



**DÜĞÜMLERLE EŞLENEN BİTOPOLOJİLER
VE AYIRMA AKSİYOMLARI**

Ferit YALAZ

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Prof. Dr. Tamer UĞUR
2017**

Her hakkı saklıdır

**ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜĞÜMLERLE EŞLENEN BİTOPOLOJİLER VE AYIRMA AKSİYOMLARI

Ferit YALAZ

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı**

**ERZURUM
2017**

Her hakkı saklıdır



T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



TEZ ONAY FORMU

DÜĞÜMLERLE EŞLENEN BİTOPOLOJİLER VE AYIRMA AKSİYOMLARI

Prof. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Ferit YALAZ tarafından hazırlanan bu çalışma, 20/12/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK

İmza :

Üye : Prof. Dr. Tamer UĞUR

İmza :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI

İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu **28/12/2017** tarih ve **51/13** nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DÜĞÜMLERLE EŞLENEN BİTOPOLOJİLER VE AYIRMA AKSİYOMLARI

Ferit YALAZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tamer UĞUR

Bu çalışmada, düğümlerin regüler diyagramlarından elde edilen düğüm graflarına karşılık gelen bitopolojilerin bazı özellikleri incelenmiş ve özellikle ayırma aksiyomları ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bitopolojilere karşılık gelen düğümleri veren bir yöntem sunulmuştur.

2017, 107 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bitopoloji, Düğüm, Graf, Digraf

ABSTRACT

MS Thesis

BITOPOLOGIES ASSOCIATED WITH KNOTS AND SEPARATION AXIOMS

Ferit YALAZ

Ataturk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Topology

Supervisor: Prof. Dr. Tamer UĞUR

The bitopologies corresponding to the knot graphs obtained from the regular diagrams of Knots were obtained and some properties of these bitopologies were examined and some results especially about the separation axioms were obtained. Also, a method that gives knots corresponding to bitopologies is presented.

2017, 107 pages

Keywords: Bitopology, Knot, Graph, Digraph

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu alışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakóltesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Tez çalışmamı hazırlama sürecinde bilgi ve tecrübelerini esirgemeyen, bana yol gösteren değerli hocam Sayın Prof. Dr. Tamer UĞUR'a teőekkürlerimi arz ederim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Sayın Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI, Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK, Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU ve Matematik Bölümü'nde gerekli ilgi ve yardımı esirgemeyen anabilim dalımızın değerli öğretim üyelerine sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Çalışmamda bana yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen arkadaşlarım Tuğçe KUNDURACI ve Kenan PALITOĞLU'na teşekkür ederim.

Bu süreçte bana desteğini ve güvenini daima hissettiren aileme minnettarlığımı sunarım.

Ferit YALAZ

Aralık, 2017

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	3
2.1. Topoloji ile İlgili Temel Kavramlar	3
2.2. Ayrırma Aksiyomları.....	5
2.3. Düğüm.....	7
2.4. Bir Düğümün Regüler Diyagramı	9
2.5. Elementer (Temel) Düğüm Hareketleri.....	11
2.6. Reidemeister Hareketleri.....	12
2.7. Graf.....	13
2.8. Digraf (Yönlendirilmiş Graf)	14
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	16
3.1. Düğüm Grafının Elde Edilmesi.....	16
3.2. Grafı Verilen Düğümün Elde Edilmesi	19
3.3. Graf Hareketleri.....	20
3.4. Bitopolojik Uzaylar	25
3.5. Bitopolojik Uzaylarda Ayrırma Aksiyomları	27
3.6. Digraflar Yardımıyla Bitopolojinin Elde Edilmesi	30
3.7. Düğümlerin Bitopolojilerinin Elde Edilmesi	31
4. ARAŞTIRMA ve BULGULAR.....	43
4.1. Bitopolojiler Yardımıyla Düğümlerin Elde Edilmesi	43
4.2. Düğümlere Karşılık Gelen Bitopolojilerin Bazı Özellikleri Ve Ayrırma Aksiyomları.....	80
5. SONUÇ ve TARTIŞMA.....	105

KAYNAKLAR.....	107
ÖZGEÇMİŞ.....	108



SİMGELER DİZİNİ

\mathbb{R}^2	2-boyutlu Öklid Uzayı
\mathbb{R}^3	3-boyutlu Öklid Uzayı
$\Omega_i \quad i = 1,2,3$	için Reidemeister Hareketleri
$\Omega_i^{-1} \quad i = 1,2,3$	için Reidemeister Hareketlerinin tersi
K^*	K düğümünün ayna görüntüsü
S^1	1-Boyutlu Küre
S^3	$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ şeklinde oluşturulan uzay
$g(\pi)$	Bir düğümün grafi
K	Herhangi bir düğüm
$g'(\pi)$	Bir düğümün dual grafi
$\pi(K)$	K düğümünün standart izdüşümü

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Basit bir düğüm tipi ve sol-el trefoil düğüm.....	8
Şekil 2.2. Sağ el trefoil düğümü	8
Şekil 2.3. K düğümünün izdüşümü.....	9
Şekil 2.4. Katlı noktalar	10
Şekil 2.5. Regüler diyagramlar	10
Şekil 2.6. Temel düğüm hareketleri 1	12
Şekil 2.7. Temel düğüm hareketleri 2	12
Şekil 2.8. Reidemeister hareketleri	12
Şekil 2.9. Bir graf örneği.....	14
Şekil 2.10. Bir digraf örneği	15
Şekil 3.1. Trefoil düğümü ve onun grafi.....	16
Şekil 3.2. Grafın işaretleri.....	17
Şekil 3.3. Trefoil düğümü ve onun işaretlenmiş grafi	18
Şekil 3.4. İşaretlenmiş graftan trefoil düğümünün elde edilişi	18
Şekil 3.5. İşaretlenmiş graftan düğümün elde edilişi	19
Şekil 3.6. Graflara karşılık gelen düğüm ve halka örnekleri	20
Şekil 3.7. Graf bozması.....	21
Şekil 3.8. 1. Graf bozmasının ispatı.....	21
Şekil 3.9. 2. Graf bozması.....	22
Şekil 3.10. 2. Graf bozmasının ispatı.....	22
Şekil 3.11. 3. Graf bozması.....	22
Şekil 3.12. 3. Graf bozmasının ispatı.....	23
Şekil 3.13. 4. Graf bozması.....	23
Şekil 3.14. 5. Graf bozması.....	24
Şekil 3.15. 6. Graf bozması.....	24
Şekil 3.16. 7. Graf bozması.....	24
Şekil 3.17. Digraf üzerinden bitopoloji elde edilmesi	31
Şekil 3.18. Cycle bozması.....	32
Şekil 3.19. Üçgen bozması	32

Şekil 3.20. Trefoil düğümünün grafının yönlendirilmesi	33
Şekil 3.21. Trefoil düğümünün dual digrafı	33
Şekil 3.22. Trefoil düğümünün dual digrafının bozması	33
Şekil 3.23. 3_1 düğümünün regüler diyagramı ve digrafları	35
Şekil 3.24. 3_1 düğümünün digraf bozması	35
Şekil 3.25. 4_1 düğümünün regüler diyagramı ve digrafları	36
Şekil 3.26. 4_1 düğümünün digraf bozma	36
Şekil 4.1. Bitopolojisi verilen düğümün digrafının köşeleri.....	44
Şekil 4.2. Cycle bozması.....	44
Şekil 4.3. Cycle bozması ve cycle	45
Şekil 4.4. Güçlü kümenin düzleme uygulanması	46
Şekil 4.5. Cycle bozmasına köşelerin yerleştirilmesi	46
Şekil 4.6. Cycle bozmasına kenar eklenmesi.....	47
Şekil 4.7. Cycle bozmasının Cycle'a dönüşmesi.....	47
Şekil 4.8. Trefoil düğümünün regüler diyagramının graf yardımıyla elde edilmesi	48
Şekil 4.9. Trefoil Düğümünün regüler diyagramı.....	48
Şekil 4.10. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	49
Şekil 4.11. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	49
Şekil 4.12. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	50
Şekil 4.13. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	50
Şekil 4.14. 4_1 düğümünün regüler diyagramı.....	50
Şekil 4.15. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	51
Şekil 4.16. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	51
Şekil 4.17. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	52
Şekil 4.18. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	52
Şekil 4.19. 5_1 düğümünün regüler diyagramı.....	52
Şekil 4.20. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	53
Şekil 4.21. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	53
Şekil 4.22. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	54
Şekil 4.23. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	54
Şekil 4.24. 5_1 düğümünün regüler diyagramı.....	55

Şekil 4.25. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	55
Şekil 4.26. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	56
Şekil 4.27. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	56
Şekil 4.28. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	57
Şekil 4.29. 6_1 düğümü regüler diyagramı.....	57
Şekil 4.30. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	57
Şekil 4.31. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	58
Şekil 4.32. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	58
Şekil 4.33. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	59
Şekil 4.34. 7_1 düğümü regüler diyagramı.....	59
Şekil 4.35. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	60
Şekil 4.36. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	60
Şekil 4.37. Kenarların düzleme uygulanması	61
Şekil 4.38. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	61
Şekil 4.39. 7_2 düğümü regüler diyagramı.....	61
Şekil 4.40. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	62
Şekil 4.41. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	62
Şekil 4.42. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	63
Şekil 4.43. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	63
Şekil 4.44. 7_3 düğümünün regüler diyagramı.....	64
Şekil 4.45. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	64
Şekil 4.46. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	65
Şekil 4.47. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	65
Şekil 4.48. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	66
Şekil 4.49. 8_1 düğümünün regüler diyagramı.....	66
Şekil 4.50. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	67
Şekil 4.51. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	67
Şekil 4.52. Kenarların düzleme yerleştirilmesi	68
Şekil 4.53. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	68
Şekil 4.54. 8_3 düğümünün regüler diyagramı.....	68
Şekil 4.55. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	69

Şekil 4.56. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	69
Şekil 4.57. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	70
Şekil 4.58. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	70
Şekil 4.59. 9_1 düğümünün regüler diyagramı.....	70
Şekil 4.60. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	71
Şekil 4.61. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	71
Şekil 4.62. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	72
Şekil 4.63. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	72
Şekil 4.64. 9_2 düğümünün regüler diyagramı.....	73
Şekil 4.65. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	73
Şekil 4.66. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	74
Şekil 4.67. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	74
Şekil 4.68. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	75
Şekil 4.69. 9_3 düğümünün regüler diyagramı.....	75
Şekil 4.70. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	76
Şekil 4.71. Zayıf kümenin düzleme uygulanması.....	76
Şekil 4.72. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	77
Şekil 4.73. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	77
Şekil 4.74. 10_1 düğümünün regüler diyagramı	77
Şekil 4.75. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması	78
Şekil 4.76. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması	78
Şekil 4.77. Kenarların düzleme yerleştirilmesi.....	79
Şekil 4.78. Bozmaların cycle dönüştürülmesi.....	79
Şekil 4.79. 10_3 düğümünün regüler diyagramı	80

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. m_1 (m tek, $m \geq 3$)düğümleri ve bitopolojileri	37
Çizelge 3.2. m_1 (m çift, $m \geq 4$) düğümleri ve bitopolojileri	38
Çizelge 3.3. m_2 (m tek, $m \geq 5$) düğümleri ve bitopolojileri	39
Çizelge 3.4. m_2 (m çift, $m \geq 6$) düğümleri ve bitopolojileri	40
Çizelge 3.5. m_3 (m tek, $m \geq 7$) düğümleri ve bitopolojileri	41
Çizelge 3.6. m_3 (m çift, $m \geq 8$) düğümleri ve bitopolojileri	42



1. GİRİŞ

Düğüm, yaşamımızda oldukça önemli yer kaplar. Örneğin; ilkel çağlarda insanlar bir balta yapmak için bir taş parçasını, bir odun parçasının ucuna düğümlerdi. Eski İnk medeniyeti ise ip parçalarını düğümlyerek kendi harf sistemlerini oluşturmuşlardır. Günlük yaşamımızda ise en basitinden ayakkabımızı bağlarken düğümlerden yararlanırız. İnsanlar düğümleri çok uzun yıllardır kullanmalarına rağmen matematiksel olarak düğüm çalışmaları, tam net olmamakla birlikte 100 ile 1000 yıl arasında sürdüğü söylenir.

Düğüm Teorisi 19. yüzyıldan beri çok hızlı gelişim göstermiştir. 20. yüzyılın başından itibaren diğer bilim dallarına uygulaması ile birlikte düğüm teorisi oldukça önem kazanmıştır. Gauss'un Düğüm Teorisine ilgi duyduğu bilinse de, Amerikalı matematikçi Alexander, Düğüm Teorisi'nin, 3- Boyutlu topoloji çalışmalarında ne kadar önemli olduğunu gösteren ilk kişidir. Ayrıca Alman matematikçi Seifert 1920'lerin başından 1930'lu yıllara kadar bu teorinin önemini ortaya koyan eserler vermiştir. Özellikle bu dönemde Bankwitz, Aumann, Yajima, Kinoshita, Murasugi gibi bir çok isim Düğüm Teorisi'ne önemli katkılar yapmıştır. Bu isimlerden Bankwitz, 1930 da, bizim de bu çalışmada kullandığımız "Düğüm Grafi" kavramını ilk olarak literatüre kazandıran kişidir. Aslında düğüm grafları, Graf Teori ve Düğüm Teorisi'nin ortak çalışma alanları olarak görülebilir. Bu çalışmada da düğüm graflarına oldukça değinilmiştir. Ayrıca bu çalışmada oldukça kullanılan bir diğer kavram ise Bitopoloji (ikili topoloji) kavramıdır. Bitopoloji kavramını literatüre kazandıran kişi Kelly'dir. Kelly bu çalışmasında ayırma aksiyomlarını Bitopolojik Uzaylara taşımıştır. Biz de bu çalışmamızda düğümlere karşılık gelen bitopolojilerin, ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadığını irdedeleyeceğiz. Ayrıca bu çalışmada digraflar (directed graph) ile düğümlerin arasında bir ilişki kurulabilir mi? Digraflardan yararlanarak her düğüme bir bitopoloji karşılık gelir mi? Düğümleri sınıflandırmak için bitopolojilerden yararlanılabilir mi? Düğümlere karşılık gelen bitopolojiler ayırma aksiyomlarını sağlıyor mu? Bitopolojisi verilen bir düğümün kendisini elde edebilir miyiz? gibi sorulara çözüm bulmaya çalışacağız.

Sunulan bu tez, Giriş, Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntemler, Araştırma Bulguları ve Tartışma ve Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır.

Kuramsal Temeller bölümünde ilk olarak kullanacağımız temel topolojik ve bitopolojik kavramlar verildi. Düğümün tanımı, bir düğümün diyagramı, temel düğüm hareketleri ve Reidemeister hareketleri anlatılarak, graf, digraf tanımları verildi. Ayrıca graf ve digraf çeşitlerine değinildi.

Materyal ve Yöntem bölümünde, bir düğümün grafının nasıl elde edileceği gösterilerek, bir düğümün grafından hareketle düğümün kendisinin elde edilişi Tait metodu yardımıyla gösterildi. Ayrıca digraflar yardımıyla, $m = 3,4, \dots, 10$ ve $n = 1,2,3$ olmak üzere, m_n düğümlerine karşılık gelen bitopolojiler bulunması için bir algoritma verildi. Bunun dışında bitopolojiler üzerindeki ayırma aksiyomlarının tanımı sunuldu.

Araştırma ve Bulgular bölümünde, $m = 3,4, \dots, 10$ ve $n = 1,2,3$ olmak üzere, m_n düğümlerine karşılık gelen bitopolojiler verildiğinde düğümün kendisini elde etmek için bir yöntem verildi. Bu yöntemin daha iyi anlaşılması için “zayıf küme” ve “güçlü küme” tanımları yapıldı. Ayrıca bahsedilen düğümlere karşılık gelen bitopolojilerin ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadıklarına bakıldı.

Sonuç ve Tartışma bölümünde ise bu çalışmada hedeflenen sonuçlardan bahsedilerek, bitopolojilerden yararlanılarak düğümün elde edilmesi için verilen yöntem özet geçildi.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Topoloji ile İlgili Temel Kavramlar

2.1.1. Tanım: X , boştan farklı bir küme olmak üzere, τ da X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ aşağıdaki şartları sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir.

- 1) $X, \emptyset \in \tau$ olmalıdır.
- 2) τ ya ait olan kümelerin herhangi bir sayıdaki birleşimi yine τ ya ait olmalıdır.
- 3) τ ya ait olan kümelerin sonlu sayıdaki kesişimleri yine τ ya ait olmalıdır.

X ile birlikte τ ya topolojik uzay denir ve (X, τ) ile gösterilir. τ nun elemanlarına açık kümeler ve elemanlarının tümleyenlerine kapalı kümeler denir (Koçak 2011).

2.1.2. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve β da açık kümelerin bir sınıfı olsun. τ nun her elemanı β koleksiyonuna ait olan elemanların birleşimi olarak yazılabiliyorsa β ya τ topolojisinin bir tabanı denir (Koçak 2011).

2.1.3. Tanım: X boştan farklı bir küme olmak üzere, $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için,

- 1) $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- 2) $d(x, y) = d(y, x)$
- 3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde metrik ve (X, d) sıralı ikilisine metrik uzay denir. Burada 2).şarta simetri özelliği 3).şart ise üçgen eşitsizliği olarak adlandırılır.

2.1.4. Tanım: X boştan farklı bir küme ve $q: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan q fonksiyonuna pseudo metrik denir. Her $x, y, z \in X$ için,

- 1) $q(x, x) = 0$
- 2) $q(x, y) = q(y, x)$
- 3) $q(x, z) \leq q(x, y) + q(y, z)$ (Engelking 1977).

2.1.5. Tanım: X boştan farklı bir küme ve $p: X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan p fonksiyonuna quasi-pseudo metrik denir.

- 1) $\forall x \in X$ için $p(x, x) = 0$
- 2) $\forall x, y, z \in X$ için $p(x, z) \leq p(x, y) + p(y, z)$ (Kelly 1963).

Yukarıdaki tanımlardan görülmektedir ki metrik uzay ile pseudo-metrik arasındaki tek fark, metriğin tanımındaki 1).şartındaki gerek ve yeter koşulun, pseudo metriğin tanımında sadece gerek şart olarak verilmesidir. Metrik ile quasi-pseudo metriğin tanımları karşılaştırıldığında ise metriğin 1). şartındaki gerek ve yeter koşulun, quasi-pseudo metriğin tanımında sadece gerek koşul olarak verilmesi ve metriğin tanımında verilen 2) şart olan simetri özelliğinin, quasi-pseudo metriğin tanımında aranmamasıdır. Yani her metrik uzay aynı zamanda bir pseudo metrik, her pseudo metrik ise aynı zamanda quasi-pseudo metriktir.

2.1.6. Tanım: p ve q iki quasi-pseudo metrik olsun. Eğer $p(x, y) = q(y, x)$ ise p ve q quasi-pseudo metriklerine birbirlerinin eşleniğidir denir (Kelly 1963).

2.1.7. Tanım: X ve Y iki Hausdorff uzayları olmak üzere, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f: X \rightarrow f(X)$ fonksiyonu bir homeomorfizm ise bu fonksiyona gömülme (imbedding) denir (Burde and Zieschang 2003).

2.1.8. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ kümesi verilsin. τ topolojisine göre, A kümesini kapsayan en küçük kapalı kümeye A kümesinin kapanışı denir. \bar{A} veya clA ile gösterilir (Koçak 2011).

2.1.9. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in U \subseteq A$ olacak şekilde bir U açık kümesi varsa x noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. A nın bütün iç noktalarının kümesine A nın içi denir ve A^0 veya $intA$ ile gösterilir (Koçak 2011).

2.2. Ayırma Aksiyomları

2.2.1. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her bir nokta çifti için, bu noktalardan birini içeren diğerini içermeyen en az bir U açık kümesi varsa (X, τ) topolojik uzayına T_0 uzayı denir. Diğer bir ifade ile,

$x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için;

$$x \in U \in \tau, y \notin U \in \tau$$

veya

$$x \notin U \in \tau, y \in U \in \tau$$

olacak şekilde en az bir U açık kümesi varsa (X, τ) topolojik uzayına T_0 uzayı denir (Koçak 2011).

2.2.2. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X in her bir nokta çifti için, bu noktalardan her birinin diğer noktayı içermeyecek komşuluğu varsa (X, τ) topolojik uzayına T_1 uzayı denir. Diğer bir ifade ile,

$$x \neq y \text{ olmak üzere } \forall x, y \in X \text{ için;}$$

$$x \in U \in \tau, y \notin U \in \tau$$

ve

$$x \notin V \in \tau, y \in V \in \tau$$

olacak şekilde en az bir U ve V açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına T_1 uzayı denir (Koçak2011).

2.2.3. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için;

$$x \in U \in \tau \text{ ve } y \in V \in \tau$$

olacak şekilde U, V ayrık ve açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına T_2 uzayı (Hausdorff uzayı) denir (Koçak 2011).

2.2.4. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, F kümesi bu topolojik uzaya göre kapalı bir küme ve $p \in X$ noktası F kümesinde bulunmayan bir nokta olsun. Biri F kapalı kümesini, diğeri F kümesinde bulunmayan p noktasını içeren ayrık ve açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına regüler uzay denir. Yani, kapalı her F kümesi ve F kümesinde bulunmayan her $p \in X$ noktası için;

$$F \in U \in \tau \text{ ve } p \in V \in \tau$$

olacak şekilde U, V ayrık ve açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına regüler uzay denir (Koçak 2011).

2.2.5. Tanım: (X, τ) topolojik uzayı, regüler uzay olsun. Bu uzay aynı zamanda T_1 uzayı ise (X, τ) topolojik uzayına T_3 uzayı denir.

2.2.6. Tanım: (X, τ) topolojik uzay, F_1 ve F_2 kümeleri ayrık ve her biri bu uzayda kapalı iki küme olsun. Biri F_1 kapalı kümesini diğeri F_2 kapalı kümesini kapsayan ayrık ve açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına normal uzay denir. Başka bir ifade ile,

$F_1 \cap F_2 = \emptyset$ olmak üzere F_1 ve F_2 kümeleri kapalı,

$$F_1 \subseteq U \text{ ve } F_2 \subseteq V$$

olacak şekilde U, V ayrık ve açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına normal uzay denir (Koçak 2011).

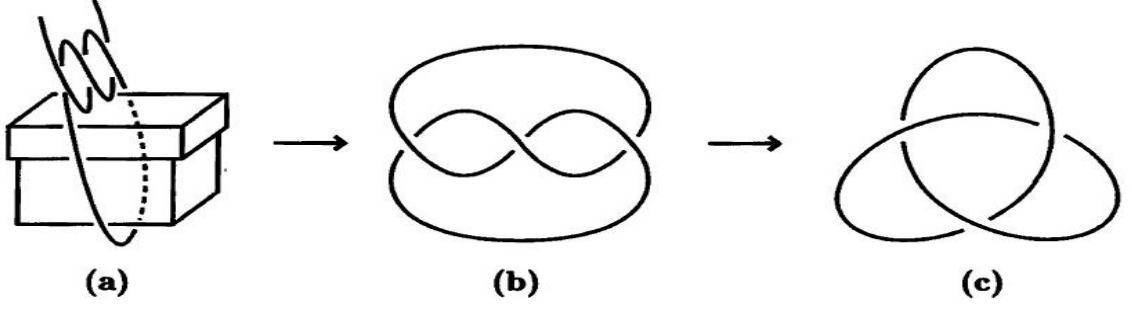
2.2.7. Tanım: (X, τ) topolojik uzayı, normal uzay olsun. Bu uzay aynı zamanda T_1 uzayı ise (X, τ) topolojik uzayına T_4 uzayı denir.

2.2.8. Tanım: (X, τ) bir topolojik uzay, F kümesi bu topolojik uzaya göre kapalı bir küme ve $p \in X$ noktası F kümesinde bulunmayan bir nokta olsun. Eğer $f(F) = \{1\}$ ve $f(p) = 0$ olacak şekilde $f: X \rightarrow [0,1]$ sürekli bir fonksiyon varsa (X, τ) topolojik uzayına tam regüler uzay denir (Koçak 2011).

2.2.9. Tanım: (X, τ) topolojik uzayı, tam regüler uzay olsun. Bu uzay aynı zamanda T_1 uzayı ise (X, τ) topolojik uzayına $T_{3,5}$ uzayı veya Tychonoff uzayı denir.

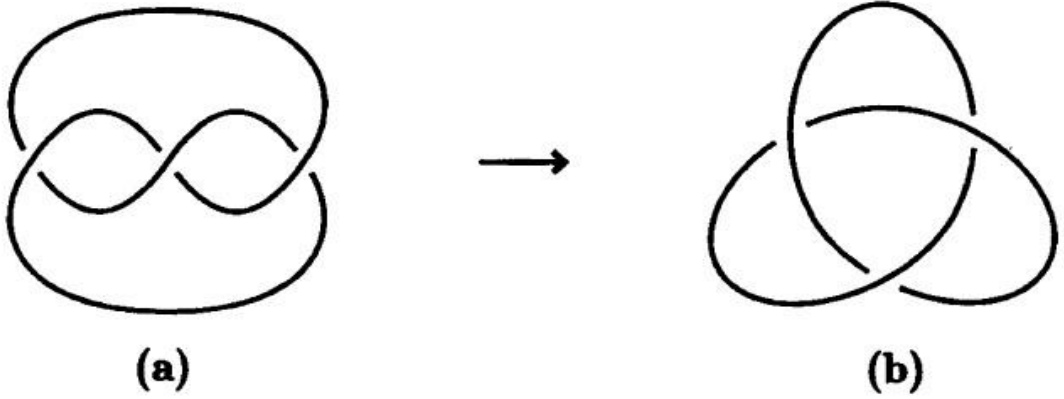
2.3. Düğüm

30 cm uzunluğunda bir ip parçasını Şekil 2.1(a)'da görüldüğü gibi bir kutunun etrafına bağlayalım. Daha sonra ipin boşa kalan uçlarını birbirine yapıştıralım. Burada kutu destek olarak konulmuştur ve ip kutuya temas etmesin, yani ipi gevşek tuttuğumuzu düşünerekten bu işlemi gerçekleştirilelim. Bu işlem tamamlandığında elimizde hemen hemen 30 cm uzunluğunda düğümlemiş bir ilmek bulunur. Bu ilmek matematikte düğüm (knot) olarak isimlendirilir (Murasugi 1996) (Şekil 2.1(b)).



Şekil 2.1. Basit bir düğüm tipi ve sol-el trefoil düğüm

Kesin bir ifadeyle, düğüm bir eğri olarak düşünülebilir. O halde bir düğüm uzayda basit kapalı bir eğridir. Eğer, yukarıdaki işlem sol elle uygulanırsa Şekil 2.1'deki düğüm Şekil 2.2'deki gibi olacaktır.



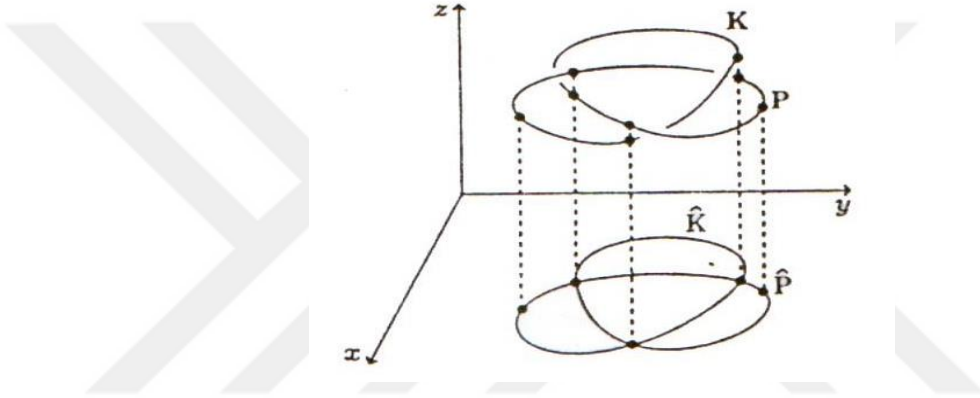
Şekil 2.2. Sağ el trefoil düğümü

2.3.1. Tanım: $S^{n-1} = \{x = (x_i) \in E_n : \sum_{i=1}^n |x_i|^2 = 1\}$ olmak üzere;

S^1 birim çemberinin S^3 e gömülmesi ile elde edilen basit kapalı eğriye düğüm denir (Murasugi 1996).

2.4. Bir Düğümün Regüler Diyagramı

\mathbb{R}^3 de bulunan bir $P(x, y, z)$ noktasını, xy -düzleminde bulunan $P(x, y, 0)$ noktasına indirgeyen izdüşüm fonksiyonunu π ile gösterelim. Yani $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi(x, y, z) = (x, y, 0)$ olarak tanımlansın. $\pi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ izdüşüm fonksiyonu yardımıyla, \mathbb{R}^3 teki bir K düğümünün üzerindeki her bir noktayı \mathbb{R}^2 de bir noktaya karşılık getirilerek oluşturulan şekle K düğümünün regüler izdüşümü denir ve \hat{K} ile gösterilir. Yani $\pi(K) = \hat{K}$ dir.

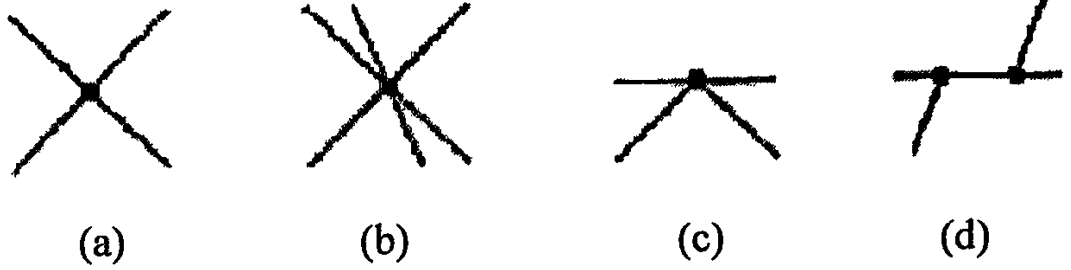


Şekil 2.3. K düğümünün izdüşümü

Şekil 2.3'de görüldüğü gibi \mathbb{R}^3 de bulunan K düğümü basit kapalı bir eğridir. Ancak K düğümünün regüler izdüşümü olan \hat{K} , birkaç arakesit noktasına sahip olup, xy -düzleminde basit kapalı eğri değildir. Bu arakesit noktalarına katlı nokta denir. K düğümü üzerinde biraz değişiklik yapılarak aşağıdaki şartlar verilebilir.

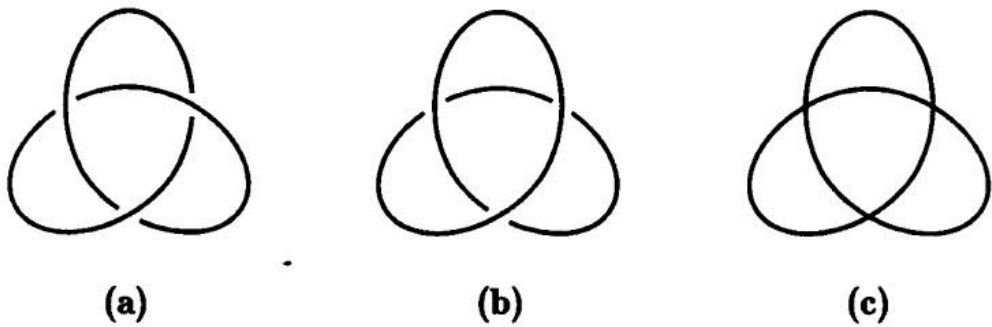
- 1) K düğümünün regüler diyagramı olan \hat{K} , sonlu sayıda arakesit noktasına sahip olmalıdır.
- 2) Q , \hat{K} nın bir arakesit noktası olsun. Bu durumda, Q katlı noktasının ters görüntüsü K düğümü üzerinde iki farklı noktaya sahiptir. Yani Q , K nın bir katlı noktasıdır (Şekil 2.4(a)). Bununla birlikte Şekil 2.4(b) de görüldüğü gibi ikiden fazla olmamalıdır. Yani ikiden fazla noktaya izin verilmez.
- 3) Bir K düğümünü poligonel olarak verildiğini düşünelim. Bu durumda, K düğümünün bir köşesi, K düğümünün regüler izdüşümü olan \hat{K} nın bir katlı noktasına

dönüşmez. Şekil 2.4(c) ve (d)'de görüldüğü gibi, poligonal bir doğru, \widehat{K} regüler izdüşümünün bir köşesine izdüşmüştür. Bu iki durumda izin verilmez.



Şekil 2.4. Katlı noktalar

Regüler izdüşümlerdeki katlı noktalarda önemli problemler vardır. İzdüşümün bir katlı noktası göz önüne alındığında ve düğümü bir ip parçası gibi düşünürsek, kendi kendisinin altından mı yoksa üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu problemi gidermek için düğümün kesim noktası çizilerek, katlı noktaların bulunduğu yerlerde düğümde belirli değişiklikler yapılabilir. Böylece düğümün geçitinin alttan mı veya üstten mi olduğu konusunda orijinaline uymasada, düğümün görüntüsü çizilebilir. Böyle değiştirilmiş izdüşümlere bir regüler diyagram denir (Şekil 2.5(a) ve (b)). Yani Şekil 2.5(c) izdüşümü üzerinde bir takım değişiklikler yapılarak Şekil 2.5(a) ve (b) elde edilir.



Şekil 2.5. Regüler diyagramlar

Bir düğümün regüler diyagramı, düğümün üç boyutlu uzayda nasıl görüldüğünü verir. Yani düzlemde üç boyutlu bir çizim yapılabilmesine imkan tanır. Ayrıca düğümün

izdüşümünde, katlı noktalarda yaşanan sıkıntıları gidermek için düğümün regüler diyagramından yararlanır. Örneğin, Şekil 2.4.3(c), Şekil 2.4.3(a) ve (b) deki (farklı) iki düğümün izdüşümüdür (Murasugi 1996).

2.5. Elementer (Temel) Düğüm Hareketleri

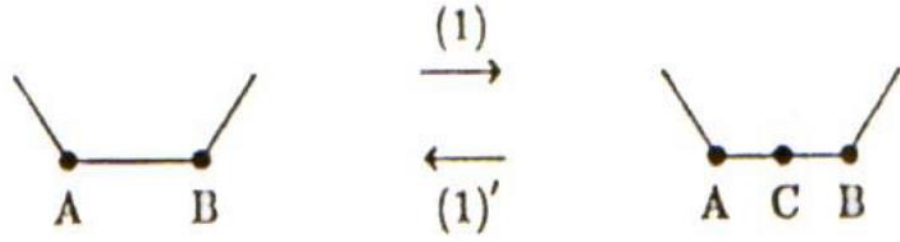
Bir düğüm poligonel doğruların bir ailesi olarak ifade edilebilir. Poligonel biçimde ifade edilen bir düğüm ele alınır, sonlu sayıda kenarların birleşimi olarak ifade edileceğinden, bu düğüm daha düz ve anlaşılır şekilde resmedilebilir. Dolayısıyla, bir düğümün üzerinde daha kolay değişiklikler ve hareketler yapılabilir. Örnek olarak, bir K düğümü üzerindeki $|AB|$ kenarını, bir C noktası sayesinde, $|AC|$ ve $|CB|$ kenarıyla değiştirilebilir. Ayrıca, bu değişikliğin tersi de doğru olacaktır. Bu yer değiştirmelere temel düğüm hareketleri denir. Verilen bir K düğümü üzerinde aşağıdaki işlemler uygulanabilir.

(1) Şekil 2.6'da görüldüğü gibi bir K düğümü üzerindeki $|AB|$ kenarı üzerindeki bir C noktası referans alınarak $|AC|$ kenarı ve $|CB|$ kenarı olmak üzere iki kenara bölünebilir.

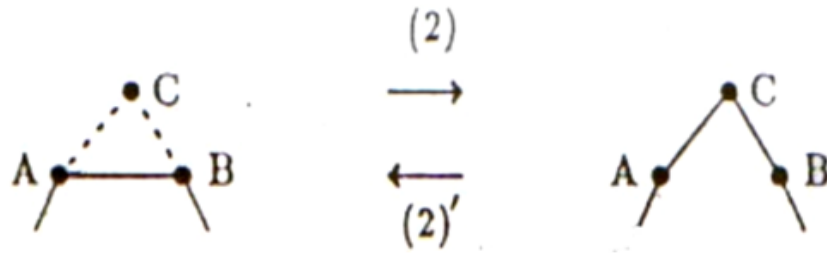
(1)' ((1) in tersi) Şekil 2.6'da görüldüğü gibi bir K düğümü üzerindeki bitişik $|AC|$ ve $|CB|$ kenarlarından oluşan bir doğru parçası varsa bu C noktası kaldırılarak bir $|AB|$ kenarı elde edilebilir.

(2) K düğümü dışında bulunan, yani K düğümü üzerinde olmayan bir C noktası ele alınsın. $|AB|$ kenarı ve bir C noktası yardımıyla elde edilen ABC üçgeni, $|AB|$ kenarı hariç K düğümünü kesmezse bu durumda $|AB|$ kenarı ortadan kaldırılabilir, $|AC|$ ve $|CB|$ kenarları eklenebilir (Şekil 2.7).

(2)' ((2)'nin tersi) K düğümü üzerinde, bir C noktası sayesinde, $|AC|$ ve $|CB|$ kenarları gibi birbirine bağlanmış iki kenarı içeren bir ABC üçgeni bulunuyorsa ve bu üçgen $|AC|$ ve $|CB|$ kenarları hariç K düğümünü kesmezse Şekil 2.7'de görüldüğü gibi $|AC|$ ve $|CB|$ kenarları kaldırılabilir ve $|AB|$ kenarı çizilebilir (Murasugi 1996).



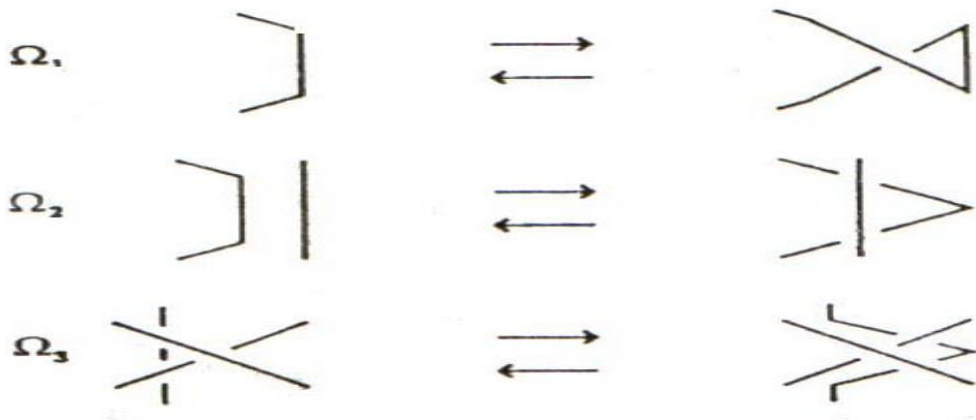
Şekil 2.6. Temel düğüm hareketleri 1



Şekil 2.7. Temel düğüm hareketleri 2

2.6. Reidemeister Hareketleri

Şekil 2.8'de gösterilen ($i=1,2,3$) olmak üzere Ω_i hareketlerine ve onların tersleri olan Ω_i^{-1} hareketlerine Reidemeister hareketleri denir.



Şekil 2.8. Reidemeister hareketleri

K_1 ve K_2 iki düğüm ve bu düğümlerin regüler diyagramları sırasıyla \widehat{K}_1 ve \widehat{K}_2 ile gösterilsin. Eğer bu iki düğümün regüler diyagramları Reidemeister hareketleri olan Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 veya onların tersleri olan Ω_1^{-1} , Ω_2^{-1} , Ω_3^{-1} hareketlerinin sonlu bir dizisi ile birbirine dönüştürülebiliyorsa bu iki düğüm regüler diyagram birbirine denktir denir ve $\widehat{K}_1 \approx \widehat{K}_2$ ile gösterilir (Burde and Zieschang 2003)

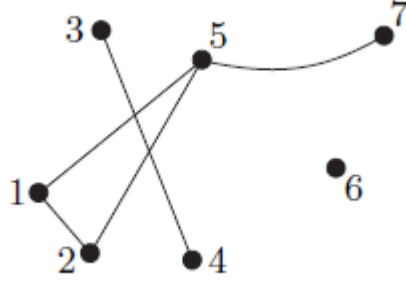
2.6.1. Teorem: \widehat{K}_1 ve \widehat{K}_2 , K_1 ve K_2 düğümlerinin regüler diyagramları olsun. Bu durumda,

$$K_1 \approx K_2 \Leftrightarrow \widehat{K}_1 \approx \widehat{K}_2$$

dir (Murasugi 1996).

2.7. Graf

$E \subseteq [V]^2$ olacak şekilde $G = (V, E)$ çiftine G grafı denir. Bu gösterimde, yani $G = (V, E)$ gösteriminde, V grafın köşelerini, E de grafın kenarlarını temsil eden kümelerdir. E kümesinin, yani grafın kenarlarının kümesinin elemanları V köşelerinin iki elemanlı alt kümeleridir. Bir diğer ifade ile grafın köşelerinden yararlanılarak, aynı grafın kenarları elde edilir. Bir grafın görüntüsü çizilirken, köşeler noktalar yardımıyla ifade edilir. Grafın kenarları ise doğru parçaları veya yaylarla ifade edilir. Nokta çiftleri yani köşelerden oluşan ikililer verildiği zaman, grafın resmini çizmek için önce noktalar yani köşeler yerleştirilir. Yerleştirilen köşeler bir doğru parçasıyla veya yaylar yardımıyla istenildiği gibi birleştirilir. Burada önemli olan çizilecek olan kenarların şekli değil, nokta çiftlerinin birbiri ile bağlantılı, yani birbiri ile birleşmiş olmasıdır, daha doğrusu hangi iki köşe arasında kenar veya yay olduğudur (Diestel 1997).



Şekil 2.9. Bir graf örneği

Şekil 2.9'daki grafın köşeleri $V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ kümesi ve grafın kenarları $E = \{(1,2), (1,5), (2,5), (3,4), (5,7)\}$ kümesidir.

2.7.1. Tanım: V , bir G grafının köşelerinin kümesi olmak üzere, $v \in V$ köşesine bağlı kenar sayısına, v köşesinin derecesi denir ve $der(v)$ ile gösterilir (Gross and Yellen 2005).

2.7.2. Tanım: G bir graf olmak üzere, G nin her köşesinden bir başka köşesine ulaşılabilirse bu grafa bağlantılı graf denir (Gross and Yellen 2005).

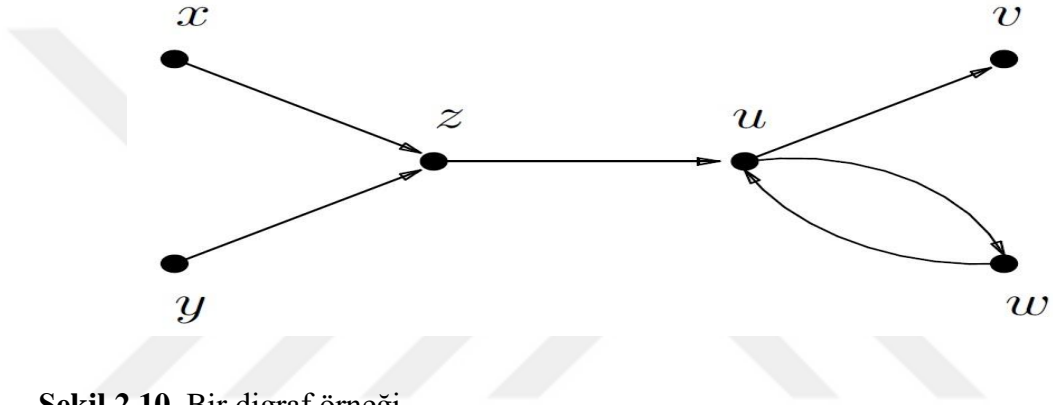
2.7.3. Tanım: G bir graf ve sırasıyla grafın köşe ve kenarlarını $V(G)$ ve $E(G)$ ile gösterelim. Her bir kenarı $+$ veya $-$ ile işaretlenmiş olan G grafına işaretlenmiş graf denir (Gross and Yellen 2005).

2.7.4. Tanım: Bir blok, G nin maksimum ayrılamaz bağlantılı bir alt grafıdır. Bir bağlantılı graf sonlu çoklukta bloklara ayrılabilir (Gross and Yellen 2005).

2.8. Digraf (Yönlendirilmiş Graf)

Bir D digrafı, köşe olarak isimlendirilen elemanların sonlu $V(D)$ kümesinden ve köşelerin sıralı çiftlerinden oluşan yayların sonlu $A(D)$ kümesinden oluşur. Kısacası, bir grafta, yaylar üzerinden, bir köşeden diğer bir köşeye belirli bir yönde geçiş olduğu

belirtilen grafa digraf denir. $V(D)$, D digrafının köşelerinin kümesi, $A(D)$ ise D digrafının yaylarının kümesidir. V köşelerin, A yayların kümesi olarak kabul edersek bir D digrafı $D = (V, A)$ ile gösterilir (Girija and Pilakkat 2013). Bir D digrafının boyutu (order), köşelerinin sayısıdır ve $|D|$ ile gösterilir. D digrafının büyüklüğü (size) ise kenarlarının sayısıdır. Örneğin, Şekil 2.18'deki D digrafının köşelerinin kümesi $V(D) = \{x, y, z, u, v, w\}$ dır ve bu digrafın boyutu 6 dır. Ayrıca, D digrafının yaylarının kümesi $A(D) = \{(u, v), (u, w), (w, u), (z, u), (x, z), (y, z)\}$ dir ve büyüklüğü 6'dır.



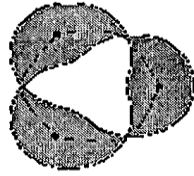
Şekil 2.10. Bir digraf örneği

(u, v) bir digrafın yayı olmak üzere, u köşesine digrafın kuyruğu, v köşesine ise digrafın başıdır denir. Bir yayın kuyruğu ve başı olan köşesi son köşeler (end-vertices) olarak isimlendirilir. Ayrıca bu son köşelere birbirine komşudurlar (adjacent) denir. Yani, (u, v) bir digrafın yayı olmak üzere u, v ye komşu, v de u ya komşudur. Ayrıca, (u, v) yayındaki u köşesi, v yi domine eder (dominates) veya v köşesi, u köşesi tarafından domine edilir denir ve bu durum $u \rightarrow v$ ile gösterilir (Jensen and Gutin 2007).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Dügüm Grafının Elde Edilmesi

Dügümlerin regüler izdüşümleri göz önüne alındığında düzlemi bölgelere ayırdığı görülür. Bu bölgeler 2-boyutlu S küresine homeomorftur. Bu bölgeler birbirinden ayırt edilebilmesi için siyah-beyaz ya da taralı-taralı olmayan diye birbirinden ayrılır. π , herhangi bir K düğümünün regüler izdüşümü olsun. Bu π regüler izdüşümü D_1, D_2, \dots, D_n gibi n katlı noktaya sahip olsun. Burada π nin, S yi her biri açık bir diske homeomorf, $n + 2$ bölgeye ayırdığı görülür. Bu bölgelerin her birini α bölgesi ve β bölgesi diye isimlendirerek iki sınıfa ayırılır. π nin her bir bölgesi, bir katlı noktadan diğer katlı noktaya uzanan yay, daima α ve β bölgelerinin ortak sınırı olacaktır. Sonsuzdaki noktanın β bölgesine ait olduğunu kabul edelim.



(a)



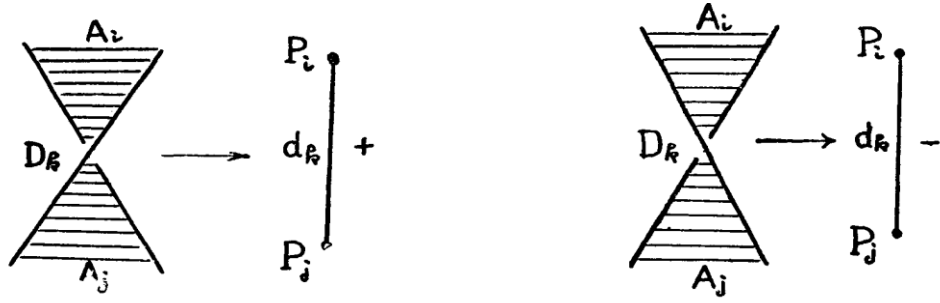
(b)

Şekil 3.1. Trefoil düğümü ve onun grafi

$A_1, A_2, \dots, A_\alpha$, α sınıfının bölgeleri olsun. Bu α sınıfının bölgeleri içinden ($i=1, 2, \dots, \alpha$) olmak üzere $P_i \in A_i$ noktaları alınsın. Bu noktaları, d_1, d_2, \dots, d_n olarak isimlendirilen, ayrıca birbiriyle kesişmeyen n tane yayla birbirine bağlansın. Her bir d_k ($i=1, 2, \dots, n$) yayı, D_k katlı noktasına karşılık gelir. P_i ve P_j noktalarının d_k yayı ile bağlantılı olması için gerek ve yeter şart A_i ve A_j bölgelerinin sınırları üzerinde ortak katlı bir D_k noktalarına sahip olmalarıdır.

α sınıfının bölgelerinin tamamı, yani $A_1, A_2, \dots, A_\alpha$ bölgeleri π nin her katlı noktasında 180° burulan bir spanning K yüzeyinin bir izdüşümü olarak gözönüne alındığında,

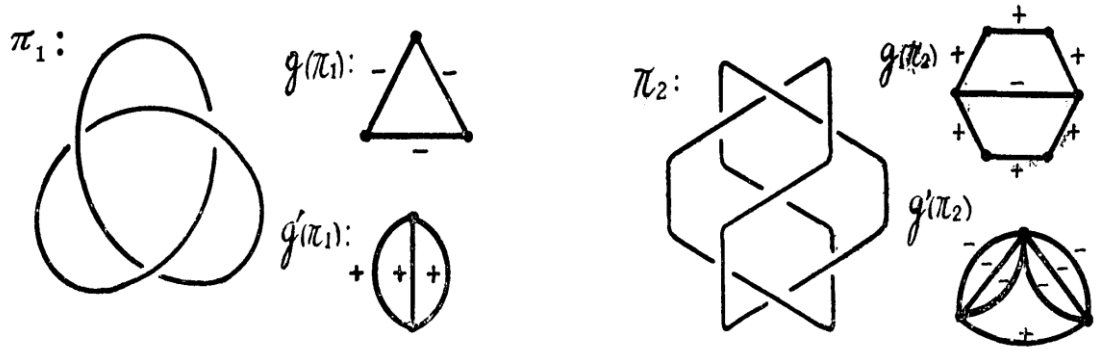
d_k nın işaretini ($k=1,2,3,\dots,n$) için tanımlayabiliriz. Şekil 3.2.'de görüldüğü gibi, sırasıyla, sağ dönüş veya sol dönüşle ilgili olarak, yüzeyin D_k katlı noktasındaki burulmasına göre + veya - işaret alacaktır (Uğur 2002).



Şekil 3.2. Grafın işaretleri

Böylece her bir köşesi, α sınıfından bir bölgeye karşılık gelen $P_1, P_2, \dots, P_\alpha$ köşelerinin ve her işaretlenmiş yayı (+ veya -), bir katlı noktaya karşılık gelen n tane işaretlenmiş d_1, d_2, \dots, d_n yaylarının lineer bir grafını elde ederiz ve bu $\mathcal{G}(\pi)$ lineer grafını, K düğümünün grafi olarak adlandırırız.

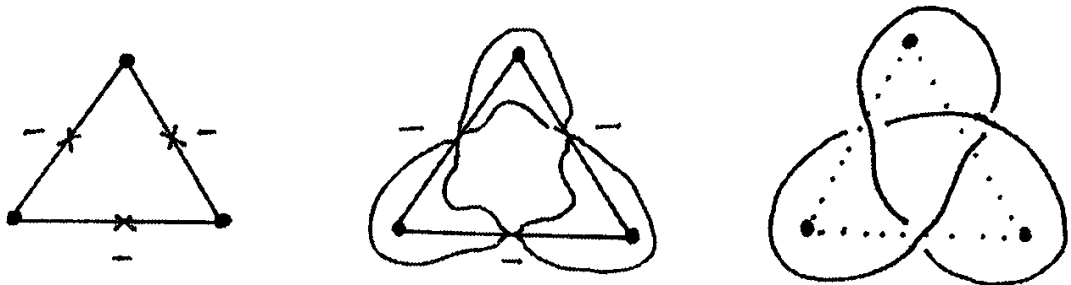
Aynı düşünce ile β sınıfından da başka bir $\mathcal{G}'(\pi)$ grafi elde edebiliriz. Bu grafa da $\mathcal{G}(\pi)$ lineer grafının dual grafi adı verilir. Ayrıca $\mathcal{G}'(\pi)$ dual grafını doğrudan $\mathcal{G}(\pi)$ grafindan da elde edebiliriz. Bunun için $B'_1, B'_2, \dots, B'_\beta$, $S - \mathcal{G}(\pi)$ nın bölgeleri olsunlar. $i = 1, 2, \dots, \beta$ için $Q_i \in B'_i$ noktalarını alalım ve bu noktaları $k = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, her d'_k yayını, $\mathcal{G}(\pi)$ nin bir d_k yayına karşılık gelecek şekilde, d'_1, d'_2, \dots, d'_n şeklinde kesişmeyen n yay tane yayla birleştirelim. Q_i ve Q_j noktalarının d'_k yayı ile bağlantılı olması için gerek ve yeter şart B'_i ve B'_j bölgelerinin ortak sınırının olmasıdır. Her d'_k yayı için d_k yayının zıt işareti alınır. Böylece d'_1, d'_2, \dots, d'_n yaylarını ve Q_1, Q_2, \dots, Q_β köşelerini içeren $\mathcal{G}'(\pi)$ dual grafını elde ederiz. Şekil 3.3'de Trefoil düğümünün farklı grafları verilmiştir ve ayrıca grafları işaretlenmiştir. Dikkat edilmelidir ki $\mathcal{G}(\pi)$ grafi ve $\mathcal{G}'(\pi)$ dual grafi zıt işaretlidir.



Şekil 3.3. Trefoil düğümü ve onun işaretlenmiş grafi

3.1.1. Sonuç:

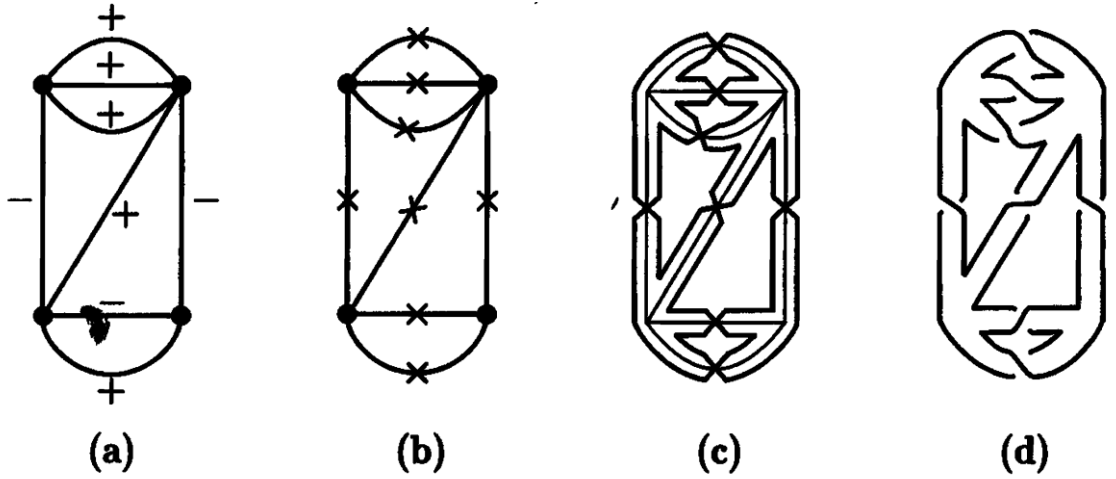
- 1) π , bir düğümün izdüşümü olmak üzere iki farklı $g(\pi)$ grafi ve $g'(\pi)$ dual grafına sahiptir. Tersine, verilen bir graf ($g(\pi)$ veya $g'(\pi)$) bir düğümün π izdüşümüne karşılık gelir.
- 2) Kolaylık olması açısından, grafin + veya - işaretlerini kaldırabiliriz.
- 3) π ve π^* , sırasıyla K ve K^* düğümlerinin izdüşümleri olsun. Burada, K ve K^* düğümleri birbirinin ayna görüntüsüdür. $g(\pi)$ ve $g(\pi^*)$ grafları aynı şekil olmalarına rağmen zıt işaretlidirler. $g(\pi^*)$ grafına, $g(\pi)$ nin eşleniği denir (Murasugi 1996).
- 4) Grafi verilmiş bir düğümden, düğümün kendisi de elde edilebilir. Şekil 3.4'de görüldüğü gibi Trefoil düğümünün grafindan, Trefoil düğümünün kendisi elde edilmiştir. Bu elde ediliş yöntemi bir sonraki başlıkta ayrıntılı biçimde anlatılacaktır.



Şekil 3.4. İşaretlenmiş graftan trefoil düğümünün elde edilişi

3.2. Grafi Verilen Dügümün Elde Edilmesi

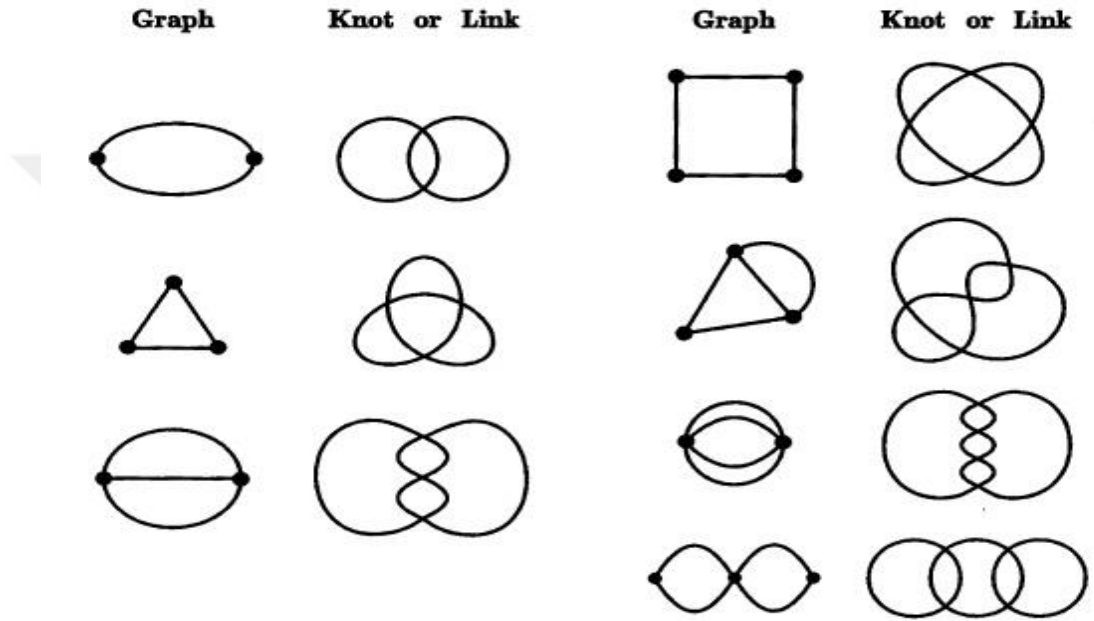
Bir K düğümünün işaretlenmiş grafini G ile gösterilsin(Şekil (a)). Öncelikle, verilen G grafinin her bir kenarının merkezine (veya ortasına) küçük bir " \times " işareti yerleştirilsin (Şekil 3.5(b)). Bu koymuş olduğumuz bir " \times " işaretinin uç noktalarından başlayarak, diğer komşu " \times " işaretlerinin uç noktalarına kadar, G grafinin yayları boyunca takip edilerek dört eğri çizilir. Bu yöntem,her bir " \times " işareti için uygulandığında bir düğümün regüler diyagramını elde etmiş oluruz. Ancak elde edilen bu diyagram bize düğümün geçişlerinin nasıl olduğu hakkında bilgi vermez (Şekil 3.5c) . Bu eldeettiğimiz düzlemsel bölgeleri (yeni oluşturulmuş projektif diyagram vasıtasıyla ilgili bölgenin bölümlerinden elde edilmiş olan) siyah veya beyaz ile renklendirelim. Böylelikle, G grafinin yaylarının işaretlerinden, düğümün geçiş noktalarının bilgisine ulaşılabilir. Kolayca görüleceği gibi siyah ve beyaz renklendirme, geçit bilgileri uygulandıktan sonra ortadan kalkar. Grafi G olan düğüm elde edilmiş olur (Murasugi 1996) (Şekil 3.5 (d)).



Şekil 3.5. İşaretlenmiş graftan düğümün elde edişi

Her bir düğüm grafi, bir düğümün regüler diyagramına denktir. Ancak, iki farklı düğüm grafinin yukarıda verilen yardımıyla elde edilen iki denk olmayan düğümü vermiş olduğu kesin bir şekilde doğru değildir. Yani bir bir düğümün farklı graflarından elde edilen düğümler birbirine denktir.

Şekil 3.6’da görüleceği gibi 4 kenara kadar sahip olan, bağlantılı düzlemsel graflar ve bu graflara karşılık gelen düğümler (ve halkalar) gösterilmiştir. Şekil 3.6’dan da kolayca görüleceği gibi, bağlantılı düzlemsel graflarının kenarlarının sayıları, elde edilen düğümlerin geçit sayılarına eşittir. Yani n geçite sahip bir düğümün n tane yaya sahip olan grafi vardır.



Şekil 3.6. Graflara karşılık gelen düğüm ve halka örnekleri

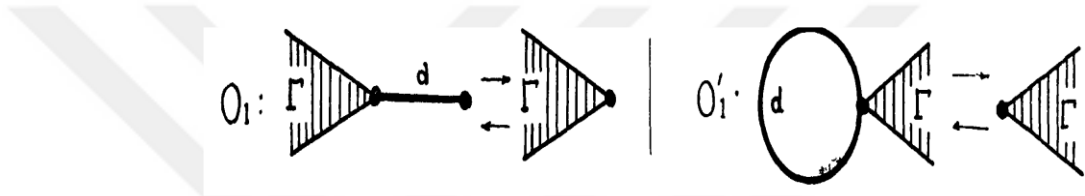
3.3. Graf Hareketleri

Bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafının bir bloğunu Γ ile gösterelim. $\mathcal{G}(\pi)$ grafının bir yayı, $\mathcal{G}(\pi)$ grafının en küçük bloğudur. $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ blokları iki ortak köşeleri varsa, bu bloklara paralelde bağlantılıdır denir. Eğer, Γ_1 ve Γ_2 bloklarının birer köşeleri ortak, fakat diğer hiçbir köşeleri ortak değil ise bu Γ_1 ve Γ_2 bloklarına bir seride bağlantılıdır denir. Blokların ortak noktaları eklem (joint) olarak isimlendirilmektedir.

Bir düğümün her deformasyonu, esas deformasyon yani Reidemeister Hareketlerine $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ denktir. Bu esas deformasyonlar, graflar üzerine uygulanabilir. Bir düğümün π regüler diyagramı $\mathcal{G}(\pi)$ ve $\mathcal{G}'(\pi)$ olmak üzere iki grafa sahip olduğundan dolayı, bir Ω_i

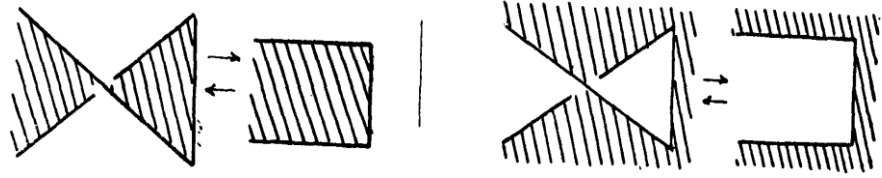
deformasyonu için O_i ve O_i' olarak iki graf deformasyonu uygulayacağız. O_i ve O_i' ye birbirinin dual operasyonları olarak söylenir (Yajima and Kinoshita 1957).

1) Bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafı, bir Γ bloğundan ve bir d yayından oluşsun. Γ bloğu ile d yayının kesişimi bir tek noktadır. Bu durumda, d yayı ihmal edilebilir. Eğer bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafı, bir Γ bloğundan ve bir kapalı d yayından oluşsun. Bu durumda Γ bloğu ile d kapalı yayının kesişimi bir tek noktadır ve ile d kapalı yayı ihmal edilebilir. Bu işlemlerin tersi doğrudur (Yajima and Kinoshita 1957).



Şekil 3.7. Graf bozması

Bu açıklamaların doğruluğu Şekil 3.8'de gösterilmiştir.



Şekil 3.8. 1. Graf bozmasının ispatı

2) Bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafı, bir Γ bloğu ve d_1, d_2 gibi iki zıt işaretli yayla, Γ, d_1, d_2, Γ olacak şekilde bir seriden meydana gelsin. Bu durumda, d_1, d_2 zıt işaretli yayları ihmal edilerek Γ bloğunun eklemleri (joints)leri birleştirilebilir. Eğer $\mathcal{G}(\pi)$ grafı bir Γ bloğundan ve d_1, d_2 gibi iki zıt işaretli birbirine paralel bağlı yaylardan oluşuyorsa, bu durumda, yaylar ihmal edilebilir. Ayrıca bu işlemlerin tersleri de doğrudur (Yajima and Kinoshita 1957).



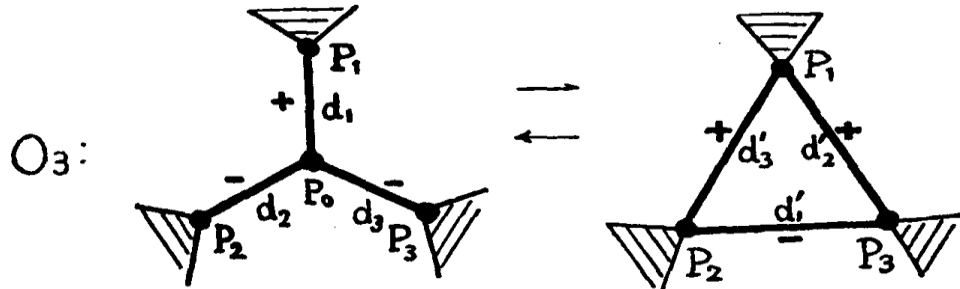
Şekil 3.9. 2. Graf bozması

Bu açıklamaların doğruluğu Şekil 3.10'da gösterilmiştir.



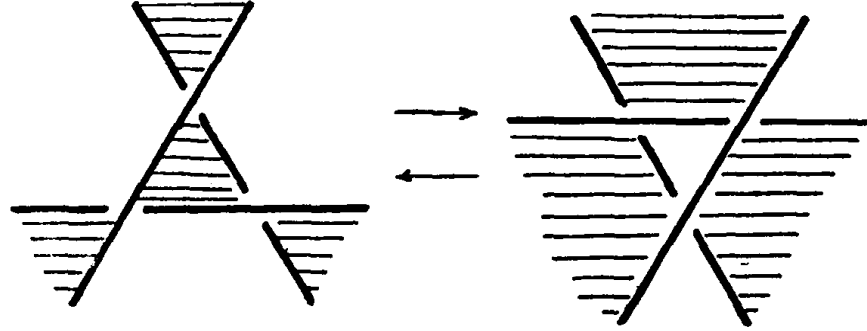
Şekil 3.10. 2. Graf bozmasının ispatı

3) P_1, P_2, P_3 köşeleri, P_0 köşesiyle bağlantılı olacak şekilde, biri diğerinden zıt işaret olan d_1, d_2, d_3 yayları ile bağlansın. Bu durumda, P_0 ihmal edilebilir. ($i=1,2,3$) için her d_i yayı, P_j, P_k köşelerini bağlayan zıt işaretli d_i' yayıyla yer değiştirir. Burada j, k nın elverişliliği i den ve diğerlerinden farklıdır. Bu işlemlerin tersi de doğrudur (Yajima and Kinoshita 1957).



Şekil 3.11. 3. Graf bozması

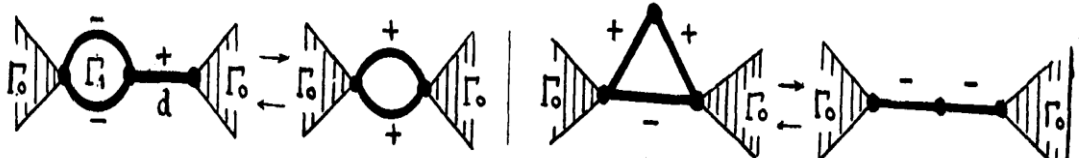
Bu durumda O_3 ve O_3' birbirine eşittir. Şekil 3.12'de görüntüler birbirine denktir.



Şekil 3.12. 3. Graf bozmasının ispatı

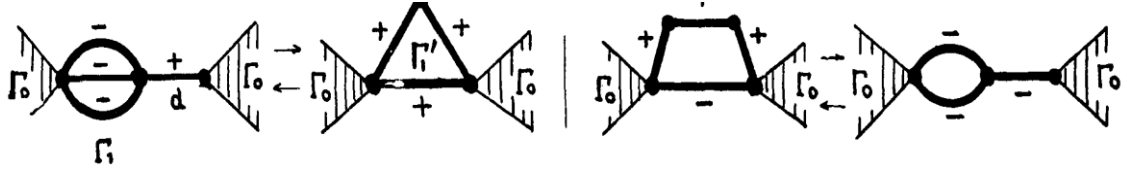
Yukarıdaki işlemlerden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

- 4) Bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafı, Γ_0, Γ_1 gibi iki blok, d bir yay olmak üzere $\Gamma_0, \Gamma_1, d, \Gamma_0$ serisi şeklinde bağlansın. Burada Γ_1 , paralel bağlantılı olan aynı işaretli iki yayı ihtiva eder ve d, Γ_1 e zıt işaretlidir. Bu durumda d yayı ihmal edilebilir ve Γ_1 işaret değiştirir. Burada bu işlemlerin tersi ve dual işlemleri de doğrudur (Yajima and Kinoshita 1957).



Şekil 3.13. 4. Graf bozması

- 5) Γ_1 bloğu, paralel bağlantılı olan aynı işaretli üç yayı ihtiva etsin ve d, Γ_1 e zıt işaretli olmak üzere bir G grafı, $\Gamma_0, \Gamma_1, d, \Gamma_0$ serisi şeklinde bağlansın. Bu durumda, d ihmal edilebilir ve Γ_1, Γ_1 den zıt işaretli olan Γ_1' üçgensel bloğu ile yer değiştirir. Bu işlemlerin tersi ve dual işlemleri de doğrudur.

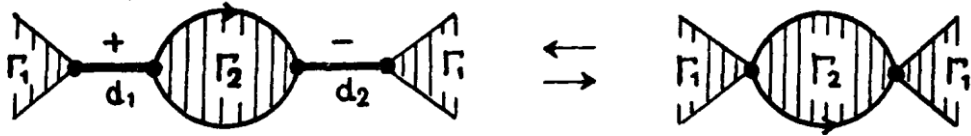


Şekil 3.14. 5. Graf bozması

6) Bir düğümün her $\mathcal{G}(\pi)$ grafi esas işlemler yoluyla $\mathcal{G}'(\pi)$ dual grafına denktir (Yajima and Kinoshita 1957).

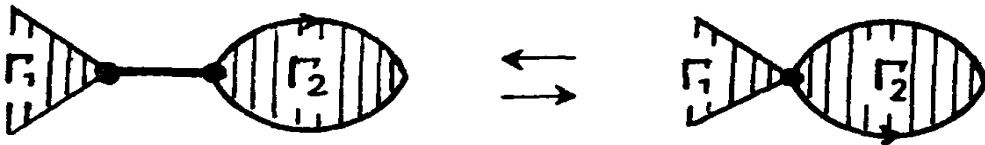
7) Bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafi paralel bağlantılı olan $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$ blokları ihtiva ediyorsa, bu durumda bir bloğu devirli bir düzende değiştirebiliriz. $\mathcal{G}(\pi)$ grafi bir küre üzerinde bulunduğu için ifade sağlanır (Yajima and Kinoshita 1957).

8) d_1, d_2 yayları zıt işaretli yaylar, Γ_1, Γ_2 iki blok olmak üzere, bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafi, $\Gamma_1, d_1, \Gamma_2, d_2, \Gamma_1$ serisi şeklinde bağlansın. Bu durumda yaylar, Γ_2 nin eklemleri boyunca eksen çevresinde Γ_2 nin 180° lik dönmesiyle ihmal edilebilir. Ters işlemler de doğrudur (Yajima and Kinoshita 1957).



Şekil 3.15. 6. Graf bozması

9) Γ_1, Γ_2 iki blok, d herhangi bir işaretli yay olmak üzere, bir $\mathcal{G}(\pi)$ grafi, Γ_1, d, Γ_2 serisi şeklinde bağlansın. Bu durumda d, Γ_2 nin 180° lik dönmesiyle ihmal edilebilir. Ters işlemler de doğrudur (Yajima and Kinoshita 1957).



Şekil 3.16. 7. Graf bozması

3.4. Bitopolojik Uzaylar

3.4.1. Tanım: X kümesi üzerinde τ_1 ve τ_2 olacak şekilde keyfi iki topoloji tanımlansın. Bu tanımlanan iki topolojiyle birlikte X kümesine bitopolojik uzay denir ve (X, τ_1, τ_2) ile ifade edilir (Kelly 1963).

3.4.2. Tanım: A , (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\tau_i cl(\tau_j cl A) = X$ ise A kümesine X te (i, j) – dense subset denir. Burada $i, j = 1, 2$ ve $\tau_j cl A$, A kümesinin τ_j topolojisine göre kapanışı demektir (Giriya and Pilakkat 2013).

3.4.3. Tanım: A , (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\tau_i int(\tau_j cl A) = \emptyset$ ise A kümesine X te (i, j) – nowhere dense subset denir. Burada $i, j = 1, 2$ ve $\tau_i int(\tau_j cl A)$, A kümesinin τ_j topolojisine göre kapanışının τ_i topolojisine göre içi anlamındadır (Giriya and Pilakkat 2013).

3.4.4. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı ve $S \subseteq X$ alt kümesini göz önüne alalım.. $A \in \tau_1$ ve $B \in \tau_2$ olmak üzere, $S = A \cup B$ şeklinde ifade edilebiliyorsa, S alt kümesine $\tau_1 \tau_2$ açık küme denir. Ayrıca, S kümesinin tümleyenine $\tau_1 \tau_2$ kapalı küme denir (Ravi and Thivagar 2006).

3.4.5. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun.

i) A alt kümesini içeren tüm $\tau_1 \tau_2$ kapalı kümelerinin kesişimine, A alt kümesinin $\tau_1 \tau_2$ kapanışı denir ve

$$\tau_1 \tau_2 cl(A) = \bigcap \{F: A \subseteq F, F \tau_1 \tau_2 \text{ kapalı}\}$$

olarak gösterilir.

ii) A kümesinin içerdiği tüm $\tau_1\tau_2$ açık kümelerinin birleşimine, A kümesinin $\tau_1\tau_2$ içi denir ve

$$\tau_1\tau_2 \text{int}(A) = \cup \{U : U \subseteq A, U \text{ } \tau_1\tau_2 \text{ açık}\}$$

olarak gösterilir (Ravi and Thivagar 2006).

$\tau_1\tau_2$ açık ve $\tau_1\tau_2$ kapalı kümelere örnek verelim.

3.4.6. Örnek: $X = \{1,2,3\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2\}\}$ olacak şekilde (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı verilsin. Bu durumda, $\tau_1\tau_2$ açık kümeleri,

$$\{X, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

dir ve $\tau_1\tau_2$ kapalı kümeleri ise,

$$\{X, \emptyset, \{2,3\}, \{1,3\}, \{3\}\}$$

olacaktır.

$\tau_1\tau_2$ açık kümeleri bir topoloji belirtmek zorunda değildir. Bu durumla ilgili bir örnek verelim:

3.4.7. Örnek: $X = \{1,2,3\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1,2\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3\}\}$ olsun. $A = \{1,2\}$ ve $B = \{2,3\}$ kümeleri $\tau_1\tau_2$ açık kümelerdir. Fakat $A \cap B = \{2\}$ kümesi $\tau_1\tau_2$ açık kümesi değildir.

3.5. Bitopolojik Uzaylarda Ayırma Aksiyomları

3.5.1. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olmak üzere, (X, τ_1) in tabanının elemanları τ_1 de açık, τ_2 de kapalı ve (X, τ_2) nin tabanının elemanları elemanları τ_1 de kapalı, τ_2 de açık ise (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına sıfır boyutlu bitopolojik uzay denir. Başka bir ifade ile, κ_1 ve κ_2 sırasıyla, τ_1 ve τ_2 topolojilerine göre kapalı kümelerin kümesini göstermek üzere,

$$\forall U \in \tau_1 \text{ kümesi için } U \in \kappa_2$$

ve

$$\forall V \in \tau_2 \text{ kümesi için } V \in \kappa_1$$

şartları sağlanıyor ise (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına sıfır boyutlu bitopolojik uzay denir (Girija and Pilakkat 2013).

3.5.2. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olmak üzere, X in her bir farklı nokta çifti için, τ_1 in veya τ_2 nin bu noktalardan birini içeren diğerini içermeyen bir komşulukları varsa (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) denir. Başka bir ifade ile, $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için,

$$x \in U \in \tau_1, y \notin U \in \tau_1$$

veya

$$x \notin V \in \tau_2, y \in V \in \tau_2$$

olacak şekilde $U \in \tau_1$ veya $V \in \tau_2$ açıklarından herhangi biri varsa (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_0 – uzayı (w-p- T_0) denir (Arefi 2009).

3.5.3. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olmak üzere, X in her bir farklı nokta çifti için, τ_1 in bu noktalardan birincisini içeren ikincisini içermeyen ve τ_2 nin ikincisini içerip birincisini içermeyen komşulukları varsa, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_1 –uzayı (w-p- T_1) denir. Diğer bir deyişle, $x \neq y$ olmak üzere $\forall x, y \in X$ için,

$$x \in U \in \tau_1, y \notin U \in \tau_1$$

ve

$$x \notin V \in \tau_2, y \in V \in \tau_2$$

olacak şekilde $U \in \tau_1$ ve $V \in \tau_2$ açıkları varsa (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_1 –uzayı (w-p- T_1) denir (Areefi 2009).

3.5.4. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olmak üzere, birbirinden farklı herhangi bir $x, y \in X$ nokta çiftini göz önüne alalım. $U \in \tau_1, V \in \tau_2, U \cap V = \emptyset$ olmak üzere, $x \in U$ ve $y \in V$ veya $x \in V$ ve $y \in U$ olacak şekilde U ve V açıkları varsa (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_2 - uzayı (w-p- T_2) denir. Yani, $U \in \tau_1, V \in \tau_2, U \cap V = \emptyset$ olmak üzere, birbirinden farklı herhangi bir $x, y \in X$ için,

$$x \in U \text{ ve } y \in V$$

veya

$$x \in V \text{ ve } y \in U$$

sağlanıyorsa (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_2 - uzayı (w-p- T_2) denir (Areefi 2009).

3.5.5. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olmak üzere, birbirinden farklı her bir $x, y \in X$ nokta çifti için, $x \in U$ ve $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$ açık kümeleri varsa (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına $p - T_2$ uzayı (pairwise Hausdorff) denir. Yani, $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$, $U \cap V = \emptyset$ olmak üzere, birbirinden farklı her bir $x, y \in X$ için,

$$x \in U \text{ ve } y \in V$$

(X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) denir (Kelly 1963).

3.5.6. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olmak üzere, X de her ayrık A ve B küme çiftini göz önüne alalım. A , τ_1 topolojisine göre kapalı ve B , τ_2 topolojisine göre kapalı iki küme olsun. Eğer $A \subseteq V$ ve $B \subseteq U$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$ açıkları varsa, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına p -normal (pairwise normal uzayı) denir. Yani, κ_1 ve κ_2 sırasıyla, τ_1 ve τ_2 topolojilerine göre kapalı kümelerin kümesini göstermek üzere, $A \in \kappa_1, B \in \kappa_2$ olmak üzere, $\forall A, B \subseteq X$ ayrık kümeleri için,

$$A \subseteq V \text{ ve } B \subseteq U$$

$U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \tau_1$, $V \in \tau_2$ açıkları varsa, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına p -normal (pairwise normal uzay) denir (Kelly 1963).

3.5.7. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay, $A \in \tau_1 \setminus \{\emptyset\}$ ve $B \in \tau_2 \setminus \{\emptyset\}$ olacak şekilde ayrık iki küme olsun. Eğer X , A ve B kümelerinin birleşimi olarak ifade edilemiyorsa (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına p -bağlantılı (pairwise bağlantılı uzay) denir (Giriya and Pilakkat 2013).

3.5.8. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olmak üzere, X bağlantısız uzay yani; $A \in \tau_1 \setminus \{\emptyset\}$, $B \in \tau_2 \setminus \{\emptyset\}$, $A \cap B = \emptyset$ ve $X = A \cup B$ şartını sağlasın. X deki her farklı nokta çifti için, noktalardan biri A ya diğeri B ye ait ise (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına

zayıf tamamen bağlantısız uzay denir. Burada noktaların birbiriyle yer değiştirmelerine gerek yoktur (Girija and Pilakkat 2013).

3.5.9. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzay olsun. $\forall x \in X$ ve $x \notin F$ şartını sağlayan, τ_1 topolojisine gore kapalı her bir F kümesi için, $x \in U \in \tau_1$, $F \subseteq V \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U, V açıkları varsa τ_1 e, τ_2 anlamında regular denir. Eğer hem τ_1 , τ_2 anlamında regular hem de τ_2 , τ_1 anlamında regular ise (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına p -regular (pairwise regular uzay) denir (Nour 1995).

3.6. Digraflar Yardımıyla Bitopolojinin Elde Edilmesi

V , bir digrafın köşelerinin kümesi, $p: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$p(x, y) = \begin{cases} 0, & y \text{ den } x \text{ e ulaşılabilirse} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon V üzerinde bir quasi-pseudo metriktir. Ayrıca p ,

$$S_p(x, \varepsilon) = \{y: p(x, y) < \varepsilon\}$$

kümesi yardımıyla V üzerindeki bir topoloji için taban oluşturur. Bu topolojiyi τ_1 ile gösterelim.

Benzer şekilde $q: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere,

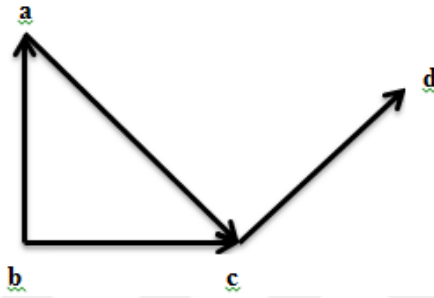
$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & x \text{ den } y \text{ ye ulaşılabilirse} \\ 1, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan fonksiyon V üzerinde diğer bir quasi-pseudo metriktir. q ,

$$S_q(x, \varepsilon) = \{y: q(x, y) < \varepsilon\}$$

kümesi yardımıyla V üzerindeki bir diğer topoloji için taban oluturur. Bu topolojiyi de τ_2 ile isimlendirelim. Görüldüğü gibi $p(x, y) = q(y, x)$ olduğundan, bu p ve q quasi-pseudo metrikleri birbirinin eşleniğidir. Bu p ve q quasi-pseudo metrikleri yardımıyla V üzerinde oluşturulan τ_1 ve τ_2 ile birlikte (V, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı verilmiş olur.

Aşağıda verilen Şekil 3.17'i göz önüne alalım.



Şekil 3.17. Digraf üzerinden bitopoloji elde edilmesi

Burada köşe noktalarının kümesi $V = \{a, b, c, d\}$ dir. p ve q quasi-pseudo metrikleri yardımıyla oluşturulan topolojiler sırasıyla,

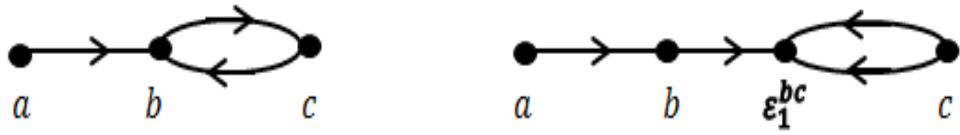
$\tau_1 = \{V, \emptyset, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{b\}\}$ ve $\tau_2 = \{V, \emptyset, \{a, c, d\}, \{c, d\}, \{d\}\}$ dir (Girija and Pilakkat 2013).

3.7. Düğümlerin Bitopolojilerinin Elde Edilmesi

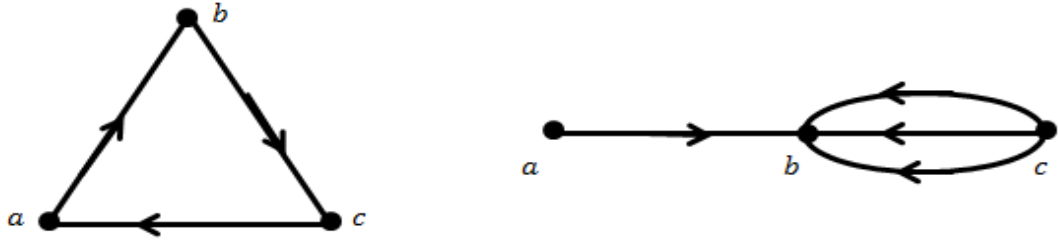
Bu bölümde $m = 3, 4, \dots, 10$ ve $n = 1, 2, 3$ olmak üzere m_n düğümlerine karşılık gelen bitopolojiler elde edilecektir. Bu bitopolojileri elde etmek için düğümün grafi veya dual grafi öncelikle birer digrafa dönüştürülecektir. Öncelikle digrafın nasıl elde edileceği verilecek ve daha sonra bu digraftan bitopoloji elde edilecektir. Bunun için aşağıdaki yöntem uygulanır:

- 1) Düğümün grafi ve dual grafi çizilir.

- 2) Graflardaki döngü (cycle) da yönler zıt olacak şekilde başlangıç noktası (start point) seçilir.
- 3) Saat yönünde her yaydan bir kere geçilir.
- 4) Start ve stop noktaları aynı olmamalıdır ve bu noktalar arasında en az bir yay bulunmalıdır.
- 5) Döngülere aşağıdaki bozmalar uygulanır.



Şekil 3.18. Cycle bozması

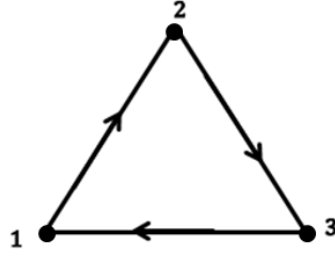


Şekil 3.19. Üçgen bozması

- 6) İlk tercih graftan bitopoloji bulunmasıdır. Eğer bozma yaptıktan sonra döngü bozulmuyorsa dual grafa bakılır. Çünkü döngü oluşunca quasi-pseudo metrik hep indiskret topoloji oluşturur. Yani çemberdir. Bu da düğümler için istenmeyen bir durumdur.
- 7) Son olarak çizilen digraflardan p ve q quasi-pseudo metriklerine bağlı olarak τ_1 ve τ_2 bitopolojileri bulunur(Kunduracı 2017).

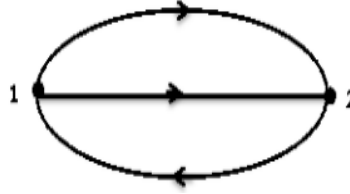
Bu durumun daha iyi anlaşılması bakımından bir örnek verelim.

Trefoil düğümünün grafindan yararlanarak aşağıdaki digraf oluşturulur.

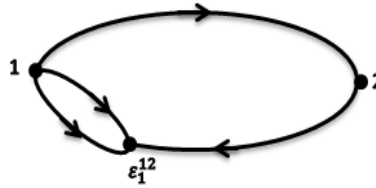


Şekil 3.20. Trefoil düğümünün grafının yönlendirilmesi

Ancak görüldüğü gibi bu oluşturulan digraf 4 şartı sağlamamaktadır. Yani hangi noktadan başlarsak başlayalım tekrar aynı noktaya geri döndüğümüzden start ve stop noktaları farklı seçilemez. O halde trefoil düğümü üzerindeki bitopolojiyi dual grafi üzerinden bulunmalıdır. Dual grafi üzerindeki digraf ve bu digraf üzerinde yapılan bozma aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.21. Trefoil düğümünün dual digrafı



Şekil 3.22. Trefoil düğümünün dual digrafının bozması

Şimdi p ve q quasi-pseudo metriklerinden yararlanarak bitopolojiyi elde edelim.

p metriğine göre,

$x = 1$ ve $\varepsilon < 1$ için \emptyset

$\varepsilon > 1$ için X

$x = 2$ ve $\varepsilon < 1$ için $\{1\}$

$\varepsilon > 1$ için X

$x = \varepsilon_1^{12}$ ve $\varepsilon < 1$ için $\{1,2\}$

$\varepsilon > 1$ için X

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

q metriğine göre;

$x = 1$ ve $\varepsilon < 1$ için $\{2, \varepsilon_1^{12}\}$

$\varepsilon > 1$ için X

$x = 2$ ve $\varepsilon < 1$ için $\{\varepsilon_1^{12}\}$

$\varepsilon > 1$ için X

$x = \varepsilon_1^{12}$ ve $\varepsilon < 1$ için \emptyset

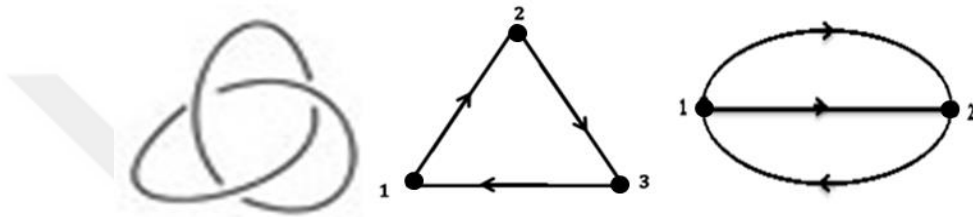
$\varepsilon > 1$ için X

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$$

şeklindedir. Benzer işlemler yapılarak diğer düğümlerin de üzerindeki bitopolojiler bulunur.

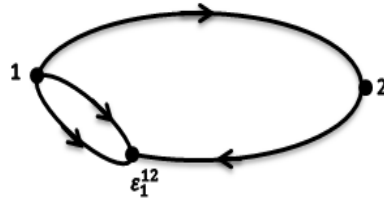
Aşağıda sırasıyla düğüm, graf, dual graf, digraf ve bitopolojileri verilmiştir.

3₁ düğümü:



Şekil 3.23. 3₁ düğümünün regüler diyagramı ve digrafları

Dual digrafta yapılan bozma işlemi



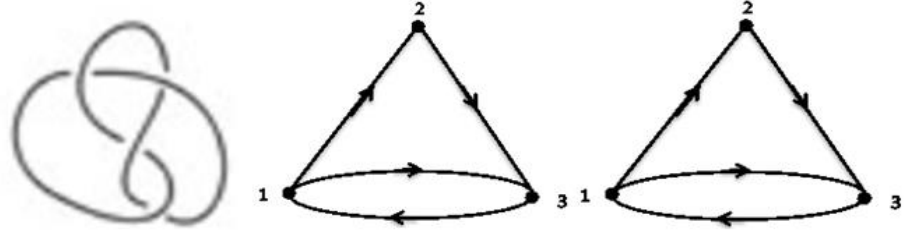
Şekil 3.24. 3₁ düğümünün digraf bozması

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$$

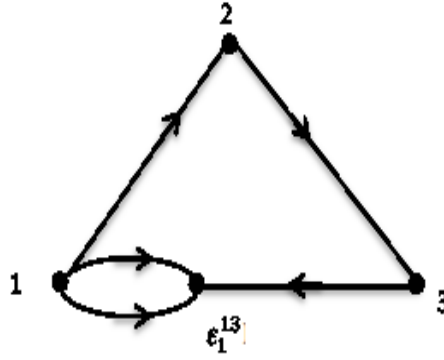
3₁ düğümüne karşılık gelen bitopolojidir. Burada $X = \{1,2, \varepsilon_1^{12}\}$ dir.

4₁ düğümü:



Şekil 3.25. 4₁ düğümünün regüler diyagramı ve digrafları

Grafta yapılan bozma işlemi:



Şekil 3.26. 4₁ düğümünün digraf bozma

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, \epsilon_1^{12}\}, \{3, \epsilon_1^{12}\}, \{\epsilon_1^{12}\}\}$$

4₁ düğümüne karşılık gelen bitopolojidir. Burada $X = \{1,2,3, \epsilon_1^{12}\}$ dir.

Benzer şekilde aşağıda düğümlere karşılık gelen bitopolojiler verilmiş ve sınıflandırılmıştır.

Çizelge 3.1. m_1 (m tek, $m \geq 3$) düğümleri ve bitopolojileri

m_1 (m tek, $m \geq 3$)	Digraf ile eşlenen bitopoloji
3_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$
5_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\}$
7_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$
\vdots	\vdots
m_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ $\tau_2 = \left\{ X, \emptyset, \left\{ 2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \dots, \varepsilon_{\frac{m-1}{2}}^{12} \right\}, \left\{ \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \dots, \varepsilon_{\frac{m-1}{2}}^{12} \right\} \right\}$

Çizelge 3.2. m_1 (m çift, $m \geq 4$) düğümleri ve bitopolojileri

m_1 (m çift, $m \geq 4$)	Digraf ile eşlenen bitopoloji
4_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, \varepsilon_1^{13}\}, \{3, \varepsilon_1^{13}\}, \{\varepsilon_1^{13}\}\}$
6_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}\},$ $\{5, \varepsilon_1^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}\}\}$
8_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\},$ $\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\},$ $\{5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}\}\}$
\vdots	\vdots
m_1	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots, \{1,2,3, \dots, m-1\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\}, \{3,4, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\},$ $\{4, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\}, \dots, \{m-2, m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\},$ $\{m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\}, \{\varepsilon_1^{1(m-1)}\}\}$

Çizelge 3.3. m_2 (m tek, $m \geq 5$) düğümleri ve bitopolojileri

m_2 (m tek, $m \geq 5$)	Digraf ile ilgili bitopoloji
5_2	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}\}\}$
7_2	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{6, \varepsilon_1^{16}\}, \{\varepsilon_1^{16}\}\}$
9_2	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{8, \varepsilon_1^{18}\}, \{\varepsilon_1^{18}\}\}$
\vdots	\vdots
	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2,3, \dots, m-1\}\}$ $\tau_2 = \{\{X, \emptyset, \{2,3, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\}, \{3, \dots, m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\}, \dots, \{m-2, m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\}, \{m-1, \varepsilon_1^{1(m-1)}\}, \{\varepsilon_1^{1(m-1)}\}\}$

Çizelge 3.4. m_2 (m çift, $m \geq 6$) düğümleri ve bitopolojileri

m_2 (m çift, $m \geq 6$)	Digraf ile eşlenen bitopoloji
6_2	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5\}, \{3,4,5\}, \{4,5\}, \{5\}\}$
8_2	$\tau_1 = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \\ \{1,2,3,4,5,6\} \end{array} \right\}$ $\tau_2 = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \{4,5,6,7\}, \{5,6,7\}, \\ \{6,7\}, \{7\} \end{array} \right\}$
10_2	$\tau_1 = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \\ \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \end{array} \right\}$ $\tau_2 = \left\{ \begin{array}{l} X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8,9\}, \{3,4,5,6,7,8,9\}, \{4,5,6,7,8,9\}, \\ \{5,6,7,8,9\}, \{6,7,8,9\}, \{7,8,9\}, \{8,9\}, \{9\} \end{array} \right\}$
\vdots	\vdots
m_2	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2,3, \dots, m-2\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \dots, m-1\}, \{3,4, \dots, m-1\}, \\ \{4, \dots, m-1\}, \dots, \{m-1\}\}$

Çizelge 3.5. m_3 (m tek, $m \geq 7$) düğümleri ve bitopolojileri

m_3 (m tek, $m \geq 7$)	Digraf ile ilgili bitopoloji
7_3	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}\}$
9_3	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\},$ $\{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}\}$
\vdots	\vdots
m_3	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor}^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor}^{14}\},$ $\{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor}^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \dots, \varepsilon_{\lfloor \frac{m+1}{3} \rfloor}^{14}\}\}$

Çizelge 3.6. m_3 (m çift, $m \geq 8$) düğümleri ve bitopolojileri

m_3 (m çift, $m \geq 8$)	Digraf ile ilgili bitopoloji
8_3	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\},$ $\{5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}\}$
10_3	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\},$ $\{1,2,3,4,5,6,7\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\},$ $\{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}\}$
\vdots	\vdots
m_3	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2, \dots, m-3\}\}$ $\tau_2 =$ $\{X, \emptyset, \{2,3, m-3, \varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\}, \dots, \{m-4, m-3, \varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\},$ $\{m-3, \varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\}, \{\varepsilon_1^{1m-3}, \varepsilon_2^{1m-3}\}\}$

Çizelge 3.7. 6_3 düğümünün bitopolojisi

6_3	$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$ $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \{4\}\}$ <p>*6_3 amphicerial olup üçgen bozması yapıldığı için tek başına ayrı bir sınıftır.</p>
-------	--

4. ARAŞTIRMA ve BULGULAR

4.1. Bitopolojiler Yardımıyla Düğümlerin Elde Edilmesi

$m = 3, 4, \dots, 10$ ve $n = 1, 2, 3$ olmak üzere m_n düğümleri, graf veya dual graflarından yararlanılarak elde edilen bitopolojiler yardımıyla sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmada her düğüm farklı bir bitopolojiye karşılık gelmektedir. Bu bölümde ise, tersine bitopolojisi cycle bozmasından elde edilmiş bir m_n düğümünün kendisi elde edilecek ve düğümü elde etmek için bir yöntem verilecektir. Bu yöntemde sadece üzerinde cycle bozması yapılarak elde edilen düğümlerin bitopolojilerinden yararlanarak düğümlerin regüler diyagramları elde edilecektir.

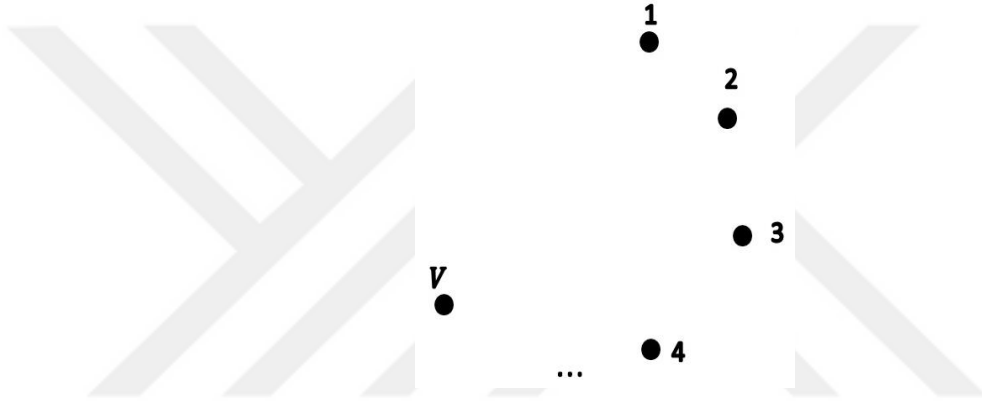
4.1.1. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı verilsin. τ_1 in X kümesi hariç en çok elemana sahip kümesine τ_1 in güçlü kümesi denir ve $\overline{\tau_1}$ ile gösterilir. Aynı düşünceden hareketle, τ_2 nin X kümesi hariç en çok elemana sahip kümesine τ_2 nin güçlü kümesi denir ve $\overline{\tau_2}$ ile gösterilir.

4.1.2. Tanım: (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı verilsin. τ_1 in boş kümesi hariç en az elemana sahip kümesine τ_1 in zayıf kümesi denir ve $\underline{\tau_1}$ ile gösterilir. τ_2 nin boş kümesi hariç en az elemana sahip kümesine τ_2 nin zayıf kümesi denir ve $\underline{\tau_2}$ ile gösterilir.

(X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen bir düğümün, τ_1 topolojisinin güçlü kümesi olan $\overline{\tau_1}$ kümesinin eleman sayısı, bitopolojiye karşılık gelen düğümün elde edildiği digrafın köşe sayısını verir. $\overline{\tau_1}$ kümesinin eleman sayısını $s(\overline{\tau_1}) = V$ ile gösterelim. τ_2 topolojisinin zayıf kümesi olan $\underline{\tau_2}$ kümesinin eleman sayısı ise, bitopolojiye karşılık gelen düğümün elde edildiği digrafta, hangi köşeler arasında, kaç tane bozma yapıldığını gösterir. $\underline{\tau_2}$ kümesinin eleman sayısını $s(\underline{\tau_2}) = B$ ile gösterelim. Aşağıdaki altı madde ile cycle bozması kullanılarak elde edilen bitopolojilere karşılık gelen

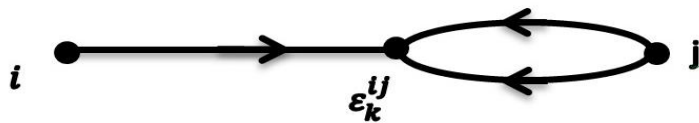
$m = 3, 4, \dots, 10$ ve $n = 1, 2, 3$ olmak üzere m_n düğümlerinin regüler diyagramları elde bulunacaktır:

1) (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen bir düğümün, τ_1 topolojisinin güçlü kümesi $\overline{\tau_1}$ in eleman sayısı kadar yani $s(\overline{\tau_1}) = V$ tane köşe, düzleme nokta şeklinde işaretlenir. Konulan tüm noktalar yani köşeler saat yönünde Şekil 4.1'deki gibi $1, 2, \dots, V$ ile numaralandırılır.



Şekil 4.1. Bitopolojisi verilen düğümün digrafının köşeleri

2) (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen bir düğümün, τ_2 topolojisinin zayıf kümesi $\underline{\tau_2}$ nin ε_k^{ij} elemanları, i ve j köşeleri arasında k . bozma olduğunu gösterir. Örneğin, ε_1^{13} elemanı bize 1 ve 3 köşeleri arasında yapılmış birinci bozmayı gösterirken, ε_2^{13} elemanı 1 ve 3 köşeleri arasındaki yapılmış olan ikinci bozmayı göstermektedir. Bu bozmalar saat yönünde önce doğru daha sonra cycle olacak şekilde, yani saat yönünde Şekil 4.2'deki digraf ε_k^{ij} elemanları göz önüne alınarak 1). maddedeki konulmuş olan noktalar arasına yerleştirilir.



Şekil 4.2. Cycle bozması

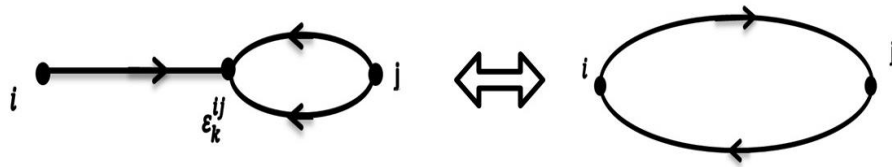
3) τ_1 in güçlü kümesi $\overline{\tau_1}$ in eleman sayısı V ve τ_2 topolojisinin zayıf kümesi $\underline{\tau_2}$ nin eleman sayısı B olmak üzere,

$$V + 2B - 1$$

formülü, bitopolojisi verilmiş düğümün kaç geçişli olduğunu dolayısıyla, düğümün kaç kenarlı digraftan elde edildiğini verir. Yani, 1). Maddede düzleme yerleştirmiş olduğumuz noktaların sayısına, 2). Maddede yerleştirilmiş olan cycle bozmalarının sayısının, iki katından bir eksiği kadar eklenmesiyle, elde edilmeye çalışılan düğümün kaç kenarlı digraftan elde edildiğini söyler.

4) Bozmalar yerleştirildikten sonra 1 ile numaralandırılmış noktadan itibaren saat yönünde $V - 1$ tane daha kenar eklenir. Eklenen kenara saat yönünde yönlendirme verilir.

5) Saat yönünde bir doğru ve saat yönünün tersi yönünde iki kenarın paralelde bağlanmasıyla oluşmuş digraf, graf hareketleri sayesinde, iki köşe yardımıyla birbirine paralelde bağlanmış saat yönünde yönlendirme verilmiş digrafa denk olduğundan birbirine dönüştürülür. Kısacası bozmalar, cycle dönüştürülür. Bu durum Şekil 4.3 gösterilmiştir.



Şekil 4.3. Cycle bozması ve cycle

6) İlk beş adımda bulmamız istenilen düğümün üzerindeki bitopolojinin hangi digraftan elde edildiği bulunmuştur. Bu bulunan digraf, bulunmasını istediğimiz düğümün ya grafından ya da dual grafından elde edilmiştir. Bulmuş olduğumuz digraftan, Tait metodu yardımıyla bitopolojisi verilen düğüm çizilir.

Yöntemin daha iyi anlaşılması için aşağıda örnekler verilecektir.

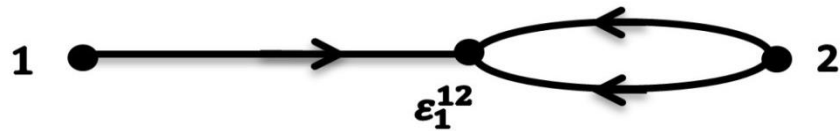
4.1.3. Örnek: $X = \{\varepsilon_1^{12}, 1, 2\}$, $\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$, $\tau_2 = \{X, \emptyset, \{\varepsilon_1^{12}, 2\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$ olmak üzere, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen düğümü, yukarıdaki yöntemi kullanarak elde edelim.

1) τ_1 topolojisinin güçlü kümesi $\overline{\tau_1} = \{1, 2\}$ olmak üzere, bu kümenin eleman sayısı $V = 2$ dir. Bu $V = 2$ sayısı bize bitopolojisi verilen düğümün iki köşeye sahip olan bir digraftan elde edildiğini göstermektedir. O halde düzleme iki nokta yerleştirelim ve bu noktaları 1, 2 diye numaralandıralım (Şekil 4.4).



Şekil 4.4. Güçlü kümenin düzleme uygulanması

2) τ_2 topolojisinin zayıf kümesi $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{12}\}$ olmak üzere, bu kümenin eleman sayısı $B = 1$ dir. Bu $B = 1$ sayısı bize bitopolojisi verilen düğümün, bir bozma uygulanmış olan graftan elde edildiğini bize göstermektedir. Ayrıca, $\varepsilon_1^{12} \in \underline{\tau_2}$ elemanı bize, 1 ve 2 köşeleri arasında bir tane cycle bozması olduğunu söylemektedir. 1). maddede düzleme yerleştirmiş olduğumuz noktalara bu verilen bilgiler uygulanacak olursa Şekil 4.5'i elde ederiz.



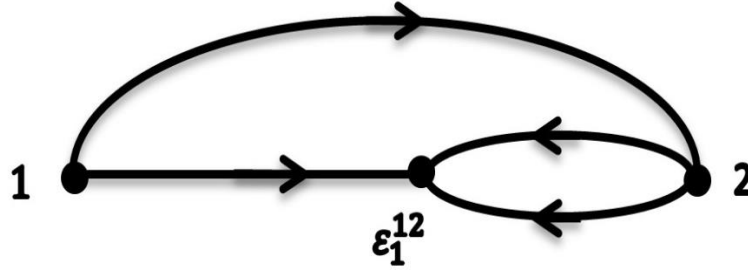
Şekil 4.5. Cycle bozmasına köşelerin yerleştirilmesi

3) τ_1 topolojisinin güçlü kümesi $\overline{\tau_1}$ in eleman sayısı $V = 2$, τ_2 topolojisinin zayıf kümesi $\underline{\tau_2}$ nin eleman sayısı $B = 1$ olduğundan,

$$V + 2B - 1 = 2 + 2 \cdot 1 - 1 = 3$$

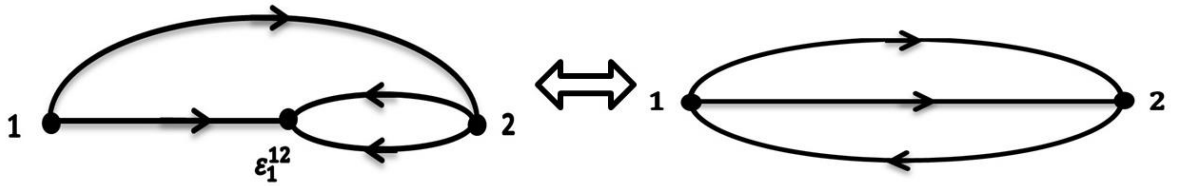
bitopolojisi verilmiş düğümün 3 geçişli, yani 3 kenara sahip bir digraftan elde edildiğini verir.

4) $V=2$ olmak üzere, $V-1=2-1=1$, 1 ile numaralandırılmış köşeden itibaren, saat yönünde bir tane daha kenar eklememiz gerektiğini söylemektedir. Ayrıca eklenen kenara saat yönünde yön verilir (Şekil 4.6).



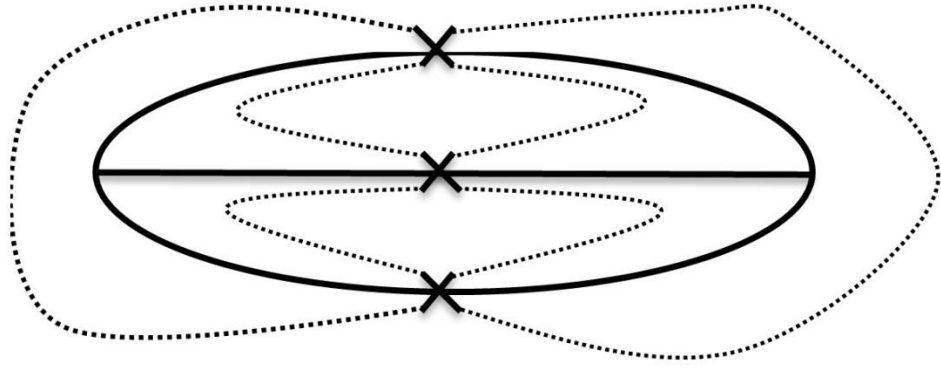
Şekil 4.6. Cycle bozmasına kenar eklenmesi

5) Şekil 4.6'daki digraf, Şekil 4.7'de gösterildiği gibi kendisine denk olan digrafa dönüştürülür.



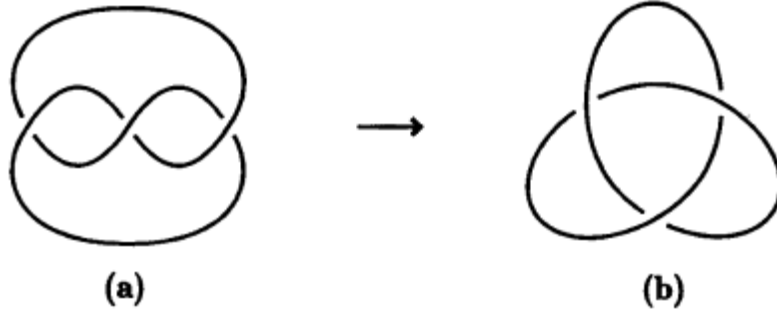
Şekil 4.7. Cycle bozmasının Cycle'a dönüşmesi

6) İlk beş adım uygulanarak bulunmuş olan Şekil 4.7'deki digraf, bitopolojisi verilmiş olan düğümü bulmak için Şekil 4.8'de görüldüğü gibi Tait metodu uygulandığında bize vermiş olacaktır.



Şekil 4.8. Trefoil düğümünün regüler diyagramının graf yardımıyla elde edilmesi

Elde ettiğimiz düğüm Şekil 4.9(a)'daki düğümdür. Düğüm grafından ve dual graftan elde edilen düğümlerin birbirine denk olduğunu biliyoruz. Yani bir düğüm birden çok grafa sahip olabilir fakat farklı graflardan elde edilen düğümler birbirine denktir. Elde ettiğimiz düğüm Şekil 4.9'da görüldüğü gibi trefoil düğüme denktir.



Şekil 4.9. Trefoil Düğümünün regüler diyagramı

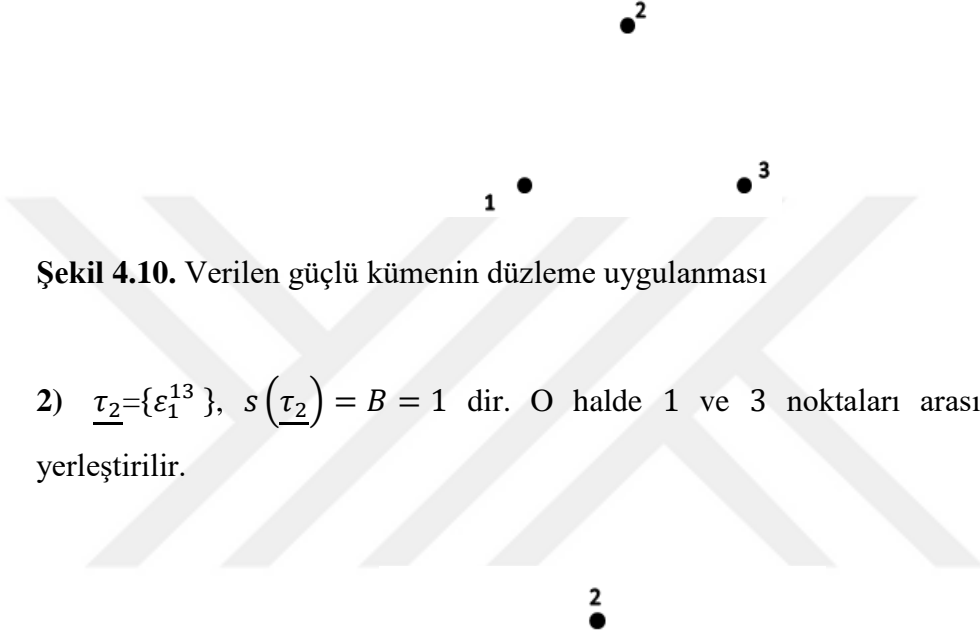
Aşağıda verilen bitopolojik uzayların hangi düğümlere karşılık geldiği, verilen algoritma yardımıyla bulunacaktır.

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, \varepsilon_1^{13}\}, \{3, \varepsilon_1^{13}\}, \{\varepsilon_1^{13}\}\}$$

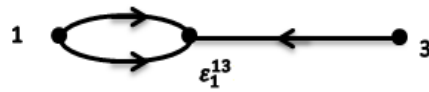
olup (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen düğümü bulalım.

1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3\}$, $s(\overline{\tau_1}) = V = 3$ tür. O halde düzleme 3 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



Şekil 4.10. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

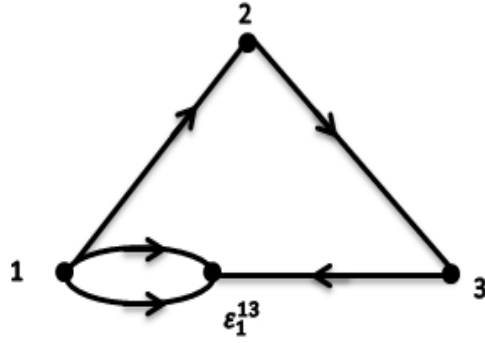
2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{13}\}$, $s(\underline{\tau_2}) = B = 1$ dir. O halde 1 ve 3 noktaları arasında bir bozma yerleştirilir.



Şekil 4.11. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

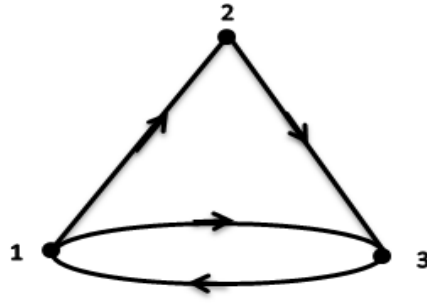
3) $V + 2B - 1 = 3 + 2 - 1 = 4$ çizilecek digraf 4 kenarlıdır.

4) $V - 1 = 3 - 1 = 2$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde iki tane kenar eklenecektir.



Şekil 4.12. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

5) 1 ve 3 noktaları arasındaki bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.13. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

6) Tait metodu yardımıyla 4_1 düğümü elde edilir.



Şekil 4.14. 4_1 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\}$$

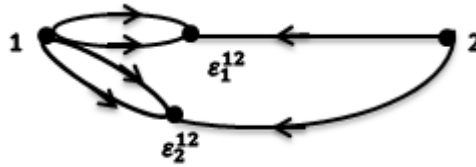
olup (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen düğümü bulalım.

- 1) $\overline{\tau_1} = \{1,2\}$, $s(\overline{\tau_1}) = V = 2$ dir. O halde düzleme 2 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



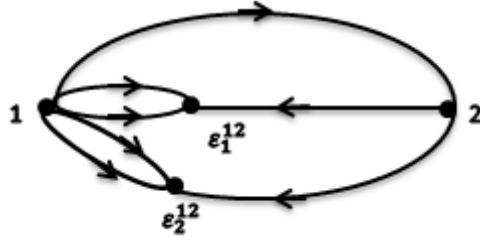
Şekil 4.15. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

- 2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}$, $s(\underline{\tau_2}) = B = 2$ dir. O halde 1 ve 2 noktaları arasında iki bozma yerleştirilir.



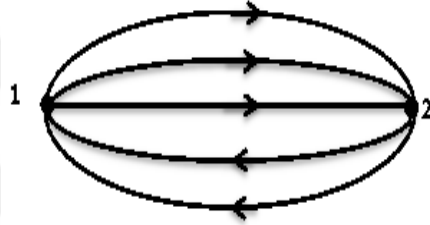
Şekil 4.16. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 2 + 4 - 1 = 5$ çizilecek digraf 5 kenarlıdır.
 4) $V - 1 = 2 - 1 = 1$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde bir tane kenar eklenecektir.



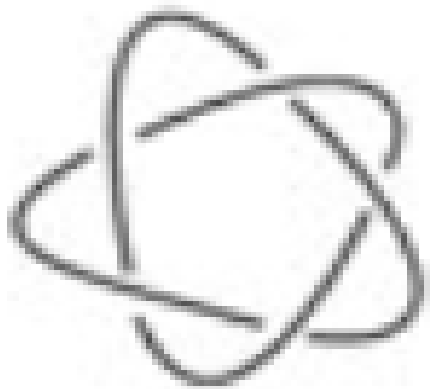
Şekil 4.17. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

5) 1 ve 2 noktaları arasındaki bozmalar cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.18. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

6) Tait metodu yardımıyla 5_1 düğümü elde edilir.



Şekil 4.19. 5_1 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}\}\}$$

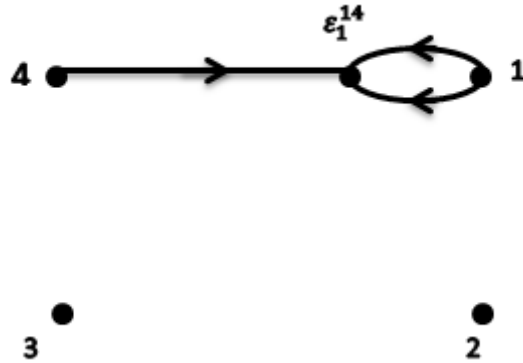
olup (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen düğümü bulalım.

- 1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 4$ tür. . O halde düzleme 4 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



Şekil 4.20. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

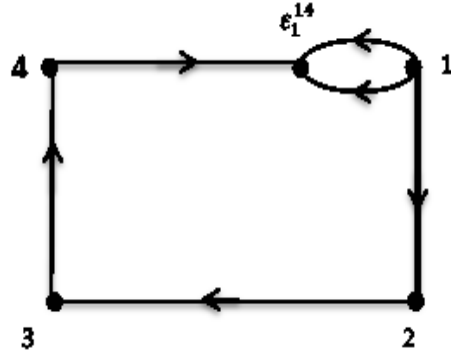
- 2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{14}\}, s(\underline{\tau_2}) = 1$ dir. O halde 1 ve 4 noktaları arasına bir bozma yerleştirilir.



Şekil 4.21. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

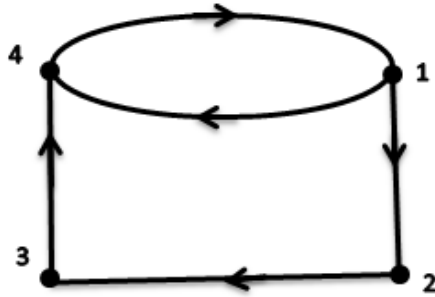
- 3) $V + 2B - 1 = 4 + 2 - 1 = 5$ çizilecek digraf 5 kenarlıdır.

- 4) $V - 1 = 4 - 1 = 3$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde üç tane kenar eklenecektir.



Şekil 4.22. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 4 noktaları arasındaki bozmalar cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.23. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 5_2 düğümü elde edilir.



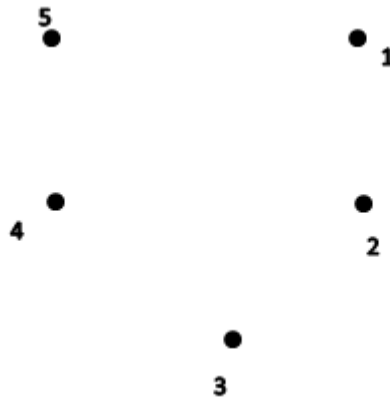
Şekil 4.24. 5_2 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{5, \varepsilon_1^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}\}\}$$

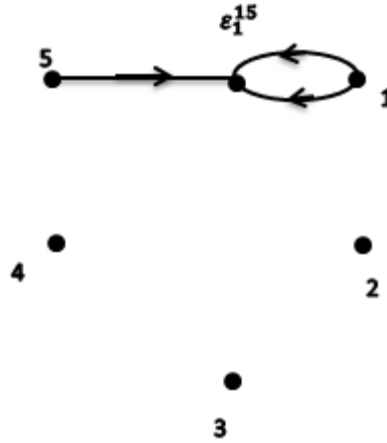
olup (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen düğümü bulalım.

1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4,5\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 5$.tir. O halde düzleme 5 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



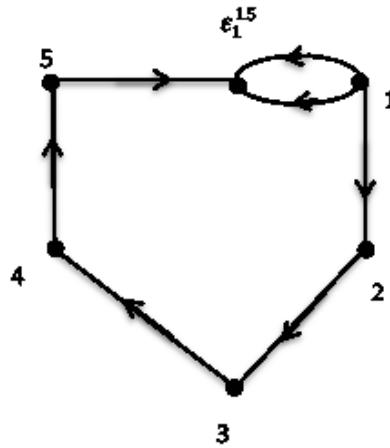
Şekil 4.25. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{15}\}, s(\underline{\tau_2}) = 1$ dir. 1 ve 5 noktaları arasına bir tane bozma yerleştirilir.



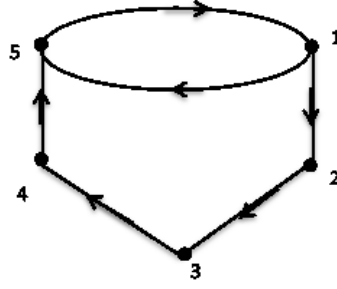
Şekil 4.26. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 5 + 2 - 1 = 6$ çizilecek digraf 6 kenarlıdır.
- 4) $V - 1 = 5 - 1 = 4$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde dört tane kenar eklenecektir.



Şekil 4.27. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 5 noktaları arasındaki bozular cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.28. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

6) Tait metodu yardımıyla 6_1 düğümü elde edilir.



Şekil 4.29. 6_1 düğümü regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$$

olup (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen düğümü bulalım.

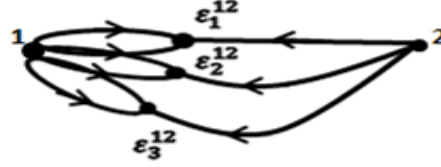
1) $\overline{\tau_1} = \{1,2\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 2$ dir. O halde düzleme 2 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.

1 ●

● 2

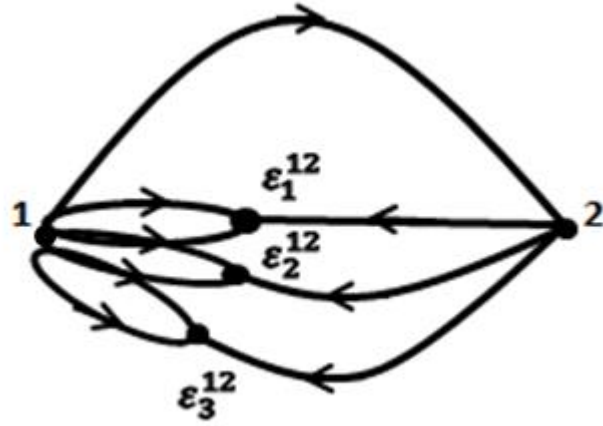
Şekil 4.30. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

- 2) $\tau_2 = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, s(\tau_2) = B = 3$ dir. 1 ve 2 noktaları arasında üç tane bozma yerleştirilir.



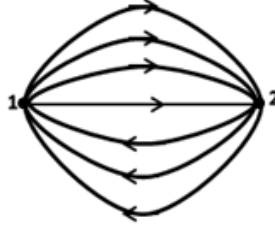
Şekil 4.31. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 2 + 6 - 1 = 7$ çizilecek digraf 7 kenarlıdır.
 4) $V - 1 = 2 - 1 = 1$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde bir tane kenar eklenecektir.



Şekil 4.32. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 2 noktaları arasındaki üç tane bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.33. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

6) Tait metodu yardımıyla 7_1 düğümü elde edilir.



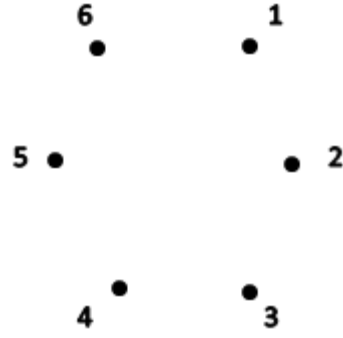
Şekil 4.34. 7_1 düğümü regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}\{4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{6, \varepsilon_1^{16}\}, \{\varepsilon_1^{16}\}\}$$

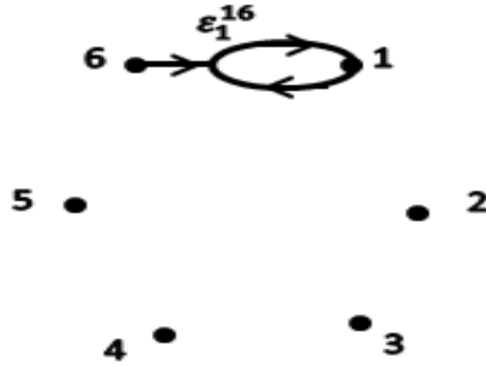
olup (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen düğümü bulalım.

1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4,5,6\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 6$ dir. O halde düzleme 6 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



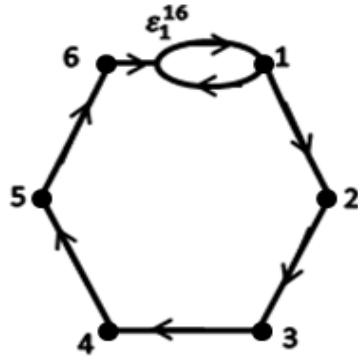
Şekil 4.35. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

- 2) $\underline{\tau}_2 = \{\varepsilon_1^{16}\}$, $s(\underline{\tau}_2) = B = 1$ dir. 1 ve 6 noktaları arasında bir tane bozma yerleştirilir.



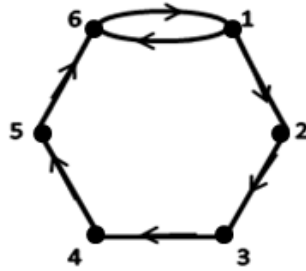
Şekil 4.36. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 6 + 2 - 1 = 7$ çizilecek digraf 7 kenarlıdır.
 4) $V - 1 = 6 - 1 = 5$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde beş tane kenar eklenecektir.



Şekil 4.37. Kenarların düzleme uygulanması

- 5) 1 ve 6 noktaları arasına bir bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.38. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 7_2 düğümü elde edilir.

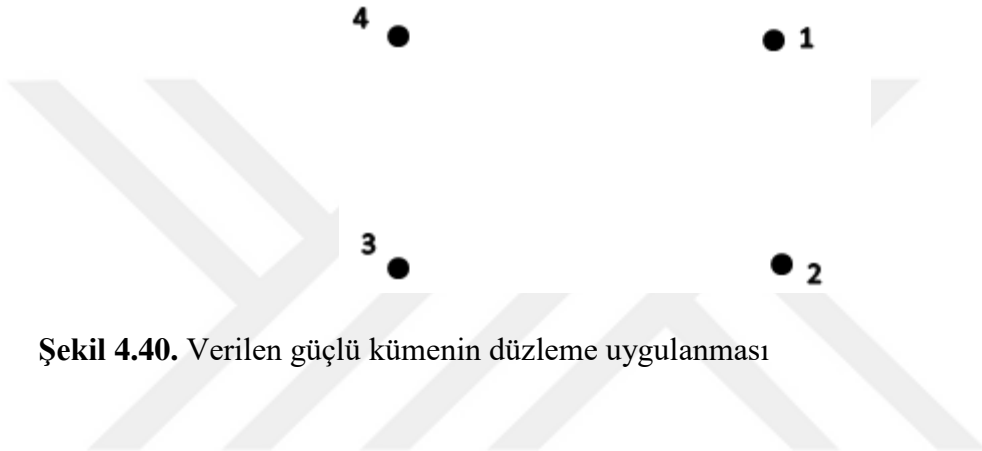


Şekil 4.39. 7_2 düğümü regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

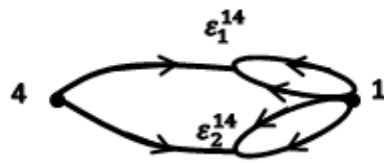
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}\}$$

- 1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 4$ tür. O halde düzleme 4 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



Şekil 4.40. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

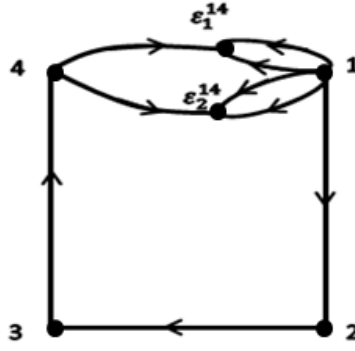
- 2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, s(\underline{\tau_2}) = B = 2$ dir. 1 ve 4 noktaları arasında iki tane bozma yerleştirilir.



Şekil 4.41. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

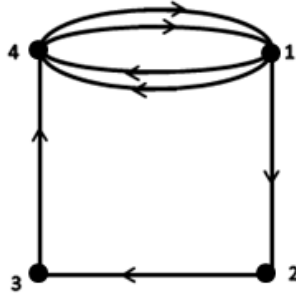
- 3) $V + 2B - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$ çizilecek digraf 7 kenarlıdır.

- 4) $V - 1 = 4 - 1 = 3$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde üç tane kenar eklenecektir.



Şekil 4.42. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 4 noktaları arasındaki iki bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.43. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 7_3 düğümü elde edilir.



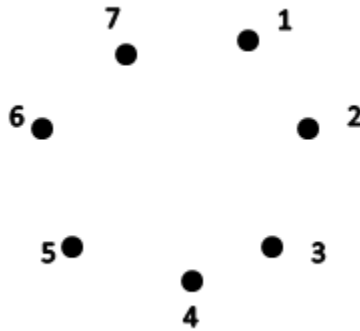
Şekil 4.44. 7_3 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

τ_2

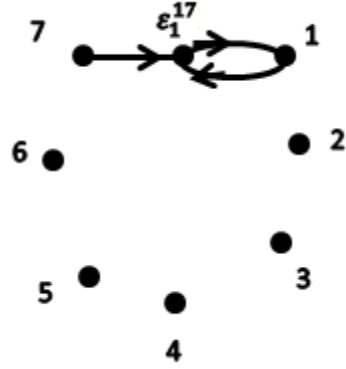
$$= \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}\}\}$$

- 1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $s(\overline{\tau_1}) = V = 7$ dir. O halde düzleme 7 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



Şekil 4.45. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

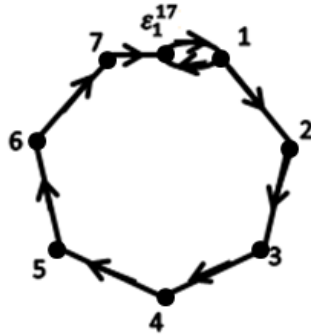
- 2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{17}\}$, $s(\underline{\tau_2}) = B = 1$ dir. 1 ve 7 kenarları arasına bir tane bozma yerleştirilir.



Şekil 4.46. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

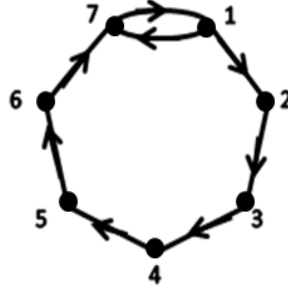
3) $V + 2B - 1 = 7 + 2 - 1 = 8$ çizilecek digraf 8 kenarlıdır.

4) $V - 1 = 7 - 1 = 6$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde altı tane kenar eklenecektir.



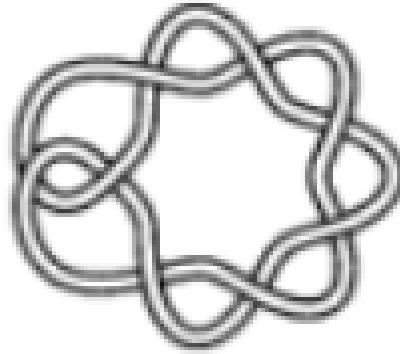
Şekil 4.47. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

5) 1 ve 7 noktaları arasındaki bir tane bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.48. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

6) Tait metodu yardımıyla 8_1 düğümü elde edilir.

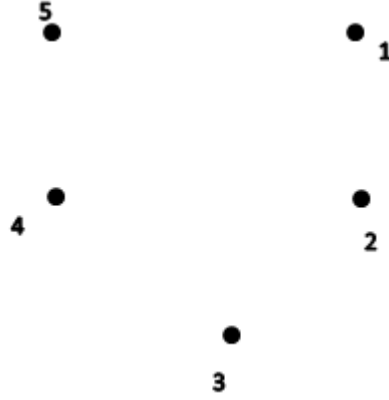


Şekil 4.49. 8_1 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

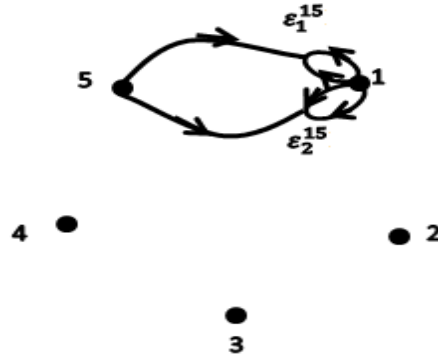
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}\}$$

1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4,5\}$, $s(\overline{\tau_1}) = V = 5$ tir. O halde düzleme 5 tane nokta yerleştirip saat yönünde bu noktalara numara verelim.



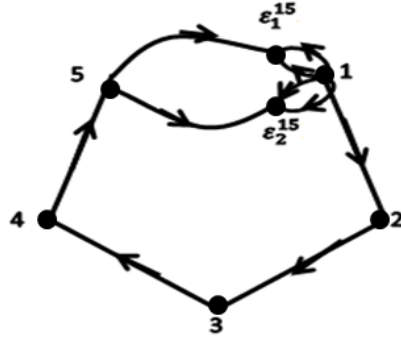
Şekil 4.50. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

2) $\tau_2 = \{\varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}$, $s(\tau_2) = B = 2$ dir. 1 ve 5 noktaları arasında iki tane bozma yerleştirilecektir.



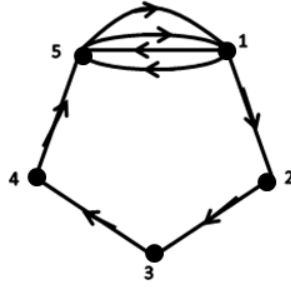
Şekil 4.51. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 5 + 4 - 1 = 8$ çizilecek digraf 8 kenarlıdır.
 4) $V - 1 = 5 - 1 = 4$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde dört tane kenar eklenecektir.



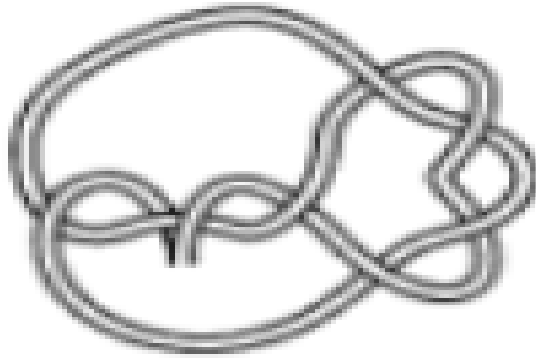
Şekil 4.52. Kenaların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 5 noktaları arasındaki iki bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.53. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 8_3 düğümü elde edilir.



Şekil 4.54. 8_3 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

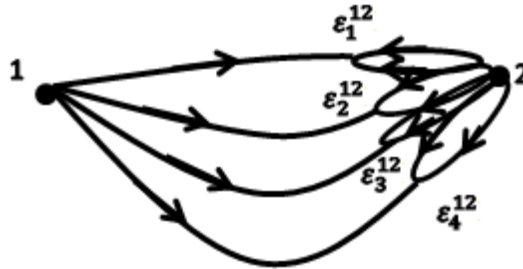
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}\}$$

1) $\overline{\tau_1} = \{1,2\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 2$ dir. O halde düzleme 2 tane nokta yerleştirip bu numaralara saat yönünde numara verelim.



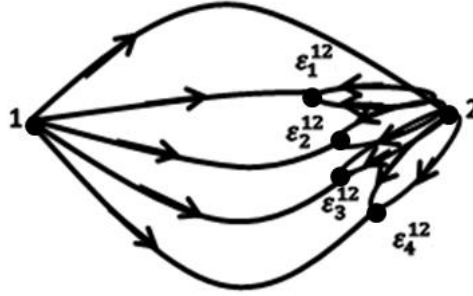
Şekil 4.55. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}, s(\underline{\tau_2}) = B = 2$ dir. 1 ve 2 kenarları arasında dört tane bozma yerleştirelim.



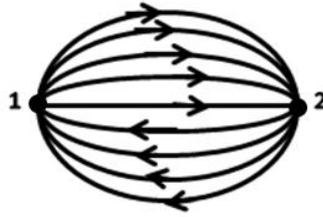
Şekil 4.56. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 2 + 8 - 1 = 9$ çizilecek digraf 8 kenarlıdır.
- 4) $V - 1 = 2 - 1 = 1$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde bir tane kenar eklenecektir.



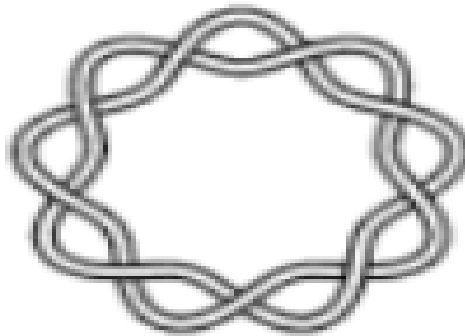
Şekil 4.57. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 2 noktaları arasında dört tane bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.58. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 9_1 düğümü elde edilir.

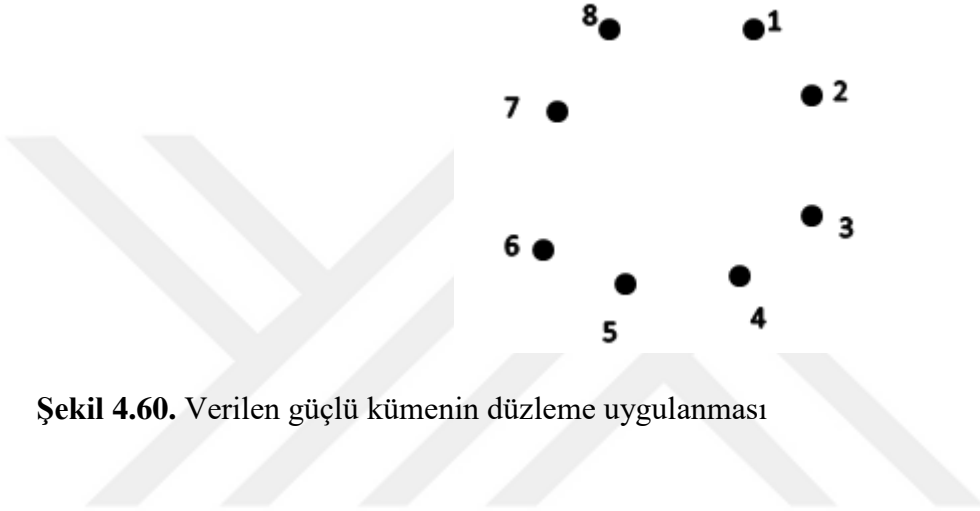


Şekil 4.59. 9_1 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

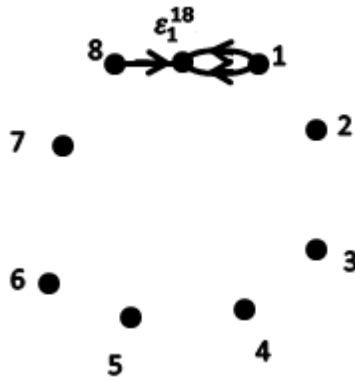
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \\ \{6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{8, \varepsilon_1^{18}\}, \{\varepsilon_1^{18}\}\}$$

- 1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4,5\}$, $s(\overline{\tau_1}) = V = 8$ dir. O halde 8 tane noktayı düzleme yerleştirelim ve saat yönünde bu noktaları isimlendirelim.



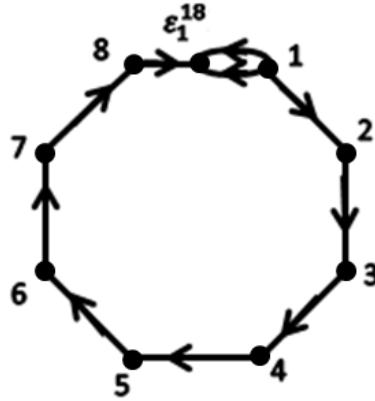
Şekil 4.60. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

- 2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{18}\}$, $s(\underline{\tau_2}) = B = 1$ dir. 1 ve 8 noktaları arasında bir tane bozma yerleştirelim.



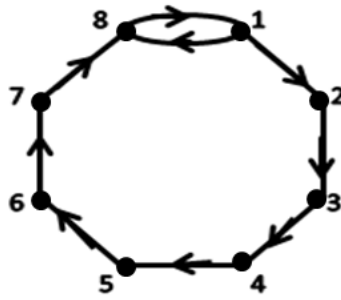
Şekil 4.61. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 8 + 2 - 1 = 9$ çizilecek digraf 9 kenarlıdır.
 4) $V - 1 = 8 - 1 = 7$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde 7 tane kenar eklenecektir.



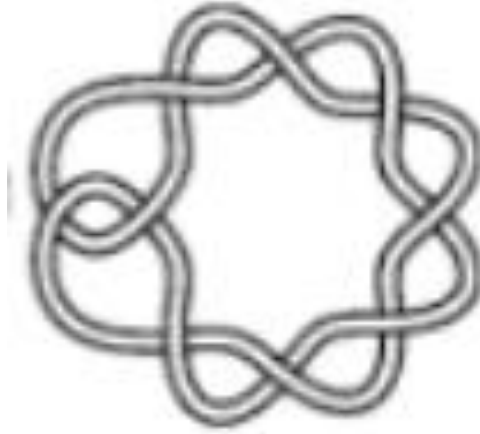
Şekil 4.62. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 8 köşeleri arasında iki bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.63. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 9_2 düğümü elde edilir.



Şekil 4.64. 9_2 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

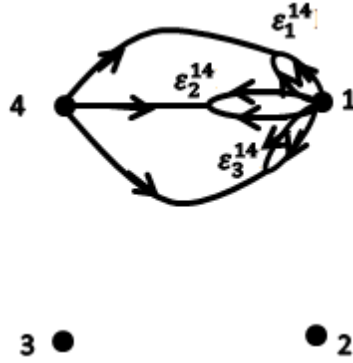
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}\}$$

- 1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 4$ tür. O halde 4 tane noktayı düzleme yerleştirelim ve bu noktaları saat yönünde isimlendirelim.



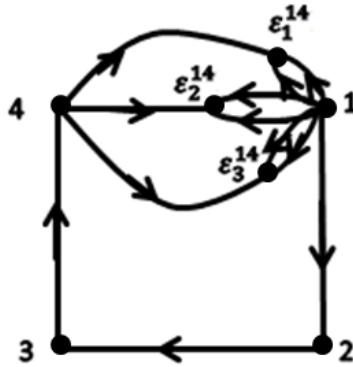
Şekil 4.65. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

- 2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, s(\underline{\tau_2}) = B = 3$ tür. 1 ve 4 noktaları arasına üç tane bozma yerleştirilir.



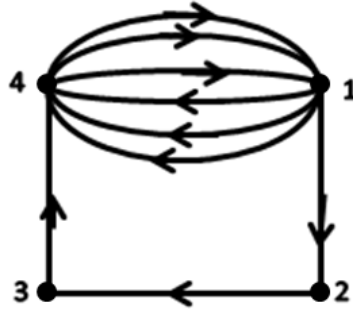
Şekil 4.66. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

- 3) $V + 2B - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$ çizilecek digraf 9 kenarlıdır.
 4) $V - 1 = 4 - 1 = 3$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde üç tane kenar eklenecektir.



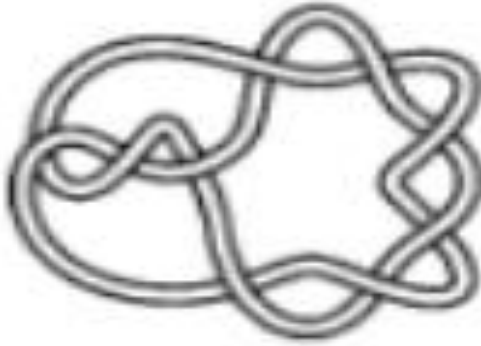
Şekil 4.67. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 4 köşeleri arasındaki üç bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.68. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

6) Tait metodu yardımıyla 9_3 düğümü elde edilir.



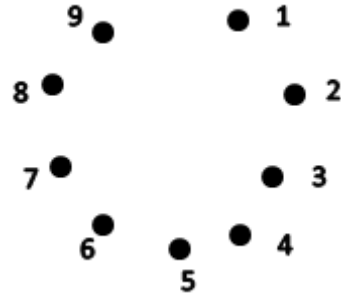
Şekil 4.69. 9_3 düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \left\{ X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \right\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{3,4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}$$

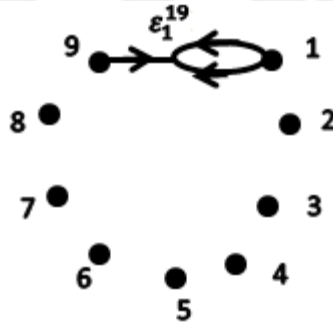
$$, \{7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{9, \varepsilon_1^{19}\}, \{\varepsilon_1^{19}\}\}$$

1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, s(\overline{\tau_1}) = V = 9$ dur. O halde düzleme 9 tane nokta yerleştirelim ve bu noktaları saat yönünde isimlendirelim.



Şekil 4.70. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

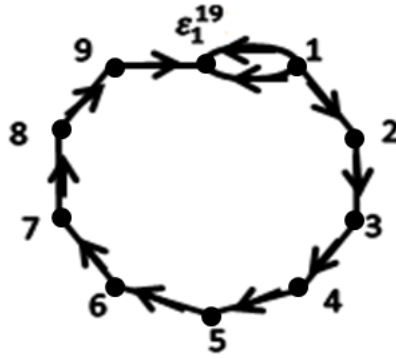
2) $\tau_2 = \{\varepsilon_1^{19}\}$, $s(\tau_2) = B = 1$ tir. 1 ve 9 noktaları arasında bir tane bozma yerleştirelim.



Şekil 4.71. Zayıf kümenin düzleme uygulanması

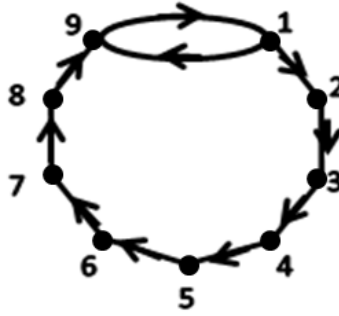
3) $V + 2B - 1 = 9 + 2 - 1 = 10$ çizilecek digraf 10 kenarlıdır.

4) $V - 1 = 9 - 1 = 8$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde sekiz tane kenar eklenecektir.



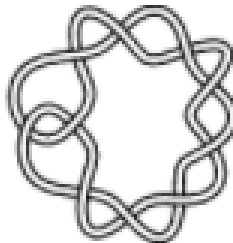
Şekil 4.72. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 9 köşeleri arasındaki bir bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.73. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 10₁ düğümü elde edilir.

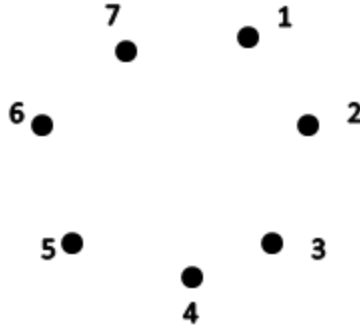


Şekil 4.74. 10₁ düğümünün regüler diyagramı

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

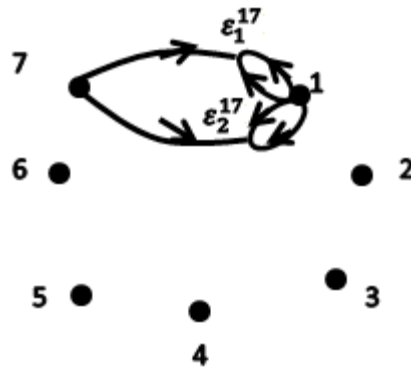
$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \\ \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}\}$$

- 1) $\overline{\tau_1} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $s(\overline{\tau_1}) = V = 7$ dir. Düzleme 7 tane nokta yerleştirelim ve bu noktaları saat yönünde isimlendirelim.



Şekil 4.75. Verilen güçlü kümenin düzleme uygulanması

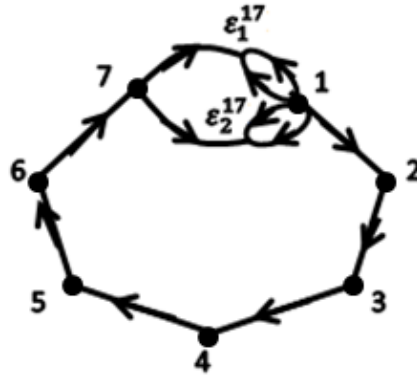
- 2) $\underline{\tau_2} = \{\varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}$, $s(\underline{\tau_2}) = B = 2$ dir. 1 ve 7 noktaları arasında iki tane bozma yerleştirilir.



Şekil 4.76. Verilen zayıf kümenin düzleme uygulanması

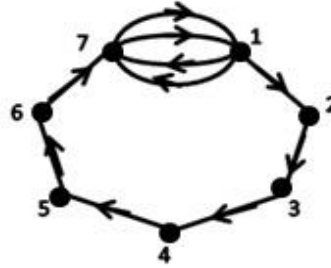
- 3) $V + 2B - 1 = 7 + 4 - 1 = 10$ çizilecek digraf 9 kenarlıdır.

- 4) $V - 1 = 7 - 1 = 6$ olduğuna göre 1 numaralı kenardan saat yönünde altı tane kenar eklenecektir.



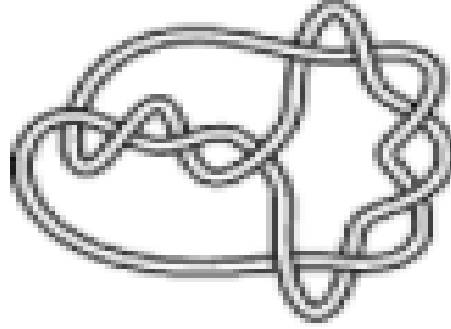
Şekil 4.77. Kenarların düzleme yerleştirilmesi

- 5) 1 ve 7 köşeleri arasındaki iki bozma cycle dönüştürülecektir.



Şekil 4.78. Bozmaların cycle dönüştürülmesi

- 6) Tait metodu yardımıyla 10_3 düğümü elde edilir.



Şekil 4.79. 10_3 düğümünün regüler diyagramı

4.2. Düğümlere Karşılık Gelen Bitopolojilerin Bazı Özellikleri Ve Ayırma Aksiyomları

Bu bölümde, $m = 3, 4, \dots, 10$ ve $n = 1, 2, 3$ olmak üzere, m_n düğümlerine karşılık gelen bitopolojilerin ayırma aksiyomlarını sağlayıp sağlamadıkları incelenecektir.

$X = \{\varepsilon_1^{12}, 1, 2\}$ 3_1 (trefoil) düğümünün digrafının köşeleri, 3_1 (trefoil) düğümüne karşılık gelen bitopoloji

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{\varepsilon_1^{12}, 2\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$$

olmak üzere, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayıdır. Ayrıca, $i = 1, 2$ olmak üzere τ_i topolojisine göre kapalı kümeler κ_i ile gösterilsin.

1) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{\varepsilon_1^{12}, 2\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

$$\{1\} \in \tau_1, \{1\} \in \kappa_2$$

$$\{1,2\} \in \tau_1, \{1,2\} \in \kappa_2$$

$$\{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2, \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \kappa_1$$

$$\{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2, \{\varepsilon_1^{12}\} \in \kappa_1$$

olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı sıfır boyutlu bitopolojik uzaydır.

2) $x = 1, y = 2$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1 \text{ ve } 2 \notin \{1\} \in \tau_1$$

$x = 1, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1 \text{ ve } \varepsilon_1^{12} \notin \{1\} \in \tau_1$$

$x = 2, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$2 \in \{1,2\} \in \tau_1 \text{ ve } \varepsilon_1^{12} \notin \{1,2\} \in \tau_1$$

olduğuna dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) dır.

3) $x = 1, y = 2$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1 \text{ ve } 2 \notin \{1\} \in \tau_1$$

$$1 \notin \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2 \text{ ve } 2 \in \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$$

$x = 1, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1 \text{ ve } \varepsilon_1^{12} \notin \{1\} \in \tau_1$$

$$1 \notin \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2 \text{ ve } \varepsilon_1^{12} \in \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$$

$x = 2, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$2 \in \{1, 2\} \in \tau_1 \text{ ve } \varepsilon_1^{12} \notin \{1, 2\} \in \tau_1$$

$$2 \in \{1, 2\} \in \tau_1 \text{ ve } \varepsilon_1^{12} \notin \{1, 2\} \in \tau_1$$

$$2 \notin \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } \varepsilon_1^{12} \in \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2$$

olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_1 -uzay (w-p- T_1) dir.

4) $x = 1, y = 2$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1, 2 \in \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2 \text{ ve } \{1\} \cap \{\varepsilon_1^{12}, 2\} = \emptyset$$

$x = 1, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1, \varepsilon_1^{12} \in \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } \{1\} \cap \{\varepsilon_1^{12}\} = \emptyset$$

$x = 2, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$2 \in \{1, 2\} \in \tau_1, \varepsilon_1^{12} \in \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } \{1, 2\} \cap \{\varepsilon_1^{12}\} = \emptyset$$

olduğundan dolayı zayıf pairwise T_2 - uzay (w-p- T_2) dir.

5) $x = 1, y = 2$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1, 2 \in \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2 \text{ ve } \{1\} \cap \{\varepsilon_1^{12}, 2\} = \emptyset$$

$x = 1, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$1 \in \{1\} \in \tau_1, \varepsilon_1^{12} \in \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } \{1\} \cap \{\varepsilon_1^{12}\} = \emptyset$$

$x = 2, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$$2 \in \{1,2\} \in \tau_1, \varepsilon_1^{12} \in \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } \{1,2\} \cap \{\varepsilon_1^{12}\} = \emptyset$$

olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) dur.

6) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{\varepsilon_1^{12}, 2\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \kappa_1, B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1, V = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \kappa_1, B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1, V = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \kappa_1, B = \{1,2\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1,2\} \in \tau_1, V = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

Bu durumda, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p -normal (pairwise normal uzay) dır.

7) $A = \{1\} \in \tau_1$, $B = \{\varepsilon_1^{12}, 2\}$ olarak seçilirse $A \cap B = \emptyset$ dir ve $A \cup B = X$ olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-bağlantılı (pairwise bağlantılı uzay) değildir.

8) $x = 1, y = 2$ noktaları için,

$1 \in A = \{1\} \in \tau_1$ ve $2 \in B = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$ olup $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = X$ tir.

$x = 1, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$1 \in A = \{1\} \in \tau_1$ ve $\varepsilon_1^{12} \in B = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$ olup $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = X$ tir.

$x = 2, y = \varepsilon_1^{12}$ noktaları için,

$2 \in A = \{1, 2\} \in \tau_1$ ve $\varepsilon_1^{12} \in B = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2$ olup $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = X$ tir.

olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf tamamen bağlantısız uzaydır.

9) i) $x = 1$ noktası ve $F = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$1 \in U = \{1\} \in \tau_1$, $F \subseteq V = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

$x = 2$ noktası ve $F = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$2 \in U = \{1, 2\} \in \tau_1$, $F \subseteq V = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular dir.

ii) $x = 2$ noktası ve $F = \{1\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$2 \in V = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$, $F \subseteq U = \{1\} \in \tau_1$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

$x = \varepsilon_1^{12}$ noktası ve $F = \{1, 2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}\} \in \tau_2$, $F \subseteq U = \{1, 2\} \in \tau_1$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular dir.

Hem τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular hem de τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-regular (pairwise regular uzay) dir.

$X = \{1, 2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\}$$

5_1 düğümü üzerindeki (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı verilsin. Ayrıca, $i = 1, 2$ olmak üzere τ_i topolojisine göre kapalı kümeler κ_i ile gösterilsin.

1) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}\}$ verilen bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

$$\{1\} \in \tau_1, \{1\} \in \kappa_2$$

$$\{1, 2\} \in \tau_1, \{1, 2\} \in \kappa_2$$

$$\{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \kappa_1$$

$$\{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \kappa_1$$

olduğundan dolayı verilen (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı sıfır boyutlu bitopolojik uzaydır.

- 2) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, birini kapsayan diğerini kapsamayan küme bulamadığımızdan (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_0 – uzayı (w-p- T_0) değildir.
- 3) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, birini kapsayan diğerini kapsamayan küme bulamadığımızdan (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_1 –uzayı (w-p- T_1) değildir.
- 4) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde, U ve V ayrık ve açık kümeleri yoktur. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_2 -uzayı (w-p- T_2) değildir.
- 5) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde, U ve V ayrık ve açık kümeleri yoktur. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise p – T_2 uzayı (pairwise Hausdorff) değildir.
- 6) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

A ve B kümelerini, $A = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dır. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1$, $V = \{\varepsilon_1^{12}, 2\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dır. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1$, $V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1,2\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dır. Ayrıca, $U = \{1,2\} \in \tau_1$, $V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

Bu durumda, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-normal (pairwise normal uzay) dır.

7) $A = \{1\} \in \tau_1$, $B = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}$ olarak seçilirse $A \cap B = \emptyset$ dir ve $A \cup B = X$ olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-bağlantılı (pairwise bağlantılı uzay) değildir.

8) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için,

$\varepsilon_1^{12} \in A \in \tau_1$ ve $\varepsilon_2^{12} \in B \in \tau_2$, $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde A ve B kümeleri bulunamadığından (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf tamamen bağlantısız uzay değildir.

9) i) $x = 1$ noktası ve $F = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$$1 \in U = \{1\} \in \tau_1, F \subseteq V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = 2$ noktası ve $F = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$$2 \in U = \{1, 2\} \in \tau_1, F \subseteq V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

olduğundan τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular dir.

ii) $x = 2$ noktası ve $F = \{1\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$2 \in V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = \varepsilon_1^{12}$ noktası ve $F = \{1, 2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1, 2\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = \varepsilon_2^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular dir.

Hem τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular hem de τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-regular (pairwise regular uzay) dir.

$X = \{1,2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$$

τ_1 düğümü üzerindeki (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı verilsin. Ayrıca, $i = 1,2$ olmak üzere τ_i topolojisine göre kapalı kümeler κ_i ile gösterilsin.

1) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ verilen bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

$$\{1\} \in \tau_1, \{1\} \in \kappa_2$$

$$\{1,2\} \in \tau_1, \{1,2\} \in \kappa_2$$

$$\{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \kappa_1$$

$$\{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \kappa_1$$

olduğundan dolayı verilen (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı sıfır boyutlu bitopolojik uzaydır.

- 2) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, birini kapsayan diğerini kapsamayan küme bulamadığımızdan (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_0 – uzayı (w-p- T_0) değildir.
- 3) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, birini kapsayan diğerini kapsamayan küme bulamadığımızdan (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_1 –uzayı (w-p- T_1) değildir.
- 4) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde, U ve V ayrık ve açık kümeleri yoktur. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_2 -uzayı (w-p- T_2) değildir.
- 5) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde, U ve V ayrık ve açık kümeleri yoktur. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise $p - T_2$ uzayı (pairwise Hausdorff) değildir.
- 6) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

A ve B kümelerini, $A = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1$, $V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1$, $V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1,2\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1,2\} \in \tau_1$, $V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

Bu durumda, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-normal (pairwise normal uzay) dir.

7) $A = \{1\} \in \tau_1$, $B = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}$ olarak seçilirse $A \cap B = \emptyset$ dir ve $A \cup B = X$ olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-bağlantılı (pairwise bağlantılı uzay) değildir.

8) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için,

$\varepsilon_1^{12} \in A \in \tau_1$ ve $\varepsilon_2^{12} \in B \in \tau_2$, $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde A ve B kümeleri bulunamadığından (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf tamamen bağlantısız uzay değildir.

9) i) $x = 1$ noktası ve $F = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$$1 \in U = \{1\} \in \tau_1, F \subseteq V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = 2$ noktası ve $F = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$$2 \in U = \{1,2\} \in \tau_1, F \subseteq V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular dir.

ii) $x = 2$ noktası ve $F = \{1\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$2 \in V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = \varepsilon_1^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = \varepsilon_2^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

$x = \varepsilon_3^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1$ ve $U \cap V = \emptyset$ dir.

τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular dir.

Hem τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular hem de τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-regular (pairwise regular uzay) dir.

$X = \{1,2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}\}$$

\mathcal{G}_1 düğümü üzerindeki (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı verilsin. Ayrıca, $i = 1,2$ olmak üzere τ_i topolojisine göre kapalı kümeler κ_i ile gösterilsin.

1) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ verilen bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

$$\{1\} \in \tau_1, \{1\} \in \kappa_2$$

$$\{1,2\} \in \tau_1, \{1,2\} \in \kappa_2$$

$$\{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \kappa_1$$

$$\{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \kappa_1$$

olduğundan dolayı verilen (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı sıfır boyutlu bitopolojik uzaydır.

2) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, birini kapsayan diğerini kapsamayan küme bulamadığımızdan (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_0 – uzayı (w-p- T_0) değildir.

3) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, birini kapsayan diğerini kapsamayan küme bulamadığımızdan (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf pairwise T_1 –uzayı (w-p- T_1) değildir.

4) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde, U ve V ayrık ve açık kümeleri yoktur. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise T_2 -uzayı (w-p- T_2) değildir.

5) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için, $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde, U ve V ayrık ve açık kümeleri yoktur. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına zayıf pairwise $p - T_2$ uzayı (pairwise Hausdorff) değildir.

6) $\kappa_1 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}\}$ ve $\kappa_2 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$ bitopolojik uzayın kapalı kümeleridir.

A ve B kümelerini, $A = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1$, $V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1\} \in \tau_1$, $V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

A ve B kümelerini, $A = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \kappa_1$, $B = \{1,2\} \in \kappa_2$ olarak seçelim ve $A \cap B = \emptyset$ dir. Ayrıca, $U = \{1,2\} \in \tau_1$, $V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2$ ve $U \cap V = \emptyset$ olsun. $B \subseteq U \in \tau_1$ ve $A \subseteq V \in \tau_2$ olduğu görülür.

Bu durumda, (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-normal (pairwise normal uzay) dır.

7) $A = \{1\} \in \tau_1, B = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}$ olarak seçilirse $A \cap B = \emptyset$ dir ve $A \cup B = X$ olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-bağlantılı(pairwise bağlantılı uzay) değildir.

8) $x = \varepsilon_1^{12}, y = \varepsilon_2^{12}$ noktaları için,

$\varepsilon_1^{12} \in A \in \tau_1$ ve $\varepsilon_2^{12} \in B \in \tau_2, A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = X$ olacak şekilde A ve B kümeleri bulunamadığından (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı zayıf tamamen bağlantısız uzay değildir.

9) i) $x = 1$ noktası ve $F = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$$1 \in U = \{1\} \in \tau_1, F \subseteq V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = 2$ noktası ve $F = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \kappa_1$ kümesi için,

$$2 \in U = \{1,2\} \in \tau_1, F \subseteq V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular dir.

ii) $x = 2$ noktası ve $F = \{1\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$2 \in V = \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = \varepsilon_1^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = \varepsilon_2^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

$x = \varepsilon_3^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular dir.

$x = \varepsilon_4^{12}$ noktası ve $F = \{1,2\} \in \kappa_2$ kümesi için,

$$\varepsilon_1^{12} \in V = \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \in \tau_2, F \subseteq U = \{1,2\} \in \tau_1 \text{ ve } U \cap V = \emptyset \text{ dir.}$$

τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular dir.

Hem τ_1 topolojisi, τ_2 anlamında regular hem de τ_2 topolojisi, τ_1 anlamında regular olduğundan dolayı (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayı p-regular (pairwise regular uzay) dir.

Benzer şekilde diğer düğümlere karşılık gelen bitopolojiler incelendiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

4.2.1. Sonuç: 3_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2, \varepsilon_1^{12}\}$ olmak üzere;

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.2. Sonuç: 4_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3, \varepsilon_1^{13}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3, \varepsilon_1^{12}\}, \{3, \varepsilon_1^{13}\}, \{\varepsilon_1^{13}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.3. Sonuç: 5_2 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4, \varepsilon_1^{14}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.4. Sonuç: 6_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}\}, \{5, \varepsilon_1^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.5. Sonuç: 6_3 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere;

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \{4\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.6. Sonuç: 7_2 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{3,4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{4,5,6, \varepsilon_1^{16}\}, \{5,6, \varepsilon_1^{16}\},$$

$$\{6, \varepsilon_1^{16}\}, \{\varepsilon_1^{16}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.7. Sonuç: 8_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}\},$$

$$\{6,7, \varepsilon_1^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.8. Sonuç: 9_2 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{3,4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{4,5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\},$$

$$\{5,6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{6,7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{7,8, \varepsilon_1^{18}\}, \{8, \varepsilon_1^{18}\}, \{\varepsilon_1^{18}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.

- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.9. Sonuç: 10_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{3,4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{4,5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{5,6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{6,7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{7,8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{8,9, \varepsilon_1^{19}\}, \{9, \varepsilon_1^{19}\}, \{\varepsilon_1^{19}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) $p - T_2$ (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.10. Sonuç: 6_2 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5\}, \{3,4,5\}, \{4,5\}, \{5\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) p – T_2 (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.11. Sonuç: 8_2 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7\}, \{3,4,5,6,7\}, \{4,5,6,7\}, \{5,6,7\}, \{6,7\}, \{7\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) p – T_2 (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.12. Sonuç: 10_2 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}, \{1,2,3,4,5,6,7,8\}\} \\ \tau_2 &= \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7,8,9\}, \{3,4,5,6,7,8,9\}, \{4,5,6,7,8,9\}, \{5,6,7,8,9\}, \{6,7,8,9\}, \\ &\{7,8,9\}, \{8,9\}, \{9\}\} \end{aligned}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) Zayıf pairwise T_0 – uzay (w-p- T_0) uzay olma özelliğini sağlar.
- 3) Zayıf pairwise T_1 – uzay (w-p- T_1) uzay olma özelliğini sağlar.
- 4) Zayıf pairwise T_2 – uzay (w-p- T_2) uzay olma özelliğini sağlar.
- 5) p – T_2 (pairwise Hausdorff) uzay olma özelliğini sağlar.
- 6) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 7) Zayıf tamamen bağlantısız uzay olma özelliğini sağlar.
- 8) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.13. Sonuç: 5_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\} \\ \tau_2 &= \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}\}\} \end{aligned}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.

3) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.14. Sonuç: 7_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 3) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.15. Sonuç: 7_3 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 3) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.16. Sonuç: 8_3 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{3,4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{4,5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{5, \varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}, \{\varepsilon_1^{15}, \varepsilon_2^{15}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 3) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.17. Sonuç: 9_1 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$$X = \{1,2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\} \text{ olmak üzere,}$$

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2, \varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}, \{\varepsilon_1^{12}, \varepsilon_2^{12}, \varepsilon_3^{12}, \varepsilon_4^{12}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 3) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.18. Sonuç: 9_3 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$$X = \{1,2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\} \text{ olmak üzere,}$$

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}\}$$

$$\tau_2 = \{X, \emptyset, \{2,3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{3,4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{4, \varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}, \{\varepsilon_1^{14}, \varepsilon_2^{14}, \varepsilon_3^{14}\}\}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 3) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

4.2.19. Sonuç: 10_3 düğümüne karşılık gelen bitopoloji,

$X = \{1,2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}$ olmak üzere,

$$\tau_1 = \{X, \emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,5,6\}, \{1,2,3,4,5,6,7\}\}$$

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \{X, \emptyset, \{2,3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{3,4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{4,5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{5,6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \\ &\{6,7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{7, \varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}, \{\varepsilon_1^{17}, \varepsilon_2^{17}\}\} \end{aligned}$$

olup aşağıdaki özellikleri sağlar.

- 1) Sıfır boyutlu bitopolojik uzay olma özelliğini sağlar.
- 2) p –normal (pairwise normal uzay) olma özelliğini sağlar.
- 3) p –regular(pairwise regular uzay) olma özelliğini sağlar.

5. SONUÇ ve TARTIŞMA

Düğümlere karşılık gelen bitopolojilerin, ayırma aksiyomlarından hangilerini sağlayıp sağlamadığı görülmüştür. $m = 3,4, \dots, 10$ ve $n = 1,2,3$ olmak üzere, m_n düğümlerine karşılık gelen bitopolojilerden yaralanılarak, düğümün kendisi elde edilmiştir. Ayrıca düğümü elde ettiğimiz yöntem daha kolay anlaşılabilmesi için “güçlü küme” ve “zayıf küme” tanımları verilmiştir. Sonuç olarak aşağıdaki yöntemle bitopolojiye karşılık gelen düğümün nasıl bulunacağı görülmüştür:

- 1) (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen bir düğümün, τ_1 topolojisinin güçlü kümesi $Y(\tau_1)$ in eleman sayısı kadar yani $s(Y(\tau_1)) = V$ tane köşe, düzleme nokta şeklinde işaretlenir. Konulan tüm noktalar yani köşeler saat yönünde $1,2, \dots, V$ şeklinde numaralandırılır.
- 2) (X, τ_1, τ_2) bitopolojik uzayına karşılık gelen bir düğümün, τ_2 topolojisinin zayıf kümesi $Z(\tau_2)$ nin ε_k^{ij} elemanları, i ve j köşeleri arasında k . bozma olduğunu gösterir. Örneğin, ε_1^{13} elemanı bize 1 ve 3 köşeleri arasında yapılmış birinci bozmayı gösterirken, ε_2^{13} elemanı 1 ve 3 köşeleri arasındaki yapılmış olan ikinci bozmayı göstermektedir. Bu bozmalar saat yönünde önce doğru daha sonra cycle olacak şekilde, yani saat yönünde digraf ε_k^{ij} elemanları göz önüne alınarak 1). maddedeki konulmuş olan noktalar arasına yerleştirilir.
- 3) τ_1 in güçlü kümesi $Y(\tau_1)$ in eleman sayısı V ve τ_2 topolojisinin zayıf kümesi $Z(\tau_2)$ nin eleman sayısı B olmak üzere,

$$V + 2B - 1$$

formülü, bitopolojisi verilmiş düğümün kaç geçişli olduğunu dolayısıyla, düğümün kaç kenarlı digraftan elde edildiğini verir. Yani, 1). Maddede düzleme yerleştirmiş olduğumuz noktaların sayısına, 2). Maddede yerleştirilmiş olan cycle bozmalarının sayısının, iki katından bir eksiği kadar eklenmesiyle, elde edilmeye çalışılan düğümün kaç kenarlı digraftan elde edildiğini söyler.

- 4) Bozmalar yerleştirildikten sonra 1 ile numaralandırılmış noktadan itibaren saat yönünde $V - 1$ tane daha kenar eklenir. Eklenen kenara saat yönünde yönlendirme verilir.
- 5) Saat yönünde bir doğru ve saat yönünün tersi yönünde iki kenarın paralelde bağlanmasıyla oluşmuş digraf, graf hareketleri sayesinde, iki köşe yardımıyla birbirine paralelde bağlanmış saat yönünde yönlendirme verilmiş digrafa denk olduğundan birbirine dönüştürölür. Kısacası bozmalar, cycle dönüştürölür.
- 6) İlk beş adımda bulmamız istenilen düğümün üzerindeki bitopolojinin hangi digraftan elde edildiği bulunmuştur. Bu bulunan digraf, bulunmasını istediğimiz düğümün ya grafindan ya da dual grafindan elde edilmiştir. Bulmuş olduğumuz digraftan, Tait metodu yardımıyla bitopolojisi verilen düğüm çizilir.

KAYNAKLAR

- Al-Areefi, S.M., 2009. Opertion Separation Axiom in Bitopological Spaces. Analele Stiintifice ale Universitatii Ovidius Constanta, Vol.17(2), 5-18
- Burde, G. and Zieschang H., 2003. Knots. Walter De Gruyter, 401 s, Berlin-New York.
- Diestel, R., 1997. Graph Theory. Electronic Edition, Spring-Verlag, 322 s, New york.
- Engelking, R., 1977. General Topology. Polish Scientific Publishers, Warszawa.
- Girija B. and Pilakkat R., 2013 Bitopological spaces associated with digraphs, South Asian Journal of Mathematics, Vol.3 (1):56-65
- Gross, J. L. and Yellen J., 2005. Graph Theory and Its Applications. Chapman & Hall / CRC, 800 s, USA.
- Jensen, J. and Gutin G., 2007 Digraphs Theory, Algorithms and Applications., University of Southern Denmark 772 s., Odense-Denmark.
- Kelly J.C., 1963. Bitopological Spaces, Proc. London Math.(3), 13, 71-89
- Koçak, M., 2011. Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar. Kampüs Yayıncılık, 558 s, Ankara.
- Kunduracı T., 2017, Döğüm Tabloları İçin Yeni Bir Metod: Döğüm Digraf Notasyonu, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü, Erzurum
- Murasugi, K., 1996. Knot Theory and Its Application. ,341 s, Boston
- Ravi, O. and Thivagar, M., 2006. A Bitopological $(1,2)^*$ Semi –Generalised Continuous Maps. Bull. Malays. Sci. Soc. (2), 29(1), 79-88p.
- Uğur T., 2002, Döğüm Grafları, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.
- Yajima, T. and Kinoshita S., 1957. On The Graphs of Knots. Osaka Math. J., 9 (1957), 155-163.

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Tekirdağ'da doğmuştur. Öğrenimine 1998 Tekirdağ Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda başlamış ve ilköğretimi Yeniçiftlik İlköğretim Okulu'nda tamamlamıştır. Ardından lise öğrenimine Tekirdağ Tuğlacılar Lisesi'nde başlamış ve 2010 yılında mezun olmuştur. 2010 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenimine başlamış ve 2014 yılında mezun olmuştur. 2015 yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Topolojî Bilim Dalı'nda yüksek lisans eğitime başlamıştır. Halen eğitime devam etmektedir.