluklarının olusturduğu aileye, x_λ 'nın q-komşuluklarının sistemi denir [MİNG-MİNG, 1980].

1.4.7. Teorem: x_λ belirtisiz noktası $\bar{A}$'a aittir ($x_\lambda \varepsilon \bar{A}$ dir) $\Longleftrightarrow x_\lambda$'nın her q-komşuluğu, A ile çakışığımsıdır [MİNG - MİNG 1980].

1.4.8. Teorem: X'deki A belirtisiz kümesi için aşağıdaki eşitlikler vardır:

a) $\overset{o}{A} = ((\overline{A^t}))^t$

b) $\bar{A} = ((A^t)^o)^t$

[MİNG-MİNG, 1980].

1.5. Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Belirtisiz Süreklilik

1.5.1. Tanım: (X,T_X) , (Y,T_Y) belirtisiz topolojik uzayları ve $f:X\to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $B\in T_Y$ için $f^{-1}(B)\in T_X$ ise, f fonksiyonuna belirtisiz sürekli denir [CHANG, 1968].

1.5.2. Teorem: (X, T_X), (Y,T_Y) belirtisiz topolojik uzayları ve $f:X\to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz süreklidir,

b) Y'deki her B belirtisiz kapalı kümesi için $f^{-1}(B)$, X'de belirtisiz kapalıdır,

c) T_Y'nin bir alttabanına ait her B belirtisiz kümesi için $f^{-1}(B)\in T_X$'dir,

d) Her $A\in F(X)$ için $f(\overline{A})\leq\overline{f(A)}$'dır,

e) Her $B\in F(Y)$ için $\overline{f^{-1}(B)}\leq f^{-1}(\overline{B})$'dır.

Kanıt: (a)$\Longleftrightarrow$(b): Her $B\in F(Y)$ için $f^{-1}(B^t)=(f^{-1}(B))^t$ olduğundan istenen kolayca görülebilir.

(a)$\Longrightarrow$(c): Tanımdan açıkça görülür.

(c)$\Longrightarrow$(a): $B_1,\ldots,B_n$, T_Y için S alttabanına ait belirtisiz kümeler ve S_1, S'nin belirtisiz kümelerinin sonlu arakesitlerinin ailesi olsun. O zaman $f^{-1}(\bigwedge_{k=1}^{n} B_k)=\bigwedge_{k=1}^{n} f^{-1}(B_k)$ T_X'dedir. Buradan öngörüntü T_X'de olduğundan S_1'in her elemanı da bu özelliğe sahiptir. $B\in S$ olsun. O zaman $B=\bigvee_{i\in I}\{A_i : A_i\in S_1\}$ olur. Öngörüntü alınırsa

$$f^{-1}(B)=\bigvee_{i\in I}\{f^{-1}(A_i)\}$$, X'de belirtisiz açık olur.

(b)$\Longrightarrow$(d): $\overline{f(A)}=\wedge\{B: B\geq f(A) \text{ ve } B^t\in T_Y\}$ dir. Buradan

$$f^{-1}(\overline{f(A)})=\wedge\{f^{-1}(B) : B\geq f(A) \text{ ve } B^t\in T_Y\}$$

elde edilir. (b)'den $f^{-1}(B)$, X de belirtisiz kapalı küme ve

$f^{-1}(B) \geq f^{-1}(f(A)) \geq A$ olduğundan;

$$\bar{A} = \wedge\{f^{-1}(B) \ : \ A \leq f^{-1}(B) \text{ ve } f^{-1}(B) \text{ , X'de kapalı}\}$$

olur. Böylece $\bar{A} \leq f^{-1}(B)$ ve $\bar{A} \leq \wedge f^{-1}(B)$ elde edilir. O halde $f^{-1}(\overline{f(A)}) \geq \bar{A}$'dır ve böylece $f(f^{-1}(\overline{f(A)}) \geq f(\bar{A}) \Longrightarrow \overline{f(A)} \geq f(\bar{A})$ olur.

(d)$\Longrightarrow$(e): Her $B \in F(Y)$ için $f^{-1}(B)$, X'de belirtisiz küme olduğundan

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \leq \overline{f(f^{-1}(B))} \leq \bar{B} \text{ olur. Böylece}$$

$$\overline{f^{-1}(B)} \leq f^{-1}(\bar{B}) \text{ elde edilir.}$$

(e)$\Longrightarrow$(b): B, Y'de belirtisiz kapalı küme olsun. O zaman $\overline{f^{-1}(B)} \leq f^{-1}(\bar{B}) = f^{-1}(B)$ olur. Diğer tarafdan $f^{-1}(B) \leq \overline{f^{-1}(B)}$ olduğundan $\overline{f^{-1}(B)} = f(B)$ çıkar. Böylece istenen gerçeklenir [WARREN, 1978].

1.6. Belirtisiz Yarı Açık ve Yarı Kapalı Kümeler

1.6.1. Tanım: A, (X,T_X) belirtisiz topolojik uzayının bir belirtisiz kümesi olsun.

1) $B \leq A \leq \bar{B}$ olacak şekilde bir $B \in T_X$ varsa, A'ya belirtisiz yarı açık küme denir,

2) $\overset{o}{B} \leq A \leq B$ olacak şekilde bir $B^t \in T_X$ varsa, A'ya belirtisiz yarı kapalı küme denir [AZAD, 1981].

1.6.2. Teorem: (X,T_X) belirtisiz topolojik uzayındaki A belirtisiz kümesi için aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) A, belirtisiz yarı kapalı kümedir,

b) A^t, belirtisiz yarı açık kümedir,

c) $\overset{o}{\bar{A}} \leq A$ dır,

d) $(A^t)^{\bar{o}} \geq A^t$ dir.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b): A belirtisiz yarı kapalı küme olduğu için $\overset{o}{B} \leq A \leq B$ olacak şekilde bir $B^t \in T_X$ vardır. Buradan tümleyen işlemi uygulanırsa,

$\overset{o}{1-B} \geq 1-A \geq 1-B$ olur. $\overset{o}{1-B} = (\overline{1-B})$ olduğundan $(\overline{1-B}) \geq 1-A \geq 1-B$ elde edilir. Buradan, $1-B = C$, $1-A = A^t$ denilirse $\overline{C} \geq A^t \geq C$ olacak şekilde bir $C \in T_X$ vardır. O halde A^t belirtisiz yarı açık kümedir.

(b)$\Longrightarrow$(c): A^t belirtisiz yarı açık küme olduğu için $B \leq A^t \leq \overline{B}$ olacak şekilde bir $B \in T_X$ vardır. Tümleyen alınırsa, $1-B \geq 1-A^t \geq 1-\overline{B}$ olur. $1-\overline{B} = (1-B)^o$ olduğundan $1-B \geq 1-A^t \geq (1-B)^o$ elde edilir. $1-B = C$ alınırsa $C \geq A \geq \overset{o}{C}$ olur. Yani A belirtisiz yarı kapalı küme olur. Böylece,

$$\overset{o}{C} \leq A \leq C \Longrightarrow \overset{o}{C} \leq A \leq \overline{A} \leq \overline{C} = C$$

$$\Longrightarrow \overset{o}{\overset{o}{C}} \leq \overset{o}{\overline{A}} \leq \overset{o}{C} \leq A$$

$$\Longrightarrow \overset{o}{C} \leq \overset{o}{\overline{A}} \leq \overset{o}{C} \leq A$$

$$\Longrightarrow \overset{o}{\overline{A}} \leq A$$

olur.

(c)$\Longrightarrow$(d): $\overset{o}{\overline{A}} \leq A$ olduğunda, tümleyen alınırsa $1-\overset{o}{\overline{A}} \geq 1-A \Longrightarrow (\overline{1-\overline{A}}) \geq 1-A \Longrightarrow (1-A)^{\overline{o}} \geq 1-A$ elde edilir. Bu eşitsizlikte $1-A = A^t$ alınırsa $(A^t)^{\overline{o}} \geq A^t$ olduğu görülür.

(d)$\Longrightarrow$(a): Hipotezden $\overset{o}{A^t} \leq A^t \leq (A^t)^{\overline{o}}$ yazabiliriz. $\overset{o}{A^t} = B$ alınırsa $B \leq A^t \leq \overline{B}$ olur. Buradan tümleyen alınıp ve $1-B = C$ denilirse $C \geq A \geq \overset{o}{C}$ olacak şekilde bir $C^t \in T_X$ vardır. O halde A belirtisiz yarı kapalı kümedir [AZAD, 1981].

1.6.3. Teorem: (a) Belirtisiz yarı açık kümelerin herhangi bir bileşimi, belirtisiz yarı açık kümedir.

(b) Belirtisiz yarı kapalı kümelerin herhangi bir kesişimi, belirtisiz yarı kapalı kümedir.

Kanıt: (1): $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$, X belirtisiz uzayının belirtisiz yarı açık kümelerinin bir ailesi olsun. O zaman, her $\alpha \in \Lambda$ için, $B_\alpha \leq A_\alpha \leq \overline{B_\alpha}$ olacak şekilde bir $B_\alpha \in T_X$ vardır. Böylece,

$$\bigvee_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \leq \bigvee_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \leq \bigvee_{\alpha\in\Lambda} \overline{B_\alpha} \quad \text{ve} \quad \bigvee_{\alpha\in\Lambda} \overline{B_\alpha} \leq \overline{\bigvee_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha}$$

olduğu için $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \leq \bigvee_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \leq \overline{\bigvee_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha}$ olacak şekilde bir $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \in T_X$ vardır. O halde $\bigvee_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$, belirtisiz yarı açık kümedir,

(2): $\{B_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ belirtisiz yarı kapalı kümelerin bir ailesi olsun. O zaman her $\alpha\in\Lambda$ için $\overset{o}{A}_\alpha \leq B_\alpha \leq A_\alpha$ olacak şekilde bir $A_\alpha^t \in T_X$ vardır. Buradan tümleyen alınırsa $1-\overset{o}{A}_\alpha \geq 1-B_\alpha \geq 1-A_\alpha$ olur. $1-\overset{o}{A}_\alpha = \overline{1-A_\alpha}$ olduğundan $\overline{1-A_\alpha} \geq 1-B_\alpha \geq 1-A_\alpha$ elde edilir. Teorem 1.6.2.(1)'den

$$\bigvee_{\alpha\in\Lambda} (\overline{1-A_\alpha}) \geq \bigvee_{\alpha\in\Lambda} (1-B_\alpha) \geq \bigvee_{\alpha\in\Lambda} (1-A_\alpha)$$

olur. Tekrar tümleyen alınırsa,

$$\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} (1-(\overline{1-A_\alpha})) \leq \bigwedge_{\alpha\in\Lambda} (1-(1-B_\alpha)) \leq \bigwedge_{\alpha\in\Lambda} (1-(1-A_\alpha)) \Longrightarrow$$

$$\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} \overset{o}{A}_\alpha \leq \bigwedge_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha \leq \bigwedge_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha \quad \text{ve} \quad (\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha)^o \leq \bigwedge_{\alpha\in\Lambda} \overset{o}{A}_\alpha$$

olduğundan $\bigwedge_{\alpha\in\Lambda} B_\alpha$ belirtisiz yarı kapalı olur [AZAD, 1981].

1.6.4. Uyarı: Her belirtisiz açık (kapalı) kümenin belirtisiz yarı açık (yarı kapalı) olduğu açıktır. Bunun tersinin genelde doğru olmadığı [Azad, 1981]'deki Örnek 4.5.'te verilmiştir.

1.7. Belirtisiz Düzenli Açık ve Düzenli Kapalı Kümeler

1.7.1. Tanım: A, (X,T_X)'de bir belirtisiz küme olsun.

1) $\overset{o}{\overline{A}} = A$ ise, A'ya belirtisiz düzenli açık küme denir.
2) $\overline{\overset{o}{A}} = A$ ise, A'ya belirtisiz düzenli kapalı küme denir [AZAD,1981].

1.7.2. Teorem: X belirtisiz uzayının A belirtisiz kümesi belirtisiz düzenli açıktır $\Longleftrightarrow A^t$ belirtisiz düzenli kapalıdır.

Kanıt: $\Longrightarrow$: X belirtisiz uzayının A belirtisiz kümesi belirtisiz düzenli açık olduğu için $A = \overset{o}{\overline{A}}$ olur. Burada eşitliğin her iki tarafının tümleyeni alınırsa,

$1-A = 1-\overset{o}{\bar{A}} = \overline{(1-\bar{A})} = (1-A)^{\bar{o}} \Longrightarrow A^t = (A^t)^{\bar{o}}$ elde edilir ki bu da A'nın tümleyeninin belirtisiz düzenli kapalı olduğunu verir.

$\Longleftarrow$: X belirtisiz uzayının A^t belirtisiz kümesi belirtisiz düzenli kapalı olduğu için $A^t = (A^t)^{\bar{o}}$ olur. Buradan eşitliğin her iki tarafının tümleyeni alınırsa $1-A^t = 1-(A^t)^{\bar{o}} = (1-\overset{o}{A^t})^{o} = (1-A^t)^{\overset{o}{-}} \Longrightarrow A = A^{\overset{o}{-}}$ elde edilir ki bu da A'nın belirtisiz düzenli açık olduğunu verir [AZAD, 1981].

1.7.3. Uyarı: Her belirtisiz düzenli açık (kapalı) kümenin belirtisiz açık (kapalı) olduğu görülmektedir. Bunun tersinin genelde doğru olmadığı [AZAD, 1981]'de gösterilmiştir.

1.7.4. Teorem: a) İki belirtisiz düzenli açık kümenin kesişimi belirtisiz düzenli açık kümedir,

b) İki belirtisiz düzenli kapalı kümenin bileşimi belirtisiz düzenli kapalı kümedir.

Kanıt: (a): A_1 ve A_2 , X belirtisiz uzayının herhangi iki belirtisiz düzenli açık kümesi olsun. 1.7.3. Uyarı'dan $A_1 \wedge A_2$ belirtisiz açık olduğu için $A_1 \wedge A_2 \leq (A_1 \wedge A_2)^{\overset{o}{-}}$ 'dır. Üstelik,

$(A_1 \wedge A_2)^{\overset{o}{-}} \leq \overset{o}{\bar{A}_1} = A_1$ ve

$(A_1 \wedge A_2)^{\overset{o}{-}} \leq \overset{o}{\bar{A}_2} = A_2$ olduğundan

$(A_1 \wedge A_2)^{\overset{o}{-}} \leq A_1 \wedge A_2$ dir. Böylece

$(A_1 \wedge A_2)^{\overset{o}{-}} = A_1 \wedge A_2$ olur.

(2): Kanıt kolaylıkla görülür.

[AZAD , 1981].

1.7.5. Teorem: a) Belirtisiz açık kümenin kapanışı, belirtisiz düzenli kapalı kümedir.

b) Belirtisiz kapalı kümenin içi, belirtisiz düzenli açık kümedir.

Kanıt: (1): A, X belirtisiz uzayının belirtisiz açık kümesi olsun. $\mathring{\bar{A}} \leq \bar{A}$ olduğundan $\overline{\mathring{\bar{A}}} \leq \bar{\bar{A}} = \bar{A}$ olur. A belirtisiz açık olduğundan $A \leq \mathring{\bar{A}}$ dir ve buradan $\bar{A} \leq \overline{\mathring{\bar{A}}}$ olur. Böylece $\bar{A} = \overline{\mathring{\bar{A}}}$ elde edilir. Yani A belirtisiz düzenli kapalı kümedir.

(2): A, X belirtisiz uzayında belirtisiz kapalı küme ise, $\mathring{A}$'nin belirtisiz düzenli açık olduğunu $(\mathring{A} = \mathring{\overline{\mathring{A}}})$ görmeliyiz. A belirtisiz kapalı ise, $\overline{\mathring{A}} \leq \bar{A}$ olduğundan $\mathring{\overline{\mathring{A}}} \leq \mathring{A}$ dir. Diğer tarafdan, A belirtisiz kapalı olduğundan $\mathring{A} \leq \overline{\mathring{A}}$ ve $\mathring{A} \leq \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ olur. Böylece $\mathring{A} = \mathring{\overline{\mathring{A}}}$ elde edilir. Yani A belirtisiz düzenli açıktır [AZAD, 1981].

1.8. Belirtisiz Yarı Sürekli, Belirtisiz Yarı Açık ve Belirtisiz Yarı Kapalı Fonksiyonlar

1.8.1. Tanım: $f:(X, T_X) \to (Y, T_Y)$ bir fonksiyon olsun.

1) Her $A \in T_X$ için $f(A) \in T_Y$ ise, f'ye belirtisiz açık fonksiyon denir.

2) X'deki her A belirtisiz kapalı küme için f(A) , Y'de belirtisiz kapalı ise, f'ye belirtisiz kapalı fonksiyon denir.

3) Her $A \in T_Y$ için $f^{-1}(A)$, X'de belirtisiz yarı açık küme ise, f'ye belirtisiz yarı sürekli fonksiyon denir.

4) Her $A \in T_X$ için f(A), belirtisiz yarı açık küme ise, f'ye belirtisiz yarı açık fonksiyon denir.

5) X'deki her A belirtisiz kapalı küme için f(A), belirtisiz yarı kapalı küme ise, f'ye belirtisiz yarı kapalı fonksiyon denir [AZAD, 1981].

1.8.2. Uyarı: f, belirtisiz sürekli (açık, kapalı) fonksiyon ise, belirtisiz yarı sürekli (yarı açık, yarı kapalı) fonksiyondur. Bunların tersleri genelde doğru değildir [AZAD, 1981].

1.9. Belirtisiz Hemen Hemen Sürekli Fonksiyonlar

1.9.1. Tanım: $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ bir fonksiyon olsun. Y'deki her A belirtisiz düzenli açık kümesi için $f^{-1}(A) \in T_X$ ise, f'ye belirtisiz hemen hemen sürekli fonksiyon denir [AZAD, 1981].

1.9.2. Teorem: $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz hemen hemen sürekli fonksiyondur,

b) Y'deki her B belirtisiz düzenli kapalı kümesi için $f^{-1}(B)$, belirtisiz kapalı kümedir,

c) Her $B \in T_Y$ için $f^{-1}(B) \leq (f^{-1}(\overset{o}{\overline{B}}))^o$'dir,

d) Y'deki her B belirtisiz kapalı kümesi için $(f^{-1}(\overline{\overset{o}{B}}))^- \leq f^{-1}(B)$'dir.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b): B, Y'de belirtisiz düzenli kapalı ise, B^t , Y' de belirtisiz düzenli açıktır. f, belirtisiz hemen hemen sürekli olduğundan $f^{-1}(B^t)$ belirtisiz açıktır ve $f^{-1}(B^t)=(f^{-1}(B))^t$ olduğundan, $f^{-1}(B)$ belirtisiz kapalıdır.

(b)$\Longrightarrow$(a): B,Y'de belirtisiz düzenli açık ise, B^t, Y'de belirtisiz düzenli kapalıdır. Hipotezden $f^{-1}(B^t)$ belirtisiz kapalı ve $f^{-1}(B^t)=(f^{-1}(B))^t$ olduğundan, $f^{-1}(B)$ belirtisiz açıktır. O halde f, belirtisiz hemen hemen süreklidir.

(a)$\Longrightarrow$(c): B,Y'nin belirtisiz açık kümesi olduğundan, $B \leq \overset{o}{\overline{B}}$ dir. Ve buradan $f^{-1}(B) \leq f^{-1}(\overset{o}{\overline{B}})$ olur. I.7.5. Teorem (b)'den $\overset{o}{\overline{B}}$, Y'de belirtisiz düzenli açık kümedir. Hipotezden $f^{-1}(\overset{o}{\overline{B}})$, X'in belirtisiz açık kümesidir. Böylece $f^{-1}(B) \leq f^{-1}(\overset{o}{\overline{B}}) \leq (f^{-1}(\overset{o}{\overline{B}}))^o$ elde edilir.

(c)$\Longrightarrow$(a): B, Y'nin belirtisiz düzenli açık kümesi ise,hipotezden $f^{-1}(B) \leq (f^{-1}(\overset{o}{\overline{B}}))^o = (f^{-1}(B))^o$ olur. Üstelik, $(f^{-1}(B))^o \leq f^{-1}(B)$ olduğundan $f^{-1}(B)=(f^{-1}(B))^o$ elde edilir. O halde $f^{-1}(B)$, X'in belirtisiz açık kümesidir.

(b)$\Longrightarrow$(d): B, Y'de belirtisiz kapalı küme ise, $\overline{\overset{o}{B}} \leq B$ dir. Buradan, $f^{-1}(\overline{\overset{o}{B}}) \leq f^{-1}(B)$ olur. 1.7.5. Teorem (a)'dan, $\overline{\overset{o}{B}}$, Y'nin belirtisiz düzenli kapalı kümesidir. Hipotezden $f^{-1}(\overline{\overset{o}{B}})$, X'in belirtisiz kapalı kümesi olduğundan $(f^{-1}(\overline{\overset{o}{B}}))^{-} = f^{-1}(\overline{\overset{o}{B}}) \leq f^{-1}(B)$ olduğu görülür.

(d)$\Longrightarrow$(b): B, Y'de belirtisiz düzenli kapalı küme olsun. Her belirtisiz düzenli kapalı küme kapalı olduğundan (d) gereği

$(f^{-1}(\overline{\overset{o}{B}}))^{-} \leq f^{-1}(B)$ dir. Buradan $\overline{f^{-1}(B)} \leq f^{-1}(B)$ elde edilir.

Diğer taraftan $f^{-1}(B) \leq \overline{f^{-1}(B)}$ dir. Böylece $f^{-1}(B) = \overline{f^{-1}(B)}$ olur. Yani $f^{-1}(B)$, belirtisiz kapalıdır.

1.9.3. Uyarı: Açıktır ki belirtisiz sürekli fonksiyon belirtisiz hemen hemen süreklidir. Bunun tersi genelde doğru değildir [AZAD, 1981].

1.9.4. Tanım: X'in belirtisiz düzenli açık kümelerinin ailesi T_X belirtisiz topoloji için bir taban ise, (X,T_X) belirtisiz uzayına belirtisiz yarı düzenli uzay denir.

1.9.5. Teorem: $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ bir fonksiyon olsun. Y belirtisiz yarı düzenli uzay ise, f belirtisiz hemen hemen süreklidir. $\Longleftrightarrow$ f belirtisiz süreklidir.

Kanıt: $\Longrightarrow$: $B \in T_Y$ olsun. O zaman B_α'lar Y'de belirtisiz düzenli açık kümeler olmak üzere $B = \bigvee_\alpha B_\alpha$ dır. Buradan

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(\bigvee_\alpha B_\alpha) = \bigvee_\alpha f^{-1}(B_\alpha) \leq \bigvee_\alpha (f^{-1}(\overset{o}{\overline{B}}_\alpha))^{o}$$

$$= \bigvee_\alpha (f^{-1}(B_\alpha))^{o} \leq (\bigvee_\alpha f^{-1}(B_\alpha))^{o} = (f^{-1}(B))^{o}$$

elde edilir. Üstelik $(f^{-1}(B))^{o} \leq f^{-1}(B)$ dir. O halde $f^{-1}(B) = (f^{-1}(B))^{o}$ olur. Yani $f^{-1}(B) \in T_X$ tir. f belirtisiz hemen hemen süreklidir.

$\Longleftarrow$: B,Y'nin belirtisiz düzenli açık kümesi olsun. Belirtisiz düzenli açık küme, açık olduğundan ve hipotez gereği $f^{-1}(B) \in T_X$ olur. Böylece f belirtisiz hemen hemen süreklidir.

1.10. Belirtisiz Zayıf Sürekli Fonksiyonlar

1.10.1. Tanım: $f: X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Y'nin her belirtisiz açık B kümesi için $f^{-1}(B) \leq (f^{-1}(\overline{B}))^{o}$ ise, f'ye belirtisiz zayıf sürekli fonsiyon denir [AZAD, 1981].

1.10.2. Uyarı: Belirtisiz sürekli fonksiyon, belirtisiz zayıf süreklidir. Bunun tersi genelde doğru olmayabilir [AZAD, 1981].

1.10.3. Tanım: X'in her A belirtisiz açık kümesi, her α için $\overline{A_\alpha} \leq A$ olacak şekilde A_α belirtisiz açık kümelerinin bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa X belirtisiz uzayına belirtisiz düzenli uzay denilir [HUTTON-RELLY, 1974].

1.10.4. Teorem: Belirtisiz düzenli uzay belirtisiz yarı düzenli uzaydır.

Kanıt: A, X belirtisiz düzenli uzayının belirtisiz açık kümesi ve X'de $\overline{A_\alpha} \leq A$ özelliğindeki belirtisiz açık A_α kümeleri için $A = \bigvee_\alpha A_\alpha$ olsun. $A_\alpha \leq \overset{o}{\overline{A_\alpha}} \leq A$ olduğundan $A = \bigvee_\alpha (\overset{o}{\overline{A_\alpha}})$ dir. $B_\alpha = \overset{o}{\overline{A_\alpha}}$ diyelim. Belirtisiz kapalı kümenin içi belirtisiz düzenli açık küme olduğundan, her B_α, belirtisiz düzenli açık kümedir. Buradan A belirtisiz düzenli açık kümelerinin birleşimidir. Böylece X uzayı belirtisiz yarı düzenlidir [AZAD, 1981].

1.10.5. Teorem: $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ bir fonksiyon olsun. Y belirtisiz düzenli uzay ise, f belirtisiz zayıf süreklidir $\Longleftrightarrow$ f belirtisiz süreklidir.

Kanıt: 1.10.2. Uyarı'dan f belirtisiz sürekli fonksiyon ise, f belirtisiz zayıf süreklidir. O halde kanıt için, "f belirtisiz zayıf sürekli ise, f belirtisiz süreklidir." olduğunu göstermek yeterlidir. $A \in T_Y$ olsun. Y belirtisiz düzenli uzay olduğundan, her α için $\overline{A_\alpha} \leq A$ ve $A_\alpha \in T_Y$ olmak üzere $A = \bigvee_\alpha A_\alpha$ dır. f belirtisiz zayıf sürekli olduğundan

$$f^{-1}(A)=f^{-1}(\bigvee_\alpha A_\alpha)=\bigvee_\alpha f^{-1}(A_\alpha)\leq \bigvee_\alpha (f^{-1}(\overline{A_\alpha}))^{o} \leq \bigvee_\alpha (f^{-1}(A_\alpha))^{o} = (f^{-1}(A))^{o} \text{ dır.}$$

Ve buradan $f^{-1}(A) \in T_X$ dir. Böylece f belirtisiz süreklidir [AZAD, 1981].

2. BELİRTİSİZ TOPOLOJİK UZAYLAR ARASINDA BAZI YAKIN SÜREKLİ FONKSİYONLAR

2.1. GİRİŞ

Bu kesimde [MUKHERJEE – SİNHA, 1990] tarafından tanımlanmış belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli, belirtisiz θ-sürekli, belirtisiz zayıf δ-sürekli ve belirtisiz zayıf θ-sürekli fonksiyonlar üzerinde çalışılacaktır. Ayrıca bu süreklilik türleri arasında ilişkileri karşı örneklerle inceleyeceğiz.

2.2. Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Hemen Hemen Kuvvetli θ-Süreklilik, δ-Süreklilik, θ-süreklilik, Zayıf δ-Süreklilik ve Zayıf θ-süreklilik Türleri Arasındaki İlişkiler

2.2.1. Tanım: Bir x_λ belirtisiz noktasının her U belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu, A belirtisiz kümesi ile çakışığımsı ise, x_λ belirtisiz noktasına A belirtisiz kümesinin δ-kapanış noktası denir. A'nın bütün belirtisiz δ-kapanış noktalarının birleşimine A'nın belirtisiz δ-kapanışı denir ve $[A]_\delta$ ile gösterilir. $A=[A]_\delta$ ise A belirtisiz kümesi δ-kapalıdır. Belirtisiz δ-kapalı kümenin tümleyenine belirtisiz δ-açık denir [GANGULY-SAHA, 1988].

2.2.2. Tanım: Bir x_λ belirtisiz noktasının her U belirtisiz açık q-komşuluğu için $\overline{U}$, A belirtisiz kümesi ile çakışığımsı ise, x_λ belirtisiz noktasına A belirtisiz kümesinin θ-kapanış noktası denir. A'nın bütün belirtisiz θ-kapanış noktalarının birleşimine A'nın belirtisiz θ-kapanışı denir ve $[A]_\theta$ ile gösterilir. $A=[A]_\theta$ ise, A belirtisiz kümesi θ-kapalıdır. Belirtisiz θ-kapalı kümenin tümleyenine belirtisiz θ-açıktır denir [MUKHERJEE – SİNHA, 1990].

2.2.3. Tanım: x_λ belirtisiz noktasının $V \not{q}\, A^t$ olacak şekilde bir V belirtisiz kapalı q-komşuluğu varsa, A belirtisiz kümesine x_λ belirtisiz noktasının belirtisiz θ-komşuluğu denir.

2.2.4. Tanım: x_λ belirtisiz noktasının $V \not{q}\, A^t$ olacak şekilde bir V belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu varsa, A belirtisiz kümesine x_λ belirtisiz noktasının belirtisiz δ-komşuluğu denir.

2.2.5. Uyarı: X belirtisiz topolojik uzayındaki herhangi bir A belirtisiz kümesi için

$$\overline{A} \leq [A]_{\delta} \leq [A]_{\theta} \text{ 'dır.}$$

Ganguly ve Saha [1988] tarafından genelde $\overline{A} \neq [A]_{\delta}$ olduğu gösterilmiştir. Genelde $[A]_{\delta}=[A]_{\theta}$ olmadığı da 2.2.6. Örnek ile gösterilmiştir [MUKHERJEE-SİNHA 1990] .

2.2.6. Örnek: X=[0,1] ve X üzerindeki belirtisiz topolojiyi

$$T=\{0,1,\ U:\ \tfrac{1}{2} < U(0) \leq \tfrac{3}{4},\quad V:\ V(0) = \tfrac{1}{10},\ U(x) \text{ ve } V(x)$$
$$\text{her } x \neq 0 \text{ için sıfırdır.}\}$$

olarak alalım. A belirtisiz kümesini $x\neq 0$ için $A(x)=x^2$ ve $A(0)=1/5$, x_{λ} belirtisiz noktasını da

$$x_{\lambda}(x)=\begin{cases} 1/2 & , x=0 \\ 0 & , x\neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. x_{λ} 'nın kapalı q-komşulukları sadece V^t ve 1 olup, bunlar A ile çakışığımsı olur. Böylece $x_{\lambda} \in [A]_{\theta}$ dır. $X\neq 0$ için $U(x)=0$ ve $U(o)=3/4$ belirtisiz kümesi x_{λ}'nın belirtisiz düzenli açık q-komşuluğudur. Fakat U belirtisiz kümesi A ile çakışığımsı değildir. O halde $x_{\lambda} \notin [A]_{\delta}$ dır.

2.2.7. Teorem: (X,T_X) belirtisiz topolojik uzayındaki bir A belirtisiz açık kümesi için

$$\overline{A} = [A]_{\delta} = [A]_{\theta} \text{ dır.}$$

Kanıt: 2.2.5. Uyarıda herhangi bir A belirtisiz kümesi için $\overline{A} \leq [A]_{\delta} \leq [A]_{\theta}$ olduğu için $[A]_{\theta} \leq \overline{A}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x_{\lambda} \in [A]_{\theta}$ alalım. $x_{\lambda} \in \overline{A}$ olduğunu göstermeliyiz. Tersine olarak $x_{\lambda} \notin \overline{A}$ olsa, x_{λ} 'nın $V \not{q} A$ olacak şekilde bir V q-komşuluğu vardır. O halde

$$V \not{q} A \Longrightarrow V \leq 1-A \Longrightarrow \overset{o}{V} \leq (1-A)^{o} \leq 1-A \Longrightarrow \overline{\overset{o}{V}} \leq \overline{1-A} = 1-\overset{o}{A} = 1-A \Longrightarrow \overline{\overset{o}{V}}\ q\ A \Longrightarrow$$

$x_{\lambda} \notin [A]_{\theta}$ 'dır. Bu ise $x_{\lambda} \in [A]_{\theta}$ oluşu ile çelişir. O halde 2.2.5. Uyarı ve $[A]_{\theta} \leq \overline{A}$ kapsamasından (X,T_X) belirtisiz topolojik uzayındaki

A belirtisiz açık kümesi için

$\bar{A} = [A]_\delta = [A]_\theta$ çıkar.

2.2.8. Tanım: (X,T_X) ve (Y,T_Y) belirtisiz topolojik uzaylar ve $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ bir fonksiyon olsun. X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V q-komşuluğu için, $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ nın bir U q-komşuluğu varsa, f'ye belirtisiz sürekli fonksiyon denir [MİNG-MİNG, 1980].

2.2.9. Tanım: (X,T_X) ve (Y,T_Y) belirtisiz topolojik uzaylar ve $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ bir fonksiyon olsun. X'in her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın Y'de herhangi bir V belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu için, $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ 'nın U belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu varsa, f ye belirtisiz δ-sürekli fonksiyon denir [GANGULLY-SAHA, 1988] .

2.2.10. Tanım: $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ fonksiyonu verilsin.

a) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için, $f(\bar{U}) \leq \overset{o}{\bar{V}}$ olacak şekilde x_λ 'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f'ye belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli fonksiyon denir.

b) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu, $f(\bar{U}) \leq \bar{V}$ olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f'ye belirtisiz θ-sürekli fonksiyon denir.

c) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için, $f(\overset{o}{\bar{U}}) \leq \bar{V}$ olacak şekilde x_λ 'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f'ye belirtisiz zayıf δ-sürekli fonksiyon denir.

d) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için, $f(U) \leq \bar{V}$ olacak şekilde x_λ 'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f'ye belirtisiz zayıf θ-sürekli fonksiyon denir [MUKHERJEE-SİNHA, 1990] .

2.2.10. Tanım da tanımlanan süreklilik türleri arasında aşağıdaki gerektirmeler vardır:

belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli fonksiyon $\Longrightarrow$ belirtisiz δ-sürekli fonksiyon $\Longrightarrow$ belirtisiz θ-sürekli fonksiyon $\Longrightarrow$ belirtisiz zayıf δ-sürekli fonksiyon $\Longrightarrow$ belirtisiz zayıf θ-sürekli fonksiyon.

2.2.11.Uyarı: Yukardaki gerektirmelerin tersleri genelde doğru değildir. Bunlarla ilgili karşı örnekleri ileride vereceğiz [MUKHERJEE-SİNHA, 1990].

2.2.12. Teorem: $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

b) X'deki her A belirtisiz kümesi için

$$f([A]_\theta) \leq [f(A)]_\delta \text{ 'dır.}$$

c) Y'deki her B belirtisiz kümesi için

$$[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}([B])_\delta \text{ 'dır.}$$

d) Y'deki her belirtisiz δ-kapalı kümenin öngörüntüsü X'de belirtisiz θ-kapalıdır.

e) Y'deki her belirtisiz δ-açık kümenin öngörüntüsü, X'de belirtisiz θ-açıktır.

f) Y'deki her belirtisiz düzenli açık kümenin öngörüntüsü, X'de belirtisiz θ-açıktır.

g) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her N belirtisiz δ-komşuluğu için $f^{-1}(N)$, x_λ'nın belirtisiz θ-komşuluğudur.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b): $x_\lambda \underset{Q}{\in} [A]_\theta$ ve V, $f(x_\lambda)$'nın açık q-komşuluğu olsun. O zaman x_λ'nın $f(\overline{U}) \leq \overset{0}{\overline{V}}$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan $x_\lambda \in [A]_\theta \Longrightarrow \overline{U}\ q\ A \Longrightarrow f(\overline{U})q f(A) \Longrightarrow \overset{0}{\overline{V}}\ q\ f(A)$

$\Longrightarrow f(x_\lambda) \in [f(A)]_\delta \Longrightarrow x_\lambda \in f^{-1}([f(A)]_\delta)$ olur. Böylece $[A]_\theta \leq f^{-1}([f(A)]_\delta)$ dır. f altında görüntüsü alınırsa

$$f([A]_\theta) \leq [f(A)]_\delta \quad \text{elde edilir.}$$

(b) $\Longrightarrow$(c): (b)'den

$$f([f^{-1}(B)]_\theta) \leq [f(f^{-1}(B))]_\delta \leq [B]_\delta$$

yazabiliriz. Buradan f'nin öngörüntüsü alınırsa

$[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}([B]_\delta)$ elde edilir.

(c) $\Longrightarrow$(d): A,Y'de belirtisiz δ-kapalı küme olsun. O zaman $[A]_\delta = A$ ve (c)'den

$$[f^{-1}(A)]_\theta \leq f^{-1}([A]_\delta) = f^{-1}(A) \text{ olur.}$$

Diğer taraftan $f^{-1}(A) \leq [f^{-1}(A)]_\theta$ her zaman vardır. O halde $f^{-1}(A) = [f^{-1}(A)]_\theta$ elde edilir. Böylece $f^{-1}(A)$, belirtisiz θ-kapalıdır.

(d) $\Longrightarrow$(e): A, Y'de belirtisiz δ-açık küme olsun. O zaman A^t, belirtisiz δ-kapalı küme ve (d)'den $f^{-1}(A^t)$, belirtisiz θ-kapalıdır. $f^{-1}(A^t) = 1-f^{-1}(A)$ olduğundan $f^{-1}(A)$, belirtisiz θ-açıktır.

(e)$\Longrightarrow$(f): Her düzenli açık küme δ-açık olduğundan istenen hemen elde edilir.

(f)$\Longrightarrow$(a): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)=y_\lambda$'nın herhangi bir açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overset{o}{\overline{V}}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz düzenli açık q-komşuluğudur. (f)'den $f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$, X'de belirtisiz θ-açık küme ve $x_\lambda \notin 1-f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$'dir. Gerçekten $x_\lambda \in 1-f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$ ise,

$$\lambda \leq 1-\overset{o}{\overline{V}}(f(x)) = 1-(\overset{o}{\overline{V}})(y) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{(i)}$$

elde edilir.

V belirtisiz açık olduğundan, $V \leq \overset{o}{\overline{V}}$ dir. O halde $1-V(y) \geq 1-[\overset{o}{\overline{V}}](y)$ dir. Buradan, V , y_λ'nın q-komşuluğu olduğundan, $\lambda + V(y) \geq 1$ dir. Böylece

$$\lambda > 1-V(y) \geq 1-[\overset{o}{\overline{V}}](y) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \text{(ii)}$$

olur.

Ancak (i) ve (ii)'nin çeliştikleri açıktır. Buradan $x_\lambda \notin 1-f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}}) = B$ olmalıdır. B, belirtisiz θ-kapalı küme olduğundan x_λ'nın $\overline{U} \not q B$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. O zaman

$x_\lambda q U \leq \overline{U} \leq 1-B = f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$ dir. Buradan $f(U) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ elde edilir. Yani f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ süreklidir.

(a)$\Longrightarrow$(g): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve N, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz δ-komşuluğu olsun. O zaman $f(x_\lambda)$'nın $\overline{V} \not q N^t$ olacak şekilde V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olduğundan x_λ'nın $f(\overline{U}) \leq \overline{V} \leq N$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. O halde $\overline{U} \leq f^{-1}(N)$ ve $f^{-1}(N)$, x_λ nın belirtisiz θ-komşuluğudur.

(g)$\Longrightarrow$(a): x_λ , X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overline{V}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz δ-komşuluğudur. Hipotezden $f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$, x_λ'nın belirtisiz θ-komşuluğudur. Böylece x_λ'nın $\overline{U} \leq f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. O halde $f(\overline{U}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ dir. Bu da f'nin belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olmasıdır.

2.2.13. Teorem: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz θ-süreklidir.$\Longleftrightarrow$ X'in her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nin her N belirtisiz θ-komşuluğu için $f^{-1}(N)$, x_λ'nın belirtisiz θ-komşuluğudur.

Kanıt: X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her N belirtisiz θ-komşuluğu için $f(x_\lambda)$'nın $\overline{V}\, q\, N^t$ olacak şekilde V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f'nin belirtisiz θ-sürekliliğinden x_λ'nın $f(\overline{U}) \leq \overline{V} \leq N$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan $\overline{U} \leq f^{-1}(f(\overline{U})) \leq f^{-1}(N)$ ve $f^{-1}(N)$, x_λ 'nın belirtisiz θ-komşuluğu olur.

Tersine olarak x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overline{V}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz θ-komşuluğudur. Hipotezden $f^{-1}(\overline{V})$, x_λ'nın belirtisiz θ-komşuluğudur. O halde x_λ nın $\overline{U} \leq f^{-1}(\overline{V})$ olacak şekilde U beilrtisiz açık q-komşuluğu vardır. Böylece $f(\overline{U}) \leq \overline{V}$ dir. Bu ise f'nin belirtisiz θ-sürekli olmasıdır.

2.2.14. Teorem: $f:X \to Y$ belirtisiz θ-sürekli fonksiyon ise, aşağıdaki özellikler vardır:

a) X'deki her A belirtisiz küme için

$$f([A]_\theta) \leq [f(A)]_\theta\text{'dır.}$$

(b) Y'deki her B belirtisiz kümesi için

$$[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}([B]_\theta)\text{'dır.}$$

c) Y'deki her B belirtisiz θ-kapalı küme için $f^{-1}(B)$, X'de belirtisiz θ-kapalıdır.

d) Y'deki her B belirtisiz θ-açık küme için $f^{-1}(B)$, X'de belirtisiz θ-açıktır.

e) Y'deki her B belirtisiz açık küme için $[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}(\overline{B})$'dir.

Kanıt: (a): $x_\lambda \in [A]_\theta$ ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman x_λ'nın $f(\overline{U}) \leq \overline{V}$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan

$$x_\lambda \in [A]_\theta \Longrightarrow \overline{U}\ q\ A \Longrightarrow f(\overline{U})\ q\ f(A) \Longrightarrow \overline{V}\ q\ f(A) \Longrightarrow f(x_\lambda) \in [f(A)]. \Longrightarrow$$

$$x_\lambda \in f^{-1}([f(A)]_\theta)$$

elde edilir. Böylece $[A_\theta] \leq f^{-1}([f(A)]_\theta)$ ve her iki yanın f altındaki görüntüsü alınırsa $f([A]_\theta) \leq [f(A)]_\theta$ gerçeklenir.

(b): (a)'da A belirtisiz kümesinin yerine $f^{-1}(B)$ alınırsa

$$f([f^{-1}(B)]_\theta) \leq [f(f^{-1}(B))]_\theta \leq [B]_\theta$$

olur. Buradan

$f([f^{-1}(B)]_\theta) \leq [B]_\theta$ elde edilir ve her iki tarafın öngörüntüsü alındığında

$$[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}([B]_\theta) \quad \text{olur.}$$

(c): Y'deki B belirtisiz kümesi θ-kapalı küme olduğu için $[B]_\theta = B$ dir. (b)'den dolayı

$$[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}([B]_\theta) = f^{-1}(B) \Longrightarrow [f^{-1}(B)]_\theta = f^{-1}(B)$$

elde edilir. Bu ise $f^{-1}(B)$'nin X'de belirtisiz θ-kapalı olduğunu gösterir.

(d): B, Y'de belirtisiz θ-açık küme olsun. Belirtisiz θ-açık kümenin tümleyeni belirtisiz θ-kapalıdır. O halde (c)'de B yerine B^t alındığında istenen hemen elde edilir.

(e): B, Y'de belirtisiz açık küme olduğundan, $\overline{B}=[B]_\theta$ dır, (b)'den

$$[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}([B]_\theta) = f^{-1}(\overline{B}) \text{ olur.}$$

Böylece

$$[f^{-1}(B)]_\theta \leq f^{-1}(\overline{B}) \text{ elde edilir.}$$

2.2.15. Teorem: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir,

b) X'deki her A belirtisiz kümesi için

$$f([A]_\delta) \leq [f(A)]_\theta \text{ dır.}$$

c) Y'deki her B belirtisiz kümesi için

$$[f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}([B]_\theta)\text{'dır.}$$

d) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her N belirtisiz θ-komşuluğu için, $f^{-1}(N)$, x_λ'nın belirtisiz δ-komşuluğudur.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b): $x_\lambda \in [A]_\delta$ ve V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık bir q-komşuluğu olsun. O zaman x_λ'nın $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V}$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan

$$x_\lambda \in [A]_\delta \Longrightarrow \overset{o}{\overline{U}}\, q\, A \Longrightarrow f(\overset{o}{\overline{U}})\, q f(A) \Longrightarrow \overline{V} q f(A) \Longrightarrow f(x_\lambda) \in [f(A)]_\theta \Longrightarrow x_\lambda \in f^{-1}([f(A)]_\theta)$$

elde edilir. Böylece

$$[A]_\delta \leq f^{-1}([f(A)]_\theta) \Longrightarrow f([A]_\delta) \leq [f(A)]_\theta \text{ elde edilir.}$$

(b)$\Longrightarrow$(c): A belirtisiz kümesi yerine $f^{-1}(B)$ alınırsa (b)'den

$$f([f^{-1}(B)]_\delta) \leq [f(f^{-1}(B))]_\theta \text{ olur. Buradan}$$

$$f([f^{-1}(B)]_\delta) \leq [B]_\theta \Longrightarrow f^{-1}(f([f^{-1}(B)]_\delta)) \leq f^{-1}([B]_\theta) \Longrightarrow$$

$$[f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}([B]_\theta) \text{ elde edilir.}$$

(c)$\Longrightarrow$(a): x_λ , X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q- komşuluğu olsun. O zaman $f(x_\lambda) \notin [1-\overline{V}]_\theta$ dır. Eğer $f(x_\lambda) \in [1-\overline{V}]_\theta$ olsaydı; V , $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olduğundan $\overline{V}q(1-\overline{V})$ olurdu ki, bu olanaksızdır. O halde (c)'den

$$f([f^{-1}(1-\overline{V})]_\delta) \leq [1-\overline{V}]_\theta \quad \text{elde edilir.}$$

Buradan

$$f(x_\lambda) \notin f([f^{-1}(1-\overline{V})]_\delta) \text{ olur. Yani}$$

$x_\lambda \notin [f^{-1}(1-\overline{V})]_\delta$ dir. O zaman x_λ'nın $\overset{o}{\overline{U}} \leq 1-f^{-1}(1-\overline{V}) = \underset{o}{f}^{-1}(\overline{V})$ olacak şe-kilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Bu ise $f(\overline{U}) \leq \overline{V}$ olmasını gerektirir. Yani f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir.

(a)$\Longrightarrow$(d): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve N, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz θ-komşuluğu olsun. O zaman $f(x_\lambda)$'nın $\overline{V}\, q\, N^t$ olacak şekilde V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz zayıf θ-sürekli olduğundan x_λ 'nın $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V} \leq N \Longrightarrow \overset{o}{\overline{U}} \leq f^{-1}(\overline{V}) \leq f^{-1}(N)$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Böylece $f^{-1}(N)$, x_λ'nın belirtisiz δ-komşuluğu olur.

(d) $\Longrightarrow$(a): x_λ , X de belirtisiz nokta ve N, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overline{N}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz θ-komşuluğudur. Hipotezden $f^{-1}(\overline{N})$, x_λ'nın belirtisiz δ-komşulğudur. Böylece x_λ 'nın

$\overset{o}{\overline{U}} \leq f^{-1}(\overline{N}) \qquad f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{N}$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. O halde f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir,

2.2.16. Teorem: $f: X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz zayıf θ-süreklidir. $\Longleftrightarrow$X deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her N belirtisiz θ-komşuluğu için $f^{-1}(N)$, x_λ'nın q-komşuluğudur.

Kanıt: $\Longrightarrow$: f belirtisiz zayıf θ sürekli, x_λ , X'de belirtisiz nok-ta ve N de $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir θ-komşuluğu olsun. O zaman $f(x_\lambda)$'nın $\overline{V} \leq N$ olacak şekilde V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olduğundan ve hipotezden

$f(U) \leq \overline{V} \leq N \Longrightarrow U \leq f^{-1}(N)$ olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. O halde $f^{-1}(N)$, x_λ 'nın q-komşuluğudur,

$\Leftarrow$: x_λ , X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overline{V}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz θ-komşuluğudur. Hipotezden $f^{-1}(\overline{V})$, x_λ'nın q-komşuluğudur. O halde

$$U \leq f^{-1}(\overline{V}) \Longrightarrow f(U) \leq f(f^{-1}(\overline{V})) \leq \overline{V}$$

olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Böylece f belirtisiz zayıf θ-süreklidir.

2.2.17. Teorem: $f:X \to Y$ belirtisiz zayıf θ-sürekli ise, aşağıdaki özellikler vardır:

a) X'deki her A belirtisiz kümesi için

$$f(\overline{A}) \leq [f(A)]_\theta \text{ dır,}$$

b) Y'deki her B belirtisiz kümesi için

$$\overline{f(\overline{f^{-1}(B)}^{\,o})} \leq [B]_\theta \text{ dır,}$$

Kanıt: (a): $x_\lambda \in \overline{A}$ ve $f(x_\lambda)$'nın kapalı bir q-komşuluğu W olsun. O zaman $V \leq W$ olacak şekilde $f(x_\lambda)$'nın V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz zayıf θ-sürekli olduğundan $f(U) \leq \overline{V}$ olacak şekilde x_λ nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan

$$x_\lambda \in \overline{A} \Longrightarrow UqA \Longrightarrow f(U)qf(A) \Longrightarrow \overline{V}qf(A) \Longrightarrow Wqf(A) \Longrightarrow f(x_\lambda) \in [f(A)] \Longrightarrow$$

$$x_\lambda \in f^{-1}([f(A)]_\theta)$$

elde edilir. Böylece $\overline{A} \leq f^{-1}([f(A)]_\theta) \Longrightarrow f(\overline{A}) \leq [f(A)]_\theta$ olduğu görülür.

(b):B,Y'de herhangi bir belirtisiz küme ve x_λ, X'de $x_\lambda \in (\overline{f^{-1}(B)})^{o}$ olacak şekilde belirtisiz nokta olsun. V de $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. Hipotezden x_λ'nın $f(U) \leq \overline{V}$ olacak şekilde U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan

$x_\lambda \varepsilon (f^{-1}(B))^{\bar{\overset{o}{}}} \leq \overline{f^{-1}(B)} \Longrightarrow U q f^{-1}(B) \Longrightarrow f(U) q B \Longrightarrow \overline{V} q B \Longrightarrow f(x_\lambda) \varepsilon [B]_\theta$ olur.
Böylece

$$f(\overline{(f^{-1}(B))}^{o}) \leq [B]_\theta \text{ elde edilir.}$$

2.2.18. Teorem: $f: X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz zayıf θ-süreklidir. Y'nin her V belirtisiz açık kümesi için

$x_\lambda q f^{-1}(V) \Longrightarrow x_\lambda q (f^{-1}(\overline{V}))^o$ dir.

Kanıt: $\Longrightarrow$: f, belirtisiz zayıf θ-sürekli ve $x_\lambda q f^{-1}(V)$ olsun. (Burada x_λ X de belirtisiz nokta ve V, Y'de belirtisiz açık kümedir.) O zaman $f(x_\lambda) q V$ ve f'nin belirtisiz zayıf θ-sürekliliğinden X'de x_λ q U ve $f(U) \leq \overline{V}$ olacak şekilde U belirtisiz açık kümesi vardır. Böylece $U \leq f^{-1}(\overline{V})$ dır ve buradan $U \leq (f^{-1}(\overline{V}))^o$ dir. Buradan, $x_\lambda q (f^{-1}(\overline{V}))^o$ elde edilir.

$\Longleftarrow$: Tersine olarak verilen koşullar gerçeklensin. x_λ, X'de herhangi bir belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $x_\lambda q f^{-1}(V)$ dir. Hipotezden $x_\lambda q (f^{-1}(\overline{V}))^o$ dir. $U = (f^{-1}(\overline{V}))^o$ alınırsa U, X'de

$$f((f^{-1}(\overline{V}))^o) \leq f(f^{-1}(\overline{V})) \leq \overline{V}$$

olacak şekilde x_λ'nın belirtisiz açık q-komşuluğudur. O halde f, belirtisiz zayıf θ-süreklidir.

Şimdi de 2.2.11. Uyarı'da verilen gerektirmelerin terslerinin genelde doğru olmadığını aşağıdaki örneklerle görebiliriz [MUKHERJEE-SİNHA, 1990].

2.2.19. Örnek: $X=[0,1]$ ve X üzerinde $T=\{0,1,A\}$, $T_1=\{0,1,B\}$ belirtisiz topolojilerini düşünelim. Burada A belirtisiz kümesi $x=0$ için $A(x) \leq 1/4$, $x \neq 0$ için $A(x)=0$; B belirtisiz kümesi de $x=0$ için $1/2 < B(x) \leq 2/3$, $x \neq 0$ için $B(x)=0$ olarak tanımlansın. $f:(X,T_1) \to (X,T)$ birim dönüşümünü alalım. Şimdi f'nin belirtisiz zayıf θ-sürekli, fakat zayıf δ-sürekli olmadığını gösterelim. Bir x_λ belirtisiz noktası $x \neq 0$ için yalnızca $V=1$ belirtisiz kümesi $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğudur. O zaman $f(U) \leq \overline{V}$ olacak şekilde U=1 belirtisiz kümesi x_λ'nın belirtisiz açık q-komşuluğudur. Diğer taraftan, x=0 durumunda X'in x_λ belirtisiz noktası ve f (x_λ)'nin herhangi bir V belirtisiz açık q-komşuluğu için[V=1 için U=1 olacağından V≠ 1 durumunda inceliyoruz.] $\lambda > 3/4$ olur. Böylece sıfırdan farklı her U belirtisiz açık kümesi x_λ'nın q-komşuluğudur. Her V belirtisiz kümesi için

$$\overline{V}(y) = \begin{cases} 3/4 & , y=0 \quad \text{için} \\ 1 & , y\neq 0 \quad \text{için dir.} \end{cases}$$

O halde herhangi bir U belirtisiz açık kümesi için, $f(U)=U \leq \overline{V}$ dır. Buradan f, belirtisiz zayıf θ-süreklidir.

Şimdi x_λ belirtisiz noktasını, x=0 için λ=4/5 olarak tanımlayalım. V belirtisiz açık kümesi de V(0)=9/40 biçiminde olsun. O zaman V belirtisiz açık kümesi, x=0 için, $\overline{V}(0)=3/4$ ve x≠0 için $\overline{V}(x)=1$ olan $f(x_\lambda)$ belirtisiz noktasının belirtisiz açık q-komşuluğudur. Buradan herhangi bir $U\neq 0_X$ belirtisiz kümesi için $\overset{o}{\overline{U}}=1_X$ elde edilir. Böylece herhangi bir $U\neq 0_X$ için $f(\overset{o}{\overline{U}})=1 > \overline{V}$ bulunur. Yani f, belirtisiz zayıf δ-sürekli değildir.

2.2.20. Örnek: X=[0,1] ve a, X'in sabit elemanı olsun. X üzerinde

T={0,1,A,B : A(a)=1/4 , B(a)=7/12 ve her x≠a için A(x),B(x) sıfırdır } ve

T_1={0,1,C : C(a)=1/3 ve x≠a için C(x)=0 dır}

topolojilerini düşünelim.

$f:(X,T) \to (X,T_1)$ birim dönüşüm olsun. Şimdi f'nin belirtisiz zayıf δ-sürekli, fakat belirtisiz θ-sürekli olmadığını görelim. x_λ, X'de belirtisiz nokta olsun. x≠a ise, sadece V=1 belirtisiz kümesi $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğudur. O zaman U=1 , $f(\overset{o}{\overline{U}})=V$ olacak şekilde x_λ'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olur. x=a için V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. V=1 ise, istenen hemen elde edilir. V=C alalım. Bu durumda $\lambda > 2/3$ tür. O halde B, x_λ'nın $f(\overset{o}{\overline{B}})=B \leq \overline{C}=C^t$ olacak şekilde belirtisiz açık q-komşuluğudur. Böylece f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir. Şimdi $a_{17/24}$, X'de, belirtisiz noktadır. $a_{17/24}$'ün herhangi bir U belirtisiz açık q-komşuluğu için U=B ya da 1 ise, $f(\bar{U})=A^t$ ya da $f(\bar{U})=1$ olur. Buradan $f(\bar{U}) \not\leq \bar{C}=C^t$ çıkar. O halde f, belirtisiz Q-sürekli değildir.

2.2.21. Örnek: X boş olmayan herhangi bir küme ve a, X'in sabit elemanı olsun. A ve B belirtisiz kümelerini

$x=a$ için $A(a)=1/3$, $B(a)=1/4$ ve

$x\neq a$ için $A(x)=B(x)=0$ olarak tanımlayalım.

X üzerinde $T=\{0,1,A\}$ ve $T_1=\{0,1,B\}$ topolojilerini düşünelim. $f:(X,T) \to (Y,T_1)$ birim dönüşüm olsun. x_λ , (X,T)'da herhangi bir belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. Eğer V=B ise, $f(\bar{U})=A^t$ olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Diğer taraftan $\bar{V}=\bar{B}=B^t$ dir. Buradan $f(\bar{U})\leq \bar{V}$ elde edilir. V=1 durumunda sonuç açıktır. O halde f, belirtisiz Q-süreklidir.

Şimdi $a_{4/5}$ belirtisiz noktasını alalım. B, (X,T_1)'de $f(a_{4/5})$'nin belirtisiz düzenli açık q-komşuluğudur. Buradan A ve 1 belirtisiz kümeleri, (X,T)'da $a_{4/5}$'nin belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu olur. Fakat, $f(A)\not\leq B$ ve $f(1)\not\leq B$ dir. O halde f, belirtisiz δ-sürekli değildir.

2.2.22. Örnek: X=[0,1] ve A belirtisiz kümesi x=0 için A(o)= 1/3 ve $x\neq 0$ için $A(x)=0$ olsun. X üzerinde $T=\{0,1,A\}$ topolojisini alalım. $f:(X,T) \to (X,T)$ birim fonksiyon olsun. O zaman (X,T)'nun tek belirtisiz düzenli açık kümesi ($\neq 0,1$)

$$A(x)=\begin{cases} 1/3 & , \quad x=0 \quad \text{için} \\ 0 & , \quad x\neq 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

dir. Buradan $f(A)\leq A$ olduğundan, f'nin belirtisiz δ-sürekli olduğu açıktır. Şimdi x_λ belirtisiz noktası x=0'da λ=3/4 ve $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu da $U\neq 1$ olsun. Buradan

$$\overset{o}{(\bar{U})}(x)=\begin{cases} 1/3 & , \ x=0 \ \text{için} \\ 0 & , \ x\neq 0 \ \text{için} \end{cases}$$

olur. Fakat, (X,T) nun her $V(\neq 0,1)$ belirtisiz açık kümesi için,

$$(\overline{V})(x) = \begin{cases} 2/3 & , x=0 \quad \text{için} \\ 1 & , x\neq 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

dir. Böylece $f(\overline{V}) > \overset{o}{\overline{U}}$ dir. Yani f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli değildir.

Şimdi 2.2.11. Uyarı'da verilmiş olan gerektirmelerin terslerinin de ek koşullar altında doğru olduğunu vereceğiz.

2.2.23. Tanım: (X,T_χ) belirtisiz topolojik uzayı verilsin.

1) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve x_λ nın her U açık q-komşuluğu için x_λ nın $\overline{V} \leq U$ olacak şekilde bir V açık q-komşuluğu varsa, (X,T_χ)'ya belirtisiz düzenli uzay denir.

2) X'deki her V belirtisiz düzenli açık kümesi ve $x_\lambda q V$ özelliğindeki her x_λ belirtisiz noktası için $x_\lambda q U \leq \overline{U} \leq V$ olacak şekilde bir U belirtisiz düzenli açık kümesi varsa, (X,T_χ)'ya belirtisiz hemen hemen düzenli uzay denir.

3) Her U belirtisiz açık kümesi ve $x_\lambda q U$ özelliğindeki her x_λ belirtisiz noktası için, $x_\lambda q V$ ve $V \leq \overset{o}{\overline{V}} \leq U$ olacak şekilde V belirtisiz açık kümesi varsa, (X,T_χ)'ya belirtisiz yarı düzenli uzay denir.

2.2.24. Uyarı: a) Her belirtisiz düzenli uzay belirtisiz yarı düzenlidir.

b) Her belirtisiz düzenli uzay belirtisiz hemen hemen düzenlidir.

2.2.25. Tanım: $f:X \to Y$ fonksiyonu verilsin. X'in her belirtisiz düzenli açık A kümesi için, $f(A)$ Y'de belirtisiz açık oluyorsa, f'ye belirtisiz hemen hemen açık fonksiyon denir [NANDA, 1986],[YALVAÇ, 1987].

2.2.26. Teorem: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdaki gerektirmeler vardır:

a) X belirtisiz düzenli uzay ve f belirtisiz zayıf θ-sürekli ise, f belirtisiz θ-süreklidir.

b) Y belirtisiz hemen hemen düzenli uzay ve f belirtisiz θ-sürekli ise, f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

c) X belirtisiz hemen hemen düzenli uzay ve f belirtisiz δ-sürekli ise, f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

d) f belirtisiz θ-sürekli ve belirtisiz hemen hemen açık ise, f belirtisiz δ-süreklidir.

Kanıt: a) x_λ X'de bir belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık, q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz zayıf θ-sürekli olduğundan $f(U) \leq \overline{V}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. X belirtisiz düzenli olduğundan x_λ'nın $\overline{N} \leq U$ olacak şekilde bir N belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan $f(\overline{N}) \leq f(U) \leq \overline{V}$ elde edilir. O halde f, belirtisiz θ-süreklidir.

(b): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overset{o}{\overline{U}}$, $f(x_\lambda)$'nin belirtisiz düzenli açık q-komşuluğudur. Y belirtisiz hemen hemen düzenli olduğundan, $f(x_\lambda)q\, N \leq \overline{N} \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde $f(x_\lambda)$'nın N belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. f belirtisiz θ-sürekli olduğundan $f(\overline{U}) \leq \overline{N} \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde x_λ'nın V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Böylece $f(\overline{U}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olur. O halde f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

(c): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nin herhangi bir açık q-komşuluğu olsun. O zaman $f(U) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. X belirtisiz hemen hemen düzenli ve U X'deki x_λ'nın belirtisiz düzenli q-komşuluğu olduğundan, x_λ'nın $x_\lambda q N \leq \overline{N} \leq N$ olacak şekilde bir N belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. Buradan $f(\overline{N}) \leq f(U) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ elde edilir. Böylece f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

(d): x_λ, X'de herhangi bir belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz θ-sürekli olduğundan $f(\overline{U}) \leq \overline{V}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz hemen hemen açık olduğundan $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ dir: Bu ise f'nin belirtisiz δ-sürekli olduğunu gösterir.

2.2.27. Sonuç: X belirtisiz düzenli, Y belirtisiz hemen hemen düzenli ve f belirtisiz zayıf θ-sürekli ise, f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

Aşağıdaki örnekle, belirtisiz hemen hemen kuvvetli sürekliliğin sürekliliği gerektirmediğini göstermek istiyoruz.

2.2.28. Örnek: X boş olmayan herhangi bir küme ve $f:X \to X$ birim fonksiyon olsun. a , X'in herhangi bir sabit elemanı ve T_1, X üzerinde

$$T_1 = \{0, 1, A : A(a) > 1/2 \quad \text{ve} \quad x \neq a \text{ için } A(x) = 0\}$$

ile tanımlanan bir belirtisiz topoloji olsun. X üzerinde $f:(X,T) \to (X,T_1)$ belirtisiz sürekli olmayacak şekilde herhangi bir belirtisiz T topolojisi alalım. X'de herhangi bir belirtisiz nokta x_λ ve V, $f(x_\lambda)=y_\lambda$'nın herhangi bir T_1-açık q-komşuluğu olsun. Eğer V=A ise, $\overline{V}=1$ dir. V=1 için de $\overline{V}=1$ dir. O zaman $\overset{o}{\overline{V}} = 1$ dir. Buradan f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir [MUKHERJEE-SİNHA, 1990].

2.2.11. Uyarı'daki bazı gerektirmelerin terslerinin bazı ek koşullar altında doğru olduğunu aşağıdaki teoremle verebiliriz:

2.2.29. Teorem: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdaki gerektirmeler vardır:

a) Y belirtisiz yarı düzenli ve f belirtisiz δ-sürekli ise, f belirtisiz süreklidir.

b) Y belirtisiz düzenli ve f belirtisiz zayıf θ-sürekli ise, f belirtisiz süreklidir.

Kanıt: (a): x_λ , X'de belirtisiz nokta ve U, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir q-komşuluğu olsun. Y belirtisiz yarı düzenli olduğundan $f(x_\lambda)$'nın $V \leq \overset{o}{\overline{V}} \leq U$ olacak şekilde bir V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan $\overset{o}{\overline{V}}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz düzenli açık q-komşuluğudur. f belirtisiz δ-sürekli olduğundan $f(N) \leq \overset{o}{\overline{V}} \leq U$ olacak şekilde x_λ'nın bir N belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. Böylece f, belirtisiz süreklidir.

(b): x_λ, X'de bir belirtisiz nokta ve U, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. Y belirtisiz düzenli olduğundan $\overline{V} \leq U$ olacak şekilde $f(x_\lambda)$'nın bir V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f belirtisiz zayıf θ-sürekli olduğundan
$f(N) \leq \overline{V} \leq U$ olacak şekilde x_λ'nın N belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Böylece f belirtisiz süreklidir.

2.2.30. Teorem: $f:X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz sürekli ise, f belirtisiz θ-süreklidir.

Kanıt: X'de herhangi bir x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın V belirtisiz açık q-komşuluğu verilsin. O zaman $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz sürekli olduğundan $f(\overline{U}) \leq \overline{f(U)}$ ve $f(\overline{U}) \leq \overline{f(U)} \leq \overline{V}$ olur. Böylece $f(\overline{U}) \leq \overline{V}$ elde edilir. Yani f, belirtisiz θ-süreklidir.

2.2.31. Teorem: $f:X \to Y$, belirtisiz sürekli ve X, belirtisiz düzenli ise f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

Kanıt: x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $f^{-1}(V)$, x_λ'nın belirtisiz açık q-komşuluğudur. O halde $f(\overline{U}) \leq f(f^{-1}(V)) \leq V \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde x_λ'nın herhangi bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan $f(\overline{U}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ elde edilir. Böylece f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

2.2.32. Teorem: $f:X \to Y$, belirtisiz sürekli ve X, belirtisiz yarı düzenli ise, f, belirtisiz δ-süreklidir.

Kanıt: x_λ , X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz sürekli olduğundan $f^{-1}(V)$, x_λ'nın belirtisiz açık q-komşuluğudur. X belirtisiz yarı düzenli oluduğundan $\overset{o}{\overline{U}} \leq f^{-1}(V)$ olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq V$ elde edilir ki bu f'nin belirtisiz δ-sürekliliğinin kanıtıdır.

2.2.33. Sonuç: $f:X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X belirtisiz düzenli ise belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklilik ve belirtisiz δ-süreklilik eşdeğerdir. O halde X, belirtisiz düzenli ise,

f, belirtisiz sürekli $\Longleftrightarrow$ f, belirtisiz θ-sürekli,

f, belirtisiz sürekli $\Longrightarrow$ f, belirtisiz zayıf δ-sürekli

f, belirtisiz sürekli $\Longrightarrow$ f, belirtisiz zayıf θ-sürekli

gerektirmeleri vardır.

3. BELİRTİSİZ KUVVETLİ SÜREKLİLİKLER

3.1. GİRİŞ: Bu kesimde[ÇOKER-EŞ , 1990] ve[MUKHERJEE-GHOSH , 1990] tarafından tanımlanmış belirtisiz kuvvetli θ-sürekli, belirtisiz süper sürekli, belirtisiz tamamen sürekli ve belirtisiz kuvvetli sürekli fonksiyonlar üzerinde çalışılacaktır. Ayrıca bu süreklilik türleri ile ikinci kesimde tanımlanmış olan süreklilik türleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

3.2. Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Belirtisiz Kuvvetli θ-Süreklilik ve Belirtisiz Süper-Süreklilik

3.2. Tanım: 1) x_λ, A belirtisiz kümesinde bir belirtisiz nokta olsun. Eğer $x_\lambda q\ U \le \overset{o}{\overline{U}} \le A$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, x_λ'ya A belirtisiz kümesinin bir δ-iç noktası denir. A belirtisiz kümesinin bütün belirtisiz δ-iç noktalarının birleşimine, A belirtisiz kümesinin δ-içi denir ve $[A]^{o}_{\delta}$ simgesi ile gösterilir.

2) x_λ , A belirtisiz kümesinde bir belirtisiz nokta olsun. Eğer $x_\lambda q\ U \le \overline{U} \le A$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, x_λ'ya A belirtisiz kümesinin bir θ-iç noktası denir. A belirtisiz kümesinin bütün belirtisiz θ-iç noktalarının birleşimine, A belirtisiz kümesinin θ-içi denir ve $[A]^{o}_{\theta}$ simgesi ile gösterilir.
Bu tanımlardan,

$$X-[A]^{o}_{\delta} = [X-A]_{\delta} \quad \text{ve}$$
$$X-[A]^{c}_{\theta} = [X-A]_{\theta}$$

eşitlikleri vardır [ÇOKER-EŞ, 1990] .

3.2.2. Teroem: Bir $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ fonksiyonu için aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir,
b) X'deki her A belirtisiz kümesi için,
$f([A]_{\delta}) \le [f(A)]_{\theta}$ dır.

c) Y'deki her B belirtisiz kümesi için,

$[f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}([B]_\theta)$' dır.

d) Y'deki her B belirtisiz kümesi için,

$f^{-1}([B]_\theta^o) \leq [f^{-1}(B)]_\delta^o$ 'dır.

e) Y'deki her V belirtisiz açık kümesi için,

$[f^{-1}(V)]_\delta \leq f^{-1}(\overline{V})$'dır.

f) Y'deki her V belirtisiz açık kümesi için,

$f^{-1}(V) \leq [f^{-1}(V)]_\delta^o$ 'dır.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b) ve (b)$\Longrightarrow$(c) olduğu 2.kesim'de 2.2.15. Teorem'de verildi [MUKHERJEE-SİNHA, 1990].

(c)$\Longrightarrow$(d): B, Y'de belirtisiz küme olsun. O zaman 1_Y-B , Y'de belirtisiz kümedir ve (c)'den

$$[f^{-1}(1_Y-B)]_\delta \leq f^{-1}([1_Y-B]_\theta) \Longrightarrow$$

$$[1_X-f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}(1_Y-[B]_\theta^o) \Longrightarrow$$

$1_X-[f^{-1}(B)]_\delta^o \leq 1_X-f^{-1}([B]_\theta^o)$'dir. Buradan

$f^{-1}([B]_\theta^o) \leq [f^{-1}(B)]_\delta^o$ çıkar.

(d)$\Longrightarrow$(c): B,Y'de herhangi bir belirtisiz küme olsun. 1_Y-B, Y'de bir belirtisiz kümedir ve (d)'den

$$f^{-1}([1_Y-B]_\theta^o) \leq [f^{-1}(1_Y-B)]_\delta^o \Longrightarrow$$

$$f^{-1}(1_Y-[B]_\theta) \leq [1_X-f^{-1}(B)]_\delta^o \Longrightarrow$$

$$1_X-f^{-1}([B]_\theta) \leq 1_X-[f^{-1}(B)]_\delta \Longrightarrow$$

$[f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}([B]_\theta)$ olur.

(c)$\Longrightarrow$(e):Y'deki her V belirtisiz açık kümesi için $\overline{V}=[V]_\theta$ dır. (c)'den

$$[f^{-1}(V)]_\delta \leq f^{-1}([V]_\theta) \Longrightarrow$$

$[f^{-1}(V)]_\delta \leq f^{-1}(\overline{V})$ elde edilir.

(e)$\Longrightarrow$(f): V , Y'de belirtisiz açık küme ise, $1_Y-\overline{V}$, Y'de belirtisiz açık kümedir. (e)'den dolayı,

$$[f^{-1}(1_Y-\overline{V})]_\delta \leq f^{-1}[(1_Y-\overline{V})^-]\text{'dir.}$$

$$[f^{-1}(1_Y-\overline{V})]_\delta = [1_X-f^{-1}(\overline{V})]_\delta = 1_X-[f^{-1}(\overline{V})]^o_\delta$$

ve

$$f^{-1}[(1_Y-\overline{V})^-] = f^{-1}(1_Y-\overset{o}{\overline{V}}) \leq 1_X-f^{-1}(V)$$

olduğundan,

$$f^{-1}(V) \leq [f^{-1}(\overline{V})]^o_\delta \quad \text{bulunur.}$$

(f)$\Longrightarrow$(a): X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için, (f)'den $f^{-1}(V) \leq [f^{-1}(\overline{V})]^o_\delta$ olur. O zaman $\overset{o}{\overline{U}} \leq f^{-1}(\overline{V})$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Buradan $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V}$ dır. O halde f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir.

3.2.3. Teorem: Bir $f:(X,T_X) \to (Y,T_Y)$ fonksiyonu için, aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir,

b) Y'deki her belirtisiz θ-kapalı kümenin ön görüntüsü, X'de belirtisiz δ kapalıdır,

c) Y'deki her belirtisiz θ-açık kümenin ön görüntüsü, X'de belirtisiz δ-açıktır,

d) Y'deki her belirtisiz düzenli açık kümenin ön görüntüsü X'de belirtisiz δ-açıktır.

Kanıt:(a)$\Longrightarrow$(b): 3.2.2. Teorem'den Y'deki her B belirtisiz kümesi için, $[f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}([B]_\theta)$ dır. B, Y'de belirtisiz θ-kapalı küme ise, $[B]_\theta=B$ dir. Böylece $[f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}([B]_\theta)=f^{-1}(B)$ ve $f^{-1}(B) \leq [f^{-1}(B)]_\delta$ olduğundan $f^{-1}(B)=[f^{-1}(B)]_\delta$ olur. Yani $f^{-1}(B)$, belirtisiz δ-kapalıdır.

(b)$\Longrightarrow$(c): A, Y'de belirtisiz θ-açık olsun. O zaman A^t, belirtisiz θ-kapalıdır. Ve (b)'den $f^{-1}(A^t)$, belirtisiz δ-kapalıdır. $f^{-1}(A^t) = [f^{-1}(A)^-]^t$ olduğundan $f^{-1}(A)$, belirtisiz δ-açıktır.

(c)$\Longrightarrow$(d): A, Y'de belirtisiz düzenli açık küme olsun. Her belirtisiz düzenli açık küme belirtisiz θ-açık olduğundan (c)'den istenen elde edilir.

(d)$\Longrightarrow$(a): x_λ , X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overset{o}{\overline{V}}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu olur. (d)'den $f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$, X'de belirtisiz δ-açık kümedir. δ -açıklığın tanımından $x_\lambda q U \le \overset{o}{\overline{U}} \le f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Böylece $f(\overset{o}{\overline{U}}) \le f(f^{-1}(\overset{o}{\overline{V}})) \le \overset{o}{\overline{V}} \le \overline{V}$ olur. O halde f, belirtisiz zayıf δ -süreklidir.

3.2.4. Tanım: 1) Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu verilsin. X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overline{U}) \le V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f'ye belirtisiz kuvvetli θ-sürekli fonksiyon denir.

2) Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu verilsin. X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overset{o}{\overline{U}}) \le V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f'ye belirtisiz süper sürekli fonksiyon denir [ÇOKER-EŞ, 1990].

İkinci kesimde, Mukherjee ve Sinha tarafından verilen tanımlar ile 3.2.4. Tanım gözönüne alınırsa aşağıdaki gerektirmelerin varlığı açıktır.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{belirtisiz kuvvetli θ-sürekli} & & \xRightarrow{(1)} & & \text{belirtisiz süper sürekli} \\
(2)\Downarrow & & & & (3)\Downarrow \\
\text{belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli} & & \xRightarrow[(4)]{} & & \text{belirtisiz δ-sürekli} \\
(5)\Downarrow & & & & (6)\Downarrow \\
\text{belirtisiz θ-sürekli} & \xRightarrow{(7)} & \text{belirtisiz zayıf δ-sürekli} & \xRightarrow{(8)} & \text{belirtisiz zayıf θ-sürekli}
\end{array}$$

Mukherjee ve Sinha [1990] tarafından (4),(5),(6),(7) ve (8) gerektirmelerinin terslerinin genelde doğru olmadığı ikinci kesimde örneklerle verildi. (1),(2) ve (3)'ün terslerinin genelde doğru olmadığı ise aşağıdaki örneklerle görülecektir [ÇOKER-EŞ, 1990]

3.2.5. Örnek: $X=[0,1]$ üzerinde

$$T=\{0,1,A: x=0 \text{ için } A(x)=\frac{1}{3} \quad \text{ve } x\neq 0 \text{ için } A(x)=0\}$$

topolojisi ve bir $f:(X,T)\to(X,T)$ birim fonksiyonu verilsin [MUKHERJEE-SİNHA, 1990] . x_λ belirtisiz noktasının $x=0$ için $\lambda=3/4$ olarak alalım. $A(\neq 1, 0)$ belirtisiz kümesi, $f(x_\lambda)=x_\lambda$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu ise,

$$\overset{o}{(\overline{A})}(x)=\begin{cases} 1/3 & , \quad x=0 \quad \text{için} \\ 0 & , \quad x\neq 0 \quad \text{için} \end{cases}$$

dir.

Buradan $f(\overline{A}) > A=\overset{o}{\overline{A}}$ elde edilir. Böylece f, belirtisiz kuvvetli θ-sürekli değildir. Fakat f belirtisiz süper süreklidir.

3.2.6. Örnek: X boş olmayan herhangi bir küme, $f:X\to X$ birim fonksiyon ve a, X'in sabit elemanı olsun. X üzerindeki T belirtisiz topolojisi

$$T=\{0,1,A: A(a)>1/2 \quad \text{ve} \quad x\neq o \quad \text{için } A(x)=0\}$$

ile verilsin. Bir $f:(X,T)\to(X,T)$ birim fonksiyonunu alalım. [MUKHERJEE-SİNHA, 1990]. O zaman f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir. Fakat f, kuvvetli θ-sürekli değildir. x_λ , X'de herhangi bir belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)=x_\lambda$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. $V=A$ ise $\overline{V}=1 \Longrightarrow \overset{o}{\overline{V}}=1$ dir ($V=1$ ise $\overline{V}=1$ ve $\overset{o}{\overline{V}}=1$ dir). Buradan $f(\overline{V})\leq\overset{o}{\overline{V}}$ ve $f(\overline{V})\not\leq V$ dir. O halde f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli fakat kuvvetli θ-sürekli değildir.

3.2.7. Örnek: $X=[0,1]$ ve a, X'in sabit elemanı olsun. X üzerinde,

$T = \{0,1,A : A(a)=1/3$ ve $x \neq a$ için $A(x)=0\}$,

$T_1 = \{0,1,B,C : B(a)=1/3$, $C(a)=1/4$ ve $x \neq a$ için $B(x)$ ve $C(x)$ sıfırdır.$\}$

topolojileri ile bir $f:(X,T) \to (X,T_1)$ birim fonksiyonunu alalım.

Şimdi f'nin belirtisiz δ-sürekli fakat belirtisiz süper-sürekli olmadığını görelim:

x_λ ,X'de belirtisiz nokta olsun. (X,T) belirtisiz topolojik uzayının ($\neq$ 1, 0) tek belirtisiz düzenli açık kümesi A'dır. Yani

$$\overset{o}{(\overline{A})}(x)=A(x)=\begin{cases} 1/3 & , \ x = a \quad \text{için} \\ 0 & , \ x \neq a \ \text{için} \end{cases}$$

dır. O zaman X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. ($\overset{o}{\overline{A}} = A$, $\overset{o}{\overline{B}} = B$ ve

$$(\overline{C})(x) = \begin{cases} 2/3 & , \ x=a \quad \text{için} \\ 1 & , \ x \neq a \quad \text{için} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$\overset{o}{(\overline{C})}(x) = \begin{cases} 1/3 & , \ x=a \quad \text{için} \\ 0 & , \ x \neq a \quad \text{için} \end{cases}$$

olduğundan $f(\overset{o}{\overline{A}}) \leq \overset{o}{\overline{B}}$ ve $f(\overset{o}{\overline{A}}) \leq \overset{o}{\overline{C}}$ dir.)

Buradan f, belirtisiz δ-süreklidir. Şimdi x_λ belirtisiz noktası x=a da $\lambda=4/5$ ve $f(x_\lambda)= x_\lambda$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu C alınırsa, $f(\overset{o}{\overline{A}})=A \not\leq C$ olur. Böylece f, belirtisiz süper sürekli değildir.

Belirtisiz süper-sürekli fonksiyon ile belirtisiz sürekli fonksiyon arasındaki ilişkiyi şöylece verebiliriz:

Belirtisiz süper sürekli fonksiyon belirtisiz süreklidir. Fakat bunun tersi genelde doğru olmayabilir [ÇOKER-EŞ, 1990] .

3.2.8. Örnek: $X=[0,1]$ üzerinde,

$$A(x)=\begin{cases} 1/2 , & x=0 \text{ için} \\ 0 , & x\neq 0 \text{ için} , \end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases} 1/3 , & x=0 \text{ için} \\ 0 , & x\neq 0 \text{ için} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$C(x)=\begin{cases} 1/3 , & x=0 \text{ için} \\ 0 , & x\neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

olmak üzere $T=\{0,1,A,B\}$ ve $T_1=\{0,1,C\}$ topolojilerini düşünelim. $f:(X,T)\rightarrow(X,T_1)$ birim fonksiyon olsun. Şimdi f'nin belirtisiz sürekli, fakat belirtisiz süper sürekli olmadığını görelim.

x_λ belirtisiz noktasını $x=0$ da $\lambda=4/5$ ve $f(x_\lambda)=x_\lambda$'nın belirtisiz açık q-komşuluğunu C alırsak, B belirtisiz kümesi x_λ'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olur. Buradan $f(B)\leq C$ dir. Böylece f, belirtisiz süreklidir.

$$(\overline{B})(x)=\begin{cases} 1/2 , & x=0 \text{ için} \\ 0 , & x\neq 0 \text{ için} \end{cases} \quad \text{ve}$$

$$(\overset{o}{\overline{B}})(x)=\begin{cases} 1/2 , & x=0 \text{ için} \\ 0 , & x\neq 0 \text{ için} \end{cases}$$

olduğundan, $f(\overset{o}{\overline{B}})=1/2>1/3$ ve $f(\overset{o}{\overline{A}})=1/2>1/3$ dir. O halde f, belirtisiz süper sürekli değildir.

3.2.9. Teorem: $f:X\rightarrow Y$ fonksiyonu belirtisiz δ-sürekli ve Y belirtisiz yarı düzenli ise, f belirtisiz süper süreklidir.

Kanıt: x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. Y, belirtisiz yarı düzenli olduğundan $f(x_\lambda)$'nın

$f(x_\lambda)qW \le \overset{o}{W} \le V$ olacak şekilde bir W belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz δ-sürekli olduğu için $f(\overset{o}{\overline{U}}) \le \overset{o}{W} \le V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. Böylece f, belirtisiz süper-süreklidir.

3.2.10. Teorem: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz süper süreklidir,

b) X'deki her A belirtisiz kümesi için,

$f([A]_\delta) \le \overline{f(A)}$ 'dır,

c) Y'deki her B belirtisiz kümesi için

$[f^{-1}(B)]_\delta \le f^{-1}(\overline{B})$'dır,

d) Y'deki her B belirtisiz kapalı kümesi için, $f^{-1}(B)$, X'de belirtisiz δ-kapalıdır.

e) Y'deki her B belirtisiz açık kümesi için, $f^{-1}(B)$, X'de belirtisiz δ-açıktır.

f) X'in her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her M belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(N) \le M$ olacak şekilde x_λ'nın N belirtisiz δ-açık q-komşuluğu vardır.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b): $x_\lambda \in [A]_\delta$ ve U, $f(x_{o\lambda})$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. (a)'dan x_λ'nın $f(\overline{N}) \le U$ olacak şekilde bir N belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. $x_\lambda \in [A]_\delta$ olduğundan $\overset{o}{\overline{N}}qA$'dır. Görüntü alınırsa $f(\overset{o}{\overline{N}})$ q $f(A)$'dır. Buradan U $qf(A)$ olur. O halde $f(x_\lambda) \in \overline{f(A)} \Longrightarrow$ $x_\lambda \in f^{-1}(\overline{f(A)})$ dir. Böylece

$$[A]_\delta \le f^{-1}(\overline{f(A)}) \Longrightarrow f([A]_\delta) \le \overline{f(A)} \text{ elde edilir.}$$

(b)$\Longrightarrow$(c): (b)'den $f([f^{-1}(B)]_\delta) \le \overline{f[f^{-1}(B)]} \le \overline{B}$ olduğundan $[f^{-1}(B)]_\delta \le f^{-1}(\overline{B})$ elde edilir.

(c)$\Longrightarrow$(d): B,Y'de belirtisiz kapalı bir küme olsun. Yani $B=\overline{B}$ olsun. (c)'den

$$[f^{-1}(\overline{B})]_\delta \leq f^{-1}(\overline{\overline{B}}) = f^{-1}(\overline{B}) \Longrightarrow$$
$$[f^{-1}(B)]_\delta \leq f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(B) \text{ olur.}$$

Diğer taraftan herhangi bir B kümesi için $\overline{B} \leq [B]_\delta$ olduğundan

$$f^{-1}(\overline{B}) \leq f^{-1}([B])_\delta \Longrightarrow f^{-1}(B) \leq f^{-1}([B]_\delta)$$

elde edilir. O halde

$$f^{-1}(B) = [f^{-1}(B)]_\delta \quad \text{olur.}$$

(d)$\Longrightarrow$(e): B,Y'de belirtisiz açık küme olsun O halde B^t belirtisiz kapalı küme olur. (d)'den Y'deki her B^t belirtisiz kapalı kümesi için, $f^{-1}(1_Y-B)$, X'de belirtisiz δ-kapalıdır. Buradan

$$[f^{-1}(B^t)]^t = [f^{-1}(B)^t]^t = f^{-1}(B) \quad \text{belirtisiz} \quad \delta\text{-açıktır.}$$

(e)$\Longrightarrow$(f): x_λ , X'de belirtisiz nokta ve M $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $f^{-1}(M)$, x_λ'nın belirtisiz δ-açık q-komşuluğudur. $f^{-1}(M)=N$ alınırsa, N belirtisiz kümesi x_λ'nın δ-açık q-komşuluğudur. Böylece $f(N) = f(f^{-1}(M)) \leq M$ elde edilir.

(f)$\Longrightarrow$(a): Herhangi bir x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(N) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın bir N belirtisiz δ-açık q-komşuluğu vardır. O zaman $1-N=G$, X'de belirtisiz δ-kapalıdır. N, x_λ'nın q-komşuluğu olduğundan $\lambda+N(x) >1$ dir. Yani $x_\lambda \notin G$ dir. O halde x_λ'nın $M \not\leq G$ olacak şekilde M belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. Buradan x_λ qM ise $x_\lambda q \overset{o}{\overline{M}} \leq 1-G= N \Longrightarrow f(\overset{o}{\overline{M}}) \leq f(N) \leq V$ olur. Buradan $f(\overset{o}{\overline{M}}) \leq V$ dir. Böylece f, belirtisiz süper-sürekli olur.

3.2.11. Teorem: $f:X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz süper süreklidir.$\Longleftrightarrow$ X'in herhangi bir x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her M q-komşuluğu için x_λ'nın $f(\overset{o}{\overline{\overset{o}{N}}}) \leq M$ olacak şekilde bir N q-komşuluğu vardır.

Kanıt:$\Longrightarrow$: x_λ , X'de belirtisiz nokta ve M, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz süper-sürekli olduğundan, $f(\overset{o}{\overline{N}}) \leq M$ olacak şekilde x_λ'nın bir N belirtisiz açık q-komşuluğu vardır.Buradan

$\overset{o}{N} \leq N \Rightarrow \overline{\overset{o}{N}} \leq \overline{N} \Rightarrow \overset{o}{\overline{\overset{o}{N}}} \leq \overset{o}{\overline{N}}$ ve görüntü alanırsa $f(\overset{o}{\overline{\overset{o}{N}}}) \leq f(\overset{o}{\overline{N}}) \leq M$ olur.

Buradan $f(\overset{o}{\overline{\overset{o}{N}}}) \leq M$ elde edilir.

$\Leftarrow$: x_λ , X'de belirtisiz nokta ve M, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. Hipotezden $f(\overset{o}{\overline{\overset{o}{N}}}) \leq M$ olacak şekilde x_λ'nın bir N q-komşuluğu vardır. $N=\overset{o}{N}$ alınırsa $\overset{o}{\overline{\overset{o}{N}}} = \overset{o}{\overline{N}}$ ve $f(\overset{o}{\overline{\overset{o}{N}}}) = f(\overset{o}{\overline{N}}) \leq M$ olur. Böylece f, belirtisiz süper süreklidir.

3.2.12. Teorem: $f:X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz süper-sürekli ve X belirtisiz hemen hemen düzenli ise, f belirtisiz kuvvetli θ-süreklidir.

Kanıt: x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz süper sürekli olduğu için $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. $\overset{o}{\overline{U}}$ düzenli açık ve X belirtisiz hemen hemen düzenli olduğundan,

$x_\lambda q\, W \leq \overline{W} \leq \overset{o}{\overline{U}}$ olacak şekilde bir W belirtisiz düzenli açık kümesi vardır. O zaman $f(\overline{W}) \leq f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq V$ 'dır. Buradan f, belirtisiz kuvvetli θ-süreklidir.

3.2.13. Sonuç: X belirtisiz hemen hemen düzenli ve Y belirtisiz yarı düzenli olmak üzere $f:X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz kuvvetli θ-süreklidir,

b) f, belirtisiz süper - süreklidir,

c) f, belirtisiz δ-süreklidir.

Kanıt: Belirtisiz kuvvetli θ-sürekli $\Rightarrow$ belirtisiz süper sürekli $\Rightarrow$ belirtisiz δ-sürekli olduğu tanımlardan açıktır. 3.2.9. Teorem ve 3.2.12. Teorem'lerden ters gerektirmelerde vardır. O halde yukardaki ifadelerin eşdeğer olduğu görülür.

3.2.14. Sonuç: $f:X \to Y$ bir fonksiyon ve X belirtisiz düzenli uzay ise, aşağıdaki koşullar eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz kuvvetli θ-süreklidir,

b) f, belirtisiz süper süreklidir.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b): Önceki gerektirmelerden vardır.

(b)$\Longrightarrow$(a): Belirtisiz düzenli uzay, belirtisiz hemen hemen düzenli olduğundan ve 3.2.12.Teoremden elde edilir.

3.2.15. Sonuç: X ve Y belirtisiz düzenli uzaylar olsun. Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu için; belirtisiz θ-süreklilik, belirtisiz süper-süreklilik ve belirtisiz δ-sürekliliklerin tümü eşdeğerdir.

Kanıt: 3.2.13. Sonuç ve 3.2.14. Sonuç lardan istenenler elde edilir.

3.2.16. Sonuç: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler vardır:

a) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overline{U}) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f belirtisiz süper süreklidir.

b) X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overline{U}) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. $\Longleftrightarrow$ X'deki x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overline{\overline{U}}) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır.

3.2.15. Sonuç (a)'nın tersinin genelde doğru olmadığını 3.2.5.Örnek'ten görebiliriz.

3.2.17. Teorem: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu için aşağıdakiler doğrudur:

a) X belirtisiz yarı düzenli ve f belirtisiz sürekli ise, f belirtisiz süper süreklidir.

b) X ve Y belirtisiz hemen hemen düzenli ise, f için aşağıdaki özellikler eşdeğerdir:

i) f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

ii) f, belirtisiz δ-süreklidir.

iii) f, belirtisiz θ-süreklidir,

iv) f, belirtisiz zayıf δ-süreklidir.

Kanıt: (a): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz sürekli olduğu için $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. X belirtisiz yarı düzenli olduğu için, $x_\lambda q W$ ve $W \leq \overset{o}{\overline{W}} \leq U$ olacak şekilde bir W belirtisiz açık kümesi vardır. Buradan $f(W) \leq f(\overset{o}{\overline{W}}) \leq f(U) \leq V$ elde edilir. $f(\overset{o}{\overline{W}}) \leq V$ olduğu için f, belirtisiz süper süreklidir.

(b)-(i)$\Longrightarrow$(ii) : x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu olsun. f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olduğu için $f(\overline{U}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. $\overset{o}{\overline{U}} \leq \overline{U}$ olacağından $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq f(\overline{U}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ dir. Buradan $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ elde edilir. Böylece f, belirtisiz δ-süreklidir.

(ii)$\Longrightarrow$(iv): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $\overset{o}{\overline{V}}$, $f(x_\lambda)$'nın belirtisiz düzenli açık q-komşuluğudur. f, belirtisiz δ-sürekli olduğundan $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. $\overset{o}{\overline{V}} \leq \overline{V}$ olduğundan $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V}$ elde edilir. Yani f, belirtisiz zayıf δ-sürekli olur.

(iv)$\Longrightarrow$(iii) : x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. O zaman $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V}$ olacak şekilde x_λ'nın U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. X belirtisiz hemen hemen düzenli olduğundan $x_\lambda q W \leq \overline{W} \leq \overset{o}{\overline{U}}$ olacak şekilde bir W belirtisiz düzenli açık küme vardır. O halde $f(x_\lambda) q f(\overset{o}{\overline{W}}) \leq f(\overline{W}) \leq f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V}$ olur. Buradan $f(\overline{W}) \leq \overline{V}$ dir. Böylece f, belirtisiz θ-süreklidir.

(iii)$\Longrightarrow$(i): x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. $\overset{o}{\overline{V}}$, Y'de belirtisiz düzenli açıktır. Y, belirtisiz hemen hemen düzenli olduğundan $f(x_\lambda)qW \leq \overline{W} \leq \overset{o}{\overline{V}}$ olacak şekilde $f(x_\lambda)$'nın bir W belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz θ-sürekli olduğundan $f(\overline{U}) \leq \overline{W}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. O halde

$f(\overline{U}) \leq \overline{W} \leq \overset{o}{\overline{V}}$ elde edilir. Yani f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli olur.

3.2.18. Teorem: $f:X \to Y$ belirtisiz δ-sürekli ve $g:Y \to Z$ belirtisiz süper-sürekli fonksiyonlar ise, $gof:X \to Z$ bileşke fonksiyonu belirtisiz süper süreklidir.

Kanıt: x_λ , X de belirtisiz nokta ve W, Z'de $(gof)(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. g, belirtisiz süper-sürekli olduğundan $f(x_\lambda)$'nın Y'de $g(\overset{o}{\overline{V}}) \leq W$ olacak şekilde bir V belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f belirtisiz δ-sürekli olduğundan x_λ'nın X'de

$f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overset{o}{\overline{V}} \Longrightarrow (gof)(\overset{o}{\overline{U}}) \leq g(\overset{o}{\overline{V}}) \leq W$ olacak şekilde bir $\overset{o}{\overline{U}}$ belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu vardır. Buradan gof, belirtisiz süper-süreklidir.

3.2.19. Sonuç: $f:X \to Y$ ve $g:Y \to Z$ fonksiyonları belirtisiz süper-sürekli ise, $gof:X \to Z$ de belirtisiz süper-süreklidir.

3.2.20. Teorem: $f:X \to Y$ ve $g:Y \to Z$ fonksiyonları verilsin. O zaman aşağıdakiler vardır:

a) f, belirtisiz δ-sürekli ve g, belirtisiz zayıf δ-sürekli ise, gof, belirtisiz zayıf δ-süreklidir.

b) f, belirtisiz zayıf δ-sürekli ve g, belirtisiz θ-sürekli ise, gof belirtisiz zayıf δ-süreklidir,

c) f, belirtisiz zayıf δ-sürekli ve g belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli ise, gof belirtisiz δ-süreklidir.

d) f, belirtisiz zayıf δ-sürekli ve g, belirtisiz kuvvetli θ-sürekli ise, gof belirtisiz süper süreklidir,

e) f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-sürekli ve g, belirtisiz zayıf δ-sürekli ise, gof belirtisiz θ-süreklidir.

3.2.21. Tanım: (X,T_X) belirtisiz topolojik uzayında her belirtisiz açık kümenin kapanışı X'de belirtisiz açık ise, X belirtisiz topolojik uzayına tamamen bağlantısız denir [ÇOKER-EŞ, 1990].

3.2.22. Teorem: $f:X \to Y$ bir fonksiyon ve X belirtisiz tamamen bağlantısız uzay olsun. O zaman aşağıdakiler doğrudur:

a) f, belirtisiz zayıf θ-sürekli ise, f belirtisiz θ-süreklidir.

b) f, belirtisiz δ-sürekli ise, f belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir,

c) f, belirtisiz süper sürekli ise, f belirtisiz kuvvetli θ-süreklidir.

Kanıt: (a): f, belirtisiz zayıf θ-sürekli olduğundan X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(U) \leq \overline{V}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. X belirtisiz tamamen bağlantısız olduğundan $\overline{U}=U$ olur. Buradan $f(\overline{U}) \leq \overline{V}$ elde edilir. O halde f, belirtisiz θ-süreklidir.

(b): f, belirtisiz δ-sürekli olduğundan, X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overset{\circ}{\overline{U}}) \leq \overset{\circ}{\overline{V}}$ olacak şekilde x_λ 'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. X belirtisiz tamamen bağlantısız olduğundan $\overline{\overline{U}} = \overline{U} = \overset{\circ}{\overline{U}}$ olur. Buradan $f(\overline{U}) \leq \overset{\circ}{\overline{V}}$ elde edilir. O halde f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

(c): f, belirtisiz süper sürekli olduğundan X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overset{\circ}{\overline{U}}) \leq V$ olacak şekilde x_λ 'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. X belirtisiz tamamen bağlantısız olduğundan $\overline{U}=U$ ve $\overset{\circ}{\overline{U}}=\overset{\circ}{U} = U = \overline{U}$ olacağından $f(\overset{\circ}{\overline{U}})= f(\overline{U}) \leq V$ elde edilir. O halde f, belirtisiz kuvvetli θ-süreklidir.

3.2.23. Teorem: $f:X \rightarrow Y$ fonksiyonu belirtiz zayıf δ-sürekli ve belirtisiz hemen hemen açık ise, f belirtisiz δ-süreklidir.

Kanıt:x_λ, X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz zayıf δ-sürekli olduğu için $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. f, belirtisiz hemen hemen açık olduğundan, $f(\overset{o}{\overline{U}})$ açıktır. Buradan $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overset{o}{\overline{V}} = V$ dir. Böylece f, belirtisiz δ-süreklidir.

3.2.24. Tanım: Sıfırdan farklı her belirtisiz açık kümenin kapanışı 1_X ise, X belirtisiz topolojik uzayına hiperbağlantılıdır denir [ÇOKER-EŞ, 1990] .

3.2.25. Teorem: Y belirtisiz topolojik uzayı hiper bağlantılı ise, her $f:X \rightarrow Y$ fonksiyonu belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

Kanıt: x_λ , X'de belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu ise, $\overline{V} = 1_Y$'dir. Buradan $\overset{o}{\overline{V}} = 1_Y$'dir. Böylece x_λ'nın her U belirtisiz açık q-komşuluğu için $f(\overline{U}) \leq \overset{o}{\overline{V}}$'dir. O halde f, belirtisiz hemen hemen kuvvetli θ-süreklidir.

3.2.26. Teorem: $f:X \rightarrow Y$ belirtisiz zayıf δ-sürekli, örten bir fonksiyon ve X belirtisiz hiper bağlantılı ise, Y de belirtisiz hiper bağlantılıdır.

Kanıt: $V \neq 0_Y$, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz açık q-komşuluğu olsun. f, belirtisiz zayıf δ-sürekli olduğu için $f(\overset{o}{\overline{U}}) \leq \overline{V}$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu vardır. X hiper bağlantılı olduğundan $\overline{U} = 1_X$ dir. Buradan

$\overset{\circ}{\overline{U}} = 1_X$ olur. Böylece $1_Y = f(\overset{\circ}{\overline{U}}) = \overline{V}$ dir. Bu Y'nin belirtisiz hiper bağlantılı olduğunu gösterir.

3.2.27. Tanım: $f:X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X'in herhangi bir x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın herhangi bir V belirtisiz düzenli açık q-komşuluğu için $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz açık q-komşuluğu varsa, f'e belirtisiz hemen hemen süreklidir denir [GANGULLY-SAHA, 1988].

3.3. Belirtisiz Topolojik Uzaylarda Belirtisiz Tamamen Süreklilik ve Belirtisiz Kuvvetli Süreklilik

3.3.1. Tanım: Bir $f:X \to Y$ fonksiyonu verilsin. Y'deki herhangi bir A belirtisiz kümesi için, $f^{-1}(A)$ X'de belirtisiz düzenli açık ise, f'ye belirtisiz tamamen sürekli fonksiyon denir [MUKHERJEE-GHOSH, 1990] .

3.3.2. Uyarı: Her belirtisiz düzenli açık küme belirtisiz δ-açık olduğundan, 3.2.10. Teorem'den her belirtisiz tamamen sürekli fonksiyon belirtisiz süper-süreklidir. Fakat bunun tersi genelde doğru olmayabilir [MUKHERJEE-GHOSH, 1990].

3.3.3. Tanım: X'in her A belirtisiz kümesi için $f(\overline{A}) \leq f(A)$ ise $f:X \to Y$ fonksiyonuna belirtisiz kuvvetli süreklidir denir [MUKHERJEE-GHOSH, 1990] .

3.3.4. Uyarı: Her belirtisiz kuvvetli sürekli fonksiyon hem belirtisiz tamamen sürekli hem de belirtisiz kuvvetli θ-süreklidir.

Belirtisiz kuvvetli süreklilik türleri arasında aşağıdaki gerektirmelerin varlığı açıktır.

$$\begin{array}{ccccc} \text{belirtisiz kuvvetli sürekli} & \Longrightarrow & \text{belirtisiz kuvvetli } \theta\text{-sürekli} & \Longrightarrow & \text{belirtisiz süper sürekli} \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{belirtisiz tamamen sürekli} & & \end{array}$$

Yukardaki gerektirmelerin tersleri genelde doğru değildir [MUKHERJEE-GHOSH, 1991].

4. BELİRTİSİZ YARI-KARARSIZ VE KUVVETLİ KARARSIZ FONKSİYONLAR

4.1. Giriş: Bu bölümde Malakar, Yalvaç, Mukherjee ve Sinha tarafından tanımlanan belirtisiz yarı-kararsız fonksiyonlar, belirtisiz kararsız fonksiyonlar ve belirtisiz kuvvetli kararsız fonksiyonlar üzerinde çalışılacaktır. Ayrıca bu fonksiyon türleri ile önceden tanımlanan fonksiyon türleri arasındaki ilişkiler incelenecektir.

4.2. Belirtisiz Yarı-Kararsız, Kararsız ve Kuvvetli Kararsız Fonksiyonlar

Belirtisiz kararsız yarı-kararsız ve kuvvetli kararsız fonksiyonların tanımlarını vermeden önce; belirtisiz yarı- q-komşuluk, yarı-kapanış, yarı-iç, yarı-kapalı küme, yarı-θ-yığılma noktası, yarı-θ-kapanış, yarı-θ-kapalı küme ve yarı-θ-açık küme kavramlarını tanıtmak istiyoruz.

4.2.1. Tanım: A, X'de bir belirtisiz küme olsun. Eğer $x_\lambda qV \leq A$ olacak şekildebir V belirtisiz yarı-açık kümesi varsa, A belirtisiz kümesine x_λ'nın belirtisiz yarı q-komşuluğu denir.

4.2.2. Tanım: $A \subset X$ bir belirtisiz küme olsun.

$\underline{A} = \wedge\ \{B \mid A \leq B\ ,\ B$ belirtisiz yarı-kapalı$\}$,

$\underset{0}{A} = \vee\ \{B \mid B \leq A\ ,\ B$ belirtisiz yarı-açık$\}$

belirtisiz kümelerini tanımlayalım. $\underline{A}$'a A'nın belirtisiz yarı-kapanışı, $\underset{0}{A}$'e A'nın belirtisiz yarı-içi denir [YALVAÇ,1982].

4.2.3. Tanım: x_λ belirtisiz noktası ve bir A belirtisiz kümesi verilsin. x_λ'nın her belirtisiz yarı açık, yarı-q-komşuluğunun yarı-kapanışı A ile çakışığımsı ise x_λ belirtisiz noktasına A belirtisiz kümesinin yarı-θ-yığılma noktası denir. [SİNHA'nın henüz hazırlanmakta olan "On S^*-closed ness in fuzzy setting" adlı araştırmasına göre.]

4.2.4. Tanım: A belirtisiz kümesinin bütün belirtisiz yarı-θ-yığılma noktalarının birleşimine, A'nın belirtisiz yarı-θ-kapanışı denir ve $[A]_{s-\theta}$ simgesi ile gösterilir. A belirtisiz yarı-θ-kapalıdır.$\Longleftrightarrow$ $A=[A]_{s-\theta}$ dır. Belirtisiz yarı-θ-kapalı kümenin tümleyeni belirtisiz yarı-θ-açık kümedir. Ayrıca her belirtisiz yarı-θ-kapalı kümenin belirtisiz yarı kapalı olduğu açıktır. [SİNHA'nın henüz hazırlanmakta olan "On S^*-closedness in fuzzy setting" adlı araştırmasına göre.].

4.2.5. Önerme: $\underset{0}{A}$, A'nın kapsadığı en büyük belirtisiz yarı-açık küme, $\underline{A}$, A'yı kapsayan en küçük belirtisiz yarı-kapalı kümedir.

Kanıt: Belirtisiz yarı-açık kümelerin herhangi sayıdaki bileşimi yine belirtisiz yarı açık bir kümedir. Bu özellik ve $\underset{0}{A}$'in tanımından kolayca görülür.

Belirtisiz yarı-kapalı kümelerin herhangi sayıdaki arakesiti, belirtisiz yarı-kapalıdır. Bu özellik ve $\underline{A}$'ın tanımından kolayca görülür [YALVAÇ, 1982].

4.2.6. Uyarı: Her A belirtisiz kümesi için $A\leq\underline{A}\leq\bar{A}$ ve $A\geq\underset{0}{A}\geq\overset{0}{A}$ olduğu açıktır.

4.2.7. Sonuç: $A,B\subset X$ olsun. Aşağıdaki özellikler vardır:

A belirtisiz yarı-açıktır.$\Longleftrightarrow$ $\underset{0}{A} = A$ dır.

A belirtisiz yarı-kapalıdır. $\Longleftrightarrow$ $\underline{A} = A$ dır.

$A\leq B \Longrightarrow \underline{A}\leq\underline{B}$ ve $\underset{0}{A}\leq\underset{0}{B}$ dır.

4.2.8. Tanım: $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. Y'deki her A belirtisiz yarı-açık kümesi için $f^{-1}(A)$, belirtisiz yarı-açık ise f'ye belirtisiz kararsız fonksiyon denir [YALVAÇ,1982].

4.2.9. Tanım: $f:X\to Y$ fonksiyonu verilsin. X'deki herhangi bir x_λ

belirtisiz noktası ve Y'de $f(x_\lambda)$'yı bulunduran herhangi bir V belirtisiz yarı-açık kümesi için $f(U) \leq V$ $(f(\underline{U}) \leq V)$ olacak şekilde X'de x_λ'yı bulunduran bir U belirtisiz yarı-açık kümesi varsa, f'ye belirtisiz yarı-kararsız (belirtisiz kuvvetli kararsız) fonksiyon denir [MALAKAR, 1992] .

4.2.10. Teorem: $f:X \to Y$ fonksiyonu belirtisiz yarı-kararsızdır (kararsızdır, kuvvetli kararsızdır). $\Longleftrightarrow$ X'deki her x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'nın her V belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu için, $f(U) \leq \underline{V}$ $(f(U) \leq V$, $f(\underline{U}) \leq V)$ olacak şekilde x_λ'nın bir U belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu vardır.

Kanıt: Kanıtı yarı-kararsız durum için yapacağız. Diğerleri de benzer şekilde yapılabilir.

$\Longrightarrow$: f, belirtisiz yarı-kararsız ve V, $f(x_\lambda)$'nın bir belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu olsun. O zaman $V(f(x))+ \lambda >1$ dir. $V(f(x))> \beta >1- \lambda$ olacak şekilde pozitif bir β gerçel sayısı seçelim. Buradan V, $f(x_\beta)$'yı bulunduran belirtisiz yarı-açık kümedir. Hipotezden $f(W) \leq \underline{V}$ olacak şekilde x_β'yı bulunduran W belirtisiz yarı-açık kümesi vardır. Şimdi $W(x) \geq \beta$ ise $W(x) > 1-\lambda$ dır. Böylece W, x_λ'nın belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğudur.

$\Longleftarrow$: x_λ, X'de herhangi bir belirtisiz nokta ve $f(x_\lambda)$'yı bulunduran herhangi bir belirtisiz yarı-açık küme V olsun. O zaman $x_\lambda \in f^{-1}(V)=W$ dir. $1/m \leq W(x)$ olacak şekilde pozitif bir tam sayı m verilsin. Her $n \geq m$ pozitif tamsayısı için $\lambda_n = 1 + \frac{1}{n} - W(x)$ alalım. O zaman her $n \geq m$ için $0 < \lambda_n \leq 1$ dir. Buradan her $n \geq m$ için, $y=f(x)$ olmak üzere V, y_{λ_n} 'nin belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğudur. Gerçekten,

$$V(y) + \lambda_n = V(y) + 1 + (\tfrac{1}{n}) - f^{-1}(V)(x)$$

$$= 1 + (\tfrac{1}{n}) > 1 \quad \text{dir.}$$

Hipotezden, her $n \geq m$ için X'de $x_\lambda q\ U_n$ ve $f(\underline{U_n}) \leq \underline{V}$ olacak şekilde bir U_n belirtisiz yarı-açık kümesi vardır. $U=\bigvee_{n\geq m} U_n$ alınırsa U, X'de $f(U)=\bigvee_{n\geq m} f(U_n)\leq \underline{V}$ olacak şekilde belirtisiz yarı-açık küme olur. Şimdi $x_\lambda \varepsilon U$ olduğunu görelim. Her $n\geq m$ için $U_n(x)+\lambda_n>1$ dir. O halde her $n\geq m$ için

$U_n(x)>1-\lambda_n=W(x)-(\frac{1}{n})$ dir. Buradan her $n\geq m$ için

$U(x)>W(x)-(\frac{1}{n}) \Longrightarrow U(x)\geq W(x)\geq \lambda$ olur.

Böylece $x_\lambda \varepsilon W \Longrightarrow x_\lambda \varepsilon U$ olur.

4.2.11.Uyarı: Yukarıdaki tanımlardan, belirtisiz kuvvetli kararsız fonksiyon $\Longrightarrow$ belirtisiz kararsız fonksiyon $\Longrightarrow$ belirtisiz yarı kararsız fonksiyon

gerektirmelerinin varlığı açıktır. Fakat bu gerektirmelerin tersleri genelde doğru değildir.

4.2.12. Yardımcı Önerme: X belirtisiz topolojik uzayındaki A belirtisiz yarı-açık kümesi için $\underline{A}=[A]_{s-\theta}$ dır.

Kanıt: Yarı-kapanış ve yarı-θ-kapanış tanımlarından $\underline{A}\leq [A]_{s-\theta}$ olduğu açıktır.Şimdi $[A]_{s-\theta}\leq\underline{A}$ olduğunu görelim. X'deki x_λ belirtisiz noktası için, $x_\lambda \not\varepsilon \underline{A}$ olduğunu kabul edelim. O zaman x_λ'nın $V \not q A$ olacak şekilde bir V belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu vardır. Buradan $V\leq A^t$ olur.

$\underline{V}\leq \underline{A^t}=A^t$ dir. O zaman

$\underline{V} \not q A \Longrightarrow x_\lambda \not\varepsilon [A]_{s-\theta}$ dır. Bu ise çelişkidir. O halde $x_\lambda \varepsilon \underline{A}$ dir. Yani $[A]_{s-\theta}\leq\underline{A}$ olur.

4.2.13. Önerme: $x_\lambda \varepsilon \underline{A} \Longleftrightarrow x_\lambda$'nın her B yarı-açık yarı-q-komşuluğu için $\underline{B}$ q A dır.

Kanıt: $\Longrightarrow$: $x_\lambda \in \underline{A}$ olsun, fakat sağdakinin tersine $\exists$ B x_λ'nın yarı-açık yarı-q-komşuluğu öyleki $B \not q A$ olsun. O halde $A \leq B^t$'dır ve B^t yarı-kapalı olur.

$$\underline{A} = \wedge\{C: \; C \geq A, \; C \text{ yarı-kapalı}\} \text{ dır.}$$

O halde $\underline{A} \leq B^t$ dir.

$$x_\lambda \in \underline{A} \Longrightarrow \lambda \leq \underline{A}(x) \text{ dir.}$$

O halde $\lambda \leq \underline{A}(x) \leq B^t(x) = 1 - B(x) \Longrightarrow \lambda + B(x) \leq 1$ dir.

Öte yandan B, x_λ'nın belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu olduğu için

$$x_\lambda \, q \, B \Longrightarrow \lambda + B(x) > 1 \text{ dir. O halde bu bir çelişkidir.}$$

$\Longleftarrow$: x_λ'nın her B belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu için B q A ve tersine $x_\lambda \notin \underline{A}$ olsun. O halde $x_\lambda \, q (\underline{A})^t$ olur.

$(\underline{A})^t$, x_λ'nın bir belirtisiz yarı açık yarı-q-komşuluğudur. Dolayısıyla $(\underline{A})^t \, q \, A$ olur.

O halde $\exists z \in X$ için $(\underline{A})^t(z) + A(z) > 1$

$$1 - \underline{A}(z) + A(z) > 1$$

$$\Longrightarrow A(z) > \underline{A}(z)$$

elde edilir ki bu sonuç varsayımla çelişir.

4.2.14. Yardımcı Önerme: X belirtisiz topolojik uzayında, A herhangi bir belirtisiz küme ve B'de belirtisiz yarı-açık küme olsun. O halde $A \not q B \Longrightarrow \underline{A} \not q B$ dir.

Kanıt: Tersine olarak, $\underline{A}$ q B olsun. O halde $\underline{A}(x) + B(x) > 1$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. O zaman $\lambda = \underline{A}(x)$ alınırsa B'nin $A \not q B$ özelliğinde x_λ'nın belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu olduğu görülür.

Gerçekten $\lambda + B(x) > 1 \Longrightarrow x_\lambda q \, B$, B belirtisiz yarı-açık küme $\Longrightarrow$ B, x_λ'nın belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğudur.

$$\lambda = \underline{A}(x) \text{ olduğundan } \lambda \leq \underline{A}(x) \Longrightarrow x_\lambda \in \underline{A} \text{ dır.}$$

O halde 4.2.13. Önerme'den B q A yada A q B dir. Bu ise bir çelişkidir.

4.2.15. Teorem: $f:X \to Y$ bir fonksiyon ise aşağıdakiler eşdeğerdir:

a) f, belirtisiz yarı kararsızdır,

b) Y'deki her V belirtisiz yarı-açık kümesi için

$f^{-1}(V) \leq (f^{-1}(\underline{V}))_0$ dir,

c) Y'deki her V belirtisiz yarı-açık kümesi için

$\underline{f^{-1}(V)} \leq f^{-1}(\underline{V})$ dir.

Kanıt: (a)$\Longrightarrow$(b): Herhangi bir $x_\lambda \varepsilon f^{-1}(V)$ için $f(U) \leq \underline{V}$ olacak şekilde x_λ'yı bulunduran bir U belirtisiz yarı-açık kümesi vardır. Böylece $x_\lambda \varepsilon\ U \leq (f^{-1}(\underline{V}))_0$'dır.

(b)$\Longrightarrow$(c): $x_\lambda \varepsilon\ \underline{f^{-1}(V)}$ fakat $x_\lambda \not\varepsilon\ f^{-1}(\underline{V})$ olsun. O zaman $f(x_\lambda)$'nın $G \not q\ V$ olacak şekilde bir G belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu vardır. 4.2.13. Yardımcı Önerme'den $\underline{G} \not q\ V$ dir. O zaman (b)'den

$x_\lambda\ q f^{-1}(G) \leq (f^{-1}(\underline{G}))_0 \not q\ f^{-1}(V)$ elde edilir. Böylece

$x_\lambda \not\varepsilon\ \underline{f^{-1}(V)}$ olur. Bu ise $x_\lambda \varepsilon\ \underline{f^{-1}(V)}$ ile çelişir.

(c)$\Longrightarrow$(a): X'deki herhangi bir x_λ belirtisiz noktası ve $f(x_\lambda)$'yı bulunduran herhangi bir V belirtisiz yarı-açık kümesi için $\underline{V}$, belirtisiz kapalı-açık tır. Buradan $x_\lambda \not q\ \underline{f^{-1}((\underline{V})^t)}$ dir. (c)'den

$x_\lambda\ \varepsilon \underline{(f^{-1}((\underline{V})^t))^t} = U$ denirse $f(U) \leq f((f^{-1}((\underline{V})^t))^t) = f(f^{-1}(\underline{V})) \leq \underline{V}$

elde edilir. f, yarı-kararsız olur.

4.2.16. Uyarı: Her belirtisiz kararsız fonksiyon belirtisiz yarı-sürekli ve her belirtisiz sürekli fonksiyon belirtisiz yarı-sürekli-dir. Böylece aşağıdaki gerektirmeler vardır:

belirtisiz kuvvetli kararsız $\quad$ belirtisiz sürekli

$\Downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

belirtisiz kararsız $\Longrightarrow$ belirtisiz yarı-sürekli

$\Downarrow$

belirtisiz yarı-kararsız

Şimdi aşağıdaki ters örneklerle yukarıdaki gerektirmelerin terslerinin doğru olmadığını göstermek istiyoruz [MALAKAR, 1992].

4.2.17. Örnek: X boş olmayan herhangi bir küme ve $a \in X$ sabit bir eleman olsun. X üzerinde $T=\{0_X, 1_X, A\}$ ve $T_1=\{0_X, 1_X, B\}$ topolojilerini düşünelim. Burada

$$A(a) = 2/3 \quad , \quad B(a) = 3/5 \quad \text{ve her } x \in X-\{a\}$$

için $A(x)=B(x)=0$ olarak tanımlanmıştır. $f:(X,T) \to (X,T_1)$ birim fonksiyon olsun. O zaman B, (X,T_1)'de belirtisiz açık olmasına karşın $f^{-1}(B)$, (X,T)'da belirtisiz yarı-açık değildir. O halde f, belirtisiz yarı-sürekli olmadığından belirtisiz kararsız değildir. Fakat, (X,T_1)'deki herhangi bir V belirtisiz yarı-açık kümesi için, $\underline{V} = 1_X$ olduğu açıktır. Böylece f'nin belirtisiz yarı-kararsız olduğu görülür.

4.2.18. Örnek: $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $a \in X$ olsun. X üzerinde $A(a)=1/3$, $B(a)= 1/2$ ve her $x \in X-\{a\}$ için $A(x)=B(x)=0$ olacak şekilde A ve B belirtisiz kümelerini alalım. X üzerinde $T=\{1_X, 0_X, A\}$ ve $T_1=\{1_X, 0_X, A, B\}$ topolojilerini düşünelim. $f:(X,T) \to (X,T_1)$ birim fonksiyon olsun. O zaman (X,T)'nun belirtisiz yarı-açık kümeleri 0_X, 1_X ve $1/3 \leq C(a) \leq 2/3$ ve her $x \in X-\{a\}$ için $0 \leq C(x) \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir C belirtisiz kümesidir. Üstelik bunlar, (X,T)'da belirtisiz yarı-kapalı kümelerdir. (X,T_1)'deki belirtisiz yarı-açık kümeler $1_X, 0_X$ ya da $1/3 \leq D(a) \leq 1/2$ ve her $x \in X-\{a\}$ için $0 \leq D(x) \leq 1$ olacak şekilde bir D belirtisiz kümesidir. O zaman f, belirtisiz kuvvetli kararsızdır, fakat belirtisiz sürekli değildir.

4.2.19. Örnek: X, T ve T_1 yukardaki 4.3.17.Örnek'teki gibi olsun. $f:(X,T_1) \to (X,T)$ birim fonksiyonunu düşünelim. $T \subset T_1$ olduğundan f'nin belirtisiz sürekli olduğu açıktır. Şimdi $a_{7/12}$ belirtisiz noktasını ve (X,T)'da $U(a)=7/12$ ve her $x \in X-\{a\}$ için $U(x)=1$ ile tanımlı U belirtisiz yarı-açık kümesini alalım. O zaman (X,T)'da $a_{7/12}$'yi bulunduran tek yarı-açık küme 1_X dir. $f(1_X) \not\leq \underline{U} = U$ olduğundan f, belirtisiz yarı kararsız değildir.

4.2.20. Örnek: $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde $T = \{0_X , 1_X, A\}$ belirtisiz topolojisini düşünelim. Burada A belirtisiz kümesi, her $x \in X$ için $A(x)=2/3$ dir. $f:(X,T) \to (X,T)$ birim fonksiyon ise, f'nin belirtisiz sürekli ve belirtisiz kararsız olduğu açıktır. X'in herhangi bir a noktası için $a_{1/2}$'nin belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu A'dır. Fakat, X üzerindeki herhangi bir B belirtisiz yarı-açık kümesi için $\underline{B} = 1_X$'dir. Buradan $f(\underline{B}) > A$ dır. Böylece f, belirtisiz kuvvetli kararsız değildir.

4.2.21. Tanım: X belirtisiz topolojik uzay olsun. X'de her x_λ belirtisiz noktası ve x_λ'nın her U belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu için $\underline{V} \leq U$ olacak şekilde x_λ'nın V belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu varsa, X'e yarı-düzenli uzay denir.

4.2.22. Teorem: $f:X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

a) f belirtisiz yarı kararsız ve Y belirtisiz yarı düzenli ise, f belirtisiz kararsızdır.

b) f belirtisiz kararsız ve X belirtisiz yarı düzenli ise, f belirtisiz kuvvetli kararsızdır.

Kanıt: (a):$f:X \to Y$ belirtisiz yarı-kararsız ve Y belirtisiz yarı düzenli olsun. x_λ , X'de herhangi bir belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$ nın herhangi bir belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu olsun.

Y belirtisiz yarı düzenli olduğundan, $f(x_\lambda)$'nın $\underline{U} \leq V$ olacak şekilde bir U belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu vardır. f'nin belirtisiz yarı-kararsızlığından x_λ'nın $f(W) \leq \underline{U} \leq V$ olacak şekilde bir W belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu vardır. O zaman 4.2.10. Teoremden f, belirtisiz kararsızdır.

(b) : f belirtisiz kararsız ve X belirtisiz yarı düzenli olsun. x_λ X'de herhangi bir belirtisiz nokta ve V, $f(x_\lambda)$'yı bulunduran bir belirtisiz yarı-açık küme olsun. f belirtisiz kararsız olduğundan $f(U) \leq V$ olacak şekilde x_λ'yı bulunduran bir U belirtisiz yarı-açık küme vardır. X uzayı yarı düzenli olduğundan $\underline{W} \leq U$ olacak şekilde

x_λ'nın bir W belirtisiz yarı-açık yarı-q-komşuluğu vardır. O halde

$$f(\underline{W}) \leq f(U) \leq V$$

elde edilir. Yani f, belirtisiz kuvvetli kararsızdır.

DEĞİNİLEN BELGELER DİZİNİ

Aydın, S., 1980, Belirtisiz topolojik uzayların Xx(0,1) üzerinde doğurduğu u-topolojik uzaylar: Doktora tezi, H.Ü.Mezuniyet Sonrası Eğitim Fakültesi, Beytepe, Ankara, 119 s.

Azad, K.K., 1981, On fuzzy semicontinuity, fuzzy almost continuity and fuzzy weakly continuity: Journal of Math.Anal.Appl. 82, 14-32.

Chang, C.L., 1968, Fuzzy topological spaces: Journal of Math.Anal.Appl., 24, 184-190.

Çcker, D.-Eş,H., 1990, On some strong forms of fuzzy continuity: Doğa-Tr.J. Mathematics 14(1990), 26-38.

Ganguly, S.-Saha, S., 1986, A note on semi-open sets in fuzzy topological spaces: Fuzzy Sets and Systems, 18, 83-96.

Ganguly, S.-Saha, S., 1988, A note on δ-continuity and δ-connected sets in fuzzy set theory: SİMON STEVIN, A Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 62, Nummer 2 (June 1988).

Goguen, J.A., 1973, The fuzzy Tychonoff theorem: Journal of Math. Anal.Appl., 43, 734-742.

Hutton, B.-Reilly, I.I., 1974, Separation Axioms in fuzzy topological spaces: Dept. of Math., University of Auckland, Report No. 55.

Malakar, S., 1992, On fuzzy semi-irresolute and strongly irresolute functions: North-Holland, Fuzzy Sets and Systems 45, 239-244.

Ming, P.P.-Ming, L.Y., 1980, Fuzzy topology I. Neighborhood structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence: Journal of Math. Anal.Appl., 76, 571-599.

Ming, P.P.-Ming, L.Y., 1980, Fuzzy topology, II. Product and quotient spaces, J.Math.Anal.Appl., 77, 20-37.

Mukherjee, M.N.-Sinha, S.P., 1989, Irresolute and almost open functions between fuzzy topological spaces: Fuzzy Sets and Systems 29, 381-388.

Mukherjee, M.N.-Sinha, S.P., 1990, On some near-fuzzy continuous functions between fuzzy topological spaces: North-Holland, Fuzzy Sets and Systems 34, 245-254.

Mukherjee, N.N.-Ghosh, B., 1990, Some stronger forms of fuzzy continuous mappings on fuzzy topological spaces: North-Holland, Fuzzy Sets and Systems 38, 375-387.

Nanda, S., 1986, On fuzzy topological spaces: Fuzzy Sets and Systems 19, 193-197.

Saha, S., 1987, Fuzzy δ-continuous mappings: J.Math.Anal.Appl., 128, 130-142.

Sinha, S.P.,On S^*-closedress in fuzzy setting, (preprint).

Warren, R.H., 1978, Neighbourhood, bases and continuity in fuzzy topological spaces: Rocky Mountain J.Math., 8, 459-470.

Wong, C.K., 1974, Fuzzy points and lccal properties of fuzzy topology: J.Math.Anal.Appl. 46, 316-328.

Yalvaç, T.H., 1982, Belirtisiz topolojik uzaylar arasında zayıf süreklilikler: Doktora tezi, H.Ü.Fen Bilimleri Enstitüsü. Beytepe, Ankara, 69 s.

Yalvaç, T.H., 1987, Fuzzy sets and functions on fuzzy spaces: J.Math.Anal.Appl., 126, 409-423.

Zadeh, L.A., 1965, Fuzzy Sets: Inform and Control, 8., 388-353.