ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONVEKSLİK, YOĞUNLUK İŞLEMCİLERİ VE KUANTUM ENTROPİLERİ

Ali Ümit Cemal HARDAL

FİZİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2010

TEZ ONAYI

Ali Ümit Cemal Hardal tarafından hazırlanan "**Konvekslik, Yoğunluk İşlemcileri ve Kuantum Entropileri**" adlı tez çalışması 17/06/2010 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Abdullah Verçin

Jüri Üyeleri:

Başkan: Doç. Dr. Şengül Kuru
(Ankara Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı)

Üye : Prof. Dr. Abdullah Verçin
(Ankara Üniversitesi, Fizik Anabilim Dalı)

Üye : Yrd. Doç. Dr. Refik Turhan
(Ankara Üniversitesi, Fizik Mühendisliği Anabilim Dalı)

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof.Dr.Orhan ATAKOL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONVEKSLİK, YOĞUNLUK İŞLEMCİLERİ VE KUANTUM ENTROPİLERİ

Ali Ümit Cemal HARDAL

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

Kuantum mekaniğinde, N girilebilir durumu olan bir sistemin, olası tüm durumlarına karşılık gelen yoğunluk matrislerinin uzayı N^2-1 boyutlu konveks bir kümedir. Saf durumlar uzayı projektif $\mathbb{C}\mathcal{P}^{N-1}$ uzayı olup bu tüm uzayın (N^2-2) boyutlu sınırında yer alan $2(N-1)$ boyutlu bir alt manifoldtur. Bu tür uzaylar ile ilgili bir nicel bilgi kaynağı yoğunluk işlemcileri aracılığı ile tanımlanan kuantum entropi kavramıdır. Konveksliğin bazı önemli kavramları verilmiştir. Yoğunluk işlemcileri ve uzaylarının geometrik yapısı incelenmiş, kuantum mekaniksel sistemler için önemleri tartışılmıştır. Klasik ve kuantum entropileri önemli özellikleriyle incelenmiştir. Bu entropilerin bilişim kuramsal anlamları tartışılmıştır. Son olarak Kuantum Dolanıklılık'a bir giriş yapılmış ve bilişim kuramsal uygulamalarından bahsedilmiştir.

Haziran 2010, 72 sayfa

Anahrar Kelimeler: Konvekslik, Yoğunluk İşlemcileri, Kübit, Shannon Entropisi, von Neumann Entropisi

ABSTRACT

Master Thesis

CONVEXITY, DENSITY OPERATORS AND QUANTUM ENTROPIES

Ali Ümit Cemal HARDAL

Ankara University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Abdullah VERÇİN

In quantum mechanics, the space of density matrices corresponding to all probable states of a N partite system is a $N^2 - 1$ dimensional convex set. The space of pure states is the projective space $\mathbb{C}\mathcal{P}^{N-1}$ which forms a $2(N-1)$ dimensional submanifold on the $(N^2 - 2)$ dimensional boundary of the whole space. An information source for this type of spaces is the concept of quantum entropy which is defined through the density operators. Some important concepts of convexity are given. Density operators and geometry of the space of the density operators are examined. The importance of the density operators for quantum mechanical systems is discussed. Classical and quantum entropies are investigated by means of their important properties. Information theoretical significance of these entropies is discussed. Finally, an introduction to Quantum Entanglement is made and information theoretical applications of it are mentioned.

June 2010, 72 pages

Key Words: Convexity, Density Operators, Qubit, Shannon Entropy, von Neumann Entropy

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca sahip olduğu engin kuramsal bilgiden sonuna kadar yararlanmama fırsat veren, bir kuramsal fizikçinin sahip olması gereken çalışma disiplini ve azmini öğreten, kişiliği ve davranışlarıyla her zaman örnek aldığım danışmanım Sayın Prof. Dr. Abdullah VERÇİN'e (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü) ve bu çalışmanın oluşum sürecinde gerek maddi gerek manevi hiç bir desteklerini esirgemeyen aileme en derin duygularla teşekkür ederim.

Ali Ümit Cemal HARDAL
Ankara, Haziran 2010

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

SO	Ayrılabilir işlemler
$H(P\|Q)$	Bağıl entropi
$\|\psi^{\pm}\rangle, \|\phi^{\pm}\rangle$	Bell durumları
D_B	Bures uzaklığı
$\cos D_{Bhatt}$	Bhattacharrya uzaklığı
$E(\|\psi\rangle)$	Dolanıklılık entropisi
$E(\rho)$	Dolanıklılık monotonu
$\mathcal{HM}$	Hermitesel işlemcilerin uzayı
$\mathcal{H}$	Hilbert uzayı
$D_{\mathcal{HS}}$	Hilbert-Schmidt uzaklığı
$\mathcal{HS}$	Hilbert-Schmidt uzayı
J	Jamiolkowski izomorfizmi
$H(P_1\|P_2)$	Koşullu entropi
$\sqrt{F}$	Kök fidelite
$S(\rho\|\sigma)$	Kuantum bağıl entropi
$S(\Phi)$	Kuantum işlem entropisi
$S(\rho_1\|\rho_2)$	Kuantum koşullu entropi
$I(\rho_1 : \rho_2)$	Kuantum ortak bilgi
LO	Yerel işlemler
LOCC	Yerel işlemler ve klasik iletişim
ρ_*	Maksimum karma durum
$\mathbb{C}\mathcal{P}^n$	n boyutlu kompleks projektif uzay
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Öklid uzayı
I_N	$N \times N$'li birim matris
$I(P_1 : P_2)$	Ortak bilgi
$\triangle_p$	p simpleks
σ_i	Pauli matrisleri

$\mathcal{P}$	Pozitif işlemcilerin uzayı
$H(P)$	Shannon entropisi
l_a	Skor vektörü
$Sch(\|\psi\rangle)$	Schmidt katsayısı
$E_s(\|\psi\rangle)$	Schmidt ölçümü
SP	Süper pozitif gönderim
$\mathcal{SP}$	Süper pozitif gönderimler uzayı
CP	Tamamiyle pozitif gönderim
$\mathcal{CP}$	Tamamiyle pozitif gönderimler uzayı
$S(\rho)$	von Neumann entropisi
$aff\mathbb{X}$	$\mathbb{X}$ kümesinin afin çanağı
$conv\mathbb{X}$	$\mathbb{X}$ kümesinin konveks çanağı
ρ	Yoğunluk işlemcisi
$\mathcal{M}^{(N)}$	Yoğunluk işlemcileri uzayı

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Teknolojinin kuantum mekaniğinin keşfiyle beraber büyük bir yükselişe geçmesi tesadüf değildir. Kuantum mekaniği; evrenin işleyişini açıklayan, şimdiye kadar yazılmış en tutarlı kuramdır. Ayrıca kuantum mekaniği, bilim insanlarını diğer birçok klasik kuramın bir kuantum karşılığı olup olmadığı sorusuna yönlendirerek, yeni ve heyecan uyandıran sayısız araştırma alanının doğmasına da neden olmuştur.

Bu alanlardan biri olan Kuantum Bilişim Kuramı; klasik ve kuantum mekaniksel bilginin kuantum kanalları üzerinden iletilmesi, bir kuantum mekaniksel sistem hakkında edinilen bilginin değiş tokuşu ve kodlanması konularıyla ilgilenir. Bu kuramın temel amaçları açısından, sonlu sayıda girilebilir durumlu bir kuantum mekaniksel sistemin, olası tüm durumlar uzayının, bir bütün olarak geometrik yapısı büyük önem taşır.

Kuantum Bilişim Kuramı en basit şekli ile ele alındığında başlıca anlaşılması gereken kavramlar; yoğunluk işlemcilerinin oluşturduğu durum uzayları, bu uzayların geometrisi ve belirleyici bir özelliği olan konvekslik kavramıdır. Yine bu uzaylarda tanımlı olan ve kuramın ilgilendiği konuları birleştiren kuantum entropileri, bu entropilerin yorumlanması ve temel özelliklerinin anlaşılması, üzerinde durulması gereken önemli olgulardır.

İki durumlu sistemler ve bu sistemlere karşılık gelen yoğunluk işlemcilerinin oluşturduğu durum uzaylarının geometrisi tam olarak anlaşılabilmekte ve "kübitler" olarak adlandırılmaktadırlar. Durum uzayı olarak düşünüldüğünde bir kübit; 3-boyutlu bir konveks küme olan yuvardır. Yuvar içerisindeki ve yüzeyindeki herbir noktaya ise bir yoğunluk işlemcisi karşılık gelir.

İki durumlu sistemlerin aksine, çok girilebilir durumlu sistemlerin uzayı ve bu uzayın geometrik yapısı tam olarak anlaşılabilmiş değildir. Boyut yükseldikçe durum uzaylarının geometrisi giriftleşmekte ve buna bağlı olarak yeni belirleyici özellikler ortaya çıkmaktadır. Bu noktada nicel bilgi kaynakları olarak kuantum entropiler kullanılmaktadır.

Kuantum Bilişim Kuramı yeni ve gelecek vadeden bir araştırma alanıdır. Modern uygulama alanlarının arasında kuantum şifreleme, kuantum programlama ve bilgisayarları ile kuantum iletişim yer almaktadır.

Tarihsel sürece bakıldığında 1927-1936 yılları arası ile 1964 yılı özellikle dikkat çekicidir. J. von Neumann, 1927 yılında yayımladığı kitabında ilk kez yoğunluk işlemcilerinden ve kendi adını taşıyan kuantum entropisinden bahsetmiş ancak gerek yoğunluk işlemcileri gerekse entropi yanlızca (kuantum) istatiksel amaçlar için kullanılmıştır. Kuantum entropisinin klasik karşılığı olan Shannon entropisinden yaklaşık sekiz yıl önce kaleme alınmış olması ayrıca ilginç ve pek sık rastlanmayan bir durumdur.

1935 yılı bilişim kuramı açısından kilit değer taşıyan dolanıklılık kavramının doğum yılıdır. A. Einstein, B. Podolsky ve N. Rosen yayımladıkları ünlü makalede (Einstein vd. 1935), bir fiziksel kuramın tam olabilmesi için gerekli kriterleri ve "fiziksel gerçekliğin" tanımını vermiş, bu tanımlardan yola çıkarak doğanın kuantum mekaniksel tarifini sorgulamış ve sonuç olarak bu tarifin eksik olduğuna kanaat getirmişlerdir. EPR makalesine ilk yanıt N. Bohr tarafından aynı yıl içerisinde verilmiş (Bohr, 1935) ve bu makalenin hemen ardından yine aynı yıl içerisinde E. Shrödinger dolanıklılık teriminin ilk kez kullanıldığı makalesini yayımlamıştır (Schrödinger, 1935). Shrödinger makalesinde dolanıklılıktan kuantum mekaniğinin karakterisitk bir özelliği olarak bahsetmiştir.

1964 yılında J. Bell, EPR'de vurgulanan kuantum mekaniğinin yerel bir kuram olması gerekliliğini doğru kabul edip, Bell eşitsizliği olarak bilinen bir matematiksel sonuca ulaşmış ve daha da önemlisi kuantum mekaniksel sistemlerin bu eşitsizliği ihlal ettiğini göstermiştir (Bell, 1964). Takip eden yıllarda bir çok Bell tipi eşitsilik yazılmış ve her seferinde deneylerden elde edilen verilerin bu eşitsizliklere uymadığı görülmüştür. Kuantum mekaniği yerel olmayan özellikleri de barındıran bir kuramdır.

1990'lı yılların başından itibaren ise dolanıklılık kuantum mekaniksel bir bilgi kaynağı olarak kullanılmaya başlanmış, yoğunluk işlemcileri ile tarif edilen kuantum entropisi ise bu bilgiyi ölçmek için kullanılan en güçlü araçlardan biri haline gelmiştir.

Tarihsel sürecin en ilgi çekici yanlarından biri ise 1990'lı yıllara kadar gerek dolanıklılık gerekse bilişim kuramının gelişiminde belirgin bir sürekliliğin olmayışıdır. Bu kesikliliğin altında 1935-1965 yılları arasında Kuantum Alan Teorisi'nin belirgin yükselişi gibi sebepler olabileceği gibi; entropi, yoğunluk işlemcilerinin önemi ve dolanıklılığın anlaşılamamış olması da sebep gösterilebilir.

Tezin ilk bölümünde, diğer bölümlerde anlatılacak olan fiziksel kuramlara matematiksel bir temel oluşturan konvekslik kavramı, önemli özellikleri baz alınarak incelenecektir.

İkinci bölümde, yoğunluk işlemcileri, bu işlemcilerin özellikleri ve uzaylarının geometrik yapısı ile tanımlanmasına olanak sağladığı bazı önemli kavramlar tartışılacaktır.

Son bölümde ise, hem klasik entropiler hem de kuantum entropileri önemli özellikleri incelenmek suretiyle tartışılacak; bu niceliklerin gerek Klasik Bilişim Kuramı gerekse Kuantum Bilişim Kuramı açısından önemleri incelenecektir. Bu bölümün son kısmında modern kuantum mekaniğinin kilometre taşlarından biri olan kuantum dolanıklılık kavramına kısa bir giriş yapılacaktır.

Tez içerisinde, gerekli görülen teorem, önerme ve lemmalar ispatlanacak, ispatı verilmeyenler için okuyucu gerekli kaynaklara yönlendirilecektir.

2. KONVEKSLİK

Bu bölümde, konvekslik temel özellikleriyle incelenecektir. İncelenecek olan bu özelliklerin daha rahat anlaşılabilmesi için öncelikle Öklid uzayı genel hatlarıyla tartışılacaktır.

2.1 Öklid Uzayı

Üç boyutlu koordinat geometrisinde bir nokta ya da vektör, herhangi bir dik koordinat sistemine göre tayin edilen x, y, z koordinatları ile belirlenir ve (x, y, z) sıralı üçlüsü ile özdeşleştirilir.

(x, y, z) ve (u, v, w) herhangi iki vektör ve λ bir skaler (gerçel sayı) olsun. Bu durumda iki vektörün toplamı ve bir vektörün bir skaler ile çarpımı sırasıyla

$$(x, y, z) + (u, v, w) = (x + u, y + v, z + w), \tag{2.1}$$

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \tag{2.2}$$

ile tanımlanır ve n-boyuta genelleştirilebilir.

Gerçel sayıların $(x_1, ..., x_n)$ şeklindeki tüm n-katlılarının kümesini $\mathbb{R}^n$ ile gösterelim. $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu Öklid uzayı (Öklidyen Uzay) olarak adlandırılır ve herbir $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ elemanına uzayın bir noktası ya da vektörü, $x_1, ..., x_n$ gerçel sayılarına ise $\mathbf{x}$ 'in koordinatları denir. $\mathbb{R}^n$ gerçel bir vektör uzayıdır. Başka bir değişle $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$;

2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$;

3. $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$;

4. $\mathbf{x} + (\mathbf{-x}) = \mathbf{0}$;

5. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$;

6. $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;

7. $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;

8. $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

Vektör toplamı ve skaler çarpım işlemleri gerekli tanımlamalar yapılarak $\mathbb{R}^n$'nin alt kümelerine de genişletilebilir.

Tanım (Düz Yüzey): $\mathbb{X}$, $\mathbb{R}^n$'de bir küme ve $\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{X}$ olsun. $\mathbb{X}$, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ noktaları ile birlikte bu noktalardan geçen doğrunun tamamını da içeriyorsa bir düz yüzey olarak tanımlanır. Başka bir değişle, $\forall \mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{X}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{x},\ \mathbf{y} \in \mathbb{X} \Rightarrow \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathbb{X}, \tag{2.3}$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathbb{X}$ kümesi bir düz yüzeydir. Düz yüzeyler; afin kümeler, afin manifoldlar veya doğrusal manifoldlar olarakta bilinirler. Boş küme, doğrular ve $\mathbb{R}^n$'nin kendisi $\mathbb{R}^n$ içerisindeki düz yüzeylere örnek olarak verilebilir.

Teorem 2.1.1: I bir indeks kümesi olmak üzere; $(\mathbb{X}_i : i \in I)$, $\mathbb{R}^n$'de bir düz yüzeyler ailesi olsun. Bu durumda

$$\mathbb{Y} = \bigcap(\mathbb{X}_i : i \in I) \tag{2.4}$$

kümesi bir düz yüzeydir (Webster, 1996).

Tanım (Afin Çanak): $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$'de $\mathbb{X}$'i içeren tüm düz yüzeylerin kesişimine $\mathbb{X}$ kümesinin afin çanağı denir ve $aff\mathbb{X}$ şeklinde gösterilir.

Afin çanağa biraz daha yakından bakalım. Teorem 2.1.1'e göre $aff\mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ kümesini içeren bir düz yüzeydir. Bununla birlikte, $\mathbb{R}^n$ içerisinde $\mathbb{X}$'i içeren herhangi bir $\mathbb{Y}$ düz yüzeyi varsa, bu durum $aff\mathbb{X} \subseteq \mathbb{Y}$ bağıntısını gerektirir. Dolayısıyla, $aff\mathbb{X}$, $\mathbb{R}^n$'de

$\mathbb{X}$'i içeren en küçük düz yüzeydir.

Teorem 2.1.2: $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ bir düz yüzey ve $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$ olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{2.5}$$

olur.

İspat: $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}, ..., \mathbf{x}_n - \mathbf{x}$ noktaları $\mathbb{R}^n$'nin bir alt uzayı olan $\mathbb{X} - \mathbf{x}$'in elemanlarıdırlar. $\mathbb{X}$ bir düz yüzey olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) + ... + \lambda_n(\mathbf{x}_n - \mathbf{x}) &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 - \lambda_1 \mathbf{x} + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n - \lambda_n \mathbf{x}, \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n - (\lambda_1 + ... + \lambda_n)\mathbf{x}, \\ &= \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n - \mathbf{x} \in \mathbb{X} - \mathbf{x}, \end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$ olur.

Tanım (Afin Kombinasyon): Bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ noktası

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n \ (j = 1, ..., n), \tag{2.6}$$

şeklinde yazılabiliyorsa, bu noktaya, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ noktalarının bir afin kombinasyonu denir. Bu tanım kullanılarak Teorem 2.1.2 şu şekilde ifade edilebilir: Bir $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ düz yüzeyinin elemanlarından oluşturulan her afin kombinasyon, $\mathbb{X}$ düz yüzeyinin bir elemanıdır.

Teorem 2.1.3: $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{X}$ kümesinin afin çanağı $aff\mathbb{X}$, bu kümenin elemanlarının tüm afin kombinasyonlarının kümesidir.

İspat: $\mathbb{X}$ kümesinin elemanlarının tüm afin kombinasyonlarının kümesi $\mathbb{Y}$ olsun. Teorem 2.1.2 $\mathbb{Y} \subseteq aff\mathbb{X}$ bağıntısını gerektirir. Ayrıca, $\mathbb{X} \subseteq aff\mathbb{X}$ olduğu açıktır.

Öncelikle $\mathbb{Y}$'nin bir düz yüzey olduğunu gösterelim. **x, y** $\in \mathbb{Y}$ olsun. Kabul gereği,

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n, \;\; \mathbf{y} = \mu_1 \mathbf{y}_1 + ... + \mu_m \mathbf{y}_m, \;\; \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j \in \mathbb{X},$$
$$i = 1, ..., n, \;\; j = 1, ..., m, \;\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1, \;\; \sum_{l=1}^{m} \mu_l = 1$$

olmalıdır. $\lambda + \mu = 1$ olsun. Öyleyse,

$$\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} = \lambda\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda\lambda_n \mathbf{x}_n + \mu\mu_1 \mathbf{y}_1 + ... + \mu\mu_m \mathbf{y}_m$$

elde ederiz. Buradan,

$$\begin{aligned} \lambda\lambda_1 + ... + \lambda\lambda_n + \mu\mu_1 + ... + \mu\mu_m &= \lambda(\lambda_1 + ... + \lambda_n) + \mu(\mu_1 + ... + \mu_m) \\ &= \lambda + \mu \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ ve $\mathbb{Y}$ bir düz yüzeydir. Ayrıca, $\mathbb{Y} \supseteq \mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y} \supseteq aff\mathbb{X}$ olur. Bu ise $\mathbb{Y} = aff\mathbb{X}$ sonucunu gerektirir.

Sonuç 2.1.4: $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda, afin çanak;

$$aff\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\} = \{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n \mid \lambda_1 + ... + \lambda_n = 1\} \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım (Afin Bağımlılık, Afin Bağımsızlık): $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\mathbf{x} \in aff(\mathbb{X} \setminus \{\mathbf{x}\})$ olacak şekilde bir $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ varsa $\mathbb{X}$ kümesine afin bağımlı denir. Afin bağımlı olmayan bir kümeye ise afin bağımsız denir.

Örnek olarak $\mathbb{R}^3$ uzayını ele alalım. Bu uzayda üç noktadan oluşan bir kümenin afin bağımlı olabilmesi için gerek ve yeter koşul eş-doğrusal olması, dört noktadan oluşan bir kümenin afin bağımlı olabilmesi için gerek ve koşul ise eş-düzlemsel olmasıdır. Bu uzayda dörtten fazla noktaya sahip olan herhangi bir küme afin bağımlıdır. Ayrıca, üç noktadan oluşan bir kümenin afin bağımsız olabilmesi için gerek ve yeter koşul dejenere olmayan bir üçgenin köşesi olması, dört noktadan oluşan bir kümenin afin bağımsız olabilmesi için gerek ve yeter koşul ise dejenere olmayan bir düzgün dörtyüzlünün köşesi olmasıdır.

$\mathbb{R}^n$ uzayında afin bağımlı bir alt kümesi bulunan herhangi bir küme afin bağımlıdır. Dolayısıyla buradan; afin bağımsız bir kümenin her alt kümesinin afin bağımsız olduğu sonucuna rahatlıkla ulaşılabilir.

Teorem 2.1.5: $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{X}$ kümesinin afin bağımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n = 0 \quad ve \quad \lambda_1 + ... + \lambda_n = 0 \tag{2.8}$$

olacak şekilde $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$ farklı (ayrık) noktalarının ve en az bir tanesi sıfırdan farklı olan $\lambda_1, ..., \lambda_n$ skalerlerinin olmasıdır.

İspat: $\mathbb{X}$ kümesinin afin bağımlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\mathbf{x}_1 \in aff(\mathbb{X} \setminus \{\mathbf{x}_1\})$ olacak şekilde bir $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{X}$ vardır. Teorem 1.1.3 uyarınca

$$\mathbf{x}_1 = \mu_2 \mathbf{x}_2 + ... + \mu_n \mathbf{x}_n, \quad \sum_{i=2}^{n} \mu_i = 1,$$

olacak şekilde $\mathbf{x}_2 + ... + \mathbf{x}_n \in (\mathbb{X} \setminus \{\mathbf{x}_1\})$ ayrık noktalarını bulabiliriz. Şimdi, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = \mu_2$, ..., $\lambda_n = \mu_n$ alalım,

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{n} \mu_i - 1 &= 0, \\ \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} \mu_i + \lambda_1 &= 0, \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i &= 0, \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n = 0$ elde ederiz.

Tersine, eşitlik (8)'i sağlayan $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$ ayrık noktaları ve en az bir tanesi sıfırdan farklı olan $\lambda_1, ..., \lambda_n$ skalerleri olsun. $\lambda_1 \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\mathbf{x}_1 = -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2\mathbf{x}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{x}_n), \quad -\frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 + ... + \lambda_n) = 1,$$

elde ederiz. Skalerlerimizi, $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \beta_2$, ..., $-\frac{\lambda_n}{\lambda_1} = \beta_n$ olarak yeniden düzenlersek

$$\mathbf{x}_1 = \beta_2\mathbf{x}_2 + ... + \beta_n\mathbf{x}_n, \quad \beta_2 + ... + \beta_n = 1,$$

elde ederiz ki bu da bize $\mathbf{x}_1$ noktasının $\mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ noktalarının bir afin kombinasyonu olduğunu gösterir. Dolayısıyla

$$\mathbf{x}_1 \in aff\{\mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\} \subseteq aff(\mathbb{X} \setminus \{\mathbf{x}_1\}),$$

ve $\mathbb{X}$ afin bağımlıdır.

Teorem 2.1.6: $\mathbb{R}^n$ içerisindeki her düz yüzey, $\mathbb{R}^n$'nin bir sonlu afin bağımsız alt kümesinin afin çanağıdır. Dahası, böyle bir alt kümenin elemanlarının sayısı, alt kümenin afin çanağı olan düz yüzeyin kendisi tarafından tek olarak belirlenir (Webster, 1996) .

Başka bir değişle; aynı afin çanak $\mathbb{R}^n$ içerisindeki iki farklı afin bağımsız alt kümeye karşılık geliyorsa, bu alt kümeler aynı sayıda elemana sahiptirler. Dolayısıyla, bir $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin boyutu $\dim \mathbb{X}$, bu kümenin afin çanağının boyutu olarak tanımlanır.

Tanım (Afin Dönüşüm): $\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye tanımlı bir T gönderimine, afin yapıyı koruyorsa bir afin dönüşüm denir. Başka bir değişle T, $\mathbb{R}^n$'ye ait noktalardan oluşturulan her afin kombinasyonu, bu noktaların T altındaki görüntülerinin aynı afin kombinasyonuna gönderiyorsa bir afin dönüşüm adını alır:

$$T(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda T(\mathbf{x}) + \mu T(\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad \lambda + \mu = 1. \tag{2.9}$$

$\mathbb{R}^n$'den $\mathbb{R}^m$'ye tanımlı her doğrusal dönüşüm aynı zamanda bir afin dönüşümdür ancak tersi doğru değildir.

Teorem 2.1.7: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ bir afin dönüşüm olsun. T dönüşümünün doğrusal olabilmesi için gerek ve yeter koşul $T(0) = 0$ olmasıdır.

İspat: T doğrusal olsun. Bu durumda T, $\mathbb{R}^n$'nin sıfır vektörünü $\mathbb{R}^m$'nin sıfır vektörüne göndermek zorundadır. Dolayısıyla, $T(0) = 0$ elde edilir.

Tersine, $T(0) = 0$, $\mathbf{x}$**,** $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$T(\lambda\mathbf{x}) = T[\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{0}] = \lambda T(\mathbf{x}) + (1-\lambda)T(\mathbf{0}) = \lambda T(\mathbf{x}),$$

olur. Bu sonuç kullanılarak, $\beta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T[\beta(\frac{1}{\beta}\mathbf{x} + \frac{1}{\beta}\mathbf{y})], \\ &= \beta T(\frac{1}{\beta}\mathbf{x} + \frac{1}{\beta}\mathbf{y}), \\ &= \beta[\frac{1}{\beta}T(\mathbf{x}) + \frac{1}{\beta}T(\mathbf{y})] = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.8: $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gönderimi bir afin dönüşüm olsun. Bu dönüşüm $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{q}$ şeklinde ifade edilebilir. Burada $\mathbf{Q}$ bir gerçel $m \times n$'li ve $\mathbf{q}$ bir gerçel $m \times 1$' li matristir.

İspat: $T(\mathbf{0}) = \mathbf{q}$ olsun. Bu durumda $T'(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - \mathbf{q}$ şeklinde tanımlı $T' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gönderimi $T'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ koşulu ile birlikte bir afin dönüşümdür. Teorem 1.1.7 uyarınca bu dönüşüm aynı zamanda doğrusal bir dönüşümdür. Bu durumda, $T'(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x}$ olacak şekilde bir gerçel $m \times n$'li $\mathbf{Q}$ matrisi bulunabilir. Böylelikle, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{q}$ elde edilir.

Tanım (İç Çarpım): $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ n-boyutlu Öklidyen uzayın iki vektörü olsun. Bu iki vektörün iç çarpımı,

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + ... + x_n y_n \tag{2.10}$$

ile belirlenen gerçel sayıdır. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ ve λ, $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0$ ve $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;

(ii) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$;

(iii) $(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{z}) + \mu(\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})$.

Tanım (Norm, Uzaklık): n-boyutlu Öklidyen uzayda bir $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ vektörünün normu ya da boyu $\parallel \mathbf{x} \parallel$,

$$\parallel \mathbf{x} \parallel = \sqrt{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})}, \tag{2.11}$$

ile belirlenen pozitif gerçel sayıdır. Yine n-boyutlu Öklidyen uzayda $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ ve $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ gibi iki nokta arasındaki uzaklık ise

$$\parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel = \sqrt{(x_1 - y_1) + ... + (x_n - y_n)}, \tag{2.12}$$

ile belirlenen pozitif gerçel sayıdır. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ve λ, $\mu \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\parallel \mathbf{x} \parallel \geq 0$ ve $\parallel \mathbf{x} \parallel = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = 0$;

(ii) $\parallel \lambda \mathbf{x} \parallel = \mid \lambda \mid \parallel \mathbf{x} \parallel$;

(iii) $\parallel \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \parallel^2 = \lambda^2 \parallel \mathbf{x} \parallel^2 + 2\lambda\mu \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mu^2 \parallel \mathbf{y} \parallel^2$.

Teorem 2.1.9: $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır (Webster, 1996):

(i) $| \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} | \leq \| \mathbf{x} \| \| \mathbf{y} \|$ (Cauchy-Schwarz eşitsizliği);

(ii) $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$ (üçgen eşitsizliği);

(iii) $| \| \mathbf{x} \| - \| \mathbf{y} \| | \leq \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|$;

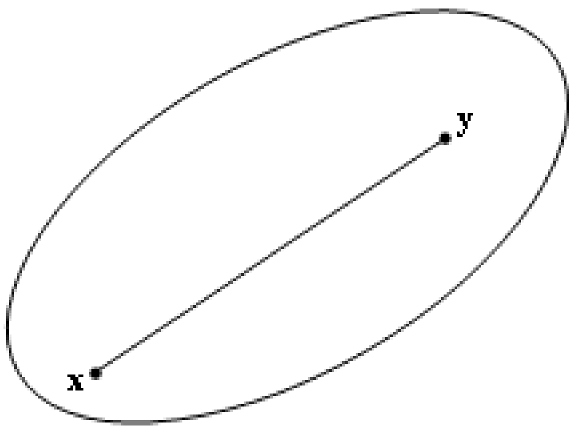
(iv) Herhangi bir $\alpha > 0$ ve $0 < \lambda < \alpha$ için $\| \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y} \| \geq \| \mathbf{x} \| \Rightarrow \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \geq 0$.

2.2 Konveks Kümeler

Tanım: $\mathbb{X}$, n-boyutlu Öklidyen uzayda bir küme ve $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ olsun. Eğer $\mathbb{X}$, bu iki nokta ile birlikte bu noktaları birbirine bağlayan doğru parçasını da içeriyorsa bir konveks küme olarak tanımlanır. Başka bir değişle, $\forall \mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$, λ, $\mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X} \Rightarrow \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y} \in \mathbb{X} \tag{2.13}$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathbb{X}$ bir konveks kümedir. Elipsler, üçgenler, paralelkenarlar, yuvarlar, küpler, doğrular, hiperdüzlemler ve $\mathbb{R}^n$ konveks kümelere örnektirler.



Şekil 2.1 Konveks küme

Teorem 2.2.1: $\mathbf{x}_1$, ..., $\mathbf{x}_n \in \mathbb{X}$ ve $\mathbb{X}$, $\mathbb{R}^n$'de bir konveks küme olsun. Bu durumda

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n \in \mathbb{X}, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0 \tag{2.14}$$

olur.

İspat: (2.14)'ün m bir pozitif k tamsayısına eşit olduğunda gerçeklendiğini varsayalım.

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_{k+1} \mathbf{x}_{k+1}$$

ve $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{k+1} \in \mathbb{X}$, $\lambda_1, ..., \lambda_{k+1} \geq 0$, $\lambda_1 + ... + \lambda_{k+1} = 1$ olsun. Katsayılardan en az bir tanesinin birden küçük olması gerekir; $\lambda_{k+1} < 1$ olsun.

$$\mathbf{y} = \frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{x}_1 + ... + \frac{\lambda_k}{\lambda}\mathbf{x}_k, \quad \lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_k = 1 - \lambda_{k+1} \geq 0$$

yazalım. Tümevarım hipotezine göre $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ olur. $\mathbb{X}$ konveks olduğundan ve hem $\mathbf{y}$ hem de $\mathbf{x}_{k+1}$'i içerdiğinden $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + \lambda_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}$ eşitliği $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ olduğunu gösterir.

Tanım (Konveks Kombinasyon): Bir $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ noktası

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n, \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \ \lambda_i \geq 0, \ \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n \ (j = 1, ..., n), \tag{2.15}$$

şeklinde yazılabiliyorsa bu noktaya, $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ noktalarının bir konveks kombinasyonu denir. n-boyutlu Öklidyen uzayda bulunan bir konveks kümenin elemanlarının, her konveks kombinasyonu, aynı konveks kümeye aittir.

Teorem 2.2.2: $\mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y}$, $\mathbb{R}^n$'de iki konveks küme ve α bir skaler olsun. $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ ve $\alpha\mathbb{X}$ konvekstir.

İspat: $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ olsun. $\mathbb{X}$ ve $\mathbb{Y}$ konveks olduğundan $\lambda\mathbb{X} + \mu\mathbb{X} \subseteq \mathbb{X}$ ve $\lambda\mathbb{Y} + \mu\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{Y}$ yazabiliriz. Bu ise

$$\lambda(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) + \mu(\mathbb{X} + \mathbb{Y}) = (\lambda\mathbb{X} + \mu\mathbb{X}) + (\lambda\mathbb{Y} + \mu\mathbb{Y}) \subseteq \mathbb{X} + \mathbb{Y},$$
$$\lambda(\alpha\mathbb{X}) + \mu(\alpha\mathbb{X}) = \alpha(\lambda\mathbb{X} + \mu\mathbb{X}) \subseteq \alpha\mathbb{X},$$

bağıntılarını gerektirir. Dolayısıyla $\mathbb{X} + \mathbb{Y}$ ve $\alpha\mathbb{X}$ konvekstir.

Teorem 2.2.3: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bir afin dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^n$'den seçilen her $\mathbb{X}$ konveks kümesi için $f(\mathbb{X})$ ve $\mathbb{R}^m$'den seçilen her $\mathbb{Y}$ konveks kümesi için $f^{-1}(\mathbb{Y})$ konvekstir.

İspat: $\mathbb{X}$, $\mathbb{R}^n$'de bir konveks küme ve $\lambda, \mu \geq 0, \lambda+\mu = 1$ olsun. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in f(\mathbb{X})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(\mathbf{z}) = \mathbf{x}$, $f(\mathbf{t}) = \mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$, $\mathbf{t} \in \mathbb{X}$ yazabiliriz. $\mathbb{X}$ konveks olduğundan $\lambda\mathbf{z} + \mu\mathbf{t} \in \mathbb{X}$ ve gönderim afin olduğundan

$$\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} = \lambda f(\mathbf{z}) + \mu f(\mathbf{t}) = f(\lambda\mathbf{z} + \mu\mathbf{t})$$

yazılır ve dolayısıyla $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} \in f(\mathbb{X})$ olur. Bu ise $f(\mathbb{X})$'in konveks olduğunu gösterir.

$\mathbb{Y}$, $\mathbb{R}^m$'de bir konveks küme ve $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ olsun. $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in f^{-1}(\mathbb{Y})$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{y}) \in \mathbb{Y}$ yazılabilir. $\mathbb{Y}$ konveks olduğundan $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathbb{Y}$ ve gönderim afin olduğundan

$$f(\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) \in \mathbb{Y},$$

yazılır ve dolayısıyla $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in f^{-1}(\mathbb{Y})$ olur. Bu ise $f^{-1}(\mathbb{Y})$'nin konveks olduğunu gösterir.

Tanım (Konveks Çanak): $\mathbb{X}$, $\mathbb{R}^n$'de bir küme olsun. $\mathbb{R}^n$'de, $\mathbb{X}$'i içeren tüm konveks kümelerin kesişimine $\mathbb{X}$ kümesinin konveks çanağı denir ve $conv\mathbb{X}$ şeklinde gösterilir.

Teorem 2.2.4: $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{X}$ kümesinin konveks çanağı $conv\mathbb{X}$, bu kümenin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının kümesidir (Webster, 1996).

Teorem 2.2.5 (Carathéodory Teoremi): $\mathbf{x} \in \mathbb{X}$ ve $\mathbb{X}$, $\mathbb{R}^n$'de r-boyutlu bir küme olsun. $\mathbf{x}$, $\mathbb{X}$ kümesinin $r + 1$ veya daha az sayıda noktasının bir konveks kombinasyonu şeklinde ifade edilebilir.

İspat: Teorem 1.2.4 uyarınca

$$\mathbf{x} = \lambda_1\mathbf{x}_1 + ... + \lambda_k\mathbf{x}_k, \ \sum_{i=1}^{k}\lambda_i = 1, \ \ \lambda_i \geq 0,$$

olacak şekilde $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{X}$ noktaları ve $\lambda_1, ..., \lambda_k$ skalerleri vardır. Bu gösterimin k'dan daha az nokta kullanılarak yazılamayacağını kabul edelim. Bu durumda $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ noktalarından herhangi ikisi birbirine eşit olamaz ve $\lambda_1, ..., \lambda_k > 0$ olur. $k \leq r+1$ olduğunu gösterdiğimizde teorem ispatlanmış olur. Bir çelişki yaratarak bunu gösterebiliriz. $k > r+1$ olsun. $\mathbb{X}$, r-boyutlu olduğundan $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k\}$ kümesi afin bağımlı olmalıdır. Başka bir değişle,

$$\mu_1\mathbf{x}_1 + ... + \mu_k\mathbf{x}_k = 0, \ \ \mu_1 + ... + \mu_k = 0,$$

olacak şekilde en az bir tanesi sıfırdan farklı olan μ_i skalerleri vardır. $t > 0$ olsun. Öyleyse, pozitif ve en az bir tanesi sıfır olan $\lambda_1 + \mu_1 t, ..., \lambda_k + \mu_k t$ skalerlerini bulabiliriz. Sonuç olarak,

$$\mathbf{x} = (\lambda_1 + \mu_1 t)\mathbf{x}_1 + ... + (\lambda_k + \mu_k t)\mathbf{x}_k$$

yazılabilir ve bu da (sıfır olan katsayılar ihmal edildiğinde) $\mathbf{x}$'in k'dan daha az noktanın bir konveks kombinasyonu olarak yazılabildiğini gösterir. k'nın minimalliği ile çelişen bu sonuç ise $k \leq r+1$ olduğunu gösterir.

Tanım (Konveks Polytope, Konveks Cisim): Sonlu sayıda nokta içeren bir kümenin konveks çanağına konveks polytope denir. $n > p-1$ olmak üzere n-boyutlu gerçel uzayda $p+1$ noktadan oluşan afin bağımsız bir kümenin konveks çanağına p-simpleks denir ve Δ_p ile gösterilir. Geometrik olarak $p = 0$ noktaya, $p = 1$ doğru parçasına, $p = 2$ üçgene ve $p = 3$ tetrahedrona karşılık gelir.

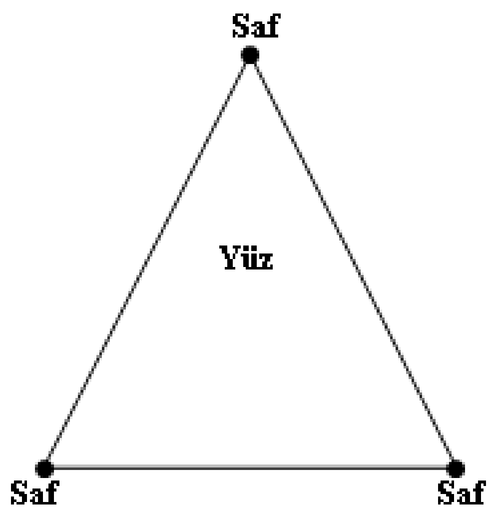
Bir konveks kümenin boyutu n, içerdiği en büyük n-simpleks ile belirlenir. Kapalı, sınırlı (kompakt) ve bir iç yapıya (interior) sahip olan konveks kümeler ise konveks cisimler olarak adlandırılırlar.

Tanım (Saf Nokta, Yüz): Konveks cisimler, cisim üzerindeki noktaların konveks kombinasyonları olarak yazılamayan noktalara sahiptirler. Bu noktalar matematikçiler tarafından ekstrem noktalar, fizikçiler tarafından ise saf noktalar olarak adlandırılırlar.

Konveks bir $\mathbb{X}$ kümesinin herhangi bir $\mathbb{F}$ alt kümesinden seçilen noktaların konveks kombinasyonaları yine $\mathbb{F}$ kümesinde bulunuyorsa bu kümeye, $\mathbb{X}$ konveks kümesinin bir yüzü (face) denir. Başka bir ifadeyle;

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in \mathbb{F} \Leftrightarrow \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{F}, \ \ 0 \leq \lambda \leq 1, \tag{2.16}$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathbb{F}$ (konveks) kümesine $\mathbb{X}$ kümesinin bir yüzü denir.



Şekil 2.2 Δ_2, saf noktaları ve yüzü

Teorem 2.2.6 (Minkowski Teoremi): Her konveks cisim saf noktalarının konveks çanağıdır.

Carathéodory ve Minkowski teoremlerinin ışığında rahatlıkla anlaşılabileceği gibi; bir konveks cismin herhangi bir $\mathbf{x}$ noktası, saf noktalarının konveks kombinasyonu olarak yazılabilir:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad \sum_i \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0, \quad p \leq n+1. \tag{2.17}$$

Saf noktalar her zaman konveks kümenin sınırında bulunurlar ancak sınırda bulunan her nokta saf değildir.

Simpleks içerisindeki herhangi bir nokta, saf noktalarının konveks kombinasyonu olarak yazılabilir ve bu yazım tektir. Başka hiçbir konveks küme bu özelliğe değildir. Bununla birlikte, bir $\mathbf{x}$ noktasının rankı, bu noktayı oluşturan konveks kombinasyon için gerekli olan minimum p sayısıdır. Tanım gereği saf noktaların rankı birdir.

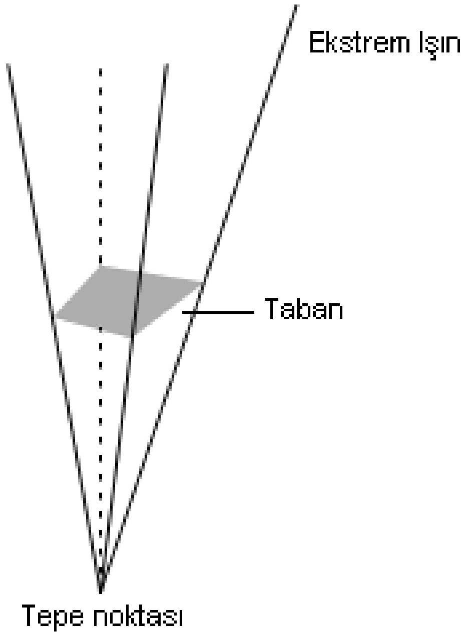
Teorem 2.2.7: $\mathbb{X}$, n-boyutlu gerçel uzayda boş olmayan bir küme olsun. Bu kümenin bir konveks koni olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ ve $\lambda, \mu \geq 0$ için $\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y} \in \mathbb{X}$ olmasıdır (Webster, 1996).

Teorem 2.2.7 şu şekilde de ifade edilebilir: $\mathbb{X}$, n-boyutlu bir konveks küme olsun. $\mathbb{X}$ kümesini içeren n-boyutlu bir afin alt uzaydan seçilmeyen herhangi bir $\mathbf{y}$ noktasını orijin kabul eden ve $\mathbb{X}$'den geçen ışınların bileşkesine konveks koni denir.

$\mathbf{y}$ noktası koninin tepe noktası olarak tanımlanırken, $\mathbb{X}$ kümesi koninin tabanını oluşturur. Işınlar, $\mathbb{X}$ kümesini saf noktalarından kestiğinden ”ekstrem ışın” adını alırlar.

Konveks koni simpleksler cinsinden de ifade edilebilinir: p-simpleksi tabanı, simpleks üzerinde bulunmayan bir noktayı ise tepe noktası kabul eden $p+1$ boyutlu konveks kümeye konveks koni denir.

Tanım (Konveks Fonksiyon): $\mathbb{X} \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ tanımlı bir



Şekil 2.3 Konveks koni

fonksiyonun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \leq \lambda f(\mathbf{x}) + (1-\lambda)f(\mathbf{y}), \ \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{X}, \ \ \lambda \in [0,1] \tag{2.18}$$

eşitsizliğini gerçeklemesidir. Eğer, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ve türevlenebilir bir fonksiyon ise, fonksiyonun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul

$$f(y) - f(x) \geq (y-x)f'(x), \ \ x, y \in \mathbb{R} \tag{2.19}$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Fonksiyon iki kere türevlenebiliyorsa, konveks olabilmesi için ikinci türevinin pozitif olması gerekir. Bir fonksiyonun konkav olabilmesi için gerek ve yeter koşul ise, $-f$ nin konveks olmasıdır.

3. YOĞUNLUK İŞLEMCİLERİ

Bu bölümde; yoğunluk işlemcileri, bu işlemcilerin uzayı ve bu uzayda tanımlanan bazı kavramlar tartışılacaktır. Ayrıca, kuantum mekaniğinin yoğunluk işlemcileri ile tarifi ve kuantum mekaniksel ölçümler tanıtılacaktır.

3.1 Pozitif İşlemciler

$\mathcal{H}$, N kompleks boyutlu bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayın duali $\mathcal{H}^*$, $\mathcal{H}$'den kompleks sayılara tanımlı doğrusal gönderimlerin uzayıdır. $\mathcal{H}$ üzerinde tanımlı işlemcilerin uzayı olan Hilbert-Schmidt uzayı ise,

$$\mathcal{HS} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}^* \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanır ve bu uzaydaki iki işlemcinin iç çarpımı

$$\langle A, B \rangle = \frac{1}{2} Tr(A^\dagger B), \quad A, B \in \mathcal{HS} \tag{3.2}$$

Hermitesel formu (simetrik sesqui-doğrusal form) ile belirlenir. Tanımlanan bu iç-çarpım, $\mathcal{HS}$ uzaklığı olarak bilinen

$$D_2^2 \equiv \frac{1}{2} Tr[(A - B)(A^\dagger - B^\dagger)] \equiv \frac{1}{2} D_{\mathcal{HS}}^2 \tag{3.3}$$

Öklidyen uzaklığın tanımlanmasına olanak sağlar.

Bir işlemci, Hermitesel eşleniği ile sıra değişiyor ise bir normal işlemci olarak adlandırılır:

$$[A, A^\dagger] = 0.$$

Bir normal işlemcinin Hermitesel olabilmesi için gerek ve yeter koşul gerçel özdeğerlere sahip olmasıdır. Normal işlemciler üniter baz dönüşümleriyle köşegenleştirilebilirler.

Kuantum mekaniğinde gözlenebilirler Hermitesel işlemcilerle temsil edilirler. Hermitesel işlemcilerin uzayı $\mathcal{HM}$, $\mathcal{HS}$ uzayının N^2 gerçel boyutlu bir alt uzayıdır. En genel bir Hermitesel işlemci

$$A = n_0\sqrt{\frac{2}{N}}I_N + \sum_{i=1}^{N^2-1} n_i\sigma_i \;\;\Leftrightarrow\;\; n_0 = \frac{TrA}{\sqrt{2N}},\;\; n_i = \frac{1}{2}Tr(\sigma_i A) \tag{3.4}$$

şeklinde yazılabilir. Burada I_N, $N \times N$'li birim matris ve σ_i'ler $SU(N)$ grubunun üreticilerileri olup

$$\sigma_i\sigma_j = \frac{2}{N}\delta_{ij} + d_{ijk}\sigma_k + if_{ijk}\sigma_k$$

bağıntısını sağlarlar. d_{ijk} tamamiyle simetrik, f_{ijk} ise tamamiyle anti-simetrik bir tensördür.

Bir Hilbert uzayından seçilen tüm $|\psi\rangle$ vektörleri için $\langle\psi|P|\psi\rangle$ beklenen değeri, gerçel ve pozitif olan işlemcilere pozitif işlemciler denir. Başka bir ifadeyle, tüm özdeğerleri pozitif olan Hermitesel matrisler pozitif işlemciler olarak tanımlanabilirler:

$$P \geq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; \langle\psi|P|\psi\rangle \geq 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; P = AA^\dagger,\;\; \forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}. \tag{3.5}$$

Pozitif işlemcilerin kümesini $\mathcal{P}$ ile gösterelim. Bu küme Hermitesel matrisler kümesinin bir alt kümesi olup boyutu N^2'dir:

$$\mathcal{P} \subset \mathcal{HM},\;\; dim(\mathcal{P}) = dim(\mathcal{HM}) = N^2.$$

P_1,$P_2 \in \mathcal{P}$ ve $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu iki pozitif işlemcinin konveks kombinasyonunu ise P ile gösterelim:

$$\begin{aligned} P &= \lambda P_1 + (1-\lambda)P_2 \\ \Rightarrow \langle\psi|P|\psi\rangle &= \lambda \underbrace{\langle\psi|P_1|\psi\rangle}_{\geq 0} + (1-\lambda)\underbrace{\langle\psi|P_2|\psi\rangle}_{\geq 0} \\ \Rightarrow \langle\psi|P|\psi\rangle &\geq 0,\;\; \forall|\psi\rangle \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Yani, pozitif işlemcilerin kümesinden seçilmiş herhangi iki işlemcinin konveks kombinasyonu yine bir pozitif işlemcidir. Dolayısıyla, $\mathcal{P}$ konveks bir kümedir.

Pozitif işlemcilerin ilerideki incelemelerde gerek duyulabilinecek birkaç önemli özelliği

(i) $(\sqrt{P})^2 = P$,

(ii) $|A| \equiv \sqrt{AA^\dagger},\ P = AA^\dagger$,

(iii) $A = \sqrt{AA^\dagger}U$, U üniter bir matris (Kutupsal ayrışım)

olarak verilebilir.

3.2 Yoğunluk İşlemcileri

$N \times N$'li bir ρ kompleks matrisinin, yoğunluk işlemcisi olabilmesi için

(i) $\rho^\dagger = \rho$,

(ii) $\rho \geq 0$,

(iii) $Tr\rho = 1$,

koşullarını sağlaması gerekir. Başka bir ifadeyle, yoğunluk işlemcilerinin kümesi $\mathcal{M}^{(N)}$, birim izli tüm pozitif işlemcilerin kümesidir. $\mathcal{M}^{(N)}$ konveks bir kümedir ve saf noktaları iz-düşümlerdir:

$$\rho \ saf \ \Leftrightarrow \ \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \ ve \ \langle\psi|\psi\rangle = 1 \ \Leftrightarrow \ \rho^2 = \rho. \tag{3.6}$$

En genel bir yoğunluk işlemcisi

$$\rho = \frac{1}{N} I_N + \sum_{i=1}^{N^2-1} n_i \sigma_i \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. $\rho_* = \frac{1}{N} I_N$ olarak tanımlanan yoğunluk işlemcisine ise maksimum saf-olmayan durum adı verilir.

3.2.1 Kübitler $(N = 2)$

Klasik bilişim kuramında, bir klasik fiziksel sistemin bilgiyi depolama becerisi ya da bilgi depolama kapasitesi bit kavramı ile belirlenir. Benzer şekilde, kuantum bilişim kuramında aynı işlevi kuantum bitler veya kısaca kübitler üstlenirler.

Kuantum mekaniğinin üst-üste gelim ilkesi kübitleri, klasik bitlerden ayırır: Bir klasik bit iki belirli durumun (0 veya 1) yalnızca birinde bulunabilirken, bir kübit sonsuz sayıdaki durumlardan herhangi birinde bulunabilir. Bununla birlikte, bir kuantum bitin aynı anda birden fazla durumda olabilme potansiyeli de mevcuttur.

Kübitler iki girilebilir durumlu sistemlerin uzaylarıdırlar. Bahsedilen iki olası durum $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ ketleri ile gösterilir. Yukarıda da belirtildiği gibi bir kübit bu iki durumun bir doğrusal kombinasyonu ile de gösterilebilinir:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{3.8}$$

Kübitler birden fazla temsilde yazılabilirler. Bunlardan biri de spinör temsilidir. Spi-nör temsilinde $|\psi\rangle$ kübiti

$$|\psi\rangle = |0\rangle \cos\frac{\theta}{2} + |1\rangle e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} \tag{3.9}$$

şeklinde θ ve ϕ açılarına bağlı olarak yazılır. Bu temsilde kübite karşılık gelen (saf) yoğunluk işlemcisi yazılmak istenirse:

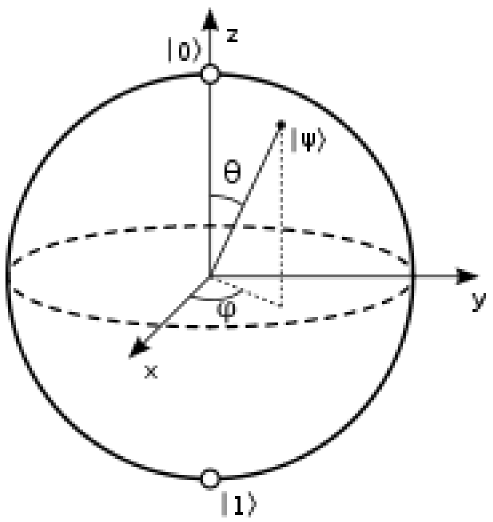
$$\begin{aligned}
\rho = |\psi\rangle\langle\psi| &= \begin{pmatrix} \cos\theta/2 \\ e^{i\phi}\sin\theta/2 \end{pmatrix} (\cos\theta/2, e^{-i\phi}\sin\theta/2) \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) & 1-\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}(I + \sigma_x \sin\theta\cos\phi + \sigma_y \sin\theta\sin\phi + \sigma_z\cos\theta) \\
&= \frac{1}{2}(I + \widehat{n}\cdot\sigma)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ Pauli spin matrisleri, I birim matris ve $\widehat{n} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ ise küresel koordinatlarda birim vektörü temsil etmektedir.

θ ve ϕ açılarının değerlerini değiştirdiğimizde $\widehat{n}$ birim vektörü Bloch küresi olarak bilinen birim yarıçaplı kürenin farklı noktalarını işaretler. Bu noktalar spin-1/2 parçacığın saf-spin durumlarına karşılık gelir. Ayrıca, saf-olmayan durumlar saf durumların konveks kombinasyonları olarak yazılabildiğinden, Bloch temsilinde

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_i p_i \frac{1}{2}(I + \widehat{n}_i \cdot \sigma), \quad \sum_i p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \\
&= \frac{1}{2}[I + (\sum_i p_i \widehat{n}_i) \cdot \sigma] \\
&= \frac{1}{2}(I + \mathbf{n} \cdot \sigma)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\mathbf{n} = \sum_i p_i \widehat{n}_i$ vektörü Bloch vektörü olarak bilinir ve $\|\mathbf{n}\| \leq 1$ dir. $\|\mathbf{n}\| = 1$ saf durumlara karşılık gelirken, $\|\mathbf{n}\| < 1$ saf-olmayan durumlara karşılık gelir. Tüm bu yapılandırma ise Bloch yuvarı olarak adlandırılır. Yuvarın merkezinde maksimum saf-olmayan durum bulunur. $N = 2$ durumunda Bloch yuvarının yüzeyinde sadece



Şekil 3.1 Bloch yuvarı

saf durumlar bulunur. Ancak bu durum $N > 2$ için geçerli değildir. Daha üst boyutlarda saf durumlar uzayın sınırında bulunurlar ancak sınırda bulunan tüm durumlar saf değildir.

Yoğunluk işlemcilerinin uzayına biraz daha yakından bakarsak yukarıda bahsettiğimiz durum biraz daha netlik kazanacaktır. $\mathcal{M}^{(N)}$, $N^2 - 1$ boyutlu bir uzaydır. Saf noktaları iz-düşümler olup bu noktaların uzayı ise $\mathbb{C}\mathcal{P}^{(N-1)}$ ($(N-1)$ boyutlu kompleks projektif uzay) dir. Saf durumlar $\mathcal{M}^{(N)}$'nin (N^2-2) boyutlu sınırında $2(N-1)$ boyutlu bir alt küme oluştururlar. Dolayısıyla, kütrit olarak bilinen $N = 3$ durumunda saf noktalar 7 boyutlu sınırda yanlızca 4 boyutlu bir alt küme oluştururlar. Kütritler uzayının geometrik yapısı henüz net ve doyurucu olarak bilinmemektedir. Bu konudaki çalışmalar yoğun bir şekilde devam etmektedir.

Her yoğunluk işlemcisi köşegenleştirilebilir. Verilen bir $\{|e_i\rangle\}$ bazına göre köşegen olan yoğunluk işlemcilerinin kümesi

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|, \quad \rho|e_i\rangle = \lambda_i|e_i\rangle, \quad \sum_{i}^{N} \lambda_i = 1 \tag{3.10}$$

şeklinde verilir ve özdeğer simpleksi olarak bilinir. Merkezinde maksimum saf-olmayan durum bulunur. Saf durumlar ρ_*'dan maksimum uzaklıkta bulunurlar.

Teorem (Schrödinger): Verilen bir baza göre

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \tag{3.11}$$

şeklinde köşegen formda yazılan bir ρ yoğunluk işlemcisinin

$$\rho = \sum_{i}^{M} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad \langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1, \quad \sum_{i} p_i = 1, \quad p_i \geq 0 \tag{3.12}$$

olarak yazılabilmesi için gerek ve koşul

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} \sum_{j=1}^{N} U_{ij} \sqrt{\lambda_j} |e_j\rangle \tag{3.13}$$

olacak şekilde bir $M \times M$'li U üniter matrisinin bulunmasıdır (Bengtsson ve Życzkowski, 2006).

Schrödinger teoremi bir yoğunluk işlemcisinin herzaman, bu işlemcinin özvektörlerinin gerdiği Hilbert uzayının bir alt uzayından seçilen saf durumların konveks kombinasyonu olarak yazılabileceğini söyler. Geometrik olarak bunun anlamı K boyutlu bir Hilbert uzayına ait yoğunluk işlemcilerinin cisminin, herbir yüzünün, $\mathcal{M}^{(K)}$ uzayının bir kopyası olduğudur. $K < N$ durumunda yüz; $\mathcal{M}^{(N)}$ uzayının sınırındadır.

Yoğunluk işlemcileri; Kuantum Bilişim Kuramı, Kuantum Dolanıklılık ve Kuantum Optiği gibi kuramlar için anahtar nicelik olmakla birlikte, temel kuantum mekaniğinde de önemli görevler üstlenirler: Yoğunluk işlemcileri; önceden belirlenmiş özelliklere göre hazırlanan bir kuantum mekaniksel sisteme ait herhangi bir işlemcinin beklenen değerinin hesaplanabilmesi için gerekli olan minimum girdi kümesini temsil ederler. Daha sade bir ifade ile bir Q işlemcisinin, ρ yoğunluk işlemcisi ile tarif edilen bir sistemdeki beklenen değeri

$$\langle Q \rangle = Tr(\rho Q) \tag{3.14}$$

ile ifade edilir.

3.2.2 Bileşik sistemler

$\mathcal{H}_1$, N_1 boyutlu bir Hilbert uzayı, $\mathcal{H}_2$ ise N_2 boyutlu bir Hilbert uzayı olsun. $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N_1}$ ve $\{|f_j\rangle\}_{j=1}^{N_2}$ sırasıyla $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ uzaylarını geren baz vektörleri olarak seçelim. $\mathcal{H}_{12}$ Hilbert uzayı, $\{|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle\}_{i,j=1}^{N_1 N_2}$ bazlarının gerdiği $N_1 N_2$ boyutlu bir vektör uzayıdır:

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2. \tag{3.15}$$

Bu uzaya etki eden ρ_{12} yoğunluk işlemcisi, alt durumlarının bir tensör çarpımı olarak ifade edilebileceği gibi tersi durumlarda söz konusudur. ρ_1 ve ρ_2 sırasıyla $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$

üzerine etki eden yoğunluk işlemcileri olsun. Eğer

$$\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2 \tag{3.16}$$

şeklinde yazılabiliyorsa ρ_{12} bir çarpım durumudur denir. Alt durumlarının bir tensör çarpımı olarak yazılamayan durumlar ise dolanık durumlar olarak adlandırılır-lar.

Verilen herhangi bir ρ_{12} yoğunluk işlemcisinin alt durumları

$$\rho_1 = Tr_2\rho_{12}, \quad \rho_2 = Tr_1\rho_{12} \tag{3.17}$$

şeklinde bulunur. ρ_1 ve ρ_2'ye indirgenmiş yoğunluk işlemcileri denir. Burada, Tr_1 ve Tr_2 sırasıyla birinci ve ikinci sistemler üzerinden alınan kısmi izlerdir.

Oluşturulan bu matematiksel yapının fiziksel olarak da ilgi çekici özellikleri vardır. Yanlızca birinci sistem üzerinde yapılan bir deneyi düşünelim. Bu durumda ilgilendiğimiz gözlenebilirler

$$Q = Q_1 \otimes I_2 \tag{3.18}$$

şeklinde olacak ve gözlenebilirimizin beklenen değeri

$$\begin{aligned}
\langle Q \rangle &= Tr(\rho_{12}Q) \\
&= Tr[\rho_{12}(Q_1 \otimes I_2)] \\
&= \sum_{k,l} \langle k,l|\rho_{12}(Q_1 \otimes I_2)|k,l\rangle \\
&= \sum_{k,l,k',l'} \langle k,l|\rho_{12}|k',l'\rangle\langle k',l'|(Q_1 \otimes I_2)|k,l\rangle \\
&= \sum_{k,l,k'} \langle k,l|\rho_{12}|k',l\rangle\langle k'|Q_1|k\rangle \\
&= \sum_{k,k'} \langle k|\rho_1|k'\rangle\langle k'|Q_1|k\rangle \\
&= \sum_{k} \langle k|\rho_1 Q_1|k\rangle \\
&= Tr_1(\rho_1 Q_1)
\end{aligned}$$

ile ifade edilecekdir.

Teorem (Schmidt Ayrışımı): $\{|e_i\rangle\}_{i=1}^{N_1}$ ve $\{|f_i\rangle\}_{i=1}^{N_2}$ sırasıyla $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ için ortonormal bazlar ve $N \leq \min\{N_1, N_2\}$ olmak üzere, $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ uzayındaki her saf durum

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\lambda_i}|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle \tag{3.19}$$

şeklinde ifade edilebilir.

İspat: Herhangi bir saf durum

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2} C_{ij}|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$$

olacak şekilde ifade edilebileceği aşikardır. C herhangi bir kompleks değerli matris ve bazlar gelişigüzel seçilmiştir. $N_1 \leq N_2$ ve

$$|\phi_i\rangle = \sum_{j=1}^{N_2} C_{ij}|f_j\rangle$$

olsun. Bu durumda,

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N_1} |e_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle$$

ve

$$\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{i,j=1}^{N_1} |e_i\rangle\langle\, e_j| \otimes |\phi_i\rangle\langle\, \phi_j|$$

elde edilir. İkinci alt sisteme göre kısmi iz alınırsa

$$Tr_2\rho_\psi = \sum_{i,j=1}^{N_1} |e_i\rangle\langle\, e_j|(\langle\, \phi_j|\phi_i\rangle)$$

elde edilir. Ayrıca ρ_1 köşegenleştirilebileceğinden

$$
\begin{aligned}
\rho_1 &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|, \;\; \lambda_i \geq 0 \\
\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| &= \sum_{i,j=1}^{N_1} (|e_i\rangle\langle\, e_j|)(\langle\, \phi_j|\phi_i\rangle), \;\; \Leftrightarrow \;\; \langle\, \phi_j|\phi_i\rangle = \lambda_i \delta_{ij} \\
\Rightarrow |\phi_i\rangle &= \sqrt{\lambda_i}|f_i\rangle, \\
\Rightarrow |\psi\rangle &= \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\lambda_i}|e_i\rangle \otimes |f_i\rangle
\end{aligned}
$$

bulunur.

Schmidt ayrışımında karşımıza çıkan λ_i sayılarına Schmidt katsayıları denir ve

$$\sum_{i} \lambda_i = 1, \;\; \lambda_i \geq 0 \tag{3.20}$$

bağıntılarını gerçeklerler. Olası tüm λ vektörlerinin kümesi $(N-1)$ boyutlu bir simplekstir. Bu simplekse Schmidt simpleksi denir. Sıfırdan farklı λ_i katsayılarının sayısı r'ye $|\psi\rangle$ durumunun Schmidt rankı denir ve indirgenmiş yoğunluk işlemcisinin rankına eşittir. $|\psi\rangle$ durumunun saf olabilmesi için gerek ve yeter koşul $r = 1$ olmasıdır. $r \geq 2$ durumunda $|\psi\rangle$ durumu dolanık bir durumdur.

Lemma (İndirgeme): ρ_{12}, $\mathcal{H}_{12}$ üzerinde bir saf durum olsun. İndirgenmiş yoğunluk işlemcileri ρ_1 ve ρ_2'nin spektrumları, herhangi bir sıfır özdeğerinin olası dejenereliği dışında özdeştir (Araki ve Lieb, 1970).

Lemma (Saflaştırma): Bir $\mathcal{H}_1$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı ρ_1 yoğunluk işlemcisi için, bir $\mathcal{H}_2$ Hilbert uzayı ve $\rho_1 = Tr_2\rho_{12}$ olacak şekilde $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ üzerinde tanımlı bir ρ_{12} saf yoğunluk işlemcisi vardır (Araki ve Lieb, 1970).

3.2.3 Hilbert-Schmidt demeti, fidelite ve Bures uzaklığı

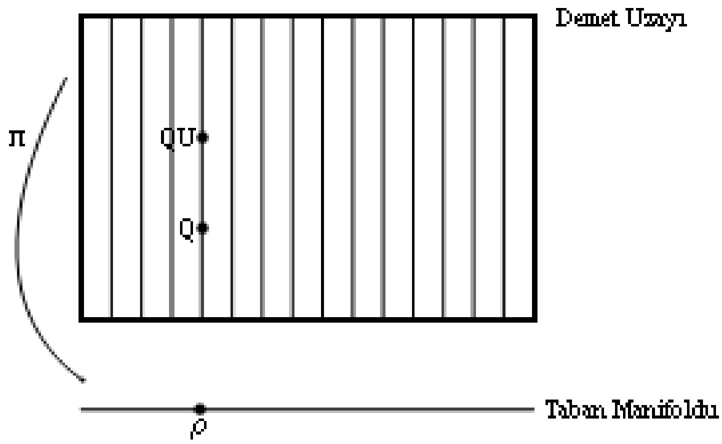
$\mathcal{HS}$ uzayının noktaları (vektörleri) $\mathcal{H}$ uzayı üzerine etki eden Q işlemcileri olarak düşünülebilir. $\mathcal{HS}$ uzayından, pozitif işlemcilerin uzayı olan $\mathcal{P}$ konveks konisine

$$\Pi : Q \to \rho = QQ^\dagger \tag{3.21}$$

şeklinde bir iz-düşüm vardır. Lifler aynı pozitif işlemci üzerine iz-düşen işlemcilerden oluşur. Üniter grubun lifler üzerindeki etkisi ise

$$Q \to Q' = QU \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 3.2 Hilbert-Schmidt demeti

Demetin yapı grubu $U(N)$, taban manifoldu ise pozitif koninin içidir. Ayrıca $\mathcal{HS}$ uzayında, X ve Y tanjant vektörleri olmak üzere

$$X \cdot Y = \frac{1}{2}[\langle X, Y\rangle + \langle Y, X\rangle] = \frac{1}{2}Tr(X^\dagger Y + Y^\dagger X) \tag{3.23}$$

metriği tanımlanabilir.

Oluşturulan bu yapı Hilbert-Schmidt demeti olarak adlandırılır. Demet uzayındaki bir matrisin boylandırılmış bir yoğunluk işlemcisine iz-düşebilmesi için gerek ve yeter koşul, matrisin $\mathcal{HS}$'de birim küre üzerinde bulunmasıdır.

Demet uzayında iki nokta arasındaki uzaklık

$$d_D^2(Q_1, Q_2) = \|Q_1 - Q_2\|_{\mathcal{HS}}^2 = Tr(Q_1 Q_1^\dagger + Q_2 Q_2^\dagger - Q_1 Q_2^\dagger - Q_2 Q_1^\dagger) \tag{3.24}$$

ile verilirken, jeodezik uzaklık

$$\cos d_Q = \frac{1}{2} Tr(Q_1 Q_2^\dagger + Q_2 Q_1^\dagger) \tag{3.25}$$

şeklindedir. $\cos d_Q$, birim izli yoğunluk işlemcilerine iz-düşen eğrinin uzunluğunu ölçer.

İki yoğunluk işlemcisinin kök-fidelitesi

$$\sqrt{F}(\rho_1, \rho_2) = \max \cos d_Q = \frac{1}{2} \max Tr(Q_1 Q_2^\dagger + Q_2 Q_1^\dagger) = \max |Tr(Q_1 Q_2^\dagger)| \tag{3.26}$$

ifadesi ile tanımlanır. Fidelite, iki yoğunluk işlemcisi arasındaki uzaklığın bir ölçüsü olmakla birlikte bir metrik değildir. Bununla birlikte, fidelitenin yardımı ile yoğunluk işlemcilerinin uzayında iki Riemannian uzaklık tanımlayabiliriz. Bunlar sırasıyla Bures uzaklığı

$$D_B^2(\rho_1, \rho_2) = Tr\rho_1 + Tr\rho_2 - 2\sqrt{F}(\rho_1, \rho_2) \tag{3.27}$$

ve Bures açısıdır

$$\cos D_B(\rho_1, \rho_2) = \sqrt{F}(\rho_1, \rho_2). \tag{3.28}$$

Bures açısı $\mathcal{M}^{(N)}$ içerisindeki bir eğrinin uzunluğunun ölçüsüyken, Bures uzaklığı pozitif koni içerisindeki bir eğrinin uzunluğunun ölçüsüdür.

Teorem (Uhlmann): İki yoğunluk işlemcisinin kök-fidelitesi

$$\sqrt{F}(\rho_1, \rho_2) = Tr|\sqrt{\rho_1}\sqrt{\rho_2}| = Tr\sqrt{\sqrt{\rho_2}\rho_1\sqrt{\rho_2}} \tag{3.29}$$

eşitliğini sağlar (Nilsen ve Chuang, 2000).

Uhlmann teoremininde yardımıyla herhangi bir yoğunluk işlemcisi ile maksimum saf-olmayan durum arasındaki Bures uzaklığı

$$\begin{aligned} D_B^2 &= Tr\rho_* + Tr\rho - 2\sqrt{F}(\rho, \rho_*) \\ &= Tr\rho_* + Tr\rho - 2Tr\sqrt{\sqrt{\rho_*}\rho\sqrt{\rho_*}} \\ &= 1 + Tr\rho - \frac{2}{\sqrt{N}}Tr\sqrt{\rho} \end{aligned}$$

şeklini alır. İki saf yoğunluk işlemcisinin kök-fidelitesi ise

$$\begin{aligned} \sqrt{F}(|\psi_1\rangle\langle\psi_1|, |\psi_2\rangle\langle\psi_2|) &= Tr\sqrt{\sqrt{|\psi_2\rangle\langle\psi_2|}|\psi_1\rangle\langle\psi_1|\sqrt{|\psi_2\rangle\langle\psi_2|}} \\ &= (|\langle\psi_1|\psi_2\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= |\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \\ &= \sqrt{\kappa} \end{aligned}$$

bulunur. Burada κ geçiş olasılığı olarak da bilinen projektif çapraz-orandır.

$N = 2$ durumunda her 2×2'li matris

$$A^2 - ATrA + \det A = 0$$

eşitliğini sağlar. Bu özellik kullanılarak

$$\begin{aligned} ATrA &= A^2 + \det A \\ \Rightarrow (TrA)(TrA) &= TrA^2 + (TrI)\det A \\ \Rightarrow (TrA)^2 &= TrA^2 + 2\det A \end{aligned}$$

elde edilir. $A = \sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}$ olsun. Bu durumda, fidelite

$$\begin{aligned} (\sqrt{F})^2 = F = (TrA)^2 &= Tr(\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}) + 2\det\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}} \\ &= Tr(\rho_1\rho_2) + 2\det\sqrt{\sqrt{\rho_1}}\det\sqrt{\rho_2}\det\sqrt{\sqrt{\rho_1}} \\ &= Tr(\rho_1\rho_2) + 2\sqrt{\det\rho_1\det\rho_2} \end{aligned}$$

olurken, Bures uzaklığı

$$D_B^2 = Tr\rho_1 + Tr\rho_2 - 2\sqrt{Tr(\rho_1\rho_2) + 2\sqrt{\det\rho_1\det\rho_2}}$$

olarak bulunur. $N = 2$ durumunda işlemcilerin kareköklerinin gözükmemesi özellikle kolaylık sağlamaktadır.

Kuantum Bilişim Kuramı'nda fidelite (işlevsel olarak); daha geniş bir kuantum sisteminde yapılan bir ölçüm ile verilen bir kuantum sistemini başka bir kuantum sistemine dönüştürmenin maksimum başarı olasılığına karşılık gelir. Bununla birlikte, fidelitenin fiziksel anlamı tam ve anlaşılır bir biçimde henüz ortaya konamamıştır.

3.2.4 Üniter dönüşümler ve orbit manifoldları

Teorem (Kadison): $\varphi : \mathcal{M}^{(N)} \to \mathcal{M}^{(N)}$ tanımlı birebir ve örten bir gönderim olsun. Bu gönderimin konveks yapıyı

$$\varphi(\lambda\rho_1 + (1-\lambda)\rho_2) = \lambda\varphi(\rho_1) + (1-\lambda)\varphi(\rho_2), \quad \lambda \in [0,1] \tag{3.30}$$

koruyabilmesi için gerek ve yeter koşul, gönderimin

$$\varphi(\rho) = U\rho U^{-1} \tag{3.31}$$

şeklinde tanımlı olmasıdır. Burada U işlemcisi üniter ya da anti-üniterdir.

Yoğunluk işlemcileri $SU(N)$ grubunun Lie cebri ile tanımlanmış bir vektör uzayında yer alırlar. Kadison teoremine göre yoğunluk işlemcilerine etki eden dönüşümler yine $SU(N)$ grubuna ait üniter dönüşümlerdir. Dolayısıyla burada söz konusu olan kendi Lie cebri üzerine etki eden bir grup etkisidir. Bu durum matematiksel olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}
\rho' = U\rho U^\dagger &= \frac{1}{N}I + \sum_i n_i U\sigma_i U^\dagger \equiv \frac{1}{N}I + \sum_i n_i'\sigma_i \\
\Rightarrow n_i' = \frac{1}{2}Tr(\rho'\sigma_i) &= \frac{1}{2}Tr(\sigma_i U\sigma_j U^\dagger)n_j \equiv \sum_j O_{ij}n_j \\
\Leftrightarrow O_{ij} &= \frac{1}{2}Tr(\sigma_i U\sigma_j U^\dagger), \ \sum_k O_{ik}O_{jk} = \delta_{ij}
\end{aligned}$$

O matrisi ortogonal bir matristir ve $SO(N^2-1)$ grubuna aittir. Anlaşılacağı üzere, yoğunluk işlemcilerinin simetri grubu $SU(N)/\mathcal{Z}_N$, dönme grubu $SO(N^2-1)$'in bir alt grubudur.

Bir G dinamik Lie grubunun etkisi altındaki ρ kuantum durumunun orbiti

$$G\rho = \{g\rho g^{-1} | g \in G\} \tag{3.32}$$

kümesi ile tanımlanabilir. Yoğunluk işlemcilerinin kümesi üzerine etki eden herhangi bir G Lie grubu, $\mathcal{M}^{(N)}$'nin bir tabakalandırmasını tanımlar.

$G = U(N)$ olsun. Üniter grubun etkisi altındaki bir yoğunluk işlemcisinin orbiti, bu işlemcinin spektrumu ile belirlenir. Yani, iki yoğunluk işlemcisinin aynı üniter orbite ait olabilmesi için gerek ve yeter koşul yoğunluk işlemcilerinin aynı n_i katlılığı ile aynı λ_i özdeğerlerine sahip olmasıdır.

$\sum_i n_i\lambda_i = 1$ olduğundan, sayılamaz sonsuz sayıda olası λ_i seçimine karşılık gelen sonsuz sayıda ayrık orbit vardır. Dolayısıyla, $U(N)$ grubunun $\mathcal{M}^{(N)}$ uzayını orbitlerin bir sayılamaz sonsuz ailesine bölüştürdüğü söylenebilir.

Teorem: $U(N)$ grubunun $\mathcal{M}^{(N)}$ üzerine etkisi $\rho \to \rho' = U\rho U^\dagger$ olarak tanımlı ve ρ n_i katlılığı ile ayrık λ_i özdeğerlerine sahip rankı; $r \geq 1$ olan bir kuantum durumu olsun. ρ durumunun orbiti, gerçel $N^2 - \sum_{i=1}^{r} n_i^2$ boyutlu

$$\frac{U(N)}{[U(n_1) \times U(n_2) \times ... \times U(n_r)]} \tag{3.33}$$

flag manifolduna homeomorfiktir (Schirmer vd. 2004).

$N = 2$ durumunda, bir ρ yoğunluk işlemcisi $diag(r, 1-r)$ matrisine üniter eşdeğerdir. $r = 1-r$ olsun. Bu durumda $\rho = \frac{1}{2}I$ (maksimum saf-olmayan durum) olur ve orbit $U(2)/U(2)$ manifolduna homeomorfiktir. $r \neq 1-r$ olması halinde ise yoğunluk işlemcisinin orbiti

$$\frac{U(2)}{[U(1)\times U(1)]}\cong \mathbb{C}\mathcal{P}^1$$

manifolduna homeomorfiktir.

Ayrıca $\mathbb{C}\mathcal{P}^1$, $\mathcal{S}^2$'ye diffeomorfik olduğundan, iki girilebilir durumlu bir sistemin herhangi bir $U(2)$ orbiti maksimum saf-olmayan durum dışında $\mathcal{S}^2$'ye homeomorfiktir.

Çizelge 3.1 Üniter orbitlere karşılık gelen manifoldlar (Schirmer vd. 2004)

	Manifold	Boyut
$N=3$		
$\rho = diag(a,a,a)$	nokta	0
$\rho = diag(a,b,b)$	$U(3)/[\mathcal{S}^1\times U(2)]$	4
$\rho = diag(a,b,c)$	$U(3)/[\mathcal{S}^1\times \mathcal{S}^1\times \mathcal{S}^1]$	6
$N=4$		
$\rho = diag(a,a,a,a)$	nokta	0
$\rho = diag(a,b,b,b)$	$U(4)/[\mathcal{S}^1\times U(3)]$	6
$\rho = diag(a,a,b,b)$	$U(4)/[U(2)\times U(2)]$	8
$\rho = diag(a,b,c,c)$	$U(4)/[\mathcal{S}^1\times \mathcal{S}^1\times U(2)]$	10
$\rho = diag(a,b,c,d)$	$U(4)/[\mathcal{S}^1\times \mathcal{S}^1\times \mathcal{S}^1\times \mathcal{S}^1]$	12

$N=3$ olsun. Eğer yoğunluk işlemcisi katlılığı 3 olan tek bir özdeğere sahipse $\rho=\frac{1}{3}I_3$ olur ve orbit $U(3)/U(3)$ manifolduna homeomorfiktir. ρ iki ayrık öz değere sahipse $diag(1-2a,a,a)$ matrisine üniter eşdeğerdir $(0\le a\le 1,\ a\ne 1/3)$ ve orbit

$$\frac{U(3)}{[U(1)\times U(2)]}$$

manifolduna homeomorfiktir. ρ üç ayrık özdeğere sahipse $diag(a,b,c)$ matrisine eşdeğerdir ve dolayısıyla

$$\frac{U(3)}{[U(1)\times U(1)\times U(1)]}$$

manifolduna homeomorfik olur.

Görüldüğü gibi iki durumlu sistemlerin tüm orbit manifoldları küreye homeomorfik olurken, daha yüksek boyutlu sistemlerde orbit manifoldları yüksek boyutlu Öklidyen uzay içerisindeki kürelerle asla tanımlanamazlar.

3.2.5 Pozitif işlemci değerli ölçümler

Kuantum mekaniğinde, verilen bir sistem üzerine uygulanacak işlemler (operasyonlar) temelde dört çeşit dönüşümün kombinasyonları şeklinde elde edilebilirler. Bu dönüşümler sırasıyla

(i) Üniter dönüşümler

(ii) Sistem genişletilmesi

(iii) Kısmi iz

(iv) Seçici dönüşümler

olarak tanımlanır. İlk üç dönüşümün bir kombinasyonu ile elde edilen dönüşümlere belirli kuantum dönüşümleri denir. Seçici ölçümlerin yer aldığı dönüşümler ise olasılıkçı kuantum işlemleri olarak bilinirler.

Bir ρ başlangıç sistemi seçilerek yukarıda belirtilen dönüşümler uygulanırsa

(i) $\rho \rightarrow \rho \otimes \sigma = \rho \otimes |j\rangle\langle j|$ (sistem genişletilmesi)

(ii) $\rho \rightarrow U\rho U^\dagger$ (üniter dönüşüm)

(iii) $\rho' = Tr_K[U(\rho \otimes |j\rangle\langle j|)U^\dagger] = \sum_{i=1}^{K}\langle i|U|j\rangle\rho\langle j|U^\dagger|i\rangle$ (kısmi iz) elde edilir. Burada $\sigma = |j\rangle\langle j|$; K boyutlu $\mathcal{H}_K$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlı, ρ ile etkileşimde bulunan herhangi bir sistemi temsil etmektedir. ρ yoğunluk işlemcisinin uzayı N boyutlu $\mathcal{H}_N$ uzayı ile temsil edilirse, genişletilmiş sistemin uzayı $\mathcal{H}_{NK} = \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_K$ formunu almış olur.

$A_i = \langle i|U|j\rangle$ olsun. Seçici olmayan kuantum ölçümleri (belirli kuantum işlemleri)

$$\rho \to \rho' = \sum_{i=1}^{K} A_i \rho A_i^\dagger, \quad \sum_{i=1}^{K} A_i^\dagger A_i = I \tag{3.34}$$

formunu alırlar. Bununla birlikte, (i)-(iii) dönüşümleri ile elde edilemeyen seçici ölçümler ise

$$\rho \to \rho_i = \frac{A_i \rho A_i^\dagger}{Tr(A_i \rho A_i^\dagger)}, \quad p_i = Tr(A_i \rho A_i^\dagger), \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \tag{3.35}$$

ile tanımlanırlar. Burada p_i; ρ durumunun i'nci çıktıyı oluşturma olasılığıdır.

Kuantum mekaniğinde sıkça kullanılan projektif ölçümlerde ise; A_i ölçüm işlemcileri orthogonal projeksiyonlardır:

$$A_i = P_i = A_i^\dagger, \quad P_i P_j = \delta_{ij} P_i, \quad i, j = 1, ..., N. \tag{3.36}$$

Projektif ölçümler bir Q Hermitesel işlemcisi ile tarif edilebilirler. Ölçümün olası çıktıları Q işlemcisinin özdeğerlerine karşılık gelirler:

$$Q = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i P_i, \quad P_i = |e_i\rangle\langle e_i|, \quad \sum_i |e_i\rangle\langle e_i| = 1. \tag{3.37}$$

Seçici olmayan projektif ölçümler

$$\rho \to \rho' = \sum_{i=1}^{N} P_i \rho P_i \tag{3.38}$$

ile gösterilir ve $[Q, \rho'] = 0$ olur. Seçici projektif ölçümlerde ise başlangıç durumu ρ

$$\rho \to \rho_i = \frac{P_i \rho P_i}{Tr(P_i \rho P_i)}, \quad p_i = Tr(P_i \rho P_i) = Tr(P_i \rho) \tag{3.39}$$

şeklinde dönüşür. p_i, λ_i ile temsil edilen çıktının gerçekleşme olasılığıdır. Projektif ölçümlerin tekrarlanabilir olmaları en önemli özellikleri olarak söylenebilir.

Pozitif işlemci değerli ölçümler birim işlemcinin, N boyutlu bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı k tane pozitif E_i işlemcilerinin bir kümesi içerisine herhangi bir bölüşümü olarak tanımlanır. Genel bir E_i pozitif işlemcisi

$$E_i = A_i A_i^\dagger \tag{3.40}$$

şeklinde yazılır ve

$$\sum_{i=1}^{k} E_i = I, \quad E_i = E_i^\dagger, \quad E_i \geq 0 \tag{3.41}$$

bağıntılarını sağlar. Bir ρ durumu üzerinde uygulanan pozitif işlemci değerli ölçüm, i'nci çıktıyı

$$p_i = Tr(E_i \rho) \tag{3.42}$$

olasılığı ile üretir ve tanımı gereği

$$\sum_i p_i = Tr(\sum_i E_i \rho) = Tr\rho = 1$$

olmasını garanti eder. Bir pozitif işlemci değerli ölçümün saf olabilmesi için yeter koşul, herbir E_i işlemcisinin rankının 1 olmasıdır. Saf olmayan ölçümler E_i'lerin spektral ayrışımları ile yer değiştirilmesi suretiyle saflaştırılabilirler.

3.2.6 Pozitif ve tamamiyle-pozitif gönderimler

$\rho \in \mathcal{M}^{(N)}$, N boyutlu bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir yoğunluk işlemcisi olsun. $\Phi : \mathcal{M}^{(N)} \to \mathcal{M}^{(N)}$ tanımlı bir gönderim olsun. Bu gönderimin bir fiziksel işleme karşılık gelebilmesi için öncelikle doğrusal olması gerekir (tüm fiziksel işlemler doğrusal gönderimler ile temsil edilmek zorunda olmasa da, yoğunluk işlemcilerinin uzayında doğrusallık vazgeçmesi zor olan bir özelliktir). Ayrıca, Φ yoğunluk işlemcilerini yine yoğunluk işlemcilerine göndereceğinden

(i) $\rho' = \Phi\rho = (\rho')^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\substack{m\mu \\ n\nu}} = \Phi^*_{\substack{\mu m \\ \nu n}}$

(ii) $Tr\rho' = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \Phi_{\substack{mm \\ n\nu}} = \delta_{n\nu}$

(iii) $\rho' \geq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \Phi_{\substack{m\mu \\ n\nu}} \rho_{n\nu} \geq 0, \;\; \rho > 0$

şartlarını sağlamak zorundadır. Gönderimi

$$D_{\substack{mn \\ \mu\nu}} = \Phi_{\substack{m\mu \\ n\nu}} \tag{3.43}$$

şeklinde tanımlanan bir dinamik matris cinsinden yazmak, gönderim üzerinde yukarıda belirlenen kısıtlamaların daha iyi anlaşılmasını sağlayabilir. Kısıtlamalar dinamik matris cinsinden

(i) $\rho' = (\rho')^{\dagger} \;\; \Leftrightarrow \;\; D_{\substack{mn \\ \mu\nu}} = D^{\dagger}_{\substack{mn \\ \mu\nu}}$

(ii) $Tr\rho' = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; D_{\substack{mn \\ m\nu}} = \delta_{n\nu}$

(iii) $\rho' \geq 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; D_{\substack{mn \\ \mu\nu}} \rho_{n\nu} \geq 0, \;\; \rho > 0$

şeklinde yeniden ifade edilebilir. D_Φ dinamik matrisi Φ gönderimini tek olarak belirler ve

$$D_{a\Phi + b\Psi} = aD_\Phi + bD_\Psi \tag{3.44}$$

bağıntısını sağlar. Bir dinamik matrisin $\mathcal{H}_{N^2}$ üzerinde tanımlı olan tensör çarpım durumlarına etki ettiğinde pozitifliği koruyabilmesi için, bizzat kendisinin de pozitif olması gerekir. Dinamik matrislerin bu özelliğine blok-pozitiflik denir.

Teorem (Jamiolkowski): Bir Φ doğrusal gönderiminin pozitif olabilmesi için gerek ve yeter koşul, bu gönderime karşılık gelen D_Φ dinamik matrisinin blok pozitif olmasıdır (Jamiolkowski, 1972).

Teorem (Choi): Bir Φ doğrusal gönderiminin tamamiyle pozitif olabilmesi için gerek ve koşul, bu gönderime karşılık gelen D_Φ dinamik matrisinin pozitif olmasıdır (Choi, 1975).

Bununla birlikte, bir Φ doğrusal gönderiminin tamamiyle pozitif olması için gerek ve yeter koşul

$$\rho \to \rho' = \sum_i A_i \rho A_i^\dagger \tag{3.45}$$

şeklinde verilebilir. Bu tanım aynı zamanda Kraus formu, A_i işlemcileri ise Kraus işlemcileri olarak bilinir.

CP (completely positive) gönderimlerin kümesi, D_Φ pozitif matrislerinin N^2 boyutlu kümesine izomorfiktir. Aynı zamanda izi de koruyan CP gönderimlere tamamiyle pozitif iz koruyan (completely positive trace preserving maps, CPTP) gönderimler denir. CPTP gönderimlerin kümesi $\mathcal{H}_{N^2}$ üzerinde tanımlı yoğunluk işlemcileri kümesinin bir alt kümesi olarak düşünülebilir.

Anlaşılacağı üzere, yoğunluk işlemcileri kuantum mekaniksel sistemlerin yanlızca dinamiğinin anlaşılmasında değil ayrıca bu sistemlerin uzayının geometrik yapısının incelenmesinde de önemli bir rol üstlenirler. Yoğunluk işlemcilerinin matematiksel yapılandırılmasının sade fakat güçlü olması, modern kuantum mekaniğinin değişmez parçalarından biri olmalarını ayrıca sağlamaktadır. Bununla birlikte, bu güçlü matematiksel aracın uzayının yapısının yüksek boyutlarda henüz tam bir biçimde anlaşılamamış olması, karşımıza çıkan en büyük handikaplardan bir tanesidir.

4. KUANTUM ENTROPİLERİ

Bu bölümde, kuantum entropilerinin daha rahat anlaşılabilmesi için öncelikle klasik entropiler incelenecek, daha sonra sırasıyla kuantum entropileri ve kuantum dolanıklılık kavramları tartışılacaktır.

4.1 Klasik Entropiler

Bu kısım içerisinde klasik entropiler, bu entropilerin Klasik Bilişim Kuramı'ndaki anlamları ve klasik olasılık dağılımlarının uzayının geometrisi incelenecektir.

4.1.1 Shannon entropisi

P olasılık dağılımına göre gerçekleşeceği bilinen bir deneyden elde edilecek olan çıktıların belirsizliğinin bir ölçüsü olan Shannon entropisi

$$H(P) = -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1 \tag{4.1}$$

şeklinde tanımlanır. Sıfır değerini saf durumlar (bir çıktının kesin olduğu durumlar) için alırken, maksimum değeri olan $\ln N$'yi tekdüze (eş) dağılımlar için alır.

Shannon entropisinin Klasik Bilişim Kuramı'ndaki rolü ve anlamını incelemeden önce, sahip olduğu belli başlı özelliklere bir göz atmakta fayda vardır.

Pozitiflik: Tüm kesikli dağılımlar için pozitif bir fonksiyondur; $H(P) \geq 0$.

Süreklilik: Dağılımların bir sürekli fonksiyonudur.

Konkavlık: Konveks küme teorisine göre konkav bir fonksiyondur. Olasılık dağılımlarını karıştırmak (mixing) entropiyi artırır:

$$H(\lambda P_1 + (1-\lambda)P_2) \geq \lambda H(P_1) + (1-\lambda)H(P_2), \quad \lambda \in [0,1]. \tag{4.2}$$

Toplanabilirlik: İki gelişigüzel ve bağımsız değişkeni tarif edebilmek için gerekli olan bilgi, aynı değişkenleri ayrı ayrı tarif edebilmek için gerekli olan bilgilerin toplamıdır:

$$H(P_{12}) = H(P_1) + H(P_2). \tag{4.3}$$

İspat: Olasılık dağılımları bağımsız olduklarından

$$p_{ij} = p_i p_j, \quad i, j = 1, ..., N$$

yazılabilir. Böylelikle,

$$\begin{aligned} H(P_{12}) = -\sum_{i,j=1}^{N} p_{ij} \ln p_{ij} = -\sum_{i,j=1}^{N} p_i p_j \ln p_i p_j &= -\sum_{i,j=1}^{N} p_i p_j \ln p_i - \sum_{i,j=1}^{N} p_i p_j \ln p_j \\ &= -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i - \sum_{j=1}^{N} p_j \ln p_j \\ &= H(P_1) + H(P_2) \end{aligned}$$

bulunur.

Alt-toplanabilirlik: Değişkenler bağımsız değillerse; değişkenleri aynı anda tarif edebilmek için gerekli olan bilgi, aynı değişkenleri ayrı ayrı tarif edebilmek için gerekli olan bilgilerin toplamından küçük ya da eşittir (Nielsen ve Chuang, 2000):

$$H(P_{12}) \leq H(P_1) + H(P_2). \tag{4.4}$$

Tekrarlama Özelliği: Verilen bir Q olasılık dağılımı için

$$q_1 = \sum_{i=1}^{k_1} p_i, \quad q_2 = \sum_{i=k_1+1}^{k_2} p_i, ..., \quad q_r = \sum_{N-k_r+1}^{N} p_i, \quad N = k_1 + ... + k_r$$

olsun. Shannon entropisi

$$H(P) = H(Q) + q_1 H(\frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_{k_1}}{q_1}) + ... + q_r H(\frac{p_{N-k_r+1}}{q_r}, ..., \frac{p_N}{q_r}) \tag{4.5}$$

eşitliğini sağlar.

İspat: $t = N - k_r + 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
H(P) - H(Q) &= -\sum_{i=1}^{N} p_i \ln p_i + \sum_{i=1}^{r} q_i \ln q_i \\
&= -\sum_{i=1}^{k_1} p_i \ln p_i - ... - \sum_{i=t}^{N} p_i \ln p_i + q_1 \ln q_1 + ... + q_r \ln q_r \\
&= -\sum_{i=1}^{k_1} p_i \ln p_i + \sum_{i=1}^{k_1} p_i \ln q_1 - ... - \sum_{i=t}^{N} p_i \ln p_i + \sum_{i=t}^{N} p_i \ln q_r \\
&= -q_1 [\sum_{i=1}^{k_1} \frac{p_i}{q_1} \ln \frac{p_i}{q_1}] - ... - q_r [\sum_{i=t}^{N} \frac{p_i}{q_r} \ln \frac{p_i}{q_r}] \\
&= q_1 H(\frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_{k_1}}{q_1}) + ... + q_r H(\frac{p_t}{q_r}, ..., \frac{p_N}{q_r}) \\
\Rightarrow H(P) &= H(Q) + q_1 H(\frac{p_1}{q_1}, ..., \frac{p_{k_1}}{q_1}) + ... + q_r H(\frac{p_t}{q_r}, ..., \frac{p_N}{q_r}).
\end{aligned}$$

bulunur.

Bilişim kuramsal olarak Shannon entropisini ve tanımlamamıza olanak sağladığı bazı entropileri inceleyelim. Öncelikle Shannon entropisini

$$H = -\sum_{i=1}^{N} p_i \log_2 p_i \tag{4.6}$$

şeklinde yazarak bilişim kuramına daha uygun bir hale getirelim. Shannon entropisi, verilen bir olasılık dağılımı (ya da olaylar kümesi) üzerinde yapılacak bir ölçüm sonucunda elde edilecek olan çıktıların belirlenebilmesi için gerekli olan bilginin bir ölçüsüdür. Başka bir ifadeyle, bu belirleme için gerekli olan iletişimin beklenen uzunluğu belirtir. Bu uzunluğun birimi bittir.

$N = 2^a$ olası çıktı bulunması halinde, entropinin maksimum değeri $\log_2 N = a$ bit olur. a, ikili sistemde yazılan sayılar siciminin uzunluğudur. Bir örnekle durumu daha açık ifade etmeye çalışalım. Dört adet çıktımız olsun. Bu çıktıları $00, 01, 10, 11$ olarak işaretleyelim. Bu işaretlemelerin herbiri kod kelimesi olarak adlandırılır. Örneğin (010001010010) sicimi $(01, 00, 01, 01, 00, 10)$ kod kelimeleri ile ifade edilir. Açıkça görüldüğü gibi, bir çıktıyı kodlamak için gerekli olan sicimin uzunluğu iki bittir.

Beklenen uzunluk

$$L = \sum_i p_i l_i \tag{4.7}$$

ile belirlenir. Burada l_i herbir kod kelimesinin uzunluğunu temsil etmektedir. Gerek klasik gerekse kuantum bilişim kuramlarında amaç beklenen uzunluğu minimize etmektir.

Teorem (Shannon): Verilen bir P kaynak dağılımı için L_* bir optimal kod içerisinde kullanılan bir kod kelimesinin beklenen uzunluğu olsun. Bu durumda

$$H(P) \leq L_* \leq H(P) + 1 \tag{4.8}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Teoremden de açıkça görülebileceği gibi entropi bilginin bir ölçüsüdür (Nielsen ve Chuang, 2000).

Shannon entropisi bilişim kuramında önemli birkaç fonksiyonun tanımlanmasına da olanak sağlar. Bunlardan bir tanesi koşullu entropidir:

$$H(P_1|P_2) = H(P_{12}) - H(P_1). \tag{4.9}$$

P_1 olasılık dağılımından elde edilecek olan bilgi P_2 olasılık dağılımı hakkında önceden varolan bilgiye koşullandırılmıştır. İki farklı olasılık dağılımının barındırdıkları ya da sahip oldukları ortak bilginin bir ölçüsü olan ortak bilgi fonksiyonu ise

$$I(P_1 : P_2) = H(P_1) + H(P_2) - H(P_{12}) \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır. Ortak bilgi, iki değişken arasındaki korelasyonun bir ölçüsü olarakta düşünülebilir.

4.1.2 Bağıl entropi

P ve Q olasılık dağılımlarının ayırtedilebilirliğinin bir ölçüsü olan bağıl entropi

$$H(P\|Q) = \sum_{i=1}^{N} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \tag{4.11}$$

şeklinde tanımlanır. Kullback-Leibler entropisi olarakta bilinir. Bilişim kuramsal açıdan bakıldığında bağıl entropi, bir kodun beklenen uzunluğunun nasıl büyüdüğünün bir ölçüsüdür. Bağıl entropi, simetri özelliği olmadığından bir metrik değildir. Bununla birlikte her zaman pozitif bir niceliktir:

$$H(P\|Q) \geq 0. \tag{4.12}$$

İspat: Bu özelliği ispatlamak için $\ln x \leq x-1, \forall x \geq 0$ eşitsizliğinden yararlanılabilir:

$$\begin{aligned} H(P\|Q) = \sum_i p_i \ln \frac{p_i}{q_i} &= -\sum_i p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \\ &\geq \sum_i p_i (1 - \frac{q_i}{p_i}) \\ &= \sum_i (p_i - q_i) = 0 \Rightarrow H(P\|Q) \geq 0. \end{aligned}$$

Bağıl entropinin pozitifliği kullanılarak Shannon entropisinin konkavlığı kolaylıkla gösterilebilir. R, P, Q gelişigüzel seçilmiş olasılık dağılımları ve $r_i = \lambda p_i + (1-\lambda) q_i$, $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bağıl entropiler

$$\begin{aligned} H(P\|R) = \sum_i p_i \ln p_i - \sum_i p_i \ln r_i &\geq 0 \\ H(Q\|R) = \sum_i q_i \ln q_i - \sum_i q_i \ln r_i &\geq 0 \end{aligned}$$

sırasıyla λ ve $(1-\lambda)$ ile çarpılarak

$$\begin{aligned} \sum_i \lambda p_i \ln p_i - \sum_i \lambda p_i \ln r_i &\geq 0 \\ \sum_i (1-\lambda) q_i \ln q_i - \sum_i (1-\lambda) q_i \ln r_i &\geq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$-r_i \ln r_i \geq -\lambda p_i \ln p_i - (1-\lambda) q_i \ln q_i$$

olur ve dolayısıyla

$$H(R) = H(\lambda P + (1-\lambda) Q) \geq \lambda H(P) + (1-\lambda) H(Q)$$

bulunur.

Shannon entropisi kullanılarak tanımlanan ortak bilgi, bağıl entropi cinsinden

$$I(P_1 : P_2) = H(P_{12} \| P_1 P_2) \tag{4.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Temelde gerek koşullu entropi gerekse ortak bilgi, bağıl entropinin özel halleridirler.

4.1.3 İstatiksel geometri

N tane olası x_i değerini alabilen gelişigüzel bir X değişkenini ele alalım. X'in herhangi bir x_i değerini alma olasılığı

$$P(X = x_i) = p^i$$

olsun. Olasılık kuramı uyarınca $p^i \geq 0$ ve $\sum_i p^i = 1$ olacaktır. p^i'lerin olasılık dağılımlarının uzayında koordinatlara karşılık geldiği düşünülürse, bu uzayın bir simpleks oluşturduğu görülür. Bu simplekse olasılık simpleksi denir. Saf noktalar simpleksin köşelerinde bulunurlar. Simpleks içerisindeki P ve Q gibi iki olasılık dağılımı arasındaki uzaklık

$$D_k(P, Q) = \|P - Q\|_k = \{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} |p_i - q_i|^k\}^{\frac{1}{k}}, \quad k \geq 1 \tag{4.14}$$

ile verilir. $N = 2$ durumunda bu uzaklığı bağıl entropi ile ilişkilendirmek mümkündür:

$$H(P\|Q) = \sum_{i=1}^{N} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (p_i - q_i)^2 = D_2^2(P, Q). \tag{4.15}$$

$\mathbf{p}$ simpleks üzerindeki herhangi bir vektör, $d\mathbf{p}$ ise tanjant vektörü olsun. Olasılık simpleksi üzerinde

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dp^i dp^j = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N} \frac{dp^i dp^i}{p^i}, \quad \Leftrightarrow \quad g_{ij} = \frac{1}{4} \frac{\delta_{ij}}{p^i} \tag{4.16}$$

Riemannian metriği tanımlanabilir. Tanımlanan bu metrik Fisher-Rao metriği olarak bilinir. Fisher-Rao metriği

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N} dx^i dx^i, \;\; dx^i = \frac{dp^i}{2\sqrt{p^i}}, \;\; x^i \geq 0 \tag{4.17}$$

şeklinde görece daha basit formda yazılabileceği gibi, Shannon entropisinin Hessien matrisi olarakta tanımlanabilir:

$$g_{ij} = -\frac{1}{4}\partial_i \partial_j H(P) = \frac{1}{4}\partial_i \partial_j \sum_{k=1}^{N} p^k \ln p^k. \tag{4.18}$$

Herhangi iki P ve Q olasılık dağılımı arasındaki jeodezik uzaklık

$$\cos D_{Bhatt} = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{p^i q^i} = B(P, Q) \tag{4.19}$$

ile verilir. Bu uzaklık Bhattacharyya uzaklığı, $p^i q^i$ katsayıları ise Bhattacharyya katsayıları olarak bilinir. Uzaklığın karesi klasik fidelite olarak tanımlanır.

Örnek uzay sürekli olduğunda olasılık dağılımlarının uzayı sonsuz boyutludur. Bir an için tekdüze dağılımların iki boyutlu alt manifoldları ile ilgilendiğimizi düşünelim:

$$p(x; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{4.20}$$

Ortalama (μ) ve standart sapma (σ) alt manifold içerisindeki koordinatları temsil etmektedir. En genel durumda, olasılık dağılımları uzayının bir sonlu boyutlu alt manifoldu

$$p(x; \theta^1, ..., \theta^n) \tag{4.21}$$

ile gösterilir. Burada θ^a alt manifold içerisindeki koordinatlara karşılık gelir. Benzerlik fonksiyonu olarakta bilinir. Log-benzerlik fonksiyonunu ele alalım:

$$l(x; \theta) = \ln p(x; \theta). \tag{4.22}$$

x örnek uzaydaki koordinatlara, θ ise olasılık dağılımları uzayının bir alt uzayındaki koordinatlara karşılık gelir. Log-benzerlik fonksiyonunun θ^a'lara göre alınan kısmi türevi skor vektörleri olarak adlandırılır:

$$l_a = \frac{\partial l}{\partial \theta^a}, \;\; \partial_a \equiv \frac{\partial}{\partial \theta_a}. \tag{4.23}$$

Genel bir tanjant vektörü, skor vektörlerinin bir doğrusal kombinasyou olarak yazılabilir:

$$A = A^a l_a. \tag{4.24}$$

Olasılık simpleksinin θ^a ile koordinize edilmiş herhangi bir alt manifoldunda Fisher-Rao metriği

$$g_{ab} = \sum_{i,j} \frac{\partial p^i}{\partial \theta^a} \frac{\partial p^j}{\partial \theta^b} g_{ij} = \frac{1}{4} \sum_i \frac{\partial_a p^i \partial_b p^i}{p^i} \tag{4.25}$$

olacak şekilde bir metrik indükler. Alt manifold sonlu boyutlu olduğu sürece bu metrik sürekli olasılık dağılımlarına genelleştirilebilir:

$$g_{ab} = \frac{1}{4} \int dx \frac{\partial_a p \partial_b p}{p}. \tag{4.26}$$

Ayrıca skor vektörleri kullanılarak

$$\begin{aligned} l_a = \partial_a \ln p(x;\theta) &= \frac{1}{p} \partial_a p \\ l_b = \partial_b \ln p(x;\theta) &= \frac{1}{p} \partial_b p \\ \Rightarrow p l_a l_b &= \frac{\partial_a p \partial_b p}{p} \end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$g_{ab} = \frac{1}{4} \int dx p l_a l_b = \langle l_a l_b \rangle \tag{4.27}$$

yazılabilir.

Fisher-Rao metriğini birörnek dağılımların iki boyutlu alt manifoldu üzerinde ortalama ve standart sapmayı koordinatlar olarak kullanarak tanımlamaya çalışalım. Bu iki koordinata bağlı skor vektörleri

$$\begin{aligned} l_\mu = \partial_\mu p(x;\mu,\sigma) &= \frac{x-\mu}{2\sigma^2} \\ l_\sigma = \partial_\sigma p(x;\mu,\sigma) &= \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^3} - \frac{1}{\sigma} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Elde edilen bu skor vektörleri kullanılarak istatiksel metriğin bileşenleri kolaylıkla hesaplanabilir:

$$\begin{aligned} g_{\mu\sigma} = \langle l_\mu l_\sigma \rangle = \int dxpl_\mu l_\sigma &= 0 \\ g_{\mu\mu} = \langle l_\mu^2 \rangle = \int dxpl_\mu^2 &= \frac{1}{\sigma^2} \\ g_{\sigma\sigma} = \langle l_\sigma^2 \rangle = \int dxpl_\sigma^2 &= \frac{2}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Sonuç olarak metrik

$$ds^2 = \frac{1}{4}(g_{\mu\sigma} d\mu d\sigma + g_{\mu\mu} d\mu^2 + g_{\sigma\sigma} d\sigma^2) = \frac{1}{4\sigma^2}(d\mu^2 + 2d\sigma^2) \tag{4.28}$$

formunu alır. Elde edilen bu metrik üst yarı düzlemde Poincaré metriği olarak bilinir. Sabit negatif eğriliğin metriğidir.

4.2 Kuantum Entropileri

Tanım (İşlemci Fonksiyon): U bir üniter matris ve $A = Udiag(\lambda_i)U^\dagger$ olmak üzere, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tanımlı f fonksiyonu

$$f(A) \equiv Udiag[f(\lambda_i)]U^\dagger \tag{4.29}$$

bağıntısını sağlıyorsa f bir işlemci fonksiyondur denir. Bununla birlikte, A ve B Hermitesel matrisler olmak üzere f

$$A \leq B \quad \Rightarrow \quad f(A) \leq f(B) \tag{4.30}$$

şartını sağlıyorsa bir işlemci monoton fonksiyondur denir. Tüm işlemci monoton fonksiyonların kümesi konvekstir.

Klein Eşitsizliği: A, B Hermitesel matrisler ve f bir konveks fonksiyon olmak üzere

$$Tr[f(A) - f(B)] \geq Tr[(A - B)f'(B)] \tag{4.31}$$

ve özel olarak

$$Tr(A \ln A - A \ln B) \geq Tr(A - B) \tag{4.32}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $A = B$ olmasıdır.

İspat: $A|e_i\rangle = a|e_i\rangle$, $B|f_i\rangle = b|f_i\rangle$, $\langle e_i|f_i\rangle = |c_{ij}|$ ve $\sum_j |c_{ij}|^2 = 1$ olsun. Bu durumda

$$\langle e_i|f(A) - f(B) - (A - B)f'(B)|e_i\rangle = \sum_j |c_{ij}|^2[f(a_i) - f(b_j) - (a_i - b_j)f'(b_j)]$$

elde edilir. (2.19) eşitsizliği

$$\sum_j |c_{ij}|^2[f(a_i) - f(b_j) - (a_i - b_j)f'(b_j)] \geq 0$$

olmasını gerektirir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} &\sum_i \langle e_i|f(A) - f(B) - (A - B)f'(B)|e_i\rangle \quad \geq 0 \\ &\Rightarrow Tr[f(A) - f(B)] \geq Tr[(A - B)f'(B)] \end{aligned}$$

elde edilir. Özel durumu göstermek için $f(A) = A \ln A$ seçmek yeterlidir. Bu durumda

$$\begin{aligned} Tr A \ln A - Tr B \ln B &\geq Tr A \ln B + Tr(A - B) - Tr B \ln B \\ \Rightarrow Tr(A \ln A - A \ln B) &\geq Tr(A - B) \end{aligned}$$

bulunur.

Peierl Eşitsizliği: A bir Hermitesel işlemci, f konveks bir fonksiyon ve $\{f_i\}$ ortonormal vektörlerin bir tam kümesi olmak üzere

$$Tr f(A) \geq \sum_i f(\langle f_i|A|f_i\rangle \qquad (4.33)$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $A|e_i\rangle = a|e_i\rangle$ olmak üzere $|f_i\rangle = |e_i\rangle$ $\forall i$ olmasıdır.

İspat: Herhangi bir $|f_i\rangle$ vektörü için

$$\begin{aligned}
\langle f_i|A|f_i\rangle &= \sum_j \langle f_i|f(A)|f_i\rangle\langle e_j|f_i\rangle \\
&= \sum_j |\langle f_i|e_j\rangle|^2 f(a_j) \\
&\geq f[\langle f_i|A(\sum_j |e_j\rangle\langle e_j|)|f_i\rangle] \\
&= f(\langle f_i|A|f_i\rangle
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle f_i|A|f_i\rangle &\geq \sum_i f(\langle f_i|A|f_i\rangle) \\
\Rightarrow Trf(A) &\geq \sum_i f(\langle f_i|A|f_i\rangle)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Golden-Thompson Eşitsizliği: A ve B iki Hermitesel işlemci olmak üzere

$$Tre^A e^B \geq Tre^{A+B} \tag{4.34}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul A ve B işlemcilerinin sıra değişmesidir (Golden, 1965).

Lieb Eşitsizliği: $A, B, C > 0$ olmak üzere

$$Tre^{\ln A - \ln C + \ln B} \leq Tr \int_0^\infty A \frac{1}{C+uI} B \frac{1}{C+uI} du \tag{4.35}$$

eşitsizliği sağlanır (Ruskai, 2002).

4.2.1 von Neumann entropisi

von Neumann ya da kuantum entropisi

$$S(\rho) = -Tr(\rho \ln \rho) \tag{4.36}$$

şeklinde tanımlanır ve Shannon entropisinin klasik kaynaktan elde edilen bilginin miktarını belirlemesine benzer biçimde, kuantum kaynağından elde edilen sıkıştırılamaz bilginin miktarını belirler. von Neumann entropisi sıfır değerini saf durumlar için alırken, en yüksek değerine maksimum saf-olmayan durum için ulaşır.

Klasik olasılık teorisinde durum olasılık dağılımıdır. Shannon entropisi ise bir olasılık dağılımının ayırtedilebilirlik fonksiyonudur. Kuantum teorisinde ise durumlar yoğunluk matrisleri ile temsil edilirler. Bir yoğunluk matrisi bir çok olasılık dağılımı ile ilişkilendirilebilir.

Verilen bir baza göre köşegen olan yoğunluk işlemcilerinin

$$\rho = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

şeklinde tanımlandığı gösterilmişti. Buradan yola çıkılarak kuantum entropisi, rankı N olan bir yoğunluk işlemcisinin spektrumu cinsinden de tanımlanabilir:

$$S(\rho) = -\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ln \lambda_i. \tag{4.37}$$

Kuantum entropisi bir kuantum olasılık dağılımı ile ilişkilendirilen bir kuantum durumunun belirsizliğinin bir ölçüsüdür. Kuantum ve Shannon entropileri yalnızca karşılıklı ortogonal saf durumlar için aynı değeri ölçerler. Bilişim kuramsal olarak bunun anlamı ise şu şekilde söylenebilir: kuantum kanalları yoluyla aktarılan, herbiri saf olan ortogonal kübit durumlarının bir kümesi içerisine kodlanmış bir bilgi aynı zamanda, klasik bitler ile kodlanarak klasik kanallar yoluyla (örneğin telefon) da gönderilebilir.

Tekrarlama Özelliği: İki yoğunluk işlemcisinin özvektörleri bir Hilbert uzayının birbirine dik olan iki alt uzayını geriyorsa, yani, bu iki yoğunluk işlemcisi dikdesteğe sahiplerse ayrık işlemciler olarak adlandırılırlar. ρ_i yoğunluk işlemcilerinin $\mathcal{H} = \bigoplus_{i=1}^{M} \mathcal{H}_i$ Hilbert uzayının $\mathcal{H}_i$ alt uzaylarında destekleri olsun. Bu durumda

$\rho = \sum_i p_i \rho_i$ yoğunluk işlemcisinin kuantum entropisi

$$S(\rho) = H(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{M} p_i S(\rho_i) \tag{4.38}$$

şeklinde yazılabilr.

İspat: ρ_i yoğunluk işlemcileri λ_{ij} özdeğerlerine sahip olsun. Dolayısıyla $p_i \lambda_{ij}$ ρ yoğunluk işlemcisinin özdeğerleri olurlar. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} S(\rho) = -\sum_{ij} p_i \lambda_{ij} \ln p_i \lambda_{ij} &= -\sum_j \lambda_{ij} \sum_i p_i \ln p_i - \sum_i p_i \sum_j \lambda_{ij} \ln \lambda_{ij} \\ &= H(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{M} p_i S(\rho_i) \end{aligned}$$

elde edilir.

Konkavlık: $\rho = \lambda\sigma + (1-\lambda)\omega$, $\lambda \in [0,1]$ olsun. Bu durumda

$$S(\rho) \geq \lambda S(\sigma) + (1-\lambda) S(\omega) \tag{4.39}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Klein eşitsizliğinde $A = \sigma$, $A = \omega$ ve $B = \rho$ alınarak

$$\begin{aligned} Tr(\sigma \ln \sigma) - Tr(\sigma \ln \rho) &\geq 0 \\ Tr(\omega \ln \omega) - Tr(\omega \ln \rho) &\geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. İlk eşitsizlik λ, ikinci eşitsizlik $(1-\lambda)$ ile çarpılıp, birbirleri ile toplandığında

$$\begin{aligned} \lambda Tr \sigma \ln \sigma + (1-\lambda) Tr \omega \ln \omega &\geq Tr[(\lambda\sigma + (1-\lambda)\omega) \ln \rho] \\ &= Tr(\rho \ln \rho) \end{aligned}$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$S(\rho) \geq \lambda S(\sigma) + (1-\lambda) S(\omega)$$

bulunur. Bununla birlikte f herhangi bir konveks fonksiyon, A ve B iki Hermitesel işlemci ve $p \in [0,1]$ olmak üzere

$$Tr[f(pA + (1-p)B)] \leq pTrf(A) + (1-p)Trf(B) \tag{4.40}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat: $|e_i\rangle$ $pA + (1-p)B)$ işlemcisinin özvektörleri olsun. Öyleyse

$$\begin{aligned} Tr[f(pA + (1-p)B)] &= \sum_i \langle e_i|f(pA + (1-p)B)|e_i\rangle \\ &= \sum_i f[\langle e_i|(pA + (1-p)B)|e_i\rangle] \\ &\leq p\sum_i f(\langle e_i|A|e_i\rangle) + (1-p)\sum_i f(\langle e_i|B|e_i\rangle) \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak Peierl eşitsizliği kullanılarak arzu edilen sonuç

$$Tr[f(pA + (1-p)B)] \leq pTrf(A) + (1-p)Trf(B)$$

elde edilir.

Kuantum entropisinin konkavlık ve tekrarlama özellikleri kullanılarak, karma kuantum durumları için bir üst sınır belirleyen

$$\sum_{i=1}^{K} p_i S(\rho_i) \leq S(\rho) \leq H(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{K} p_i S(\rho_i), \quad \rho = \sum_{i=1}^{K} p_i \rho_i \tag{4.41}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Alt-Toplanabilirlik: ρ_1, ρ_2 ve ρ_{12} sırasıyla $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ ve $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ Hilbert uzayları üzerinde tanımlı yoğunluk işlemcileri olsun. Bu durumda

$$S(\rho_{12}) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2). \tag{4.42}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\rho_{12} = \rho_1 \otimes \rho_2$ olmasıdır.

İspat: İspat Klein eşitsizliğinin basit bir uygulaması olarak düşünülebilir. Eşitsizlikte $A = \rho_{12}$ ve $B = \rho_1 \otimes \rho_2 = (\rho_1 \otimes I)(I \otimes \rho_2)$ alınırsa, basit bir hesaplama ile

$$
\begin{aligned}
& Tr_{12}(\rho_{12} \ln \rho_{12}) \geq Tr_{12}[\rho_{12}(\ln \rho_1 \otimes I + \ln I \otimes \rho_2)] \\
& = \sum_{\substack{k,l \\ k',l'}} \langle k,l|\rho_{12}|k',l'\rangle \ln\langle k',l'|(\rho_1 \otimes I)|k,l\rangle + \sum_{\substack{k,l \\ k',l'}} \langle k,l|\rho_{12}|k',l'\rangle \ln\langle k',l'|(I \otimes \rho_2)|k,l\rangle \\
& = \sum_{\substack{k,l \\ k'}} \langle k,l|\rho_{12}|k',l\rangle \langle k'|\ln \rho_1)|k\rangle + \sum_{\substack{k,l \\ l'}} \langle k,l|\rho_{12}|k,l'\rangle \langle l'|\ln \rho_2|l\rangle \\
& = \sum_k \langle k|\rho_1 \ln \rho_1|k\rangle + \sum_l \langle l|\rho_2 \ln \rho_2|l\rangle \\
& = Tr_1(\rho_1 \ln \rho_1) + Tr_2(\rho_2 \ln \rho_2) \\
& \Rightarrow -Tr_{12}(\rho_{12} \ln \rho_{12}) \leq -Tr_1(\rho_1 \ln \rho_1) - Tr_2(\rho_2 \ln \rho_2) \\
& \Rightarrow S(\rho_{12}) \leq S(\rho_1) + S(\rho_2)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Araki-Lieb Eşitsizliği: Bir ρ_{12} yoğunluk işlemcisi ve bu işlemciden elde edilen indirgenmiş yoğunluk işlemcileri ρ_1 ve ρ_2'ye ait entropiler

$$|S(\rho_1) - S(\rho_2)| \leq S(\rho_{12}) \tag{4.43}$$

eşitsizliğini sağlarlar. Yazılan bu eşitsizlik, alt-toplanabilirlik ile birleştirildiğinde bir üçgen eşitsizliği formunu alır. Bu yüzden Araki-Lieb üçgen eşitsizliği olarakta bilinir. Eşitsizlik, alt sistemlerin entropilerinin, yani sahip oldukları olasılık dağılımlarının belirsizliğinin, birbirlerinden ne kadar farklı olduğunun bir ölçüsü olarak düşünülebilir (Araki ve Lieb, 1970).

Güçlü Alt-Toplanabilirlik: Belkide kuantum entropisini klasik karşılığı olan Shannon entropisinden ayıran en büyük özellik güçlü alt-toplanabilirlik olarak tanımlanan

$$S(\rho_{123}) + S(\rho_2) \leq S(\rho_{12}) + S(\rho_{13}) \tag{4.44}$$

eşitsizliğidir (Araki ve Lieb, 1970, Lieb ve Ruskai, 1973, Ruskai, 2002).

Durumu daha iyi kavrayabilmek için bu eşitsizliğe eşdeğer olan

$$S(\rho_1) + S(\rho_2) \leq S(\rho_{13}) + S(\rho_{23})$$

eşitsizliğini ele alalım. Shannon entropisi $H(p_1) \leq H(p_{13})$ ve $H(p_2) \leq H(p_{23})$ eşitsizliklerini ayrı ayrı gerçeklerken, kuantum entropisi yanlızca toplamlarını gerçekleyebilmektedir.

Çizelge 4.1 Entropiler ve özellikleri (Bengtsson ve Życzkowski, 2006)

Özellik	Bağıntı	von Neumann	Shannon	Boltzmann
Pozitiflik	$S \geq 0$	Evet	Evet	Hayır
Konkavlık	(4.39)	Evet	Evet	Hayır
Monotonluk	$S_{12} \geq S_1$	Hayır	Evet	Hayır
Alttop.	$S_{12} \leq S_1 + S_2$	Evet	Evet	Evet
Araki-Lieb	$\lvert S_1 - S_2 \rvert \leq S_{12}$	Evet	Evet	Hayır
G-Alttop.	$S_{123} + S_2 \leq S_{12} + S_{23}$	Evet	Evet	Evet

Kuantum mekaniği, incelenmek istenen sistem üzerinde herhangi bir ölçüm yapılmadığı sürece sistem hakkında hiçbir bilgi bulunmadığını kabul eder. Bununla birlikte bir sistem üzerinde yapılan herhangi bir ölçümün sistem üzerinde olumlu ya da olumsuz (çoğunlukla olumsuz) bir etki yapacağı kuşkusuzdur. Dolayısıyla incelenen sisteme ait entropinin, sistem üzerinde herhangi bir ölçüm yapıldığında değişmesi çokta ilginç bir durum değildir. Örneğin, bir ρ sistemi üzerinde projektif bir ölçüm yapıldığını düşünelim:

$$\rho' = \sum_i P_i \rho P_i.$$

Ölçüm sonrasında oluşan sistem ρ''ne ait kuantum entropisi ile öncesindeki sisteme ait kuantum entropisi arasındaki ilişki

$$S(\rho') \geq S(\rho) \tag{4.45}$$

eşitsizliği ile verilir. Başka bir değişle, projektif ölçümler entropiyi yani belirsizliği artırırlar. Bununla birlikte entropiyi azaltabilecek ölçümlerde mevcuttur.

Klasik karşılığına benzer biçimde kuantum koşullu entropi

$$S(\rho_1|\rho_2) = S(\rho_{12}) - S(\rho_2) \tag{4.46}$$

şeklinde tanımlanır. Şekilsel olarak klasik karşılığına benzese de, kuantum koşullu entropi önemli bir özelliği ile ondan ayrılır. Kuantum koşullu entropi negatif değerler alabilir. Bu özellik kuantum sistemlerinin bileşik durumdayken parçalarından daha fazla kesinlik içerebileceği anlamına gelir.

ρ_1 ve ρ_2 ile belirtilen ρ_{12} bileşik sisteminin alt durumları arasındaki kuantum ortak bilgi

$$I(\rho_1 : \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2) - S(\rho_{12}) \tag{4.47}$$

şeklinde tanımlanır. Kuantum ortak bilgi, klasik karşılığından elde edilen maksimum bilginin iki katına erişebilir. İşlevsel olarak alt sistemler arasındaki toplam korelasyonun bir ölçüsü olarakta düşünülebilir.

4.2.2 Kuantum bağıl entropi

İki kuantum olasılık dağılımı arasındaki farklılığın bir ölçüsü olan kuantum bağıl entropi

$$S(\rho\|\sigma) = Tr[\rho(\ln\rho - \ln\sigma)] \tag{4.48}$$

şeklinde tanımlanır. σ yoğunluk işlemcisinin sıfır özdeğerlerinin bulunması durumu dışında (bu durumda kuantum bağıl entropi ıraksayabilir) sonlu ve sürekli bir fonksiyondur. Köşegen matrisler ele alındığında, kuantum bağıl entropi klasik karşılığına indirgenir.

Üniter Değişmezlik: Kuantum bağıl entropi üniter dönüşümler altında

$$S(\rho_1\|\rho_2) = S(U\rho_1 U^\dagger \| U\rho_2 U^\dagger) \tag{4.49}$$

eşitliğini sağlar.

İspat: $|i\rangle$, ρ_1 yoğunluk işlemcisinin özvektörleri olsun. Bu durumda

$$S(U\rho_1 U^\dagger \| U\rho_2 U^\dagger) = \sum_i \langle i|\rho_1 U^\dagger (\ln U\rho_1 U^\dagger) U|i\rangle - \sum_i \langle i|\rho_1 U^\dagger (\ln U\rho_2 U^\dagger) U|i\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} \langle i|\rho_1|j\rangle\langle j|U^\dagger(\ln U\rho_1 U^\dagger)U|i\rangle - \sum_{i,j} \langle i|\rho_1|j\rangle\langle j|U^\dagger(\ln U\rho_2 U^\dagger)U|i\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle i|\rho_1|j\rangle\langle j|\ln\rho_1|i\rangle - \sum_{i,j} \langle i|\rho_1|j\rangle\langle j|\ln\rho_2|i\rangle \\
&= Tr(\rho_1 \ln\rho_1) - Tr(\rho_1\ln\rho_2) \\
&= S(\rho_1\|\rho_2)
\end{aligned}$$

bulunur.

Pozitiflik: Kuantum bağıl entropi herzaman pozitiftir:

$$S(\rho\|\sigma) \geq 0. \tag{4.50}$$

Eşitliğin sağlanabilmesi için gerek ve yeter koşul $\rho = \sigma$ olmasıdır. Kuantum bağıl entropi tıpkı klasik karşılığı gibi simetrik bir fonksiyon olmadığından metrik değildir. Bununla birlikte, yine klasik duruma benzer şekilde

$$S(\rho\|\sigma) \geq \frac{1}{2}Tr(\rho-\sigma)^2 = D_2^2(\rho,\sigma) \tag{4.51}$$

eşitsizliğini sağlar.

Bileşik Konvekslik: Kuantum bağıl entropi

$$S(\rho\|\sigma) \leq \sum_j p_j S(\rho_j\|\sigma_j), \quad \rho = \sum_j p_j\rho_j, \quad \sigma = \sum_j p_j\sigma_j \tag{4.52}$$

eşitsizliğini sağlar.

İspat: $A = \rho_j$ ve $\ln B = \ln\rho - \ln\sigma + \ln\sigma_j$ olarak seçelim. Klein eşitsizliğine uygulandığında

$$\begin{aligned}
Tr[\rho_j \ln\rho_j - \rho_j(\ln\rho - \ln\sigma + \ln\sigma_j)] &\geq Tr(\rho_i - e^{\ln\rho - \ln\sigma + \ln\sigma_j}) \\
\Rightarrow Tr[\rho_j(\ln\rho_j - \ln\sigma_j)] - Tr[\rho_j(\ln\rho - \ln\sigma)] &\geq Tr(\rho_i - e^{\ln\rho - \ln\sigma + \ln\sigma_j}) \\
\Rightarrow S(\rho_j\|\sigma_j) - Tr[\rho_j(\ln\rho - \ln\sigma)] &\geq Tr(\rho_i - e^{\ln\rho - \ln\sigma + \ln\sigma_j}) \\
\Rightarrow \sum_j p_j S(\rho_j\|\sigma_j) - Tr[\sum_j p_j\rho_j(\ln\rho - \ln\sigma)] &\geq Tr(\sum_j p_j\rho_i - e^{\ln\rho - \ln\sigma + \sum_j p_j \ln\sigma_j}) \\
\Rightarrow \sum_j p_j S(\rho_j\|\sigma_j) - S(\rho\|\sigma) &\geq Tr(\rho - \rho) = 0 \\
\Rightarrow S(\rho\|\sigma) &\leq \sum_j p_j S(\rho_j\|\sigma_j)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Kısmi İz Altında Monotonluk: Kuantum bağıl entropi kısmi iz altında monotondur (Nielsen ve Chuang, 2000):

$$S(Tr_2\rho_{12}\|Tr_2\sigma_{12}) \leq S(\rho_{12}\|\sigma_{12}). \tag{4.53}$$

CP-Gönderimler Altında Monotonluk: Kuantum bağıl entropi tamamiyle-pozitif gönderimler altında monotondur (Bengtsson ve Życzkowski, 2006):

$$S(\Phi\rho\|\Phi\sigma) \leq S(\rho\|\sigma). \tag{4.54}$$

Kısmi iz özel bir CP-gönderim olarak düşünülürse, CP-gönderimler altında monotonluk doğal olarak kısmi iz altında monotonluğu gerektirecektir. Ayrıca son bir özellik olarak toplanabilirlik verilebilir:

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2\|\sigma_1 \otimes \sigma_2) = S(\rho_1\|\rho_2) + S(\sigma_1\|\sigma_2). \tag{4.55}$$

Bir ρ yoğunluk işlemcisi ile maksimum saf-olmayan durum arasındaki kuantum bağıl entropi

$$S(\rho\|\rho_*) = \ln N - S(\rho) \tag{4.56}$$

ile verilir. Bu eşitlik bağıl entropi ile von Neumann entropisi arasındaki bağlantı olarakta düşünülebilir. Ayrıca herhangi iki alt sistem arasındaki kuantum ortak bilgi kuantum bağıl entropi cinsinden

$$I(\rho_1 : \rho_2) = S(\rho_{12}\|\rho_1 \otimes \rho_2) \tag{4.57}$$

şeklinde tanımlanabilir.

4.2.3 SP gönderimler, Jamiolkowski izomorfizmi ve entropi dinamiği

Bir Φ CP-gönderimi, D_Φ pozitif dinamik matrisi ile temsil edildiğinden, herhangi bir P iz-düşüm işlemcisi için $TrPD_\Phi$ pozitiftir. Dahası, herhangi iki CP-gönderiminin dinamik matrislerinin Hilbert-Schmidt iç çarpımı

$$TrD_\Phi D_\Psi \geq 0 \tag{4.58}$$

bağıntısını sağlar. Buradan yola çıkarak

$$(\Phi, \Psi) \equiv < D_\Phi, D_\Psi >= TrD_\Phi^\dagger D_\Psi = D_\Phi D_\Psi \tag{4.59}$$

tanımı yapılabilir ve CP-gönderimlerinin kümesi $\mathcal{CP}$

$$\{\Phi \in \mathcal{CP}\} \;\; \Leftrightarrow \;\; (\Phi, \Psi) \geq 0 \;\; \forall\Psi \in \mathcal{CP} \tag{4.60}$$

şeklinde karakterize edilebilir.

$\Phi : \mathcal{M}^{(N)} \to \mathcal{M}^{(N)}$ tanımlı bir doğrusal gönderim

$$\{\Phi \in \mathcal{SP}\} \;\; \Leftrightarrow \;\; (\Phi, \Psi) \geq 0 \;\; \forall\Psi \in \mathcal{P} \tag{4.61}$$

bağıntısını sağlıyorsa süper-pozitiftir denir. $\mathcal{SP}$, tüm SP-gönderimlerini içeren küme olarak tanımlanır. Pozitif gönderimlerin kümesini karakterize etmek için

$$\{\Phi \in \mathcal{P}\} \;\; \Leftrightarrow \;\; (\Phi, \Psi) \geq 0 \;\; \forall\Psi \in \mathcal{SP} \tag{4.62}$$

dual şartı yazılabilir.

Bir süper-pozitif gönderim dinamik matrisler cinsinden de tanımlanabilir. Bir Φ gönderiminin dinamik matrisi

$$D_\Phi = \sum_i^k A_i \otimes B_i, \quad A_i \geq 0, \quad B_i \geq 0; \quad i = 1, ..., k \tag{4.63}$$

şeklinde tensör çarpım temsiline sahip ise Φ bir süper-pozitif gönderimdir denir. D_Φ dinamik matrisini işaretleyen vektörler ile D_Ψ blok-pozitif matrisini işaretleyen vektörler arasındaki açı 90°'den büyükse, $\rho = D_\Phi/N$ durumu dolanıktır denir.

$$\Phi : \mathcal{M}^{(N)} \to \mathcal{M}^{(N)} \quad \leftrightarrow \quad \rho_\Psi = \frac{D_\Phi}{N} = [\Phi \otimes I](|\phi\rangle\langle\phi|) \tag{4.64}$$

şeklinde tanımlanan Jamiolkowski izomorfizmi, $\mathcal{M}^{(N)}$'ye etki eden bir doğrusal Φ gönderiminin, $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_N$ Hilbert uzayında tanımlı bir işlemciyle ilişkilendirilmesine olanak sağlar. $|\phi\rangle$ durumu,

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N |i\rangle \otimes |i\rangle \tag{4.65}$$

Schmidt formunda yazılmış tüm Schmidt katsayıları $1/N$ olan, bileşik sistemlerin maksimum dolanık durumunu temsil etmektedir.

Jamiolkowski izomorfizmi aracılığı ile Φ kuantum işlemine karşılık gelen kuantum durumunun von Neumann entropisi olarak tanımlanan kuantum işlem entropisi (entropy of an operator)

$$S(\Phi) \equiv S(\frac{1}{N} D_\Phi) \quad \in \quad [0, \ln N^2] \tag{4.66}$$

bağıntısı ile verilir. Kuantum işlem entropisi D_Φ'nin rankı bir, yani kuantum işlemi bir üniter dönüşüm ise sıfır değerini alır. Entropi ne kadar büyükse, sistemdeki dekoherens (çevre ile etkileşimi) etkisi o kadar büyük demektir. Maksimum değerini $\Phi_* : \mathcal{M}^{(N)} \to \rho_*^{(N)}$ şeklinde tanımlanan tamamiyle-depolarizasyon kanalları için alır.

Çizelge 4.2 Jamiolkowski izomorfizmleri (Bengtsson ve Życzkowski, 2006)

İzomorfizm	$\Phi : \mathcal{M}^{(N)} \rightarrow \mathcal{M}^{(N)}$	$D_\Phi : \mathcal{H}_{N^2} \rightarrow \mathcal{H}_{N^2}$
J_I	Pozitif gönderimlerim kümesi kümesi	Blok-pozitif işlemciler
J_{II}	Tamamiyle-pozitif gönderimlerin kümesi	Pozitif işlemciler
J_{III}	Süper-pozitif işlemcilerin kümesi	Ayrılabilir kuantum durumlarının alt kümesi
J_{IV}	Tamamiyle depolarizasyon kanalları	Maksimum saf-olmayan durum

Bir kuantum işlemini karakterize etmenin farklı bir yoluda, başlangıçta saf olan bir duruma etki ettiğinde yaratacağı entropi miktarıdır. $\rho' = \sum_{i=1}^{r} A_i \rho A_i^\dagger$ Krauss formunda temsil edilen bir CP gönderimi ele alalım. r boyutlu bir $\mathcal{H}_r$ Hilbert uzayında

$$\sigma_{ij} = Tr \rho A_j^\dagger A_i \tag{4.67}$$

işlemcisi tanımlı olsun. σ işlemcisinin kuantum entropisi ρ işlemcisine bağlıdır. ρ maksimum saf-olmayan durum olduğunda entropi $S(\Phi)$'ye eşit olur. Şimdi, $\mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_r$ bileşik Hilbert uzayında bir

$$\omega = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} A_i \rho A_j^\dagger \otimes |i\rangle\langle j| = \Omega \rho \Omega^\dagger \tag{4.68}$$

yoğunluk işlemcisini tanımlayalım. Ω işlemcisi $\mathcal{H}_N$ uzayındaki bir $|\phi\rangle$ durumunu $\sum_{j=1}^{r} A_j |\phi\rangle \otimes |j\rangle$ durumuna gönderir ve Krauss işlemcilerinin tamlık şartı $\Omega^\dagger \Omega = I_N$ olmasını gerektirdiğinden $S(\omega) = S(\rho)$ olur. Ayrıca $Tr_N \omega = \sigma$ ve $Tr_r \omega = \rho$ olduğundan

$$|S(\rho) - S(\sigma)| \leq S(\rho') \leq S(\sigma) + S(\rho) \tag{4.69}$$

bağıntısı elde edilir. Başlangıç durumu saf yani $S(\rho) = 0$ ise, son durum $S(\sigma)$ entropisine sahip olacaktır. Bu sebeple $S(\sigma)$, kuantum işleminin entropi değiş-tokuşu olarakta bilinir.

4.2.4 Kuantum dolanıklılığa giriş

Alt durumlarının bir tensör çarpımı olarak yazılamayan saf kuantum durumlarına dolanık saf durumlar denir:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes ... \otimes |\psi_n\rangle \tag{4.70}$$

Dolanık saf durumlara örnek olarak Bell durumları

$$|\psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle \pm |1\rangle|0\rangle), \;\; |\phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle \pm |1\rangle|1\rangle) \tag{4.71}$$

verilebilir. Bell durumları kullanılarak oluşturulan bir ρ_B saf durumunun kısmi izi alınarak elde edilen bir alt durumu maksimum saf-olmayan duruma karşılık gelir:

$$\rho_1 = Tr_2\rho_B = \frac{1}{2}I. \tag{4.72}$$

Örneğin; $\rho_B = |\psi^+\rangle\langle\psi^+|$ olsun. Bu durumda, basit bir hesaplama ile

$$|\psi^+\rangle\langle\psi^+| = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 1| + |0\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0|$$
$$\Rightarrow Tr_2\rho_B = \rho_1 = \frac{1}{2}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|) = \frac{1}{2}I$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle, sistem bir bütün olarak incelendiğinde elde edilen bilgi maksimum iken, parçalar ayrı ayrı incelendiğinde elde edilen bilgi minimumdur. Kısmi izi maksimum saf-olmayan durum olan saf durumlara maksimum dolanık saf durumlar adı verilir.

ρ_1 ve ρ_2 sırasıyla $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ Hilbert uzayları üzerinde tanımlı yoğunluk işlemcileri olsun.

$$\rho_{12} = \sum_i p_i \rho_{1_i} \otimes \rho_{2_i}, \;\; p_i \in [0,1], \;\; \sum_i p_i = 1 \tag{4.73}$$

şeklinde tensör çarpım durumlarının bir konveks kombinasyonu olarak yazılabilen saf-olmayan durumlara ayrılabilir durumlar denir. Tanımı gereği ayrılabilir saf-olmayan durumlar dolanıklılık içermezler. Saf-olmayan dolanık durumlara bir örnek olarak

$$\rho_w = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})\frac{1}{4}I \otimes I + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi^-\rangle\langle\psi^-| \tag{4.74}$$

şeklinde tanımlanan Werner durumu verilebilir.

Schmidt katsayısı birden büyük olan durumların dolanık durumlar olduğu daha önceki incelemelerde bahsedilmişti. İki parçalı bir sistemin Schmidt katsayısını, ρ_1 ve ρ_2 indirgenmiş yoğunluk işlemcileri olmak üzere

$$Sch(|\psi\rangle) \equiv \dim \sup \rho_1 = \dim \sup \rho_2 \tag{4.75}$$

olarak yeniden tanımlayalım. Bu katsayılar kullanılarak saf durumların dolanıklılığını bir ölçüsü olan Schmidt ölçümü

$$E_s(|\psi\rangle) = \log_2(Sch(|\psi\rangle)) \tag{4.76}$$

ile verilir. Ölçümün birimi e-bitlerdir. Bell durumları bir e-bit dolanıklılığa karşılık gelirler.

Bir bileşik sistemin indirgenmiş yoğunluk işlemcisinin kuantum etropisi olarak tanımlanan dolanıklılık entropisi, Schmidt vektörünün Shannon entropisine eşittir:

$$E(|\psi\rangle) \equiv S(\rho_1) = S(\lambda) = -\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \ln \lambda_i. \tag{4.77}$$

Ayrılabilir durumlar için sıfır değerini alırken, maksimum dolanık durumlar için değeri $\ln N$'dir.

Bazı dolanıklılık ve ayrılabilirlik kriterlerini vermeden önce, bipartite sistemlere etki eden bazı kuantum işlemlerinden bahsetmemiz gerekir. Lokal işlemler (local operations, LO) izi koruyan iki gönderimin tensör çarpımı olarak tanımlanırlar:

$$[\Phi_1 \otimes \Phi_2](\rho) = \sum_i \sum_j (A_i \otimes B_j)\rho(A_i^\dagger \otimes B_j^\dagger). \tag{4.78}$$

Ayrılabilir işlemler ise (seperable operations, SO)

$$\Phi(\rho) = \sum_i \sum_j (A_i \otimes B_i)\rho(A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger) \tag{4.79}$$

formunu alırlar.

Herbir alt sistem üzerinde lokal olarak gerçekleştirilen ve ölçümler dahil tüm kuantum işlemlerine izin veren gönderimlere lokal işlemler ve klasik iletişim (local operations and classical communication, LOCC) adı verilir. Klasik iletişim ile kastedilen şey; lokal olarak gerçekleştirilen kuantum işlemlerinden elde edilen bilginin, klasik kanallarla karşılıklı olarak aktarılabilmesidir.

Tüm lokal işlemler için

$$E(\rho) \geq \sum_i p_i E(\rho_i) \tag{4.80}$$

$$E(\sum_i p_i \rho_i) \leq \sum_i p_i E(\rho_i) \tag{4.81}$$

eşitsizliklerini sağlayan $E(\rho)$ niceliklerine dolanıklılık monotonları denir. Dolanıklılık monotonlarının bazı özellikleri aşağıda verilmiştir:

(i) $E(\rho) = 0 \quad \Leftrightarrow \rho$ ayrılabilir bir durum.

(ii) $E(\rho), U_1 \otimes U_2$ şeklinde tanımlanan tüm lokal üniter dönüşümler altında değişmez kalır:

$$E(\rho) = E[(U_1 \otimes U_2)\rho(U_1 \otimes U_2)^\dagger]. \tag{4.82}$$

(iii) LOCC dönüşümleri $E(\rho)$'yu artıramazlar.

(iv) Bir ρ sisteminin n tane kopyasının dolanıklılığı, bir kopyanın dolanıklılığının n katıdır:

$$E(\rho^{\otimes n}) = nE(\rho). \tag{4.83}$$

Verilen bir ρ dolanık durumu için $Tr(\rho W) < 0$ ve tüm σ ayrılabilir durumları için $Tr(\sigma W) \geq 0$ eşitsizliklerini sağlayan W Hermitesel işlemcilerine dolanıklılık tanığı denir.

Lemma: Her ρ dolanık durumu için bir dolanıklılık tanığı vardır.

PPT (Positive Partial Transpose) Kriteri: Bir ρ yoğunluk işlemcisinin alt sistemlerine göre alınan kısmi transpozu

$$\rho^{T_1}_{\substack{m\mu \\ n\nu}} = \rho_{\substack{n\mu \\ m\nu}}, \quad \rho^{T_2}_{\substack{m\mu \\ n\nu}} = \rho_{\substack{m\nu \\ n\mu}} \tag{4.84}$$

şeklinde tanımlanır. $\rho^{T_1} \ngeq 0$ olan durumlar dolanıktır.

Peres-Horodecki Kriteri: $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ (ya da $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3$) bileşik Hilbert uzayına etki eden bir ρ durumunun ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul $\rho^{T_1} \geq 0$ olmasıdır.

Değer Kümesi Kriteri: ρ bir ayrılabilir durum olsun. Sırasıyla ρ ve ρ^{T_1} durumlarının değer kümelerini geren $|\psi_i \otimes \phi_i\rangle$ ve $T_1(|\psi_i \otimes \phi_i\rangle)$ saf çarpım durumlarının bir kümesi vardır.

Pozitif Gönderim Kriteri: Bir ρ durumunun ayrılabilir olması için gerek ve yeter koşul, tüm pozitif Φ gönderimleri için $\rho' = (\Phi \otimes I)\rho \geq 0$ olmasıdır.

İndirgeme Kriteri: Bir ρ durumu ayrılabilir ise, indirgenmiş durumlar ρ_1 ve ρ_2

$$\rho_1 \otimes I - \rho \geq 0, \quad I \otimes \rho_2 - \rho \geq 0 \tag{4.85}$$

eşitsizliklerini sağlarlar. Burada belirtilenlerin dışında daha birçok dolanıklılık kriteri mevcuttur. Dolanıklılığın sınıflandırılması bu kuramın belkide en önemli problemlerinden biridir.

Son olarak $N = 2$ durumunun özellikleri genel olarak özetlenmek istenirse:

1. Yanlızca $N = 2$ durumunda $SU(N) \times SU(N)$, $SO(N^2)$ grubuna homomorfiktir.

2. Yanlızca $N = 2$ durumunda $SU(N) \cong SO(N^2 - 1)$.

3. Tüm $\Phi : \mathcal{M}^{(N)} \rightarrow \mathcal{M}^{(N)}$ gönderimlerinin yanlızca $N = 2$ durumu için ayrışımları vardır.

4. Yanlızca $N = 2$ durumunda $\partial\mathcal{M}^{(N)}$ tamamiyle saf durumlardan oluşur.

5. $\mathcal{M}^{(N)} \subset \mathbb{R}^{N^2-1}$ yanlızca $N = 2$ durumunda bir yuvar oluşturur.

6. Herhangi bir $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_N \otimes \mathcal{H}_N$ saf durumu için $N - 1$ tane bağımsız Schmidt katsayısı vardır. $N = 2$ durumunda ise yanlızca bir tane bağımsız Schmidt katsayısı vardır ve dolayısıyla tüm dolanıklılık ölçümleri eşdeğerdir.

7. Yanlızca $N = 2$ durumunda maksimum dolanık durumlar $\mathbb{R}\mathcal{P}^{N^2-1}$'e eşdeğer olan $SU(N)/\mathcal{Z}_N$ manifoldunu oluştururlar.

8. Bir $N \times N$'li sistemin tüm PPT durumları yanlızca $N = 2$ için ayrılabilirdir.

Dolanık olmayan kübitler, saf durumların kopyalarının bir vericiden bir alıcıya gönderilmesi gibi bazı kuantum iletişim uygulamalarında kaynak görevi üstlenirler. Benzer şekilde dolanık kübitler klasik kaynaklar kullanılarak gerçekleştirilemeyen kuantum programlama ve kuantum teleportasyon gibi kuantum bilişimsel uygulamaların gerçekleştirilmesine olanak sağlarlar.

Dolanıklılık, tıpkı enerji gibi, kuantum sistemleri arasında iletilebilinen ve birçok farklı yapıya dönüşebilen bir fiziksel kaynak olarak düşünülebilir.

5. SONUÇ ve TARTIŞMA

Konveksliği, yoğunluk işlemcilerini ve kuantum entropilerini tam anlamı ile kavrayabilmek Kuantum Bilişim Kuramı'nı kavrayabilmek için bir ön adım olarak düşünülebilir. Konveks küme kuramı ya da kısaca konvekslik uygun bir matematiksel model oluştururken, yoğunluk işlemcilerinin uzayının geometrisini analiz edebilmek kuantum mekaniksel sistemleri, en basit ve temel düzeyde olsa dahi, daha iyi anlamamızı sağlamada yol gösterici rolünü üstlenmektedir.

Kuantum entropileri ise sistemler karmaşıklaştıkça karşımıza çıkan sorunları çözümleyebilmemizi sağlayan güçlü araçlar olarak düşünülebilir. Kuantum entropileri ve bu entropiler ile tanımlanan diğer bir çok kavram Kuantum Bilişim Kuramı'nı diğer kuramlardan ayıran doğal sınırların üstünde yer alırlar. Dolayısıyla, kuantum entropilerini anlayabilmek bu sınırı geçebilmek anlamına gelmektedir.

Kuantum mekaniksel sistemleri tam anlamıyla kavrayabilmek çok güçtür. Bunun sebebi matematiksel tarifinin karmaşıklığı değil, çoğu zaman mantık sınırlarımızın ötesinde davranışlar göstermesidir. Kuantum mekaniğinin yerel olmayan özellikler içermesi bu garip davranışlardan bir tanesidir. Kısaca açıklamak gerekirse: birbirlerinden uzaysal olarak ayrılmış iki kuantum mekaniksel sistemin herhangi birisi üzerinde gerçekleştirilen bir ölçüm (iki sistem herhangi bir etkileşimde bulunmadığı halde) ölçüm yapılmayan sistem hakkında kesin bilgiler verebilmektedir.

Çok girilebilir durumlu sistemlerde fiziksel özelliklerin yerel olmayan korelasyonlarından oluşan dolanıklılığın bir bilgi kaynağı olarak kullanılabileceğinin farkedilmesiyle birlikte yükselişe geçen Kuantum Bilişim Kuramı, yeni bir araştırma alanı olması ve teknolojiye doğrudan katkı sağlayabilmesi sebebiyle, merak uyandıran ve çağdaş fiziğin üzerinde yoğunlaştığı en önemli kuramlardan bir tanesidir. Bununla birlikte çok girilebilir durumlu sistemlerin tam anlamı ile analiz edilememiş olması ve bu analiz eksikliğinin kuramın gelişimine olan eş zamanlı etkisi, önceliği yoğunluk işlemcilerinin yüksek boyutlu uzaylarının analizine vermektedir. Henüz yalnızca iki durumlu sistemlerin anlaşılabilmiş, kütrit durumlarının ise yalnızca birkaç özelliğinin analiz edilebilmiş olması; yeni fikirlere duyulan gereksinimin ne denli yüksek olduğunu açık bir biçimde ortaya koymaktadır.

KAYNAKLAR

Armstrong, M. A. 1988. Groups and Symmetry. Springer.

Araki, H., Lieb, E. H. 1970. Entropy Inequalities. Comm. Math. Phys. 18, 160-170. MR 42♯1466.

Bohr, N. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? Phys. Rev. 48, 696-702.

Bell, J. S. 1964. On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox. Physics 1:195.

Bengtsson, I. and Życzkowski, K. 2006. Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement. Cambridge University Press.

Choi, M. -D. 1975. Completely Positive Linear Maps on Complex Matrices. Linear Alg. Appl. 10:285.

Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. 1935. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality be Considered Complete? Phys. Rev. 47:777.

Eggleston, H. G. 1958. Convexity. Cambridge University Press.

Fano, U. 1957. Description of States in Quantum Mechanics by Density Matrix and Operator Techniques. Rev. Mod. Phys. 29, 74-93.

Golden, S. 1965. Lower Bounds for the Helmholtz Function. Phy. Rev. B 137:1127.

Isham, C. J. 1999. Modern Differential Geometry for Physicists. World Scientific.

Jaeger, G. 2007. Quantum Information: An Overview. Springer.

Jamiolkowski, A. 1972. Linear Transformations which Preserve Trace and Positive Semi-Definiteness of Operators. Rep. Math. Phys. 3:275.

Koh, D. E. 2009. Entanglement of Bipartite States and Quantum Teleportation. arXiv:0902.2807v1.

Lee, J. M. 1997. Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. Springer.

Lieb, E. H. and Ruskai, M. B. 1973. A Fundamental Property of Quantum-Mechanical Entropy. Phy. Rev. Lett. 30, 434-436.

Lieb, E. H. and Ruskai, M. B. 1973. Proof of the Strong Subadditivity of Quantum-Mechanical Entropy. J. Math. Phys. 14, 1938-1941.

Ruskai, M. B. 2002. Inequalities for Quantum Entropy: A Review with Conditions for Equality. J. Math. Phys. 43:4358.

Schrödinger, E. 1935. Discussion of Probability Relations Between Separated Systems. Proc. Comb. Phil. Soc. 31:555.

Schrödinger, E. 1936. Probability Relations Between Separated Systems. Proc. Comb. Phil. Soc. 32:446.

Schirmer, S. G., Zhang, T. and Leahy, J. V. 2004. Orbits of Quantum States and Geometry of Bloch Vectors for N-level Systems. J. Phys. A: Math. Gen. 37, 1389-1402.

Sternberg, S. 1994. Group Theory and Physics. Cambridge University Press.

Webster, R. 1996. Convexity. Oxford University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ali Ümit Cemal HARDAL

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 17.08.1982

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Ankara Anıttepe Lisesi, 2000

Lisans : Abant İzzet Baysal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü, 2007

Yüksek Lisans : Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı (Eylül 2007-Haziran 2010)