ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

q-KANTOROVICH TİPLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Özge (ÖZER) DALMANOĞLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

ÖZET

Doktora Tezi

q-KANTOROVICH TİPLİ LİNEER POZİTİF OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Özge (ÖZER) DALMANOĞLU

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu kısımda tezde ele alınan konu ve bu konuyla ilgili olan literatürdeki diğer çalışmalar kısaca özetlenmiştir.
İkinci bölümde temel kavramlara yer verilmiştir. "Lineer pozitif operatörler" tanımından başlanarak, operatör dizileri için "düzgün yakınsaklık" kavramı ve bununla beraber "Korovkin Teoremi" ele alınmıştır. Yaklaşımlar teorisinde çok önemli bir yere sahip olan Bernstein operatörleri ve genelleşmeleri hatırlatılmış, bilinen bazı sonuçlar verilmiştir. Son olarak, tezde sıklıkla kullanacağımız q-analiz konusunun temel tanım ve özelliklerine yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde q-Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli bir genelleşmesi tanımlanmış ve bu operatörün klasik anlamda yaklaşım özellikleri incelenmiştir.
Son bölümde, istatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatılmış ve q-Bernstein-Kantorovich operatörünün istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu operatörün yaklaşım hızını incelemek istediğimizde karşımıza çıkan problemlere değinilmiş ve bu doğrultuda "ikinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörü" tanımlanmıştır. Bu operatörün istatistiksel yakınsaklığı incelenmiş ve istatistiksel yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla elde edilmiştir. Bu bölümde son olarak q-Meyer-König ve Zeller (q-MKZ) operatörlerinin Kantorovich tipli genelleşmesi tanımlanmış ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Haziran 2010, 57 sayfa

Anahtar Kelimeler : Bernstein operatörü, Kantorovich tipli genelleşmeler, q-analiz, düzgün yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı, Meyer-König ve Zeller operatörü.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

APPROXIMATION PROPERTIES OF
q-KANTOROVICH TYPE LINEAR POSITIVE OPERATORS

Özge (ÖZER) DALMANOĞLU

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Ogün DOĞRU

This thesis consists of four chapters. The first chapter has been devoted to the introduction. In this part, the issue of the thesis and some other studies in literature related to this issue have been summarized.
In the second chapter, basic notions have been recalled. Starting from the definition of linear positive operators, the notion of "uniform convergence" for the sequence of operators and the "Korovkin Theorem" have been mentioned. The Bernstein operators, their generalizations and some known results concerning these generalizations have been considered. Lastly, the basic definitions from the concept of q-analysis, which will frequently be used in this thesis, have been recalled.
In the third chapter, Kantorovich type generalization of q-Bernstein operators have been introduced and the classical approximation properties have been examined.
In the last chapter, the statistical approximation properties of q-Bernstein-Kantorovich operators have been considered. The problems, appeared in analyzing the approximation order of the operators, have been mentioned and accordingly "the second type q-Bernstein-Kantorovich operators" have been constructed. The statistical convergence of this second operator has been examined and approximation order is obtained by means of modulus of continuity and with the help of functions from Lipschitz class. Lastly, similar investigations are done for the Kantorovich type generalization of q-Meyer-König and Zeller (q-MKZ) operators.

June 2010, 57 pages

Key Words: Bernstein operators, Kantorovich type generalizations, q-analysis, uniform convergence, statistical convergence, modulus of continuity, Lipschitz class, Meyer-König and Zeller operators.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimimin her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren değerli danışman hocam, Doç. Dr. Ogün DOĞRU (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi)'ya, çalışmam boyunca yardımlarını ve önerilerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abdullah ALTIN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi), Prof. Dr. Nurhayat İSPİR (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi) ve Doç. Dr. Nuri ÖZALP (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım süresince bütün sıkıntılarımı paylaşan, desteği ve güveniyle beni cesaretlendirerek hep yanımda olan sevgili eşim Mete Dalmanoğlu'na, bilgilerini ve yardımlarını benden esirgemeyen sevgili arkadaşlarım Elif Demirci'ye ve Sibel Ersan'a, ve son olarak; beni hayatımın her aşamasında destekleyen, varlıklarıyla bana güç veren güzel aileme sonsuz teşekkürler ederim.

Özge (ÖZER) DALMANOĞLU
Ankara, Haziran 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$L(f;x)$	Lf fonksiyonunun x noktasında aldığı değer
$C[a,b]$	[a,b] aralığında tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı
$L^1[a,b]$	[a,b] aralığında integrallenebilen fonksiyonların uzayı
$\|f\|_{C[a,b]}$	$C[a,b]$ fonksiyon uzayı üzerinde tanımlı norm
$B_n(f;x)$	f fonksiyonunun Bernstein polinomu
$f_n \rightrightarrows f$	(f_n) fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$w(f;\delta)$	f fonksiyonun süreklilik modülü
$Lip_M(\alpha)$	Lipschitz sınıfından fonksiyonların uzayı
$K_n(f;x)$	Bernstein-Kantorovich operatörü
$D_n(f;x)$	Bernstein-Durrmeyer operatörü
$d_qf(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun q-diferensiyeli
$D_qf(x)$	$f(x)$ fonksiyonunun q-türevi
$I_q(f;a,b)$	$f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki q-integrali
$R_q(f;a,b)$	$f(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki Riemann tipli q-integrali
$B_n(f;q;x)$	q-Bernstein operatörü
$\tilde{B}_n(f;q;x)$	q-Bernstein-Kantorovich operatörü
$B_n^*(f;q;x)$	İkinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörü
$M_n(f;x)$	Meyer-König ve Zeller (MKZ) operatörü
$M_{n,q}(f;x)$	q-MKZ operatörü
$M_n^*(f;q;x)$	q-MKZ-Kantorovich operatörü

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisi matematiğin birçok dalıyla yakın ilişki içerisindedir. Özellikle fonksiyonel analiz, yaklaşımlar teorisinde ortaya konulan problemlerin çözümü için önemli bir araç niteliğinde olup, bu teori için temel teşkil etmektedir.

Fonksiyon uzaylarında "sürekli fonksiyonlara yaklaşım" problemi ilk defa Weierstrass (1885) tarafından ele alınmıştır. Weierstrass, kapalı bir $[a, b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlara düzgün yakınsayan polinomların varlığını göstermiştir. Bu "varlık" teoreminden sonra 1912 yılında Bernstein, bu polinomların gösterimini de vererek Weierstrass teoremini $[0, 1]$ aralığında tekrar ispatlamıştır. Literatürde "Bernstein polinomları" olarak bilinen bu polinomlar lineer pozitif operatörlerdir. Bohman (1952) ve Korovkin (1953), Bernstein operatörlerinden yola çıkarak, lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili çok önemli bir teorem vermişlerdir. Sonlu aralıkta düzgün yakınsamanın gerçeklenmesi için sadece üç koşulun incelenmesinin yeterli olduğu bu teorem sayesinde birçok yeni lineer pozitif operatörün (Meyer-König ve Zeller operatörleri, Szasz operatörleri, Bleimann, Butzer and Hahn operatörleri gibi) yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bernstein operatörleri tanımlandıktan sonra bu operatörlerin çeşitli genelleşmeleri ele alınmıştır. Örneğin, birçok yazar analizden bilinen temel teoremler yardımıyla Bernstein operatörlerinin integral tipli genelleşmelerini tanımlamış ve bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini incelemiştir (Kantorovich 1930, Durrmeyer 1967, Derriennic 1981). Temelde Durrmeyer-tipli ve Kantorovich-tipli genelleşmeler olarak adlandırılan integral tipli bu genelleşmeler, integrallenebilir fonksiyonlar uzayında yaklaşım yapabilme ihtiyacından ortaya çıkmıştır.

Bernstein operatörlerinin diğer bir genelleşmesi de q-analiz teorisine dayanır. q-analiz teorisinin temelleri ilk defa 18. yüzyılda Euler tarafından atılmış ve 19. yüzyılda bu alanda önemli sonuçların elde edildiği çeşitli çalışmalar yapılmıştır. 20. yüzyılın ikinci yarısında q-analizin matematik ve fizik alanlarındaki çeşitli uygulamaları ortaya çıkmış ve bundan sonra bu teoriye olan ilgi hızla artmıştır. Son yıllarda matematik alanında, klasik analizden bilinen birçok tanım ve teoremin yanısıra bilinen bazı integral eşitsizlerinin de q-genelleşmeleri üzerinde çalışılmaktadır (Gauchman 2004, Brahim 2008, Fitouhi and Brahim 2008, Marinković vd. 2002, 2008).

Bernstein operatörlerinin q-genelleşmesi ilk defa Lupaş tarafından ele alınmıştır (Lupaş 1987). Daha sonra 1996 yılında Philips yeni bir genelleşme yaparak, literatürde "q-Bernstein operatörleri" olarak bilinen operatörleri tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. 10 yılı aşan süredir q-Bernstein operatörlerine olan ilgi devam etmekte ve birçok çalışma yapılmaktadır. Bunun yanısıra q-Bernstein operatörlerinin tanımlanması, diğer operatörlerin de q-genelleşmelerinin oluşturulmasında öncü olmuştur.

Yaklaşımlar teorisinde, klasik yakınsaklık kavramı ile ilgili çalışmalar sürerken, son yıllarda "istatistiksel yakınsaklık" kavramı da önemli bir konu olarak karşımıza çıkmıştır. İlk defa 1950 yılında Fast tarafından tanımlanan istatistiksel yakınsaklık kavramını Gadjiev ve Orhan (2002) lineer pozitif operatör dizileri için Korovkin tipli yaklaşım teoremi elde etmek için kullanmışlardır. Bu teoremle birlikte bilinen birçok operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızları incelenmiştir (Doğru vd. 2003, Doğru ve Duman 2006).

Bu doktora tezinde q-Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli bir genelleşmesi oluşturularak, operatörün klasik ve istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecektir. Tezin ikinci bölümünde konuyla ilgili bilinen temel kavramlar hatırlatılacaktır. Üçüncü bölümde q-Bernstein-Kantorovich operatörü oluşturularak, sadece klasik anlamda yaklaşım özellikleri incelenecektir. Dördüncü bölüm istatistiksel yaklaşım konusuna ayrılmıştır. Bu bölümde öncelikle, üçüncü bölümde oluşturulan operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenecek, daha sonra yaklaşım hızını belirlemede karşılaşılan zorluklardan bahsedilecek ve q-analiz teorisinin son yıllardaki çalışmalarından faydalanılarak yeni bir operatör tanımı verilecektir. Bu tanım sayesinde operatörün yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenecektir. Bölümün son kısmında benzer çalışmalar Trif (2000) tarafından tanımlanan q-Meyer-König ve Zeller (q-MKZ) operatörleri için verilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, doktora tezimizde kullanacağımız bazı kavramlar hatırlatılacak, temel teoremler ve tanımlar verilecektir.

2.1 Lineer Pozitif Operatörler

X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere X kümesinden Y kümesine olan bir L dönüşümüne operatör denir. Bu durumda L operatörü X uzayında tanımlı her f fonksiyonuna Y uzayında bir Lf fonksiyonu karşılık getirir. Bu Lf fonksiyonunun x noktasında aldığı değer $L(f;x)$ ile gösterilir.
Eğer her $f, g \in X$ ve her α, $\beta \in R$ için,

$$L(\alpha f + \beta g; x) = \alpha L(f;x) + \beta L(g;x) \tag{2.1}$$

koşulunu sağlıyor ise, $L(f;x)$ operatörüne lineerdir denir.

Eğer L operatörü pozitif bir f fonksiyonunu pozitif bir Lf fonksiyonuna dönüştürüyorsa; yani her $x \in X$ için

$$f(x) \geq 0 \;\text{ iken }\; L(f;x) \geq 0 \tag{2.2}$$

sağlanıyor ise, $L(f;x)$ operatörüne pozitiftir denir.

2.2 Lineer Pozitif Operatörlerin Yakınsaklığı

Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sürekli olan tüm reel değerli fonksiyonlardan oluşan kümeye $C[a,b]$ fonksiyon uzayı denir. $f \in C[a,b]$ olmak üzere, bu uzaydaki norm

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x\epsilon[a,b]} |f(x)| \tag{2.3}$$

ile gösterilir. Eğer her $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C[a,b]} = \lim_{n\to\infty} \max_{x\epsilon[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = 0 \tag{2.4}$$

koşulu sağlanıyorsa (f_n) fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna $C[a,b]$ normunda düzgün yakınsaktır denir ve

$$f_n \rightrightarrows f$$

ile gösterilir. Yaklaşımlar teorisinde düzgün yakınsaklık kavramı ilk defa Weierstrass tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 2.2.1. (Weierstrass, 1885) $f(x) \in C[a,b]$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - p_n(x)| < \varepsilon \tag{2.5}$$

olacak şekilde bir $p_n(x)$ polinomu vardır.

Yani özetle, kapalı aralıkta sürekli olan her fonksiyona bu aralıkta düzgün yakınsayan bir polinom vardır.

İlki 1885 yılında Weierstrass tarafından verilmiş olan bu temel teoremin birçok ispatı yapılmıştır. Bunlardan en önemlisi Bernstein tarafından 1912 yılında verilmiştir.

Teorem 2.2.2. (Bernstein, 1912) $f : [0,1] \to R$ olmak üzere, f fonksiyonunun Bernstein polinomu

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.6}$$

ile tanımlanır ve $f \in C[0,1]$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - B_n(f;x)| < \varepsilon \tag{2.7}$$

dir.

Bernstein bu teoremiyle $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsayan bir polinomun sadece varlığından söz etmemiş aynı zamanda bu polinomu açık bir şekilde ifade de etmiştir. Böylelikle, Weierstrass'ın yaklaşım teoremi daha basit ve anlaşılabilir bir şekilde ispatlanmıştır.

1953 yılında ise Korovkin, lineer pozitif operatörler yardımıyla f fonksiyonuna yaklaşma problemine dair çok önemli bir teorem vermiştir.

Teorem 2.2.3. (Korovkin, 1953) $f(x) \in C[a,b]$ ve tüm reel eksende $|f(x)| \leq M_f$ olsun. Eğer $L_n(f)$ lineer pozitif operatör dizisi, her $x \in [a,b]$ ve $e_i = t^i$ olmak üzere $i = 0, 1, 2$ için

$$L_n(e_i; x) \rightrightarrows x^i$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $[a,b]$ aralığında

$$L_n(f; x) \rightrightarrows f(x)$$

dir.

Korovkin teoremi lineer pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaklığını ispatlamada oldukça basit bir yöntem vermiştir. (2.6) ile verilen Bernstein polinomları da $[0,1]$ aralığında lineer pozitif olduğundan bu operatörlerin $[0,1]$ aralığında sürekli olan f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı Korovkin Teoremi yardımıyla kolaylıkla gösterilmiştir.

2.3 Lineer Pozitif Operatörlerin Yaklaşım Hızı

Yaklaşımlar teorisinde büyük önem taşıyan "düzgün yakınsama" kavramına değindikten sonra şimdi de "yakınsamanın hızı" kavramına geçelim.

Tanım 2.3.1. $(f_n(x))$ fonksiyon dizisi

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

şartını sağlıyorsa, bu durumda $(f_n(x))$'e *sonsuz küçülen dizi* denir.

Tanım 2.3.2. (α_n) ve (β_n), her $n \in N^+$ için $\alpha_n \leq \beta_n$ ve $n \to \infty$ için $\alpha_n \to 0$ ve $\beta_n \to 0$ koşullarını sağlayan fonksiyon dizileri olsunlar. Bu durumda (α_n) dizisinin sıfıra yaklaşma hızı (β_n) dizisininkinden daha hızlıdır denir.

Önceki bölümde lineer pozitif bir $(L_n(f;x))$ operatör dizisinin belli şartlar altında $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığını belirtmiştik. Böyle bir durumda $\|L_n(f) - f\|$ ifadesini sıfıra yakınsayan bir dizi olarak alabiliriz. Böylece $n \to \infty$ için $\beta_n \to 0$ olmak üzere, eğer

$$\|L_n f - f\| \leq C\beta_n$$

olacak şekilde bir (β_n) dizisi bulabilirsek, (β_n)'nin sıfıra yaklaşma hızı $L_n(f;x)$'in $f(x)$'e yaklaşma hızını değerlendirmemize yardımcı olur. Bu değerlendirme genellikle "süreklilik modülü" ve "Lipschitz sınıfından fonksiyonlar" yardımıyla yapılmaktadır.

2.3.1 Süreklilik modülü ve özellikleri

Tanım 2.3.4. $f(x)$ bir I aralığında tanımlanmış fonksiyon olmak üzere,

$$w(f;\delta) = \sup_{\substack{x_1, x_2 \in I \\ |x_1 - x_2| \leq \delta}} |f(x_1) - f(x_2)| \tag{2.8}$$

ifadesine, f fonksiyonunun I aralığında *süreklilik modülü* adı verilir.

$w(f;\delta)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. $w(f;\delta) \geq 0$

2. $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $w(f;\delta_1) \leq w(f;\delta_2)$

3. $w(f+g;\delta) \leq w(f;\delta) + w(g;\delta)$

4. $m \epsilon N$ için $w(f;m\delta) \leq m w(f;\delta)$

5. $\lambda \epsilon R^+$ için $w(f;\lambda\delta) \leq (\lambda+1) w(f;\delta)$

6. $|f(t) - f(x)| \leq w(f;|t-x|)$

7. $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) w(f;\delta)$

Eğer $f \in C[a,b]$ ise,

$$\lim_{\delta \to 0^+} w(f,\delta) = 0 \tag{2.9}$$

dir.

2.3.2 Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve özellikleri

Tanım 2.3.5. $f(x)$ bir I aralığında tanımlanmış fonksiyon olsun. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere, her $x_1, x_2 \in I$ için

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq M\,|x_1 - x_2|^{\alpha} \tag{2.10}$$

olacak şekilde bir $M > 0$ varsa, f'ye *Lipschitz sınıfındandır* denir ve $f \in Lip_M(\alpha)$ ile gösterilir.

Bir I aralığında

1. $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f fonksiyonu bu aralıkta süreklidir.

2. $\alpha > 1$ için $f \in Lip_M(\alpha)$ ise f sabit fonksiyondur.

2.4 Bernstein operatörleri ve genelleşmeleri

Yaklaşımlar teorisinde çok önemli bir yere sahip olan Bernstein operatörleriyle ilgili literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Tezimizde Bernstein operatörlerinin integral tipli ve q-tipli genelleşmelerinden yararlanacağımız için, şimdi bu kavramlara ve ilgili çalışmalara değinelim.

Belirtelim ki, Bernstein polinomları sürekli olmayan fonksiyonlara yaklaşım yapmak için uygun değildir. Örneğin, integrallanebilir fonksiyonlar uzayında yaklaşım elde edebilmek amacıyla Bernstein operatörlerinin modifiye edilmesine ihtiyaç duyulmuştur ve bu modifikasyon ilk defa Kantorovich (1930) tarafından yapılmıştır. Buna göre, $K_n : L^1([0,1]) \to C([0,1])$ olmak üzere Bernstein-Kantorovich operatörü, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x)\int_{k/n+1}^{(k+1)/(n+1)} f(u)du \tag{2.11}$$

ile tanımlanır. Burada

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

dır. Bu operatörün her $f \in C[0,1]$ olmak üzere, $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı Korovkin Teoremi yardımıyla gösterilmiştir (Altomare ve Campiti 1994).

Bernstein operatörlerinin diğer bir integral genelleşmesi de 1967 yılında Durrmeyer (1967) tarafından verilmiştir. $n \geq 1$ olmak üzere, $f \in L^1([0,1])$ ve $x \in [0,1]$ için Bernstein-Durrmeyer operatörü

$$D_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} (n+1) \left(\int_0^1 \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f(t) dt \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.12}$$

ile tanımlanır. $L^1([0,1])$ fonksiyon uzayından $C([0,1])$ fonksiyon uzayına olan D_n operatörü lineer pozitif bir operatördür ve Derriennic (1981) tarafından ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Bernstein operatörleriyle ilgili bir başka çalışmada q-tipli genelleşmeler üzerinedir. Bu genelleşmelere geçmeden önce q-analiz ile ilgili bazı hatırlatmalar yapalım.

2.4.1 q-Analiz

Tanım 2.4.1. q-lar pozitif reel sayılar olmak üzere, negatif olmayan bir k sayısının q-genelleşmesi

$$[k]_q = \begin{cases} \dfrac{1-q^k}{1-q} &, \quad q \neq 1 \\ k &, \quad q = 1 \end{cases}$$

q-binom katsayısı

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! \, [n-k]_q!} \qquad (n \geq k \geq 0)$$

ve q-faktöriyeli

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q\,[k-1]_q \dots [1]_q \ , & k = 1, 2, .. \\ 1 \ , & k = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Andrews 1999).

Tanım 2.4.2. Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun q-diferensiyeli

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \tag{2.13}$$

ile tanımlıdır. Özel olarak $d_q x = (q-1)x$ dir.

Klasik diferensiyel tanımından farklı olarak, q-diferensiyelde iki fonksiyonun çarpımının diferensiyeli simetri özelliği taşımaz. Gerçektende (2.13) ifadesinden

$$d_q(f(x)g(x)) = f(qx)d_q g(x) + g(x)d_q f(x) \tag{2.14}$$

olduğu görülür.

Tanım 2.4.3. Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun q-türevi

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x}$$

ile verilir.

Örneğin, $D_q x^n = [n]_q x^{n-1}$ olduğu kolaylıkla görülür. (2.14) ifadesinden $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının çarpımlarının q-türevi

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_q g(x) + g(x)D_q f(x) \tag{2.15}$$

olarak elde edilir.

Tanım 2.4.4. $(x-a)^n$ ifadesinin q-genelleşmesi

$$(x-a)_q^n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ (x-a)(x-qa)...(x-q^{n-1}a) & n \geq 1 \end{cases}$$

polinomu ile ifade edilir.

Tümevarım yöntemiyle, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$D_q\left((x-a)_q^n\right) = [n]_q (x-a)_q^{n-1} \tag{2.16}$$

olduğu gösterilmiştir (Kac ve Cheung 1953). $(a-x)_q^n$ ifadesinin q-türevini bulmak istediğimizde $(a-x)_q^n \neq (-1)^n (x-a)_q^n$ olması sebebiyle (2.16) eşitliğini kullanamıyoruz. Bunun yerine

$$\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)(a-q^2x)...(a-q^{n-1}x) \\
&= (a-x)q(q^{-1}a-x)q^2(q^{-2}a-x)...q^{n-1}(q^{-n+1}a-x) \\
&= (-1)^n q^{n(n-1)/2}(x-q^{-n+1}a)...(x-q^{-2}a)(x-q^{-1}a)(x-a) \\
&= (-1)^n q^{n(n-1)/2}(x-q^{-n+1}a)_q^n
\end{aligned}$$

ifadesinde, (2.15) ile verilen çarpım kuralını 2 kere uygulayarak,

$$D_q((a-x)_q^n) = -[n]_q (a-qx)_q^{n-1} \tag{2.17}$$

eşitliği elde edilir.

$f(x)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\lim_{q \to 1} D_q f(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

dir.

q-analizde türev kavramıyla ilgili temel tanımlardan sonra şimdi de integral kavramını ele alalım. Öncelikle bir fonksiyonun q-antitürevinden bahsedelim.

Tanım 2.4.5. $D_qF(x) = f(x)$ olacak şekilde bir $F(x)$ fonksiyonuna $f(x)$ fonksiyonunun q-antitürevi denir ve

$$F(x) = \int f(x)d_qx$$

ile gösterilir.

Tanım 2.4.6. $0 < a < b$ ve $0 < q < 1$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[0, b]$ aralığındaki q-integrali

$$I_q(f; 0, b) = \int_0^b f(x)d_qx = (1-q)b\sum_{j=0}^{\infty} f(q^jb)q^j \tag{2.18}$$

ile tanımlanır.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu, $[0, b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ise,

$$\lim_{q\to 1^-} \int_0^b f(x)d_qx = \int_0^b f(x)dx$$

dir.

$f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki q-integrali

$$\begin{aligned} I_q(f; a, b) = \int_a^b f(x)d_qx &= \int_0^b f(x)d_qx - \int_0^a f(x)d_qx \\ &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} \big(bf(q^jb) - af(q^ja)\big)\, q^j \end{aligned} \tag{2.19}$$

ile tanımlanır (Kac ve Cheung 1953).

Eğer (2.18) ve (2.19)'da verilen seriler yakınsaksa, bu taktirde, f fonksiyonu sırasıyla $[0, b]$ ve $[a, b]$ aralıklarında q-integrallenebilirdir denir.

Klasik analizde türev ve integral arasındaki bağıntıyı veren ifade "analizin temel teoremi" olarak adlandırılmaktadır. Aşağıda ispatsız olarak vereceğimiz teorem de q-türev ve q-integral arasındaki bağıntıyı ortaya koymakta ve benzer şekilde "q-analizin temel teoremi" olarak literatüde yer almaktadır.

Teorem 2.4.1. $0 \leq a < b$ olsun. $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$'da sürekli olmak üzere, bir $f(x)$ fonksiyonunun q-antitürevi ise,

$$\int_a^b f(x)d_qx = F(b) - F(a)$$

dır (Kac ve Cheung 1953).

Yaklaşımlar teorisinde $q-$analiz kavramının kullanılması ilk defa 1987 yılında Lupaş tarafından olmuştur. Lupaş (1987), Bernstein operatörlerinin $q-$genelleşmesini tanımlamış ve daha sonra Ostrovska (2006) ise, tanımlanan bu operatörlerin düzgün yakınsaklığını incelemiştir. 1996 yılında ise Philips, Bernstein operatörlerinin, daha sonra da üzerinde sıklıkla çalışılan yeni bir genelleşmesini, $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$B_n(f;q;x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{[k]}{[n]}\right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \tag{2.20}$$

şeklinde tanımlamıştır. $q-$Bernstein polinomu olarak adlandırılan bu operatör için ilk üç test fonksiyonu

$$\begin{aligned} B_n(e_0;q;x) &= 1 \\ B_n(e_1;q;x) &= x \\ B_n(e_2;q;x) &= x^2 + \frac{x(1-x)}{[n]} \end{aligned} \tag{2.21}$$

olarak elde edilmiş ve aşağıdaki teoremle operatörün düzgün yakınsaklığı verilmiştir.

Teorem 2.4.2. (q_n) dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere, $n \to \infty$ için $q_n \to 1$ koşulunu sağlasın. Bu taktirde her $f \in C[0,1]$ için

$$B_n(f;q_n;x) \rightrightarrows f(x) \qquad (x \in [0,1];\ n \to \infty)$$

dir.

q-Bernstein polinomları 1997 yılından itibaren birçok yazar tarafından ele alınmış ve bu polinomlarla ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır (Oruç 1999, Il'inskii ve Ostrovska

2002, Ostrovska 2003, Philips 2003, Videnskii 2005). q-Bernstein polinomlarının ardından diğer birçok operatörün de q-tipli genelleşmeleri incelenmiş ve yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

Son yıllarda ise, integral tipli operatörlerin q-tipli genelleşmeleri üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Örneğin, Derriennic (2005), (2.12) ile verilen Bernstein-Durrmeyer operatörlerinin q-tipli bir genelleşmesini tanımlamış ve operatörün yaklaşım özelliklerini ayrıntılı bir biçimde incelemiştir. Daha sonra Gupta ve Heping 2008 yılında farklı bir q-genelleşme üzerinde çalışmışlar ve q-Bernstein-Durrmeyer operatörlerini, $f \in C[0,1], x \in [0,1]$ olmak üzere

$$L_{n,q}(f;x) = [n+1] \sum_{k=1}^{n} q^{(1-k)} p_{nk}(q;x) \int_0^1 f(t) p_{n,k-1}(q;qt) d_q t + f(0) p_{n,0}(q;x) \quad (2.22)$$

olarak tanımlamışlardır. Gupta ve Finta (2009) ise (2.22) operatörü için bazı lokal ve global yaklaşım teoremleri vermişlerdir.

3. OPERATÖRLERİN OLUŞTURULMASI

Bu bölümde amacımız (2.20) ile verilen q-Bernstein operatörünün Kantorovich tipli bir genelleşmesini oluşturarak yaklaşım özelliklerini incelemektir.

3.1 q-Bernstein-Kantorovich Operatörü

İlk defa Philips tarafından tanımlanan q-Bernstein operatörünün Kantorovich tipli genelleşmesini, f, $[0,1]$ aralığında q-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1)$ için

$$\tilde{B_n}(f;q;x) = [n+1] \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} f(t) d_q t \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) \tag{3.1}$$

ile tanımlayalım (Dalmanoğlu 2007, Radu 2008).

$\tilde{B_n}(f;q,x)$ operatörünün yaklaşım özelliklerini incelemeden önce aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 3.1.1. $\tilde{B_n}(f;q;x)$ operatörü için

$$\tilde{B_n}(e_0;q;x) = 1$$

dir.

İspat. $\tilde{B_n}(f;q;x)$ operatöründe f yerine $e_0(x)$ alınarak elde edilen

$$\tilde{B_n}(e_0;q;x) = [n+1] \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q t \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) \tag{3.2}$$

ifadesinde

$$[k+1] - [k] = q^k,$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}, \qquad 0 < q < 1$$

eşitliklerinden ve q-integralin tanımınından yararlanarak,

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q t &= \int_0^{[k+1]/[n+1]} d_q t - \int_0^{[k]/[n+1]} d_q t \\ &= (1-q)\frac{[k+1]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^j - (1-q)\frac{[k]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^j \\ &= \frac{1-q}{[n+1]}([k+1]-[k])\sum_{j=0}^{\infty} q^j \\ &= \frac{q^k}{[n+1]} \end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. (3.3) eşitliğinin (3.2) de kullanılmasıyla ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.2. $\tilde{B_n}(f;q;x)$ operatörü için

$$\tilde{B_n}(e_1;q;x) = \frac{[n]}{[n+1]}x + \frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}$$

dir.

İspat. $\tilde{B_n}(f;q;x)$ operatöründe f yerine $e_1(x)$ alarak

$$\tilde{B_n}(e_1;q;x) = [n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k}x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \tag{3.4}$$

yazalım. Şimdi (3.4) deki q-integrali hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t &= \int_0^{[k+1]/[n+1]} t d_q t - \int_0^{[k]/[n+1]} t d_q t \\ &= (1-q)\frac{[k+1]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}\frac{[k+1]}{[n+1]} - (1-q)\frac{[k]}{[n+1]}\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j}\frac{[k]}{[n+1]} \\ &= (1-q)(\frac{[k+1]^2}{[n+1]^2} - \frac{[k]^2}{[n+1]^2})\sum_{j=0}^{\infty} q^{2j} \end{aligned} \tag{3.5}$$

dir. $0 < q < 1$ ve $[k+1] = 1 + q[k]$ olduğundan,

$$\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q t = \frac{q^k}{[n+1]^2}([k] + \frac{1}{[2]})$$

bulunur. Bu ifadeyi (3.4) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
\tilde{B_n}(e_1;q;x) &= [n+1]\sum_{k=0}^{n}\frac{q^k}{[n+1]^2}\left([k]+\frac{1}{[2]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \\
&= \frac{[n]}{[n+1]}\sum_{k=0}^{n}\frac{[k]}{[n]}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \\
&\quad +\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \\
&= \frac{[n]}{[n+1]}B_n(e_1;q;x)+\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}B_n(e_0;q;x)
\end{aligned}$$

ve (2.21)'den

$$\tilde{B_n}(e_1;q;x) = \frac{[n]}{[n+1]}x+\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}$$

elde edilir.

Lemma 3.1.3. $\tilde{B_n}(f;q;x)$ operatörü için

$$\tilde{B_n}(e_2;q;x) = \frac{[n][n-1]}{[n+1]^2}qx^2+\frac{[2](1+[2])}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]^2}x+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}$$

dir.

İspat. $\tilde{B_n}(f;q;x)$ operatöründe f yerine $e_2(x)$ alarak elde ettiğimiz

$$\tilde{B_n}(e_2;q;x) = [n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

eşitliğindeki q-integrali hesaplamak için önceki lemmalara benzer işlemler yapılırsa

$$\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q t = \frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^3}q^k([k+1]^2+[k][k+1]+[k]^2)$$

elde edilir. Burada $[k+1] = 1+q[k]$ eşitliğini kullanıp, elde ettiğimiz ifadeyi $\tilde{B_n}(e_2;q;x)$ de yerine koyarsak,

$$\tilde{B_n}(e_2;q;x) = \frac{1}{[n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\left\{[k]^2+\frac{(2q+1)}{[3]}[k]+\frac{1}{[3]}\right\}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)$$

elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned}\tilde{B_n}(t^2;q;x) &= \frac{[n]^2}{[n+1]^2}B_n(e_2;q;x)+\frac{(2q+1)}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]^2}B_n(e_1;q;x)\\ &\quad +\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}B_n(e_0;q;x)\end{aligned}$$

yazabiliriz. Son olarak (2.21) ifadesinde verilen eşitlikleri kullanarak

$$\tilde{B_n}(t^2;q;x)=q\frac{[n][n-1]}{[n+1]^2}x^2+\frac{[2](1+[2])}{[3]}\frac{[n]}{[n+1]^2}x+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}$$

sonucunu buluruz.

Son lemmayı vermeden önce aşağıdaki hatırlatmayı yapalım.

Not: q- Bernstein-Kantorovich operatörünün düzgün yakınsaklığını Korovkin-tipli teorem yardımıyla gösterebilmemiz için operatörün lineer ve pozitif olduğunu garantilememiz gerekmektedir. q-integral lineer olduğundan (3.1) operatörü lineerdir. $0<q<1$ olduğundan (3.1) operatörünün pozitifliği q-integralin pozitifliğine bağlı olacaktır. Fakat, $[a,b]$ aralığındaki $q-$integral iki seri farkı içerdiğinden, $f\geq 0$ olması $\int_a^b f(t)d_qt\geq 0$ olmasını gerektirmez. Bu durumda ise oluşturduğumuz operatör pozitiftir diyemeyiz. Bununla ilgili olarak aşağıdaki örnekleri inceleyelim.

Örnek 3.1.1. $f(x)=\ln(x-3)$ fonksiyonunu ele alalım. $[4,5]$ aralığında $f(x)\geq 0$'dır fakat fonksiyon $[0,3]$ aralığında tanımlı olmadığından $\int_4^5 \ln(x-3)d_qt$ integrali hesaplanamamaktadır.

Örnek 3.1.2. $f(x)=25-x^2$ fonksiyonunun $[3,4]$ aralığındaki q-integralini inceleyelim. Bunun için

$$\begin{aligned}\int_3^4(25-x^2)d_qx &= \int_0^4(25-x^2)d_qx-\int_0^3(25-x^2)d_qx\\ &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty}\left[4(25-16q^{2j})-3(25-9q^{2j})\right]q^j\end{aligned}$$

ifadesinde gerekli işlemler yapılırsa,

$$\int_3^4 (25 - x^2) d_q x = 25 - \frac{37}{1 + q + q^2}$$

elde edilir. $[3,4]$ aralığında $f(x) = (25 - x^2) \geq 0$ olmasına rağmen $0 < q < 0.3544$ için $\int_3^4 (25 - x^2) d_q t < 0$ ve $0.3544 < q < 1$ için $\int_3^4 (25 - x^2) d_q t > 0$ elde edilir.

Lemma 3.1.4. $0 < a < b$ ve $0 < q < 1$ olsun. f fonksiyonu $[0, b]$ aralığında tanımlanmış monoton artan bir fonksiyon ise $I_q(f; a; b) = \int_a^b f(t) d_q t$ ile verilen $q-$ integral pozitif bir operatördür.

İspat. f monoton artan bir fonksiyon olsun. Kabul edelim ki $f \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) d_q t &= \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t \\ &= (1 - q) \sum_{j=0}^{\infty} (b f(q^j b) - a f(q^j a)) q^j \end{aligned}$$

ifadesinde f fonksiyonu pozitif olduğundan, $\forall x \in [0, b]$ için $f(x) \geq 0$'dır. f fonksiyonu monoton artan olduğundan $b > a$ olması her $j = 0, 1, 2...$ için $f(q^j b) - f(q^j a) > 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla parantez içindeki ifade pozitif olur ve $0 < q < 1$ olduğundan $\int_a^b f(t) d_q t \geq 0$'dır ve bu da ispatı tamamlar.

3.2 q-Bernstein-Kantorovich Operatörünün Yaklaşım Özellikleri

Bu kesimde $\tilde{B_n}(f; q; x)$ operatörünün düzgün yakınsaklığını inceleyeceğiz.

Teorem 3.2.1. $q = (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere

$$\lim_{n \to \infty} q_n = 1 \quad \text{ve} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{[n]} = 0 \tag{3.6}$$

şartlarını sağlasın. Bu taktirde, f, $[0, 1]$ aralığında sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere, bu aralık üzerinde

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{B}_n(f;q_n;.) - f(.)\|_{C[0,1]} = 0$$

dir.

İspat. Lemma 3.1.4. göstermektedir ki f monoton artan bir fonksiyon ise $\tilde{B}_n(f;q;x)$ operatörü lineer pozitif bir operatördür. Lemma 3.1.2 ve 3.1.3'te elde ettiğimiz momentlerde q yerine (3.6) koşullarını sağlayan bir (q_n) dizisi seçip, $[n]_{q_n} = \frac{[n+1]_{q_n}-1}{q_n}$ eşitliğini kullanırsak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{[n]_{q_n}[n-1]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla buradan,

$$\begin{aligned}
&\tilde{B}_n(e_0;q_n,x) \rightrightarrows 1 \quad (n\to\infty)\\
&\tilde{B}_n(e_1;q_n,x) \rightrightarrows x \quad (n\to\infty)\\
&\tilde{B}_n(e_2;q_n,x) \rightrightarrows x^2 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece Korovkin Teoreminden ispat tamamlanır.

Sonuç 3.2.1. Lemma 3.1.1, 3.1.2 ve 3.1.3'te özel olarak $q = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_n(e_0;x) &= 1\\
\tilde{B}_n(e_1;x) &= \frac{n}{n+1}x + \frac{1}{2(n+1)}\\
\tilde{B}_n(e_2;x) &= \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}x^2 + \frac{2n}{(n+1)^2}x + \frac{1}{3(n+1)^2}
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ifadeler klasik Bernstein-Kantorovich operatörünün momentleridir (Altomare ve Campiti 1994).

f, $[0,1]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olmak üzere, (2.6) ile verilen klasik

Bernstein operatörünün türevi ve (2.11) ile verilen Kantorovich operatörü arasında

$$(B_{n+1}(f;x))' = K_n(f';x)$$

şeklinde bir bağıntı vardır (Lorentz 1953). Burada B_{n+1}, $(n+1)$inci Bernstein operatörüdür. Buradan yola çıkarak, $B_n(f;q;x)$ q-Bernstein operatörü ve $\tilde{B_n}(f;q,x)$ q- Bernstein-Kantorovich operatörü arasında da benzer bir bağıntı olduğu aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.2.2. (Radu 2008) F, $x=0$'da sürekli olmak üzere, f fonksiyonunun $q-$antitürevi olsun. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ ve $0<q<1$ olmak üzere,

$$D_q B_{n+1}(F;q;x) = \tilde{B_n}(f;q,qx)$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat. (2.17) eşitliğinden,

$$D_q\left(\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right) = -[n-k]\prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^{s+1}x)$$

olduğu görülür. q-analiz için verilen çarpım kuralını kullanarak,

$$\begin{aligned}
D_q B_n(F;q;x) &= \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} D_q\left(x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} F\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\Bigg([k]x^{k-1}\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^{s+1}x) \\
&\quad -[n-k]x^k \prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^{s+1}x)\Bigg) \\
&= \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\frac{[n]!}{[n-k]![k-1]!}x^{k-1}\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^{s+1}x) \\
&\quad -\sum_{k=0}^{n-1} F\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\frac{[n]!}{[n-k-1]![k]!}x^k \prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^{s+1}x) \\
&= [n]\sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(\frac{[k+1]}{[n]}\right) - F\left(\frac{[k]}{[n]}\right)\right)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-2}(1-q^{s+1}x)
\end{aligned}$$

elde edilir. n yerine $n+1$ yazıp, Teorem 2.4.1 ile verilen q-analizin temel teoremini uygularsak,

$$
\begin{aligned}
D_q B_{n+1}(F;q;x) &= [n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(F\left(\frac{[k+1]}{[n+1]}\right)-F\left(\frac{[k]}{[n+1]}\right)\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s(qx)) \\
&= [n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} f(t)d_q t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s(qx)) \\
&= [n+1]\tilde{B}_n(f;q,qx)
\end{aligned}
$$

bulunur ki bu da istenen sonuçtur.

4. q-BERNSTEIN-KANTOROVICH OPERATÖRÜNÜN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde öncelikle istatistiksel yakınsaklık kavramı hatırlatılıp, (3.1) ile tanımlanan q-Bernstein-Kantorovich operatörünün istatistiksel yakınsaklığı incelenecektir. Daha sonra Marinkovic vd. (2008) tarafından tanımlanan "Riemann-tipli q-integral" kavramından bahsedilecek ve bu yeni q-integral tanımı kullanılarak (3.1) operatörünün "İkinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörü" olarak adlandıracağımız farklı bir formu tanımlanacaktır. Bu operatörün istatistiksel yaklaşım özellikleri incelenip, istatistiksel yaklaşım hızı süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla değerlendirilecektir. Son olarak benzer incelemeler q-MKZ operatörünün Kantorovich tipli genelleşmesi için yapılacaktır.

4.1 İstatistiksel Yakınsaklık

K kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir altkümesi olmak üzere, $K_n = \{k \leq n\colon k \in K\}$ olsun. Öncelikle "yoğunluk" kavramını ele alalım.

Tanım 4.1.1. Bir $K \subset \mathbb{N}$ altkümesi için

$$\lim_n \frac{1}{n}|K_n|$$

limiti mevcut ise, bu limit değerine K kümesinin yoğunluğu denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir (Niven vd. 1991). Burada $|K|$, K kümesinin eleman sayısını gösterir.

Örnek olarak $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta\{n^2 : n \in \mathbb{N}\} = 0$, $\delta\{2n : n \in \mathbb{N}\} = \delta\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\} = \frac{1}{2}$ olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 4.1.2. $x := (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta\{k : |x_k - L| \geq \varepsilon\} = 0$$

olacak şekilde bir L sayısı varsa, bu durumda x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim_k x_k = L$ ile gösterilir (Fast 1951).

Tanımdan da görülebileceği üzere, istatistiksel yakınsaklıkta, bir L sayısının ε komşuluğu dışında dizinin sonsuz çoklukta elemanı bulunmasına karşın, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olabilir. Bu ise bize istatistiksel yakınsaklığın klasik yakınsaklıktan daha genel bir kavram olduğunu gösterir. Dolayısıyla yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır, fakat bunun tersi doğru değildir. Bunun için aşağıdaki örneği verebiliriz.

Örnek 4.1.1. $x := (x_k)$ dizisinin genel terimi

$$x_k = \begin{cases} L_1 & k = m^2 \text{ ise} \\ L_2 & k \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\delta\{k : |x_k - L_2| \geq \varepsilon\} = 0$ olduğu için (x_k) dizisi istatistiksel olarak L_2'ye yakınsar, yani $st - \lim\limits_k x_k = L_2$'dir, fakat $L_1 \neq L_2$ için x dizisi klasik anlamda yakınsak değildir.

Gadjiev ve Orhan (2002), lineer pozitif operatörler için istatistiksel yaklaşım veren Korovkin tipli bir teoremi aşağıdaki şekilde vermişlerdir.

Teorem 4.1.1. (Gadjiev and Orhan 2002) Eğer $A_n : C[a,b] \longrightarrow B[a,b]$ lineer pozitif operatörler dizisi $e_\nu(t) = t^\nu$, $\nu = 0, 1, 2$ için

$$st - \lim_n \|A_n(e_\nu; .) - e_\nu\|_{C[a,b]} = 0$$

koşullarını gerçekliyorsa, her $f \in C[a,b]$ için

$$st - \lim_n \|A_n(f; .) - f\|_{C[a,b]} = 0$$

sağlanır. Burada $B[a,b]$, $[a,b]$ aralığındaki sınırlı fonksiyonların uzayını göstermektedir.

4.2 q-Bernstein-Kantorovich Operatörünün İstatistiksel Yakınsaklığı

Bu kısımda amacımız (3.1) ile verilen operatörün istatistiksel yakınsaklığını incelemektir. Bunun için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.2.1. $q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere,

$$st - \lim_n q_n = 1 \quad \text{ve} \quad st - \lim_n \frac{1}{[n]} = 0 \tag{4.1}$$

şartlarını sağlasın. Bu taktirde, f, [0,1] aralığında sürekli ve monoton artan bir fonksiyon olmak üzere, (3.1) operatörü için

$$st - \lim_n \|\tilde{B_n}(f; q_n, .) - f(.)\|_{C[0,1]} = 0$$

sağlanır.

İspat. $\tilde{B_n}(f; q; x)$ lineer-pozitif bir operatör olduğundan, eğer, $\nu = 0, 1, 2$ için

$$st - \lim_n \|\tilde{B_n}(e_\nu; q_n; .) - e_\nu\|_{C[0,1]} = 0 \tag{4.2}$$

olduğunu gösterebilirsek, Teorem 4.1.1'den ispat tamamlanır.

$\nu = 0$ için Lemma 3.1.1'den

$$st - \lim_n \|\tilde{B_n}(e_0; q_n; .) - e_0\|_{C[0,1]} = 0$$

olduğu açıktır.

$\nu = 1$ için Lemma 3.1.2'den

$$\tilde{B_n}(e_1; q_n, x) - e_1(x) = \left(\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}} - 1 \right) x + \frac{1}{[2]_{q_n}} \frac{1}{[n+1]_{q_n}}$$

yazarız. $\dfrac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}} = \dfrac{1}{q_n} - \dfrac{1}{q_n[n+1]_{q_n}}$ eşitliğini kullanıp her iki tarafın $x \in [0, 1]$ de maximumunu alırsak,

$$\begin{aligned} \|\tilde{B_n}(e_1; q_n; .) - e_1\|_{C[0,1]} &\leq \left| \left(\frac{1}{q_n} - \frac{1}{q_n[n+1]_{q_n}} \right) - 1 \right| + \frac{1}{[2]_{q_n}} \frac{1}{[n+1]_{q_n}} \\ &\leq \left(\frac{1}{q_n} - 1 \right) + \left(\frac{1}{q_n} + \frac{1}{[2]_{q_n}} \right) \frac{1}{[n+1]} \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde ederiz. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$T := \{k : \|\tilde{B_k}(e_1; q_k; .) - e_1\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\},$$

$$T_1 := \{k : \left(\frac{1}{q_k} - 1\right) \geq \frac{\varepsilon}{2}\}$$

ve

$$T_2 := \left\{k : \left(\frac{1}{q_k} + \frac{1}{[2]_{q_k}}\right) \frac{1}{[k+1]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

(4.3) eşitsizliğinden $T \subseteq T_1 \cup T_2$ olduğu görülür. Böylece

$$\begin{aligned} &\delta\{k \leq n : \|\tilde{B_n}(e_1; q_k; .) - e_1\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\} \leq \\ &\quad \delta\{k \leq n : \frac{1}{q_k} - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2}\} + \delta\{k \leq n : \left(\frac{1}{q_k} + \frac{1}{[2]_{q_k}}\right) \frac{1}{[k+1]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \end{aligned} \tag{4.4}$$

yazabiliriz. (4.1) koşullarından

$$st - \lim_n \left(\frac{1}{q_n} - 1\right) = 0 \quad \text{ve} \quad st - \lim_n \left(\frac{1}{q_n} + \frac{1}{[2]_{q_n}}\right) \frac{1}{[n+1]_{q_n}} = 0$$

olduğu görülür. Böylece yoğunluk tanımından,

$$\delta\{k \leq n : \frac{1}{q_k} - 1 \geq \frac{\varepsilon}{2}\} = 0$$

ve

$$\delta\left\{k \leq n : \lim_k \left(\frac{1}{q_k} + \frac{1}{[2]_{q_k}}\right) \frac{1}{[k+1]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} = 0$$

dir ve bu da bize (4.4) den

$$st - \lim_n \|\tilde{B_n}(e_1; q_n; .) - e_1\|_{C[0,1]} = 0$$

olduğunu verir.

Son olarak $\nu = 2$ için, Lemma 3.1.3'ten

$$\begin{aligned}\tilde{B_n}(e_2; q_n, x) - e_2(x) &= \left(q_n \frac{[n]_{q_n}[n-1]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} - 1 \right) x^2 + \frac{[2]_{q_n}(1+[2]_{q_n})}{[3]_{q_n}} \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} x \\ &\quad + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}\end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi $q-$analiz yardımıyla elde edebildiğimiz

$$q_n \frac{[n]_{q_n}[n-1]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} = \frac{1}{q_n^2} \left(1 - \frac{(1+[2]_{q_n})}{[n+1]_{q_n}} + \frac{[2]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} \right)$$

eşitliğini yukarıdaki denklemde yerine koyup, her iki tarafın $x \in [0,1]$'de maksimumunu alalım. Böylelikle,

$$\begin{aligned}\|\tilde{B_n}(e_2; q_n; .) - e_2\|_{C[0,1]} \le & \left| \frac{1}{q_n^2} \left(1 - \frac{(1+[2]_{q_n})}{[n+1]_{q_n}} + \frac{[2]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} \right) - 1 \right| \\ & + \frac{[2]_{q_n}(1+[2]_{q_n})}{[3]_{q_n}} \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}\end{aligned}$$

ve daha açık olarak,

$$\begin{aligned}\|\tilde{B_n}(e_2; q_n; .) - e_2\|_{C[0,1]} \le & \left(\frac{1}{q_n^2} - 1 \right) + \left(\frac{(1+[2]_{q_n})}{q_n^2} + \frac{[2]_{q_n}(1+[2]_{q_n})}{[3]_{q_n}} \right) \frac{1}{[n+1]_{q_n}} \\ & + \left(\frac{1}{[3]_{q_n}} + \frac{[2]_{q_n}}{q_n^2} \right) \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}\end{aligned} \tag{4.5}$$

elde ederiz. Burada eğer,

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \left(\frac{1}{q_n^2} - 1 \right) \\ \beta_n &= \left(\frac{(1+[2]_{q_n})}{q_n^2} + \frac{[2]_{q_n}(1+[2]_{q_n})}{[3]_{q_n}} \right) \frac{1}{[n+1]_{q_n}} \\ \gamma_n &= \left(\frac{1}{[3]_{q_n}} + \frac{[2]_{q_n}}{q_n^2} \right) \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}\end{aligned}$$

seçilirse, (4.1) koşullarından

$$st - \lim_n \alpha_n = st - \lim_n \beta_n = st - \lim_n \gamma_n = 0 \tag{4.6}$$

olduğu kolaylıkla görülür. Yine bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
U &:= \{k : \|\tilde{B_k}(e_2; q_k; .) - e_2\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\}, \\
U_1 &:= \{k : \alpha_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}, \\
U_2 &:= \{k : \beta_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}, \\
U_3 &:= \{k : \gamma_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}
\end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. (4.5)'den dolayı $U \subseteq U_1 \cup U_2 \cup U_3$ olduğu açıktır. Dolayısıyla buradan,

$$\begin{aligned}
\delta\{k \leq n : \|\tilde{B_k}(e_2; q_k; .) - e_2\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\} \leq \delta\{k \leq n : \alpha_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\} + \delta\{k \leq n : \beta_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\} \\
+ \delta\{k \leq n : \gamma_k \geq \frac{\varepsilon}{3}\}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. (4.6) dan yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının sıfır olduğu görülür. O halde

$$st - \lim_n \|\tilde{B_n}(e_2; q_n; .) - e_2\|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.1.1'in şartları sağlanmış ve dolayısıyla da teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Korovkin tipli teoremlerin lineer pozitif operatörler için geçerli olduğunu biliyoruz. Daha önceki bölümde de belirttiğimiz gibi, tanımlamış olduğumuz $\tilde{B_n}(f; q; x)$ operatörünün pozitif olması için f fonksiyonunu özel olarak $[0, 1]$ aralığında monoton artan seçmiştik. Bu sayede operatörün klasik ve istatistiksel olarak f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını Korovkin tipli teoremler yardımıyla gösterebildik.

Yaklaşımlar teorisinde operatörlerin düzgün yakınsaklığının yanı sıra bu yakınsamanın hızının değerlendirilmesi de oldukça önemli bir konudur. Bu değerlendirme genellikle süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yapılmakta ve klasik analizden bildiğimiz Hölder eşitsizliği ve onun bir özel hali olan Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanarak operatörün yaklaşım hızı hesaplanabilmektedir. Belirtelim ki $\tilde{B_n}(f; q; x)$ operatörü q-integral içerdiğinden, yaklaşım hızını değerlendirirken q-integral ile ilgili bazı eşitsizliklerine ihtiyaç duyacağız.

Klasik analizde, integral eşitsizlikler çok uzun yıllardır ayrıntılı bir şekilde çalışılmış ve aynı ölçüde geliştirilmiştir. Bu çalışmalar hem teorik Matematikte hem de Matematik ve Fizik alanlarının çeşitli uygulamalarında karşımıza çıkmaktadır. q-analizde ise, q-integral tanımından kaynaklanan bazı zorluklar sebebiyle, q-integral içeren eşitsizliklere olan ilgi ancak son yıllarda ortaya çıkabilmiştir. q-integraldeki bu zorluklar esasen $[a,b]$ $(0 < a < b)$ aralığındaki q-integralin, $[0,b]$ ve $[0,a]$ aralığındaki iki q-integral farkı olarak tanımlanmasından ortaya çıkmaktadır. Dolayısıyla tanımlanan q-integral özellikleri, sadece integral aralığı içindeki noktaları değil, integral aralığı dışındaki noktaları da içermelidir. İşte bu sebepten dolayı da klasik integral için geçerli olan bazı eşitsizlikler, $[a,b]$ aralığında tanımlanan q-integral için geçerli olmayabilir. q-integraldeki bu zorlukları giderebilmek amacıyla Gauchman (2004) ve Marinković vd. (2008) iki ayrı q-integral tanımı vermişlerdir. Bunlardan birincisi, $[a,b]$ aralığındaki q-integralin sonlu toplamlara kısıtlanması ile verilen "kısıtlanmış q-integral", ikincisi ise $[a,b]$ aralığındaki $q-$integralin tek bir seri olarak ifade edilmesiyle verilen "Riemann-tipli q-integral"dir. Şimdi bu iki kavram üzerinde duralım.

4.3 Kısıtlanmış q-integral ve Riemann tipli q-integral Tanımları ve Özellikleri

Tanım 4.3.1. (Gauchmann 2004) a, b, ve q reel sayılar olmak üzere $0 < a < b$ ve $q \in (0,1)$ olsun. Kısıtlanmış q-integral, klasik q-integral tanımda $a = bq^n$ alınarak

$$\begin{aligned} G_q(f;a,b) &= \int_a^b f(x)d_q^G x = \int_{bq^n}^b f(x)d_q x \\ &= (1-q)b\sum_{j=0}^{n-1} f(q^j b)q^j \qquad (4.7) \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Doğal olarak bu şekilde tanımlanan integral b, q ve n sayılarına bağlı olacaktır.

Öncelikle belirtelim ki (4.7) integrali için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. $[a,b]$ aralığında $f(x) \geq g(x)$ ise $\int_a^b f(x) d_q^G x \geq \int_a^b g(x) d_q^G x$ 'dir.

2. $a < c_k < b$ olmak üzere $\int_a^b f(x) d_q^G x = \int_a^{c_k} f(x) d_q^G x + \int_{c_k}^b f(x) d_q^G x$ 'dir.

$f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Riemann integrallenebilir ise,

$$\lim_{q \to 1} \int_a^b f(x) d_q^G x = \int_a^b f(x) d_q x$$

dir. Gauchmann (2004), kısıtlanmış q-integral tanımını yaparak hem klasik hem de güncel olan bazı eşitsizliklerin q-genelleşmelerini elde edebilmiştir.

Tanım 4.3.2. (Marinković 2008) a, b, ve q reel sayılar olmak üzere $0 < a < b$ ve $q \in (0,1)$ olsun. Riemann-tipli $q-$integral

$$R_q(f; a, b) = \int_a^b f(x) d_q^R x = (1-q)(b-a) \sum_{j=0}^{\infty} f(a + (b-a)q^j) q^j \tag{4.8}$$

ile tanımlanır. Klasik $q-$integral tanımından farklı olarak bu tanım tek bir seri ile gösterildiğinden sadece integral aralığının içindeki noktaları içerir.

(4.8) de verilen seri yakınsaksa, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında "qR-integrallenebilirdir" denir.

Şimdi amacımız, daha önce oluşturduğumuz $\tilde{B}_n(f; q; x)$ operatöründe klasik q-integral yerine Riemann-tipli q-integral kullanıp, operatörü yeniden tanımlamaktır. Bu sayede yeni tanımlayacağımız operatörün yaklaşım hızını elde edebileceğiz. Öncelikle Riemann-tipli $q-$integral ile ilgili olarak aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 4.3.1. $R_q(f; a, b)$ operatörü lineer pozitif bir operatördür.

İspat.

$$\begin{aligned}
R_q\left((\alpha f+\beta g)(t);a;b\right) &= \int_a^b (\alpha f+\beta g)(t)d_q^R t \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left[(\alpha f+\beta g)\left(a+(b-a)q^j\right)q^j\right] \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty}\left[\alpha f(a+(b-a)q^j)q^j+\beta g(a+(b-a)q^j)q^j\right] \\
&= \alpha(1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} f(a+(b-a)q^j)q^j \\
&\quad +\beta(1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} g(a+(b-a)q^j)q^j \\
&= \alpha R_q\left(f(t);a;b\right)+\beta R_q\left(g(t);a;b\right)
\end{aligned}$$

olduğundan $R_q(f;a,b)$ operatörü lineerdir. $f\geq 0$ ise (4.8) den $R_q(f;a,b)$ 'nin pozitif olduğu açıktır.

Böylece $\forall x\in[a,b]$ için

$$f(x)\geq g(x) \text{ ise } R_q\left(f;a;b\right)\geq R_q\left(g;a;b\right) \tag{4.9}$$

yazılabilir.

Lemma 4.3.2. ($q-$Hölder Eşitsizliği) $0<q<1$, $0<a<b$ ve α, β pozitif reel sayılar olmak üzere $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$ olsun. Bu durumda, $[a,b]$ aralığında tanımlı f ve g fonksiyonları için

$$R_q(|fg|;a;b)\leq\left(R_q(|f|^{\alpha};a;b)\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(R_q(|g|^{\beta};a;b)\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$\begin{aligned}
R_q(|fg|;a;b) &= \int_a^b |f(t)g(t)|d_q^R t \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} \left| f(a+(b-a)q^j)\, g(a+(b-a)q^j) \right| q^j \\
&= (1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} \left| \left(f(a+(b-a)q^j)q^{j/\alpha} \right) \left(g(a+(b-a)q^j)q^{j/\beta} \right) \right|
\end{aligned}$$

Toplam için olan Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}
R_q(|fg|;a;b) &\le (1-q)(b-a)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |f(a+(b-a)q^j)|^{\alpha} q^j \right)^{1/\alpha} \\
&\qquad \left(\sum_{j=0}^{\infty} |g(a+(b-a)q^j)|^{\beta} q^j \right)^{1/\beta} \\
&= \left((1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} |f(a+(b-a)q^j)|^{\alpha} q^j \right)^{1/\alpha} \\
&\qquad \left((1-q)(b-a)\sum_{j=0}^{\infty} |g(a+(b-a)q^j)|^{\beta} q^j \right)^{1/\beta} \\
&= \left(\int_a^b |f(t)|^{\alpha} d_q^R t \right)^{1/\alpha} \left(\int_a^b |g(t)|^{\beta} d_q^R t \right)^{1/\beta} \\
&= R_q\left(|f|^{\alpha};a;b\right)^{1/\alpha} \; R_q\left(|g|^{\beta};a;b\right)^{1/\beta}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.4. İkinci Tip q-Bernstein-Kantorovich Operatörünün İstatistiksel Yakınsaklığı

Şimdi $\tilde{B_n}(f;q;x)$ operatöründe klasik q-integral yerine, Riemann-tipli q-integral kullanarak oluşturduğumuz "ikinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörü" nü, f, $[0,1]$ aralığında qR-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, her $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1)$ için

$$B_n^*(f;q,x) = [n+1]\sum_{k=0}^{n} \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} f(t)d_q^R t \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1-q^s x) \qquad (4.10)$$

ile tanımlayalım (Dalmanoğlu ve Doğru 2010).

Bu kesimde operatörün yalnızca istatistiksel olarak düzgün yakınsaklığını değil aynı zamanda yaklaşım hızını da inceleyebileceğiz. Öncelikle aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.4.1. $q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere (4.1) ile verilen koşulları sağlasın. Bu taktirde, her $f \in C[0,1]$ için,

$$st - \lim_{n} \|B_n^*(f; q_n; .) - f(.)\|_{C[0,1]} = 0$$

sağlanır.

İspat. Lemma 4.3.1 'den $B_n^*(f;q;x)$'in lineer pozitif bir operatör olduğu açıktır. $B_n^*(f;q;x)$ operatörünün Teorem 4.1.1. in koşullarını sağlandığını göstermek ispat için yeterlidir. Bunu görebilmek için öncelikle $i = 0,1,2$ için $B_n^*(e_i;q;x)$ ifadesini hesaplayalım.

Bir önceki bölüme benzer şekilde işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t &= \frac{q^k}{[n+1]} \\
\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q^R t &= \frac{1}{[n+1]^2} \left\{ q^k [k] + \frac{1}{[2]} q^{2k} \right\} \\
\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q^R t &= \frac{1}{[n+1]^3} \left\{ q^k [k]^2 + \frac{2q^{2k}}{[2]} [k] + \frac{q^{3k}}{[3]} \right\}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$i = 0$ için,

$$\begin{aligned}
B_n^*(e_0;q;x) &= [n+1] \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t \right) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \\
&= 1 \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

olduğu açıktır. $i=1$ için

$$\begin{aligned}
B_n^*(e_1;q;x) &= [n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t d_q^R t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \\
&= \frac{1}{[n+1]}\sum_{k=0}^{n}\left([k]+\frac{1}{[2]}q^k\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)
\end{aligned}$$

ifadesinde

$$q^k=(q-1)[k]+1 \tag{4.13}$$

eşitliğini kullanarak gerekli sadeleşmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
B_n^*(e_1;q;x) &= \frac{[n]}{[n+1]}B_n(e_1;q;x) \\
&\quad + \frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}\sum_{k=0}^{n}((q-1)[k]+1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \\
&= \left(\frac{[n]}{[n+1]}+\frac{q-1}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}\right)B_n(e_1;q;x)+\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}B_n(e_0;q;x) \\
&= \frac{2q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}x+\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

elde edilir. Son olarak $i=2$ için,

$$\begin{aligned}
B_n^*(e_2;q;x) &= [n+1]\sum_{k=0}^{n}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} t^2 d_q^R t\right)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} q^{-k}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \\
&= \frac{1}{[n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\left\{[k]^2+\frac{2q^k}{[2]}[k]+\frac{q^{2k}}{[3]}\right\}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)
\end{aligned}$$

ifadesinde (4.13) eşitliğini kullanarak gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
B_n^*(e_2;q;x) &= \frac{1}{[n+1]^2}\sum_{k=0}^{n}\left\{\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)[k]^2\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{2}{[2]}+\frac{2(q-1)}{[3]}\right)[k]+\frac{1}{[3]}\right\}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x) \\
&= \frac{1}{[n+1]^2}\left\{\left(1+\frac{2(q-1)}{[2]}+\frac{(q-1)^2}{[3]}\right)[n]^2 B_n(e_2;q;x)\right. \\
&\quad \left.+\left(\frac{2}{[2]}+\frac{2(q-1)}{[3]}\right)[n]B_n(e_1;q;x)+\frac{1}{[3]}\right\} \\
&= \left(\frac{q^2}{[2]}+\frac{3q^4}{[2][3]}\right)\frac{[n][n-1]}{[n+1]^2}x^2+q\left(\frac{3[3]+q(1+[2])}{[2][3]}\right)\frac{[n]}{[n+1]^2}x \\
&\quad +\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz.

(4.12) ifadesinden,

$$st-\lim_n \|B_n^*(e_0;q_n;.)-e_0\|_{C[0,1]}=0 \qquad (4.16)$$

olduğu açıktır.

(4.14)'den

$$\begin{aligned}
B_n^*(e_1;q_n;x)-e_1 &= \left(\frac{2q_n}{[2]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}}-1\right)x+\frac{1}{[2]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}} \\
&= \left(\frac{2}{[2]_{q_n}}\left(1-\frac{1}{[n+1]_{q_n}}\right)-1\right)x+\frac{1}{[2]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\|B_n^*(e_1;q_n;.)-e_1\|_{C[0,1]} \le \frac{1-q_n}{[2]_{q_n}}+\frac{3}{[2]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}}. \qquad (4.17)$$

elde edilir. Şimdi verilen bir $\varepsilon > 0$ için aşağıdaki kümeleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned} M &:= \{k : \|B_n^*(e_1; q_k; .) - e_1\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\} \\ M_1 &:= \{k : \frac{1-q_k}{[2]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \\ M_2 &:= \{k : \frac{3}{[2]_{q_k}} \frac{1}{[k+1]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\}. \end{aligned}$$

(4.17)'den $M \subseteq M_1 \cup M_2$ olduğu görülür. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \delta\{k \leq n : \|B_n^*(e_1; q_k; .) - e_1\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\} &\leq \delta\{k \leq n : \frac{1-q_k}{[2]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \\ &+\delta\{k \leq n : \frac{3}{[2]_{q_k}} \frac{1}{[k+1]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{2}\} \end{aligned}$$

yazabiliriz. (4.1) koşullarından eşitsizliğin sağ tarafı sıfır olur ve

$$st - \lim_n \|B_n^*(e_1; q_n; .) - e_1\|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde, $B_n^*(e_2; q; x)$ için (4.15)'te bulduğumuz ifadeden,

$$\begin{aligned} \|B_n^*(e_2; q_n; x) - e_2\|_{C[0,1]} &= \left| \left(\frac{q_n^2}{[2]_{q_n}} + \frac{3q_n^4}{[2]_{q_n}[3]_{q_n}} \right) \frac{[n]_{q_n}[n-1]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} - 1 \right| \\ &+q_n \left(\frac{3[3]_{q_n} + q_n(1+[2]_{q_n})}{[2]_{q_n}[3]_{q_n}} \right) \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2} \end{aligned}$$

yazarız. $\frac{[n]_{q_n}[n-1]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} = \frac{1}{q_n^3}\left(1 - \frac{(1+[2]_{q_n})}{[n+1]_{q_n}} + \frac{[2]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2}\right)$ eşitliğini kullanarak gerekli işlemleri yaparsak,

$$\begin{aligned} \|B_n^*(e_2; q_n; .) - e_2\|_{C[0,1]} \leq & \left| \left(\frac{1}{[2]_{q_n} q_n} + \frac{3q_n}{[2]_{q_n}[3]_{q_n}} - 1 \right) \right. \\ & - \left(\frac{3q_n(1+[2]_{q_n})}{[2]_{q_n}[3]_{q_n}} + \frac{(1+[2]_{q_n})}{[2]_{q_n} q_n} \right) \frac{1}{[n+1]_{q_n}} \\ & \left. + \left(\frac{1}{q_n} + \frac{3q_n}{[3]_{q_n}} \right) \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2} \right| \\ & + q_n \left(\frac{3[3]_{q_n} + q_n(1+[2]_{q_n})}{[2]_{q_n}[3]_{q_n}} \right) \frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}^2} + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Mutlak değerdeki parantezlerin içinde düzenlemeler yapılıp, $\frac{[n]}{[n+1]^2} < \frac{1}{[n+1]}$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\|B_n^*(e_2;q_n;.)-e_2\|_{C[0,1]} \leq \frac{(1-q_n)(q_n^2(1+[2]_{q_n})+[3]_{q_n})}{q_n[2]_{q_n}[3]_{q_n}} + \left(\frac{(3q_n^2+[3]_{q_n})(1+[2]_{q_n})}{[2]_{q_n}[3]_{q_n}q_n}\right)\frac{1}{[n+1]_{q_n}} + \left(\frac{3q_n^2+[3]_{q_n}}{[3]_{q_n}q_n}\right)\frac{1}{[n+1]_{q_n}^2} + q_n\left(\frac{3[3]_{q_n}+q_n(1+[2]_{q_n})}{[2]_{q_n}[3]_{q_n}}\right)\frac{1}{[n+1]_{q_n}} + \frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}$$

elde edilir. Buradan,

$$\|B_n^*(e_2;q_n;.)-e_2\|_{C[0,1]} \leq \frac{(1-q_n)(q_n^2(1+[2]_{q_n})+[3]_{q_n})}{q_n[2]_{q_n}[3]_{q_n}} + M\left(\frac{1}{[n+1]_{q_n}}+\frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}\right)$$

yazabiliriz. Burada M sayısı $\frac{1}{[n+1]}$ ve $\frac{1}{[n+1]^2}$ ifadelerinin katsayılarının maksimumudur. Şimdi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$K := \{k : \|B_n^*(e_2;q_k;.)-e_2\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\},$$
$$K_1 := \{k : \frac{(1-q_k)(q_k^2(1+[2]_{q_k})+[3]_{q_k})}{q_k[2]_{q_k}[3]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{3}\},$$
$$K_2 := \{k : \frac{1}{[k+1]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{3M}\},$$
$$K_3 := \{k : \frac{1}{[k+1]_{q_k}^2} \geq \frac{\varepsilon}{3M}\}$$

kümelerini tanımlayalım. Burada $K \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3$ olduğu görülür. Dolayısıyla,

$$\delta\{k \leq n : \|B_n^*(e_2;q_k;.)-e_2\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\} \leq \delta\{k \leq n : \frac{(1-q_k)(q_k^2(1+[2]_{q_k})+[3]_{q_k})}{q_k[2]_{q_k}[3]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{3}\} + \delta\{k \leq n : \frac{1}{[k+1]_{q_k}} \geq \frac{\varepsilon}{3M}\} + \delta\{k \leq n : \frac{1}{[k+1]_{q_k}^2} \geq \frac{\varepsilon}{3M}\}$$

yazabiliriz. (4.1) den yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafının sıfır olduğunu elde ederiz. O halde

$$\delta\{k \leq n : \|B_n^*(e_2;q_k;.)-e_2\|_{C[0,1]} \geq \varepsilon\} = 0$$

ve böylece,

$$st - \lim_n \|B_n^*(e_2;q_n;.)-e_2\|_{C[0,1]} = 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $i=0,1,2$ için

$$st-\lim_{n}\|B_n^*(e_i;q_n;.)-e_i\|_{C[0,1]}=0$$

olup, Teorem 4.1.1'den ispat tamamlanır.

4.5 İkinci tip q-Bernstein-Kantorovich Operatörünün İstatistiksel Yaklaşım Hızı

Bu bölümde (4.10) ile tanımladığımız ikinci tip q-Bernstein-Kantorovich operatörünün istatistiksel yaklaşım hızını süreklilik modülü ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla inceleyeceğiz. Bu incelemeyi yaparken $B_n^*(f;q;x)$ operatörünün 1. ve 2. merkezi momentlerine ihtiyaç duyacağımızdan, öncelikle bu ifadeleri verelim. (4.14) ve (4.15) eşitliklerinden, 1. ve 2. merkezi momentler sırasıyla

$$B_n^*((e_1-x);q;x)=\left(\frac{2q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}-1\right)x+\frac{1}{[2]}\frac{1}{[n+1]} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}B_n^*((e_1-x)^2;q;x)&=\left((\frac{q^2}{[2]}+\frac{3q^4}{[2][3]})\frac{[n][n-1]}{[n+1]^2}-\frac{4q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}+1\right)x^2\\&+\left[q\left(\frac{3[3]+q(1+[2])}{[2][3]}\right)\frac{[n]}{[n+1]^2}-\frac{2}{[2]}\frac{1}{[n+1]}\right]x+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n+1]^2}\end{aligned} \tag{4.19}$$

olarak elde edilir.

4.5.1 Süreklilik modülü yardımıyla istatistiksel yaklaşım hızının incelenmesi

Aşağıdaki teoremde (2.8) ile tanımlanan süreklilik modülü yardımıyla $B_n^*(f;q;x)$ operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım hızı istatistiksel olarak değerlendirilmiştir.

Teorem 4.5.1. $q:=(q_n)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere (4.1) ile verilen koşulları sağlasın. Bu taktirde, her $f\in C[0,1]$ için,

$$\|B_n^*(f;q_n;.)-f(.)\|_{C[0,1]}\leq 2w(f;\delta_n)$$

sağlanır. Burada

$$\delta_n = \sqrt{\left(\frac{2q_n}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]} - 1\right)^2 + \frac{1}{[n+1]} + \frac{1}{[n+1]^2}} \tag{4.20}$$

dir.

İspat. $f \in C[0,1]$ olsun. $B_n^*(f;q,x)$ operatörünün lineerlik ve monotonluk özelliğinden dolayı,

$$\begin{aligned} |B_n^*(f;q;x) - f(x)| &\leq B_n^*(|f(t) - f(x)|;q;x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x) \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} |f(t) - f(x)| d_q^R t \right) \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada

$$r_{n,k,q}(x) = [n+1]q^{-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x)$$

dir. Riemann-tipli q-integralin monotonluğundan ve süreklilik modülünün 7. özelliğinden

$$\begin{aligned} |B_n^*(f;q;x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x) \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) w(f,\delta) d_q^R t \right) \\ &= w(f,\delta) \left\{ 1 + \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x) \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} |t-x| \, d_q^R t \right) \right\} \end{aligned}$$

yazarız. Şimdi yukarıda bulduğumuz eşitsizlikteki q-integralde, q-Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygularsak,

$$
\begin{aligned}
|B_n^*(f;q;x)-f(x)| &\le w(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2 d_q^R t\right)^{1/2}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t\right)^{1/2}\right\} \\
&= w(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\sum_{k=0}^{n}\left(r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2 d_q^R t\right)^{1/2}\right. \\
&\quad \left.\times\left(r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t\right)^{1/2}\right\}
\end{aligned}
$$

elde ederiz. Toplam için olan klasik Cauchy-Schwarz eşitsizliğini tekrar uygulayarak

$$
\begin{aligned}
|B_n^*(f;q,x)-f(x)| &\le w(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2 d_q^R t\right)^{1/2}\right. \\
&\quad \left.\times\left(\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\frac{q^k}{[n+1]}\right)^{1/2}\right\} \\
&= w(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}\left(\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2 d_q^R t\right)^{1/2}\right\},
\end{aligned}
$$

diğer bir ifadeyle

$$
|B_n^*(f;q;x)-f(x)| \le w(f,\delta)\left\{1+\frac{1}{\delta}B_n^*((e_1-x)^2;q;x)^{1/2}\right\} \tag{4.21}
$$

elde edilir. Şimdi (4.19) ile verilen $B_n^*((e_1-x)^2;q;x)$ ifadesini ele alalım. Öncelikle x^2 li terimin katsayısını A ile gösterelim.

$$
A := \left(\frac{q^2}{[2]}+\frac{3q^4}{[2][3]}\right)\frac{[n][n-1]}{[n+1]^2}-\frac{4q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]}+1.
$$

Eğer

$$
\frac{q^2}{[2]}+\frac{3q^4}{[2][3]} \le \frac{4q^2}{([2])^2} \tag{4.22}
$$

olduğunu gösterebilirsek, $[n-1] < [n]$ eşitsizliğini de kullanarak,

$$A \leq \left(\frac{2q}{[2]} \frac{[n]}{[n+1]} - 1 \right)^2$$

yazabileceğiz. Şimdi (4.22) ifadesinin doğru olmadığını varsayalım. Yani,

$$\frac{q^2}{[2]} + \frac{3q^4}{[2][3]} > \frac{4q^2}{([2])^2}$$

olsun. Buradan,

$$4q^5 + q^4 - 2q^3 - 3q^2 > 0$$

elde edilir. Fakat, $0 < q < 1$ olduğundan,

$$4q^5 + q^4 - 2q^3 - 3q^2 = q^2(q-1)(4q^2 + 5q + 3) < 0$$

dır. Dolayısıyla varsayımımız doğru olmayıp, $0 < q < 1$ için (4.22) eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} A &\leq \frac{4q^2}{([2])^2} \frac{[n]^2}{[n+1]^2} - \frac{4q}{[2]} \frac{[n]}{[n+1]} + 1 \\ &= \left(\frac{2q}{[2]} \frac{[n]}{[n+1]} - 1 \right)^2 \end{aligned} \tag{4.23}$$

yazabiliriz.

Şimdi (4.19) ifadesinde x'li terimin katsayısını B ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} B &= q \left(\frac{3[3] + q(1+[2])}{[2][3]} \right) \frac{[n]}{[n+1]^2} - \frac{2}{[2]} \frac{1}{[n+1]} \\ &\leq \left(\frac{3q[3] + q^2(1+[2])}{[2][3]} - \frac{2}{[2]} \right) \frac{1}{[n+1]} \\ &= \left(\frac{3q[3] + q^2(1+[2]) - 2[3]}{[2][3]} \right) \frac{1}{[n+1]} \end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada parantez içindeki ifadeyi açık bir şekilde yazarsak, $0 < q < 1$ için

$$\begin{aligned} 3q[3] + q^2(1+[2]) - 2[3] &= (3q-2)(1+q+q^2) + q^2(2+q) \\ &= 4q^3 + 3q^2 + q - 2 \\ &= (q^3 + 2q^2 + 2q + 1) + (3q^3 + q^2 - q - 3) \\ &= [2][3] + (q-1)(3[3]+q) \\ &\leq [2][3] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$B \leq \frac{1}{[n+1]} \tag{4.24}$$

bulunur. Dolayısıyla (4.23) ve (4.24) eşitsizliklerinden $B_n^*(f;q;x)$ operatörünün 2. momenti için

$$B_n^*((e_1-x)^2;q;x) \leq \left(\frac{2q}{[2]}\frac{[n]}{[n+1]} - 1\right)^2 x^2 + \frac{1}{[n+1]}x + \frac{1}{[n+1]^2}$$

yazabiliriz. Bulduğumuz son ifadeyi (4.21) eşitsizliğinde yerine koyup, q yerine (4.1) koşullarını sağlayan bir (q_n) dizisi seçelim. $x \in [0,1]$ aralığında her iki tarafın maksimumunu alırsak,

$$\begin{aligned} &\|B_n^*(f;q_n;x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq \\ &w(f,\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\left[\left(\frac{2q_n}{[2]_{q_n}}\frac{[n]_{q_n}}{[n+1]_{q_n}} - 1\right)^2 + \frac{1}{[n+1]_{q_n}} + \frac{1}{[n+1]_{q_n}^2}\right]^{1/2}\right\} \end{aligned}$$

elde ederiz. $\delta := \delta_n$'i (4.20) de verilen şekilde seçtiğimizde ispat tamamlanır.

4.5.2 Lipschitz sınıfından fonksiyonlar yardımıyla yaklaşım hızının incelenmesi

Bu kısımda, çalıştığımız f fonksiyonlarını Lipschitz sınıfından seçerek, $B_n^*(f;q;x)$ operatörünün yakınsaklık hızını hesaplayalım.

Teorem 4.5.2. $f \in Lip_M(\alpha)$ olsun. $q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere (4.1) ile verilen koşulları sağlasın. Bu durumda, δ_n (4.20) ile verilmek üzere,

$$||B_n^*(f;q_n,x)-f(x)||_{C[0,1]} \leq M\delta_n^\alpha$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $f\in Lip_M(\alpha)$ olsun. B_n^* operatörünün lineer ve monoton olmasından dolayı,

$$\begin{aligned}|B_n^*(f;q,x)-f(x)| &\leq B_n^*(|f(t)-f(x)|;q,x)\\ &= \sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} |f(t)-f(x)|d_q^R t\end{aligned}$$

yazarız. $f\in Lip_M(\alpha)$ olduğundan,

$$|B_n^*(f;q,x)-f(x)| \leq M\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} |t-x|^\alpha d_q^R t \tag{4.25}$$

dir. Eşitsizlikteki q-integrale $p=\frac{2}{\alpha}$ ve $q=\frac{2}{2-\alpha}$ alarak, q-Hölder eşitsizliğini uygularsak,

$$\begin{aligned}\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} |t-x|^\alpha d_q^R t &\leq \left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} (t-x)^2 d_q^R t\right)^{\alpha/2}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} d_q^R t\right)^{(2-\alpha)/2}\\ &= \left(\frac{q^k}{[n+1]}\right)^{(2-\alpha)/2}\left(\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} (t-x)^2 d_q^R t\right)^{\alpha/2}\end{aligned}$$

elde ederiz. Bulduğumuz bu eşitsizliği (4.25) de yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}|B_n^*(f;q,x)-f(x)| \leq\ & M\sum_{k=0}^{n}\left(\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}x^k\prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{(2-\alpha)/2}\\ &\left(r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]} (t-x)^2 d_q^R t\right)^{\alpha/2}\end{aligned}$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğini bir kere daha uyguladığımızda

$$
\begin{aligned}
|B_n^*(f;q,x)-f(x)| &\leq M\left(\sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \prod_{s=0}^{n-k-1}(1-q^s x)\right)^{(2-\alpha)/2} \\
&\quad \left(\sum_{k=0}^{n} r_{n,k,q}(x)\int_{[k]/[n+1]}^{[k+1]/[n+1]}(t-x)^2 d_q^R t\right)^{\alpha/2} \\
&= M\left(B_n^*((s-x)^2;q,x)\right)^{\alpha/2} \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

sonucunu buluruz. Bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi (4.26) ifadesinde her iki tarafın $x \in [0,1]$ aralığında maksimumunu alırsak,

$$||B_n^*(f;q_n,x)-f(x)||_{C[0,1]} \leq M\delta_n^{\alpha}$$

elde edilir.

Not: Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.5.2 de (4.1) ile verilen koşullar gözönüne alındığında $st-\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$ olduğunu görürüz. Bu ise süreklilik modülünün (2.9) ile verilen özelliğinden $st-\lim\limits_{n\to\infty} w(f;\delta_n) = 0$ olduğunu garantiler. Dolayısıyla yukarıdaki teoremler $B_n^*(f;q_n;x)$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşma hızını vermektedir.

Örnek: Teorem 4.5.1 ve Teorem 4.5.2'de bahsettiğimiz q_n dizisini

$$q_n = \begin{cases} \frac{1}{5} & n=m^2 \text{ ise,} \\ 1-\frac{1}{n} & n \neq m^2 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak seçersek, $0 < q_n < 1$ olduğunu ve (4.1) ile verilen koşulları sağladığını görürüz.

Bu bölümün son kısmında yukarıda yaptığımız incelemeleri Meyer-König ve Zeller operatörlerinin q-tipli bir genelleşmesi için yapacağız. Bunun için öncelikle q-MKZ operatörleri ile ilgili bazı hatırlatmalar yapalım, daha sonra da bu operatörlerin Kantorovich tipli genelleşmesini tanımlayıp yaklaşım özelliklerini inceleyelim.

4.6 q-MKZ-Kantorovich Operatörü ve Yaklaşım Özellikleri

İlk defa 1960 yılında Meyer-König ve Zeller tarafından oluşturulan

$$M_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n+1}\right)\binom{k+n}{k} x^k(1-x)^{n+1}, \qquad 0 \leq x < 1$$

operatörü, monotonluk özelliklerinin incelenebilmesi amacıyla Cheney ve Sharma (1964) tarafından yeniden tanımlanmıştır. Bernstein kuvvet serisi olarak da adlandırılan bu operatör

$$M_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right)\binom{k+n}{k} x^k(1-x)^{n+1}, \qquad 0 \leq x < 1$$

ile verilmiştir. MKZ operatörleriyle ilgili literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Doğru (1997), MKZ operatörlerinin genelleşmiş şeklini tanımlamış ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Daha sonra bu genelleştirilmiş operatörlerin Kantorovich tipli bir genelleşmesi ise Doğru ve Özalp (2001) tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

A, $(0,1)$ arasında bir reel sayı olmak üzere (φ_n) dizisi aşağıdaki özellikleri sağlasın:

i. $\{\varphi_n\}$ dizisi $B = \{z \in C : |z| \leq A\}$ diskini kapsayan bir D bölgesinde analitik olsun.

ii. $\varphi_n^0(x) = \varphi_n(x) > 0$

iii. $\varphi_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}\varphi_n(x)$ olmak üzere ve γ_n ve $l_{n,k}$ sayı dizileri

$$l_{n,k} = o(\tfrac{1}{n}), \;\; l_{n,k} \geq 0, \qquad \gamma_n = 1 + o(\tfrac{1}{n}), \;\; \gamma_n \geq 1$$

özelliklerini sağlamak üzere

$$\varphi_n^{(k)}(x) = \gamma_n(k+n)(1+l_{n,k})\varphi_n^{k-1}(x), \qquad k = 1, 2, ...$$

bağıntısı sağlansın.

Bu durumda, $0 < \alpha_{n,k} \leq 1$ ve f, $(0,1)$ de integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, Kantorovich tipli MKZ operatörü

$$M_n^*(f;x) = \frac{1}{\varphi_n(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{n,k}} \int_k^{k+\alpha_{n,k}} f(\frac{\xi}{k+n})d\xi \; \varphi_n^k(0)\frac{x^k}{k!}$$

şeklinde oluşturulmuştur. Bu çalışmada operatörün yaklaşım özellikleri ve hızı ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

MKZ operatörlerinin q-tipli genelleşmesi ise ilk defa Trif (2000) tarafından verilmiştir. $M_{n,q} : C[0,1] \to C[0,1]$ olmak üzere q-MKZ operatörü

$$M_{n,q}(f;x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[k+n]}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} x^k, \tag{4.27}$$

$$u_{n,q}(x) = \prod_{j=0}^{n} (1 - q^j x)$$

ile tanımlanmıştır. Bu operatör için momentler

$$\begin{aligned} M_{n,q}(1;x) &= 1 \\ M_{n,q}(e_1;x) &= x \\ 0 \le M_{n,q}(e_2;x) - x^2 &\le (q-1)x^2 + \frac{x}{[n]} \end{aligned} \tag{4.28}$$

olarak elde edilmiş ve operatörün yaklaşım özellikleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir. Daha sonra Doğru ve Duman (2006) q-MKZ operatörlerinin yeni bir genelleşmesini $f \in C[0,a]$, $a \in (0,1)$ ve $q \in (0,1]$ olmak üzere,

$$M_n(f;q;x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]}{[k+n]}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

ile vermişlerdir. Bu çalışmada $M_n(f,q,x)$ operatörünün her $f \in C[0,a]$ fonksiyonuna istatistiksel olarak düzgün yakınsadığı gösterilmiştir. Ayrıca, Trif'in verdiği operatör için 2.moment açıkça ifade edilemediği halde Doğru ve Duman'ın verdiği operatör için f'in içerisinde yer alan q^n ifadesi yardımıyla $M_n((\frac{t}{1-t})^{\nu};q;x)$, $(\nu = 0,1,2)$ momentleri açıkça elde edilebilmiştir.

Şimdi Trif'in (4.27) ile tanımladığı q-MKZ operatörünün Kantorovich tipli bir genelleşmesini,

f, $(0,1)$de qR-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$, $q \in (0,1)$ için

$$M_n^*(f;q,x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{x}{q}\right)^k \int_{[k]}^{[k+1]} f(\frac{t}{[k+n]}) d_q^R t \tag{4.29}$$

operatörü ile tanımlayalım (Dalmanoğlu ve Doğru 2010). Burada,

$$u_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^{n} (1 - q^s x)$$

dir.

Not: Riemann-tipli q-integralin 1. özelliğinden dolayı (4.29) ile verilen Kantorovich tipli q-MKZ operatörü lineer ve pozitif bir operatördür.

Daha önceki bölümlerde olduğu gibi (4.29) operatörünün düzgün yakınsaklığına geçmeden önce aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 4.6.1. $M_n^*(f;q;x)$ operatörü için

$$M_n^*(e_0;q;x) = 1 \tag{4.30}$$

dir.

İspat. $\int_{[k]}^{[k+1]} d_q^R t = q^k$ olduğundan sonuç açıktır.

Lemma 4.6.2. $M_n^*(f;q;x)$ operatörü için

$$0 \leq M_n^*(e_1;q;x) - x \leq \frac{1}{[2]} \frac{1}{[n]} \tag{4.31}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$M_n^*(e_1;q;x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{x}{q}\right)^k \int_{[k]}^{[k+1]} \frac{t}{[k+n]} d_q^R t$$

ifadesindeki q-integral hesaplanırsa,

$$\int_{[k]}^{[k+1]} \frac{t}{[k+n]} d_q^R t = \frac{[k]}{[k+n]} q^k + \frac{q^{2k}}{[2]} \frac{1}{[k+n]}$$

bulunur. Bu eşitliği yukarıdaki ifadede yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} M_n^*(e_1;q;x) - x &= u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} \frac{[k]}{[k+n]} x^k - x \\ &\quad + \frac{1}{[2]} u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} \frac{1}{[k+n]} q^k x^k \end{aligned} \tag{4.32}$$

elde ederiz. $0 < q < 1$ için $q^k < 1$ ve $[k+n] \geq [n]$ olduğundan

$$M_n^*(e_1;q;x) - x \leq M_{n,q}(e_1;x) - x + \frac{1}{[2]} \frac{1}{[n]} u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

yazabiliriz. Trif'in elde ettiği ve (4.28) ile verdiğimiz eşitlikten

$$M_n^*(e_1;q;x) - x \leq \frac{1}{[2]} \frac{1}{[n]}$$

sonucunu buluruz. (4.32) eşitliğinden $M_n^*(e_1;q;x) - x \geq 0$ olduğu aşikardır. Dolayısıyla Lemma 4.6.2'nin ispatı tamamlanır.

Lemma 4.6.3. $M_n^*(f;q;x)$ operatörü için

$$0 \leq M_n^*(e_2;q;x) - x^2 \leq M_{n,q}(e_2;x) - x^2 + \frac{2}{[2]} \frac{1}{[n]} M_{n,q}(e_1;x) + \frac{1}{[3]} \frac{1}{[n]^2} \tag{4.33}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$$M_n^*(e_2;q;x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix} \left(\frac{x}{q}\right)^k \int_{[k]}^{[k+1]} \frac{t^2}{[k+n]^2} d_q^R t$$

ifadesindeki q-integrali hesaplayıp, gerekli sadeleştirmeleri yaparsak,

$$M_n^*(e_2;q;x) = u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}\frac{[k]^2}{[k+n]^2}x^k$$
$$+\frac{2}{[2]}u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}\frac{[k]}{[k+n]^2}q^kx^k+\frac{1}{[3]}u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}\frac{1}{[k+n]^2}q^{2k}x^k$$

eşitliğini elde ederiz. Buna göre,

$$M_n^*(e_2;q;x)-x^2 = M_{n,q}(e_2;x)-x^2+\frac{2}{[2]}u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}\frac{[k]}{[k+n]^2}q^kx^k$$
$$+\frac{1}{[3]}u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}\frac{1}{[k+n]^2}q^{2k}x^k \tag{4.34}$$

yazabiliriz. Şimdi

$$\frac{q^k}{[k+n]}<\frac{1}{[n]} \qquad 0<q<1, \quad k=0,1,2,...$$

eşitsizliğinden yararlanarak

$$M_n^*(e_2;q;x)-x^2 \le M_{n,q}(e_2;x)-x^2+\frac{2}{[2]}u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}\frac{[k]}{[k+n]}\frac{1}{[n]}x^k$$
$$+\frac{1}{[3]}u_{n,q}(x)\sum_{k=0}^{\infty}\begin{bmatrix}k+n\\k\end{bmatrix}\frac{1}{[n]^2}x^k$$

yazarız. Dolayısıyla,

$$M_n^*(e_2;q;x)-x^2 \le M_{n,q}(e_2;x)-x^2+\frac{2}{[2]}\frac{1}{[n]}M_{n,q}(e_1;x)+\frac{1}{[3]}\frac{1}{[n]^2}$$

elde edilir. Ayrıca $M_{n,q}(e_2;x)-x^2>0$ olduğundan (4.34) eşitliğinden

$$M_n^*(e_2;q;x)-x^2 \ge 0$$

olduğu kolayca görülür ve Lemma 4.6.3'ün ispatı tamamlanır.

Teorem 4.6.1. $q:=(q_n)$ dizisi $0<q_n<1$ olmak üzere (4.1) ile verilen koşulları sağlasın. Bu taktirde, her $f \in C[0,a]$, $0 < a < 1$, için (4.29) operatörü

$$st - \lim_n \|M_n^*(f; q_n, .) - f(.)\|_{C[0,a]} = 0$$

eşitliğini sağlar.

İspat. Eğer $i = 0, 1, 2$ için

$$st - \lim_n \|M_n^*(e_i; q_n; .) - e_i\|_{C[0,a]} = 0$$

olduğunu gösterebilirsek, Teorem 4.4.1'den ispat tamamlanır.

$i = 0$ için Lemma 4.6.1'den

$$st - \lim_n \|M_n^*(e_0; q_n; .) - e_0\|_{C[0,a]} = 0 \tag{4.35}$$

olduğu açıktır. Lemma 4.6.2'den $i = 1$ için

$$\|M_n^*(e_1; q_n, x) - e_1\|_{C[0,a]} \le \frac{1}{[2]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}} \tag{4.36}$$

yazarız. Verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$T := \{k : \|M_n^*(e_1; q_k; .) - e_1\|_{C[0,a]} \ge \varepsilon\},$$

$$T_1 := \{k : \frac{1}{[2]_{q_k}} \frac{1}{[k]_{q_k}} \ge \varepsilon\}$$

kümelerini tanımlayalım. (4.36) den dolayı $T \subseteq T_1$ olduğu görülür. Böylece $\delta\{T\} \le \delta\{T_1\}$ yazabiliriz. (4.1) koşullarından $\delta\{T_1\} = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla,

$$st - \lim_n \|M_n^*(e_1; q_n; .) - e_1\|_{C[0,a]} = 0 \tag{4.37}$$

elde edilir.

Son olarak, Lemma 4.6.3'ten, $i = 2$ için,

$$\begin{aligned}
\|M_n^*(e_2; q_n; .) - e_2\|_{C[0,a]} &\leq \|M_{n,q_n}(e_2; .) - e_2\|_{C[0,a]} + \frac{2}{[2]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}} \|M_{n,q_n}(e_1; .)\|_{C[0,a]} \\
&\quad + \frac{1}{[3]_{q_n}} \frac{1}{[n]_{q_n}^2} \\
&\leq \|M_{n,q_n}(e_2; .) - e_2\|_{C[0,a]} + 2\left(\frac{1}{[n]_{q_n}} \|M_{n,q_n}(e_1; .)\|_{C[0,a]} + \frac{1}{[n]_{q_n}^2}\right)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

yazabiliriz. Benzer şekilde verilen bir $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
K &:= \{k : \|M_k^*(e_2; q_k; .) - e_2\|_{C[0,a]} \geq \epsilon\}, \\
K_1 &:= \{k : \|M_{k,q_k}(e_2; .) - e_2\|_{C[0,a]} \geq \frac{\epsilon}{3}\} \\
K_2 &:= \{k : \frac{1}{[k]_q} \|M_{k,q_k}(e_1; .)\|_{C[0,a]} \geq \frac{\epsilon}{6}\} \\
K_3 &:= \{k : \frac{1}{[k]_q^2} \geq \frac{\epsilon}{6}\}
\end{aligned}$$

kümelerini tanımlarsak, (4.38)'den dolayı $K \subseteq K_1 \cup K_2 \cup K_3$ 'dir. Dolayısıyla buradan,

$$\delta\{K\} \leq \delta\{K_1\} + \delta\{K_2\} + \delta\{K_3\} \tag{4.39}$$

yazabiliriz. (4.1) koşulları gözönüne alınarak (4.28)'den $st-\lim\limits_n \frac{1}{[n]_q} \|M_{n,q_n}(e_1; .)\|_{C[0,a]} = 0$ ve $st - \lim\limits_n \|M_{n,q_n}(e_2; x) - e_2\|_{C[0,a]} = 0$ olduğu kolaylıkla görülür. Dolayısıyla (4.39) eşitsizliğinin sağ tarafı sıfır olur ve buradan

$$st - \lim_n \|M_n^*(e_2; q_n; .) - e_2\|_{C[0,a]} = 0 \tag{4.40}$$

sonucuna ulaşılır. (4.35), (4.37) ve (4.40) eşitliklerinden Teorem 4.6.1'in ispatı tamamlanır.

$M_n^*(f; q, x)$ operatörü için istatistiksel yaklaşım hızı ile ilgili teoremi vermeden önce bu operatörün 2. merkezi momentini inceleyelim.

$$M_n^*((e_1 - x)^2; q; x) = M_n^*(e_2; q; x) - x^2 - 2x(M_n^*(e_1; q; x) - x)$$

$$\|M_n^*((e_1-x)^2;q;.)\|_{C[0,a]} \leq \|M_n^*(e_2;q;.)-e_2\|_{C[0,a]} + 2\|x\|\|M_n^*(e_1;q;x)-e_1\|_{C[0,a]}$$

Lemma 4.6.2 ve Lemma 4.6.3'ten

$$\begin{aligned}\|M_n^*((e_1-x)^2;q;.)\|_{C[0,a]} &\leq \|M_{n,q}(e_2;.)-e_2\|_{C[0,a]} + \frac{2}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q}\|M_{n,q}(e_1;.)\|_{C[0,a]} \\ &+ \frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2} + \frac{2a}{[2]_q}\frac{1}{[n]_q} \end{aligned} \tag{4.41}$$

yazabiliriz. (4.28) ile verilen ifadelerden

$$\|M_{n,q}(e_1;.)\|_{C[0,a]} = a$$

ve

$$\|M_{n,q}(e_2;.)-e_2\|_{C[0,a]} \leq (1-q)a^2 + \frac{a}{[n]_q}$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla bu eşitsizliklerin (4.41) de kullanılmasıyla

$$\|M_n^*((e_1-x)^2;q;.)\|_{C[0,a]} \leq (1-q)a^2 + \left(a + \frac{4a}{[2]_q}\right)\frac{1}{[n]_q} + \frac{1}{[3]_q}\frac{1}{[n]_q^2} \tag{4.42}$$

elde ederiz.

Aşağıdaki teorem $M_n^*(f;q,x)$ operatörünün $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşım hızını süreklilik modülü yardımı ile vermektedir.

Teorem 4.6.2. $q := (q_n)$ dizisi $0 < q_n < 1$ olmak üzere (4.1) ile verilen koşulları sağlasın. Bu taktirde, her $f \in C[0,a]$ için,

$$\|M_n^*(f;q_n;.)-f(.)\|_{C[0,a]} \leq 2w(f;\delta_n)$$

sağlanır. Burada

$$\delta_n = \sqrt{(1-q_n)a^2 + \left(a + \frac{4a}{[2]_{q_n}}\right)\frac{1}{[n]_{q_n}} + \frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n]_{q_n}^2}} \tag{4.43}$$

dir.

İspat. $f \in C[0,a]$ olsun. Teorem 4.5.1'in ispatındaki teknikten yararlanarak, $\forall n \in N$ ve $x \in [0,a]$ için

$$|M_n^*(f;q,x) - f(x)| \leq w(f,\delta)\{1 + \frac{1}{\delta}(M_n^*((t-x)^2;q;x))^{1/2}\}$$

eşitsizliği elde edilir. q yerine (4.1) koşullarını sağlayacak şekilde bir (q_n) dizisi seçip, her iki tarafın $[0,a]$ da maksimumunu alırsak; (4.42) den

$$\|M_n^*(f;q_n,.)-f\|_{C[0,a]} \leq w(f,\delta)\left\{1 + \frac{1}{\delta}\left[(1-q_n)a^2 + \left(a + \frac{4a}{[2]_{q_n}}\right)\frac{1}{[n]_{q_n}} + \frac{1}{[3]_{q_n}}\frac{1}{[n]_{q_n}^2}\right]^{1/2}\right\}$$

bulunur ve son olarak δ_n'i (4.43) ile verilen şekilde seçersek,

$$\|M_n^*(f;q_n,.) - f\|_{C[0,a]} \leq 2w(f,\delta_n)$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

(q_n) dizisi (4.1) ile verilen koşulları sağladığında $st - \lim_n \delta_n = 0$ ve dolayısıyla $st - \lim_n w(f,\delta_n) = 0$ olur ki bu da bize $M_n^*(f;q_n,.)$ operatörünün f fonksiyonuna istatistiksel olarak düzgün yakınsadığını gösterir.

KAYNAKLAR

Andrews, G. E., Askey, R. and Roy, R. 1999. Special Functions, Cambridge University Press.

Altomare, F. and Campiti, M. 1994. Korovkin-Type Approximation Theory and its Applications. De Gruyter Series Studies in Mathematics, Vol. 17, Walter de Gruyter, Berlin-New York.

Bernstein, S. N. 1912. Démonstration du théorem de Weierstrass fondée sur le calculu des probabilités. Comp.Comm. Soc. Mat. Charkow Sér., 13 (2); 1-2.

Bohman, H. 1951. On approximation of continuous and analytic functions. Arkif für Math., 2 (3); 43-56.

Brahim, K. 2008. On some q-integral inequalities. J. Inequal. Pure and Appl. Math., 9 (4), Art. 106, 6pp.

Cheney, E.W. and Sharma, A. 1964. Bernstein power series, Can. J. Math., 16, 241-253.

Dalmanoğlu, Ö. 2007. Approximation by Kantorovich type q-Bernstein operators, Proceedings of the12th WSEAS International Conference on Applied Mathematics, Cairo, Egypt, 113-117.

Dalmanoğlu, Ö. and Doğru, O. 2010. Statistical Approximation Properties of Kantorovich type q-MKZ operators, Creative Math. & Inf., 19, No.1; 15-24.

Dalmanoğlu, Ö. and Doğru, O. 2010. On Statistical Approximation Properties of Kantorovich type q-Bernstein operators, Math. Comput. Modelling, doi:10.16/j.mcm.2010.05.005.

Derriennic, M. M. 2005. Modified Bernstein polynomials and Jacobi Polynomials in q-calculus. Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie 2 (Suppl. 76), 269-290.

Derriennic, M. M. 1981. Sur l'approximation de fonctions intégrable su $[0,1]$ par des polynomes de Bernstein modifiers. J. Approx. Theory, 31, 325-343.

Doğru, O. 1997. Approximation order and Asymptotic Approximation for Gener alized Meyer-König and Zeller Operators. Math. Balkanica, Vol.12, Fasc. 3-4; 359-368.

Doğru, O. and Özalp, N. 2001. Approximation by Kantorovich Type Generalization of Meyer-König and Zeller Operators. Glasn. Mat., 36, 311–318.

Doğru, O. and Duman, O. 2006. Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on $q-$integers. Publ. Math. Debrecen, 68/ 1-2, 199-214.

Doğru, O., Duman, O. and Orhan, C. 2003. Statistical approximation by generalized Meyer-König and Zeller type operators. Stud. Sci. Math. Hun., 40, 359-371.

Durrmeyer, J. L. 1967. Une formule d'inversion de la transformeé de Laplace: Applications ā la theorie des moments, Thése de 3e cycle, Facultié des Sciences de l'Université de Paris.

Fast, H. 1951. Sur la convergence statistique. Colloq. Math Studia Mathematica, 2, 241-244.

Fitouhi, A. and Brahim K. 2008. Some inequalities for the q-beta and q-gamma functions via some q-integral inequalities. Applied Mathematics and Com putation, 204; 385-394.

Gadjiev, A. D. and Orhan, C. 2002. Some approximation theorems via statistical convergence. Rocky Mountain J. Math., 32 (1); 129-138.

Gauchman, H. 2004. Integral Inequalities in q-Calculus. Comp. and Math. with Applications, 47, 281-300.

Gupta, V. 2008. Some approximation properties of q-Durrmeyer operators. Applied Mathematics and Computation,197; 172–178.

Gupta, V. and Heping, W. 2008. The rate of convergence of q-Durrmeyer operators for $0 < q < 1$. Math. Meth. in the App. Sci., 31 (16); 1946-1955.

Gupta, V. and Finta, Z. 2009. On certain q-Durrmeyer type operators. App. Math. and Comp., 209 (2); 415-420

Il'inskii, A. and Ostrovska, S. 2002. Convergence of Generalized Bernstein Polyno mials. Journal of App. The., 123, 100-112.

Kac, V. and Cheung, P. 1953. Quantum Calculus. Springer–Verlag, Newyork–Berlin–Heidelberg.

Kantorovich, L.V. 1930. Sur certains developpements suivant les polynomesde la forme de S. Bernstein, I,II, C.R. Acad. USSR; 563-568, 595-600.

Korovkin, P. P. 1953. On convergence of linear positive operators in the space of continuous functions. Doklady Akademii Nauk SSSR. 90; 961-964.

Lorentz, G.G. 1953. Bernstein Polynomials, University of Toronto Press, Toronto.

Lupaş, A. 1987. A q-analogue of the Bernstein operator. University of Cluj-Napoca, Seminar on Numerical and Statistical Calculus, No:9.

Marinković ,S., Rajković, P. and Stanković, M. 2008. The inequalities for some types of q-integrals. Comp. and Math. with Applications, 56; 2490-2498.

Meyer-König, W., Zeller K. 1960. Bernsteinsche potenzreihen. Studia Math, 19, 89-94.

Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery H. 1991. An Introduction to the Theory of numbers. Wiley, New York.

Ostrovska, S. 2006. On the Lupaş q-analogue of the Bernstein operator. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 36 (5); 1615-1629.

Ostrovska, S. 2003. q-Bernstein polynomials and their Iterates. Journal of Approx. The., 123; 232-255.

Ostrovska, S. 2007. The first decade of the q-Bernstein polynomials: results and perspectives, Journal of Math. Anal. and Approx. The., 2 (1); 35-51.

Özarslan, M. A., Duman, O. and Srivastava, H. M. 2008. Statistical Approximation Results for Kantorovich-type operators involving some special polynomials, Math. and Comp. Modelling, 48, 3-4, 388-401.

Phillips, G. M. 1997. Bernstein Polynomials based on q-integers. Ann. Numer. Math., 4; 511–518.

Phillips, G. M. 2003. Interpolation and Approximation by Polynomials. Springer, Berlin.*d Liquids*. 4th Edition, McGraw-Hill Book Company.

Radu, C. 2008. Statistical approximation properties of Kantorovich operators based on $q-$integers. Creative Math.& Inf.,17, No:2; 75-84.

Rajković, P., Stanković, M. and Marinković, S. 2008. Mean value theorems in q-calculus. Matematicki Vesnik, 54, No:3-4; 171-178.

Trif, T. 2000. Meyer-König and Zeller operators based on the $q-$integers. Rev. Anal. Numér. Théor. Approx., 29 (2), 221-229.

Videnskii, V. S. 2005. On some Classes of $q-$parametric Positive Linear Operators. Operator Theory: Advances and Applications, 158, 213-222.

Weierstrass, K. 1885. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willküricher

Funktionen einer reellen Veranderlichen . Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin, 633-639, 789-805.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Özge (ÖZER) DALMANOĞLU

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 13.10.1980

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : TED Ankara Koleji (1997)

Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2002)

Yüksek Lisans : Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2005)

Çalıştığı Kurum ve Yıl

Çankaya Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü
Doktora Bursiyeri (2006 – 2009)

Yayınları

• **Dalmanoğlu, Ö.** Approximation by Kantorovich type q-Bernstein operators. Proceedings of the12thWSEAS International.Conference on Applied Mathemetics, Cairo, Egypt (2007), 113-117.

• **Dalmanoğlu, Ö.** and Doğru, O. Statistical Approximation Properties of Kantorovich type q-MKZ operators. Creative Math. & Inf., 19, No.1, (2010), 15-24.

• **Dalmanoğlu, Ö.** and Doğru, O. On Statistical Approximation Properties of Kantorovich type q-Bernstein operators, Mathematical and Computer Modelling (2010), doi:10.1016/j.mcm.2010.05.005.