CESS MODÜLLER

CESS MODULES

Cesim ÇELİK

Hacettepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
DOKTORA TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

1995

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.........Prof.Dr. Cemal Koç.........................

Üye :.........Prof.Dr. Arif Kaya.........................

Üye :.........Prof.Dr.Abdullah Harmancı.........................

Üye :.........Doç.Dr.Adnan Tercan.........................

Üye :.........Doç.Dr. Yücel Tıraş.........................

ONAY

Bu tez ..../..../19.... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

7./12./1995

Prof.Dr. Gültekin GÜNAY
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖZET

Bu çalışma, CS-modülleri içeren modül sınıflarının yapıları ile ilgilidir. Dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, diğer bölümlerde kullanılacak kavramları ve önbilgileri içerir.

İkinci bölüm, CS ve GQ-injektif modüllerin genel bir durumu olan (*) koşulunu sağlayan modüllerin genel özelliklerini içermektedir. (*): M bir modül, $K \leq_c M$ ve $f:K \to M$ ise f, M'ye genişler. Bu bölümde:

(1) Her GQ-injektif modül (C_2)'yi sağlar.

(2) $M = (Z/Zp^n) \oplus (Z/Zp^m)$ $(m \neq n)$ (*) koşulunu sağlar ancak ve ancak M CS dir.

(3) M free ve (*) koşulunu sağlayan Z-modül ise M sonlu üreteçlidir.

Sokulu esas olan tamlayan altmodülleri diktoplam olduğu modüllere CESS-modül denir. Üçüncü bolüm CESS-modüller ile ilgilidir. Bu bölümde:

(1) R halkası yarı artindir ancak ve ancak her CESS sağ R-modül CS dir.

(2) R komutatif Noetherian halka olsun. R Dedekind bölgesidir ancak ve ancak her UC R-modül CESS-modüldür.

(3) R yarı artin ve sokulu esas olan bir halka olsun. Bir M modülü CESS dir ancak ve ancak $M = M_1 \oplus M_2$ dir burada M_1 CS-modül ve $Sok(M_1)$ esas modül , $Sok(M_2) = 0$ dır.

Her yarıbasit altmodülü esas olarak bir diktoplanan da kapsanan modüle zayıf CS-modül denir. Dördüncü bölümde:

(1) M modülü UC ve zayıf CS ise M'nin diktoplananları da zayıf CS dir.

(2) Sok(M), M'de esas ve M UC-modül ise M zayıf CS dir ancak ve ancak M CESS dir ancak ve ancak M CS dir. Sonuçları, diğerleri yanında elde edildi.

ABSTRACT

Let R be a ring with idendity. All modules M are unitary right R-modules. This work consists of four sections. The first section is a preparatory section containing notions that will be needed.

Let M be a module. If for any complement K in M and any homomorphism $f : K \to M$ extends from M to M, we call M satisfies (*).

In the second section we obtained the results among others.

(1) Every GQ-ijective module satisfies (C_2).

(2) $M = (Z / Zp^n) \oplus (Z / Zp^m)$, where $m \neq n$ are positive integers, satisfies (*) if and only if M is CS-module.

(3) If M is free Z-module satisfying (*) then M is finitely generated.

If every complement having essential socle in M is a direct summand of M, M is called CESS-module. In the third section we proved the following results.

(1) A ring R is semi-artinian if and only if every CESS-module is CS-module.

(2) Let R be a commutative Noetherian domain. Then R is Dedekind domain if and only if every UC-module is CESS-module.

(3) Let R be a semi-artinian ring with essential socle. Then M is a CESS-module if and only if $M = M_1 \oplus M_2$ where M_1 is a CS-module with $Soc(M_1)$ essential in M_1 and $Soc(M_2) = 0$.

A module M is called weak CS-module if every semi-simple submodule of M is contained essentially in a direct summand of M. In the fourth section we obtained the following results:

(1) If M is a UC and weak CS-module, then every direct summand of M is weak CS-module.

(2) Let M be UC-module with essential socle. Then M is weak CS-module if and only if M is CESS-module if and only if M is CS-module.

TEŞEKKÜR

Bu Tezde yardımcı olan danışmanım Prof. Dr. Abdullah Harmancı'ya Teşekür ederim.

İÇİNDEKİLER

1.GİRİŞ.

Bu bölümde, diğer bölümlerde gerekli olan temel tanım ve özellikler verilecektir. Çalışmanın daha iyi anlaşılması amacıyla bilinen bazı özelliklerin kanıtları verilecek diğerleri için ise referans verilecektir.

1.1.Gösterimler.

R birimli bir halka ve M birimsel sağ R-modül olmak üzere:

$N \leq M$: N M'nin altmodülü,

R_R: Sağ R-modül R,

$I \leq R_R$: I R'nin sağ ideali,

$N \leq_e M$: N M'nin esas altmodülü,

$N \leq_c M$: N M'nin tamlayan altmodülü,

$N \leq_d M$: N M'nin diktoplanan altmodülü,

Z : Tamsayılar halkası,

Q : Rasyonel sayılar cismi

ile gösterilecektir.

1.2.Esas ve Tamlayan Altmodüller.

1.2.1.Tanım: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. Her $0 \neq K \leq M$ için $N \cap K \neq 0$ ise N'ye M'nin esas (essential) altmodülü veya N M'de esasdır denir.

1.2.2. Önerme: M bir modül olsun.

(i) $N \leq_e M$ ancak ve ancak her $0 \neq m \in M$ için $N \cap mR \neq 0$ dır.

(ii) $K \leq N \leq M$ verilsin. $K \leq_e M$ ancak ve ancak $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ dir.

(iii) $N \leq_e M$ ve $K \leq M$ olsun. O zaman $N \cap K \leq_e K$ dır.

(iv) $t \geq 1$ için $N_i \leq_e K_i$ $(1 \leq i \leq t)$ olsun. O zaman

$$N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_t \leq_e K_1 \cap K_2 \cap \ldots \cap K_t \text{ dir.}$$

(v) $K \leq N \leq M$ verilsin.$(N/K) \leq_e (M/K)$ ise $N \leq_e M$ dir.

(vi) $K \leq N \leq_e M$ ise $(N/K) \leq_e (M/K)$ dır.

(vii) $N \leq_e M$ ve $m \in M$ olsun $(N: m) = \{r \in R: mr \in N\} \leq_e R_R$ dir.

(viii) Boşkümeden farklı bir damgalayan küme I için $N_i \leq_e M_i$ $(i \in I)$ olsun. O zaman

$$\bigoplus_I N_i \leq_e \bigoplus_I M_i \text{ dir}$$

Esas altmodüllerle ilgili daha fazla bilgi ve Önerme 1.2.2'nin kanıtı için (F.W. Anderson and K.R. Fuller, 1974), (A.W. Chatters and C.R. Hajarnavis, 1980) ve (K.R.Goodearl, 1976) kaynaklara başvurulabilir.

1.2.3. Tanım: M bir modül ve $A,B \leq M$ olsun. $A \cap B = 0$ özelliğine göre A altmodülü maksimal ise A'ya B'nin M'deki tamlayanı (Complement) denir.

1.2.4. Önteorem: M bir modül ve $A,B \leq M$ olsun. $A \cap B = 0$ ise B'nin A'yı esas olarak kapsayan bir tamlayanı vardır.

Literatüre baktığımızda iki türlü tamlayan tanımı ile karşılaşırız. Birincisi yukarıda yapılan tanımdır. Bu tanım aynı zamanda Faith anlamında tamlayan olarakta bilinir. İkincisi ise Harada anlamında tamlayanlıktır: R bir halka, M bir R-modül olsun. $N \leq M$ için

$$Cl_M(N) = \{m \in M: (N: m) \leq_e R\}$$

altmodülüne N'nin M'deki kapanışı (Closure) denir. Eğer $Cl_M(N) = N$ ise N'ye Harada anlamında tamlayandır denir ve H-kapalı ile ifade edilir.

Harada anlamında tamlayan olan bir altmodül, Faith anlamında tamlayandır. Ancak bunun tersi genel olarak doğru değildir.

1.2.5. Örnek: Z tamsayılar halkasını Z-modül ve $E = E(Z_Z)$ olarak alalım. ($E(Z_Z)$ Z_Z'yi esas olarak kapsayan minimal injektif Z-modül). p bir asal sayı olmak üzere $M = E \oplus Zp$ olsun $Cl_M(E) = E$ ve $Cl_M(Zp) = Zp$ dir. $K \leq_c E \oplus Zp$ alalım. Her $x \in K$ için $x' \in E$ ve $n' \in Zp$ olmak üzere $x = (x', n')$ dür. $K < M$ veya $K < Zp$ ise $Cl_M(K) = E \neq K$ veya $Cl_M(K) = Zp \neq K$ dır.

$K \nleq E$ ve $K \nleq Zp$ olsun. $0 \neq x \in K$ için $x = (x', n')$: $0 \neq x' \in E$, $0 \neq n' \in Zp$ dir. $Zx' \leq K$ ve $Zn' \leq K$, ayrıca $x' \in E$ ve $n' \in Zp$ olmasından $Zx' \leq_e E$ ve $Zn' \leq_e Zp$ dir. Her $x \in E$ için $(Zx': x) \leq_e Z$ ve her $n \in Zp$ için $(Zn': n) \leq_e Z$ dir. $(x, n) \in E \oplus Zp$ ve

$$I = (Zx': x) \cap (Zn': n) \leq_e Z$$

$I(x, n) \leq K$ olduğundan $(x, n) \in Cl_M(K)$ dır.Buradan $Cl_M(K) = E \oplus Zp \neq K$ dır.

1.2.6. Önerme: M tekil olmayan (non singular) bir modül olsun. $K \leq M$ Harada anlamında tamlayandır ancak ve ancak Faith anlamında tamlayandır (Harada, 1976)

1.2.7. Tanım: M bir modül ve $N \leq M$ olsun. $N \leq_e K \leq_c M$ olan K altmodülüne N'nin M'deki esas kapanışı denir.

1.2.8. Önerme: M bir modül ve $N \leq K \leq M$ olsun.

(i) $N \leq_c M$ ancak ve ancak N'nin M'deki esas kapanışı kendisidir.

(ii) $N \leq_c K \leq_c M$ ise $N \leq_c M$ dir. Ayrıca $N \leq_c M$ ise $N \leq_c K$ dır.

(ii) N'nin M'deki tamlayanı L, L'nin N'yi kapsayan M'deki tamlayanı U ise $N \leq_e U$ dur.

(iv) N'nin M'deki esas kapanışı L dir ancak ve ancak L, N'yi esas olarak kapsayan maksimal altmodüldür ancak ve ancak L, N'yi kapsayan M'deki tamlayan altmodüllerin minimalidir.

Önerme 1.2.8'in kanıtı ve tamlayan altmodüllerle ilgili daha fazla bilgi (K.R.Goodearl, 1976) ve (F.Kasch, 1982) kaynaklarından bulunabilir.

1.3. Yarıbasit Modüller.

1.3.1. Tanım: M bir modül olsun.

$$\mathrm{Sok}(M) = \cap\{N \leq M: N \text{ esas altmodül}\}$$

$$= \Sigma\{N \leq M: N \text{ basit altmodül}\}$$

altmodülüne M'nin sokulu denir.

1.3.2. Önteorem: M bir modül olsun Sok(M) M'nin basit altmodüllerinin diktoplamına eşittir. (F.Kasch, 1982)

1.3.3. Teorem: Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M'nin her altmodülü M'nin basit altmodüllerinin toplamıdır,

(ii) M basit altmodüllerinin toplamına eşittir,

(iii) M basit altmodüllerinin diktoplamına eşittir,

(iv) M'nin her altmodülü M'nin diktoplananıdır.(F.Kasch, 1982)

1.3.4. Tanım: Bir M modülü Teorem 1.3.3'min koşullarından birini sağlıyorsa M modülüne yarıbasit modül denir.

1.3.5. Sonuç:

(i) Bir yarıbasit modülün her altmodülü de yarıbasittir.

(ii) Her yarıbasit modülün homomorfik görüntüsü de yarıbasittir.

(iii)Yarıbasit modüllerin her toplamı da yarıbasittir. (F.Kasch, 1982)

1.3.6. Önteorem: $\{M_i: i \in I\}$ modüller ailesi olsun O zaman

$$\bigoplus_{i\in I} Sok(M_i) = Sok(\bigoplus_{i\in I} M_i)$$

olur. (F.W.Anderson and K.R.Fuller, 1974)

1.3.7. Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun. $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \ldots (M_i \leq M, i \geq 1)$ için bir k pozitif tamsayısı var ve $i \geq k$ için $M_i \leq Sok(M)$ ise M'ye nihai (eventualy) yarıbasit modül denir.

1.4. Sonlu Düzgün Boyuta Sahip Modüller.

1.4.1. Tanım: M modülünün her altmodülü M'de esas ise M modülüne düzgün (uniform) modül denir.

1.4.2. Tanım: M modülü enfazla sonlu tane düzgün modülün diktoplamını kapsıyor ve bu kapsama esas ise M'ye sonlu düzgün botuta sahiptir denir. db(M) ile M'nin düzgün boyutu gösterilir.

1.4.3. Önteorem: M_1 yarıbasit, M_2 sonlu düzgün boyuta sahip olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. O zaman M nihai yarıbasit modül olur.(P.F. Smith, 1993)

1.4.4. Önerme: M bir modül ve $A \leq M$ olsun.

(i) M sonlu düzgün boyutludur ancak ve ancak M'nin her altmodülü sonlu düzgün boyutludur.

(ii) $A \leq_c M$ ve M sonlu düzgün boyutlu ise M/A'da sonlu düzgün boyutludur.

(iii) $A_1, A_2,\ldots,A_n \leq M$ ve Her i için A_i sonlu düzgün boyutlu ise

$$A_1 \oplus A_2.\oplus \ldots \oplus A_n$$

de sonlu düzgün boyutludur.

(iv) $A \leq_e M$ ve A sonlu düzgün boyutlu ise M'de sonlu düzgün boyutludur. (K.R.Goodearl, 1976)

1.4.5. Önerme: M bir modül olsun.

(i) $A_1, A_2,\ldots A_n \leq M$ ise

$$db(A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n) = db(A_1) + db(A_2) + \ldots + db(A_n)$$

dir.

(ii) $A \leq M$ ve A sonlu düzgün boyutlu olsun. O zaman $A \leq_e M$ ancak ve ancak $db(M) = db(A)$ dır. (K.R.Goodearl, 1976)

1.4.6. Önerme: M bir modül ve $A \leq M$ olsun.

(i) $A \leq_c M$ ise $db(M) = db(A) + db(M/A)$ dır.

(ii) M sonlu düzgün boyutlu olsun $db(M) = db(A) + db(M/A)$ ise $A \leq_c M$ olur. (P.F. Smith, 1993).

1.5. İnjektif Modüller.

1.5.1. Tanım: R bir halka ve M, A birer birimsel R-modül olsunlar. A modülünün her X altmodülü için X'den M'ye olan her homomorfizma A'dan M'ye genişliyorsa M modülüne A-injektif dir denir. Eğer her R-modül A için M A-injektif ise M'ye injektif modül denir. M modülü M-injektif ise M'ye yarı injektif (quasi injektif) modül denir. Eğer M A-injektif ve A da M-injektif ise M ve A modüllerine görelli injektif modüller denir.

Not: M modülü (R_R)-injektif ise M injektiftir.

1.5.2. Önerme: $\{M_i: i \in I\}$ R-modüller ailesi olsun.

$\prod_{i \in I} M_i$ injektiftir ancak ve ancak her $i \in I$ için M_i injektifdir. (S.H.Mohamed and B.J.Muller, 1990).

1.5.3. Önerme: M bir modül olsun.

(i) M injektifdir ancak ve ancak M kendisini kapsayan her modülün diktoplananıdır.

(ii) A bir modül ve $B \leq A$ olsun. Eğer M A-injektif ise M, A/B ve B-injektif olur. (S.H.Mohamed and B.J.Muller, 1990).

1.5.4. Tanım: M bir modül olsun. M'yi esas olarak kapsayan injektif modüle M'nin injektif zarfı denir ve E(M) ile gösterilir.

1.5.5. Önerme: Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) M'nin injektif zarfı E(M) dir.

(ii) E(M) M'yi esas olarak kapsayan modüllerin maksimalidir.

(iii) E(M) M'yi kapsayan injektif modüllerin minimalidir.

1.6. Tekil Modüller.

1.6.1. Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun.

$$Z(M) = \{m \in M\colon mI = 0 \text{ olacak şekilde bir } I \leq_e R \text{ var}\}$$

altmodülüne M'nin tekil (singular) altmodülü denir. Eğer $Z(M) = 0$ ise M'ye tekil olmayan, $Z(M) = M$ ise M'ye tekil modül denir.

$$Z_2(M) = \{m \in M\colon m + Z(M) \in Z(M/Z(M))\}$$

altmodülü M'nin enbüyük tekil altmodülüdür. Ayrıca $Z(M) \leq_e Z_2(M)$ dir.

1.6.2. Önerme: M tekil olmayan bir modül ve $N \leq M$ olsun.

(i) $N \leq_e M$ ancak ve ancak M/N tekildir.

(ii) $Z_2(M) \leq_c M$ dir. (K.R.Goodearl, 1976).

1.7. Sürekli Modüller.

1.7.1. Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun. Her $K \leq_c M$, M'nin bir diktoplananı oluyor ise M'ye CS-modül ((C_1) koşulunu sağlıyor) denir. Denk olarak, her $K \leq M$ için bir $N \leq_d M$ var ve $K \leq_e N$ dir.

R halkasına sağ CS-halka denir, eğer R_R CS-modül ise. Yani her $I \leq_c R_R$ için bir eşkare (idempotent) $e \in R$ var öyleki $I = eR$ dir.

CS-modüllere örnek olarak, yarıbasit modüller, düzgün modüller ve injectif modüller verilebilir. Ayrıca her sonlu ranklı free değişmeli (abelian) gruplarda birer CS-modüldürler. M bir injektif modül ve $K \leq_c M$ olsun. $K \leq_e E(K)$ ve $M = E(K) \oplus T$ olacak şekilde $T \leq M$ var. Böylece $K = E(K)$ ve $K \leq_d M$ olur.

1.7.2. Önerme: Bir CS-modül M'nin her diktoplananı da CS-modüldür (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990)

Bir CS-modülün her tamlayanı da CS-modüldür. Ancak bir CS-modülün herhangi bir altmodülü CS olmayabilir. Örneğin, M CS olmayan bir modül olsun. E(M) injektif, dolayısyla CS-modüldür. $M \leq_e E(M)$ olmasına rağmen M CS-modül değildir. Ayrıca iki CS-modülün diktoplamıda CS olmayabilir.

1.7.3. Tanım: Bir M modülünün (0) ve M'den başka diktoplananı yoksa M modülüne ayrışmaz (indecomposable) modül denir.

1.7.4. Önerme: M ayrışmaz bir modül olsun. M CS-modül ise M düzgündür (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990)

1.7.5. Teorem: R bir halka ve M bir R-modül olsun. M CS-modüldür ancak ve ancak $Z_2(M)$ ve N CS-modüller, $Z_2(M)$ N-injektif olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus N$ dir (M.A. Kamal and B.J. Muller, 1988).

Kanıt: M'nin CS-modül olduğunu varsayalım. $Z_2(M) \leq_c M$ olduğundan bir $N \leq M$ için $M = Z_2(M) \oplus N$ dir. Ayrıca N tekil değildir. Önerme 1.7.2.'den $Z_2(M)$ ve N CS-modüllerdir. $X \leq N$ için $f: X \to Z_2(M)$ bir homomorfizma olsun.

$$X' = \{x - f(x): x \in X\}$$

M'nin bir altmodülüdür. Varsayımdan $X' \leq_e L \leq_d M$ olacak şekilde $L \leq M$ vardır. Buradan bir $Y \leq M$ var ve $M = L \oplus Y$ dir. $X' \cap Z_2(M) = 0$ ve $X' \leq_e L$ olduğundan L tekil değil ve $Z_2(M) = Z_2(Y)$ dir. Böylece $Z_2(M) \leq_d Y$ ve buradan bir $Y' \leq Y$ var öyleki $Y = Z_2(M) \oplus Y'$ dür. $\pi: L \oplus Y' \oplus Z_2(M) \to Z_2(M)$ doğal örten homomorfizma olsun. $(\pi |X) = f$ olduğu açıktır. Böylece $Z_2(M)$ N-injektif olur.

Tersine, $Z_2(M)$ ve N CS-modüller, $Z_2(M)$ N-injektif olmak üzere $M = Z_2(M) \oplus N$ ve $A \leq_c M$ olsun. $Z_2(A) \leq_c A$ olduğundan $Z_2(A) \leq_c M$ olur. Ancak $Z_2(A) \leq Z_2(M) \leq M$ olmasından $Z_2(A) \leq_c Z_2(M)$ ve böylece $Z_2(A) \leq_d Z_2(M)$, bir $T \leq Z_2(M)$ var öyleki $Z_2(M) = Z_2(A) \oplus T$ olur.

$$A = A \cap (Z_2(M) \oplus N) = A \cap (Z_2(A) \oplus T \oplus N) = Z_2(A) \oplus (A \cap (T \oplus N))$$

dir. $B = A \cap (T \oplus N)$ A'nın tekil olmayan altmodülüdür. $B \cap Z_2(M) = 0$ ve $Z_2(M)$ N-injektif olduğundan $\pi_1: M \to Z_2(M)$, $\pi_2: M \to N$ doğal örten homomorfizmalar olmak üzere $f: N \to Z_2(M)$ olan bir homomorfizma var ve $(f\pi_2 |B) = \pi_1 |B$ dir.

$$N' = \{n + f(n): n \in N\}$$

olsun. $B \leq N'$ ve $N' \cong N$ CS-modüldür. Böylece $B \leq_d N'$ olur. $M = Z_2(M) \oplus N'$ olduğundan $A \leq_d M$ olur.

1.7.6. Tanım: M bir modül olsun.

(C_2): M'nin bir diktoplanına izomorf olan, her $N \leq M$ M'nin bir diktoplananıdır.

(C_3): $M_1 \cap M_2 = 0$ özelliğine göre $M_1, M_2 \leq_d M$ için $M_1 \oplus M_2$ de M'nin bir diktoplananıdır.

1.7.7. Önteorem: (C_i) $(i = 1,2)$ koşulunu sağlayan M modülünün her diktoplananı da (C_i) koşulunu sağlar (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990).

1.7.8. Tanım: Bir M modülü CS-modül ve (C_2) ((C_3)) koşulunu sağlıyor ise M'ye sürekli (continuous) (yarı sürekli (quasi- continuous)) modül denir.

1.7.9. Önteorem: (C_2) koşulunu sağlayan her M modülü (C_3) koşulunu sağlar (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990).

Kanıt: $K \cap L = 0$ özelliğine göre $K, L \leq_d M$ olsunlar. Bir $K' \leq M$ için $M = K \oplus K'$ dür. $\pi: M \to K'$ doğal örten homomorfizma olsun. $K \cap L = 0$ olduğundan $\pi(L) \cong L$ ve $\pi(L) \leq K'$ dür. (C_2) koşulundan $\pi(L) \leq_d M$ ve böylece bir $L' \leq M$ için $M = \pi(L) \oplus L'$ olur. Buradan

$$K' = \pi(L) \oplus (K' \cap L')$$

ve $M = K \oplus \pi(L) \oplus (K' \cap L')$ olur. Böylece $K \oplus \pi(L) \leq_d M$ olur. $K \oplus \pi(L) = K \oplus L$ olduğundan $K \oplus L \leq_d M$ olur.

Önteorem 1.7.9'in sonucu olarak her sürekli modülün yarı sürekli modül olduğu açıktır.

1.7.10. Önerme: $M = M_1 \oplus M_2$ modülü yarı sürekli ise M_1 ve M_2 modülleri görelli (relatively) injektifdirler (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990).

1.8. Noetherian ve Artinian Modüller.

1.8.1. Tanım: M bir modül ve $M_i \leq M$ olsun. Her $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset ...$ zinciri için bir n tamsayısı var ve her $n \leq i$ için $M_i = M_n$ ise M altmodüller üzerinde artan zincir koşulunu (ACC) sağlıyor denir.

M bir modül ve $N_i \leq M$ olsun. Her $N_1 \supset N_2 \supset N_3 \supset ...$ zinciri için bir n tamsayısı var ve her $n \leq i$ için $N_i = N_n$ ise M altmodüller üzerinde azalan zincir koşulunu (DCC) sağlıyor denir.

1.8.2. Tanım: R bir halka olsun. Eğer R halkası sağ (sol) idealler üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlıyor ise R'ye sağ (sol) Noetherian (Artinian) halkadır denir.

1.8.3. Tanım: Bir M modülü altmodülleri üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlıyor ise M'ye Noetherian (Artinian) modül denir.

1.8.4. Önerme: M bir modül ve $N \leq M$ olsun.

(i) M Artinian (Noetherian) modüldür ancak ve ancak M'nin altmodüllerinin boştan farklı her ailesinin minimal (maksimal) elemanı vardır.

(ii) M Artinian (Noetherian) modüldür ancak ve ancak M/N Artinian (Noetherian) modüldür (F.Kasch, 1982).

1.8.5. Önerme: M bir modül ve $M_1, M_2, ... ,M_n \leq M$ olsun. $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ Artinian (Noetherian) modüldür ancak ve ancak $i = 1,2,...,n$ için M_i Artinian (Noetherian) modüldür (F.Kasch, 1982)

1.8.6. Tanım: M bir modül olsun. M'nin injektif zarfı sonlu tane basit modülün injektif zarflarının diktoplamı olarak yazılabiliyorsa M'ye sonlu gömülmüştür denir.

1.8.7. Önteorem: M bir modül olsun. M sonlu gömülmüştür ancak ve ancak $Sok(M) \leq_e M$ ve Sok(M) sonlu üreteçlidir (P.Vamos, 1968).

1.8.8. Önteorem: M bir modül olsun.

(i) M Artinian'dır ancak ve ancak her $N \leq M$ için M/N sonlu gömülmüştür.

(ii) M Noetherian'dır ancak ve ancak M'nin her altmodülü sonlu üreteçlidir (P.Vamos, 1968).

1.8.9. Önerme: R bir halka ve M bir R-modül olsun. M Artinian'dır ancak ve ancak I_i'ler R'nin maksimal idealleri olmak üzere $M \leq \bigoplus_{i=1}^{n} E(R/I_i)$ dir.

1.8.10. Önerme: Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) M Noetherian'dır.

(ii) M'nin her bölüm modülünün, sıfırdan farklı her altmodülü bir maksimal altmodül kapsar ve M'nin her bölüm modülünün sokulu sonlu üreteçlidir (R.C.Shock, 1974)

1.8.11. Tanım: R bir integral bölgesi olsun. R'nin her öz ideali I sonlu tane asal idealin çarpımı olarak yazılabiliyor ise R'ye Dedekind bölgesi denir.

1.8.12. Tanım: R bir halka olsun. Her $I \leq R$ ideali tek bir eleman tarafından üretiliyorsa R halkasına temel ideal bölgesi (PID) denir.

1.8.13. Tanım: R temel ideal bölgesi olsun. R sıfırdan farklı tek bir tane asal ideale sahip ise R'ye ayrık değerlenme halkası denir.

1.8.14. Teorem: Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) R Dedekind bölgesidir.

(ii) R'nin her öz ideali sonlu tane asal idealin çarpımına tektürlü eşittir.

(iii) R'nin sıfırdan farklı her asal ideali terslenebilirdir.

(iv) R'nin her kesir ideali terslenebilirdir.

(v) R'nin kesir ideallerinin kümesi çarpmaya göre bir gruptur.

(vi) R'nin her ideali projektifdir.

(vii) R'nin her kesir ideali projektifdir.

(viii) R Noetherian ve sıfırdan farklı her P asal idali için R'nin P üzerindeki yerellemesi olan R_P halkası ayrık değerlenme halkasıdır (T.W.Hungerford, 1973).

1.8.15. Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun. Eğer M'nin sıfırdan farklı her homomorfik görüntüsü, sıfırdan farklı sokula sahip ise M'ye yarı artinian modül denir.

1.8.16. Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun. $i \geq 0$ için

$$S_{i+1}(M)/S_i(M) = Sok(M/S_i(M))$$

olmak üzere $0 = S_0(M) \subset S_1(M) \subset \ldots \subset S_i(M) \subset S_{i+1}(M) \subset \ldots$ serisine Loewy veya sokul serisi denir.

1.8.17. Önerme: Bir M modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) M yarı artiniandır.

(ii) M'nin sıfırdan farklı her homomorfik görüntüsünün sokulu sıfırdan farklıdır.

(iii) Bir $i \geq 0$ için $S_i(M) = M$ dir.

(iv) M'nin altmodüllerinin bir artan zinciri

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \ldots M_j = M$$

var öyleki $0 \leq i < j$ için $(M_{i+1})/M_i$ yarıbasit ve

$$M_i = \bigcup_{0 \leq k \angle i} M_k$$

(v) $\sigma[M]$' deki her modül yarı artiniandır.

Her Artinian halka yarı artiniandır. Ancak bunun tersi doğru değildir.

1.9. σ[M] Modül Kategorisi.

1.9.1. Tanım: R bir halka ve N_R,M_R R-modüller olsun. N_R'ye (sonlu) M-üreteçli denir, eğer bir Λ indeks kümesi için $M^{\Lambda} \to N \to 0$ ise.

1.9.2. Tanım: N_R M tarafından altüreteçlidir denir, eğer N M-üreteçli bir modülün bir altmodülüne izomorf ise.

$$\sigma[M] = \{N_R\text{: N M-altüreteçlidir}\}$$

kümesine σ[M] modül kategorisi denir. σ[M] ⊂ R-mod olduğu açıktır.

1.9.3. Önerme: Bir R-modül M için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) Her N ∈ σ[M] modülü CS dir.

(ii) σ[M] deki her modül, uzunluğu enfazla iki olan modüllerin diktoplamıdır.

(iii) Her N ∈ σ[M], N_i ya iki uzunluklu ve M-injektif veya basit olmak üzere $N = \bigoplus_{i \in I} N_i$ dir.

(iv) σ[M] deki her (devirli) modül, M-injektif bir modül ile yarıbasit bir modülün diktoplamıdır.

(v) σ[M] deki her devirli modül, sonlu düzgün boyuta sahip ve σ[M] deki (iki) düzgün modüllerin diktoplamı CS dir.

(vi) σ[M] deki her (devirli) modül, M-projektif bir modül ile yarıbasit bir modülün diktoplamıdır.

(vii) M'nin her altmodülü, yarıbasit bir modül ile M-projektif ve M-injektif olan bir modülün diktoplamıdır.

(viii) M yarıbasit modüller ile uzunluğu iki olan M-projekti ve M-injektif olan modüllerin diktoplamıdır.

1.9.4. Önerme: Jacobson radikali J olan bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(i) Her sağ R-modül CS dir.

(ii) R f-yarı perfekt ve iki üreteçli her sağ R-modül CS dir.

(iii) $E(R_R)$ projektif ve iki üreteçli her sağ R-modül CS dir.

(iv) Her devirli sağ R-modül, injektif bir modül ile yarıbasit bir modülün diktoplamıdır.

(v) R minimal sağ idealler ile uzunluğu iki olan injektif ideallerin diktoplamıdır.

(vi) R'nin her esas sağ ideali injektif bir modül ile yarıbasit bir modülün diktoplamıdır.

(vii) R (sağ ve sol) artinian serial ve $J^2 = 0$ dır.

2. GENİŞLEME KOŞULUNU SAĞLAYAN MODÜLLER

2.1. (*) Koşulu

Bu bölümde, CS-modüllerin bir genellemesi olan (*) koşulunu sağlayan modüllerin yapısı incelenecektir. CS olan her M modülünün herhangi bir tamlayanından M'ye olan her homomorfizma M den M'ye olan bır homomorfizmaya genişler. Ancak, CS olmayan modüller için bu genel olarak doğru değildir.

R=Z, M=Z $\oplus$ Z olsun. Her a,b$\in Z$ için (a,b)Z M'nin bir altmodülüdür. c,d $\in Z$ için $f: M \to (a,b)Z$;

$$f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

bir Z-homomorfizmasıdır.

(i) (a,b) = t $\neq$ 1 ve t bölmez c veya t bölmez d ise f,g:M $\to$ M olan bir homomorfizmaya genişlemez. Genişlediğini varsayalım. $a_1,b_1,c_1,d_1 \in Z$ için

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

olsun. Her x_1, $x_2 \in Z$ için

$$g\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

dir. Diğer taraftan

$$g\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

dir. Buradan $a_1 a+c_1 b = c$ ve $b_1 a + d_1 b = d$ olur. Ancak $t \mid (a_1a+c_1b)$ ve $t \mid (b_1a+d_1b)$ olmasına karşın t bölmez c veya t bölmez d dir. Bu bir çelişkidir. Böylece f genişlemez.

(ii) $(a,b) = t$ ve $t \mid c$, $t \mid d$ ise f, $g:M \to M$ olan bir homomorfizmaya genişler. Gerçektende $(a,b) = t(x_1,x_2)$ olacak şekilde $x_1,x_2 \in Z$ var ve $(x_1,x_2) = 1$ dır. Bu durumda $(a,b)Z \leq (x_1,x_2)Z$ dir. g_1: $(x_1,x_2)Z \to M$;

$$g_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

$d_1,d_2 \in Z$ ve $td_1 = c$, $td_2 = d$ olsun. g_1, Z-homomorfizmasıdır.

$$g_1\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = tg_1\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = t\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)$$

dır. $(x_1,x_2)Z$, M'nin maximal altmodülüdür. $M = Z \oplus Z$ CS-modül olduğundan $(x_1,x_2)Z \leq_d M$ dir. dolaysıyla g_1,'in $g:M \to M$ olan bir genişlemesi vardır. $g_1 \mid (a,b)Z = f$ olduğundan $g \mid (a,b)Z = f$ olur.

2.1.1.Önteorem: N, $Z^{(n)}$'nin bir maxsimal devirli Z-altmodülü olsun f: $N \to Z^{(n)}$ olan her Z-homomorfizması g: $Z^{(n)} \to Z^{(n)}$' ye olan bir Z-homomorfizmasna genişler.

Kanıt: $(x_1,\ldots,x_n) = 1$ olmak üzere $N = (x_1,\ldots,x_n)Z$ ve f: $N \to Z^{(n)}$;

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (c_1,\ldots c_n \in Z)$$

olsun. $(x_1,\ldots,x_n) = 1$ olduğundan $h_1,\ldots,h_n \in Z$ var ve

$$x_1h_1+x_2h_2+\ldots+x_nh_n = 1$$

dir.

$$A = \begin{bmatrix} c_1h_1 & \cdots & c_1h_n \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ c_nh_1 & \cdots & c_nh_n \end{bmatrix}$$

olsun. $g:Z^{(n)} \to Z^{(n)}$; $g(X) = AX$ ($X \in Z^{(n)}$) Z-homomorfizması f'nin bir genişlemesi olur.

2.1.2. Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun. Her $K \leq_c M$ ve K dan M'ye olan her R-homomorfizması için M'den M'ye olan bir g R-homomorfizması var ve $g|K = f$ ise M'ye (*) koşulunu sağlıyor denir.

2.1.3.Önteorem: M bir modül ve $L \leq K \leq M$ olsun. Eğer $L \leq_c M$ ise $L \leq_c K$ dır.

Kanıt: $L \leq_c M$ olsun. O zaman öyle bir $T \leq M$ varki $L \cap M = 0$ özeliğine göre L maximal ve $L \oplus T \leq_e M$ dir.Kanıtı iki aşamada tamamlıyalım.

(i) $K \cap T = 0$: $L \leq K$ ve $L \cap T = 0$ özelliğine göre L'nin maximal olmasından $L = K$ olur. Böylece $L \leq_c K$ dır.

(ii) $K \cap T \neq 0$: $L \cap (K \cap T) = 0$ dır. L'nin bu özelliğe göre K'da maximal olduğunu görelim. L maximal olmasın. O zaman bir $L_1 \leq_c K$ var ve $L \leq_e L_1$ dir. $L \leq_e L_1$ olduğundan $L_1 \cap T = 0$ olur. Bu L'nin $L \cap T = 0$ özeliğine göre M'de maximal olması ile çelişir. Böylece $L = L_1 \leq_c K$ olur.

2.1.4. Önteorem: R bir halka, M R-modül ve $K \leq L \leq M$ olsun. Her $x \in M \setminus N$ için $(N:x) = \{ r \in R : xr \in N \} = 0$ ise aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $L \leq_c M$ dir.

(ii) $L / K \leq_c M / K$dır.

Kanıt: (i)$\Rightarrow$(ii): $L \leq N \leq M$ olacak şekilde $(L/K) \leq_e (N/K)$ olduğunu varsayalım. O zaman $L \leq_e N$ ve böylece $L = N$ olur. Buradan $(L/K) \leq_c (M/K)$ olur.

(ii) $\Rightarrow$(i): $(L/K) \leq_c (M/K)$ olsun. O zaman $(N/K) \leq (M/K)$ var ve $(L/K) \cap (N/K) = 0$ özelliğine göre L/K maximal ve $(L/K) \oplus (N/K) \leq_e (M/K)$ dır. K'nın M'de tamlayan olmadığını varsayalım. O zaman bir $T \leq_c M$ var ve $K \leq_e T$ dir.

Eğer $(T/K) \cap (N/K) = \overline{0}$ ise $(L/K) \cap (N/K) = \overline{0}$ özelliğine göre L/K'nın maximal olması ile çelişir. Böylece $L \leq_c M$ olur.

$(T/K) \cap (N/K) \neq \overline{0}$ olsun. O zaman $\overline{0} \neq \overline{x} \in (T/K) \cap (N/K)$ var. $L \leq_e T$ olduğundan bir $0 \neq r \in R$ var ve $0 \neq xr \in L$ dir. Böylece $\overline{x}r \in (L/K) \cap (N/K) = \overline{0}$ olur. $\overline{x}r = \overline{0} \Rightarrow xr \in N$ dir. N:x) = 0 olduğundan r = 0 olur. Bu ıse çelişkidir. $L \leq_c M$ olur.

2.1.5.Önerme: R bir halka, M R-modül, $N \leq M$ ve her $x \in M \setminus N$ için $(N:x) = 0$ olsun. M, (*) koşulunu sağlarsa M / N' de (*) koşulunu sağlar.

Kanıt: $(K/N) \leq_c (M/N)$ ve $f:(K/N) \to (M/N)$ bir homomorfizma olsun. Önteorem 2.1.4'. den $K \leq_c M$ olur. $f_1: K \to M$; $\overline{y} = f(\overline{x})$ $(x \in K,\ y \in M)$ olmak üzere $f_1(x) = y$ olarak tanımlıyalım. M (*) koşulunu sağladığından f_1, M'den M'ye olan bir g_1 homomorfizmasına genişler.

$g:(M/N) \to (M/N)$; $g(\overline{m}) = \overline{g_1(m)}$ $(m \in M)$ homomorfizması f'nin bir genişlemesi olur. Böylece M / N (*) koşulunu sağlar.

2.1.6. Önteorem: $M = M_1 \oplus M_2$ modülü (*) koşulunu sağlasın. O zaman M_1 ve M_2'de (*) koşulunu sağlarlar.

Kanıt: L, M_1'de bir tamlayan ve $\varphi: L \to M_1$ bir homomorfizma olsun. $M_1 \leq_d M$ olduğundan Önerme1.2.8'den $L \leq_c M$ olur. M (*) koşulunu sağladığından bir $\psi: M \to M$

homomorfizması var ve $\psi | L = \varphi$ dir. $\pi_1: M \to M_1$ doğal örten homomorfizma olmak üzere $g: M_1 \to M_1$; $(m \in M_1)$ $g(m) = \pi_1(\psi(m))$ homomorfizması φ'nin bir genişlemesi olur. Gerçektende her $x \in L$ için

$$g(x) = \pi_1(\psi(x)) = \pi_1(\varphi(x)) = \varphi(x)$$

olur. Böylece M_1 (*) koşulunu sağlar.

M_2 için kanıt aynen tekrarlanabilir.

Önteorem 2.1.6'min tersi genel olarak doğru değildir.

2.1.7. Örnek: R= Z ve $p \in Z$ bir asal sayı olmak üzere $M = (Z/Zp) \oplus (Z/Zp^3)$ olsun. $M_1 = Z/Zp$, $M_2 = Z/Zp^3$ düzgün Z-modüller dolaysıyla (*) koşulunu sağlarlar. Ancak

$M = M_1 \oplus M_2$ (*) koşulunu sağlamaz.

M'nin (*) koşulunu sağladığını varsayalım. $K = (\overline{1},\overline{p})Z$ M'de bir tamlayandır. f: $K \to M$; $f(\overline{1},\overline{p}) = (\overline{0},\overline{1})$ bir Z-homomorfizmasıdır. Varsayımdan f, M'den M'ye olan bir g homomorfizmasına genişler. $a,b,c,d \in Z$ olmak üzere

$$g(\overline{1},\overline{0}) = (\overline{a},\overline{b}),$$

$$g(,\overline{0},\overline{1}) = (\overline{c},\overline{d})$$

olsun. $(\overline{0},\overline{0}) = g(\overline{1},\overline{0})p = (p\overline{a},p\overline{b})$ olur. Böylece p^2, b'yi böler. Diğer taraftan

$$(\overline{0},\overline{1}) = f(\overline{1},\overline{p}) = g(\overline{1},\overline{p}) = g(\overline{1},\overline{0}) + g(\overline{0},\overline{1})p = (\overline{a},\overline{b}) + (\overline{0},p\overline{d})$$

olur. Buradan $\overline{1} = \overline{b} + p\overline{d} \Rightarrow \overline{p} = \overline{p}^2 d \Rightarrow \overline{p} - \overline{p}^2 d = \overline{0} \in Z/Zp^3$ dür. Böylece p^3, $p - p^2d$'yi böler. Dolayısıyla her $x \in Z$ için $p - p^2d = p^3x$ veya $1 = pd + p^2x = p(d + px)$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece M (*) koşulunu sağlamaz.

2.1.8.Önteorem: $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M_2, M_1-injektifdir.

(ii) $M_2 \cap N = 0$ olacak şekilde her $N \leq M$ için bir $M' \leq M$ var öyleki $M = M_2 \oplus M'$ ve $N \leq M'$ dür. (A. Harmancı ve P.F. Smith, 1993)

2.1.9.Önteorem: $M = M_1 \oplus M_2$ ve M_1, M_2 (*) koşulunu sağlasınlar. M_1, M_2-injektif ve her $N \leq_c M$, $f: N \to M$ homomorfizması için $(N + f(N)) \cap M_1 = 0$ ise M (*) koşulunu sağlar.

Kanıt: $N \leq_c M$ ve $f{:}N \to M$ bir homomorfizma olsun. Kabulden $(N + f(N)) \cap M_1 = 0$ ve M_1, M_2-injektif olduğundan Önteorem 2.1.8. den bir $M' \leq M$ var öyleki $M = M_1 \oplus M'$ ve $M' \cong M_2$ dir.Böylece M'(*) koşulunu sağlar.Ayrıca Önteorem 2.1.8'den $N + f(N) \leq M'$ ve $N \leq_c M$ olduğundan Önteorem 1.2.8'den $N \leq_c M'$ olur. Böylece bir $g{:}M \to M$ homomorfizması var ve $g|N = f$ dir. Böylece M (*) koşulunu sağlamış olur.

2.1.10. Teorem: $\{M_i : i \in \Lambda\}$ modül ailesi ve A modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $\oplus_{i \in \Lambda} M_i$ A-injektifdir.

(ii) Sayılabilir $I \subset \Lambda$ için $\oplus_{i \in I} M_i$, A-injektifdir.

(iii) Her $i \in \Lambda$ için M_i A-injektifdir. (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990)

2.1.11. Önerme: $M = M_1 \oplus M_2$ modülü yarı-sürekli ise M_1 veM_2 görelli (relatively) injektifdir. (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990)

2.1.12.Teorem: $M = M_1 \oplus M_2$; M_1 yarı-sürekli ve diktoplamlar üzerinde azalan zincir koşulunu sağlayan bir modül ve M_2, (*) koşulunu sağlayan bir modül olsun. Eğer M_1 M_2-injektif ise M, (*) koşulunu sağlar.

Kanıt: $N \leq_c M$ ve $f: N \to M$ bir homomorfizma olsun. Teoremin kanıtını iki aşamada tamamlıyalım.

(i) $(N + f(N)) \cap M_1 = 0$ ise Önteorem 2.1.9'den M_1 (*) koşulunu sağlar.

(ii) $(N + f(N)) \cap M_1 \neq 0$ olsun. $(N + f(N)) \cap M_1 = L_1$ olsun. M_1'de L_1'in tamlayanı olacak şekilde bir $N_1 \leq_c M_1$ vardır. M_1 yarı-sürekli olduğundan $N_1 \leq_d M_1$ dir. O zaman bir $N_2 \leq M_1$ var $M_1 = N_1 \oplus N_2$ ve $M = N_1 \oplus N_2 \oplus M_2$ dir Teorem 2.1.10 ve Önerme 2.1.11' den N_1, $N_2 \oplus M_2$-injectifdir. $(N + f(N)) \cap N_1 = 0$ olduğundan Önteorem 2.1.9'dan bir

$C_1 \leq M$ var öyleki $C_1 \cong N_2 \oplus M_2$ ve $M = C_1 \oplus N_1$, $N + f(N) \leq C_1$ dir. C_1'in (*) koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir.

$(N + f(N)) \cap N_2 = 0$ ise (i)'den C_1 (*) koşulunu sağlar.

$(N + f(N)) \cap N_2 = L_2 \neq 0$ olsun. N_2'de L_2'nin tamlayanı olacak şekilde $N_3 \leq N_2$ var. N_2 yarı sürekli olduğundan $N_3 \leq N_2$ dir. Dolayısıyla bir $N_4 \leq N_2$ var ve $N_2 = N_3 \oplus N_4$ dür. Ayrıca Teorem 2.1.10 ve Önerme 2.1.11'den N_3 $N_4 \oplus M_2$-injectifdir. $(N + f(N)) \cap N_3 = 0$ olduğundan Önteorem 2.1.9'dan bir $C_2 \leq M$ var öyleki $C_2 \cong N_4 \oplus M_2$ ve $N + f(N) \leq C_2$ dır. $(N + f(N)) \cap N_4 = 0$ ise (i) den C_2 (*) koşulunu sağlar buradan C_1 (*) koşulunu sağlar buradan M (*) koşulunu sağlar.

$(N + f(N)) \cap N_4 \neq 0$ ise yukarıdaki işlemler aynen tekrarlanabilir. Dolayısıyla M ya (*) koşulunun sağlar yada

$$M_1 \ {}_d\!\supseteq N_2 \ {}_d\!\supseteq N_4 \ {}_d\!\supseteq \ldots$$

olacak şekilde parçalanabilir. M_1 diktoplamlar üzerinde azalan zincir koşulunu sağladığından sonlu adım sonunda bu zincir durmak zorundadır. Zincir

$$M_1 \ {}_d\!\supseteq N_2 \ {}_d\!\supseteq N_4 \ {}_d\!\supseteq \ldots \ {}_d\!\supseteq N_{2n}$$

$(n \in Z^+)$ olsun. $(N + f(N)) \cap N_{2n} \neq 0$ olursa $N_{2n} = N_{2n+1} \oplus N_{2n+2}$ olacak şekilde N_{2n} parçalanabilir.Bu ise zincirin sonlu adımda durması ile çelişir. O halde M (*) koşulunu sağlar.

2.1.13.Örnek: $R = Z$ ve $p \in Z$ bir asal sayı, $M = Z/Zp$, $M_2 = E(M_1)$, M_1'in injektif kabuğu (hull) olsun. M_2'nin her altmodülü devirli ve $1/p^n$ $(n \in Z^+)$ tarafından doğrulur. M_1 ve M_2 düzgün Z-modüllerdir. Dolayısıyla Teorem 2.1.12'min koşullarını sağlarlar. $M = M_1 \oplus M_2$ (*) koşulunu sağlar. Ancak M CS-modül değildir.

2.1.14.Önteorem: R temel ideal bölgesi ve M sonlu üreteçli R-modül olsun. $M = M_1 \oplus M_2$ burada M_1 burulmalı ve M_2 burulmasız modüllerdir. M (*) koşulunu sağlıyor ise ya $M_1 = (0)$ yada $M_2 = (0)$ dır.

Kanıt: M_1 ve M_2'nin sıfırdan farklı olduğunu varsayalım. R temel ideal bölgesi ve M sonlu üreteçli R-modül olduğundan $p \in R$ asalı için $M = (R/pR) \oplus R$ olarak alabiliriz. $L=(1 + pR, p)R$ olsun. $L \leq M$ dir. L, M'de bir tamlayandır. Gerçektende R'de sıfırdan başka sıfır bölen olmadığından L düzgündür. K, L'nin M'deki esas genişlemesi olduğunu varsayalım. $0 \neq x \in K$ için $xR + L$ sonlu üreteçli düzgün ve devirli bir altmodüldür. $a,b \in R$ için $xR + L = (a + pR,b)R$ olsun. Buradan $0 \neq s \in R$ için

$$(1 + pR, p) = (a + pR, b)s$$

dir. Böylece bir $0 \neq r \in R$ için $1 - as \in pR$, $p = bs$ ve $1 = as + pr = as + brs = s(a + br)$ dir. Dolayısıyla $(a +pR, b) = (1 + pR, p)(a + br) \in L$, $xR + L = L$ ve $x \in L$ olur. Buradan $K = L$ ve $L \leq M$ olur.

$f:L \rightarrow M$; $f(1 + pR, p) = (0 + pR, 1)$ bir R-homomorfizmasıdır. M (*) koşulunu sağladığından f, $g: M \rightarrow M$ olan bir R-homomorfizmasına genişler. $\bar{a}, \bar{c} \in R/pR$ ve $b,d \in R$ için

$$g(1 + pR, 0) = (a + pR, b),$$

$$g(0 + pR, 1) = (c + pR, d)$$

olsun. Böylece

$$(0 + pR, 0) = g(0 + pR, 0) = g((1 + pR, 0)p) = g(1 + pR, 0)p = (a + pR, b)$$

olur. Buradan $pb = 0$ olmasından $b = 0$ çıkar. O halde

$$(0 + pR, 1) = f(1 + pR, p) = f((0 + pR, p) + (1 + pR, 0))$$

$$=g(0 + pR, 1)p + g(1 + pR, 0) = (c + pR, d)p + (a + pR, 0)$$

olur. Buradan 1 = pd olur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla ya $M_1 = (0)$ yada $M_2 = (0)$ olur.

2.1.15. Önteorem: R bir halka ve M torsion R-modül olsun. M_α lar düzgün modüller olmak üzere $M = \oplus M_\alpha$ olsun. M CS-modüldür ancak ve ancak $p \in R$ asal olmak üzere

$$M = \oplus_p (M_{\alpha 1}(p)^{\alpha 1}) \oplus M_{\alpha 1}(p)^{\alpha 2})$$

ve $\left| \, | M_{\alpha 1}(p) | - | M_{\alpha 2}(p) | \, \right| \leq 1$ dir. (S.H. Mohamed and B.J. Muller, 1990)

2.1.16. Önerme: $R = Z$, m,n, birer pozitif tamsayı ve p asal sayı olmak üzere

$$M = (Z/Zp^n) \oplus (Z/Zp^m)$$

olsun. $|n - m| \leq 1$ dir ancak ve ancak M (*) koşulunu sağlar.

Kanıt: M'nin (*) koşulunu sağladığını ve $n \leq m$ olduğunu vasayalım. $K = (\overline{1}, (\overline{p})^{m-1})Z$ M'de bir tamlayandır. f: $K \rightarrow M$;

$$f:(\overline{1}, (\overline{p})^{m-1}) = (\overline{0}, \overline{1})$$

bir Z-homomorfizmasıdır. Varsayımdan f, $g: M \rightarrow M$ olan bir Z-homomorfizmasına genişler $\overline{a}, \overline{b} \in Z/Zp^n$, $\overline{c}, \overline{d} \in Z/Zp^m$ için

$$g(\overline{1}, \overline{0}) = (\overline{a}, \overline{b}),\ g(\overline{0}, \overline{1}) = (\overline{c}, \overline{d})$$

olsun. Buradan

$$(\overline{0}, \overline{0}) = g(\overline{1}, \overline{0})p^n = (\overline{0}, \overline{b}p^n) \ldots (2.1.1)$$

dir. $n - m \geq 2$ olduğunu varsayalım. (2.1.1.) eşitliğinden p b'yi böler. Diğer taraftan

$$(\overline{0}, \overline{1}) = g(\overline{1}, (\overline{p})^{m-1}) = g(\overline{1}, \overline{0}) + g(\overline{0}, \overline{1})p^{m-1} = (\overline{a}, \overline{b}) + (\overline{0}, \overline{d}p^{m-1})$$

olur. Böylece p, $b + dp^{m-1}$-1'i böler, buradan p, 1'i böler. Bu bir çelişkidir. O halde $|n - m| \leq 1$ olur.

Tersine $|n - m| \leq 1$ olsun. Önteorem 2.1.15'den M CS-modül, dolayısıyla M (*) koşulunu sağlar.

2.1.17.Teorem: R temel ideal böldesi olsun. P ve Q R'de farklı idealler ise R-modül $M = (R/P) \oplus (R/Q)$ (*) koşulunu (CS-modül) sağlar.

Kanıt: K, M'de bir tamlayan altmodül olsun. $a + P \in R/P$, $b + Q \in R/Q$ olmak üzere

$\overline{0} \neq (\overline{a}, \overline{b}) \in K$ alalım

(i). $\overline{b} = \overline{0}$ olduğunu varsayalım. $\overline{a} \neq \overline{0}$ olduğundan $a \notin P$ dir. $r \in R$ ve $p \in P$ için $ar + p = 1$ olur. Böylece $(\overline{1}, \overline{0}) \in K$ ve $K = R/P$ veya $K = M$ dir. $\overline{a} = \overline{0}$ olduğunu varsayalım. Benzer şekilde $K = R/Q$ veya $K = M$ olur. Bu durumda $K \leq_d M$ olduğundan M (*) koşulunu sağlar.

(ii). $\overline{a} \neq \overline{0}, \overline{b} \neq \overline{0}$ olduğunu varsayalım. (i)'den $r \in R$, $p \in P$ için $ar + p = 1$ ve $(\overline{0}, \overline{0}) \neq (\overline{a}, \overline{b})r = (\overline{1}, \overline{br})$ olur. $\overline{br} \neq \overline{0}$ olmasindan $br \notin Q$ ve buradan $brp \notin Q$ olur. Böylece

$$(\overline{0}, \overline{0}) \neq (\overline{0}, \overline{brp}) = (\overline{p}, \overline{brp}) = (\overline{1}, \overline{b})p = (\overline{a}, \overline{b})rp \in K.$$

dır. Diğer taraftan $s \in R$ ve $q \in Q$ için $brps + q = 1$ dir. Yani

$$(\overline{0}, \overline{b})rps = (\overline{0}, \overline{1}) \in K$$

olur. Böylece $R/Q = K$ veya $K = M$ dir. Bu durumda $K \leq_d M$ olduğundan M (*) koşulunu sağlar.

2.1.18.Sonuç: p ve q farklı asallar olmak üzere Z-modül $M = (Z/Zp) \oplus (Z/Zq)$ (*) koşulunu (CS-modül) sağlar.

Kanıt: Teorem 2.1.17'den açıktır.

2.1.19.Teorem: M (*) koşulunu sağlayan free Z-modül ise M sonlu üreteçli Z-modüldür.

Kanıt: M (*) koşulunu sağlayan free Z-modül olsun. M'nin sonlu üreteçli olmadığını varsayalım. O zaman.bir $\varphi:M \to Q$ örten Z-homomorfizması vardır. Çekφ = K olsun. K free ve $M/K \cong Q$ olduğundan bir $N \leq M$ var ve $N/K \cong Z$ dir. Ayrıca

$$(M/K)/(N/K) \cong M/N \cong Q/Z$$

burulmalıdır. $N \cong K \oplus Z$, $K \oplus Z \leq_e M$ ve $K \leq_e M$ dir.Diğer taraftan rank(K) = rank(M) olduğundan $\alpha:K \to M$ Z-izomorfizması vardır. M'nin (*) koşulunu sağlamasından bir $\beta:M \to M$ Z-homomorfizması var ve her $x \in K$ için $\beta(x) = \alpha(x)$ dir.α izomorfizma olduğundan her $m \in M$ için bir $k \in K$ var ve $\beta(m) = \alpha(k) = \beta(k)$ dır. Buradan $\beta(m\text{-}k) = 0$ ve $m\text{-}k \in$ Çekβ olur.Böylece M = Çekβ + K olur. $z \in$ Çek$\beta \cap K$ alalım. $z \in K$ ve $\beta(z) = \alpha(z) = 0$ olduğundan $z = 0$ olur. Buradan $M = K \oplus$ Çekβ çıkar. Fakat Çek$\beta \cong Q$ ve M free Z-modül olduğundan bu bir çelişkidir. O halde M sonlu üreteçlidir.

2.1.20. Örnek: K bir cisim ve V bir K-vektör uzayı, $\text{boy}_K V = n$ ($n \in Z^+$) olsun.

$$R = \begin{bmatrix} K & V \\ 0 & K \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} k & v \\ 0 & k \end{bmatrix} : k \in K, v \in V \right\}$$

değişmeli bir halkadır. Üstelik

(i) R_R ayrışmaz bir modüldür.

(ii) R_R CS-modüldür ancak ve ancak $\text{boy}_K V = 1$ dir.(A. Tercan, 1992)

2.1.21.Örnek: R halkası Örnek 2.1.20'deki halka olsun. R_R (*) koşulunu sağlar ancak ve ancak R_R CS-modüldür.

Kanıt: R_R CS-modül ise R_R'nin (*) koşulunu sağladığı açık.

Tersine R_R (*) koşulunu sağlasın. $\text{boy}_K V = 1$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $\text{Boy}_K V = 2$ ve $V = v_1K + v_2K$, $\{v_1,v_2\}$nin K üzerinde V'nin bir tabanı olduğunu varsayalım.

$$I = \begin{bmatrix} 0 & v_1K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 & v_2K \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. I_R, J_R, R_R'de birer tamlayanve $f{:}I \to R$;

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bir R-homomorfizmasıdır. Kabulden bir $g{:}R \to R$ R-homomorfizması var ve $g|I = f$ dir. g homomorfizmasını $a \in K$, $v \in V$ için

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & v \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

ile tanımlıyalım. Böylece

$$\begin{bmatrix} 0 & v_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = g\left(\begin{bmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & v \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & v_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & av_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan $v_2 = av_1$ çıkar. Bu bir çelişkidr. O halde $boy_K V = 1$ ve Örnek 2.1.20'den R_R CS-modül olur.

2.2.GQ-İnjektif Modüller

2.2.1.Tanım: R bir halka ve M_R bir modül olsun. M'de bir tamlayana izomorf olan her $N \leq M$ ve $f:N \to M$ olan her R-homomorfizması için $g:M \to M$ olan bir R-homomorfizması var ve $g|N = f$ ise M'ye GQ-injektif (Generalized Quasi injective) modül denir.

Her GQ-injektif modülün (*) koşulunu sağladığı açıktır. Ancak bunun tersi genel olarak doğru değildir.

2.2.2.Örnek: $R = Z$ ve $M = Z \oplus Z$ olsun.

$$N = \{(2n,0): n \in Z\},$$

$$K = \{(n,n): n \in Z\}$$

M'nin altmodülleridirler. $(2n,0) \to (n,0)$ dönüşümü ile $N \cong K$ dır. Ayrıca $K \leq_c M$ dir. M, CS-modül olduğundan (*) koşulunu sağlar. M'nin GQ-injektif olduğunu varsayalım. $f:N \to M$; $f((2n,0)) = (n,0)$ bir Z-homomorfizmasıdır. Varsayımımız gereği $g:M \to M$ olan bir Z-homomorfizması var ve $g|N = f$ dir. $x,y \in Z$ için $g(1,0) = (x,y)$ olsun.

$$g(2,0) = (2x,2y) = f(2,0) = (1,0)$$

olur. Buradan $1 = 2x$ olur. Bu bir çelişkidir.Böylece M_R GQ-injektif modül değildir.

2.2.3.Önteorem: Bir M modülü (C_2)'yi sağlar ancak ve ancak M'nin bir diktoplananına izomorf olan her K altmodülü ve $f:K \to M$ olan her homomorfizma için $g:M \to M$ olan bir homomorfizma var ve $g|K = f$ dir.(A. Tercan and P.F. Smith, 1992)

2.2.4.Önteorem: Her GQ-injektif modül (C_2) koşulunu sağlar.

Kanıt: Önteorem 2.2.3'den açıktır.

2.2.5.Sonuç: M modülü süreklidir ancak ve ancak M CS ve GQ-injektif modüldür.

Kanıt: Önteorem 2.2.4'den açıktır.

2.2.6.Tanım: Her $N \leq_c M$ için bir $L \leq_d M$ var ve $L \cap N = 0$, $L \oplus N \leq_e M$ ise M modülüne (C_6) koşulunu sağlıyor denir.

Her CS-modülün (C_6) koşulunu sağladığı açıktır. Fakat bunun tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin, p bir asal sayı olmak üzere $M = (Z/Zp) \oplus Q$ olsun. $K \leq_c M$ için $K \leq_d M$ ise M (C_6)'yı sağlar. $K \leq_d M$ değilse $0 \neq q \in Q$ için $K = R(1+Zp,q)$ dur. $K \cap (Z/Zp \oplus 0) = 0$ ve $K \oplus (Z/Zp) \leq_e M$ dir. Böylece M (C_6) koşulunu sağlar. Ancak K diktoplam olmadığından M CS-modül değildir.

2.2.7.Önteorem: GQ-injektif M modülü için M CS-modüldür ancak va ancak M (C_6) koşulunu sağlar.

Kanıt: M CS-modül ise M (C_6) koşulunu sağlar.

Tersine M (C_6) koşulunu sağlasın. $A \leq_c M$ olsun. (C_6) dan bir $N_2 \leq_d M$ var öyleki $A \cap N_2 = 0$ ve $A \oplus N_2 \leq_e M$ dir. O zaman bir $N_1 \leq M$ var ve $M = N_1 \oplus N_2$ dir. $i = 1,2$ için $\pi_i:M \to N_i$ doğal örten homomorfizmalar olsunlar. $\pi_1(A) \cong A$ ve $A \oplus N_2 \leq_e M$ olmasından $\pi_1(A) \leq_e N_1$ olur. $\pi_1(A) \cong A$ ve M GQ-ınjektif olduğundan $f: \pi_1(A) \to N_2$; $f(\pi_1(a)) = \pi_2(a)$ $(a \in A)$ homomorfizasının $g:M \to M$ olan bir genişlemesi vardır. $i_1:N_1 \to M$ içerim donüşümü olmak üzere $f_1:N_1 \to N_2$; $f_1 = \pi_2 g i_1$ bir homomorfizmadır ve $f_1|\pi_1(A) = f$ dir.

$$A^* = \{x + f_1(x) : x \in N_1\}$$

olsun $A^* \leq M$ ve her $a \in A$ için $a = \pi_1(a) + \pi_2(a) = \pi_1(a) + f_1(\pi_1(a))$ olmasından $A \leq A^*$olur. $x \in A^* \cap N_2$ olsun. Bir $y \in N_1$var ve $x = y + f_1(y) \Rightarrow x - f_1(y) = y \in N_1 \cap N_2$ $\Rightarrow x = 0$ olur.Böylece $A \oplus N_2 \leq A^* \oplus N_2 \Rightarrow A \leq_e A^*$ ve $A \leq_c M$ olmasından $A = A^*$ olur. Diğer taraftan her $m \in M$ için $n_1 \in N_1$, $n_2 \in N_2$ olmak üzere

$$m = n_1 + n_2 = \pi_1(m) + \pi_2(m) = \pi_1(m) + f_1(\pi_1(m)) - f_1(\pi_1(m)) + \pi_2(m) \in A^* \oplus N_2$$

olur. Böylece $A = A^* \leq_d M$ dir.

2.2.8.Sonuç: M modülü süreklidir ancak ve ancak M GQ-injektif ve (C_6) koşulunu sağlar.

Kanıt: Önteorem 2.2.7'den açıktır.

2.2.9.Teorem: R, değişmeli bir tamlık bölgesi olsun.

$$S=\begin{bmatrix} R & R \\ 0 & R \end{bmatrix},$$

halkası, değişmeli tamlık bölgesidir. Eğer (*) koşulunu sasğlayan her S-modül GQ-injektif ise R cisim olur.

Kanıt: $0 \neq x \in R$ için

$$K=\begin{bmatrix} xR & R \\ 0 & xR \end{bmatrix}$$

S_S'nin bir altmodülüdür. $r,s \in R$ için $f{:}K \to M$;

$$f\left(\begin{bmatrix} xr & s \\ 0 & xr \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} r & s \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

ile $K \cong S$ dir. Kabulden S_S, GQ-injektif modüldür. O halde bir $g{:}S \to S$ homomorfizması var ve $g \mid K = f$ dir. $a,b \in R$ için

$$g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

olsun. Buradan

$$g\left(\begin{bmatrix} xr & s \\ 0 & xr \end{bmatrix}\right)=g\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} xr & s \\ 0 & xr \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} xr & s \\ 0 & xr \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} axr & as+bxr \\ 0 & axr \end{bmatrix}$$

dir. Diğer taraftan

$$g\left(\begin{bmatrix} xr & s \\ 0 & xr \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} xr & s \\ 0 & xr \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} r & s \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

dir. Böylece $axr = r \Rightarrow ax = 1 \Rightarrow x$ tersinir olur. Buradan R cisim çıkar.

3. CESS-MODÜLLER

Bu bölümde, P.F. Smith (1990) tarafindan tanımlanan CESS-modüllerin yapısı incelenerek, bir R halkasının yarı artinian ve Dedekind bölgesi olması için gerek ve yeter koşullar verildi.

3.1. CESS-Modül Yapısı.

3.1.1.Tanım:M bir modül olsun. Eğer sokulu esas olan her $K \leq_c M$, M'nin diktoplananı oluyorsa M modülüne CESS-modül (Complement with essential socle is a direct summand) denir.

CS-modül ve sokulu sıfır olan modüllerin CESS-modül oldukları açıktır.

3.1.2.Önteorem: Bir CESS-modülün her dik toplananıda CESS-modüldür. (P.F.Smith, 1990)

3.1.3.Önteorem: Bir M modülü CESS-modüldür ancak ve ancak Sok(M)'yi esas olarak kapsayan her tamlayan CS-modül ve M'nin dik toplananıdır. (P.F.Smith, 1990)

3.1.4.Sonuç:M_1 yarıbasit ve $Sok(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun. M CESS-modüldür.

Kanıt: $Sok(M) = M_1$ ve $M_1 \leq_d M$ olduğundan Önteorem 3.1.3'den $M = M_1 \oplus M_2$ CESS-modüldür.

3.1.5.Önteorem:M, sokulu esas olan bir modül olsun. M CESS-modüldür ancak ve ancak M CS-modüldür.

Kanıt: Her $K \leq_c M$ için $Sok(K) \leq_e K$ olduğundan kanıt açıktır.

3.1.6.Önerme: R bir halka, M_i $(1 \leq i \leq n)$ sonlu tane R-modül ve

$$M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$$

olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M CESS-modüldür.

(ii)M'nin herhangi bir yarı-basit altmodülünü esas olarak kapsayan her K tamlayanı için bazı $(1 \leq i \leq n)$ için $K \cap M_i = 0$ ise $K \leq_d M$ dir.

Kanıt: (ii)⇒(i). $Sok(K) \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_c M$ ve $M' = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_{n-1}$ olsun.H, K içinde $(M' \cap K)$' nın tamlayanı olsun. $K \leq_c M$ olduğundan $H \leq_c M$ olur.

$Sok(H) = H \cap Sok(K) \leq_e H \cap K = H$ ve $H \cap M_n = 0$ olur.(ii)'den $H \leq_d M$ dir. Buradan bir H' var ve $M = H \oplus H'$ dır.Modülariteden

$$K = K \cap M = K \cap (H \oplus H') = H \oplus (H' \cap K)$$

olur. $K \cap H' \leq_d K \leq_c M$ olduğundan $K \cap H' \leq_c M$ ve $Sok(K \cap H') \leq_e K \cap H'$, ayrıca $(K \cap H') \cap M_1 = 0$ olur. (ii)'den $K \cap H' \leq_d M$ dir. $K \cap H' \leq H'$ olduğundan $K \cap H' \leq_d H'$ dür. Böylece $K = H \oplus (K \cap H') \leq_d M$ olur. Bu da M'nin CESS-modül olduğunu verir.

(i)⇒(ii).Tanımdan açıktır.

3.1.7.Sonuç: R bir halka ve M_i $(1 \leq i \leq n)$ ler sonlu tane göreceli injektif R-modül ailesi olsun. $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$ CESS-modüldür ancak ve ancak her $1 \leq i \leq n$ için M_i CESS-modüldür.

Kanıt: M CESS-modül olsun. Önteorem 3.1.2'den her $1 \leq i \leq n$ için M_i CESS-modül olur.

Tersine her $1 \leq i \leq n$ için M_i CESS-modül ve göreceli-injektif olsunlar. n üzerinde tümevarım metodunu kullanarak kanıt yapalım. Bu nedenle genelliği bozmadan $n = 2$ kabul edebiliriz. $M = M_1 \oplus M_2$ ve $Sok(K) \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_c M$ olsun.

(i) $K \cap M_1 = 0$ olduğunu varsayalım.Önteorem 2.1.8'den bir $M' \leq M$ var öyleki $M = M_1 \oplus M'$ ve $K \leq M'$ dür. Ayrıca $M_2 \cong M'$ olduğundan M' CESS-modül olur. Böylece $K \leq_d M' \leq_d M$ olmasından, M CESS-modül olur.

(ii) $K \cap M_1 \neq 0$ olduğunu varsayalım. K_1, $K \cap M_1$'in K'daki tamlayanı olsun. $Sok(K_1) = K_1 \cap Sok(K) \leq_e K_1 \leq_c K \leq_c M$ ve $K_1 \cap M_1 = 0$ olduğundan (i)'den bir $M_2' \leq_d M$ var ve $M_2' \cong M_2$ dir. Ayrıca $K_1 \leq_d M_2'$ olur. Bir $K_2 \leq M_2'$ için $M_2' = K_1 \oplus K_2$ ve $M = K_1 \oplus K_2 \oplus M_1$ olmasından $K = (K \cap (K_2 \oplus M_1)) \oplus K_1$ olur. $N = K \cap (K_2 \oplus M_1)$ olsun. $0 \neq x \in N$ için bir $0 \neq r \in R$ var öyleki $0 \neq xr \in (M_1 \cap K) \oplus K_1$ ve $y \in M_1 \cap K$, $z \in K_1$ için $xr = y + z \Rightarrow xr - y = z \in N \cap K_1 = 0$ olmasından $xr \in N \cap M_1$ olur. Böylece $N \cap M_1 \leq_e N$ olur. Ancak $(N \cap M_1) \cap (N \cap K_2) \leq K_2 \cap M_1 = 0$ olması $N \cap K_2 = 0$ olduğunu verir. M_1, K_2-injektif ve M_1, K_2 modüllerinin CESS-modül olmalarından $N \leq_d K_2 \oplus M_1$ olur. Böylece M CESS-modül olur.

3.1.8. Önerme: R bir halka ve M CESS R-modül olsun. M, $Sok(M) = Sok(M_1) \leq_e M_1$ olan CS M_1 modülü ve $Sok(M_2) = 0$ olan M_2 modülünün dik toplamıdır.(P.F.Smith,1990)

3.1.9. Önteorem: Sokulu sonlu üretilmiş bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M CESS-modüldür.

(ii) M'nin herhangi bir basit altmodülünü esas olarak kapsayan her tamlayan M'nin dik toplananıdır.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii). Tanımdan açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i). $Sok(K) \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_c M$ olsun. U, K'nın basit bir altmodülü olsun. $U \leq_e L \leq_c K$ olacak şekilde $L \leq_c K$ vardır. $K \leq_c M$ olduğundan $L \leq_c M$ ve kabulden $L \leq_d M$ olur. Böylece bir $L_1 \leq M$ var ve $M = L \oplus L_1$ dir. Modulariteden

$$K = K \cap M = K \cap (L \oplus L_1) = L \oplus (K \cap L_1)$$

olur. $Sok(K) = U \oplus Sok(K \cap L_1) \leq_e L \oplus (K \cap L_1)$ olmasından $Sok(K \cap L_1) \leq_e K \cap L_1$ olur. Sok(M) sonlu üretilmiş olduğundan Sok(K)'da sonlu üretilmiş olur. Böylece Sok(K)'nın dik toplanan sayısı üzerinde tümevarım metodu ile $K \cap L_1 \leq_d M$ bulunur. Böylece M CESS-modül olur.

3.1.10.Önteorem: M bir modül ve M/Sok(M) basit olsun. M CESS-modüldür ancak ve ancak M CS-modüldür.

Kanıt: M CESS-modül olsun. M/Sok(M) basit olduğundan Sok(M), M'nin maximal altmodülüdür. $K \leq_c M$ için $\frac{K + Sok(M)}{Sok(M)} \leq \frac{M}{Sok(M)}$ olmasından $\frac{K + Sok(M)}{Sok(M)} = 0$ veya $K + Sok(M) = M$ dir.

(i) $\frac{K + Sok(M)}{Sok(M)} = 0$ ise $K \leq Sok(M)$ ve $Sok(K) \leq_e K$ olur. M CESS-modül olduğundan $K \leq_d M$ olur.

(ii) $K + Sok(M) = M$ olsun. $N = K \cap (Sok(M))$ olsun. O zaman bir $L \leq Sok(M)$ var ve $Sok(M) = N \oplus L$ dir. Buradan $M = K + Sok(M) = K + (N \oplus L) = K \oplus L$ olur. Böylece M CS-modül olur.

Tersi açıktır.

3.2.CESS-Modüller İçin Bir Direktoplam Ayrışımı

Önteorem 3.1.2'de bir CESS-modülün her dik toplananında CESS-modül olduğunu görüldük. Ancak Önteorem 3.1.2'min tersi genel olarak doğru değildir.Ayrıca Önteorem 3.1.8'de herhangi bir CESS-modül M'nin sokulu esas olan CS M_1 modülü ile sokulu sıfır olan M_2 modülünün diktoplamı olarak yazılabileceğini görüldük. Ancak Önteorem 3.1.8'in tersinin de genel olarak doğru olmadığı Y. Zhou (1994) tarafindan verilen tersörnekle kanıtlandı. Bu kesimde önce Y. Zhou (1994) tarafindan verilen bu tersörneğin daha genel bir durumu kanıtlayıp, Önerme 3.1.8'in hangi koşullar altında doğru olduğu araştırılacaktır. Önce Y. Zhou (1994) tarafindan verilen tersörneği verelim.

3.2.1. Önek: Z-modül $Z_2(\infty)$ ve aşağıda tanımlanan toplama ve çarpma işlemi ile $R = Z \oplus Z_2(\infty)$ olsun. $n,m \in Z$ ve $a,b \in Z_2(\infty)$ için.

$$(n , a) + (m , b) = (n + m , a + b) \text{ ve}$$

$$(n , a)(m , b) = (nm , nb + ma).$$

$M_1 = R_R$ olsun. $\text{Sok}(M_1) = (0) \oplus Z_2 \leq_e M_1$ ve M_1 CS-modüldür. $I = (0) \oplus Z_2(\infty)$ ve $M_2 = R/I$ olsun. $\text{Sok}(M_2) = 0$ dır. $M = M_1 \oplus M_2$ CESS-modül değildir.

Kanıt:

$$N = \{((2n , a) , (n , 0) + I) : n \in Z \text{ ve } a \in Z_2(\infty)\}$$

olsun.

(1) N, M'nin. altmodülüdür: $((2n , a),(n , 0) + I),((2m , b),(m , 0) +I) \in N$ ve $(l , c) \in R$ için

$$((2n , a) , (n , 0) +I) + ((2m , b) , (m , 0) +I) = ((2(n + m) , a + b) , (n + m , 0) + I) \text{ ve}$$

$$((2n , a) , (n , 0) + I) (l , c) = ((2nl , 2nc + la) , (nl , 0)).$$

(2) $Sok(N) \leq_e N$ dir: Herhangi bir $0 \neq ((2n\ ,\ a)\ ,\ (n\ ,\ 0) + I) \in N$ için $n \neq 0$ ise bir $y \in Z_2(\infty)$ var öyleki $0 \neq 2ny \in Z_2$ ve böylece

$$0 \neq ((0\ ,\ 2ny)\ ,\ (0\ ,\ 0) + I) = ((2n\ ,\ a)\ ,\ (n\ ,\ 0) + I)\ (0\ ,\ y) \in N \cap Sok(M) = Sok(N)$$

dir. Eğer $n = 0$ ise $0 \neq a \in Z_2(\infty)$ ve bazı $k \in Z$ ler için $0 \neq ka \in Z_2$ ve böylece

$$0 \neq ((0\ ,\ ka)\ ,\ (0\ ,\ 0) + I) = ((0\ ,\ a)\ ,\ (0\ ,\ 0) + I)\ (k\ ,\ 0) \in N \cap Sok(M) = Sok(N).$$

(3) $N \leq_c M$ dir: N'nin M'de P gibi bir öz esas genişlemesinin var olduğunu kabul edelim. O zaman $n \neq 2m$ olacak şekilde $0 \neq ((n\ ,\ a)\ ,\ (m\ ,\ 0) + I) \in P\text{-}N$ var.

$$((2n\ ,\ 2a)\ ,\ (2m\ ,\ 0) + I) = ((n\ ,\ a)\ ,\ (m\ ,\ 0) + I)\ (2\ ,\ 0) \in P$$

ve $((2n\ ,\ 2a)\ ,\ (n\ ,\ 0) + I) \in N$ olduğundan

$$0 \neq ((0\ ,\ 0)\ ,\ (n - 2m\ ,\ 0) + I) = ((2n\ ,\ 2a)\ ,\ (n\ ,\ 0) + I) - ((2n\ ,\ 2a)\ ,\ (2m\ ,\ 0) + I) \in P$$

dir. Üstelik bir $(l\ ,\ c) \in R$ var öyleki $0 \neq ((0\ ,\ 0)\ ,\ (n - 2m\ ,\ 0) + I) \in N$, yani $0 \neq ((0\ ,\ n)\ ,\ ((n - 2m)l\ ,\ 0) + I) \in N$ olur.

(4) N, M'nin diktoplamı değildir: $N \leq_d M$ olduğunu varsayalım. O zaman bir $0 \neq X \leq M$ var ve $M = N \oplus X$ dir. $((n\ ,\ a)\ ,\ (m\ ,\ 0) + I) \in X$ olması $n = 0$ olmasını gerektirir. Gerçektende, Eğer $n \neq 0$ ise bazı $y \in Z_2(\infty)$ ler için $0 \neq ny$ ve böylece

$$0 \neq ((0\ ,\ ny)\ ,\ (0\ ,\ 0) + I) = ((n\ ,\ a)\ ,\ (m\ ,\ 0) + I)\ (0\ ,\ y) \in N \cap X = 0$$

olur. Bu bir çelişkidir. $M = N \oplus X$ olduğundan $((2n\ ,\ a)\ ,\ (n\ ,\ 0) + I) \in N$ ve $((0\ ,\ b)\ ,\ (m\ ,\ 0) + I) \in X$ var ve

$$((1,0),(0,0) + I) = ((2n,a),(n,0) + I) + ((0,b),(m,0) + I) = ((2n,\ a + b),(n + m,\ 0) + I)$$

olur. Buradan $1 = 2n$ çıkar. Bu bir çelişkidir. Böylece $M = M_1 \oplus M_2$ CESS-modül değildir.

3.2.2. Önteorem: R değişmeli bir halka ve X aşağıdaki koşulları sağlayan bir R-modül olsun.

(i) $Sok(X) \leq_e X$ ve $Sok(X)$ basit altmodüldür.

(ii) Bir $Y \leq X$ var öyleki $Z(X) \leq Y$ ve $Sok(X/Y) = 0$ dır

R-modül $M = X \oplus (X/Y)$'nin CESS-modül olduğunu varsayalım. O zaman $Ann_{X/Y}(a) = 0$ olmak üzere her $a \in R$ için $X = Xa + Y$ dir.

Kanıt: $Sok(X/Y) = 0$ olması $Sok(X) \leq Y$ olmasını gerektirir. $Sok(X) \leq_e X$ olduğundan $Y \leq_e X$ olur. $x_1,x_2 \in X$, $x_1 \notin Y$ için $N = (x_1, x_2 + Y)R$ olsun. $Y \leq_e X$ olmasından bir $E \leq_e R$ ideali var ve $x_2E \leq Y$ olur. $x_1 \notin Z(X)$ olduğundan $x_1E \neq 0$ dır. Böylece $N \cap (X \oplus 0) \neq 0$ ve buradan $Sok(N) \neq 0$ olur.

$Ann_{X/Y}(a) = 0$ olacak şekilde $a \in R$ olsun.

$$K = \{(u , v + Y) \in M: u,v \in X \text{ ve } u - va \in Y\}$$

olsun. K'nın bir altmodül olduğunu görmek kolaydır. $0 \neq (u , v + Y) \in K$ olduğunu varsayalım. Eğer $u = 0$ ise $u - va \in Y$ olmasından $va \in Y$ ve buradan $v \in Y$ olur. Böylece $u \neq 0$ dır. $Y \leq_e X$ olduğundan bir $0 \neq r \in R$ var ve $0 \neq ur \in Y$ dir. $(ur , vr + Y) \in K$ ve $ur - vra \in Y$ olması $vr \in Y$ olmasını verir. Böylece $(u , v + Y)R \cap (X \oplus 0) \neq 0$ ve $Sok((u , v + Y)R) \neq 0$ olur. Buradan da $Sok(K) \leq_e K$ çıkar.

Şimdi, K'yı esas olarak kapsayan bir $L \leq M$ olduğunu varsayalım. $z_1,z_2 \in X$ için $(z_1 , z_2 + Y) \in L$ olsun. O zaman $(z_1a , z_2a + Y) \in L$, $(z_1a , z_1 + Y) \in K \leq L$ ve böylece $(0 , (z_2a - z_1) + Y) \in L$ olur. $K \cap (X \oplus 0) \leq_e K$ olmasından $K \cap (X \oplus 0) \leq_e L$ olur. Böylece $((z_2a - z_1) + Y) = 0 \Rightarrow (z_2a - z_1) \in Y \Rightarrow (z_1 , z_2 + Y) \in K$ olur. Yani $K \leq_c M$ olur.

Varsayımımız gereği, M CESS-modül olduğundan bir $K_1 \leq M$ var ve $M = K \oplus K_1$ olur. $x_1,x_2 \in X$, $x_1 \notin Y$ için $(x_1 , x_2 + Y) \in K_1$ olursa yukarıdaki açıklamalardan $Sok(K_1) \neq 0$

olur. Bu ise $K \cap K_1 \neq 0$ olmasını gerektirir. Böylece $K_1 \leq Y \oplus (X/Y)$ olur. $x \in X$ olsun. $w_1, w_2, w_3, w_4 \in X$ ve $(w_1 , w_2 + Y) \in K$, $(w_3 , w_4 + Y) \in K_1$ için

$$(x , 0) = (w_1 , w_2 + Y) + (w_3 , w_4 + Y)$$

olmasından $x = w_1 + w_3$ olur. $(w_1 - w_2a) \in Y$, $w_3 \in Y$ olduğundan $x \in Xa + Y$ çıkar.

3.2.3.Teorem: Cisim olmayan her değişmeli bölge S için bir değişmeli R halkası ve R'nin bir I ideali var ve aşağıdaki koşulları sağlar.

(i) $(R/I) \cong S$ ve $I^2 = 0$,

(ii) R-modül R düzgün, Sok(R) basit ve $Sok(R) \leq_e R$, $Sok(R/I) = 0$ ve R-modül $R \oplus (R/I)$ CESS-modül değildir.

Kanıt: S cisim olmayan değişmeli bir halka, U basit S-modül ve $E = E(U)$ olsun.

$$R = \{\begin{bmatrix} s & e \\ 0 & s \end{bmatrix} : e \in E, s \in S\}$$

matrisler üzerindeki bilinen toplama ve çarpma işlemlerine göre değişmeli bir halkadır.

$$I = \{\begin{bmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : e \in E \}$$

olsun. I, R'de esas bir idealdir. $I^2 = 0$, $(R/I) \cong S$ ve $I = Z(R)$ olduğu açıktır. Böylece

$$Sok(R_R) = \{\begin{bmatrix} 0 & e \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : e \in U\}$$

olur. $Sok(R_R) \leq_e R_R$ ve $Sok(R_R)$ basit olduğundan R_R düzgün dolayısıyla CS-modüldür. Üstelik $Sok(R/I) = 0$ olur.

R-modül $R \oplus (R/I)$'nın CESS-modül olduğunu varsayalım. $0 \neq b \in S$ ve

$$a = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \in R$$

olsun. I asal ideal olduğundan, $Ann_{R/I}(a) = 0$ olur. Önteorem 3.2.2'den $R = Ra + I$ ve buradan $S = Sb$ olur. Bu ise S'nin cisim olmaması ile çelişir.

3.2.4.Önteorem: M_1 sokulu esas olan bir CS-modül, M_2 sokulu sıfır olan bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun.

(i) M_1 yarı basitdir.

(ii) Sok(M) tek bir tamlayan tarafindan esas olarak kapsanır.

(iii) Her $N \leq M_1$ için $Hom(N, M_2) = 0$ dır.

(iv) M_2, M_1-injektiftdir.

(v) M CESS-modüldür.

Yukarıdaki koşullar arasında (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) geçişi vardır.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) Açık.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). N, M_1'in bir altmodülü ve $\varphi: N \to M_2$ bir homomorfizma olsun. L, M_1'de N'nin tamlayanı olsun. O zaman $N \oplus L \leq_e M_1$ ve φ, $\theta: N \oplus L \to M_2$ homomorfizmasına genişler. $Sok(M_1) = Sok(N) \oplus Sok(L) \leq N \oplus L$ olur.

$$H = \{x + \theta(x) : x \in N \oplus L\}$$

olsun. H, M'nin bir altmodülü ve $Sok(M_2) = 0$ olduğundan $Sok(M_1) \leq Çek\theta$ ve böylece $Sok(M_1) \leq H$ olur. Diğer taraftan $x \to x + \theta(x)$ ile $H \cong N \oplus L$ dir. Buradan $Sok(H) \leq_e H$ ve böylece $Sok(M) = Sok(M_1) \leq_e H$ olur.

Sok(M) tek bir tamlayan tarafindan esas olarak kapsandığından ve bu tamlayan M_1 olduğundan $H \leq M_1$ ve $\theta = 0$ olur. Böylece $\varphi = 0$ çıkar.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Açık.

(iv) $\Rightarrow$ (v). K, M'nin bir yarı basit altmodülünü esas olarak kapsayan herhangi bir tamlayanı olsun. Sok(M_2) = 0 olduğundan $K \cap M_2 = 0$ dır. Önteorem 2.1.8'den bir $M' \leq M$ var öyleki $M = M' \oplus M_2$, $K \leq M'$ ve $M_1 \cong M'$ olduğundan M' CS-modüldür. $K \leq_c M$ olduğundan $K \leq_c M'$ dür. M' CS-modül olduğundan $K \leq_d M' \leq_d M$ olur. Böylece M CESS-modül olur.

3.2.5.Sonuç: M_1 sokulu esas olan bir CS-modül, M_2 tekil olmayan ve sokulu sıfır olan bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ CESS-modüldür.

Kanıt: K, M'de Sok(M)'yi esas olarak kapsayan bir tamlayan olsun. Sok(M) = Sk(M_1) $\leq$ K ve K/Sok(M_1) tekil bir modüldür. Buradan

$$(K + M_1)/M_1 \cong K/(K \cap M_1)$$

tekildir. Fakat M_2 tekil değildir. Böylece $K \leq M_1$ ve K'nın tamlayan olmasından $K = M_1$ olur. Bu ise Sok(M_1)'in tek bir tamlayan tarafından esas olarak kapsandığını verir. Böylece Önteorem 3.2.4'den M CESS-modül olur.

3.2.6.Sonuç: Sok(Z(M)) $\leq_e$ Z(M) olacak şekilde M bir modül olsun. O zaman M CESS-modüldür ancak ve ancak Sok(M_1) $\leq_e M_1$ olan bir CS-modül M_1 ve M_2 sokulu sıfır olan bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

Kanıt: ($\Rightarrow$:) Önteorem 3.1.8'den açık.

($\Leftarrow$:) $Z(M) \cap M_2 \neq 0$ olduğunu varsayalım. O zaman Sok(M_2) $\neq 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Boylece $Z(M) \cap M_2 = 0$ olur. Sonuç 3.2.5'den M CESS-modül olur.

3.2.7.Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun.Eğer M'nin sıfırdan farklı her homomorfik görüntüsü, sıfırdan farklı sokula sahip ise M modülüne yarı artinian denir.

Eğer sağ R-modül R yarı artinian ise R'ye sağ yarı artinian halka denir. R sağ yarı artinian ise her sağ R-modül yarı artiniandır.

3.2.8.Önerme: M modülü yarı artinian ve $N \leq M$ olsun. O zaman N ve M/N de yarı artinian olurlar.(N.V.Dung and P.F.Smith, 1992)

3.2.9.Teorem: R bir halka öyleki sokulu esas olan her sağ R-modül yarı artinian olsun. O zaman sağ R-modül M CESS-modüldür ancak ve ancak M_1 $Sok(M_1) \leq_e M_1$ olan bir CS-modül ve M_2 sokulu sıfır olan bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir

Kanıt: ($\Rightarrow$:) Önteorem 3.1.8'den açıktır.

($\Leftarrow$:) M_1 veM_2 belirtilen koşulları sağlamak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ olsun.$N \leq M_1$ ve $\varphi: N \to M_2$ bir homomorfizma, $Çek\varphi = K$ olsun. $N \neq K$ olduğunu varsayalım. $Sok(M_1) \leq_e M_1$ olduğundan M_1 yarı artinian ve böylece Önerme 3.2.8'den M_1/K esas sokula sahip olur. Buradan $Sok(N/K) \neq 0$ dır. Fakat $Im\varphi \cong N/K$ ve $Sok(Im\varphi) = 0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $N = K$, $\varphi = 0$ çıkar. Önteorem 3.2.4'den M CESS-modül olur.

Teorem 3.2.9 hangi halkalarda esas sokula sahip olan bütün modüller yarı artiniandır? sorusunu ortaya çıkarır.

3.2.10.Tanım: M bir modül ve A M'nin altmodüllerinin bir ailesi olsun. $\cap A = 0$ olması sonlu $F \subseteq A$ için $\cap F = 0$ oluyor ise M modülüne sonlu eşüreteçli modül denir.

3.2.11.Tanım: R bir halka olsun. R'nin her sonlu sağ eşüreteçli modülü Artinian ise R'ye sağ eş-Noetherian halka denir.

3.2.12.Önerme: R sağ eş-Noetheriandır ancak ve ancak her sağ R-modül M için Sok(M) sonlu üreteçli ve $Sok(M) \leq_e M$ dir.(P.Vamoch, 1976)

Kanıt: R sağ eş-Noetherian olsun. $Sok(M) = \bigoplus_{i \in I} M_i$; M_i basit olsun. $N_i = \bigoplus_{i \neq j} M_i$ olsun.

$\bigcap_{i \in I} N_i = 0$ olduğundan kabulden I'nın sonlu bir I_1 altkümesi var öyleki $\bigcap_{i \in I_1} N_i = 0$ dır.Eğer I sonsuz olursa $\alpha \in I$ ve $\alpha \notin I_1$ olacak şekilde var ve $0 \neq M_\alpha \subseteq \bigcap_{i \in I_1} N_i = 0$ olur.Bu bir çelişkidir. O halde I sanlu yani Sok(M) sanlu üreteçlidir.

A, M'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. Kabulden A Artinian olduğundan $Sok(A) \neq 0$ olur. Buradan $Sok(A) \cap Sok(M) \neq 0$ olur. Böylece $Sok(M) \leq_e M$ dir.

Tersi açıktır.

3.2.13.Önteorem: R sağ Noetherian, sağ eş-Noetherian halka olsun. O zaman sokulu esas olan her sağ R-modül yarı artiniandır.

Kanıt: M sokulu esas olan bir sağ R-modül olsun. $N< M$ ve $m \in M$ ve $m \notin N$ olsun mR Noethrian R-modül ve $Sok(mR) = mR \cap Sok(M) \leq_e mR$ olur. Yani mR sonlu eşüreteçlidir. Varsayımımızdan mR Artinian olur. Buradan $(mR + N)/N \cong mR/(mR \cap N)$ Artinian olur. Böylece $Sok(M/N) \neq 0$ ve M yarı artinian olur.

Bölüm 3.1'de de belirtildiği gibi her CS-modül CESS-modüldür. Ancak bunun tersi genel olarak doğru değildir. Örneğin Z-modül M, Z'nin sonsuz dik toplamı olsun. M'nin sokulu sıfır olduğundan M CESS-modüldür.Oysa M.A.Kamal and B.J.Muller (1988)'de M'nin CS-modül olmadığını gösterdiler.

3.2.14.Teorem: Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) R halkası Noetheriandır.

(ii) İnjektif R-modüllerin her dik toplamı injektifdir.

(iii) Sayılabilir sonsuz sayıda basit R-modülün injektif kabuklarının her dik toplamıda injektifdir.(D.V.Sharpe and P.Vamos, 1972)

3.2.15.Önteorem: R herhangi bir halka, M_1 yarıbasit ve M_2 sokulu sıfır olan sağ R-modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ CS-modül olsun. O zaman M_1, M_2-injektifdir. (A.Harmancı and P.F. Smith, 1993)

3.2.16.Torem: Bir R halkası sağ yarı artiniandır ancak ve ancak her sağ CESS R-modül CS-modüldür.

Kanıt: R'nin sağ yarı-artinian olduğunu varsayalım. M sağ CESS R-modül olsun. Sok(M) $\leq_e$ M olduğundan. Önteorem3.1.5'den M CS-modüldür.

Tersine, her sağ CESS R-modül CS olsun. Sok(R_R) = 0 olduğunu varsayalım. V yarıbasit sağ R-modül olsun. Sonuç 3.1.4'den V ⊕ R CESS ve varsayım gereği CS dir. Önteorem 3.2.15'den N R-injektif olur. Böylece her yarıbasit sağ R-modül injectif olur.Teorem 3.2.14'den R sağ Noetherian olur.

U düzgün R-modül olsun. U ya basit yada Sok(U) = 0 dır.Böylece iki düzgün R-modülün dik toplamı CESS ve varsayımdan CS-modül olur. R = M alınırsa σ[M] = σ[R] = R modül kategorisi olur. R Noetherian olduğundan σ[R] deki her devirli modül sonlu düzgün boyuta sahip. Ayrıca σ[R] de iki düzgün modülün dik toplamı CS-modül olur. Böylece Önerme 1.9.3'den σ[R] deki her modül CS-modül olur. Buradan Önerme 1.9.4 (i) sağlanmış olur. (i)'nın (vii)'yi gerektirmesinden R sağ ve sol Artinian olur. Bu bir çelişkidir. O halde Sok(R_R) ≠ 0 olur.

R'nin öz ideali I için (R/I)'nın sağ sokulunun sıfırdan farklı olduğu açıktır. Buradan R sağ yarı artinian olur.

3.2.17.Tanım: R bir halka, M bir R-modül olsun. K $\leq_e$ K_1 ≤ Mve L $\leq_e$ L_1 ≤ M için K + L $\leq_e$ K_1 + L_1 oluyor ise M'ye UC-modül (Unique closure) denir.

UC-modüllere örnek olarak yarıbasit ve tekil olmayan modüller verilebilir. UC modüllerle CS-modüller arasında doğrudan bir gerektirme yoktur. Örneğin *Z*-modül M = (*Z*/*Z*p) ⊕ (*Z*/*Z*p^2) CS-modüldür. Ancak UC-modül değildir. Gerçektende, p = 2 alalım. L = (0, 2)*Z* ≤ M için L $\leq_e$ K = (1, 3)*Z* $\leq_c$ M ve L $\leq_e$ N = (0) ⊕ (*Z*/*Z*2^2) $\leq_c$ M olmasına rağmen K ≠ N dir.

3.2.18.Önteorem: Bir M modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M UC-modüldür.

(ii) $K \leq_c M$, $N \leq M$ ise $K \cap N \leq_c N$ dir.

(iii) $K \leq_c M$, $N \leq_c M$ ise $K \cap N \leq_c M$ dir.

(iv) Bir $K \leq_c M$ için M/K UC-modüldür.

(v) $K \leq_e K_1 \leq_c M$ ve $K \leq_e L \leq_c M$ ise $K_1 = L$ dir.

(vi) Bir R-modül X yokturki, X'in bir öz esas altmodülü Y için $X \oplus (X/Y)$ M içine gömülebilsin.

(vii) M'nin her altmodülü UC-modüldür. (P.F.Smith, 1993)

.**3.2.19.Önteorem:** R değişmeli bir bölge ve M UC R-modül olsun. O zaman M modülü ya burulmalı yada burulmasızdır.

Kanıt: M'nin ne burulmalı nede burulmasız olduğunu varsayalım. O zaman bir burulmalı $x \in M$ ve burulmalı olmayan $y \in M$ olalım. $xR \cap yR = 0$ ve $xR \oplus yR \leq M$ dir. Üstelik $yR \cong R$ ve R'nin bir A ideali için $xR \cong R/A$ olur. Böylece $xR \oplus yR$ M'nin içine gömülebilir. M UC-modül olduğundan bu bir çelişkidir. O halde M ya burulmalı yada burulmasız modüldür.

3.2.20.Önteorem: R herhangi bir halka ve M tek bir maksimal altmodül N'yi kapsayan sonlu üretilmiş R-modül olsun. O zaman N UC-modül ise M'de UC-modül olur.

Kanıt: L, M'nin öz altmodülü olsun. N tek maksimal olduğundan $L \leq N$ dir. K, N'de L'yi esas olarak kapsayan tek tamlayanı ve K_1'de M'de L'yi esas olarak kapsayan tamlayan olsun. Eğer $K_1 = M$ ise M, L'yi esas olarak kapsayan tek tamlayan olur. $K_1 \neq M$ ise $K_1 \leq N$ ve böylece $K_1 = K$ olur. Önteorem 3.2.18 (v)'den M UC-modül olur.

3.2.21.Önerme: R bir değişmeli halka ve P, R'nin maksimal ideali olsun. $V = R/P^2$ için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) P/P^2 devirli R-modüldür.

(ii) V düzgün R-modüldür.

(iii) V CS (CESS)-modüldür.

Kanıt:(i) $\Rightarrow$ (ii). P/P^2 devirli olsun. $R/P \cong P/P^2$ olduğundan P/P^2 basit R-modüldür. L/P^2, K/P^2 V'nin sıfırdan farklı ve $(L/P^2) \cap (K/P^2) = 0$ olan iki altmodülü olsun. Bu durumda ya $L/P^2 \leq P/P^2$ yada $K/P^2 \leq P/P^2$ olur. $K/P^2 \leq P/P^2$ olduğunu varsayalım. P/P^2 basit olduğundan $K/P^2 = 0$ veya $K/P^2 = P/P^2$ olur. $K/P^2 = P/P^2$ ise $V = (L/P^2) \oplus (P/P^2)$ dir. Buradan $\bar{x} \in P/P^2, \bar{y} \in L/P^2$ için

$$\bar{1} = \bar{x} + \bar{y} \Rightarrow \bar{x} = \bar{x}\bar{x} + \bar{y}\bar{x} = \bar{x}\bar{y} \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$$

olur. Bu bir çelişkidir. Böylece $V = R/P^2$ düzgün olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Açık.

(iii) $\Rightarrow$ (i). R/P^2 CS-modül ve $0 \neq L/P^2 < P/P^2$ olsun. O zaman $R/P^2 = (K_1/P^2) \oplus (K_2/P^2)$ ve $L/P^2 \leq_e K_1/P^2$ olacak şekilde K_1/P^2, $K_2/P^2 \leq R/P^2$ var. $K_1/P^2 \leq P/P^2$ ve $x \in K_1$, $y \in K_2$ için $1 - (x + y) \in P^2$ dir. $P^2 = K_1 \cap K_2$ olmasından $1 \in K_2$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece P/P^2 basit olur.

3.2.22.Sonuç: R halkası değişmeli bir bölge ve P, R'nin maksimal ideali olsun. O zaman R/P^2 UC-modül olur.

Kanıt: $L/P^2 \leq R/P^2$ olsun. P maksimal olduğundan $Ann_R(L/P^2) = P$ ve L/P^2 yarıbasit olur. Böylece Önteorem 3.2.20'den R/P^2 UC-modül olur.

3.2.23:Teorem: Bir değişmeli Noetherian bölge Dedekind'dır ancak ve ancak her UC R-modül CESS-modüldür.

Kanıt: Her UC R-modülün CESS olduğunu varsayalım. P, R'nin her hangi bir maksimal ideali olsun. Sonuç 3.2.23'dan R/P^2 UC ve varsayımdan CESS-modül olur.

$Sok(R/P^2) \leq_e R/P^2$ ve P/P^2 (R/P^2)'nin tek maksimal altmodülü olduğundan R/P^2 düzgündür. Önteorem 3.2.21'den P/P^2 devirlidir. Dolayısıyla R_P yerel halkası temel ideal bölgesi (PID) olur. Teorem 1.8.14'den R Dedekind bölgesi olur.

Tersine, R Dedekind bölgesi ve M UC R-modül olsun. Önteorem 3.2.19'dan M ya burulmalı yada burulmasız dır. Eğer M burulmasız ise Sok(M) = 0 olduğundan M CESS-modüldür.

M'nin burulmalı olduğunu varsayalım. O zaman $Sok(M) \leq_e M$ olur. R'nin herhangi bir maksimal ideali P için

$$M(P) = \{m \in M: mP^n = 0, \text{ n pozitif bir tamsayı}\}$$

olsun. Buradan

$$M = \bigoplus_{P \leq R} M(P)$$

olur. M UC-modül olduğundan her bir maksimal ideal P için M(P) ya yarıbasit yada düzgündür. Böylece M CESS-modül olur.

3.3.Nihai Yarıbasit CESS-Modüller.

3.3.1.Tanım: R bir halka ve M bir R-modül olsun. $M_i \leq M$ $(i \geq 1)$ altmodülleri ve her $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3 \oplus \ldots$ dik taplamı için bir k pozitif tamsayısı var ve her $i \geq k$ için M_i yarıbasit ise M modülüne nihai yarıbasit modül denir.

Nihai yarıbasit modüllere örnek olarak yarıbasit modüller ve sonlu düzgün modüller verilebilir. V.Camillo and M.F.Yousif (1991) M/Sok(M) sonlu düzgün boyuta sahip olduğunda M'nin nihai yarıbasit olduğunu kanıtladılar. Daha sonra P.F.Smith (1993) bir yarıbasit modül ile sonlu düzgün bir modülün diktoplamının da nihai yarıbasit olduğunu kanıtladı.

3.3.2.Önteorem: Bir M modülü için M/Sok(M) sonlu düzgün boyutlu ve $\oplus M_i$ $(i = 1,2\ldots)$ M'nin altmodüllerinin sonsuz diktoplamı olsun. O zaman bir k pozitif tamsayısı var ve her $i \geq k$ için $M_i \leq$ Sok(M) dir. (V.Camillo and M.F.Yousif, 1991)

3.3.3.Önteorem: Bir M modülü esas altmodüller üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlar ancak ve ancak M/Sok(M) noetherian (artinian) dır. (V.Camillo and M.F.Yousif, 1991)

3.3.4.Önteorem: M_1 yarıbasit bir modül ve M_2 sonlu düzgün boyuta sahip bir modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ nihai yarı basit modüldür.(P.F.Smity, 1993)

3.3.5.Teorem:R herhangi bir halka olsun. Bir R-modül M için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M nihai yarıbasit ve CESS-modüllerin bir diktoplamıdır.

(ii) M_1 yarıbasit, M_2 düzgün modüllerin sonlu bir diktoplamı ve M_3 sokulu sıfır olan sonlu düzgün boyuta sahip modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ dür.

Kanıt: (ii) $\Rightarrow$ (i). Önteorem 3.3.4'den açıkdır.

(i) $\Rightarrow$ (ii). M nihai yarıbasit ve CESS-modüllerin bir dik toplamı olsun. O zaman bir k pozitif tamsayısı ve M'nin altmodülleri X_i ($0 \leq i \leq k$) ler var öyleki X_0 yarıbasit, X_i ler CESS olmak üzere

$$M = X_0 \oplus X_1 \oplus \ldots \oplus X_k$$

olur. Önerme 3.1.5'den ($1 \leq i \leq k$) için X_i'yi ya CS yada $\mathrm{Sok}(X_i) = 0$ olarak alabiliriz.

$1 \leq i \leq k$ ve $X_i = X$ olsun. Eğer $\mathrm{Sok}(X) = 0$ ise nihai yarıbasit olmasından X sonlu düzgün boyuta sahipdir. $\mathrm{Sok}(X) \leq_e X$ olan CS-modül ise bir yarıbasit Y ve sonlu düzgün boyuta sahip U altmodülleri var öyleki $X = Y \oplus U$ dur. U CS ve sonlu düzgün boyuta sahip olduğundan U sonlu tane düzgün modülün diktoplamı olur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

3.3.6.Sonuç: R bir halka ve R-modül M CESS-modüllerin bir diktoplamı olsun. M nihai yarıbasit modüldür ancak ve ancak M, yarıbasit bir modül ile sonlu düzgün boyuta sahip bir modülün diktoplamıdır.

Kanıt: Teorem 3.3.4 ve Önteorem 3.3.3'den açıkdır.

3.3.7.Önerme: M bir CS-modülü olsun. O zaman

(i) Eğer M esas altmodüller üzerinde artan zincir koşulunu sağlıyor ise N noetherian ve S yarıbasit olmak üzere $M = N \oplus S$ dir.

(ii) Eğer M esas altmodüller üzerinde azalan zincir koşulunu sağlıyor ise A artinian ve S yarıbasit olmak üzere $M = A \oplus S$ dir.(V.Camillo and M.F.Yousif, 1991)

Önerme 3.3.7'nin genellemesi olan aşağıdaki sonuç verilebilir.

3.3.8.Sonuç: R herhangi bir halka ve R-modül M CESS-modüllerin bir diktoplamı olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M esas altmodüller üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlar.

(ii) M_1 yarıbasit ve M_2 Notherian (Artinian) olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

Kanıt:(ii) $\Rightarrow$ (i) Açık.

(i) $\Rightarrow$ (ii). M'nin esas altmodüller üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağladığını varsayalım. Önteorem 3.3.3'den M/Sok(M) Noetherian (Artinian) dır. Ayrıca Önteorem 3.3.2'den M nihai yarıbasit olur. Teorem 3.3.5'den M_1 yarıbasit, M_2 düzgün modüllerin diktoplamı ve $Sok(M_3) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ dür. M_3 Noetherian (Artinian) dır. Esas altmodüller üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlayan düzgün bir modül Noetherian (Artinian) olur. Böylece $M_2 \oplus M_3$ Noetherian (Artinian) olur.

3.3.9.Önteorem: R, injektif sağ R-modüllerin her sayılabilir ailesinin diktoplamı CS olan sağ tekil olmayan bir halka olsun. O zaman $S = Sok(R_R)$ olmak üzere R/S sağ Noetheriandır. (A.Harmancı et al,)

3.3.10.Tanım: R bir halka, c bir tamsayı ve M bir R-modül olsun. Eğer M'nin sıfırdan farklı altmodüllerinin her diktoplamı enfazla c tane diktoplanan kapsıyor ise M'ye c-limited modül denir.

3.3.11.Teorem: R tekil olmayan bir halka olsun. Her injektif sağ R-modüllerin diktoplamı bir CS-modül ile c-limited bir modülün diktoplamı olduğunu varsayalım. O zaman $S = Sok(R_R)$ olmak üzere

(i) R/S sağ Noetheriandır.

(ii) Ek olarak R'nin sağ düzgün boyutunun sonlu olduğunu varsayarsak, R sağ Noetheriandır.

Kanıt: (i). Bir c tamsayısı var ve injektif sağ R-modüllerinin her diktoplamının bir CS-modul ile c-limited bir modülün diktoplamı olduğunu varsayalım. $\{S_\omega : \omega \in \Omega\}$ basit sağ R-modüllerin izomorfizma sınıflarının temsilcilerinin bir ailesi ve $X = \bigoplus_{\omega \in \Omega} S_\omega$ olsun. $|\Lambda| \geq c$ olacak çekilde Λ bir damgalayan küme ve her bir $\lambda \in \Lambda$ için $X = X_\lambda$ olsun. $Y = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ ve $k = |E(Y)|$ olsun. I sayılabilir bir damgalayan küme, U_i, $(i \in I)$ basit sağ

R-modül ve her bir $i \in I$ için $E_i = E(U_i)$ ve $E = \bigoplus_{i \in I} E_i$ olsun. Π, $|\Pi| > k$ olacak şekilde bir damgalayan küme olsun. Her bir $\pi \in \Pi$ için $F_\pi = E$ ve $F = \bigoplus_{\pi \in \Pi} F_\pi$ olsun. Varsayımımızdan bir CS I modülü ve bir c-limited A modülü var ve $F = I \oplus A$ dır. $Sok(F) \leq_e F$ olduğundan $Sok(A) \leq_e A$ olur. Sok(A) en fazla c-tane basit modülün diktoplamı olduğundan $\theta : Sok(A) \to Y$ olan bir monomorfizma vardır. E(Y) injektif ve $Sok(A) \leq_e A$ olduğundan θ, $\varphi : A \to E(Y)$ olan bir monomorfizmaya genişler.

Buradan $|A| \leq |E(Y)| = k$ dır. Her bir $a \in A$ için sonlu bir $\Pi(a) \subseteq \Pi$ kümesi seçilebilir öyleki $a \in \bigoplus_{\pi \in \Pi(a)} F_\pi$. $\Pi' = \bigcup_{a \in A} \Pi(a)$ ve Π'', Π de Π''nün tamlayanı olsun. $|\Pi'| \leq k$ olduğundan Π'' boşküme değildir. $G = \bigoplus_{\pi \in \Pi'} F_\pi$ ve $H = \bigoplus_{\pi \in \Pi''} F_\pi$ olsun. O zaman

$$F = G \oplus H = I \oplus A \text{ ve } A \leq G.$$

Buradan $G = (I \cap G) \oplus A$ ve böylece

$$F = (I \cap G) \oplus A \oplus H = I \oplus A$$

dır. Üstelik $I \cong (I \cap G) \oplus H$ ve I CS olduğundan H CS-modül olur. Fakat Π'' boşkümeden farklı ve $H = \bigoplus_{\pi \in \Pi''} F_\pi$ olduğundan $F_\pi = E$ CS-modül olur. Buradan basit sağ R-modüllerin injektif zarflarının sayılabilir tane diktoplamı CS-modül olur. Böylece Önteorem 3.3.9'dan R/S Noetherian olur.

(ii). R, sonlu sağ düzgün boyuta sahip olsun. $S = Sok(R_R)$ sağ Noetherian olur. Ayrıca (i)' den R/S sağ Noetherian olduğundan R sağ Noetherian olur.

4. ZAYIF CS-MODÜLLER VE (P) ÖZELLİĞİ

4.1. Zayıf CS-Modüller.

4.1.1. Tanım: Bir M modülünün her yarıbasit altmodülü M'nin bir diktoplananı tarafından esas olarak kapsanıyor ise M'ye zayıf CS-modül denir.

Her CS (CESS)-modülün zayıf CS-modül olduğu açıktır. Ancak bunun tersi genel olarak doğru değildir.

4.1.2. Örnek: $R = Z$, p bir asal sayı olmak üzere $M = (Z/Zp) \oplus (Z/Zp^3)$ olsun. M zayıf CS-modül, ancak CESS-modül değildir (P.F.Smith, 1990).

Kanıt: S, M'de yarıbasit bir altmodül olsun. S basit değil ise $S \leq_e M$ dir. S basit olsun. O zaman $a,b \in Z$ ve $0 \leq a,b \leq p-1$ için $S = (a + Zp\ ,\ p^2b + Zp^3)Z$ dir. $a = 0$ ise $S \leq_e ((0) \oplus (Z/Zp^3))$ dir. $a \neq 0$ ise $M = S \oplus ((0) \oplus (Z/Zp^3))$ olur. Böylece M zayıf CS-modül olur. Ancak P.F. Smith (1990)'den M CESS-modül değildir.

4.1.3. Önteorem: M zayıf CS-modül olsun. O zaman $Sok(M) = Sok(M_1) \leq_e M_1$ ve $Sok(M_2) = 0$ olacak şekilde $M_1, M_2 \leq M$ var ve $M = M_1 \oplus M_2$ dir.

Kanıt: $S = Sok(M)$ olsun. M zayıf CS-modul olduğundan S, M'nin bir diktoplamı M_1 tarafından esas olarak kapsanır. Böylece bir $M_2 \leq M$ için $M = M_1 \oplus M_2$ olur.

4.1.4. Önteorem: M_1 yarıbasit ve M_2 zayıf CS-modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ zayıf CS-modüldür (P.F.Smith, 1990).

4.1.5. Önteorem: M_1 injektif ve M_2 zayıf CS-modül olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ zayıf CS-modüldür (P.F.Smith, 1990).

Bölüm 3.1'de bir CESS (CS)-modülün her diktoplamınında CESS (CS)-modül olduğunu görmüştük. Ancak bir zayıf CS-modülün bir diktoplamının zayıf CS-modül olup olmadığı açık bir sorudur. Bu bölümde, bu sorunun bazı özel durumlarda yanıtı araştırılacaktır.

4.1.6. Önteorem: M bir UC-modül olsun. O zaman M zayıf CS-modül ise M'nin her diktoplananı da zayıf CS-modüldür.

Kanıt: $K \leq_d M$ ve N, K'nın yarıbasit bir altmodülü olsun. $N \leq M$ ve M zayıf CS-modül olduğundan bir $N_1 \leq_d M$ var öyleki $N \leq_e N_1$ dir. Diğer taraftan $N \leq_e N_2$ olacak şekilde $N_2 \leq_c K$ vardır. Ayrıca $K \leq_d M$ olduğundan $N_2 \leq_c M$ olur. M UC-modül olduğundan $N_1 = N_2 \leq_d M$ ve $N_2 \leq_d K$ dır. Böylece K zayıf CS-modül olur.

4.1.7. Önerme: M_1 ve M_2 zayıf CS-modüller, M_1, M_2-injektif olsun. O zaman $M = M_1 \oplus M_2$ zayıf CS-modüldür.

Kanıt: N, M'nin yarıbasit bir altmodülü olsun.

(i) $N \cap M_1 = 0$: Önteorem 2.1.14'den bir $C \leq_d M$ var öyleki $C \cong M_2$, $N \leq C$ ve $M = C \oplus M_1$ dir. M_2 zayıf CS-modül olduğundan C zayıf CS-modüldür.Buradan bir $K \leq_d C$ var öyleki $N \leq_e K \leq_d C \leq_d M$ dir. Böylece M zayıf CS-modül olur.

(ii) $N \cap M_1 \neq 0$: Bir $N' \leq N$ için $N = (N \cap M_1) \oplus N'$ olsun. $N \cap M_1 \leq M_1$ ve M_1 zayıf CS-modül olduğundan bir $K_1 \leq_d M_1$ var öyleki $N \cap M_1 \leq_e K_1$ ve bir $K_2 \leq M_1$ için $M_1 = K_1 \oplus K_2$ dir. $N' \cap M_1 = 0$ olduğundan (i)'den bir $C_1 \leq_d M$ var öyleki $C_1 \cong M_2$, $N' \leq C_1$ ve $M = C_1 \oplus M_1$ dir. M_2 zayıf CS-modül olduğundan bir $C_2 \leq_d C_1$ var öyleki $N' \leq_e C_2$ ve bir $C_3 \leq_d C_1$ için $C_1 = C_2 \oplus C_3$ olur. Böylece

$$M = M_1 \oplus C_1 = K_1 \oplus K_2 \oplus C_2 \oplus C_3$$

olur. $N = (N \cap M_1) \oplus N' \leq_e K_1 \oplus C_2 \leq_d M$ olduğundan M zayıf CS-modül olur.

4.1.8. Önteorem: $Sok(M_1) \leq_e M_1$ ve $Sok(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ UC-modül olsun. O zaman her $K \leq M_j$ $(i \neq j)$ için $Hom(K, M_i) = 0$ olur.

Kanıt: $K \leq M_2$ ve $0 \neq f \in Hom(K, M_1)$ olsun. $f(K) \leq M_1$ olduğundan $f(K) \cap Sok(M_1) \neq 0$ dır. U, f(K)'n ın basit altmodülü olsun. $L = f^{-1}(U) \cap Ker f$ olsun. L, $f^{-1}(U)$'nun maksimal altmodülüdür. L'nin $f^{-1}(U)$'da esas olmadığını varsayalım. O zaman bir basit $L_1 \leq M_2$ için

$f^{-1}(U) = L_1 \oplus L$ olur. $Sok(M_2) = 0$ olduğundan $L_1 = 0$ ve $f^{-1}(U) = L$ olur. Buradan $L \leq_e f^{-1}(U)$ dır. Böylece $(f^{-1}(U)/L) \oplus f^{-1}(U)$, $M = M_1 \oplus M_2$ içine gömülebilir. Önteorem 3.2.18'den M'nin UC-modül olması ile çelişir. Böylece $f = 0$ olur.

$K \leq M_1$ için Önteorem 3.2.4'den $Hom(K, M_2) = 0$ dır.

4.1.9. Sonuç: $Sok(M_1) \leq_e M_1$ ve $Sok(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ UC-modül olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M CS-modüldür.

(ii) M_1 ve M_2 CS-modüllerdir.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) açık.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Önteorem 4.1.8 ve 2.1.8'den açık.

4.1.10. Sonuç: $Sok(M) \leq_e M$ olmak üzere M UC-modül olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir.

(i) M zayıf CS-modüldür.

(ii) M CESS-modüldür.

(iii) M CS-modüldür.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) Önteorem 4.1.6'den açık.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Önteorem 3.1.5'den açık.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Açık.

4.2. (P) Özelliği.

4.2.1. Tanım: M bir modül olsun. Her $N \leq M$ için bir $L \leq_d M$ var ve $\mathrm{Sok}(L) \leq N \leq L$ ise M'ye (P) özelliğini sağlıyor denir.

4.2.2. Önteorem: Bir M modülü (P) özelliğini sağlar ancak ve ancak, her $K \leq_c M$ için bir $L \leq_d M$ var ve $\mathrm{Sok}(L) \leq K \leq L$ dir. (I.A. Khazzi and P.F. Smith, 1991)

4.2.3. Önteorem: (P) özelliğini sağlayan bir M modülünün her diktoplamı da (P) özelliğini sağlar. (I.A. Khazzi and P.F. Smith, 1991)

Ancak Önteorem 4.2.3'min tersi genel olarak doğru değildir.

4.2.4. Örnek: $R = Z$ ve p bir asal sayı olmak üzere Z-modül $M = (Z/Zp) \oplus Z$ olsun. $M_1 = Z/Zp$ ve $M_2 = Z$ düzgün dolayısıyla (P) özelliğini sağlarlar. Ancak $M = M_1 \oplus M_2$ (P) özelliğini sağlamaz. (I.A. Khazzi and P.F. Smith, 1991)

Kanıt:$K = (1 + Zp, p)Z$ olsun. K, M'nin devirli bir altmodülüdür. K değişmeli grup olduğundan sonsuz devirlidir. Ayrıca M'nin düzgün boyutu iki olduğundan, K düzgündür Z-modüldür. $L \leq M$ olmak üzere $K \leq_e L$ olduğunu varsayalım. L düzgün ve sonlu üreteçli olduğundan devirlidir. Böylece $a,b \in Z$ var öyleki $L = (a + Zp, b)Z$ dir. $K \leq_e L$ olduğundan $0 \neq n \in Z$ var ve

$$(1 + Zp, p) = n(a + Zp, b),$$

ve böylece $1 - na \in Zp$, $p = nb$ olur. Buradan $n = 1$ veya $n = -1$ çıkar. Böylece $K = L$ yani K , M'de tamlayan olur.

M'nin (P) özelliğini sağladığını varsayalım. O halde bir $N \leq_d M$ var ve $\mathrm{Sok}(N) \leq K \leq N$ dir. $\mathrm{Sok}(K) = 0$ olduğundan $\mathrm{Sok}(N) = 0$ ve $N \cap M_1 = 0$ olur. N düzgün olduğundan $N = K$ dır. Buradan bir $K' \leq M$ için $M = K \oplus K'$ olur.

$$M_1 = \mathrm{Sok}(M) = \mathrm{Sok}(K') \leq K'$$

ve böylece $M_2 \cap K' = 0$ olur. Buradan $K' = M_1$ dir. Ancak

$$K \oplus M_1 = M_1 \oplus pM_2 \neq M$$

olduğundan, bu bir çelişkidir. Böylece M (P) özelliğini sağlamaz.

Her CS-modül , hem CESS-modül hem de (P) özelliğini sağlar. Ancak CESS-modüllerle (P) özelliğini sağlayan modüller arasında doğrudan bir gerektirme yoktur.

4.2.5. Örnek: R = Z için Z-modül $M = (Z/Zp) \oplus Q$ olsun. M CESS-modüldür, ancak (P) özelliğini sağlamaz.

Kanıt: $Sok(K) \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_c M$ olsun. $Sok(M) = Z/Z_2$ basit ve $Z/Z_2 \leq_e K$ olduğundan K düzgün olur. $K \cap Q = 0$ ise $K \leq_d M$ olur. $K \cap Q \neq 0$ ise $Z/Z_2 \leq_e K$ olduğundan , bu bir çelişki olur. Böylece M bir CESS-modül olur.

M'nin (P) özelliğini sağladığını varsayalım. $K \leq_c M$ için bir $L \leq_d M$ var ve $Sok(L) \leq K \leq L$ dir. L düzgün ve $K \leq_c M$ olduğundan K = L olur. Oysa M CS-modül değildir. Böylece M (P) özelliğini sağlamaz.

Örnek 4.2.5'in daha genel bir durumu olan aşağıdaki Önteoremi verebiliriz.

4.2.6. Önteorem: M düzgün boyutu iki olan bir modül olsun. Sıfırdan farklı $Sok(M) \leq_d M$ ve M CS- modül değil ise M (P) özelliğini sağlamaz, ancak M CESS-modüldür.

Kanıt: M'nin (P) özelliğini sağladığını varsayalım. K, M'nin diktoplananı olmayan bir tamlayanı olsun. (P) özelliğinden bir $L \leq_d M$ var ve $Sok(L) \leq K \leq L$ dir. Ayrıca bir $L' \leq M$ için $M = L \oplus L'$ olur.

(i) L = M: $Sok(M) \leq K \leq_c M$ dir. Varsayımdan bir $T \leq M$ var öyleki $M = Sok(M) \oplus T$ dir. Eğer $Sok(M) \neq K$ ise $K \cap T \neq 0$ ve $Sok(M) \oplus Sok(K \cap T) \leq K \leq_e M$ olur. Böylece K = M ve bir çelişki olur.

(ii) $L \neq M$: $Sok(M) = Sok(L) \oplus Sok(L')$ ve L düzgün olduğundan $K = L$ olur. Çelişki, böylece M (P) özelliğini sağlamaz.

$Sok(K) \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_c M$ olsun. $M = Sok(M) \oplus T$ olduğundan

$$K = Sok(K) \oplus (K \cap T)$$

dır. $Sok(K) \leq_e K$ olmasından $K \cap T = 0$ ve $K = Sok(K) = Sok(M)$ olur. Bölece M CESS-modül olur.

4.2.7. Önteorem: $Sok(M) \leq_e M$ ise aşağıdakiler denktir.

(i) M (P) özelliğini sağlar.

(ii) M CESS-modüldür.

(iii) M CS-modüldür.

Kanıt:(i) $\Rightarrow$ (ii). $Sok(K) \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_c M$ olsun. (P) özelliğinden bir $L \leq_d M$ var ve $Sok(L) \leq K \leq L$ dir. $Sok(M) \leq_e M$ olduğundan $Sok(L) \leq_e L$ olur. Böylece $K = L \leq_d M$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Önteorem 3.1.5'den açık.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Açık.

4.2.8. Önerme: M bir UC-modül ise aşağıdakiler denktir.

(i) M (P) özelliğini sağlar.

(ii) M CESS-modüldür.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii). $Sok(K) \leq_e K$ olacak şekilde $K \leq_c M$ olsun. (P) özelliğinden bir $L \leq_d M$ var ve $Sok(L) \leq K \leq L$ dir. Ayrıca $Sok(M_1) \leq_e M_1$, M_1 CS-modül ve $Sok(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. $Sok(K) = Sok(L) \leq Sok(M_1) \leq_e M_1$ ve M_1 CS-modül olduğundan bir $U \leq_d M_1 \leq_d M$ var öyleki $Sok(K) \leq_e U$ dur. M UC-modül olduğundan $K = U \leq_d M$ olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Önteorem 3.1.8'den $Sok(M_1) \leq_e M_1$, M_1 CS-modül ve $Sok(M_2) = 0$ olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2$ dir. $K \leq_c M$ olsun. $Sok(K) = 0$ ise $K \cap M_2 \neq 0$ ve M'nin UC-modül olmasından $K \cap M_2 \leq_c M_2$, $K \cap M_2 \leq_c K$ dır. O halde $U \leq K$ ve $V \leq M_2$ var ve $U \oplus (K \cap M_2) \leq_e K$, $V \oplus (K \cap M_2) \leq_e M_2$ dir. Buradan $M_1 \cap (K \oplus V) = 0$ ve $(M_1 \oplus V) \cap K = 0$ olur. Böylece $M_1 \cap (K + M_2) = 0$ bulunur. M_2, M'de M_1'in tamlayanı olduğundan $K \leq M_2$ olur. O halde

$$0 = Sok(M_2) \leq K \leq M_2$$

olmasından M (P) özelliğini sağlar.

$Sok(K) \neq 0$ ise $Sok(K) = Sok(M_1) \cap K \leq K \cap M_1$ dir. M_1 CS-modül ve M UC olduğundan $K \cap M_1 \leq_d M_1 \leq_d M$ olur. Böylece bir $L \leq M_1$ için $M_1 = L \oplus (K \cap M_1)$ ve $K = (K \cap M_1) \oplus (K \cap (L \oplus M_2))$ olur. $T = K \cap (L \oplus M_2) \leq_c M$ ve $Sok(T) = 0$ olduğundan $T \leq M_2$ dir. Buradan

$$Sok((K \cap M_1) \oplus M_2) \leq K = (K \cap M_1) \oplus T \leq (K \cap M_1) \oplus M_2 \leq_d M$$

olur. Böylece M (P) özelliğini sağlamış olur.

KAYNAKLAR

Al-Khazzi, İ. and Smith, P.F., 1991, Modules with chain conditions on superfluous submodules, *Comm. in Algebra*, 19(8), 2331 - 2351.

Anderson, F.W. and Fuller, K.R., 1974, Rings and categories of modules, Springer-Verlag.

Camillo, V. and Yousif, M.F., 1991, CS-modules with acc or dcc on essential submodules, *Comm. in Algebra*, 19, 655 - 662.

Chatters, A.W. and Hajarnavis, C.R., 1980, Rings with chain conditions, Pıtman, London.

Çelik, C., 1994, Modules satisfying a lifting condition, *Turkish J. of Math., 18, 293-301.*

Çelik, C., Harmancı, A. and Smith, P.F., A Generalization of CS-modules., Preprint.

Dung, N.V. and Smith, P.F.,1992, On semi-artinian V-modules, *J. Pure Appl. Algebra*, 82, 27 - 37.

Dung, N.V.,Huynh, D., Smith, P.F. and Wisbauer, R., 1994, Extending modules, Longman, Harlow.

Goodearl, K.R.,1976, Ring theory, Pure and Applieed Math., No: 33, Marcel Dekker inc. New York-Bassel.

Harada, M.,1982, On Modules with Extending Properties, *Osaka J. Math.*, 19, 203 - 215.

Harmancı, A. and Smith, P.F., 1992, Relative Injectivity and Module classes, *Comm. in Algebra*, 20(9), 2471 - 2501.

Harmancı, A. and Smith, P.F., 1993, Finite direct sums of CS-modüles, *Houston J. Math.*, 19, 523 - 532.

Harmancı, A., Smith, P.F., Tercan, A. and Tıraş, Y., The Bass- Papp Theorem and some related results, preprint.

Hungerford, T.W., 1973, Algebra, Holt,Rinehort and Winston, New York.

Jans, J.P., 1969, On co-Noetherian rings, *J. London Math. Soc.*, 1, 588 - 590.

Kasch, F.,1982, Modules and Rings, Academic Press inc., New York, 10003.

Kamal, M. A. and Muller, B.J., 1988, Extending Modules over Commutative domains, *Osaka J. Math.*, 25, 531 - 538.

McConnell, J.C. and Robson, J.C., 1987, Noncommutative Noetherian rings, Wiley-Interscience, Chichester.

Ming, R.Y.C., 1983, On quasi-injectivity and von Neuman Regularity, *Mon. fur. Math.*, 95, 25 - 32.

Mohamed, S.H. and Muller, B.J., 1990, Continuous and Discret Modules, London Math. Soc. Lecture Notes 147, Cambridge.

Musson, I.M.,1980, Injective Modules for group rings of polycyclic groups I, II, Quart J. Math. Oxford, 31, 429 - 448 and 449 - 466.

Sharpe, D.V. and Vamos, P., 1972, Injective modules, Cambridge Tracts in Mathematics, 62, (Cambridge Univ. Press)

Shock, R.C., 1974, Dual generalizations of the artinian and noetherian conditions, *Pacific J. Math.*, 54, 227 - 235.

Smith, P.F.,1990, CS-modules and weak CS-modules, Noncommutative Ring Theory, Springer LNM 1448, 99 - 115.

Smith, P.F.,1993, Modules for which every submodule has a unique closure, In Ring Theory (Eds.S.K. Jain, S.T. Rızvi) (World Scentific, Singapore), 302 - 313.

Smith, P.F., 1990, CS-modules, non Commutative Ring Theory, Springer Lecture Notes in Mathematics, 448, 99 - 115.

Smith, P.F. and Tercan, A., 1992, Continuous and Quasi-continuous Modules, *Houston J. Math.*, 18(3), 339 - 348.

Smith, P.F. and Tercan, A., 1993, Generalizations of CS-modules, *Comm. in Algebra.* 21(6), 1809-1847

Tercan, A., 1992, CS-modules and Generalizations, Ph. D. Thesis, Glasgow University.

Vamos, P., 1968, The dual of the notion of finitely generated, *J. London Math. Soc.*, 43, 643 - 646.

Zhou, Y., Smith's question for CESS-modules, Preprint.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Cesim ÇELİK

Doğum Yeri : Horasan

Doğum Yılı : 1964

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise : 1979 - 1982 Bakırköy Lisesi

Lisans : 1983 - 1987 Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans : 1987 - 1989 Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi:

1988 yılından itibaren Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.