

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**NONLİNEER DALGA DENKLEMLERİ İÇİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR
SINIFINDA SAYISAL ÇÖZÜMLER**

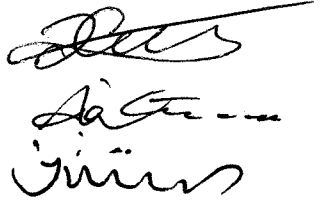
Bahaddin SİNSOYSAL

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“Doktor”
Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

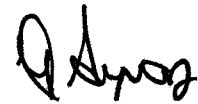
**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 28.04.2003
Tezin Savunma Tarihi : 14.07.2003**

138264

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Tahir KHANİYEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Abdullah ALTIN
Jüri Üyesi : Doç. Dr. İhsan ÜNVER**



Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Yusuf AYVAZ



Trabzon 2003

ÖNSÖZ

“Nonlinear Dalga Denklemleri İçin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümler” adlı bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı’nda “Doktora Tezi” olarak hazırlanmıştır. Tezin konusu, 1997 den beri birlikte çalışma şansına eriştiğim sayın hocam Prof. Dr. Mahir RASULOV tarafından koyulmuştur.

Öncelikle, tez çalışmalarımın başlangıcından sonuna kadar her aşamasında bilgi, tecrübe ve önerilerinden faydalandığım; maddi ve manevi desteğini esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Mahir RASULOV’ a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Tez danışmanlığımı üstlenen sayın danışman hocalarım Doç. Dr. Erhan Coşkun ve Doç. Dr. Tahir KHANİYEV’ e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, bu çalışma sırasında bana her konuda yardımcı olan Matematik Bölümü öğretim üyelerine, sevgili aileme ve Yrd. Doç. Dr. Turhan KARAGÜLER’ e teşekkür ederim.

Bahaddin SİNSOYSAL
Trabzon, Nisan 2003

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	II
İÇİNDEKİLER	III
ÖZET	V
SUMMARY.....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
SEMBOLLER DİZİNİ	IX
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş	1
1.1.1. Genelleştirilmiş Fonksiyonların Temel Teorisi	2
1.1.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonlar	5
1.1.3. Genelleştirilmiş Fonksiyonların Türevleri	9
1.1.4. Zayıf Çözüm	10
1.1.5. Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler ve Genel Çözümleri	11
1.1.6. Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem İçin Cauchy Problemi ve Çözümü	17
1.1.7. Birinci Mertebeden Homojen Olmayan Kuazi Lineer Diferansiyel Denklemlerin Çözümü	19
1.1.8. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem İçin Periyodik Sınır Koşulu	21
1.1.9. Kararlılık ve yakınsaklık	23
1.1.10. Sabitlenmiş Katsayılar Kriteri	27
1.1.11. Kesme Hatası	30
1.2. Literatür Araştırması	32
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR ve BULGULAR	35
2.1. Geliştirilen Yöntemin Genel Yapısı ve Bazı Lineer Denklemler İçin Uygulanması	35
2.2. Bir Boyutlu Birinci Mertebeden Nonlineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem İçin Periyodik Sınır Koşullu Problemin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü	42
2.3. İki Boyutlu Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem İçin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözüm	48

2.3.1. Başlangıç Fonksiyonu Sürekli Olan Cauchy Problemi	50
2.3.2. Başlangıç Fonksiyonunun Süreksiz Olduğu Durum	55
2.3.3. Sayısal Çözüm İçin Algoritma	59
2.3.4. Başlangıç-Sınır Değer Problemi	61
2.3.5. Sayısal Deneyleler	62
2.4. Bir Boyutlu Nonlineer Diferansiyel Denklemler Sisteminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü	71
2.4.1. Bir Boyutlu Gaz Dinamiği İçin Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü	72
2.4.2. Sıkışabilir Sıvıların Sabit Basıncılı İzentropik Akış Problemi	75
2.4.3. Önerilmiş Yöntemin Petrolün Kimyasal Aktif Sıvı ile Sıkıştırılması Problemine Uygulanması	82
2.5. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Nonlineer Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü	87
2.5.1. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Lineer Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Gerçek Çözümü.....	87
2.5.2. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Türevli Denklem İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü	98
2.5.3. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Nonlineer Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümleri ve İncelenmesi	103
3. İRDELEME	113
4. SONUÇLAR	115
5. ÖNERİLER	116
6. KAYNAKLAR	117
ÖZGEÇMİŞ	122

ÖZET

Bu tezde, pratikte bir çok alanda sıkça rastlanan bazı nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklem ve denklemler sistemi için süreksiz fonksiyonlar sınıfında yeni bir sayısal yöntem önerilmiştir. Bu önerilen yöntem 2.1. kısımda ana hatlarıyla irdelenerek, 2.2. kısımda bir boyutlu birinci mertebeden periyodik sınır koşullu nonlinear probleme uygulanmıştır.

2.3. kısımda yukarıda sözünü ettiğimiz yöntem, iki boyutlu birinci mertebeden nonlinear kısmi türevli denklem için Cauchy ve sınır değer probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünün bulunması için geliştirilmiştir. Bu amaçla, gerçek çözüm ele alınmış ve çözümün bazı özellikleri de incelenmiştir.

2.4. kısımda önerilmiş yöntem, gaz dinamiğinde ve hidrodinamiğin bir çok alanlarında karşımıza çıkan genel şekilde verilen bir boyutlu, nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi için sınır değer problemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünün bulunmasına uygulanmıştır.

Tezin son kısmında, bu yöntem bir boyutlu ikinci mertebeden nonlinear dalga denkleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında çözümü için irdelenmiştir.

Tezdeki çalışmaların her birinde kullanılan diferansiyel operatör faktörize edilmiştir. Faktörize edilmiş operatörlerden birinin çekirdekleri sınıfında özel bir yardımcı problem oluşturulmuştur. Bu yardımcı problem, bilgisayar hesaplamaları açısından etkin ve ekonomik algoritmalar geliştirmemizi sağlayan, esas problemde bulunmayan avantajlara sahiptir.

Ayrıca, önerilmiş yöntem problemin fiziksel yapısında ortaya çıkan darbe dalgasının oluştuğu yeri ve zamanı net olarak bulmaya da imkan vermektedir.

Anahtar Kelimeler: Nonlinear Dalga Dağılımı, Darbe Dalgaları, Zayıf Çözüm, Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümler, Subsonik ve Transonik Akış, Hesaplama Hidrodinamiği, Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Modelleme.

SUMMARY

Numerical Solutions for Nonlinear Wave Equations in a Class of Discontinuous Functions

In this thesis, a numerical method for solving nonlinear partial differential equations and system equations in a class of discontinuous functions which are often met in practice is suggested. This suggested method is briefly investigated in section 2.1 and applied to an one-dimensional problem of first ordered partial equation with a periodical boundary condition.

In section 2.3 the mentioned method has been developed to a two-dimensional initial and boundary value problem which is of first ordered nonlinear partial differential equation in a class of discontinuous functions. For this aim, the exact solution is structured and some properties of it are studied.

In section 2.4, the suggested method is further developed to a system of nonlinear partial differential equations in a class of discontinuous functions which arise in gas-dynamics problem, and also in many field of hydrodynamics.

In the final section of thesis, the method is studied further for one dimensional, second ordered nonlinear wave equation in a class of discontinuous functions.

Each differential operator used in each section of the thesis is factorized. A special auxiliary problem in a class of kernel of one of the factorized operators is introduced. These auxiliary problems have some advantages over the main problem that provide us to develop efficient and economical algorithms from computational point of view.

And the suggested method makes it possible to find the position and time evaluation of a shock wave which originates from the physical nature of the problem.

Key Words: Nonlinear Wave Distribution, Shock Wave, Weak Solution, Numerical Method in a Class of Discontinuous Functions, Subsonic and Transonic Flow, Computational Hydrodynamics, Numerical Modeling

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Dalganın başlangıç profili (lineer durum)	44
Şekil 2. Dalganın $T=1.5$ değerindeki evrimi (lineer durum)	44
Şekil 3. Dalganın $T=2.5$ değerindeki evrimi (lineer durum).....	45
Şekil 4. Dalganın $T=5.0$ değerindeki evrimi (lineer durum).....	45
Şekil 5. Dalganın $T=0.5$ değerindeki evrimi (nonlineer durum).....	46
Şekil 6. . Dalganın $T=1.0$ değerindeki evrimi (nonlineer durum)	46
Şekil 7. Dalganın $T=1.5$ değerindeki evrimi (nonlineer durum).....	47
Şekil 8. Dalganın $T=1.6$ değerindeki evrimi (nonlineer durum)	47
Şekil 9. Başlangıç profilin zamana göre evrimi.....	57
Şekil 10. (131) Formülüne göre dalganın evrimi.....	64
Şekil 11. (141) Formülüne göre dalganın evrimi.....	65
Şekil 12. (162) Başlangıç profilli dalganın zamanın evrimi.....	66
Şekil 13. İkili dalganın zamanın farklı değerlerindeki dağılım evrimi	67
Şekil 14. Su ile doyma fonksiyonunun $T= 600$ gün zaman değerindeki dağılım dinamiği	69
Şekil 15. Su ile doyma fonksiyonunun $T= 1800$ gün zaman değerindeki dağılım dinamiği	70
Şekil 16. Su ile doyma fonksiyonunun $T= 2200$ gün zaman değerindeki dağılım dinamiği	70
Şekil 17. K_2^1 , K_2^2 fonksiyonlarının doyma fonksiyonlarına göre değişimi.....	84
Şekil 18. Suyun (K_w) ve petrolün (K_o) nisbi geçirgenliğinin doyma fonksiyonuna göre dağılımı	84
Şekil 19. Toplam sıvıdaki su oranını gösteren Buckley – Leverett fonksiyonu.....	85
Şekil 20. Toplam sıvıdaki petrol oranını gösteren Buckley – Leverett fonksiyonu	85
Şekil 21. Su ile doyma fonksiyonunun zamanın farklı değerlerindeki dağılım dinamiği	86
Şekil 22. Konsantrasyon fonksiyonunun zamanın farklı değerlerindeki dağılım dinamiği	86
Şekil 23. Telin başlangıç profili.....	92
Şekil 24. Telin başlangıç hızı	93

Şekil 25. Başlangıç profilin ikinci integrali	93
Şekil 26. Başlangıç hızın ikinci integrali.....	94
Şekil 27. Gerçek çözümün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği	94
Şekil 28. Gerçek çözümün $u_0(x) = 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği.....	95
Şekil 29. Gerçek çözümün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği	95
Şekil 30. Yardımcı problemin gerçek çözümünün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği	96
Şekil 31. Yardımcı problemde oluşan $u(x,t) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ fonksiyonunun $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği	96
Şekil 32. Yardımcı problemin çözümünün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği	97
Şekil 33. $u(x,t) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ fonksiyonunun $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği	97
Şekil 34. (273) – (275) algoritmasına göre elde edilen sayısal çözümün grafiği, $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$, $T = 40$	100
Şekil 35. (273) – (275) algoritmasına göre elde edilen sayısal çözümün grafiği, $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$, $T = 40$	100
Şekil 36. Yardımcı problemin sayısal çözümünün grafiği, $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$	102
Şekil 37. $U_{i,k} = V_{\bar{x}}$ fonksiyonunun grafiği.....	102
Şekil 38. $V_{i,k}$ çözümünün $T = 5$ değerindeki grafiği (nonlineer durum)	109
Şekil 39. $U_{i,k} = V_{\bar{x}}$ nın $T = 2$ değerindeki grafiği (nonlineer durum).....	110
Şekil 40. $U_{i,k}$ nın $T = 5$ değerindeki grafiği.....	110
Şekil 41. $U_{i,k}$ nın $T = 8.5$ değerindeki grafiği.....	111
Şekil 42. $U_{i,k}$ nın $T = 9$ değerindeki grafiği	111
Şekil 43. $U_{i,k}$ nın $T = 10$ değerindeki grafiği.....	112

SEMBOLLER DİZİNİ

A, B, L, M	operatörler
A^*	A nın adjoint operatörü
A^{-1}	A nın ters operatörü
$C([a, b])$	$[a, b]$ de tanımlı ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^k([a, b])$	$[a, b]$ de tanımlı ve k . ($k \geq 1$) mertebeye kadar sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı
$C^{m, n}(Q)$	Q da tanımlı, sırasıyla m . ve n . mertebeden sürekli, diferansiyellenebilen fonksiyonlar uzayı
$\overset{0}{C}_{m, n}(Q)$	Q da tanımlı, sırasıyla m . ve n . mertebeden sürekli, diferansiyellenebilen ve Q da kompakt taşıyıcıya sahip fonksiyonlar uzayı
D, Q	Bölgeler
E	adi fonksiyonlar kümesi
K, D	test fonksiyonları sınıfı
$Ker M$	M operatörünün çekirdeği
M_∞^2	Mach sayısı
Q_T	$\{(x, t) \mid x \in D, 0 \leq t < T\}$ kümesi
R^n	$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ noktalarının Euclid uzayı
R_+^{n+1}	$R^n \times [0, T)$
$\text{supp } u$	$u(x)$ fonksiyonunun taşıyıcısı, yani $\{x : u(x) \neq 0\}$
t	zaman değişkeni
x	yer değişkeni
$u_{\text{ext}}(x, t)$	$u(x, t)$ fonksiyonunun çözümüne karşılık gelen genişletilmiş çözüm
$U \equiv U(x_i, t_k)$	$u(x, t)$ fonksiyonunun (x_i, t_k) düğüm noktasındaki yaklaşım değeri
$\hat{U} \equiv U(x_i, t_{k+1})$	$u(x, t)$ fonksiyonunun (x_i, t_{k+1}) düğüm noktasındaki yaklaşım değeri
$\check{U} \equiv U(x_{i+1}, t_k)$	$u(x, t)$ fonksiyonunun (x_{i+1}, t_k) düğüm noktasındaki yaklaşım değeri
U_{x_i}	$u(x, t)$ fonksiyonunun x_i değişkenine göre ileri(sağ) sonlu fark türevi
$U_{\bar{x}_i}$	$u(x, t)$ fonksiyonunun x_i değişkenine göre geriye(sol) sonlu fark türevi

U_i $u(x,t)$ fonksiyonunun t değişkenine göre sonlu fark türevi , yani $(U_{i,k+1} - U_{i,k})/\tau$

$\Delta_x \cdot \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_i^2}$ Laplace operatörü

$\square \cdot \equiv \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$ (t, x) değişkenlerine göre D'Alambert operatörü

$\delta(x)$ Dirac fonksiyonu

(\cdot, \cdot) skaler çarpım

(f, φ) φ test fonksiyonları üzerinde oluşmuş genelleştirilmiş fonksiyon

$\Omega_{h,\tau}$ Q bölgesini örten ağ, burada τ, h sırasıyla zaman ve yer değişkenlerine göre ağın adımı olmaktadır

$\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $u(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ fonksiyonunun x_i değişkenine göre kısmi türevi

$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ u fonksiyonunun x_i değişkenine göre ikinci mertebeden kısmi türevi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Kuantum fiziğindeki çalışmaların sonucunda, kökten yeni problemler ortaya çıkmaya başlamasıyla bu problemlerin çözümü araştırmacıları yeni matematiksel yöntemler geliştirmeye yöneltti. Günümüzde bu yönde alınan sonuçlar, artık bir bilim dalı olmak üzere mükemmelleşme dönemindedir. Kuantum fiziğinde ilkel sonuçlar von Neumann'ın ismi ile anılmaktadır. Bu alanda fizikçiler, matematikçilerle çalışmakla birlikte, her biri aynı zamanda kendi yöntemlerini kullanmaktaydılar. Fizikçiler, sezgi ve benzerlik (analoji) prensiplerine, matematikçiler ise mantığa dayalı olarak söz konusu problemleri irdeliyor ve bunların her ikisi de tabii zorluklar karşısında kalıyorlardı.

Fizikte öyle problemler vardır ki, fizikçiler onları sadece matematiksel yöntemler yardımı ile çözemezler, matematikçiler ise kendi soyut çözüm yöntemleri ile reel ve güncel fiziksel neticelere ulaşamazlar. Örneğin, kuantum mekaniğinde çalışma zorunluluğu, genelleştirilmiş fonksiyonlar kavramının teşkil edilmesi sonucunda yeni matematiksel kavramların oluşturulmasına neden olmuştur.

Böylelikle fizikçilerin ve matematikçilerin birlikte çalışmaları hem fizikçiler hem de matematikçiler için çok avantajlı oldu ve sonunda yeni bir "çağdaş matematiksel fizik" ana bilim dalı oluştu.

Çağdaş matematiksel fizik problemlerinin çözümünde önemli olan konu, hangi özelliklerin fiziksel problemden, hangi özelliklerin matematiksel modellerden ortaya çıktığını bilmektir. Çünkü fiziksel problemler genelde nonlineer olmaktadır ve söz konusu nonlineerlik yeni fiziksel özellikler barındırmaktadır. Örneğin, dalgaların dağılım zamanı yeri önceden bilinmeyen darbe dalgalarının oluşması, kontakt süresizlikleri, vs. Bu tür fiziksel özellikleri matematiksel olarak ifade etmek için klasik matematiğin yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Böylelikle, çağdaş fiziksel problemlerin çözümü yeni matematiksel yöntemler talep etmekle birlikte, modern bilgisayar tekniğinin kullanılmasını zorunlu kılmıştır. Bu nedenle herhangi bir çağdaş fiziksel problemin çözümünü araştırmak için aşağıdaki adımları gerçekleştirmek gerekmektedir:

1. Fiziksel problemi yeterince düzgün ifade edebilen matematiksel modellerin, yani diferansiyel denklem veya denklemler sisteminin ve uygun başlangıç ve(veya) sınır koşullarının yazılması;

2. Matematiksel problemin etkili çözüm algoritmalarının yazılması ve bunların bilgisayarda gerçekleştirilmesi;

3. Alınan sonuçların fiziksel yorumlanması ve irdelenmesi.

Bu model çerçevesinde yapılan işler çağdaş matematiksel fizik bilim dalının teorik temellerini çok geniş şekilde geliştirdi ve şimdi bunların yardımı ile kuantum fiziğinin, hidrodinamiğin , aerodinamiğin zor problemleri çözülmektedir.

Nonlinear problemleri incelemek için henüz genel bir yöntem bulunmamaktadır. Bir nonlinear problem için geçerli olan bir yöntem aynı sınıftan ama farklı nonlinearlik hali için geçerli olmayabilir. Bu nedenle her bir nonlinear problem için özel yöntemlerin oluşturulması zorunluluğu ortaya çıkmaktadır.

1.1.1. Genelleştirilmiş Fonksiyonların Temel Teorisi

Tanım 1: $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve herhangi $a \leq x \leq b$ sonlu aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlara adi (ordinary) fonksiyon denir [1].

Tanımdan görüldüğü gibi, her bir $a \leq x \leq b$ sonlu aralığında sürekli (ölçülebilir) fonksiyonlar adi fonksiyonlar olmaktadır.

$f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonları hemen her yerde $f_1(x) = f_2(x)$ ise, bunlara eşit fonksiyonlardır denir. Adi fonksiyonlar kümesi E ile gösterilecektir. Adi fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sabitle çarpımı da adi fonksiyon olur; yani, E bir lineer uzay oluşturmaktadır. E lineer uzayında limit kavramı da verilebilir.

Eğer $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ adi fonksiyonlar dizisi hemen her yerde $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ve ayrıca $|f_n(x)| \leq f_0(x)$ ise (burada $f_0(x)$ - önceden bilinen adi fonksiyondur), bu taktirde Lebesgue teoremine göre $f(x)$ limit fonksiyonu da adi fonksiyon olur.

Diğer taraftan, bilinen ve çok gerekli olan diferansiyelleme işlemlerini E de her fonksiyon için tanımlamak mümkün değildir. Örneğin, analizden bilinen Weierstrass fonksiyonu her yerde sürekli ama hiçbir yerde diferansiyellenemeyen fonksiyondur. Aynı

şekilde, bazı adi fonksiyonlar için türev mevcut olsa bile ($y = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ örneğindeki gibi), onların türevi adi fonksiyon olmayabilir. Ayrıca $\{f_\nu(x)\}$ adi fonksiyonlar dizisi için $f'_\nu(x)$ türevleri mevcut olsa bile $f_\nu(x) \rightarrow f(x)$ den her zaman $f'_\nu(x) \rightarrow f'(x)$ olması da söz konusu değildir. Bilindiği üzere analitik fonksiyonlar sınıfında yukarıda sözü edilen işlemlerin her biri gerçekleşir ama bu sınıf uygulamalar için çok dardır. O halde uygulama bakımından arzu edilen durum, tüm adi fonksiyonları içeren en azından diferansiyelleme işlemlerinin yürüyeceği bir sınıf oluşturmaktır. İlk bakışta, türev alma işlemleri tanımlanılacak sınıf dar olacak gibi gözükse de, aslında bu sınıf dar değil, tersine daha da genişletilmiş olacaktır.

Bu bölümde E uzayını, üzerinde tanımlanan diferansiyel işlemi limit işlemine göre sürekli olacak şekilde yeni bir sınıfa genişletilmeden önce, ileriki işlerimizde gereken bazı tanım ve kavramlar verilecektir.

Tanım 2: $Supp f(x) = \{x \mid f(x) \neq 0\}$ kümesine f fonksiyonunun desteği denir ve $Supp f$ ile gösterilir.

Tanım 3: $-\infty < x < \infty$ aralığında tanımlı, reel değerli ve her mertebeden sürekli diferansiyellenebilen ve kompakt desteğe sahip fonksiyonlar sınıfına temel (test) fonksiyonlar sınıfı ve bu sınıfın keyfi elemanına ise temel (test) fonksiyon denir.

Örnek 1: (Sobolev şapkası)

$$\varphi(x; a) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-x^2}}, & |x| < a \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$$

fonksiyonu bir temel (test) fonksiyondur [2].

Temel fonksiyonların toplamı ve keyfi reel sayıyla çarpımı yine temel fonksiyon olur, yani temel fonksiyonlar sınıfı lineer uzay oluşturmaktadır. Söz konusu uzayı \mathbf{D} ile gösterelim (\mathbf{D} uzayı literatürde bazen \mathbf{K} ile de gösterilir) [1].

\mathbf{D} uzayında keyfi $\varphi(x)$ temel fonksiyonu ile sonsuz diferansiyellenebilen ve $|x|$ in yeteri kadar büyük değerlerinde keyfi artma hızına sahip olan $g(x)$ fonksiyonu ile (toplamaya göre distribütiflik özelliğine sahip olan) çarpma işlemi de tanımlanmaktadır.

\mathbf{D} uzayında limit alma işlemini tanımlayalım. Eğer $\{\varphi_\nu(x)\}$, ($\nu = 1, 2, \dots, n, \dots$) temel fonksiyonlar dizisinin tüm elemanları ve onların keyfi mertebeden türevleri herhangi bir

$[a, b]$ aralığı dışında sifira eşitseler ve $\{\varphi_v^{(n)}(x)\}$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) dizileri sifira düzgün yakınsak olursa, bu taktirde, $\{\varphi_v(x)\}$, ($v = 1, 2, \dots$) dizisine sifira yakınsak dizi denir.

Şimdi $\varphi_v(x) = \frac{1}{v}\varphi(x; a)$, ($v = 1, 2, \dots$) dizisini göz önüne alalım. $\{\varphi_v(x)\}$, ($v = 1, 2, \dots$)

\mathbf{D} de sifira yakınsaktır. $\varphi_v(x) = \frac{1}{v}\varphi\left(\frac{x}{v}; a\right)$ dizisi ise tüm türevleri ile birlikte sifira yakınsaktır; fakat \mathbf{D} de sifira yakınsak değildir. Çünkü, $\varphi_v(x)$ lerin hepsinin aynı anda dışında sifira eşit olduğu bir $[a, b]$ aralığı yoktur.

\mathbf{D} de $\{\varphi_v(x)\}$ dizisinin $\varphi(x)$ fonksiyonuna yakınsaklığı $\{\varphi_v(x) - \varphi(x)\}$ dizisinin sifira yakınsaklığı anlamına gelmektedir.

Toplama, keyfi reel sayıyla çarpma, sonsuz diferansiyellenebilen bir fonksiyonla çarpma işlemleri yakınsaklık işlemine göre sürekli işlemlerdir. Yani \mathbf{D} de $\varphi_v \rightarrow \varphi$ ve $\psi_v \rightarrow \psi$ ise, herhangi α ve β sayıları için \mathbf{D} de $\alpha\varphi_v + \beta\psi_v \rightarrow \alpha\varphi + \beta\psi$ dir. Aynı zamanda herhangi bir sonsuz diferansiyellenebilen $g(x)$ fonksiyonu için \mathbf{D} de $g(x)\varphi_v(x) \rightarrow g(x)\varphi(x)$ olmaktadır.

Uyarı 1: \mathbf{D} uzayı metrikleştirilemez. Diğer bir ifade ile, bilinen standart özelliklere sahip $\rho(\varphi, \psi)$ uzaklık fonksiyonu \mathbf{D} de tanımlanamaz. Çünkü, $\{\varphi_v\}$ dizisinin φ ye yakınsaklığı $\rho(\varphi, \varphi_v) \rightarrow 0$ bağıntısının sağlanmasına denktir.

Eğer \mathbf{D} bir metrik uzay,

$$\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \dots, \varphi_v^{(1)}, \dots \rightarrow \varphi^{(1)}$$

.....

$$\varphi_1^{(m)}, \varphi_2^{(m)}, \dots, \varphi_v^{(m)}, \dots \rightarrow \varphi^{(m)}$$

yakınsak dizilerin sistemi ve ayrıca $\varphi^{(m)} \rightarrow \varphi$ olsaydı, her satırdan bir eleman seçmekle elde edilen

$$\varphi_{v_1}^{(1)}, \varphi_{v_2}^{(2)}, \dots, \varphi_{v_m}^{(m)}, \dots$$

alt dizisi için de $\{\varphi_{v_m}^{(m)}\} \rightarrow \varphi$ olmak zorundaydı. Ancak \mathbf{D} de böyle bir sonuca varılamaz.

Örneğin, $\varphi(x; m)$ örnek 1 deki fonksiyon olmak üzere

$$\varphi_v^{(m)} = \frac{1}{v}\varphi(x; m), \quad (v = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots)$$

olsun. Her bir $m \in \mathbb{N}$ için $\varphi_v^{(m)} \rightarrow 0$ dır. Ama $\{\varphi_{v_m}^{(m)}\}$ dizisi sifira yakınsak değildir. Çünkü, $\varphi_{v_m}^{(m)}$ lerin tümünün dışında sıfır olduğu ortak kapalı bir aralık yoktur.

Çeşitli yollarla verilebilen genelleştirilmiş fonksiyon kavramı ilk kez 1936 yılında Sobolev, S. L. tarafından verilmiştir [2]. Daha sonraları 1950-51 yıllarında Schwartz, L. genelleştirilmiş fonksiyon kavramını lineer topolojik uzayların sistemleştirilmesi problemine uygulamıştır [3]. Bu yöntem günümüzde çok ilerlemiş ve bu konuda oldukça önemli bir çok çalışma yapılmıştır.

Genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinde ikinci yöntem “dizisel yaklaşım” yöntemidir [4]. Bu yöntemde herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon bir adi fonksiyonlar dizisinin limiti olarak alınmaktadır. Bu yöntem kolay olmanın yanı sıra, fizikçiler için de bir o kadar doğal olmaktadır. Yukarıda sözü edilen iki yöntemin dışında da genelleştirilmiş fonksiyon tanımı mevcuttur [5], [6].

1.1.2. Genelleştirilmiş Fonksiyonlar

\mathbf{D} uzayı üzerinde herhangi bir $f(x)$ adi fonksiyonuna karşılık gelen

$$(f, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathbf{D} \quad (1)$$

lineer fonksiyoneli göz önüne alalım [1]. Burada doğal olarak, integraleme aralığı $supp \varphi$ üzerinde yoğunlaşmaktadır.

Bu kavram fonksiyon tanımının genişletilmesine olanak sağlamaktadır. Önceleri, bir fonksiyonun tanım aralığının keyfi noktasında (veya hemen her yerde) tanımlı ve tek değerli olması isteniliyordu, ama şimdi göz önüne alınan adi fonksiyonun herhangi bir temel fonksiyonla çarpımının integralinin sonucu bizi ilgilendirmektedir. İşte, biz bu integrali genelleştirilmiş fonksiyon olarak isimlendireceğiz.

Bu arada, fonksiyonun ayrı ayrı noktalarda değeri belli olmayıp, genel ve temel fonksiyonların çarpımının integralinin nasıl tanımlanılacağı sorusu akla gelebilir. Bu sorunun cevabı çok sadedir. Bu durumda biz integrali yapısal değil aksiyomatik olarak tanımlayacağız.

Diğer yandan, $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{D}$ ve $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ için

$$(f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2)$$

olduğundan (1) cinsinden tanımlanan fonksiyonel lineerdir. Ayrıca (1) fonksiyoneli aşağıdaki anlamda sürekli olmaktadır. Eğer \mathbf{D} de $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots \rightarrow 0$ olan temel fonksiyonların bir dizisi ise $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (f, \varphi_\nu) = 0$ (integralin özelliğinden) dir. Böylece, (1) fonksiyoneli \mathbf{D} de sürekli ve lineer bir fonksiyoneldir.

\mathbf{D} de (1) cinsinden ifade edilemeyen diğer fonksiyoneller de vardır. Her bir $\varphi(x)$ temel fonksiyonuna $\varphi(0)$ sayısını karşılık getiren δ fonksiyoneli göz önüne alalım.

$(\delta, \varphi(x)) = \varphi(0)$ fonksiyoneli lineer ve sürekli dir [1]. Diğer taraftan, her bir $\varphi(x)$ e $\varphi(0)$ sayısını karşılık getiren (1) cinsinden fonksiyonel yoktur. Gerçekten de, varsayalım ki \mathbf{D} de keyfi $\varphi(x)$ ve belli bir $f(x)$ adi fonksiyonu için

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx = \varphi(0) \quad (2)$$

olsun. Özellikle $\varphi(x) = \varphi(x; a)$ olarak örnek 1 deki fonksiyonu ele alırsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x; a)dx = \varphi(0; a) = \frac{1}{e}$$

elde ederiz. Fakat $a \rightarrow 0$ olduğunda (2) nin sol tarafı sıfıra yaklaşır; bu ise (2) gösterimi ile çelişir.

Tanım 4: \mathbf{D} de tanımlı lineer, sürekli fonksiyonele, yani

$$(i) \quad (f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2) = \alpha_1(f, \varphi_1) + \alpha_2(f, \varphi_2),$$

$$(ii) \quad \mathbf{D} \text{ de } \varphi_\nu \rightarrow 0 \text{ ise } (f, \varphi_\nu) \rightarrow 0 \text{ dir}$$

koşullarını sağlayan f fonksiyoneline genelleştirilmiş fonksiyon denir [1].

(1) cinsinden ifade edilebilen fonksiyonele regüler, edilemeyene de singüler fonksiyonel denir. Bu durumda, $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$ fonksiyoneli singülerdir.

Keyfi adi fonksiyona (1) cinsinden genelleştirilmiş bir fonksiyon karşılık gelmektedir.

Örnek 2: $f(x) \equiv c$ olsun. Tanım 2 ye göre

$$(f, \varphi) \equiv (c, \varphi) = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$$

biçimindeki genelleştirilmiş fonksiyon sabit olarak isimlendirilecektir. Özel olarak

genelleştirilmiş 1 fonksiyonu, $(1, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)dx$ anlamındadır [1].

f_1 ve f_2 genelleştirilmiş fonksiyonlarının aynı temel fonksiyonlar üzerinde oluşturduğu fonksiyoneller eşit, yani $(f_1, \varphi) \equiv (f_2, \varphi)$ ise bu taktirde f_1 ve f_2 ye eşittir denir.

Eğer en az bir φ_0 temel fonksiyonu için $(f_1, \varphi_0) \neq (f_2, \varphi_0)$ oluyorsa f_1 ve f_2 fonksiyonlarına farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar denir.

Ayrıca farklı $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ adi fonksiyonlarına farklı genelleştirilmiş fonksiyonlar karşılık gelir [1].

Toplama ve herhangi bir reel sayı ile çarpma

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, \varphi) = \alpha_1 (f_1, \varphi) + \alpha_2 (f_2, \varphi)$$

ile tanımlanır. $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ in belirlediği fonksiyonel de lineer ve süreklidir. Üstelik $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonlarına karşılık gelen f_1 ve f_2 fonksiyonelleri regüler ise, $\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$ fonksiyonuna tekabül eden $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ fonksiyoneli de regülerdir.

Sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir $\alpha(x)$ fonksiyonu ile genelleştirilmiş herhangi bir f fonksiyonun $\alpha(x)f$ çarpımı

$$(\alpha(x)f, \varphi) = (f, \alpha(x)\varphi)$$

ile tanımlanır.

Eğer $f(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon ise, onun $f'(x)$ adi türevi mevcuttur. Bu taktirde $f'(x)$ için

$$(f', \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx, \quad \varphi \in \mathbf{D}$$

ifadesini oluşturabiliriz. Şimdi varsayalım ki, $\varphi(x)$ de mutlak sürekli ve sınırlı $\varphi'(x)$ türevine sahip fonksiyon olsun. Son integralden kısmi integrasyon yardımı ile

$$(f', \varphi) = f(x)\varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

elde edilir, yani

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \quad (3)$$

dır. Eğer f' fonksiyonu klasik anlamda mevcut olmazsa bile $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$ ifadesi keyfi

$\varphi(x)$ test fonksiyonları için mutlaka mevcut olmaktadır. Böylelikle elimizde $f'(x)$ olmasa da ve kesinlikle bize $f'(x)$ in sınırlı türeve sahip, kompakt desteği olan sınırlı bir

fonksiyonla çarpımının integrali gerekmede ise bu sonuca, $f'(x)$ in mevcut olduğu var sayılır gibi kabul ederek, (1) ifadesinin önüne eksi işareti koyarak ulaşabiliriz.

Bu kavram, temel fonksiyonların iyi seçilmesi durumunda keyfi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi var ve bu türevinde bir genelleştirilmiş fonksiyon olacağını göstermektedir. Diğer bir deyişle, herhangi bir genelleştirilmiş fonksiyon her mertebeden türevlere sahiptir. Bu bağlamda,

$$(f'', \varphi) = (f', -\varphi') = (f, \varphi'')$$

ve benzer şekilde, herhangi bir q için

$$(f^{(q)}, \varphi) = (f, (-1)^q \varphi^{(q)}) = (-1)^q (f, \varphi^{(q)})$$

dır. Kolayca görülür ki, türev lineerlik özelliğine sahiptir. f_1 ve f_2 iki genelleştirilmiş fonksiyon ve α_1, α_2 sabitler ise $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)' = \alpha_1 f_1' + \alpha_2 f_2'$ dir. Ayrıca, $\alpha(x)$ sonsuz diferansiyellenebilen herhangi bir fonksiyon ise $(\alpha f)' = \alpha f' + \alpha' f$ dir.

Eğer $f(x)$ ve $f'(x)$ fonksiyonları sürekli ise, bu taktirde f' fonksiyoneli $f'(x)$ türevini verir. Burada, türevin belirlenmesine dair birkaç örnek ele alalım.

Örnek 3: (Heaviside fonksiyonu)

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

adi fonksiyonunun türevini alalım. (3) formülüne göre

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = (\theta(x), -\varphi'(x)) = -\int_0^{\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = (\delta, \varphi)$$

dır. Böylelikle, $\delta(x)$ fonksiyonunun tanımına göre $\theta'(x) = \delta(x)$ olduğu elde edilir. Genel olarak $\theta'(x - x_0) = \delta(x - x_0)$ olur [1].

Örnek 4: $f(x)$, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ noktalarında $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ sıçrayışlarına sahip parçalı mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f'(x)$ fonksiyonu sonlu x_1, \dots, x_n noktaları dışında her yerde tanımlı fonksiyon olmaktadır [1].

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$f_1(x) = f(x) - \sum_k h_k \theta(x - x_k).$$

Bu fonksiyonunun genelleştirilmiş fonksiyonlar sınıfında türevi

$$f_1'(x) = f'(x) - \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

olup

$$f'(x) = f'_1(x) + \sum_k h_k \delta(x - x_k)$$

dır.

1.1.3. Genelleştirilmiş Fonksiyonların Türevleri

Şimdi çok değişkene bağlı genelleştirilmiş fonksiyonun kısmi türevi kavramına geçelim. Varsayalım ki, $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değişkenlerine bağlı fonksiyon olduğunda $f(x)$ fonksiyonunun x_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) değişkenine göre kısmi türevleri aşağıdaki formül yardımı ile tanımlanır [1],

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right) = \left(f, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Bilindiği gibi genelleştirilmiş fonksiyonun türevi de genelleştirilmiş fonksiyon olduğundan f fonksiyonunun yüksek mertebeden

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}, \dots$$

türevlerini de aynı yolla tanımlayabiliriz. Böylelikle tüm genelleştirilmiş fonksiyonlar sonsuz diferansiyellenebilirlerdir.

İkinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olan, fakat birinci mertebeden genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon gösterilebilir. $f(x)$ genelleştirilmiş türevi olmayan fonksiyon olmak üzere aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım

$$F(x, y) = f(x) + f(y).$$

Bu taktirde $F(x, y)$ fonksiyonunun birinci mertebeden türevi yoktur [7]. Fakat $F(x, y)$ nin ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevi vardır. Gerçekten de, gereken koşulları sağlayan $\psi(x, y)$ fonksiyonu için

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = \iint_G f(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy + \iint_G f(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy$$

dır. Diğer taraftan

$$\iint_G f(x) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = \int_a^b f(x) \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = \int_a^b f(x) \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dx = 0$$

$$\psi'_x(x, \varphi_1(x)) = \psi'_x(x, \varphi_2(x)) = 0$$

burada $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ G nin $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x)$ sınırlarını göstermektedir. Aynı yolla

$$\iint_G f(y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = 0$$

elde ederiz. Buradan

$$\iint_G F(x, y) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} dx dy = 0 = \iint_G 0 \cdot \psi(x, y) dx dy$$

yani $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$ mevcuttur ve özdeş olarak sifira eşittir.

Uyarı 2: Hemen her yerde türevin olmasından genelleştirilmiş türevin olması çıkarılamaz.

1.1.3. Zayıf Çözüm

Doğadaki bir çok pratik problemin matematiksel modeli, kısmi türevli diferansiyel denklem veya denklemler sistemi için yazılmış başlangıç ve sınır değer probleminin çözümünün bulunmasına indirgenebilir. Çoğu zaman problemin söz konusu verileri süreksiz fonksiyonlar olabilir. Bazı durumlarda ise matematiksel problemin çözümünde, diğer deyişle fiziksel olayın dinamiğinde süreksizlik ortaya çıkmaktadır.

Genel olarak nonlinear problemin çözümünde bazı özellikler ortaya çıkmaktadır. Nonlinear problemlerde ortaya çıkan yeni karakteristik özellikler (örneğin, heyecanlanmış cephenin sonlu hızla dağılımı, darbe dalgası, kontakt sıçrayışları vs. gibi fiziksel özellikler) zayıf çözüm kavramı yardımıyla ifade edilebilirler.

Söz konusu zayıf çözümü tanımlamak için göz önüne alınan diferansiyel denkleme karşılık gelen integral gösterimi yazmak gerekmektedir. Genelde, kısmi türevli diferansiyel denklem için zayıf çözüm kavramı farklı yollarla yazılabilir.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler için zayıf çözüm kavramını 1930 yıllarında Sobolev' in verdiği önceden değinilmişti. Sobolev anlamındaki zayıf çözüm, integral eşitlik yardımı ile tanımlanmaktadır. Bu tanımı açıklamak için, $Q_T \subset R^{n+1}$ Euclid uzayında konveks bir bölge, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ ve $f(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ Q_T de ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere operatör biçimde verilmiş

$$Lu=f \tag{4}$$

lineer kısmi türevli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada L sürekli diferansiyellenebilen katsayılarla sahip self-adjoint (öz eşlenik) diferansiyel ifadeyi göstermektedir.

Tanım 5: Test fonksiyonlar sınıfından keyfi $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ fonksiyonları için

$$\int_{Q_T} \{ uM\varphi - f\varphi \} dxdt = 0, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

integral eşitliğini sağlayan u fonksiyonuna (4) denkleminin zayıf (veya genelleştirilmiş) çözümü denir. Burada $M = L^*$ dir; yani M, L operatörüne karşılık gelen adjoint operatör olmaktadır [2].

Tanım 5 den görüldüğü gibi (4) denkleminin herhangi bir klasik çözümü (5) eşitliğini korumak zorundadır. Ama (5) eşitliğini sağlayan $u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ fonksiyonları daha geniş bir sınıf oluşturur. Çünkü (5) in içerdiği u fonksiyonlarının klasik anlamda türevlenebilir olması gerekmiyor.

Zayıf çözümler göz önüne alındığında, denklem için başlangıç ve sınır değer koşullarının hangi anlamda verileceğini özel olarak belirtmek gerekmektedir.

1.1.5. Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler ve Genel Çözümleri

Sonraki hesaplamalar ve teoremin geliştirilebilmesi için diferansiyel denklemlerden bazı temel kavramları da hatırlatalım.

Her zaman olduğu gibi serbest değişkenleri $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ ile, bilinmeyen fonksiyonu $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ile gösterelim.

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonu için birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemin (KTDD) genel yazılım formu

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n}) = 0 \quad (6)$$

ile verilir. (6) türünden denklemlere kuantum mekaniğinde, varyasyonlar hesabında, geometrik optik vs. gibi alanlarda rastlayabiliriz.

Tanım 6: Eğer F fonksiyonundaki u ve onun tüm türevleri birinci dereceden, katsayıları da sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonu ise, böyle denklemlere birinci mertebeden lineer kısmi türevli denklem denir [8].

Birinci mertebeden lineer, homojen olmayan KTDD ise

$$a_0(x_1, \dots, x_n)u + a_1(x_1, \dots, x_n)u_{x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n)u_{x_n} = \varphi(x_1, \dots, x_n) \quad (7)$$

ile veya buna denk olarak

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n)u_{x_i} + a_0(x_1, x_2, \dots, x_n)u = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (8)$$

ile verilir. Burada a_0, \dots, a_n lere denklemin katsayıları, φ ye ise denklemin sağ tarafı denir.

Eğer $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$ olursa (8) denklemine birinci mertebeden lineer homojen KTDD denir.

Adi diferansiyel denklemler teorisinden bilinen n. mertebeden bir diferansiyel denklemin

$$\phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (9)$$

ile verilen genel yazılım formunu göz önüne alalım. Eğer ϕ fonksiyonu $y, y', \dots, y^{(n)}$ değişkenlerine göre lineer bağımlı ise (9) denklemine lineer diferansiyel denklem denir ve genel yazılım formu

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_n(x)y = f(x) \quad (10)$$

dır. Burada $f(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)$ fonksiyonları bilinen ve gereken mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlar olup, $p_i(x)$ ler denklemin katsayıları, f ise denklemin sağ tarafı olmaktadır.

Eğer $f(x) \equiv 0$ olursa böyle denklemlere n. mertebeden lineer homojen diferansiyel denklem denir. $f(x) \neq 0$ olursa (10) n. mertebeden lineer homojen olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılır.

Bilindiği üzere, n. mertebeden adi diferansiyel denklemin genel çözümü bağımsız değişken, bilinmeyen fonksiyon ve n tane keyfi sabit içermektedir. Yani her bir çözüm

$$\psi(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0 \quad (11)$$

cinsinden verilmektedir. Tersine, (11) cinsinden olan fonksiyonlar ailesi n. mertebeden bir tane adi diferansiyel denklem oluşturur.

(10) denkleminin genel çözümünü şöyle de tanımlayabiliriz. Eğer (11) fonksiyonundan n defa türev aldıktan sonra elde ettiğimiz ifadelerden c_1, c_2, \dots, c_n leri yok ettiğimiz takdirde (10) denklemini bulursak, (11)' e (10) un genel çözümü denir.

$$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(k)}, c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n) = 0 \quad (12)$$

biçiminde verilen bir fonksiyonu göz önüne alalım. Eğer (12) denkleminde $n-k$ defa türev alıp elde ettiğimiz ifadelerden c_{k+1}, \dots, c_n sabitleri yok edildikten sonra (10) denkleminde bulunursa, (12) fonksiyonuna (10) denkleminin ara integrali denir.

Göz önüne aldığımız (12) ara integrali kendi başına k . mertebeden bir diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla, eğer (10) türünden bir denklem için herhangi bir ara integrali bulabilirsek, bu (10) denkleminin mertebesinin düşürülmesi anlamına gelir.

KTDD ler için bu söylediklerimiz söz konusu değildir. Ama burada yine de genel çözümleri bulmak mümkündür. KTDD de söz konusu keyfi elemanlar artık sabitler değil, keyfi fonksiyonlar olacaktır.

Tanım 7: Eğer F , bilinmeyen fonksiyonun birinci mertebeden olan türevlerini birinci dereceden içerirse, böyle denklemlere kuazi lineer denklem denir ve bu denklemlerin genel yazılım formu

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u) u_{x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$$

biçiminde olur [8].

Tanım 8: Eğer bilinen a_1, \dots, a_n katsayıları bilinmeyen u fonksiyonunu içermezse, böyle denklemlere yarı lineer denklemler denir [8], ve

$$\sum_{i=1}^n a_i(x_1, x_2, \dots, x_n) u_{x_i} + b(x_1, x_2, \dots, x_n, u) = 0$$

genel yazılım formuna sahiptirler.

Şimdi de $\sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) u_{x_i} + \varphi(x_1, \dots, x_n, u)$ diferansiyel ifadesini $X[u]$ ile gösterelim,

yani

$$X[u] \equiv \sum_{i=1}^n a_i(x_1, \dots, x_n) u_{x_i} + \varphi(x_1, \dots, x_n, u) \quad (13)$$

olsun. Bu bölümde amacımız $X[u]=0$ denkleminin çözüm yöntemlerini incelemektir. Çok değişkenli fonksiyonun tam diferansiyel formlardan yararlanarak (13) denklemini adi diferansiyel denklemler sistemine indirgeyerek çözmeye çalışalım. Bunun için denklemin $a_i(x_1, \dots, x_n)$, $(i = \overline{1, n})$ katsayıları D bölgesinde tüm argümanlarına göre birinci mertebeden kısmi türevlere sahip reel değerli fonksiyonlar olsunlar, ayrıca da

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 > 0 ,$$

olduğunu varsayalım; diğer deyişle tüm katsayıların aynı anda sıfır olmadığını varsayalım. Kolaylık için $\varphi \equiv 0$ olsun.

Şimdi, aşağıdaki adi diferansiyel denklemler sistemi göz önüne alalım

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{a_i(x_1, \dots, x_n)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2(x_1, \dots, x_n)}} . \quad (14)$$

(14) denklemler sisteminin sağ tarafları tüm argümanlara göre kısmi türevlere sahiptir. Yani çözümün varlık teoremine göre (14) sisteminin D bölgesinin her bir noktasından bir integral eğrisi geçmektedir, burada s eğrinin parametresidir. (14) denklemleri ile tanımlanan eğrilere (13) denkleminin *karakteristikleri* denir.

(14) denklemler sistemini aşağıdaki gibi de yazabiliriz

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{ds} &= a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) , \\ \frac{dx_2}{ds} &= a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) , \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{ds} &= a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) . \end{aligned} \quad (15)$$

(15) diferansiyel denklem sistemi simetrik şekilde yazılırsa

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)} \quad (16)$$

olur. (15) denklemler sistemi adi diferansiyel denklemler sistemi olduğundan, onun genel çözümlerini

$$\begin{aligned} \psi_1(x_1, \dots, x_n) &= c_1 , \\ \psi_2(x_1, \dots, x_n) &= c_2 , \\ &\dots\dots\dots \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) &= c_{n-1} \end{aligned} \quad (17)$$

şeklinde gösterelim. Burada c_1, c_2, \dots, c_{n-1} ler keyfi sabitler ve ψ_i ($i = \overline{1, n-1}$) fonksiyonları x_1, \dots, x_n değişkenlerine bağlı ve sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır.

Açıktır ki (17), (13) denklemini sağlar, yani

$$X[\psi_1] = X[\psi_2] = \dots = X[\psi_{n-1}] = 0 \quad (18)$$

dır.

$$u = \phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})$$

fonksiyonunu göz önüne alalım ve $X[u]$ operatörünün özelliklerini inceleyelim.

$$X[\phi(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1})]$$

ifadesini açık şekilde yazarsak

$$\begin{aligned} X[\phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1})] &= a_1 \left[\frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} \cdot \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} \right] + \\ &+ a_2 \left[\frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} \right] + \dots + a_n \left[\frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_{n-1}} \cdot \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \right] \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} \left[a_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} \right] + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_{n-1}} \left[a_1 \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \right] \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial \psi_1} X[\psi_1] + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_2} X[\psi_2] + \dots + \frac{\partial \phi}{\partial \psi_n} X[\psi_n] = 0 \end{aligned}$$

olur. Şimdi,

$$u = \phi(\psi_1, \dots, \psi_{n-1}) \quad (19)$$

ifadesinin (13) ün genel çözümü olduğunu gösterelim. Burada ϕ fonksiyonu $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ argümanlarına göre sürekli diferansiyellenebilir fonksiyondur. Varsayalım ki, $u = \Psi(x_1, \dots, x_n)$ (13) ün herhangi bir çözümü olsun. Bu taktirde $X[\Psi] = 0$ dır, yani

$$a_1 \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} = 0 \quad (20)$$

dır. $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ özel çözümler olduğundan dolayı (18) denklemleri sağlar. (13) denklemini açık olarak yazılırsa

$$a_1 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} + \dots + a_n \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} = 0, \quad (i = \overline{1, n-1}) \quad (21)$$

olur. (20) ve (21) ifadeleri a_1, \dots, a_n fonksiyonları için homojen cebirsel denklemler sistemi olmaktadır. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümlerinin varlığı için sistemin determinantının sıfıra eşit olması yeter ve gerek koşul olmaktadır. Yani,

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x_n} & \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

dır. Diğer deyişle,

$$\frac{D(\Psi, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \equiv 0 \quad (22)$$

olur. Burada, Jakobiyenler hakkındaki teoreme göre Ψ ve ψ_1, \dots, ψ_n fonksiyonları arasında keyfi x_1, \dots, x_n için fonksiyonel bağıntı vardır. Yani,

$$F(\Psi, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}) = 0 \quad (23)$$

dır. Önemle belirtmek gerekir ki, (22) fonksiyonel determinantının birinci satır elemanlarının bir minörü özdeş olarak sıfıra eşit olmaktadır. Gerçekten (16) sistemi $a_n(x_1^0, x_1^0, \dots, x_1^0) \neq 0$ şartı için, $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$ tekil olmayan başlangıç noktasına sahip ise x_n değişkenini serbest değişken olarak alırsak birinci integralleri

$$\psi_i = x_i^0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

olarak yazılabilir. Bu takdirde,

$$\frac{D(\psi_1, \dots, \psi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$$

dır. Diğer taraftan kapalı fonksiyon teoremine göre (23) fonksiyonu Ψ ye göre çözülebilir olup,

$$\Psi = \phi(\psi_1, \dots, \psi_n) \quad (24)$$

dır.

Sonuç olarak (13) denkleminin keyfi çözümü (19) formülü ile verilebilir. Yani (19) genel çözüm olmaktadır.

Elde ettiğimiz bu sonuçları bir teorem şeklinde ifade edelim.

Teorem 1: (15) denklem sisteminin çözümleri $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}$ olsun. Bu takdirde,

(24) yardımı ile bulunan Ψ fonksiyonu (13) denkleminin genel çözümü olur [8].

Örnek 5:

$$(a_2 x_3 - a_3 x_2) \frac{\partial z}{\partial x_1} + (a_3 x_1 - a_1 x_3) \frac{\partial z}{\partial x_2} + (a_1 x_2 - a_2 x_1) \frac{\partial z}{\partial x_3} = 0$$

ile verilen birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada a_1, a_2, a_3 sabitler, $z = z(x_1, x_2, x_3)$ de bilinmeyen fonksiyon olmaktadır. Karakteristik denklem sistemini

$$\frac{dx_1}{a_2x_3 - a_3x_2} = \frac{dx_2}{a_3x_1 - a_1x_3} = \frac{dx_3}{a_1x_2 - a_2x_1} = \frac{dz}{0}$$

olur. Elde ettiğimiz adi diferansiyel denklemler sisteminin birinci aralık integralleri

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c_1, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_2, \quad z = c_3$$

olarak bulunur. Ele aldığımız denklemin genel çözümü teorem 1 den,

$$F(c_1, c_2, c_3) = 0$$

ve ya

$$z = f(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

dır. Burada f keyfi diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

1.1.6. Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem İçin Cauchy Problemi ve Çözümü

Bu bölümde (13) denkleminin

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \quad (25)$$

koşulunu sağlayan $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ çözümünün bulunması problemini verilecektir.

Burada f bilinen fonksiyondur. Kolaylık için (13) denkleminde $\varphi \equiv 0$ olsun. Buradan,

(13) denkleminin karşılık gelen karakteristik denklem sistemi

$$\frac{dx_1}{a_1} = \frac{dx_2}{a_2} = \frac{dx_3}{a_3} = \dots = \frac{dx_n}{a_n} \quad (26)$$

dır. Varsayalım ki,

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = c_1,$$

$$\psi_2(x_1, \dots, x_n) = c_2,$$

.....

$$\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1}$$

(26) sisteminin birinci ara integralleridir. (27) ara integrallerinde $x_n = x_n^{(0)}$ yazalım ve onları

$$\begin{aligned}
\psi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \overline{\psi_1}, \\
\psi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \overline{\psi_2}. \\
&\dots\dots\dots \\
\psi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \overline{\psi_{n-1}}
\end{aligned} \tag{28}$$

şeklinde ifade edelim. Eğer (28) denklemler sisteminde bilinmeyenleri x_1, x_2, \dots, x_{n-1} olarak kabul edip, söz konusu sistemi çözersek

$$\begin{aligned}
x_1 &= \omega_1(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}), \\
x_2 &= \omega_2(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}), \\
&\dots\dots\dots \\
x_{n-1} &= \omega_{n-1}(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}).
\end{aligned}$$

olduğunu buluruz. Elde ettiğimiz bu ifadeleri $u=f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ de yerine yazarsak

$$u = f(\omega_1(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}), \omega_2(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}), \dots, \omega_n(\overline{\psi_1}, \overline{\psi_2}, \dots, \overline{\psi_{n-1}}))$$

olur. Bu ifade (13) ve (25) ile verilen Cauchy probleminin çözümü olmaktadır.

Örnek 6:

$$u_t + uu_x = 0,$$

$$u(x,0) = x^2$$

ile verilen problemi göz önüne alalım Denklemin karakteristik sistemi

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{0}$$

olur. Karakteristik sistemin ara integralleri

$$c_1 = u, \quad c_2 = x - ut$$

olmaktadır. Ele aldığımız problemin çözümü

$$u(x,t) = \frac{1}{2t^2}(1 + 2xt \pm \sqrt{1 + 4xt})$$

olur.

1.1.7. Birinci Mertebeden Homojen Olmayan Kuazi Lineer Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

u fonksiyonu x_1, x_2, \dots, x_n değişkenlerine bağlı ve bilinmeyen bir fonksiyon olsun.

Aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$p_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + p_2(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + p_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u). \quad (29)$$

Burada p_1, p_2, \dots, p_n ve R x_1, \dots, x_n, u değişkenlerine bağlı, sürekli ve diferansiyellenebilir

fonksiyonlardır. (29) denklemi $\frac{\partial u}{\partial x_i} = q_i$ ($i = \overline{1, n}$) notasyonunda

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n = R. \quad (30)$$

olarak da yazılabilir. (30) denklemini çözmek için onu homojen denkleme indirgeyebiliriz.

Bunun için (29) denklemini sağlayan $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunu kapalı, yani,

$$V(u, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (31)$$

cinsinden arayalım. (31) ifadesinden yararlanarak

$$\frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0,$$

(32)

$$\dots$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} + \frac{\partial V}{\partial x_n} = 0$$

denklemlerini elde ederiz. Buradan,

$$q_i = - \frac{\partial V}{\partial x_i} / \frac{\partial V}{\partial u}, \quad (i = \overline{1, n})$$

ifadelerini buluruz. Elde ettiğimiz bu ifadeleri (29) da yerine yazarsak

$$\left[p_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} / \frac{\partial V}{\partial u} + p_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} / \frac{\partial V}{\partial u} + \dots + p_n \frac{\partial V}{\partial x_n} / \frac{\partial V}{\partial u} \right] = R$$

olur. Son ifadenin her iki tarafını $\left(- \frac{\partial V}{\partial u} \right)$ ile çarparsak

$$p_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \dots + p_n \frac{\partial V}{\partial x_n} + R \frac{\partial V}{\partial u} = 0 \quad (33)$$

elde ederiz. Görüldüğü gibi (33) denklemi V ye göre homojen denklemdir ve bu denklemin genel çözümü (31) ifadesi (29) denkleminin çözümü olduğundan dolayı, (33) denklemi de u nun yerine (31) den ele aldığımız ifadenin yerine u yu yazdığımız zaman x_1, x_2, \dots, x_n ve u değişkenlerine göre sağlanmak zorundadır.

Diğer yandan, (33) denklemi için karakteristik denklem sistemi

$$\frac{dx_1}{p_1} = \frac{dx_2}{p_2} = \dots = \frac{dx_n}{p_n} = \frac{dV}{R} .$$

dir. Bu denklemler sisteminin n tane bağımsız ilkel integrallerini

$$\psi_0(x_1, \dots, x_n) = c_0 ,$$

$$\psi_1(x_1, \dots, x_n) = c_1 ,$$

.....

$$\psi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = c_{n-1}$$

ile gösterelim. (33) denklemin genel çözümü

$$V = \phi(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1})$$

olur. Burada ϕ keyfi diferansiyellenebilir bir fonksiyondur.

Örnek 7:

$$u_t + uu_x = x ,$$

$$u(x, 0) = 1$$

ile verilen problemi göz önüne alalım. Denklemin karakteristik sistemi

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{u} = \frac{du}{x}$$

olur. Karakteristik sistemin ara integralleri

$$c_1 = e^{-t}(u + x) , \quad c_2 = u^2 - x^2$$

olmaktadır. Ele aldığımız problemin çözümü

$$u(x, t) = \frac{x + 2e^{-t} - xe^{-2t}}{1 + e^{-2t}}$$

olur.

1.1.8. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem için Periyodik Sınır Koşulu

Genelliği bozmadan, önce $0 \leq x \leq 1$ kapalı aralığında

$$u'' - q_0 u = -f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (34)$$

denkleminin

$$u(x+1) = u(x), \quad \forall x \text{ için} \quad (35)$$

periyodik koşullu çözümünü inceleyelim [9]. Burada $f(x)$ bilinen periyodik fonksiyondur.

(35) koşulu keyfi $x \in (0,1)$ için $x = 0$ noktasında aşağıdaki iki koşula denktir

$$u(0+0) = u(1-0), \quad u'(0+0) = u'(1-0). \quad (36)$$

Burada $u(a \pm 0)$ gösterimi ile u fonksiyonunun a noktasındaki sağ ve sol limitleri ifade edilmektedir. (34), (35) probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu göstermek kolaydır.

Bu çözüm için maksimum prensibine göre

$$\|u\|_c \leq \frac{\|f\|_c}{q_0}$$

değerlendirmesi mevcut olmaktadır. Kolaylık için önce $q_0 = 0$ olsun. Bu takdirde (34),

(36) problemi

$$u'' = -f(x), \quad u(0+0) = u(1-0), \quad u'(0+0) = u'(1-0)$$

cinsinden olur ve

$$\int_0^1 f(x) dx = 0$$

koşulu çerçevesinde çözülebilir. Ayrıca

$$\int_0^1 u(x) dx = 0 \quad (37)$$

koşulu çerçevesinde bir tek çözüme sahiptir. Gerçekten de, (34) denkleminin $q_0 = 0$ olduğu durumda genel çözümü

$$u(x) = c_1 x + c_2 - \int_0^x \left(\int_0^t f(\alpha) d\alpha \right) dt = c_1 x + c_2 - \int_0^x (x-t) f(t) dt$$

şeklinde olmaktadır. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. (36) koşulundan

$$\int_0^1 f(t) dt = 0, \quad c_1 = \int_0^1 t f(t) dt$$

olur, yani (36) koşulu yardımı ile $u(x)$ fonksiyonu c_2 sabit farklılığı ile elde edilir. (37) koşulunun varlığı çözümün tekliğini garanti etmektedir.

Şimdi (34), (36) probleminin sonlu fark karşılığını göz önüne alalım. Bunun için

$0 \leq x \leq 1$ aralığı $h = \frac{1}{N}$ adımı ile

$$\bar{\omega}_h = \{ x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N \}$$

ağı ile örtülsün ve $\bar{\omega}_h$ ağıнын keyfi düğüm noktasında (34) denklemini ve (36) koşulları sonlu farklara ayrıklaştırılsın. (35) koşulu

$$y_0 = y_N$$

şeklinde olur. $x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N-1$ düğüm noktalarında (34) denklemini

$$y_{\bar{x}x} - q_0 y = -\varphi(x_i), \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

olarak ayrıklaştırılsın. Burada y_i ve $\varphi(x_i)$ sırasıyla $u(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonlarının x_i düğüm noktasındaki ağ fonksiyonlarıdır.

$$u_{\bar{x},N} = u'(1-0) - 0,5hu''(1-0) + O(h^2),$$

$$u_{x,0} = u'(1+0) - 0,5hu''(1+0) + O(h^2)$$

türevleri göz önüne alınıp, bu formüllerde $u'' = q_0 u - f$ ifadeleri yerine konursa (34) den

$$u_{\bar{x},N} + 0,5h(q_0 u(1) - f(1-0)) = u'(1-0) + O(h^2),$$

$$u_{x,0} - 0,5h(q_0 u(0) - f(0+0)) = u'(0+0) + O(h^2)$$

elde edilir. Açıkta ki,

$$y_{x,0} - 0,5hq_0 y_0 + 0,5hf(0+0) = y_{\bar{x},N} + 0,5hq_0 y_N - 0,5hf(1-0) \quad (38)$$

denklemini

$$u'(0+0) = u'(1-0)$$

koşulunu $O(h^2)$ netliği ile ayrıklaştırmaktadır. Eğer $y_{N+1} = y_1$ olduğu dikkate alınırsa (38)

ifadesi

$$y_{\bar{x},N} - q_0 y_N = -\varphi_N, \quad \varphi_N = 0,5(f(1-0) + f(0+0))$$

şeklinde yazılabilir. Böylece (34), (36) probleminin

$$y_{\bar{x}x} - q_0 y = -\varphi(x), \quad x_i = ih, \quad i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$y_0 = y_N, \quad y_1 = y_{N+1}$$

sonlu fark karşılığı elde edilmiş olur.

1.1.9. Kararlılık ve Yakınsaklık

Zamana bağlı problemleri çözerken, ağıın zaman değişkenine göre adımlarında bir kattan diğer kata geçerken bir takım hatalar ortaya çıkar. Bu sebeple, ağıın bir katından diğer katına geçerken hesaplama sürecini devamlı olarak kontrol etmek gerekir. Eğer bu süreçteki zaman değişkenine göre oluşacak hata (yuvarlatma, yaklaşım hatası, vs.) artmıyorsa, sonlu fark yöntemi *kararlı yöntem* olarak adlandırılır [9].

$$Lu = f \quad (39)$$

$$\ell_j u = g_j \quad (40)$$

problemini vektörel olarak

$$\mathfrak{I}u = \phi \quad (41)$$

$$\mathfrak{I}u = \begin{pmatrix} Lu \\ \ell_j u \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} f \\ g_j \end{pmatrix}$$

biçiminde yazalım. (41) probleminin herhangi bir $\omega_{h\tau}$ ağıındaki sonlu fark karşılığı

$$\mathfrak{I}_{h\tau} u_{h\tau} = \phi_{h\tau} \quad (42)$$

dır. (42) eşitliğini koruyacak şekilde $[u]_{h\tau}$ ağ fonksiyonunu seçmek mümkün değildir. Bu ağ fonksiyonunu (42) denkleminde yerine yazdığımızda belli bir heyecanlanma ortaya çıkar.

$$\mathfrak{I}_{h\tau} [u]_{h\tau} = \phi_{h\tau} + \delta\phi_{h\tau} \quad (43)$$

Eğer her iki adım da sifıra yaklaştığında, yani $h, \tau \rightarrow 0$ iken $\delta\phi_{h\tau} \rightarrow 0$ olursa $\mathfrak{I}_{h\tau}$ sonlu fark operatörü \mathfrak{I} operatörüyle *uzlaşır* denir. $\mathfrak{I}_{h\tau}$ sonlu fark operatörünün \mathfrak{I} diferansiyel operatörüne yakınsaması $[u]_{h\tau}$ ağ fonksiyonunun sağladığı (43) denkleminin (42) denkleminde $\delta\phi_{h\tau}$ kadar değişimini gösterir. Böylece (42) probleminin $u_{h\tau}$ çözümü $\phi_{h\tau}$ fonksiyonunun herhangi bir küçük değişimine bağlı kalırsa ve $h, \tau \rightarrow 0$ iken $\delta\phi_{h\tau} \rightarrow 0$ olursa bu durumda $u_{h\tau} \rightarrow [u]_{h\tau}$ olacaktır. Diğer bir deyişle, $u_{h\tau}$ yaklaşım çözümü $[u]_{h\tau}$ gerçek çözümüne yakınsar. Bu söylediklerimizi bir kez daha matematiksel olarak anlatmak için yakınsaklığın tanımını verelim. Bu nedenle, $\omega_{h\tau}$ ağı üzerinde tanımlanmış lineer normlu ağ fonksiyonları uzayını göz önüne alalım. Bu uzayı $U_{h\tau}$ ile gösterelim. $\forall u_{h\tau} \in U_{h\tau}$ fonksiyonuna karşılık gelen $\|u_{h\tau}\|_{U_{h\tau}}$ sayısına ağ fonksiyonunun normu denir.

$u(x, t)$ sürekli fonksiyonunu ayrıklaştırdığımızda $\|u_{h\tau}\|_{U_{h\tau}}$ normunu sırasıyla maksimum normu ve L_2 deki metriğe göre iki şekilde tanımlayabiliriz:

$$\|u_{h\tau}\|_{U_{h\tau}} = \sup_h |u_{h\tau}(x_i, t_k)|$$

$$\|u_{h\tau}\|_{U_{h\tau}} = \left(h \sum_{i=0}^n |u_i|^2 \right)^{1/2}.$$

Bu norma göre, $a_h, b_h \in U_{h\tau}$ olmak üzere a_h nın b_h dan uzaklığı $\|a_h - b_h\|$ olarak tanımlanır.

Tanım 9: Eğer ağırlık adımları $h, \tau \rightarrow 0$ iken $\|[u]_{h\tau} - u_{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \rightarrow 0$ oluyorsa yaklaşık çözüm gerçek çözüme yakınsaktır denir [9].

Tanım 10: $\|u_h - [u]_h\| \leq ch^k$ eşitsizliği gerçekleşirse u_h nın $[u]_h$ ya yakınsama hızı h^k mertebededir denir [9]. Burada c ve k , h ya bağlı olmayan sabitlerdir.

Tanım 11: Eğer $h, \tau \rightarrow 0$ iken $\|\delta\phi_{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \rightarrow 0$ oluyorsa, $\mathfrak{I}_{h\tau} u_{h\tau} = \phi_{h\tau}$ sonlu fark denkleminin $\mathfrak{I}u = \phi$ denkleminin yaklaşımıdır denir [9].

Tanım 12: $\|\delta\phi_{h\tau}\| \leq ch^k$ eşitsizliği gerçekleşirse, $\mathfrak{I}_{h\tau}$ sonlu fark operatörünün \mathfrak{I} operatörüne yakınsaması h^k mertebededir denir [9].

Tanım 13: Eğer $\forall f_{h\tau} \in F_h$ için $\mathfrak{I}_{h\tau} u_{h\tau} = f_{h\tau}$ denkleminin tek bir çözümü var ve bu çözüm $\|u_{h\tau}\|_{U_{h\tau}} \leq c \|f_{h\tau}\|_{F_h}$ (c , h ya bağlı olmayan bir sabittir) eşitsizliğini gerçekliyorsa, $\mathfrak{I}_{h\tau}$ lineer operatörüne kararlıdır denir [9].

Sonlu fark denkleminin diferansiyel problemin yaklaşımı olduğu ancak, yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsamadığı gösterilebilir. Örneğin,

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = 0$$

$$u(0) = b$$

probleminde türevi çeşitli yollarla ayrıklaştırmak mümkündür,

$$4 \frac{u_{k+1} - u_{k-1}}{2h} - 3 \frac{u_{k+1} - u_k}{h} + Au_k = 0, \quad k = \overline{0, n-1}$$

$$u_0 = b.$$

Denklemin sonlu fark karşılığı problemin yaklaşımıdır ancak yakınsak değildir.

Teorem 2:(Lax Teoremi) Düzgün ifade edilmiş kısmi türevli diferansiyel denklem için yazılan sonlu fark karşılığının yakınsak olması için gerek ve yeter koşul yöntemin uzlaşan ve kararlı olmasıdır [9].

Örnek 8:

$$u' = -\alpha u, x > 0$$

$$u(0) = u_0, \alpha > 0$$

probleminin gerçek (analitik) çözümünü bulalım.

$$\frac{du}{dx} = -\alpha u \Rightarrow \frac{du}{u} = -\alpha dx \Rightarrow u = u_0 e^{-\alpha x}$$

$$|u| = |u_0 e^{-\alpha x}| \leq |u_0| |e^{-\alpha x}|, x \rightarrow \infty \Rightarrow |u(x)| \leq |u_0|.$$

$$\omega_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, n; h > 0\}$$

$$\frac{y_i - y_{i-1}}{h} + \alpha y_i = 0$$

$$y_0 = u_0$$

Bu denklemin şu şekilde yazabiliriz

$$y_i = s y_{i-1}, s = \frac{1}{1 + \alpha h} < 1$$

$$y_i = s^i y_0$$

$$y_i = s y_{i-1} = s(s y_{i-2}) = s(s(s y_{i-3})),$$

$$y_{i-1} = s y_{i-2}, y_{i-2} = s y_{i-3}, s < 1 \Rightarrow s^i < 1$$

$$|y_i| \leq |y_0|$$

olduğundan yöntemin çözümü kararlıdır.

Sonlu fark yöntemlerinin kararlılığını kontrol etmek için gereken yöntemlerden birisi de Fourier analize dayanan kararlılığın spektral kriteri yöntemidir. Bu yöntemi detaylı şekilde ifade etmek için, göz önüne alınan \mathfrak{I} operatörünün ω_{hr} ağıının keyfi (x_m, t_n) düğüm noktasında sonlu fark karşılığının

$$\mathfrak{I}_h u_h(x_m, t_n) = \sum_{\ell, k} a_{\ell k} u_{m+\ell}^{n+k} = 0 \quad (44)$$

olduğunu varsayalım ve (1) denkleminin özel çözümünü

$$u_m^n = (\lambda(\varphi))^n e^{im\varphi} \quad (45)$$

biçiminde arayalım. (45) ifadesi Fourier modlarının sonlu fark karşılığı olmaktadır.

Spektral Kararlılık Kriteri: Eğer $h, \tau \rightarrow 0$ iken keyfi φ ler için

$$|\lambda(\varphi)| \leq e^{c\tau}$$

olacak biçimde sonlu bir c sayısı varsa, (44) sonlu fark yaklaşımı kararlıdır. Aksi durumda (44) sonlu fark yaklaşımı çözümün elde edilmesine olanak vermez [9].

Örnek 9:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (46)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (47)$$

$c > 0$ olması halinde (46), (47) problemini

$$\frac{y_j^{k+1} - y_j^k}{\tau} + c \frac{y_{j+1}^k - y_j^k}{h} = 0 \quad (48)$$

$$u_{j,0} = u_0(x_j) \quad (49)$$

şeklinde ayırklaştıralım. (48) denklem sistemini

$$y_j^{k+1} = -\gamma y_{j+1}^k + (1 + \gamma) y_j^k \quad (50)$$

olarak yazabiliriz, burada $\gamma = \frac{c\tau}{h}$ dir. (50) denklem sisteminin özel çözümünü

$$y_j^k = q^k e^{ij\varphi}, \quad \varphi \neq 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (51)$$

biçiminde arayalım. (51) ifadesi (50) de yerine yazılırsa

$$q = -\gamma e^{i\varphi} + 1 + \gamma$$

elde edilir. $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ olduğu göz önüne alınarak

$$|q|^2 = [1 + (1 - \cos \varphi)\gamma]^2 + \gamma^2 \sin^2 \varphi = 1 + 4\gamma(1 + \gamma) \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

bulunur. Buradan $|q| > 1$ olduğu görülür. (51) ifadesinden

$$|y_j^k| = |q^k| |e^{ij\varphi}| = |q^k|$$

dir, yani $k \rightarrow \infty$ iken $|q|^k \rightarrow \infty$ dir. Bu ise çözümün kararsız olduğunu gösterir.

Örnek 10: (46) denkleminin içerdiği $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevi merkezi fark formülü ile

ayırklaştırılırsa

$$\frac{y_{j,k+1} - y_{j,k}}{\tau} + c \frac{y_{j+1,k} - y_{j-1,k}}{2h} = 0 \quad (52)$$

elde edilir. (52) sistemi için yukarıdakine benzer işlemler yapılırsa

$$q = -\gamma e^{i\varphi} + \gamma e^{-i\varphi} + 1$$

bulunur. Buradan $|q|^2 = 1 + 4\gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ olur, $|q| > 1$ olduğundan $k \rightarrow \infty$ iken $|q|^k \rightarrow \infty$ dir.

Böylece (46) denklemi için yazılmış ileri ve merkezi fark karşılıklarından elde edilen çözümlerin kararsız oldukları ortaya çıkar.

Örnek 11: Şimdi aşağıdaki geriye sonlu fark karşılığını göz önüne alalım

$$\frac{y_j^{k+1} - y_j^k}{\tau} + c \frac{y_j^k - y_{j-1}^k}{h} = 0. \quad (53)$$

(53) sistemini

$$y_j^{k+1} = (1 - \gamma)y_j^k + \gamma y_{j-1}^k \quad (54)$$

biçiminde yazabiliriz. Yukarıdaki işlemler (54) denklem sistemi için uygulanırsa $q = 1 - \gamma + \gamma e^{-i\varphi}$ elde edilir ve buradan

$$|q|^2 = (1 - \gamma)^2 + 2\gamma(1 - \gamma)\cos\varphi = 1 - 4\gamma(\gamma + 1)\sin^2 \frac{\varphi}{2} < 1$$

elde edilir. Buradan $|y_j^{k+1}| \leq |y_j^k|$ olur. Bu ise (53) sistemi ile bulunan çözümün kararlı olduğunu göstermektedir.

1.1.10. Sabitlenmiş Katsayılar Kriteri

Bazı durumlarda diferansiyel denklem için yazılmış sonlu fark karşılığının yaklaşım çözümünün söz konusu diferansiyel denklemin çözüme yakınsak olduğunu teorik şekilde ispatlamak mümkün değildir. Örneğin, bazı nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç ve sınır değer problemlerinde (tezde 2.3, 2.4, 2.5 bölümlerinde göz önüne alınan örnekler gibi) kararlılık problemini incelemek için sabitlenmiş katsayılar kriterine dayanan bir yöntem kullanılır. Elde edilen yaklaşım çözüm deneysel veriler veya bilinen bir özel çözümle karşılaştırılarak test edilir. Sabitlenmiş katsayılar kriteri aşağıdaki prensiplere dayanır [9]:

1. Sonlu fark denkleminin karşılık gelen ve varyasyonda yazılmış denklem (yani birbirine çok yakın iki çözümün farkı için oluşturulan denklem) verilir. Ele alınan varyasyon denklemi lineer denklemdir. Lineer denklemler için varyasyonda yazılmış denklemle incelenmekte olan denklem aynı olmaktadır.

2. Çözümün tanım bölgesinde herhangi bir P noktası göz önüne alınır. Denklemin katsayıları bu noktada sabitleştirilir. Eğer denklem nonlinear ise söz konusu denklemin

katsayısı bilinmeyen fonksiyona bağlı olur ve ele alınan denklemin yaklaşım çözümü P ye bağlı olur. Bu durumda

$$\mathfrak{I}_h^P(\delta u_h) = 0 \quad (55)$$

denklemini incelenir.

3. (55) denklemini lineer denklem olduğundan bilinen bir kararlılık kriteri uygulanarak bu problemin kararlılığı incelenir. Sonlu fark denkleminin çözümünün $\varphi(h, P) \geq 0$ olması durumunda kararlı olduğunu varsayalım. (Bu koşul P noktasına bağlıdır).

4. Eğer $\varphi(h, P) \geq 0$ koşulunun gerçekleşmesinden $\varphi(h) \geq 0$ koşulunun da gerçekleşmesini sağlıyorsa, $\varphi(h) \geq 0$ koşulu kararlılık koşulu olarak kabul edilir.

Bu söylediklerimizi nonlinear birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem için Cauchy problemi üzerinde göstermek için aşağıdaki problemi göz önüne alalım,

$$u_t + (\varphi(x, t, u))_x - \psi(x, t, u) = 0, \quad (56)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (57)$$

u_m^n ile $u(x, t)$ fonksiyonunun (x_m, t_n) noktasındaki yaklaşım çözümünü gösterirsek (56), (57) probleminin sonlu fark karşılığı

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + \frac{\varphi(x_m, t_n, u_m^n) - \varphi(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n)}{h} - \psi(x_m, t_n, u_m^n) = 0 \quad (58)$$

olarak bulunur. $v_m^n = u_m^n + \delta_m^n$ (58) denkleminin diğer ağ çözümü olsun, diğer bir deyişle δ_m^n iki yaklaşım çözümün farkıdır. v_m^n (58) de yerine konulursa

$$\begin{aligned} & \frac{(u_m^{n+1} + \delta_m^{n+1}) - (u_m^n + \delta_m^n)}{\tau} - \psi(x_m, t_n, u_m^n + \delta_m^n) + \\ & + \frac{\varphi(x_m, t_n, u_m^n + \delta_m^n) - \varphi(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n + \delta_{m-1}^n)}{h} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz bu denklemden (58) denklemini çıkarırsak

$$\begin{aligned} & \frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\tau} + \frac{\varphi(x_m, t_n, u_m^n + \delta_m^n) - \varphi(x_m, t_n, u_m^n)}{h} \\ & - \frac{\varphi(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n + \delta_{m-1}^n) - \varphi(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n)}{h} \\ & - \psi(x_m, t_n, u_m^n + \delta_m^n) - \psi(x_m, t_n, u_m^n) = 0 \end{aligned} \quad (59)$$

bulunur. Aşağıdaki ifadeler göz önüne alınırsa

$$\varphi(x_m, t_n, u_m^n + \delta_m^n) - \varphi(x_m, t_n, u_m^n) \approx \varphi_u(x_m, t_n, u_m^n) \delta_m^n,$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n + \delta_{m-1}^n) - \varphi(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n) &\approx \varphi_u(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n) \delta_{m-1}^n, \\ \psi(x_m, t_n, u_m^n + \delta_m^n) - \psi(x_m, t_n, u_m^n) &\approx \psi_u(x_m, t_n, u_m^n) \delta_m^n.\end{aligned}$$

δ_m^n için

$$\frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\tau} + \frac{\varphi_u(x_m, t_n, u_m^n) \delta_m^n - \varphi_u(x_{m-1}, t_n, u_{m-1}^n) \delta_{m-1}^n}{h} - \psi_u(x_m, t_n, u_m^n) \delta_m^n = 0 \quad (60)$$

sonlu fark denklemi elde edilir. (60)'a (59) denkleminin varyasyonda yazılmış denklemi denir. φ_u ve ψ_u katsayılarının herhangi bir noktadaki değerini yazarak bu fonksiyonları sabitleştirelim (60) denklemini sabitlenmiş katsayılarla aşağıdaki şekilde

$$\frac{\delta_m^{n+1} - \delta_m^n}{\tau} + a \frac{\delta_m^n - \delta_{m-1}^n}{h} - b \delta_m^n = 0 \quad (61)$$

veya

$$\delta_m^{n+1} = \delta_m^n \left(1 - \frac{a\tau}{h} + b\tau\right) + \delta_{m-1}^n a \frac{\tau}{h}$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$|\delta_m^{n+1}| \leq \max_m |\delta_m^n| \left(\left|1 - \frac{a\tau}{h}\right| + |b\tau| + \left|a \frac{\tau}{h}\right| \right) \quad (62)$$

(62) eşitsizliği keyfi m ler için korunduğundan

$$\max_m |\delta_m^{n+1}| \leq \max_m |\delta_m^n| \left(\left|1 - \frac{a\tau}{h}\right| + |b\tau| + \left|a \frac{\tau}{h}\right| \right)$$

dir. $\max_m |\delta_m^n| = \|\delta^n\|_c$ notasyonuyla (62) denklemi

$$\|\delta^{n+1}\|_c \leq \left(\left|1 - \frac{a\tau}{h}\right| + |b\tau| + \left|a \frac{\tau}{h}\right| \right) \|\delta^n\|_c$$

biçiminde yazılır. Eğer $0 \leq a \frac{\tau}{h} \leq 1$ ise

$$\left|1 - \frac{a\tau}{h}\right| + |b\tau| + \left|a \frac{\tau}{h}\right| = \left(\left|1 - \frac{a\tau}{h}\right| + |b\tau| + \left|a \frac{\tau}{h}\right| \right) + |b\tau| = 1 + |b\tau| \leq e^{|b|\tau}$$

olur. Böylece

$$\|\delta^{n+1}\|_c \leq e^{|b|\tau} \|\delta^n\|_c$$

eşitsizliği elde edilir. Aşağıdaki ifadeleri dikkate alarak

$$\|\delta^1\|_c \leq e^{b|\tau} \|\delta^0\|_c,$$

$$\|\delta^2\|_c \leq e^{b|\tau} \|\delta^1\|_c \leq e^{b|2\tau} \|\delta^0\|_c,$$

$$\|\delta^3\|_c \leq e^{b|\tau} \|\delta^2\|_c \leq e^{b|3\tau} \|\delta^0\|_c,$$

.....

$$\|\delta^N\|_c \leq e^{b|\tau} \|\delta^{N-1}\|_c \leq e^{b|N\tau} \|\delta^0\|_c$$

ve $n\tau \leq T$ olduğunda

$$\|\delta^n\|_c \leq e^{b|T} \|\delta^0\|_c$$

elde ederiz. Bu ise (56), (57) probleminin başlangıç verilerine göre kararlılık koşulu

olmaktadır. Böylece, (61) sonlu fark karşılığının çözümünün kararlı olması $0 \leq a \frac{\tau}{h} \leq 1$

koşulu çerçevesinde ispatlanmış olur. Değişmez katsayılar kriterine göre (58) sonlu fark karşılığının çözümünün kararlılığı

$$0 \leq a(x_m, t_n, u_m^n) \frac{\tau}{h} \leq 1$$

koşulu çerçevesinde gerçekleşir [9].

1.1.11. Kesme Hatası

$$Lu = f, \quad u = u(x, y) \in D \quad (63)$$

$$u|_{\partial D} = \varphi(x, y) \quad (64)$$

iki boyutlu sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $\varphi(x, y)$ bilinen fonksiyondur.

$u(x + \Delta x, y)$ nin (x, y) civarındaki Taylor serisi

$$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x, y) + O[(\Delta x)^4] \quad (65)$$

dır. Bu bağıntı Δx ile bölünürse

$$\frac{\partial u}{\partial x} = [u(x + \Delta x, y) - u(x, y)]/\Delta x + O(\Delta x) \quad (66)$$

elde edilir. (66) denkleminin ileri fark karşılığı (x, y) noktasında $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevine birinci

mertebeden

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx [u(x + \Delta x, y) - u(x, y)] / \Delta x$$

yaklaşımını verir. (66) denklemi

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{h} [u_{i+1,j} - u_{i,j}] + O(h) \quad (67)$$

biçiminde de yazılabilir. Buradaki $O(h)$ notasyonu yaklaşımın kesme hatasını göstermektedir.

(67) ileri fark yaklaşımına alternatif olarak geri fark yaklaşımı da benzer şekilde verilebilir. Bu durumda $u(x - \Delta x, y)$ nin (x, y) civarındaki Taylor serisi

$$u(x - \Delta x, y) = u(x, y) - \frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (\Delta x)^2 - \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} (\Delta x)^3 + O[(\Delta x)^4] \quad (68)$$

dır. Bu bağıntı Δx ile bölünürse

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{1}{h} [u_{i,j} - u_{i-1,j}] + O(h)$$

elde edilir. (65) denkleminde (68) denklemi çıkarılarak, (x, y) noktasında $\frac{\partial u}{\partial x}$ türevine

daha yüksek mertebeden bir yaklaşım geliştirilebilir

$$u(x + \Delta x, y) - u(x - \Delta x, y) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^3}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + O[(\Delta x)^5]$$

Bu ifade $2\Delta x$ ile bölünerek

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

elde edilir.

(65) ve (68) denklemlerinden ikinci mertebeden kısmi türevler için yaklaşım

$$\frac{1}{(\Delta x)^2} [u(x + \Delta x, y) - 2u(x, y) + u(x - \Delta x, y)] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + O[(\Delta x)^2]$$

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + O(h^2)$$

olarak bulunur [9].

1.2. Literatür Araştırması

Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler türev kavramından az bir süre sonra ortaya çıkmıştır. Fiziğin, geometrinin vb. bilim dalının bir çok problemlerinin çözümleri birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem için konulmuş başlangıç değer problemine indirgenmektedir. Bu türden denklemlerin lokal teorisi XVIII. asırda oluşturulmuştur. Söz konusu problemlerin çoğunda serbest değişkenlerin birini zaman değişkeni oluşturur ve söz konusu denklem ile modellenen fiziksel olay uzun zaman zarfında devam eder. Zamanın büyük değerlerinde problemin klasik çözümünde bazı özellikler ortaya çıkabilir. Bu özelliklerden en önemlileri zayıf süreksizlik (çözümün kendisi sürekli, türevi ise süreksiz), “blow-up” yani güçlü singularite (çözümün kendisi ikinci tür süreksizliğe sahip) ve darbe dalgaları (çözümün kendisi süreksiz) olmaktadır.

Açıktır ki, bahsi geçen süreksiz çözümler ortaya çıktığı zaman süreksiz fonksiyonların türevleri kavramını da geliştirmek zorunluluğu ortaya çıkar. Ayrıca, bağımsız olarak süreksiz başlangıç koşulları da bazı problemlerde karşımıza çıkabilir. Bu tür problemlerin realizasyonu ilk kez 1950 de Hopf'un çalışmasında verilmiştir [10]. Bu çalışmada

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \quad (69)$$

denklemini

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (70)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde incelenmiştir. Burada $u_0(x)$ keyfi sınırlı ölçülebilir fonksiyondur.

(69) denkleminin doğal genişlemesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (71)$$

gibi olmaktadır. (71) denklemini için konulan Cauchy probleminin lokal olmayan teorisinde önemli sonuçlar Oleinik, O. A. [11], Tichonoff, A. N., Samarskii, A. A. [12], Lax, P. D. [13], Gelfand, I. [14], vs. tarafından verilmiştir. Söz konusu teorisinin ileri araştırmaları Smoller, J. A. [15], Kruskov, S. [16] ve Goritski, A. A. [17], vs. tarafından yapılmıştır.

Bu çalışmaların esas amacı zayıf çözüm kavramını kullanarak bu problemlerin çözümlerinin elde edilmesi ve çözümlerin özelliklerinin incelenmesidir. Burada esas olarak

Riemann problemi göz önüne alınır. Öyle ki, bu problemin çözümü süreksiz fonksiyon (darbe dalgası) cinsinden ifade edilir.

Ayrıca belirtelim ki, (71) cinsinden denklem ile suyun kumlu ortamda akış problemi ve trafik problemleri de modellenebilmektedir [15], [17], [18], [19], [20].

[21] ve [22] de (71) denklemi için konulmuş başlangıç-değer ve sınır-değer problemlerinin zayıf çözümünü bulmak için bir yöntem önerilmiştir.

Yukarıda sözünü ettiğimiz yazarların çalışmalarında karakteristikler yöntemi ile elde edilen çözümler genelde kapalı fonksiyon cinsinden ifade edilir ve bir çok durumlarda söz konusu çözümden pratik amaçlar için kullanım zorluğu ortaya çıkar. Bu nedenle (71) denklemi için yazılan Cauchy probleminin çözümü için sayısal algoritmalar oluşturma zorunluluğu ortaya çıkar. Bu durum [13], [23], [24], [25], vs. gibi çalışmalarda araştırılmıştır. Söz konusu problemin sayısal çözümlerinin detaylı analizi [26] cilt I de verilmiştir.

(71) cinsinden denklemlerin sayısal çözümü f'' işaretini değiştirmediği durumda [27], vb. çalışmalarda incelenmiştir.

Literatürde bulunan sayısal çözümleri incelerken, onları üç gruba ayırmak olasıdır. Bunlardan birinci türü genelde karakteristikler yöntemine dayanan metotlar, [25], [28], [29], vs. oluşturur. İkinci tür yöntemler (bunlara homojen algoritmalar denir) problemin çözümünün özelliklerini dikkate almayarak, göz önüne alınan denklemi direk olarak sonlu farklara ayırklaştırmakla bir cebirsel denklemler sistemine indirgeyerek, elde edilen denklemler sistemini cebirsel yöntemlerin birisi ile çözen yöntemlerdir [23], [27].

Üçüncü tür yöntemler ise zayıf çözüm kavramına dayanarak göz önüne alınan denklemi integral şekline dönüştürmek, sonra ise integral şeklinde yazılmış denklemi sonlu farklara ayırklaştırmakla ele alınmış yöntemlerdir [13], [22], [23], [30], [31], [32], [33] vb.

Genelde biz (71) cinsinden denklemler için açık Euler cinsi sonlu fark yöntemlerinden söz ediyoruz. Bu yöntemler bir kural olarak Courant – Friedrichs – Lewy

(CFL koşulu) $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|v|}$ koşulu çerçevesinde kararlı olur, burada $|v|$ hızın maksimum

değerini ifade etmektedir.

Literatürde açık olmayan sonlu fark yöntemleri de vardır. Ancak bu yöntemler için CFL koşulu gerekmez [34]. Bu da dalğanın dağılma dinamiği yapısına aykırı olmaktadır. Çünkü, ağın düğüm noktalarında matematiksel dalğanın dağılım hızı, fiziksel dağılım hızından fazla olmaktadır. Bu da sebebiyet prensibinin bozulması demektir.

[21], [22] de hidrodinamikte, aerodinamikte ve mühendisliğin diğer alanlarındaki problemlerde sık sık karşılaşılan nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemin fiziksel özelliklerini doğru ifade eden üzümlerin bulunması için süreksiz fonksiyonlar sınıfında bir yöntem geliştirilmiştir. Bu nedenle esas problemde bulunmayan avantajlara sahip özel yardımcı problemler içerilir. şöyle ki, yardımcı problemin üzümünün diferansiyellenebilme özelliği esas problemin üzümünün diferansiyellenebilme özelliğinden fazla olmaktadır. Bu zellik yardımcı problemi zmek için ekonomik ve pratik zm algoritmalarına imkan vermektedir. Yardımcı problemin üzümünden esas problemin zmne dönüş yapmak için gereken teoremler ispatlanmıştır. Ayrıca yardımcı problem daha yüksek mertebeden algoritmalar oluşturmaya da olanak tanımaktadır. Geliştirilmiş yöntemin diğer avantajı çok boyutlu problemlere de kolayca uygulanabilmesidir.



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR ve BULGULAR

2.1. Geliştirilen Yöntemin Genel Yapısı ve Bazı Lineer Denklemler İçin Uygulanması

Nonlinear denklemler için (5) ifadesine benzer tanımların verilmesi her zaman mümkün olmamaktadır. Çünkü nonlinear denklem için adjoint denklemi yazmak her zaman olası değildir.

Bazı sınıf nonlinear denklemlerde zayıf çözümün bulunması için [21], [22], [35] ve [36] da bir yöntem önerilmiştir.

Söz konusu yöntemin temel yapısını açıklamak için, aşağıdaki nonlinear kısmi türevli denklemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu. \quad (72)$$

Burada L diferansiyel operatörü u ya uygulanan, aşikar olarak x ve t ye bağlı olmayan bir diferansiyel ifade olmaktadır.

L operatörünün

$$L = M\mathfrak{I}$$

olacak biçimde iki operatörün çarpımı olarak yazıldığını varsayalım. Burada M ve \mathfrak{I} , L operatörünü faktörize eden operatörler olup, aşağıdaki özelliklere sahiptirler:

(i) M operatörünün tersi vardır, yani M^{-1} mevcuttur,

(ii) $\mathfrak{I}(Mv) \in C^1(D)$ dir.

Aşağıdaki biçimde tanımlanmış denkleme

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mathfrak{I}(Mv)$$

yardımcı denklem ismini verelim.

Yardımcı denklemin çözümü ile esas denklemin çözümü arasındaki ilişki

$$v = M^{-1}u \quad (73)$$

eşitliği ile ifade edilebilir. (73) denkleminden görüldüğü gibi içerdiğimiz yardımcı problem tek olarak tanımlanmamaktadır. En önemlisi de, herhangi bir pratik problemi incelerken yardımcı problemin çözümlerinden fiziksel yararlı olan tek bir çözümü özel

olarak belirtmek şarttır. Ayrıca da (73) formülünün özel olarak ispatlanması gerekmektedir.

Örnek 12: (72) denklemindeki L operatörünü $L \equiv a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ olarak ele alalım. O

zaman (72) denklemini, telin küçük titreşimlerini ifade eden ikinci mertebeden lineer dalga denklemini olur, yani

$$\square \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x^2}$$

dır. Dolayısı ile aşağıdaki denklemini göz önüne alalım

$$\square u = 0. \quad (74)$$

(74) denkleminin genel çözümünü yukarıda önerilen yardımcı problem yardımı ile araştıralım. Bundan dolayı $\square = AB$ cinsinden yazalım, burada

$$A = \frac{\partial}{\partial t} - a \frac{\partial}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \quad (75)$$

olmaktadırlar. A^{-1} in mevcut ve $AB = BA$ olduğunu göstermek oldukça kolaydır; yani A ve B komütatif operatörlerdir (genelde $AB \neq BA$ dır).

Eğer (75) dikkate alınmakla beraber (74) denkleminin her iki tarafına A^{-1} operatörünü uygularsak

$$Bu = A^{-1}(0)$$

elde ederiz.

$$\text{Ker } A = \left\{ u = f(x + at) : f \in C^1(Q_T) \right\}$$

olduğu kolayca ispatlanabilir. Burada $Q_T = (-\infty, \infty) \times [0, T)$ dır.

Gerçekten de $Af = 0$, buradan $f \in \text{Ker } A$ dır.

Şimdi aşağıdaki denklemin genel çözümünü bulalım

$$Bu \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = f(x + at) \quad (76)$$

burada $f \in C^1(Q_T)$ keyfi bir fonksiyondur. (76) denkleminde

$$\xi = x + at, \quad \eta = x - at$$

değişken dönüşümü yapılırsa, (76) nın çözümü olarak

$$u(\xi, \eta) = g(\xi) + f(\eta)$$

ifadesi elde edilir. En son ifadeyi (x, t) değişkenlerine bağlı olarak yazarsak, telin titreşim denklemini için literatürden bilinen

$$u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$$

genel çözümünü elde etmiş oluruz.

Örnek 13: $Q \subseteq R^2$ açık bir bölge olsun. Keyfi $u(x, y) \in C^{2,2}(Q)$ fonksiyonları için

$$Lu \equiv x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (77)$$

diferansiyel ifadesi tanımlıdır ve $Lu \in C(Q)$ dır. Şimdi Q da aşağıdaki denklemi göz önüne alalım

$$Lu(x, y) = F(x, y). \quad (78)$$

(77) denkleminin $y \neq x$ olduğunda hiperbolik, $y = x$ olduğunda ise parabolik olduğu açıktır. Dolayısıyla (77) denklemi Q da değişken türlü denklemdir.

Aşağıdaki şekilde tanımlanan

$$A. = x \frac{\partial \cdot}{\partial x} + y \frac{\partial \cdot}{\partial y}, \quad (79)$$

$$B. = \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial y} \quad (80)$$

operatörlerini göz önüne alalım.

$Bu \in C^1(Q)$ olduğundan, $A(Bu)$ operatörü $C(Q)$ da tanımlı olup, $AB(u) = A(Bu)$ sağlanır. Aynı yolla BA operatörü de tanımlanabilir, fakat $AB \neq BA$ dır. Yani (79) ve (80) ifadeleri ile tanımlanan A ve B operatörleri komütatif değildir. (79) ve (80) dikkate alınrsa (78) bağıntısını aşağıdaki gibi de yazabiliriz

$$Lu \equiv BAu = F(x, y). \quad (81)$$

Amacımız A ve B operatörlerinin komütatif olmadığı durumda (78) denkleminin genel çözümlerini ele almaktır. Kolaylık için öncelikle (81) ifadesine karşılık gelen homojen denklemi göz önüne alalım. B operatörünün çekirdeğini bulmak zor değildir. $F(x, y) = 0$ olduğu durumda (81) ifadesine B^{-1} operatörünü uygularsak

$$Au = B^{-1}(0) \quad (82)$$

olur. Diğer yandan,

$$\text{Ker } B = \{u = f(y - x) \mid f \in C^1(Q), x, y \in Q\}$$

dır. Gerçekten de $Bf = 0$ dır. Birinci mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem öyle bir eğri tanımlar ki, bu eğri üzerinde denklemin çözümü sabit kalmaktadır [15], [17], [18], [37], [38], [39], [40], [41]. Böyle eğrilere karakteristik denir.

$$\xi = y - x \quad (83)$$

B operatörünün karakteristik eğrisi olmaktadır. $Ker B$ dikkate alınrsa (82) denklemini şöyle yazabiliriz

$$Au = f(y - x) \quad (84)$$

A operatörü de bir karakteristik eğri belirlemektedir. Bu eğrinin denkleminin

$$\eta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \quad (85)$$

olduğunu görmek zor değildir. (83), (85) dönüşümünün Jakobiyeni

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \left[\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right]^{-1} = \frac{y - x}{x^2}$$

denklemin hiperbolik bölgesinde sıfırdan farklı olmaktadır. (83) ve (85) den

$$x = \frac{\xi}{\eta - 1},$$

$$y = \frac{\xi\eta}{\eta - 1}, \quad \eta \neq 1$$

elde ederiz. (ξ, η) koordinatlarında (84) denkleminin çözümü kolayca ele alınabilir.

Böylelikle (81) denkleminin genel çözümü aşağıdaki

$$u(x, y) = \Phi(y - x) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

gibi ele alınır. Burada Φ ve Ψ iki kez sürekli diferansiyellenebilen keyfi fonksiyonlardır.

Böylelikle L operatörünü öyle iki A ve B operatörlerine faktörize ettik ki, bu operatörlerin her birisi (81) denkleminin bir reel karakteristiğini ortaya çıkarabilir. Bu karakteristikler (81) denkleminin çözümünün tanım alanını belirlerler.

(83) ve (85) ifadeleri (81) e karşılık gelen karakteristik diferansiyel denklem sisteminin

$$\frac{dy}{dx} = 1,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

çözümleridir.

Şimdi farzedelim ki, $F \neq 0$ dır. Bu durumda

$$B\varphi(x, y) = F(x, y) \quad (86)$$

denklemin genel çözümünü bulalım.

Teorem 1' e göre, eğer

$$\psi_0(x, y, \varphi) = c_0 \text{ ve } \psi_1(x, y, \varphi) = c_1 \quad (87)$$

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{d\varphi}{F}$$

sisteminin birinci integralleri ise bu taktirde keyfi diferansiyellenebilen f fonksiyonu için

$$f = f(\psi_0, \psi_1) \quad (88)$$

(86) denkleminin genel çözümüdür.

Gerçekten de, öncelikle ψ_0 ve ψ_1 fonksiyonlarının (86) denklemini sağlar:

$$V(\varphi, x, y) = 0 \quad (89)$$

fonksiyonu (86) denkleminin kapalı çözümü olsun.

$$p = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

ile gösterelim. p ve q yu (89) dan bulalım

$$p = -\frac{\partial V}{\partial x} \Big/ \frac{\partial V}{\partial \varphi}, \quad q = -\frac{\partial V}{\partial y} \Big/ \frac{\partial V}{\partial \varphi}$$

o zaman V fonksiyonu

$$LV \equiv \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + F \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0$$

denklemini korumaktadır.

Eğer $\psi_i(\varphi, x, y) = c_i$, ($i = 0, 1$) fonksiyonlarında x , y ve φ nin yerine (86) denklemini sağlayan herhangi bir fonksiyonlar yazılırsa (87) fonksiyonlarının sağ tarafları x e bağlı fonksiyonlar olmaktadırlar. (87) ifadelerini diferansiyellersek

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} + F \frac{\partial \psi_i}{\partial \varphi} \equiv 0, \quad (i = 0, 1)$$

elde ederiz.

Şimdi (88) fonksiyonunun (86) denklemini sağladığını gösterelim. Eğer

$$L[f] = \frac{\partial f}{\partial \psi_0} L[\psi_0] + \frac{\partial f}{\partial \psi_1} L[\psi_1]$$

olduğunu dikkate alırsak $f = f(\psi_0, \psi_1)$ fonksiyonunun (86) yı sağladığı kolayca görülür.

$F(x, y)$ fonksiyonunun özel durumlarında $\varphi(x, y)$ için açık ifadeler bulunabilir.

Örneğin $F(x, y) = F_1(x)$ olursa, keyfi diferansiyellenebilen Φ fonksiyonları için

$$\varphi(x, y) = \int F_1(x) dx + \Phi(y - x) \quad (90)$$

biçimindeki ifadeler (86) denkleminin çözüm kümesini oluşturmaktadırlar. Aynı yolla gösterilebilir ki, $F(x, y) \equiv F_2(y)$ olursa

$$\varphi(x, y) = \int F_2(y) dy + \Phi(y - x) \quad (91)$$

biçimindeki fonksiyonlar da (86) denkleminin genel çözümü olmaktadır. (86) denkleminin genel çözümü bulunduktan sonra

$$Au \equiv x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x, y) \quad (92)$$

denkleminin çözümlerini elde etmek çok daha kolaydır. Eğer $U(x, y, u) = 0$ fonksiyonu (92) denkleminin kapalı çözümü ise, U için

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} + \varphi \frac{\partial U}{\partial u} = 0 \quad (93)$$

homojen denklemini sağlanmaktadır.

Benzer şekilde Teorem 1 ile, eğer

$$\varphi_0(x, y, u) = c_1 \text{ ve } \varphi_1(x, y, u) = c_2$$

(93) e karşılık gelen Lagrange denklemler sisteminin çözümü ise, bu taktirde keyfi diferansiyellenebilen q fonksiyonu için

$$q = q(\varphi_0, \varphi_1) \quad (94)$$

ifadesinin (92) denkleminin genel çözümü olduğunu söyleyebiliriz.

Özel durumlarda, eğer $\varphi(x, y)$ fonksiyonu olarak (90), (91) ifadelerini dikkate alırsak (92) denkleminin çözümü olarak sırasıyla

$$u(x, y) = \Phi(y - x) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right) + \int \frac{\bar{F}_1(x)}{x} dx, \quad (95)$$

$$u(x, y) = \Phi(y - x) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right) + \int \frac{\bar{F}_2(y)}{y} dy \quad (96)$$

gibi fonksiyonları ele almış oluruz, burada

$$\bar{F}_1(x) = \int F_1(x) dx, \quad \bar{F}_2(y) = \int F_2(y) dy$$

dır.

Eğer L operatörü olarak ikinci mertebeden dalga operatörünü, yani

$$L \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

göz önüne alırsak, L operatörünü kolayca

$$L = A \cdot B, \quad A = \frac{\partial \cdot}{\partial t} + c \frac{\partial \cdot}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial \cdot}{\partial t} - c \frac{\partial \cdot}{\partial x}$$

şeklinde faktörize etmek mümkündür. O zaman A ve B operatörleri $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ gibi iki reel karakteristikleri belirlemektedirler.

Önerilmiş yöntem L operatörü parabolik tür olduğu durumda

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

cinsinden olan denklemlerin genel çözümlerinin bulunması için de kolayca uygulanabilir.

Bu durumda $A = B = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ olmaktadır.

Önerilmiş yöntem, göz önüne alınan kısmi türevli diferansiyel denklemi oluşturan operatörü faktörize etmekle denklemin mertebesini düşürmeye imkan sağlamaktadır. Yardımcı problem, ele alınan esas problemi kolayca çözmeye olanak tanır. Söz konusu yöntem kısmi türevli nonlinear diferansiyel denklemlerin sayısal çözümlerinin bulunmasında da büyük önem taşımaktadır. Operatörün faktörize edilmesiyle problem, analitik çözümü kolayca bulunabilen denklemlere indirgenmiş olur.

[21] ve [35] de, önerilmiş yöntem sırasıyla bir boyutlu nonlinear dalga ve KdV denklemlerine uygulanmıştır.

Bilindiği gibi, birinci mertebeden nonlinear dalga denkleminin çözümü, yeri önceden bilinmeyen birinci tür süreksizlik noktalarına sahiptir. Söz konusu süreksizlik noktaları fiziksel olarak darbe dalgaları gibi yorumlanır. [21], [22], [42] gibi çalışmalarda birinci mertebeden nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklem için Cauchy ve sınır değer problemlerinin gerçek ve sayısal çözümleri incelenmiştir. Ayrıca çözümün elde edilmesi için etkin (efektif) algoritmalar önerilmiştir.

Tezin 2.2. bölümünde birinci mertebeden nonlinear dalga denkleminin periyodik sınır koşulları dahilinde çözümü için sayısal algoritmalar irdelenmiştir.

Diğer taraftan, bir boyutlu modeller fiziksel olayları ideal olarak ifade eder. Fakat fiziksel açıdan iki ve üç boyutlu problemlerin incelenmesi gerekmektedir. Bu amaçla bölüm 2.3 de yukarıda önerilmiş olan yöntem, iki boyutlu birinci mertebeden nonlinear dalga denklemi için Cauchy probleminin çözümünün bulunmasına uygulanmıştır.

2.2. Bir Boyutlu Birinci Mertebeden Nonlineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem İçin Periyodik Sınır Koşullu Problemin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

Şimdi Q_T de aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0, \quad Q_T \text{ de} \quad (97)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < l, \quad (98)$$

$$u(0,t) = u(l,t), \quad t > 0 \quad (99)$$

burada $\varphi(x)$ l -periyotlu bilinen fonksiyondur.

Bölüm 2.1 de önerilen yöntemi takip ederek, (97)-(99) a karşılık gelen yardımcı problemi verelim

$$\frac{\partial v}{\partial t} + F(u) = 0, \quad Q_T \text{ de} \quad (100)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad 0 < x < l \quad (101)$$

$$u(0,t) = u(l,t), \quad t > 0. \quad (102)$$

Burada $v_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = \varphi(x) \quad (103)$$

denklemini koruyan keyfi sürekli ve diferansiyellenebilen bir fonksiyondur.

Teorem 3: Eğer $v(x,t)$ (100)-(102) yardımcı probleminin çözümü ise

$$u(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x}$$

eşitliği ile bulunan $u(x,t)$ fonksiyonu (97)-(99) probleminin çözümü olmaktadır.

Yardımcı problemin çözümü tek olarak tanımlanamaz ve aşağıdaki avantajlara sahiptir:

(i) (100) denkleminin $u(x,t)$ fonksiyonunun hiçbir değişkene göre türevlerini içermez; zaten bu türevler genelde mevcut da değildir.

(ii) $v(x,t)$ fonksiyonu mutlak sürekli fonksiyondur.

(iii) (100)-(102) probleminin çözümünü bulmak için klasik nümerik yöntemler kolayca uygulanabilir.

Önerilmiş (100)-(102) yardımcı problemi üzerinde sayısal algoritma oluşturulabilir. Bundan dolayı Q_T bölgesini

$$\bar{\omega}_{hr} = \{ x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0, \dots, N, k = 0, 1, \dots \}$$

ağı ile örtelim. Burada τ ve h sırasıyla t ve x değişkenlerine göre adımlardır. $\bar{\omega}_{hr}$ ağının keyfi (x_i, t_k) noktasında (100) denklemini aşağıdaki gibi sonlu farklara ayrıştıralım

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} - \tau F(U_{i,k}). \quad (104)$$

Başlangıç koşulu

$$V_{i,0} = v_0(x_i) \quad (105)$$

olur. Yukarıda gösterildiği gibi (102) koşulu

$$U_{N,k} = U_{1,k}, U_{0,k} = U_{N-1,k} \quad (106)$$

koşullarına denktir. Burada $U_{i,k}$ ve $V_{i,k}$ sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ fonksiyonlarının $\bar{\omega}_{hr}$ ağının keyfi (x_i, t_k) noktasındaki yaklaşım değerlerini göstermektedir.

Teorem 4: Keyfi i, k için

$$U_{i,k} = (V_{\bar{x}})_{i,k}$$

olmaktadır.

Görüldüğü gibi (104)-(106) probleminin kesme hatası $O(\tau + h)$ dir. Ayrıca da (100)-(102) yardımcı problemine karşılık gelen sonlu fark denklemini τ ya göre daha yüksek mertebeden (örneğin, Runge-Kutte yöntemi kullanılarak) yazabilmek mümkündür.

(104)-(106) algoritması için $l = 2\pi$, $\varphi(x) = \sin x$ ve kolaylık için $c = 1$ olmak üzere

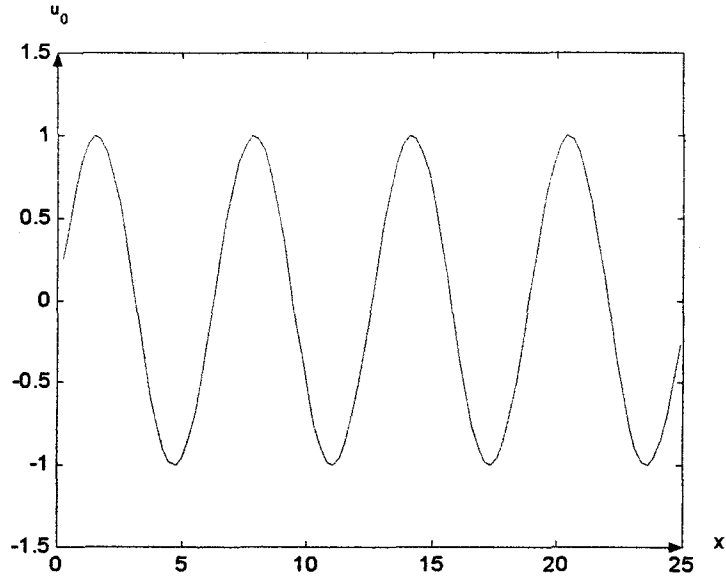
$$1. F(u) = cu,$$

$$2. F(u) = \frac{u^2}{2},$$

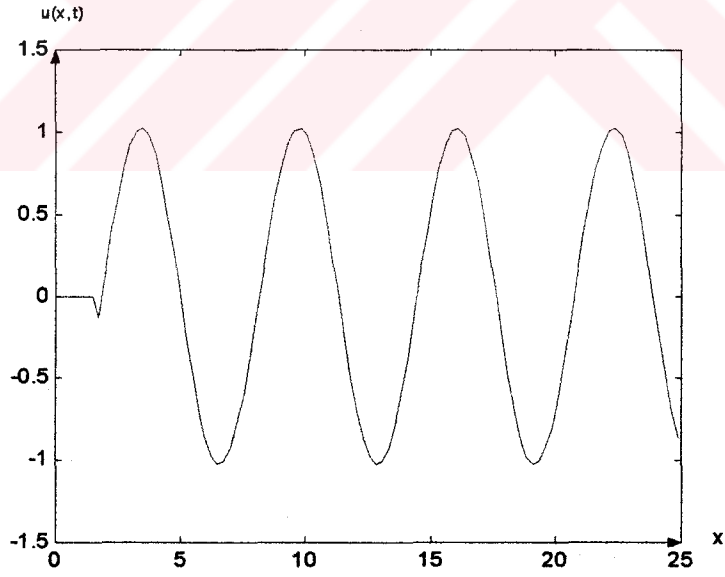
similasyonları yapılmıştır.

Şekil 1 - 4 den görüldüğü gibi lineer dalga denklemleri durumunda, başlangıç profili zamanın ilerleyen değerlerinde $c = 1$ hızı ile paralel olarak sağa doğru kaymaktadır ve söz konusu profil sonsuza kadar değişmez olarak dağılır.

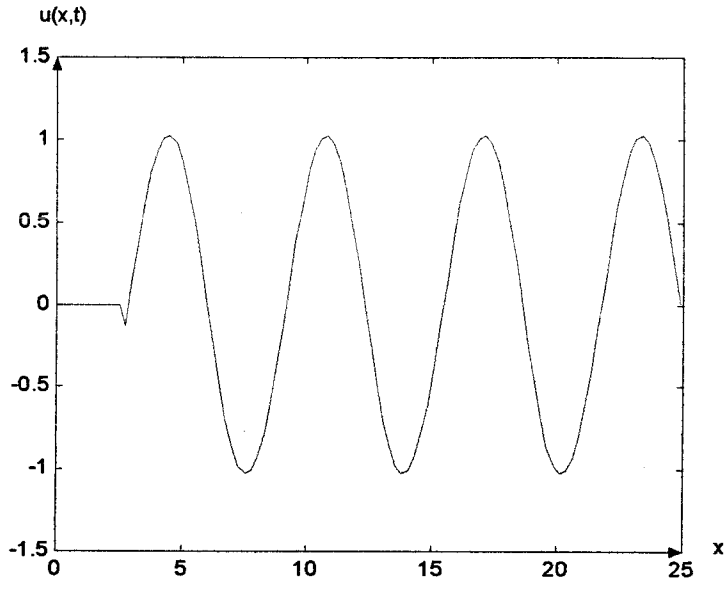
Önemle belirtelim ki, Şekil 1 - 4 grafikleri $dt = dx/c$ kararlılık koşulu çerçevesinde ele alınmıştır. Eğer bu koşul bozulursa, yanlış grafikler ortaya çıkar.



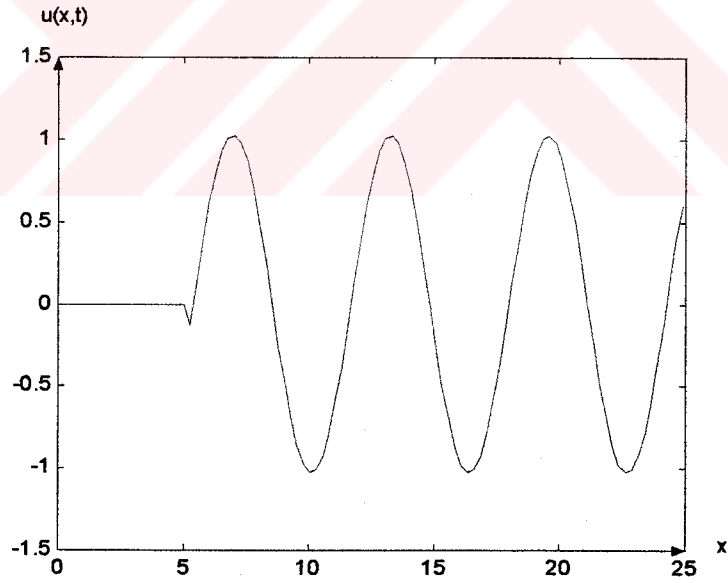
Şekil 1. Dalganın başlangıç profili (lineer durum)



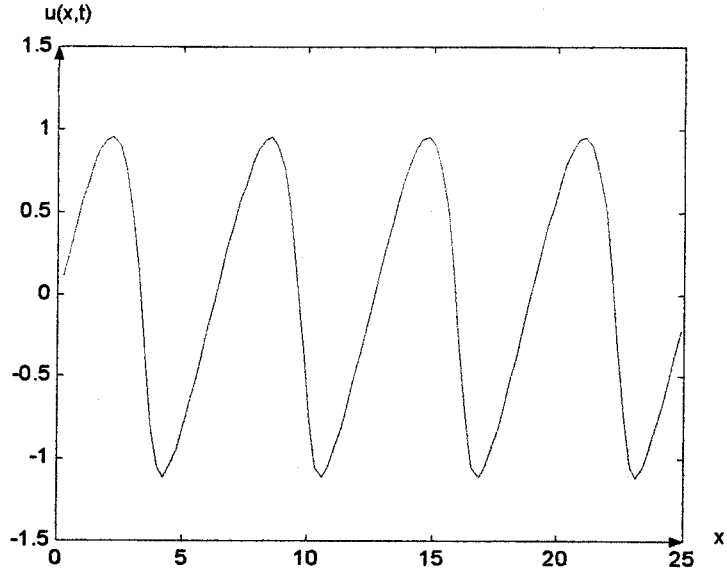
Şekil 2. Dalganın $T=1.5$ değerindeki evrimi (lineer durum)



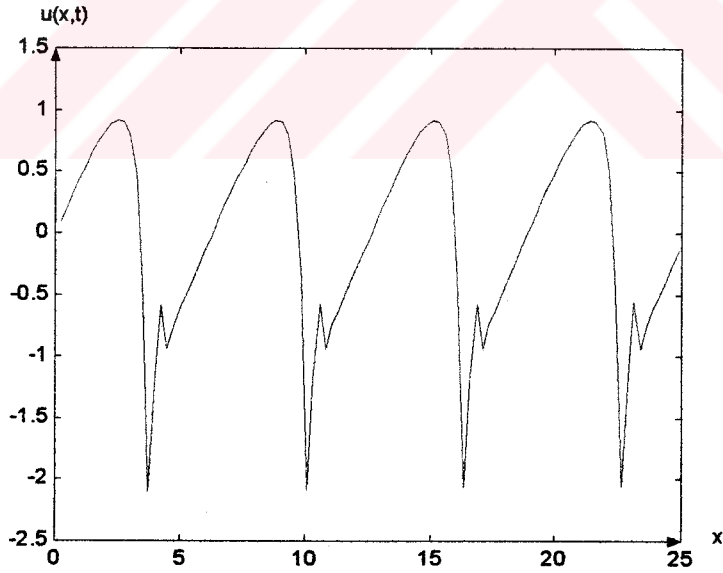
Şekil 3. Dalganın $T=2.5$ değerindeki evrimi (lineer durum)



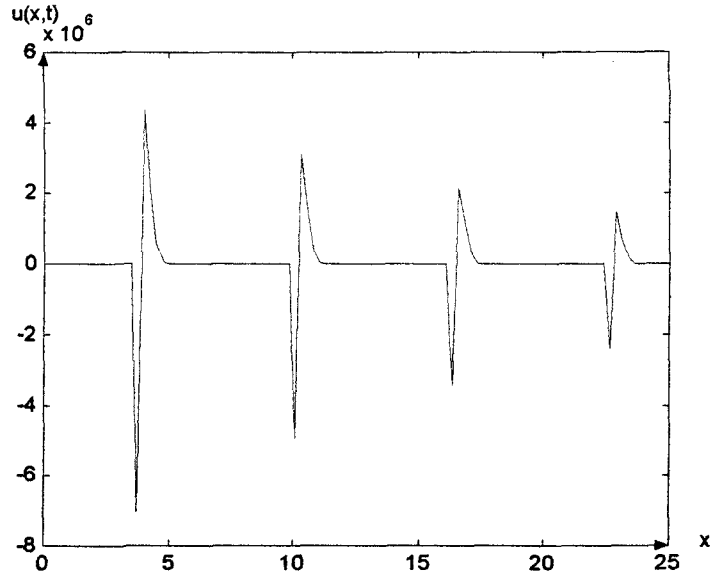
Şekil 4. Dalganın $T=5.0$ değerindeki evrimi (lineer durum)



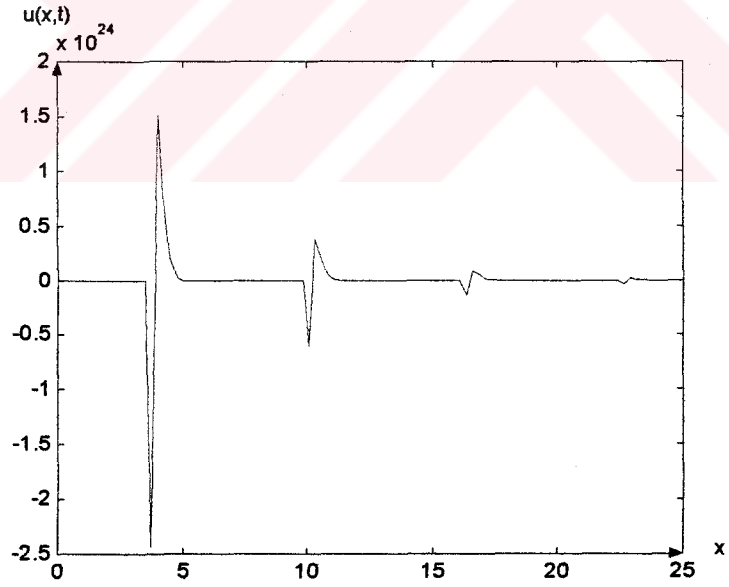
Şekil 5. Dalganın $T=0.5$ değerindeki evrimi (nonlineer durum)



Şekil 6. . Dalganın $T=1.0$ değerindeki evrimi (nonlineer durum)



Şekil 7. Dalganın $T=1.5$ değerindeki evrimi (nonlinear durum)



Şekil 8. Dalganın $T=1.6$ değerindeki evrimi (nonlinear durum)

Şekil 5 - 8 $F(u) = u^2/2$ olduğu durumdaki dalga dağılımlarını göstermektedir. Şekillerden görüldüğü gibi (Şekil 5 - 8), başlangıç profilinde bulunan $\sin x$ fonksiyonunun sahip olduğu biri maksimum 1, diğeri ise minimum -1 ekstremum değerleri sırası ile sağa ve sola doğru kayar ve başlangıç profilinde bir bozulma meydana gelir. Zaman arttıkça başlangıçtaki enerji $[k\pi, (k+1)\pi]$, $k = 0,1,2,3$ aralıklarından birincisine odaklanır ve diğer aralıklarda başlangıç profili kaybolur. Bu ise denklemdaki nonlineerliğin oluşturduğu bir özellik olmaktadır.

2.3. İki Boyutlu Birinci Mertebeden Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem İçin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözüm

D_T aşağıdaki gibi tanımlanmış R^3 de bir bölge olsun

$$D_T = \{(x_1, x_2, t) \in R^3 : -\infty < x_i < \infty, i=1,2, 0 \leq t < T\}.$$

D_T de iki boyutlu birinci mertebeden lineer olmayan kısmi türevli denklem için aşağıdaki Cauchy problemini göz önüne alalım

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x_1, x_2, t))}{\partial x_1} + \frac{\partial F(u(x_1, x_2, t))}{\partial x_2} = 0, \quad (x_1, x_2, t) \in D_T \quad (107)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in Q. \quad (108)$$

Burada u_0 , $Q \subseteq R^2$ bölgesinde tanımlı, $u_0(x) \in C_{1,1}^0(\bar{Q})$ olmak üzere bilinen fonksiyondur ve $F(u)$ aşağıdaki koşulları sağlamaktadır:

- (i) $F(u)$ sınırlı u fonksiyonları için sınırlı olup, $F(u) \in C^2(D_T)$,
- (ii) $u \geq 0$ değerleri için $F' \geq 0$,
- (iii) $F''(u)$ fonksiyonu işaretini değiştirmektedir, yani $F(u)$ konveks ve

konkav kısımlara sahip olan, bilinen fonksiyondur.

Literatürden bilindiği gibi (107), (108) problemi gaz dinamiğinin temel denklemi olmakla birlikte bir çok hidrodinamik akış problemlerini modellemekte kullanılmaktadır ([11], [13], [26], [28], [37], [43], [44], [45]). (107) denkleminde yer eksenlerinin sayısı bir olduğu durumda bile, eğer başlangıç fonksiyonu hem pozitif, hem de negatif eğime sahipse (107), (108) probleminin çözümü, yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahip olduğu bilinmektedir ([13], [15], [17], [18], [27], [44], [46]). Söz konusu özellik (107), (108) probleminin çözümünün çok değerli fonksiyon olmasının sonucudur. Bu ise göz

önüne alınan denklemin lineer olmayışından ortaya çıkmaktadır. Çok değerli çözümün fiziksel açıdan anlamı olmadığından, klasik çözüm kavramını genişleterek sürekli çok değerli çözümden sonlu, ama süreksizliklere sahip olan tek değerli çözümün bulunması için bir metot önerilmiştir ([13], [15], [19], [21], [27], [40], [44], [46]).

Bilindiği gibi, lineer olmayan (107), (108) probleminin karakteristikler yöntemi ile bulunan çözümü kapalı bir ifadedir ve bu ifade çözümün alternatif formunu oluşturmaktadır. Fakat bu ifadeden çözüm için açık bir formül çıkarmak genelde olanaksızdır.

(107), (108) probleminin çözümündeki süreksizlik noktalarının varlığı söz konusu problemin sayısal çözümünün de ele alınmasında zorluklar çıkarmaktadırlar, çünkü süreksizlik noktaları (107) denkleminin içerdiği türevlerin sonlu fark formülleri ile ayırıklaştırmaya imkan vermemektedir.

Literatürde (107), (108) probleminin sayısal çözümünün bulunması için bir çok sonlu fark formülleri uygulanmıştır ([13], [26], [28], [43], [47], [48], [49]). [26] da (107) denkleminin klasik sonlu fark yöntemleri uygulandığında denkleme sayısal viskosite eklendiği görülmüştür. Söz konusu sayısal viskosite ise çözümde bulunması gereken sıçrayış noktalarındaki darbe dalgalarını bir kaç düğüm noktalarına yaymaktadır. Bundan başka, karakteristikler yöntemine dayanan bazı sayısal yöntemler de vardır ([43], [50]).

Fiziksel açıdan, dalganın bir noktadan diğer noktaya dağılırken aralığın tüm noktalarından geçtiği bilinmektedir. Sebepiyet prensibi olarak bilinen bu özellik (107) denklemini için sayısal çözüm yöntemlerinin seçilmesinde önemli rol oynamaktadır. Böylelikle (107) denklemini klasik olarak sonlu farklara ayırıklaştırmak $u(x_1, x_2, t)$ çözümünün bir noktadaki değerini diğer noktadaki değeri ile bağlamış oluruz. Bu ise genelde dalganın matematiksel dağılım hızının fiziksel dağılım hızından büyük olmasına yol açmaktadır.

Çok boyutlu problemlerde sıçrayış noktalarının ortaya çıktığı yerlerin incelenmesi bir boyutlu problemlere nispeten zor olduğundan, problemin fiziksel yapısından doğan süreksizlik noktalarının yerini bulmak için önerilmiş yöntemlerden yüksek hassaslık talep edilmektedir. Gerçekten de, ekonomik açıdan çok boyutlu problemlerde ağır adımı bir boyutlu problemlere nazaran daha büyük almak zorunda kalmaktayız, bu ise çok boyutlu problemlerde süreksizlik noktalarının geometrik yerinin bulunmasını zorlaştırmaktadır.

Eğer başlangıç fonksiyonu parçalı sürekli ise veya genelde $u_0 \in L_\infty(R^2)$ ve $F''(u) > 0$ ise bu durumda [15], [17] de söz konusu bir boyutlu Cauchy probleminin birden çok

çözümüne sahip olduğu gösterilmiştir. Ama bu çözümlerden fiziksel yararlı çözümü, yani tek bir çözümü ele almak için entropi şartı konulmuştur. [11], [15] de entropi şartını koruyan, genelleştirilmiş çözüm kavramı kullanılarak, $F''(u)$ fonksiyonunun işaret değiştirmedeği durumda çözümün elde edilebilmesi için genel bir yöntem önerilmiştir.

Göz önüne aldığımız problemin fiziksel özelliğini düzgün ifade etmek amacıyla ve süreksiz fonksiyonların kullanılması zorunluluğu karşısında (107), (108) probleminin çözümü için süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözüm yöntemlerini oluşturmak gerekmektedir. [22], [42] de bir boyutlu dalga denkleminin çözümü için bir yöntem önerilmiştir.

Bu bölümde birinci mertebeden nonlinear iki boyutlu dalga denklemi için Cauchy ve sınır-değer problemlerinin çözümleri süreksiz fonksiyonlar sınıfında ele alınacaktır [25]. Önerilen yöntem, yer eksenlerinin sayısı ikiden fazla olduğu durumda bile geçerli olmaktadır. [45] de ise (107), (108) probleminin global gerçek çözümü incelenmiştir.

2.3.1. Başlangıç Fonksiyonu Sürekli Olan Cauchy Problemi

(107), (108) probleminin çözümünün yapısını incelemek için $u_0(x_1, x_2) \in \dot{C}_{1,1}(\bar{Q})$ olduğunu varsayalım. Kolaylık için $u_0(x_1, x_2)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi

$$u_0(x_1, x_2) = \begin{cases} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases} \quad (109)$$

göz önüne alalım, burada $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ dir.

(107), (108) probleminin karakteristikler yöntemi ile bulunan çözümünün

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} u_0(\xi_1, \xi_2), & |\xi| < 1, \\ 0, & |\xi| \geq 1. \end{cases} \quad (110)$$

şeklinde olduğu açıktır. Burada

$$\xi_i = x_i - F'(u)t, \quad (i=1,2) \quad (111)$$

dir ve bunlara (107) denkleminin karakteristikleri denir. (110) ve (111) ile tanımlanan sürekli çözümden

$$u_t(x_1, x_2, t) = \frac{F'(u) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_0}{\partial \xi_j}}{1 + t F''(u) \sum_{j=1}^2 \frac{\partial u_0}{\partial \xi_j}},$$

$$u_{x_j}(x_1, x_2, t) = \frac{\frac{\partial u_0}{\partial \xi_j}}{1 + t F''(u) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_0}{\partial \xi_i}}, \quad (j=1,2), \quad (112)$$

olduğu görülür. Görüldüğü gibi (112) ifadesi $u(x_1, x_2, t)$ çözümünün (x_1, x_2, t) noktasındaki eğiminin $u_0(\xi_1, \xi_2)$ fonksiyonunun eğimi ile tanımlanmaktadır. Eğer

$\frac{\partial u_0}{\partial \xi_i} < 0$ ve $F'' > 0$ (veya $\frac{\partial u_0}{\partial \xi_i} > 0$ ve $F'' < 0$) ise bu takdirde,

$$t \equiv T_0 = \left(-F''(u) \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_0}{\partial \xi_i} \right)^{-1} \quad (113)$$

değerlerinde $\frac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$, $(i=1,2)$ ve $\frac{\partial u}{\partial t} = \infty$ olmaktadır. Özellikle başlangıç profili

olarak (109) fonksiyonu göz önüne alınırsa $T_0 = 0.5$ olur.

Böylece yukarıda açıklandığı gibi, eğer başlangıç fonksiyonu hem negatif hem de pozitif eğime sahipse, (107) denkleminin lineer olmayan yapısı nedeniyle $t \geq T_0$ için $u(x_1, x_2, t)$ çözümü çok değerli fonksiyon olur. Çok değerli çözüm fiziksel açıdan anlamlı olmadığından, benzer problemlerde klasik çözüm kavramını genişletmekle sürekli fakat çok değerli çözümden tek değerli ama birinci tür süreksizliğe sahip olan ve fiziksel yararlı çözüm elde etmek gerekmektedir.

(107), (108) problemin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım

Tanım 14: Negatif olmayan ve (108) koşulunu sağlayan ve her $\varphi \in C_{1,1}^0(\overline{Q})$ test fonksiyonu için

$$\int_{R^3} \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\} dx_1 dx_2 dt + \int_{R^2} \varphi(x_1, x_2, 0) u_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 0 \quad (114)$$

integral eşitliğini gerçekleyen $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonuna (107), (108) probleminin genelleştirilmiş (zayıf) çözümü denir.

Zayıf çözümlerin bulunmasında önemli olan, bu çözümlerde ortaya çıkan süreksizlik noktalarının yerini bulmak ve söz konusu noktaların yerlerinin zamana göre değişmelerini incelemektir. (107), (108) probleminin zayıf çözümünü bulmak için aşağıdaki yardımcı problemi önerelim

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial t} + F\left(\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}\right) = 0, \quad (115)$$

$$v(x_1, x_2, 0) = v_0(x_1, x_2), \quad (116)$$

burada $v_0(x_1, x_2)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial v_0(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial v_0(x_1, x_2)}{\partial x_2} = u_0(x_1, x_2) \quad (117)$$

denklemini sağlayan herhangi bir fonksiyondur. M operatörü

$$M. = \frac{\partial.}{\partial x_1} + \frac{\partial.}{\partial x_2} \quad (118)$$

olarak tanımlansın. Yardımcı problem tek değildir. Gerçekten de M^{-1} ile M operatörünün tersini gösterirsek, (107) den

$$\frac{\partial M^{-1}u(x_1, x_2, t)}{\partial t} + F(u) = M^{-1}(0) \quad (119)$$

elde ederiz.

$$\text{Ker } M = \left\{ f(x_2 - x_1) \mid f \in C^1(Q), (x_1, x_2) \in R^2 \right\}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Eğer

$$v(x_1, x_2, t) = M^{-1}u(x_1, x_2, t) - f(x_2 - x_1) \quad (120)$$

gibi göstersek (119) dan

$$u(x_1, x_2, t) = Mv(x_1, x_2, t) \quad (121)$$

elde ederiz.

Yardımcı (115), (116) problemini çözmek için $v_0(x_1, x_2)$ fonksiyonunu belirlemek gerekiyor. Bunun için (117) denkleminin genel çözümünü ele alalım. (117) denlemine karşılık gelen karakteristiklerin denklemlerini s parametresine göre aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\frac{dx_j}{ds} = 1, \quad (j = 1, 2), \quad \frac{dv_0}{ds} = u_0(x_1, x_2). \quad (122)$$

(122) den

$$x_1(s,t) = x_1^{(0)}(t) + s, \quad x_2(s,t) = x_2^{(0)}(t) + s,$$

$$v_0(x_1, x_2) = \int u_0(x_1^{(0)}(t) + s, x_2^{(0)}(t) + s) ds + v_0^{(0)}(t)$$

elde ederiz. Burada $x_1^{(0)}(t)$, $x_2^{(0)}(t)$, $v_0^{(0)}(t)$ keyfi fonksiyonlardır. Eğer $\frac{D(x_1, x_2)}{D(t, s)} \neq 0$ olursa v_0 fonksiyonu x_1 ve x_2 değişkenlerine bağlı fonksiyon olarak ele alınabilir. Eğer özel olarak $x_1^{(0)}(t) = t$, $x_2^{(0)}(t) = 2t$, $v_0^{(0)}(t) = \int u_0(t, 2t) dt = t - 2t^3/3$ olursa $v_0(x_1, x_2)$ fonksiyonu açık bir şekilde elde edilebilir. Ayrıca da M^{-1} varlığını da ispatlamış oluruz.

(115), (116) probleminin çözümü karakteristikler yöntemi ile aşağıdaki gibi

$$v(x_1, x_2, t) = [-F(u) + uF'(u)]t + v_0(\xi_1, \xi_2) \quad (123)$$

alınır. Ayrıca da

$$u(x_1, x_2, t) = Mv(x_1, x_2, t), \quad (124)$$

Gerçekten de

$$Mv(x_1, x_2, t) = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} F'(u) + u \frac{\partial F'(u)}{\partial x_1} - \frac{\partial F(u)}{\partial x_1} \right] t + \frac{\partial v_0}{\partial \xi_1} \left(1 - \frac{\partial F'(u)}{\partial x_1} t \right) - \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} \frac{\partial F'(u)}{\partial x_1} +$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x_2} F'(u) + u \frac{\partial F'(u)}{\partial x_2} - \frac{\partial F(u)}{\partial x_2} \right] t + \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} \left(1 - \frac{\partial F'(u)}{\partial x_2} t \right) - \frac{\partial v_0}{\partial \xi_1} \frac{\partial F'(u)}{\partial x_2} t = u \left[\frac{\partial F'(u)}{\partial x_1} + \frac{\partial F'(u)}{\partial x_2} \right] t +$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} - \frac{\partial F'(u)}{\partial x_1} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} \right) t - \frac{\partial F'(u)}{\partial x_2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi_1} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi_2} \right) t = u.$$

Böylelikle aşağıdaki teoremi de ispatlamış bulunmaktayız.

Teorem 5: Eğer $v(x_1, x_2, t)$ fonksiyonu (115), (116) probleminin sürekli çözümü ise, bu takdirde (124) eşitliği ile bulunan $u(x_1, x_2, t)$ de (107), (108) probleminin zayıf çözümüdür.

Yardımcı problemin aşağıdaki avantajları vardır:

(i) $v(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun diferansiyellenme özelliği $u(x_1, x_2, t)$ nin diferansiyellenme özelliğinden yüksektir;

(ii) $u(x_1, x_2, t)$ çözümünü bulurken $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2$) türevlerini kullanmak zorunda

değiliz, zaten söz konusu türevler sıçrayış noktalarının etrafında mevcut değildir.

İncelemekte bulunduğumuz (107) cinsinden denklemlerle fizikte karşılaşılmakta olduğundan, söz konusu denklemin çözümü belli bir fiziksel koşul sağlamak zorundadır. Diğer açıdan da (123) den görüldüğü gibi yardımcı problemin çözümü $x_2 - x_1$ argümanına bağlı keyfi bir fonksiyon içermektedir. Bu çözümler ailesinin içerisinde fiziksel yararlı olanını bulmak için, entropi koşulunu belirleyelim. Bundan dolayı aşağıdaki integrali göz önüne alalım

$$E(t) = \int_{R^3} u(x_1, x_2, t) dx_1 dx_2, \quad (125)$$

(125) integralinin değerinin hem sürekli ve hem de süreksiz fonksiyonlar için aynı olduğu açıktır. Ayrıca, $E(t)$ fonksiyonunun değeri zamana bağlı değildir.

Tanım 15: Aşağıdaki eşitlik

$$E(0) = \int_{R^3} u_0(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (126)$$

yardımı ile bulunan $E(0)$ sayısına $v(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun kritik değeri diyelim.

Şimdi $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarının bulunması problemini inceleyelim. Bunun için $x_1 = \xi_1(t)$, $x_2 = \xi_2(t)$ ile $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun sıçrayış eğrisinin parametrik şekilde verilmiş denklemlerini gösterelim.

Tanım 16: Her t için $v(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun kritik değer aldığı noktaların geometrik yerine front eğrisi deyelim.

Tanım 16 a göre $v(\xi_1(t), \xi_2(t), t) = E(0)$. Eğer son eşitliği diferansiyellersek,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} \right)_{x_j = \xi_j(t)} = 0, \quad (i = 1, 2)$$

elde ederiz. (115) ve (124) göz önüne alınırsa

$$\frac{dx_j}{dt} = - \frac{F(u)}{u} \Big|_{x_j = \xi_j}, \quad (j = 1, 2) \quad (127)$$

elde ederiz.

Tanım 17: Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$v_{gen.}(x_1, x_2, t) = \begin{cases} v(x_1, x_2, t), & v < E(0), \\ E(0), & v \geq E(0) \end{cases} \quad (128)$$

fonksiyonuna (115), (116) problemi için genelleştirilmiş çözüm diyelim.

Bu koşula entropi koşulu denir. Teorem 5 e göre

$$u_{gen.}(x_1, x_2, t) = Mv_{gen.}(x_1, x_2, t) \quad (129)$$

olur. Buradan görüldüğü gibi $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonu için (x_1 ve x_2 değişkenlerine göre) sıçrayış noktası sağdan $\frac{\partial u}{\partial x_j}$ ($j=1,2$) türevlerinin sıfıra eşit olduğu noktalara denir.

(127) den

$$t = \int_0^{\xi_j(t)} \frac{u}{F(u)} dx_j, \quad (j=1,2)$$

dir. $\int_0^{\xi_j(t)} \frac{u}{F(u)} dx_j < \infty$, ($j=1,2$) koşulu $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunda sıçrayış noktalarının varlığı için yeter ve gerekli koşul olmaktadır.

2.3.2. Başlangıç Fonksiyonun Süreksiz Olduğu Durum

Birinci bölümde başlangıç fonksiyonu sürekli olduğu durumda (107) denklemi için Cauchy problemini inceledik, ve gördük ki, yeteri kadar pürüzsüz başlangıç fonksiyonu hem negatif, hem de pozitif eğime sahip olursa, öyle bir T_0 zamanı var ki $t \geq T_0$ olduğunda (107), (108) probleminin çözümü yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktalarına sahip olmaktadır.

Bu bölümde amacımız başlangıç fonksiyonu süreksiz olduğu durumda (107), (108) probleminin global çözümünü incelemektir. Bundan dolayı (107) denklemini aşağıdaki koşul çerçevesinde göz önüne alalım

$$u(x_1, x_2, 0) \equiv u_0(x_1, x_2) = \begin{cases} u_1, & x_1 < 0 \\ u_2, & x_1 > 0, \end{cases} \quad 0 \leq x_2 \leq L, \quad (130)$$

burada u_1 , u_2 ve L bilinen reel sabitlerdir. $u_0(x_1, x_2)$ başlangıç fonksiyonunun grafikleri şekil 10 (a) ve (b) de gösterilmiştir. Literatürde (107), (130) problemine Riemann problemi denir. $u_0(x_1, x_2)$ fonksiyonunun x_1 değişkenine göre sıçrayışı $[x_1 u_0] = |u_2 - u_1|$ olmaktadır.

Kolaylık sağlamak için (107), (130) probleminin gerçek çözümünü $F(u) = \frac{u^2}{2}$ olduğu durumda ele alalım.

Burada iki durum olabilir;

(i) $u_1 < u_2$. Bu durumda, (107), (130) probleminin çözümü karakteristikler yöntemi ile

$$u(x_1, x_2, t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x_1}{t} < u_1 \\ \frac{x_1}{t}, & u_1 < \frac{x_1}{t} < u_2, \quad 0 \leq x_2 \leq L, \\ u_2, & \frac{x_1}{t} > u_2 \end{cases} \quad (131)$$

olarak bulunur. (131) ifadesi ile bulunan çözümün grafiği şekil 10 (d) de gösterilmiştir. Şekilden görüldüğü gibi $u_1 < u_2$ olduğu durumda başlangıç profilinde bulunan sıçrayış zaman arttıkça kayıp oluyor.

(ii) $u_1 > u_2$. Bu durumda ise şekil 10 (c) den görüldüğü gibi probleminin çözümü çok değerli fonksiyon olur. Klasik çözüm söz konusu olmadığı için göz önüne aldığımız probleminin zayıf çözümünü tanım 14 e göre aşağıdaki gibi tanımlayalım

$$\int_{R^3} \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^2 F(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\} dx_1 dx_2 dt + \int_{\substack{x_1 < 0 \\ 0 \leq x_2 \leq L}} \varphi(x_1, x_2, 0) u_1 dx_1 dx_2 + \int_{\substack{x_1 > 0 \\ 0 \leq x_2 \leq L}} \varphi(x_1, x_2, 0) u_2 dx_1 dx_2 = 0. \quad (132)$$

(132) integral eşitliğini koruyan zayıf çözümü elde etmek için yine de (115), (116) yardımcı problemine başvuralım. Burada $v_0(x_1, x_2)$ fonksiyonu yukarıda olduğu gibi (117) denkleminin herhangi bir çözümü olmaktadır ve

$$v(x_1, x_2, 0) \equiv v_0(x_1, x_2) = \begin{cases} u_1 x_1, & x_1 < 0 \\ u_2 x_1, & x_1 > 0 \end{cases}, \quad 0 \leq x_2 \leq L, \quad (133)$$

olarak yazılabilir. (123) formülü göz önüne alınırsa (115), (133) probleminin çözümü

$$v(x_1, x_2, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} u_1^2 t + u_1 (x_1 - u_1 t), & \frac{x_1}{t} < u_1 \\ \frac{1}{2} u_2^2 t + u_2 (x_1 - u_2 t), & \frac{x_1}{t} > u_1 \end{cases}, \quad (134)$$

şeklinde olmaktadır. Şekil 10 (a) da $u(x_1, x_2, t) = Mv(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun $t > 0$ olduğu durumdaki grafiği gösterilmiştir.

(131) formülü ile bulunan $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun birinci tür süreksizlik noktasının olduğunu varsayarak çok değerli sürekli fonksiyondan fiziksel açıdan yararlı bir değerli çözüm oluşturmak olabilir. Bu durumda sıçrayış noktalarının yerini belirlemek

önem taşımaktadır. Söz konusu sıçrayış noktalarının yerini bulmak için aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım

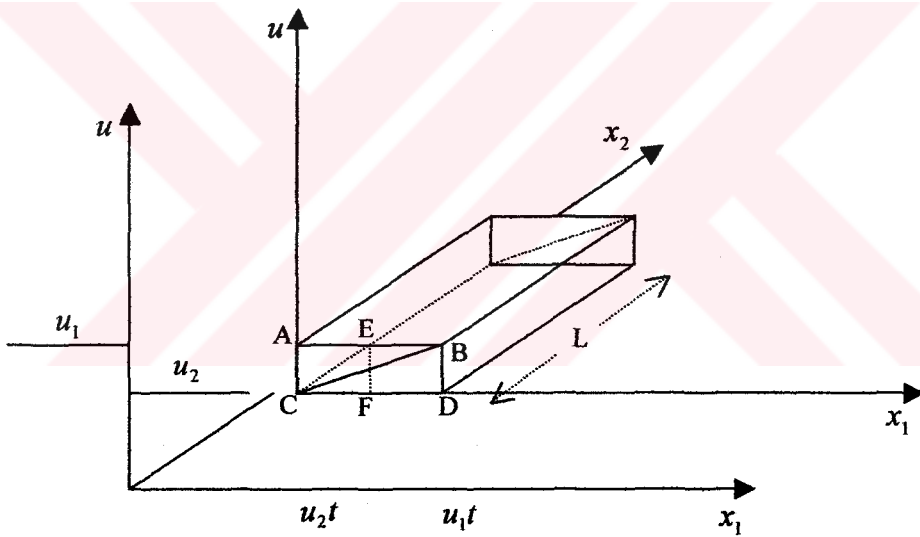
$$V(t) = \frac{1}{2} E(t),$$

$$E(t) = \int_{x_1^{over}(t)}^{x_1^{break}(t)} (u_2 + u_1) dx_1. \quad (135)$$

Burada $x_1^{over}(t)$ ve $x_1^{break}(t)$ sırasıyla çözümün toparlanma (overlap) ve kırılma (breaking) yaptıkları noktaların apsilerini göstermektedir. Kolayca gösterilebilir ki,

$$E(t) = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} tL$$

dir. Şekil 9 dan görüldüğü gibi tabanı ABC olan prizmanın hacmi $V(t) = S_{ABC}L$ olur.



Şekil 9. Başlangıç profilin zamana göre evrimi

Burada

$$S_{ABC} = \frac{AC \cdot AB}{2} = \frac{(u_1^2 - u_2^2)}{2} t. \text{ Diğer taraftan } S_{ABC} = \frac{1}{2} S_{ABCD} \text{ olmaktadır. Şimdi}$$

ABC üçgeninin alanını integral yardımı ile hesaplayalım

$$S_{ABC} = \int_{ABC} dx du = \int_0^{(u_1+u_2)t} (u_1 - \frac{x_1}{t}) dx_1 = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} t.$$

Tanım 16 ya göre göz önüne aldığımız problemin sıçrayış noktalarının koordinatları (front noktaları)

$$v(x_1^f(t), x_2, t) = E(t) \quad (136)$$

denklemini sağlamaktadır. Açıkta ki, (132) integral eşitliğini koruyan $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonları süreksiz de olabilir. Sürekli çok değerli çözümden, (136) eşitliğini koruyan süreksiz, ama bir değerli çözümü bulmak için $S_{ABEF} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$ eşitliğini kullanarak $x^f(t)$ yi kolayca elde etmek mümkün olur, yani

$$\frac{(u_1^2 - u_2^2)}{2}t = (u_1 - u_2)x_1^f(t) \quad (137)$$

olur. Buradan

$$x_1^f(t) = \frac{(u_1 + u_2)}{2}t. \quad (138)$$

Diğer taraftan, (108) ifadesi $v_+ = v_-$ eşitliğinden de elde edilebilir. Burada

$$v_+ = \frac{1}{2}u_1^2t + u_1(x_1 - u_1t), \quad v_- = \frac{1}{2}u_2^2t + u_2(x_1 - u_2t)$$

dir. (138) den

$$U = \frac{dx_1^f(t)}{dt} = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad (139)$$

bulunur, yani Rankine-Hugoniot koşulu kolayca elde edilir.

Tanım 17 de olduğu gibi

$$v_{ext}(x_1, x_2, t) = \begin{cases} v_-, & \frac{x_1}{t} < U \\ v_+, & \frac{x_1}{t} > U \end{cases} \quad (140)$$

eşitliği ile tanımlanmış genişletilmiş çözümü göz önüne alalım.

Uyarı 3: Eğer (138) ifadesinde $(x_1 = x_1^f(t), x_2)$ sıçrayış eğrisi üzerinde $u_{1,2} \rightarrow u$ limitini hesaplırsak

$$\frac{dx_1^f(t)}{dt} = F'(u), \quad (F(u) = \frac{u^2}{2}),$$

olduğunu elde ederiz; yani zayıf sıçrayışlar karakteristikler üzerinde dağılmaktadırlar.

Rankine-Hugoniot koşulunu $S_{ABEF} = S_{ABC}$ koşulundan, yani

$$E(t) = \int_{x_1^{over}}^{x_1^{(t)}} (u_2 + u_1) dx_1$$

ifadesinden elde edebiliriz.

Teorem 5' e göre (107), (140) probleminin bir değerli, sıçrayış noktaları (138) denklemi ile hareket eden söz konusu problemin fiziksel özelliklerini düzgün ifade eden çözümü

$$u_{ext}(x_1, x_2, t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x_1}{t} < U \\ u_2, & \frac{x_1}{t} > U \end{cases} \quad (141)$$

olur. Böyle fonksiyonlarla ifade edilen çözümlere darbe dalgaları denir. (141) ile tanımlanan $u_{ext}(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun grafiği şekil 10(a) da gösterilmiştir.

2.3.3. Sayısal Çözüm İçin Algoritma

Bu bölümde amacımız (107), (108) probleminin sayısal çözümünü ele almak için bir algoritma önermektir. Bu amaçla , yukarıdaki nedenlerden dolayı göz önüne aldığımız esas problemi değil; 2. bölümde önerilmiş yardımcı problemi kullanacağız.

Önce (x_1, x_2, t) argümanlarının sürekli değiştiği D_T bölgesini ayırklaştıralım:

$$\Omega_{h_1, h_2, \tau} = \{(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t) \mid x_1^{(i)} = ih_1, x_2^{(j)} = jh_2, t_k = k\tau; i = \dots - n, -n + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n; \\ j = \dots - m, -m + 1, \dots, 0, 1, \dots, m, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; h_1 > 0, h_2 > 0, \tau > 0 \}.$$

Burada h_1, h_2 ve τ bilinen sabitler olup, sırasıyla (x_1, x_2, t) ye göre şebekenin adımları olmaktadırlar. (124) formülünü dikkate alırsak (115) denklemini aşağıdaki gibi yazabiliriz

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial t} + F(u(x_1, x_2, t)) = 0. \quad (142)$$

Hamilton-Jacobi denklemi olarak adlandırılan (142) denklemi için [51] de süreksiz bir Galerkin sonlu eleman metodu uygulanmıştır. (142) den de görüldüğü gibi bu denklem $u(x_1, x_2, t)$ fonksiyonunun hiçbir türevini içermez ve bu da denklemi $\Omega_{h_1, h_2, \tau}$ ağının keyfi $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t_k)$ düğüm noktasında sonlu fark formülleri ile ayırklaştırmaya imkan sağlar.

$U_{i,j,k}$ ve $V_{i,j,k}$ ile sırasıyla $u(x_1, x_2, t)$ ve $v(x_1, x_2, t)$ çözümlerinin $\Omega_{h_1, h_2, \tau}$ ağının keyfi $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}, t_k)$ düğüm noktasındaki yaklaşım değerlerini gösterelim. Ayrıca

$U_{i,j,k} = U$, $U_{i,j,k+1} = \hat{U}$ ve $(U_{i,j,k} - U_{i-1,j,k})/h_1 = U_{x_1}^-$ olsun. $\Omega_{h_1,h_2,\tau}$ ağının keyfi düğüm noktasında (142), (116) problemini aşağıdaki gibi sonlu farklar ile ayrıklaştıralım

$$V_{i,j,k+1} = V_{i,j,k} - \tau F(U_{i,j,k}), \quad (143)$$

$$V_{i,j,0} = V_{i,j}^{(0)}. \quad (144)$$

Burada $V_{i,j}^{(0)}$, $v_0(x_1, x_2)$ fonksiyonunun $(x_1^{(i)}, x_2^{(j)})$ noktasındaki değerini göstermektedir.

Kolayca ispatlanabilir ki,

$$\hat{U} = \hat{V}_{x_1}^- + \hat{V}_{x_2}^-, \quad (145)$$

ağ fonksiyonu

$$\hat{U} = U - \frac{\tau}{h_1} F_{x_1}^-(U) - \frac{\tau}{h_2} F_{x_2}^-(U) \quad (146)$$

formal yazılmış lineer olmayan cebirsel denklem sistemini sağlamaktadır. Burada

$\hat{V}_{x_1}^-$, $\hat{V}_{x_2}^-$, $F_{x_1}^-(U)$ ve $F_{x_2}^-(U)$ sırasıyla $\frac{\partial v}{\partial x_1}$, $\frac{\partial v}{\partial x_2}$, $\frac{\partial F(u)}{\partial x_1}$ ve $\frac{\partial F(u)}{\partial x_2}$ kısmi türevlerinin

geriye sonlu fark karşılığı olmaktadır.

Teorem 6: (115), (116) probleminin çözümü için keyfi i,j,k için aşağıdaki

$$E(t_k) \equiv \sum_i \sum_j U_{i,j,k}$$

toplam zamana bağımlı değildir.

İspat: $\Omega_{h_1,h_2,\tau}^0$ kümesi ile $\Omega_{h_1,h_2,\tau}$ nın sınırı $\gamma_{h_1,h_2,\tau}$ üzerinde sıfır olan $\Omega_{h_1,h_2,\tau}$ daki ağ fonksiyonlarının kümesini gösterelim. İlk olarak $\hat{U}_{i,j} - U_{i,j}$ ifadesini ele alalım. (146) dan

$$\hat{U} - U = - \left[\frac{\tau}{h_1} F_{x_1}^-(U) + \frac{\tau}{h_2} F_{x_2}^-(U) \right] \quad (147)$$

elde ederiz. Şimdi aşağıdaki ifadeyi göz önüne alalım

$$\begin{aligned} E(t_{k+1}) - E(t_k) &= -h_1 h_2 \sum_i \sum_j \left[\frac{\tau}{h_1} F_{x_1}^-(U) + \frac{\tau}{h_2} F_{x_2}^-(U) \right] \\ &= -\tau \left\{ h_2 \sum_j \left[\sum_i F_{x_1}^-(U) \right] + h_1 \sum_i \left[\sum_j F_{x_2}^-(U) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (148)$$

Basit bir hesaplama ile $E(t_{k+1}) - E(t_k) = 0$ alınır. Bu ise $E(t_k)$ nın k dan bağımsız olduğu anlamına gelir.

Tanım 18: $V_{i,j,k}$ ağ fonksiyonunun $E(0)$ kritik değerini aldığı noktaların geometrik yerine kritik değerler denilir.

Tanım 19: Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$\hat{V}_{ext} = \begin{cases} \hat{V}_{i,j}, & \hat{V}_{i,j} < E(0) \\ E(0), & \hat{V}_{i,j} > E(0) \end{cases} \quad (149)$$

\hat{V}_{ext} ağ fonksiyonuna (142), (117) probleminin genelleştirilmiş sayısal çözümü denir. (145) ifadesine göre

$$\hat{U}_{ext} = \hat{V}_{ext, \bar{x}_1} + \hat{V}_{ext, \bar{x}_2} \quad (150)$$

formülü ile bulunmaktadır.

2.3.4. Başlangıç-Sınır Değer Problemi

Yukarıdaki bölümlerde birinci mertebeden nonlineer kısmi türevli denklem için başlangıç değer problemini inceledik. Bu bölümde ise amacımız (107) denklemi için sınır değer problemini incelemek olacaktır.

$\Gamma^{(v)} = (x_1^{(v)}, x_2^{(v)})$, $(v=1, \dots, N)$ ile Q bölgesinde bilinen noktalar olsun. Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \frac{\partial F(u(x_1, x_2, t))}{\partial x_1} + \frac{\partial F(u(x_1, x_2, t))}{\partial x_2} = 0, \quad (151)$$

$$u(x_1, x_2, 0) = u_0(x_1, x_2), \quad (152)$$

$$u(x_1, x_2, t)|_{\Gamma^{(v)}} = v_1(x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, t), \quad (153)$$

burada $v_1(x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, t)$ bilinen fonksiyonlardır. Yukarıda önerilmiş yöntemi takip ederek (151)-(153) e karşılık gelen aşağıdaki

$$\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial t} + F(u(x_1, x_2, t)) = 0, \quad (154)$$

$$v(x_1, x_2, 0) = v_0(x_1, x_2), \quad (155)$$

$$\left(\frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_1} + \frac{\partial v(x_1, x_2, t)}{\partial x_2} \right) \Big|_{\Gamma^{(v)}} \equiv u(x_1, x_2, t)|_{\Gamma^{(v)}} = v_1(x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, t) \quad (156)$$

yardımcı problemini göz önüne alalım. Kolayca ispatlanır ki, (154)-(156) problemi için de (121) formülü geçerli olmaktadır.

(154)-(156) problemi için $\Omega_{h_1, h_2, \tau}$ ağının keyfi düğüm noktasında aşağıdaki sonlu fark karşılığını yazalım

$$\hat{V}_{i,j} = V_{i,j} - \tau F(U_{i,j}), \quad (157)$$

$$V_{i,j,0} = v_0(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}), \quad (158)$$

$$U_{i,j,k} = u_1(x_1^{(v)}, x_2^{(v)}, t_k), \quad (159)$$

$$\hat{U} = \hat{V}_{x_1} + \hat{V}_{x_2}. \quad (160)$$

Görüldüğü gibi (157)-(160) algoritması çok sadedir ve klasik çözüm yöntemlerine göre de çok da ekonomiktir. Ayrıca (157) algoritması daha yüksek mertebeden sonlu fark yöntemleri yazmaya imkan sağlamaktadır (Runge-Kutta yöntemleri gibi). (151)-(160) algoritmasının başka bir avantajı şudur ki, tanım bölgesinin geometrisinin algoritmaya hiçbir etkisi yoktur.

2.3.5. Sayısal Deneyler

Bu kısımda sayısal deneylerin sonuçlarını sunacağız. İlk olarak,

$$u(x_1, x_2, 0) = \begin{cases} u_1, & x_1 < 0 \\ u_2, & x_1 \geq 0 \end{cases}, \quad 0 \leq x_2 \leq L \quad (161)$$

başlangıç koşuluna sahip (107) denkleminin gerçek çözümüne bakacağız.

Şekil 10 (a) da ($u_1 = 1, u_2 = 0.5$) ve şekil 10 (b) de ($u_1 = 0.5, u_2 = 1$) başlangıç fonksiyonları verilmiştir. Şekil 10 (c), (d) sırasıyla uygun başlangıç koşullara karşılık gelen dalganın $T = 10$ değerindeki evrimleri gösterilmiştir.

$u_1 < u_2$ olduğunda t nin artan değerleri için başlangıçtaki süreksizliğin yok olmaya meylettiği gözlemlenir (şekil 10 (d)). Diğer taraftan $u_1 > u_2$ olduğunda t nin artan değerlerinde çözümde çok değerlilik ortaya çıkar. (141) formülü ile hesaplanan gerçek çözümün grafiği şekil 11 (a) da verilmiştir. (157)-(160) algoritması kullanılarak elde edilen sayısal çözüm ($T=1, T=4, T=8$) zaman değerlerinde sırasıyla 10 (b), 10 (c) ve 10 (d) grafiklerle gösterilmiştir. Bu çözüm başlangıçtaki süreksizliğin gerçek çözümdeki gibi zamanın tüm değerlerinde devam ettiğini gösterir. Sayısal ve gerçek çözümlerin biri birine çok yakın olması önerilmiş algoritmanın yeteri kadar efektif olduğunu göstermektedir.

Şekil 12 (a) da gösterildiği gibi başlangıç profili

$$u(x_1, x_2, 0) = \begin{cases} u_1, & x_1 < l_1 \\ u_2, & l_1 \leq x_1 \leq l_2 \\ u_3, & x_1 > l_2 \end{cases}, \quad 0 \leq x_2 \leq L \quad (162)$$

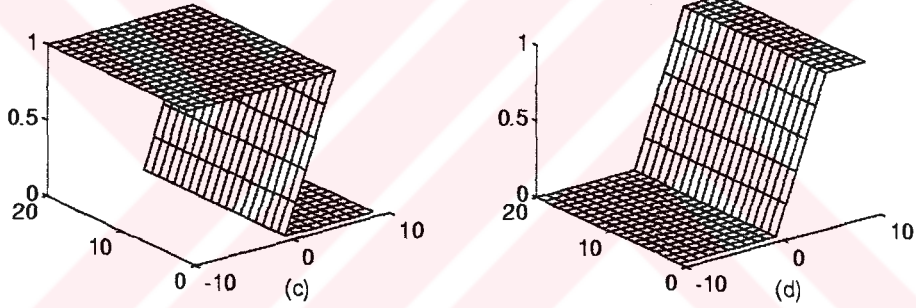
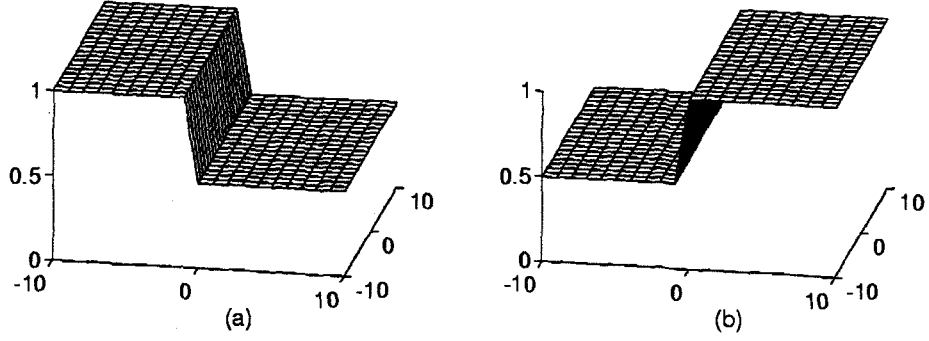
sonlu aralıkta iki sıçrayışa sahip olarak göz önüne alalım.

Şekil 12 (b) – (d) de (162) başlangıç koşullu dalganın zamanın artan değerlerindeki evrimleri gösterilmiştir.

Şimdi başlangıç profil olarak

$$u(x, 0) = 12 \operatorname{sech}^2(x + 10) + 2 \operatorname{sech}^2(x)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Şekil 13 (a) da gösterildiği gibi başlangıç profilinde biri birini takip eden iki dalga mevcut olmaktadır. Bu dalgalardan küçüğü önde, büyüğü ise küçük dalganın peşinde gösterilmiştir. Zamanın artan değerlerinde büyük dalga daha hızlı dağılarak küçük dalga ile sanki lineer dalgalarda olduğu gibi toplanmakta ve bunun sonucunda tek bir dalgaya dönüşerek hareket etmektedir. Yani (107) denkleminin çözümünde soliton türlü dalgalar oluşmamaktadır.

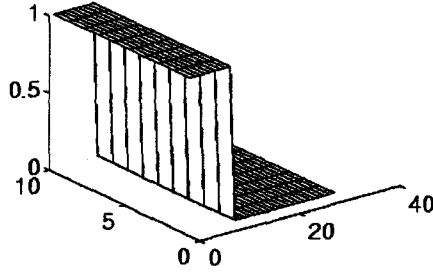


Şekil 10. a) Başlangıç profil, $u_1 > u_2$ durumu

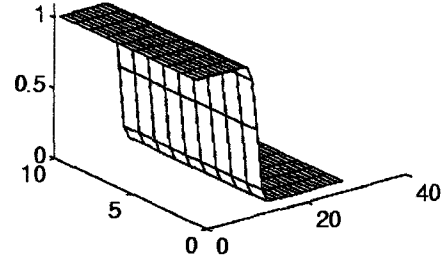
b) Başlangıç profil, $u_1 < u_2$ durumu

c) (131) Formülüne göre dalğanın evrimi, $u_1 > u_2$ durumu

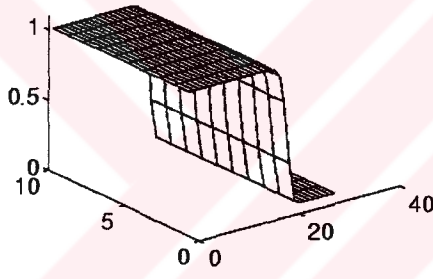
d) (131) Formülüne göre dalğanın evrimi, $u_1 < u_2$ durumu



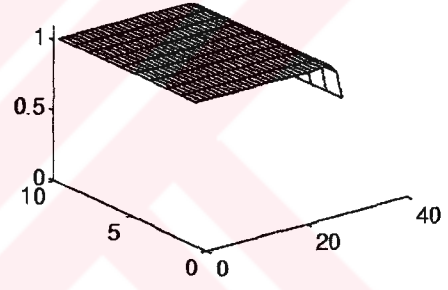
(a)



(b)

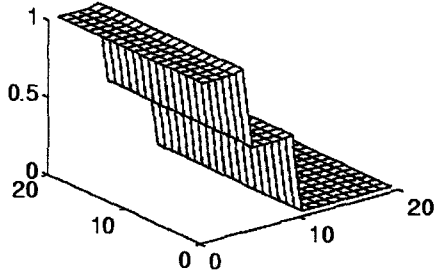


(c)

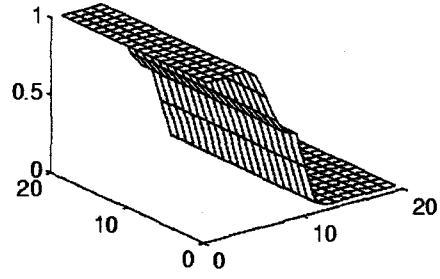


(d)

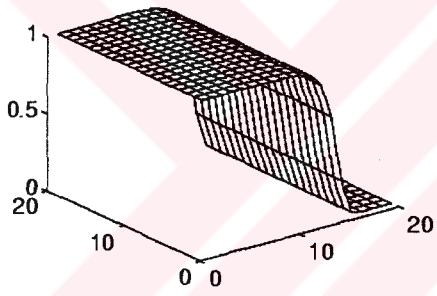
Şekil 11. a) (141) Formülüne göre dalganın fiziksel gerçek dağılımı
 b), c), d) Zamanın farklı değerlerindeki dalganın evrimi (143)-(145)
 algoritmasına göre sayısal çözüm



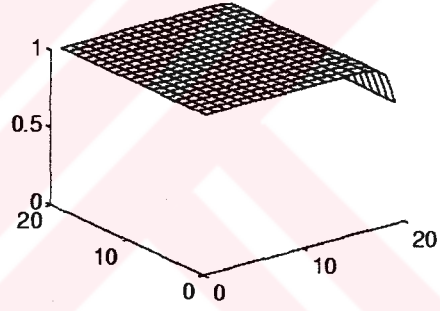
(a)



(b)

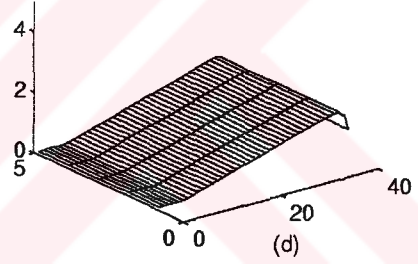
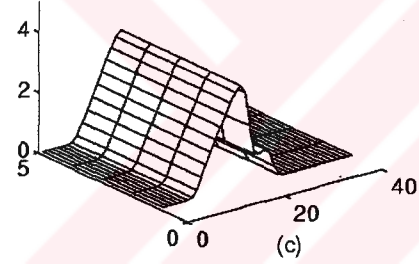
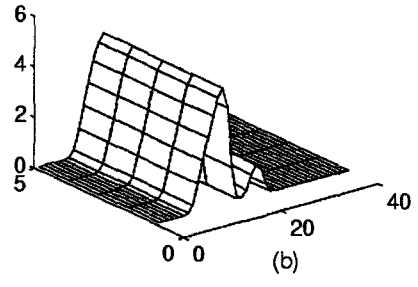
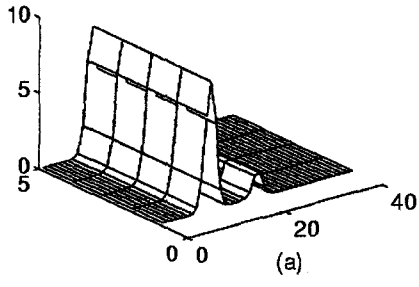


(c)



(d)

Şekil 12. (162) Başlangıç profilli dalganın zamanın farklı değerlerindeki evrimi
(sayısal çözüm)



Şekil 13. İkili dalganın zamanın farklı değerlerindeki dağılım evrimi

Şekilden görüldüğü gibi, (151) denklemini nonlinear olmasına rağmen, (linear denklemlerde olduğu gibi) iki çözüm toplanarak, enerjisi başlangıçta verilen iki dalganın enerjileri toplamına eşit olan tek bir dalgaya dönüşür.

$$\int_{\Omega} u(x,t) d\Omega$$

niceliği tüm $t \geq 0$ için zamandan bağımsızdır. Bununla birlikte, başlangıç profilleri dalganın büyüklüğü gittikçe küçülürken ve dalgalar alana gittikçe büyük miktarda yayılırken değişir. Söz konusu dalganın evrimi Şekil 13 de gösterilmiştir.

Şimdi (151) – (153) problemi ile ifade edilen problem için sayısal deneyleri inceleyelim. Fiziksel açıdan anlamlı olması amacıyla, eni ve uzunluğu $l = b = 600 m$ ve efektif kalınlığı $20 m$ olan petrol tabakasında petrolün su ile sıkıştırılması problemini göz önüne alalım. Varsayalım ki, göz önüne aldığımız bölgede biri petrol kuyusu ve diğer ikisi su basma kuyuları olmak üzere üç kuyu bulunmaktadır. Literatürden bilindiği gibi bilinen fiziksel yaklaşımlar çerçevesinde söz konusu problem su ile doyma fonksiyonuna göre (151) – (153) gibi yazılan matematiksel model yardımı ile ifade edilebilir [45], [52]. Amacımız (151) – (153) probleminin çözümünün matematiksel yapısını incelemek ve söz konusu problemin çözümü için efektif algoritma kurmak olduğundan, olayın fiziksel yapısını detaylı bir biçimde yorumlayacağız.

Bilgisayar deneyleri yapmak amacı ile (151) – (153) probleminin verileri olarak aşağıdakiler göz önüne alınmıştır.

(151) denklemindeki $F(u)$ fonksiyonu olarak

$$F(u) = \frac{K_w(u)}{\mu_w K_w(u) + \mu_o K_o(u)}$$

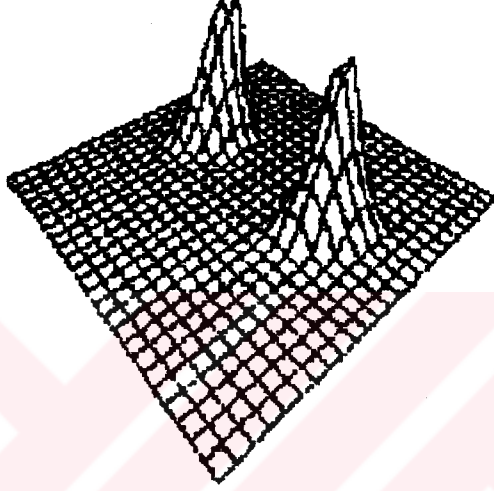
ele alınmıştır. Burada

$$K_w(u) = \begin{cases} \left(\frac{u - 0.1}{u_* - u_0} \right)^2, & u_0 \leq u \leq u_1 \\ 0.8 \left(\frac{u - u_0}{u_* - u_0} \right)^{\frac{1}{2}}, & u_1 \leq u \leq u_* \end{cases}$$

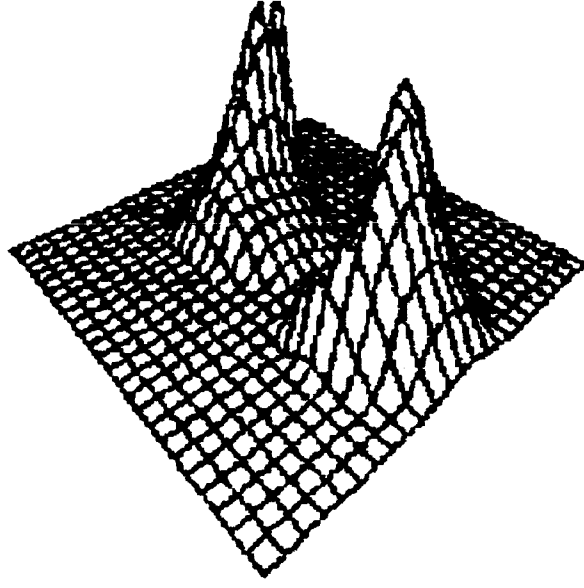
$$K_o(u) = \left(\frac{u_* - u}{u_* - u_0} \right)^2, \quad u_0 \leq u \leq u_*$$

olarak alınmıştır. $u_1 = 0.1$, $u_* = 0.8$ dir. u_1 değeri ise $K_w(u) = K_o(u)$ koşulundan $u_1 = 0.7$ olarak ele alınmıştır.

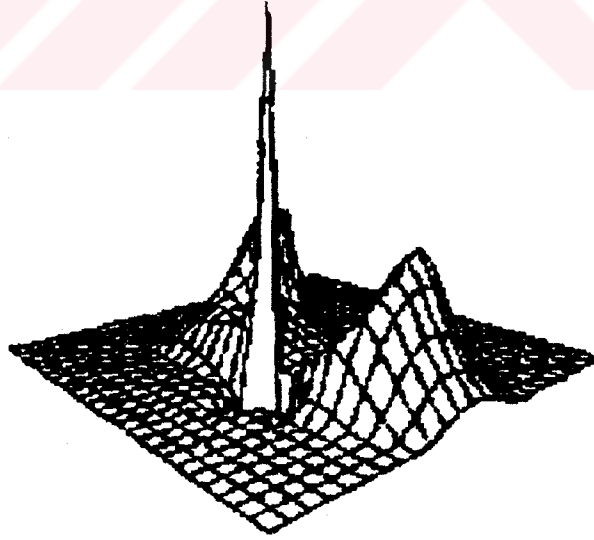
Şekil 14 - 16 da zamanın artan değerlerinde (151) – (153) probleminin çözümünün (yani, su ile doyma fonksiyonunun) dağılım dinamiği gösterilmiştir. Kolaylık için $N = 2$ alınmıştır. Şekil 16 dan görüldüğü gibi $T=2200$ gün olduğunda tabakalı ortama pompalanan su, petrol kuyusuna ulaşmış bulunur. Alınan sonuçlar fiziksel problemin dinamiğini efektif şekilde ifade etmektedir.



Şekil 14. Su ile doyma fonksiyonunun $T= 600$ gün zaman değerindeki dağılım dinamiği



Şekil 15. Su ile doyma fonksiyonunun $T= 1800$ gün zaman değerindeki dağılım dinamiği



Şekil 16. Su ile doyma fonksiyonunun $T= 2200$ gün zaman değerindeki dağılım dinamiği

2.4. Bir Boyutlu Nonlineer Diferansiyel Denklemler Sisteminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

Bu bölümde R_+^2 de lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemini inceleyeceğiz. R_+^2 de aşağıdaki denklemler sistemini göz önüne alalım

$$\frac{\partial G_1(u, v)}{\partial t} + \frac{\partial F_1(u, v)}{\partial x} = 0, \quad (163)$$

$$\frac{\partial G_2(u, v)}{\partial t} + \frac{\partial F_2(u, v)}{\partial x} = 0. \quad (164)$$

Burada, $G_i(u, v)$ ve $F_i(u, v)$, ($i = 1, 2$) fonksiyonları kendi argümanlarına göre sürekli ve sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlar olmaktadır. (163), (164) denklemler sistemi ile hidrodinamiğin ve fiziğin bir çok fiziksel önem taşıyan problemleri modellenmektedir. Söz konusu denklem sistemi için Cauchy probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında çözümü [30] ve [31] de incelenmiştir.

Bu bölümde hidrodinamikte meydana gelen iki özel durumu inceleyeceğiz:

1.Durum: $F_1(u, \rho) = 0.5u^2$, $F_2(u, \rho) = u\rho$, $G_1(u, \rho) = u$, $G_2(u, \rho) = \rho$. Bu durumda (163), (164) denklemleri

$$u_t + uu_x = 0, \quad (165)$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \quad (166)$$

biçimine dönüşür. (165), (166) diferansiyel denklemler sistemi bir boyutlu, zamana bağlı, sıkıştırılabilir akışkanların sabit basınç altında izentropik akışını temsil etmektedir. Burada u ve ρ , keyfi x noktasında ve t zamanında sırasıyla akışkanın hızını ve yoğunluğunu göstermektedir [18], [29], [37], [41].

2.Durum: $F_1(u, v) = \frac{K_w(u, v)}{K_w(u, v) + \mu K_0(u, v)}$, $F_2(u, v) = F_1(u, v)v + [1 - F_1(u, v)\psi(v)]$,

$$G_1(u, v) = u, G_2(u, v) = uv + (1 - u)\psi(v) + \frac{a(v)}{m}, \quad \mu = \frac{\mu_w(v)}{\mu_0(v)}$$

olsun. Burada $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ akışkan karışımının toplam hacmindeki su ve petrol kısımlarını belirleyen Buckley-Leverett fonksiyonları olarak isimlendirilen fonksiyonları; $K_w(u, v)$, $K_0(u, v)$ sırasıyla $F_1(u, v)$, $F_2(u, v)$ su ve petrol fazlarının kısmi geçirgenliğini gösterir. $a(v)$ geçirgen (gözenekli) ortamın birim hacmindeki çöküntünün kütlesi; $\psi(v)$ su ve petrol fazlarındaki aktif çözeltinin kütle konsantrasyonunu; $\mu_w(v)$, $\mu_0(v)$ sırasıyla su ve petrolün dinamik viskozitesini; m gözenekliliği (porosity) temsil eder.

2.4.1. Bir Boyutlu Gaz Dinamiği İçin Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

Genel olarak, R_+^2 de aşağıdaki gibi hiperbolik tipten kuazi lineer kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi için

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F_1(u, \rho)}{\partial x} = 0, \quad (167)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial F_2(u, \rho)}{\partial x} = 0 \quad (168)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (169)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad (170)$$

$$u(0, t) = u_1(t), \quad (171)$$

$$\rho(0, t) = \rho_1(t) \quad (172)$$

başlangıç-sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada, $u_0(x)$, $\rho_0(x)$, $u_1(t)$ ve $\rho_1(t)$ fonksiyonları bilinen fonksiyonlardır ve $\vec{F} = (F_1(u, \rho), F_2(u, \rho))$ aşağıdaki koşulları sağlayan u ve ρ değişkenlerine bağlı olarak verilmiş fonksiyonlardır:

(i) $F_1(u, \rho)$, $F_2(u, \rho)$ fonksiyonları $\vec{u} = (u, \rho)$ sınırlı vektör fonksiyonları için sınırlıdır ve $\vec{F}(u) \in C^2(Q)$, $Q \subset R_+^2$ dir;

(ii) $dF(u)$ Jakobiyen matrisi Q_T de reel ve ayrık özdeğerlere sahiptir;

(iii) $d^2F(u) \neq 0$ dir.

(167), (168) tipindeki denklemler sisteminin bir çok fiziksel problemi temsil ettiği iyi bilinmektedir. Örneğin, bu denklemler yer altı hidrodinamiğinde mevcut olan geçirgen ortamda gaz ve petrolün filtrasyon teorisinde, gaz dinamiği ve akışkanlar hidrodinamiğinde bulunan kütle, enerjinin, momentumun vs. korunum kanunlarını ifade eder [15], [40], [41], [44], [50], [53].

(167), (168) denklem sisteminin çözümleri için karakteristik özellik $u(x, t)$ ve $\rho(x, t)$ fonksiyonlarının x ve t değişkenlerine göre türevlerinin olmamasıdır. [52], [53] de gösterilmiştir ki, iyi başlangıç koşulları çerçevesinde bile (167), (168) denklemlerinin süreksizlik noktalarına sahip, yeri önceden bilinmeyen süreksiz çözümleri vardır. Ayrıca, bu çözüm iki parçadan; (167), (168) diferansiyel denklemlerini sağlayan sürekli kısım ve

Rankine-Hugoniot koşulunu sağlayan darbeden oluşan kısımdan ibarettir. Literatürden bilindiği gibi, bu tür fonksiyonlar zayıf ya da genelleştirilmiş çözüm olarak adlandırılır.

Tanım 20: $\varphi(x, T) = 0$ olmak üzere $\varphi(x, t) \in C_{1,1}^0(\mathbb{R}_+^2)$ keyfi bir test fonksiyonu olsun. (169)-(172) başlangıç-sınır koşullarını sağlayan ve

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \{\varphi_t(x, t)u(x, t) + \varphi_x(x, t)F_1(u(x, t), \rho(x, t))\} dx dt + \int_0^\infty u_0(x)\varphi(x, 0)dx + \int_0^T F(u_1(t), \rho_1(t))\varphi(0, t)dt = 0, \quad (173)$$

$$\iint_{\mathbb{R}_+^2} \{\varphi_t(x, t)\rho(x, t) + \varphi_x(x, t)F_2(u(x, t), \rho(x, t))\} dx dt + \int_0^\infty \rho_0(x)\varphi(x, 0)dx + \int_0^T F_2(u_1(t), \rho_1(t))\varphi(0, t)dt = 0 \quad (174)$$

integral eşitliklerini koruyan $u(x, t)$ ve $\rho(x, t)$ fonksiyonlarına (167)-(172) probleminin zayıf çözümü denir.

Tanım 20 den görüldüğü gibi, bu durumda $u(x, t)$ ve $\rho(x, t)$ fonksiyonları süreksiz de olabilir. Zayıf çözümlerin bulunmasında asıl zorluk, süreksizlik noktalarının bulunması ve çözümün ileri zaman evrelerinin bilinmemesidir.

Yerleri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarının varlığı (167)-(172) probleminin sayısal çözümünü bulmak için literatürden iyi bilinen herhangi bir klasik çözüm yöntemi uygulandığında sorunlar çıkarır. Çünkü süreksizlik noktaları (167), (168) deki türevlere sonlu fark formülleriyle yaklaşıma izin vermez.

1. Tür Yardımcı Problem: (167)-(172) esas probleminin sayısal bir çözümünü bulmak için aşağıdaki yardımcı problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + F_1\left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial \pi(x, t)}{\partial x}\right) = 0, \quad (175)$$

$$\frac{\partial \pi(x, t)}{\partial t} + F_2\left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial \pi(x, t)}{\partial x}\right) = 0, \quad (176)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad (177)$$

$$\pi(x, 0) = \pi_0(x), \quad (178)$$

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = u_1(t), \quad (179)$$

$$\frac{\partial \pi(0, t)}{\partial x} = \rho_1(t). \quad (180)$$

Burada $w_0(x)$ ve $\pi_0(x)$ fonksiyonları sırasıyla

$$\frac{dw_0(x)}{dx} = u_0(x), \quad (181)$$

$$\frac{d\pi_0(x)}{dx} = \rho_0(x) \quad (182)$$

denklemlerinin keyfi sürekli diferansiyellenebilen çözümleri olmaktadır.

Teorem 7: Eğer $w(x,t)$ ve $\pi(x,t)$ fonksiyonları (175)-(180) yardımcı probleminin çözümleri ise, bu taktirde

$$u(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x}, \quad (183)$$

$$v(x,t) = \frac{\partial \pi(x,t)}{\partial x} \quad (184)$$

ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları (167)-(172) esas probleminin çözümleridir.

(175)-(180) yardımcı problemi aşağıdaki avantajlara sahiptir:

(i) $w(x,t)$ ve $\pi(x,t)$ fonksiyonları, $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarından daha pürüzsüzdür. Üstelik, $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ mutlak sürekli fonksiyonlardır,

(ii) $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$, süreksizlik noktaları civarında tanımlı olmayan $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \rho}{\partial x}$

türevleri kullanılmadan hesaplanabilir.

(iii) Önerilen (175)-(180) yardımcı problemi $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ nin türevlerini içermediğinden (167)-(172) probleminin sayısal çözümü herhangi bir zorluk olmaksızın (175)-(180) denklemleri ve (183), (184) bağıntılarıyla elde edilebilir.

2. Tür Yardımcı Problem: (175)-(180) yardımcı problemini aşağıdaki gibi alternatif formda da

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_b^x u(\xi,t) d\xi + F_1(u(x,t), \rho(x,t)) = F_1(u_1(t), \rho_1(t)), \quad (185)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_b^x \rho(\xi,t) d\xi + F_2(u(x,t), \rho(x,t)) = F_2(u_1(t), \rho_1(t)) \quad (186)$$

yazmak mümkündür. (185), (186) denklem sistemine 2. tür yardımcı problem diyeceğiz. Bu integro-diferansiyel denklemlerinden görüldüğü gibi $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları süreksiz de olabilirler. Bu özellik (175)-(180) yardımcı probleminin önemli avantajlarından biridir. Bu avantajlar sayesinde, (167)-(172) esas probleminin sayısal çözümlerini bulmak için yardımcı problemin (185), (186) alternatif formundan yararlanılacaktır. (167)-(172)

sistemi için başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün yapısını incelemek amacıyla, ilk olarak gaz dinamiğinde ortaya çıkan denklemler sistemi göz önüne alınacaktır.

2.4.2. Sıkışabilir Sıvıların Sabit Basıncılı İzotropik Akış Problemi

Bu kısımda,

$$u_t + uu_x = 0, \quad (187)$$

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (188)$$

denklemleri (169)-(172) başlangıç ve sınır koşulları ile ele alınacaktır.

(187) denkleminin $\rho(x,t)$ den bağımsız olduğu açıktır. Bu nedenle çözümü kolayca elde edilebilir. (187), (169) ve (171) probleminin çözümü iki Cauchy probleminin çözümü ile ilişkilendirilebilir. (187), (169) ve (171) probleminin yerine

$$u_t + uu_x = 0, \quad (189)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad (190)$$

ve

$$u_t + uu_x = 0, \quad (191)$$

$$u(0,t) = u_1(t) \quad (192)$$

Cauchy problemleri ele alınacaktır.

(189), (190) probleminin çözümü karakteristikler metodu ile

$$u(x,t) = u_0(\xi) \quad (193)$$

olarak bulunur. Burada

$$\xi = x - ut \quad (194)$$

(189) denkleminin $u(x,t)$ eğimli karakteristiklerinin denklemidir. (189) denkleminin karakteristikleri x ve t koordinatlarının pozitif olduğu eksenlerinden geçer. (194) formülü x ekseninden geçen karakteristikleri gösterir. Eğer $u \neq 0$ ise,

$$u(x,t) = u_1(\tau), \quad (195)$$

$$\tau = t - \frac{x}{u} \quad \text{veya} \quad x = u(t - \tau) \quad (196)$$

ifadeleri (191), (192) probleminin çözümünü verir.

(196) denklemi, eğimi $1/u$ ya eşit olan ve x, t düzleminin birinci bölgesinde yer alan doğrunun denklemidir. Bu doğru üzerinde $u(x,t) = u_0(\xi)$ dir. Şimdi, t ekseninden geçen

karakteristiklerden herhangi birinin $t = \tau$ noktasından geçtiğini varsayalım. Bu doğrunun denklemi $x = u(t - \tau)$ olacaktır. (196) denklemi kullanılarak $\xi = -u\tau$ elde edilir. Ayrıca, $x = 0$ noktasında $u_0(\xi) = u_1(\tau)$ olur. Bu ise, $t = \tau$, $x = 0$ noktalarından geçen karakteristiklerin devamına ve kesişim noktasını $x = \xi$ ile göstermeye tekabül eder.

Bu durumda, (189), (190), (191) ve (192) probleminin çözümleri birleştirilerek (187), (169) ve (171) probleminin çözümü

$$u(x,t) = \begin{cases} u_0(\xi), & \xi > 0 \\ \frac{x}{t}, & u_0(\xi) < \frac{x}{t} < u_1(\tau) \\ u_1(\tau), & \tau > 0 \end{cases} \quad (197)$$

olarak elde edilir. Hesaplamalarla, (197) bağıntısının (187) denklemini gerçekleştirdiği gösterilebilir. Eğer x ve t ye göre u_x ve u_t türevleri hesaplanırsa

$$u_x = \frac{u'_0(\xi)}{1 + u'_0(\xi)t}, \quad u_t = \frac{-uu'_0(\xi)}{1 + u'_0(\xi)t}$$

bulunur. Eğer $t = -\frac{1}{u'_0}$ olursa u_x ve u_t türevleri sonsuz olur. Benzer şekilde, eğer

$x = -\frac{1}{u'_1(\tau)}$ olursa, yine u_x ve u_t türevleri sonsuza eşit olur. $u_0(\xi) = u_1(\tau)$ dır. Eğer $\xi > 0$

ise $u'_0(\xi)$ nin negatif olduğu ilk noktada u_x ve u_t türevleri sonsuza eşittir. (197) ifadesi (187), (169), (171) probleminin alternatif bir formudur ve genel olarak pratikteki uygulamalar için faydalı değildir. (197) den (187), (169) ve (173) probleminin çözümünün herhangi bir $x \geq 0$ noktası için çok değerli bir fonksiyon olduğu görülür. Yani, eğer $u_1 > u_0$ ise (197) çözümü hemen çok değerli olur. Şimdi,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0, \quad (198)$$

$$\rho(x,0) = \rho_0(x), \quad (199)$$

$$\rho(0,t) = \rho_1(t) \quad (200)$$

problemini göz önüne alalım. Bu problemin gerçek çözümünü oluşturmak için

$$w_t + uw_x = 0, \quad (201)$$

$$w(x,0) = w_0(x), \quad (202)$$

$$w(0,t) = w_1(t) \quad (203)$$

yardımcı problemini önerelim. Burada $w_0(x)$, $\frac{dw_0}{dx} = \rho_0(x)$ denkleminin herhangi bir sürekli diferansiyellenebilen çözümüdür. (201) denkleminin $x = 0$ noktasında gerçekleştiği varsayalım. (201) den

$$w(x,t) = - \int_0^x u(x,\tau) \rho(x,\tau) d\tau \quad (204)$$

veya

$$w(0,t) = - \int_0^x u_1(\tau) \rho_1(\tau) d\tau \equiv w_1(t) \quad (205)$$

elde edilir.

Teorem 8: Eğer $w(x,t)$, (201) – (203) yardımcı probleminin bir çözümü ise, bu takdirde

$$\rho(x,t) = \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (206)$$

ile tanımlanan $\rho(x,t)$ fonksiyonu (198) – (200) esas probleminin çözümüdür.

Şimdi,

$$w_t + uw_x = 0, \quad (207)$$

$$w(x,0) = w_0(x) \quad (208)$$

ve

$$w_t + uw_x = 0, \quad (209)$$

$$w(0,t) = w_1(t) \quad (210)$$

Cauchy problemlerini göz önüne alalım. Karakteristikler metodu kullanılarak (207), (208) denkleminin

$$w(x,t) = w_0(x - ut) \equiv w_0(\xi) \quad (211)$$

çözümü elde edilir. (209), (210) denkleminin çözümü ise

$$w(x,t) = w_1(\tau) \quad (212)$$

olmaktadır. Burada

$$\tau = t - \frac{x}{u} \quad (213)$$

dır. (211) ve (212) çözümleri birleştirilerek (201) – (203) probleminin çözümü için

$$w(x,t) = \begin{cases} w_0(\xi), & \xi > 0 \\ w_1(\tau), & \tau > 0 \end{cases} \quad (214)$$

ifadesi elde edilir. $\xi > 0$ olduğu durumda w_x türevi aşağıdaki gibi hesaplanır

$$\rho(x,t) = \frac{\rho_0(x-ut)}{1+t\rho'_0(x-ut)}. \quad (215)$$

[28], [37] de $\rho(x,t)$ fonksiyonunun (198) denklemini sağladığı ispatlanmıştır. (213) ve (206) dikkate alınarak teorem 8 ispatlanır. Elde edilen sonuçlar (187), (188) ve (169)-(172) probleminin çözümlerinin her ikisinde de çok değerlilik ortaya çıktığını gösterir. Bundan dolayı, bu problemin klasik çözümü yoktur ve zayıf çözümü ise aşağıdaki biçimde tanımlanır.

Tanım 21: Eğer (169) – (172) başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları, R_+^2 de tanımlı, x ve t ye göre diferansiyellenebilen her φ test fonksiyonu için

$$\iint_{R_+^2} \left\{ \varphi_t(x,t)u(x,t) + \varphi_x(x,t)\frac{u^2(x,t)}{2} \right\} dxdt + \int_0^\infty u_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T u_1(t)\varphi(0,t)dt = 0, \quad (216)$$

$$\iint_{R_+^2} \left\{ \varphi_t(x,t)\rho(x,t) + \varphi_x(x,t)u(x,t)\rho(x,t) \right\} dxdt + \int_0^\infty \rho_0(x)\varphi(x,0)dx + \int_0^T \rho_1(t)\varphi(0,t)dt = 0 \quad (217)$$

integral bağıntılarını gerçeklerse, bu taktirde $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarına (187), (188) ve (169) – (172) probleminin zayıf çözümü denir

Artık $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları süreksiz de olabilirler. Yukarıda bahsi geçen (187), (188) ve (169) – (172) probleminin zayıf çözümünü hesaplamak için aşağıdaki yardımcı problem önerilecektir

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \right)^2 = 0, \quad (218)$$

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + u(x,t) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} = 0, \quad (219)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad (220)$$

$$u(0,t) = u_1(t), \quad (221)$$

$$w(0,t) = \rho_0(t), \quad (222)$$

$$\rho(x,0) = u_1(t). \quad (223)$$

Burada $v_0(x)$ ve $w_0(x)$ fonksiyonları

$$\frac{dv_0(x)}{dx} = u_0(x), \quad (224)$$

$$\frac{dw_0(x)}{dx} = \rho_0(x) \quad (225)$$

bağıntılarını sağlayan keyfi sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır.

Teorem 9: Eğer $v(x,t)$ ve $w(x,t)$ (218) – (223) yardımcı probleminin çözümleri ise, bu takdirde (197) ve (206) ile tanımlanan $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları esas problemin zayıf çözümleridir.

Yardımcı çözüm aşağıdaki avantajlara sahiptir:

(i) $v(x,t)$ ve $w(x,t)$ fonksiyonları $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonlarından daha pürüzsüzdür, yani $v(x,t)$ ve $w(x,t)$ fonksiyonlarının diferansiyellenebilme özellikleri u ve ρ nun diferansiyellenebilme özelliğinden bir basamak yüksektir.

(ii) $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$, süreksizlik noktaları civarında tanımlı olmayan $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ türevleri kullanılmaksızın belirlenebilir.

Zayıf çözüm kavramı hidrodinamiğin denklemlerine farklı yaklaşım elde etmek için kullanılır. P. Lax, [13] de sayısal hesaplamanın ne şekilde faydalı olabileceğini göstermiştir. Lax ve Wendroff ise [23] de diferansiyel denklemlerin zayıf çözümlerine yakınsak çözümlere götüren farklı metotlar sınıfının tam olduğunu gösterdiler. Bununla birlikte, hidrodinamik denklemlerinin zayıf çözümlerine yakınsayan sonlu fark çözümlerinin elde edilmesine rağmen sonlu fark yöntemleri hidrodinamik denklemlerine direkt uygulanamaz. Gerçekten de, (187) denkleminin sonlu fark metodu ile yaklaşım yapıldığı zaman, aslında (187) denkleminin çözümü değil; h ağ adımı olmak üzere

$$u_t + uu_x = hu_{xx} \quad (226)$$

uyarlanmış denkleminin çözümü [26]. (187), (188), (169) ve (170) probleminin çözümünün bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahip olduğunu ve (187) denkleminin sonlu fark metodu ile yaklaşım yapılamayacağını vurgulamak gerekir. Ayrıca, sebebiyet ilkesi bozulur; yani, denklemin sonlu fark metodu ile direkt olarak yaklaşım kurulduğunda, dalga fiziksel olarak erişmediği bir noktaya suni olarak taşınmış olur. Dolayısıyla, bu yaklaşım yanlış çözümlere neden olur.

Süreksizliklerin İnşası: Bu kısımda, süreksizlik noktalarını bulma ve zamanla değişimlerini belirleme problemi ele alınacaktır. Bunun için, ileride gerekecek bazı ifadelere yer verilecektir. $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ çözümleri çok değerli fonksiyonlar olduğundan fiziksel olarak anlamlı bir çözümü elde etmek için

$$E_1(t) = \int_0^x \left[\frac{1}{2} u_1^2(t) - \frac{1}{2} u^2(x,t) \right] dt, \quad (227)$$

$$E_2(t) = \int_0^x [u_1(t)\rho_1(t) - u(x,t)\rho(x,t)] dt \quad (228)$$

enerji integralleri göz önüne alalım. (227) ve (228) ile verilen integraller hem sürekli hem de süreksiz fonksiyonlar için mevcuttur. Yukarıda önerilen yardımcı problemi

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x u(\xi,t) d\xi + \frac{1}{2} u^2(x,t) - \frac{1}{2} u_1^2(t) = 0, \quad (229)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^x \rho(\xi,t) d\xi + u(x,t)\rho(x,t) - u_1(t)\rho_1(t) = 0 \quad (230)$$

olarak tekrar yazalım.

Tanım 22: (227), (228) ile tanımlanan ve t nin herhangi bir değeri için $E_1(t)$ ve $E_2(t)$ sayılarına $v(x,t)$ ve $w(x,t)$ fonksiyonlarının kritik değerleri denir.

Tanım 23: Her t için $v(x,t)$ veya $\rho(x,t)$ nin kritik değer aldığı noktaların yerine ön noktası (front noktası) denir.

Tanım 24:

$$v_{ext}(x,t) = \begin{cases} v(x,t), & v < E_1(t) \\ E_1(t), & v \geq E_1(t) \end{cases}, \quad (231)$$

$$w_{ext}(x,t) = \begin{cases} w(x,t), & w < E_2(t) \\ E_2(t), & w \geq E_2(t) \end{cases} \quad (232)$$

ile tanımlanan fonksiyonlar (218)-(222) probleminin genişletilmiş çözümü olarak adlandırılır.

Teorem 7 den, zayıf çözüm için

$$u_{ext}(x,t) = \frac{\partial v_{ext}(x,t)}{\partial x}, \quad (233)$$

$$\rho_{ext}(x,t) = \frac{\partial w_{ext}(x,t)}{\partial x} \quad (234)$$

elde edilir.

Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Fark Yöntemi: Önceki kısımda gösterildiği üzere, eğer başlangıç profili hem pozitif hem de negatif eğime sahipse, bu taktirde sonlu bir T_0 zamanı vardır öyle ki $t \geq T_0$ için (167)-(172) probleminin çözümleri süreksiz olur ve süreksizlik noktalarının yeri önceden bilinemez. Üstelik, (167)-(172) probleminin gerçek çözümünü oluşturmak kolay değildir. Bu bağlamda, (167)-(172) probleminin çözümü için sayısal bir yöntem kullanmak kaçınılmazdır. İlk kısımda gösterildiği gibi, bu problemin çözümü yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahiptir. Gerçek çözümün içerdiği bu özellikler sözü edilen probleme klasik sayısal metotların doğrudan uygulanmasına izin vermez. Önerilen yardımcı problemin avantajlarını kullanarak, yeni bir sayısal algoritma önerilecektir. [22], [35], [42] de önerilen sayısal yöntem sadece nonlinear skaler bir denklem için çalışmaktadır.

Sayısal yöntemi kurmak için problemin tanım bölgesi

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_k) \mid x_i = ih, t_k = k\tau, i = 0, 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots; h > 0, \tau > 0\}$$

ağı ile örtülür. Burada h ve τ sırasıyla x ve t değişkenlerine göre ağın adımlarıdır.

Böylece (167)-(172) esas problemi yerine (175)-(180) yardımcı problemine $\Omega_{h,\tau}$ ağının herhangi bir (i, k) noktasında sonlu fark yöntemi ile yaklaşım kurular. (175)-(180) denklemlerine yaklaşım kurmak için öncelikle, keyfi $(x_i, t_k) \in \Omega_{h,\tau}$ noktalarında (175)-(180) denklemindeki integrale karşılık gelen

$$\int u(\xi, t) d\xi = h \sum_{j=1}^i U_{j,k} \quad (235)$$

yaklaşık ifadesini kullanalım. (235) ve ileri Euler zaman fark yaklaşımı, (185), (186) denklemleri için

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} + \frac{\tau}{h} F_1(u_1(t_k), v_1(t_k)) - \frac{\tau}{h} F_1(U_{i,k}, V_{i,k}) - \sum_{j=1}^{i-1} (U_{j,k+1} - U_{j,k}), \quad (236)$$

$$V_{i,k+1} = V_{i,k} + \frac{\tau}{h} F_2(u_1(t_k), v_1(t_k)) - \frac{\tau}{h} F_2(U_{i,k}, V_{i,k}) - \sum_{j=1}^{i-1} (V_{j,k+1} - V_{j,k}) \quad (237)$$

sonlu fark denklemlerini verir. Burada $U_{i,k}$ ve $V_{i,k}$, $(x_i, t_k) \in \Omega_{h,\tau}$ noktasında sırasıyla $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ fonksiyonlarının değerlerini gösterir. (236), (237) için başlangıç koşulları

$$U_{i,k} = u_0(x_i), \quad V_{i,k} = v_0(x_i)$$

dır. (229) ve (230) için benzer sonlu fark denklemleri

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} + \frac{\tau}{2h} u_1^2(t_k) - \frac{\tau}{2h} U_{i,k}^2 - \sum_{j=1}^{i-1} (U_{j,k+1} - U_{j,k}), \quad (238)$$

$$\varphi_{i,k+1} = \varphi_{i,k} + \frac{\tau}{h} u_1 \rho_1(t_k) - \frac{\tau}{h} U_{i,k} \varphi_{i,k} - \sum_{j=1}^{i-1} (\varphi_{j,k+1} - \varphi_{j,k}) \quad (239)$$

dır.

Diferansiyellenebilir $u(x,t)$ ve $\rho(x,t)$ fonksiyonları için (236), (237) sonlu fark denklemleri

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{\tau} + \frac{F_1(U_{i,k}, V_{i,k}) - F_1(U_{i-1,k}, V_{i-1,k})}{h} = 0, \quad (240)$$

$$\frac{V_{i,k+1} - V_{i,k}}{\tau} + \frac{F_2(U_{i,k}, V_{i,k}) - F_2(U_{i-1,k}, V_{i-1,k})}{h} = 0 \quad (241)$$

denklemlerine denktir.

2.4.3. Önerilmiş Yöntemin Petrolün Kimyasal Aktif Sıvı ile Sıkıştırılması Problemine Uygulanması

Petrol dinamiğinde bazı durumlarda filtrasyon prosesini aktifleştirmek amacı ile suya bazı kimyasal aktif maddeler eklenir (örneğin polimerler, mineral tuzlar, CO_2 , vs...). Söz konusu kimyasal sıvılar petrolün fiziksel özelliklerini değiştirmeye filtrasyon sürecine yardım eder. Burada tezde önerilen yöntem petrolün su ile sıkıştırılması problemine uygulanmıştır. Kapilyar basınç dikkate alınmamıştır.

Söz konusu problem [55], [56] aşağıdaki gibi nonlinear kısmi türevli denklemler sistemi için yazılmış başlangıç-sınır değer probleminin çözümüne indirgenmektedir

$$m \frac{\partial s}{\partial t} + w(t) \frac{\partial F_1(s, c)}{\partial x} = 0, \quad (242)$$

$$m \frac{\partial G(s, c)}{\partial t} + w(t) \frac{\partial F_2(s, c)}{\partial x} = 0. \quad (243)$$

Burada, $w(t)$ suyun filtrasyon hızı ve $F_1(s, c)$, $F_2(s, c)$, $G(s, c)$ sırasıyla kısım 2. 4 de verilen fonksiyonlardır. (242), (243) sistemi için yardımcı problem (185), (186) şeklindedir. Aşağıdaki sonlu fark denklemleri ile (242) – (243) denklemleri ayrıklaştırılır

$$S_{i,k+1} = S_{i,k} + \frac{w(t)\tau}{hm} (F_1(s_1(t_k), c_1(t_k)) - F_1(S_{i,k}, C_{i,k})) - \sum_{j=1}^{i-1} (S_{j,k+1} - S_{j,k}), \quad (244)$$

$$C_{i,k+1} = C_{i,k} + \left\{ \frac{w(t)\tau}{hm} (F_2(s_1(t_k), c_1(t_k)) - F_2(S_{i,k}, C_{i,k})) \right\} [G_c(S_{i,k}, C_{i,k})]^{-1} \\ - \left\{ \sum_{j=1}^i G_s(S_{i,k}, C_{i,k})(S_{j,k+1} - S_{j,k}) - \sum_{j=1}^{i-1} G_c(S_{i,k}, C_{i,k})(C_{j,k+1} - C_{j,k}) \right\} \times [G_c(S_{i,k}, C_{i,k})]^{-1} \quad (245)$$

(244) – (245) için başlangıç koşulları aşağıdaki ifadelerle verilsin

$$S_{i,k} = s_0(x_i), \quad C_{i,k} = c_0(x_i).$$

T_0 , gözenekli ortamdaki karbonlaştırılmış suyun pompalanma zamanını göstermek üzere

$$s_0(x) = 0.2, \quad c_0(x) = 0, \quad (246)$$

$$s_1(t) = 1, \quad c_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t \leq T_0 \\ 0, & t > T_0 \end{cases} \quad (247)$$

verileri ve (242) – (243) algoritması göz önüne alınarak, bazı sayısal deneylere ulaşılır. Su ve petrolün viskozitesi aşağıdaki ifadelerle verilir [36]

$$\mu_w(c) = 1 + 0.55 \frac{c}{c^*} - 0.3 \left(\frac{c}{c^*} \right)^2, \quad c^* = 0.086,$$

$$\mu_o(c) = 1.45 - 14.7 \frac{c}{c^*} + 5.5 \left(\frac{c}{c^*} \right)^2.$$

Buckley-Leverett fonksiyonları aşağıdaki biçimde ifade edilir

$$K_w(s, c) = \begin{cases} 0, & s < 0.2 \\ \left(\frac{s - 0.2}{0.8} \right)^3, & s \geq 0.2, \end{cases}$$

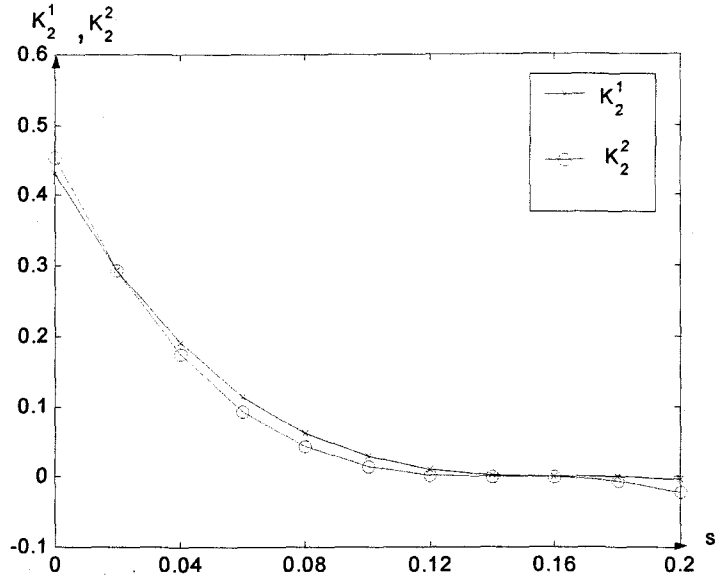
$$K_o(s, c) = \begin{cases} 0, & s \geq 0.83 \\ K_2^1 C_2, & 0.74 < s < 0.83 \\ (K_2^1 - K_2^2) C_2 + K_2^2, & s \leq 0.74, \end{cases}$$

$$C_2 = \frac{\varphi(c)}{Kc}, \quad \varphi(c) = Kc, \quad a(c) = 0,$$

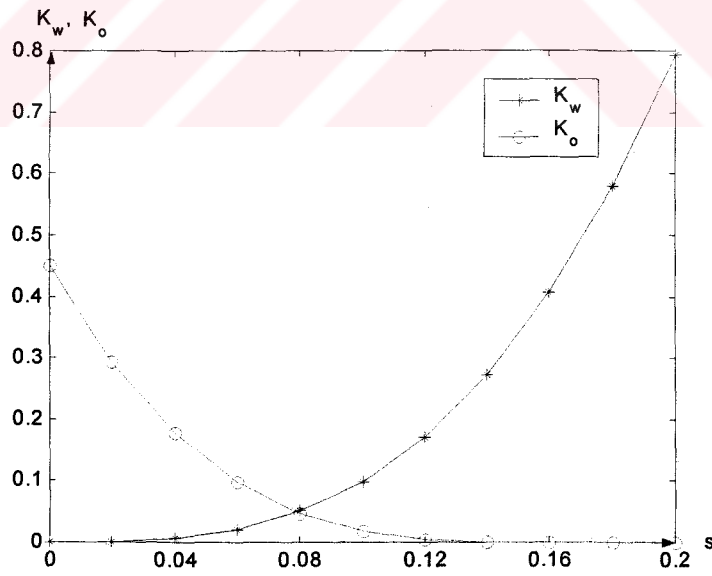
$$K_2^1 = \left(\frac{0.83 - s}{0.834} \right)^3, \quad K_2^2 = \left(\frac{0.74 - s}{0.715} \right)^3,$$

$$m = 0.2, \quad w(t) = 3.016 \cdot 10^{-5}.$$

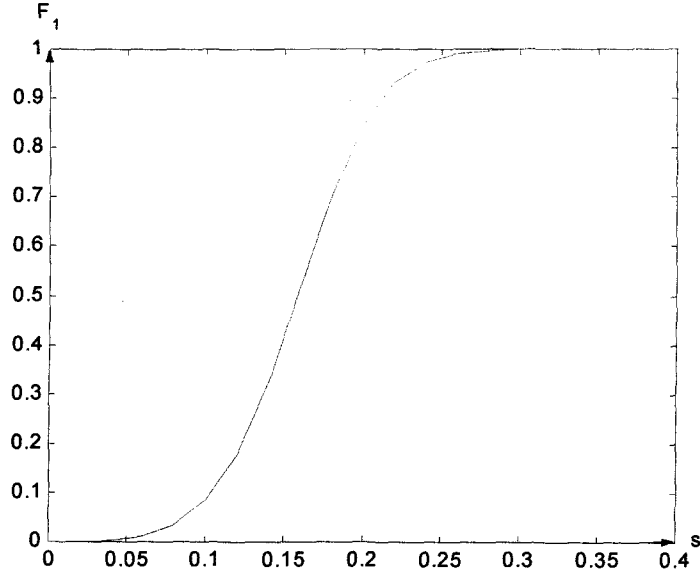
Şekil 17 – 20 K_2^1 , K_2^2 ve K_o , K_w fonksiyonlarının su ile doyma fonksiyonlarına göre değişimini göstermektedir. Son olarak, $S_{i,k}$ su ile doyma fonksiyonunun ve $C_{i,k}$ konsantrasyon fonksiyonunun zamanın farklı değerlerindeki dağılım dinamiği şekil 21 ve 22 de verilmektedir.



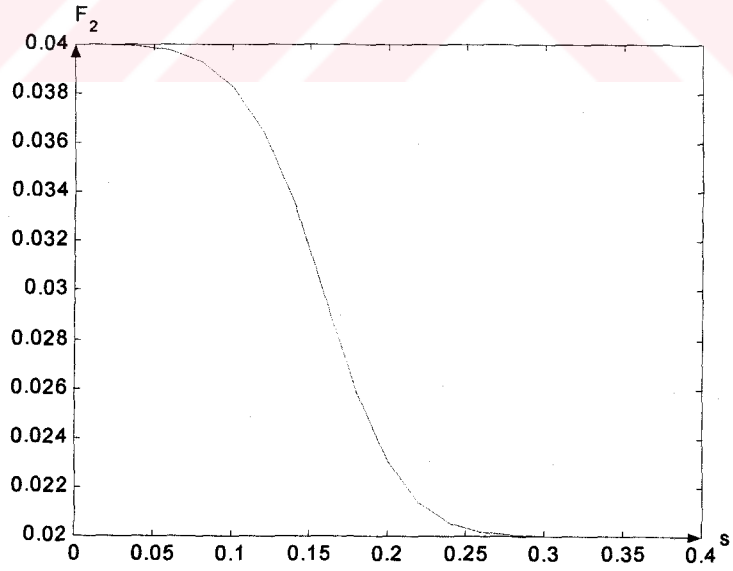
Şekil 17. K_2^1 , K_2^2 fonksiyonlarının doyma fonksiyonlarına göre değişimi



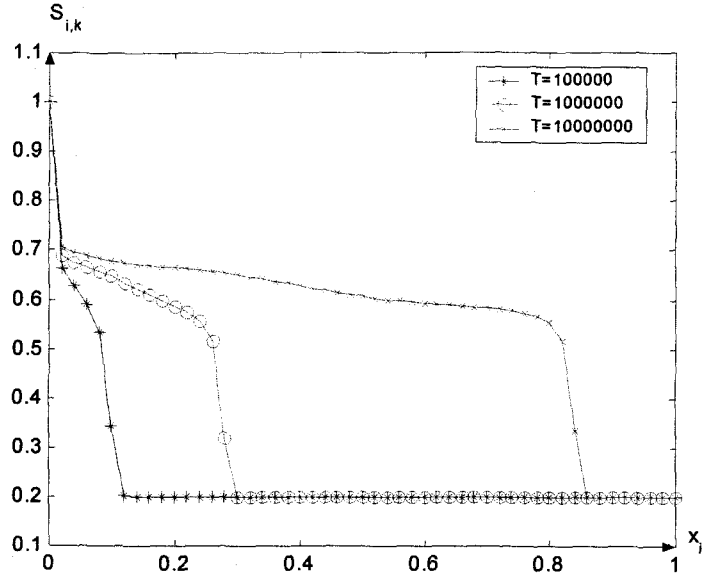
Şekil 18. Suyun (K_w) ve petrolün (K_o) nisbi geçirgenliğinin doyma fonksiyonuna göre dağılımı



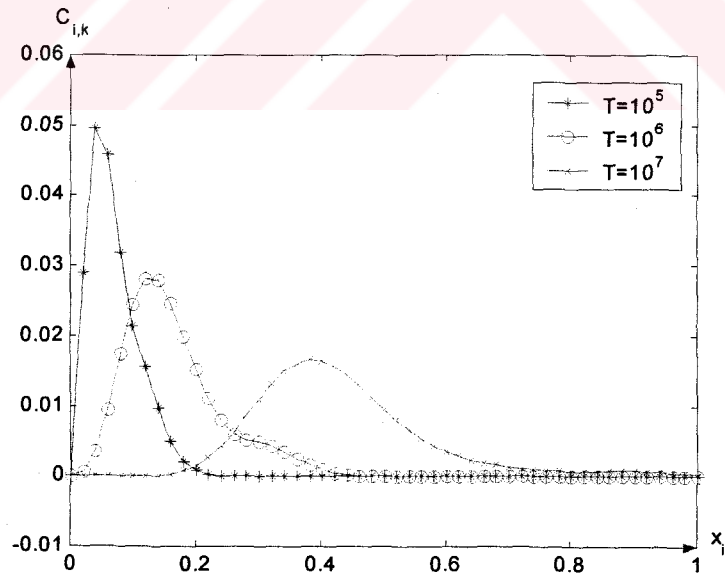
Şekil 19. Toplam sıvıdaki su oranını gösteren Buckley – Leverett fonksiyonu



Şekil 20. Toplam sıvıdaki petrol oranını gösteren Buckley – Leverett fonksiyonu



Şekil 21. Su ile doyma fonksiyonunun zamanın farklı değerlerindeki dağılım dinamiği



Şekil 22. Konsantrasyon fonksiyonunun zamanın farklı değerlerindeki dağılım dinamiği

2.5. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Nonlinear Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

Yukarıdaki bölümlerde biz birinci mertebeden nonlinear kısmi türevli denklem ve denklemler sistemi için yazılmış başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin süreksiz fonksiyonlar sınıfında (gerçek ve sayısal) çözümünün bulunması için bir yöntem geliştirmiştik.

Bu bölümde ise yukarıda geliştirdiğimiz yöntemi ikinci mertebeden nonlinear dalga denklemi için yazılmış Cauchy probleminin çözümüne uygulayacağız. Bu nedenle önce söz konusu yöntemi telin küçük titreşimlerini modelleyen lineer dalga denkleminin gerçek çözümünün bulunması için uygulayacağız ve geliştirilmiş yöntemin avantajlarını irdelleyeceğiz. Daha sonra aynı problemin sayısal çözümünü elde etmek için etkin algoritmalar oluşturacağız.

2.5.1. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Lineer Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Gerçek Çözümü

Literatürden bilindiği gibi [18], [37], [38], [57], [58], [59], telin titreşim (veya dalga) denklemi olarak bilinen kısmi türevli lineer

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta_x u(x,t) + f(x,t) \quad (248)$$

diferansiyel denklemi akustikte, elastiklik teorisinde, elektromagnetizmde, optikte ve bir çok fiziksel olayların modelleştirilmesinde ortaya çıkmaktadır. Burada c^2 -sabit, Δ_x -

Laplace operatörü ($n=1$ olduğu durum da $\Delta_x = \frac{d^2}{dx^2}$), $u = u(x,t)$ bilinmeyen fonksiyon, $f(x,t)$ ise bilinen kaynak fonksiyonudur. Kolaylık için $f(x,t) \equiv 0$ olduğu durumu göz önüne alacağız.

Literatürden bilindiği gibi (248) denkleminin uygun başlangıç ve sınır koşulları altında çözümü, göz önüne aldığımız fiziksel problemlerin gerçek özelliklerini ifade etmemektedir. Çünkü, örnek olarak akustikte bu denklem ısı iletimi ve akışkanlık dikkate alındığı takdirde nonlinear denklem olmaktadır. Söz konusu denklem u , $\rho - \rho_0$, $p - p_0$, büyüklüklerine göre lineerleştirerek ele alınmaktadır. Genelde lineer denklemlerin çözümleri göz önüne alınan fiziksel olayın dinamiğini düzgün ifade etmemektedir. Eğer fiziksel heyecanlanma yeteri kadar küçük değilse (örneğin, darbe dalgalarında, süperonik

akışlarda sestem hızlı uçakların hareketinde vs. gibi olaylarda) lineer denklemler bu tür olayları modellemeye imkan vermemektedirler. Ayrıca lineer teori ile ısı ve akışkanlığın etkisini incelemek mümkün olmamaktadır.

Bu sorulara cevap vermek için nonlinear dalga denklemlerinin çözümünün bulunması zorunlu olmaktadır. Ayrıca literatürde,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi(u)}{\partial x^2} + F(u) = 0 \quad (249)$$

şeklindeki denklemler $\varphi(u)$ ve $F(u)$ fonksiyonları özel ve basit olduğu durumda incelenmektedirler. Örneğin $\varphi(u) = u$, $F(u) = \sin u$ olduğu durumda Sin-Gordon denklemi olarak bilinen nonlinear denklem optiğin bir çok problemini modellerken ortaya çıkmaktadır [46], [57], [60], [61] ve bu denklemin analitik çözümünün bulunması [57] de incelenmektedir. Fakat, keyfi $\varphi(u)$ ve $F(u)$ fonksiyonları için (249) denkleminin belli şartlar altında gerçek çözümünün bulunması imkansızdır. Bu sebepten (249) denkleminin sayısal çözümünün bulunması kaçınılmazdır. Bu denklemin sayısal çözümünün bulunması için uygulanan klasik yöntemler $u(x,t)$ fonksiyonunun yüksek mertebeden süreksiz diferansiyellenmesini talep etmektedir. Ama, nonlinear diferansiyel denklemlerin çözümü diferansiyellenmeyen fonksiyon da olabilir.

Bu bölümde (249) ($F(u) \equiv 0$) denkleminin uygun başlangıç şartları altında süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünün bulunması için bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntem önce lineer dalga denklemine uygulanmış, ele alınan analitik ve sayısal çözüm karşılaştırılmıştır. (249) denklemini için Cauchy ve sınır değer probleminin incelenmesi başka bir çalışma konusu olacaktır.

$u_0(x)$ ve $u_1(x)$ bilinen fonksiyonlar olmak üzere (248) denkleminin

$$u(x,0) = u_0(x), \quad (250)$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = u_1(x) \quad (251)$$

şartlarını sağlayan tek çözümünün mevcut olduğu ve bu çözümün

$$u(x,t) = \frac{1}{2} [u_0(x+ct) + u_0(x-ct)] + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(z,t) dz \quad (252)$$

D'Alambert formülü ile verildiği ispatlanmıştır ([2], [40], [41], [57], [62], [63], [64] vs.).

Eğer $u_0(x) \in C^2(Q_T)$ ve $u_1(x) \in C^1(Q_T)$ olursa (248), (250), (251) başlangıç değer probleminin klasik çözümü vardır ve $u(x,t) \in C^2(Q_T) \cap C^1(Q_T \cup \{t=0\})$ dir. Bu çözüm

D'Alambert formülü olarak ifade edilir [2], [18], [20], [41], [63], [64]. Ama , pratik fiziksel olayları modellerken $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ bu özelliğe sahip olmayan fonksiyonlar olurlar. Diğer bir deyişle $\text{supp } u_0(x)$ ve $\text{supp } u_1(x)$ kompakt küme oluştururlar. Dolayısıyla, (252) formülü ile bulunan $u(x,t)$ çözümü (248) denklemini sağlamamaktadır.

Fonksiyonel analizden bilindiği üzere, iki kez sürekli diferensiyellenebilen $\varphi(x)$ fonksiyonlarının uzayı, Φ tam değildir. Yani $\|\varphi\|_\Phi$ anlamında olan yaklaşımdan $\varphi''(x)$ fonksiyonlarının bu norma göre yaklaşımı çıkmamaktadır. Φ uzayına, yüksek dereceden sürekli elemanların tüm temel dizilerini eklemekle bu yetersizliği ortadan kaldırmak mümkün olur. Metrik uzayların bu tür ideal elemanlar ile tamlanması uzayların tamlanması olarak bilinmektedir.

Farz edelim ki, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ fonksiyonları herhangi $(-L, L)$ aralığında tanımlanmış sürekli fonksiyonlardır. Böyle fonksiyonları $(-L, L)$ de düzgün yakınsak $u_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_0^{(n)}(x)$, $u_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_1^{(n)}(x)$ dizilerin limiti gibi ifade etmek mümkün olmaktadır. Burada $u_0^{(n)}(x)$ ve $u_1^{(n)}(x)$ sürekli diferansiyellenebilen fonksiyonlardır. Bu durumda (252) formülü ile bulunan $u_n(x,t)$ dizisi tanım bölgesinde $u(x,t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ve limit fonksiyonu da (248), (250), (251) probleminin zayıf çözümü olarak tanımlanacaktır. Böyle tanımlanan zayıf çözümler süreksiz fonksiyonlar da olabilirler.

Diğer taraftan (248) denklemini sonlu farklarla ayrıklaştırmak için $u(x,t)$ daha yüksek mertebeden diferansiyellenebilir olmak zorundadır. (248), (250), (251) problemi için zayıf çözüm varlığı aşağıdaki teorem ile ispatlanmış olur [2].

Teorem 10: (Sobolev, S. L. [2]) $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ sırasıyla üçüncü ve ikinci mertebeden genelleşmiş türevlere sahip, sonlu bölgede kareleri integrallenebilen fonksiyonlar olsun. Bu taktirde (248), (250), (251) probleminin iki kez türevlenebilen çözümü vardır.

Herhangi bir problemi gerçekleyen çözümler sınıfını geliştirirken, çözümün tekliği probleminin korunması gerekmektedir. Önerilen genelleştirme yöntemi yeteri kadar sürekli diferensiyellenebilen katsayılara sahip eliptik ve parabolik tür denklemler için klasik çözümler sınıfını tamlamaya imkan vermemektedir. Hiperbolik tür denklemler için ise bu yöntem geniş uygulanmaktadır.

(248), (250), (251) probleminin zayıf çözümünü şöyle tanımlayalım.

Tanım 25: (250), (251) başlangıç koşullarını ve $C_{2,2}^0(R_T^2)$ uzayından, $f(x,T) = 0$ şartını sağlayan keyfi $f(x,t)$ test fonksiyonları için

$$\int_{R_T^2} u(x,t) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) \frac{\partial f}{\partial t} dx - \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x) f(x,0) dx = 0 \quad (253)$$

integral eşitliğini koruyan $u(x,t)$ fonksiyonuna (248), (250), (251) probleminin zayıf çözümü denir.

Şimdi (248), (250), (251) probleminin $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ fonksiyonlarının sürekli ve parçalı türevlenebilir olması koşulu altında zayıf çözümünü bulalım.

Yardımcı problem ve çözümü. Önceki bölümlerde olduğu gibi (248), (250), (251) problemine karşılık gelen

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}, \quad (254)$$

$$v(x,0) = v_0(x), \quad (255)$$

$$\frac{\partial v(x,0)}{\partial t} = v_1(x). \quad (256)$$

yardımcı problemini verelim Burada $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ fonksiyonları sırasıyla

$$\frac{d^2 v_0(x)}{dx^2} = u_0(x) \quad \text{ve} \quad \frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} = u_1(x) \quad (257)$$

denklemlerini sağlayan keyfi fonksiyonlar olmaktadırlar. (257) denkleminden görüldüğü gibi $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ ikinci mertebeden sürekli diferensiyellere sahip fonksiyonlardır ve dolayısıyla (254) – (256) probleminin klasik çözümü vardır ve bu çözüm (252) D’Alambert formülü ile ifade edilebilir.

Teorem 11: Eğer $v(x,t)$ fonksiyonu (254) – (256) probleminin çözümü ise,

$$u(x,t) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} \quad (258)$$

ifadesi ile bulunan $u(x,t)$ fonksiyonu (248), (250), (251) probleminin (253) anlamında zayıf çözümü olmaktadır.

Teoremi ispatlamak için (254) denkleminin $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ fonksiyonuyla çarpımının R_T^2 bölgesi üzerinden integraline iki kez kısmi integrasyon formülünü uygulayarak belli işlemler yapmak yeterlidir.

Similasyonlar. Similasyonlarda telin başlangıç profili ve başlangıç hızı için aşağıdaki fonksiyonları kullanalım

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{u_1}{x_3 - x_1}(x - x_1), & x_1 \leq x < x_3, \\ \frac{u_1}{x_3 - x_2}(x - x_2), & x_3 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x_2 > 0 \end{cases} \quad (259)$$

ve

$$u_1(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \alpha, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x > x_2 \end{cases} \quad (260)$$

Burada $x_3 \in (x_1, x_2)$ ve $u_1, x_1, x_2, x_3, \alpha$ belli sabitlerdir. (254) – (256) probleminin çözümünü elde etmek için önce $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ fonksiyonlarını bulalım. Bu amaçla, önce (257) denklemlerini sağlayan ve iki kez sürekli diferansiyellenebilen çözümleri aşağıdaki şekilde buluruz

$$v_0(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{u_1}{6(x_3 - x_1)}(x - x_1)^3, & x_1 \leq x < x_3, \\ \frac{u_1}{6(x_3 - x_2)}(x - x_2)^3 + \frac{u_1}{2}(x_2 - x_1)x + E, & x_3 \leq x \leq x_2, \\ \frac{u_1}{2}(x_2 - x_1)x + E, & x > x_2, \end{cases} \quad (261)$$

$$E = \frac{u_1}{6}[x_1^2 + x_3(x_1 - x_2) - x_2^2];$$

$$v_1(x) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{\alpha(x - x_1)^2}{2}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ \alpha(x_2 - x_1)x + \frac{\alpha}{2}(x_1^2 - x_2^2), & x > x_2 \end{cases} \quad (262)$$

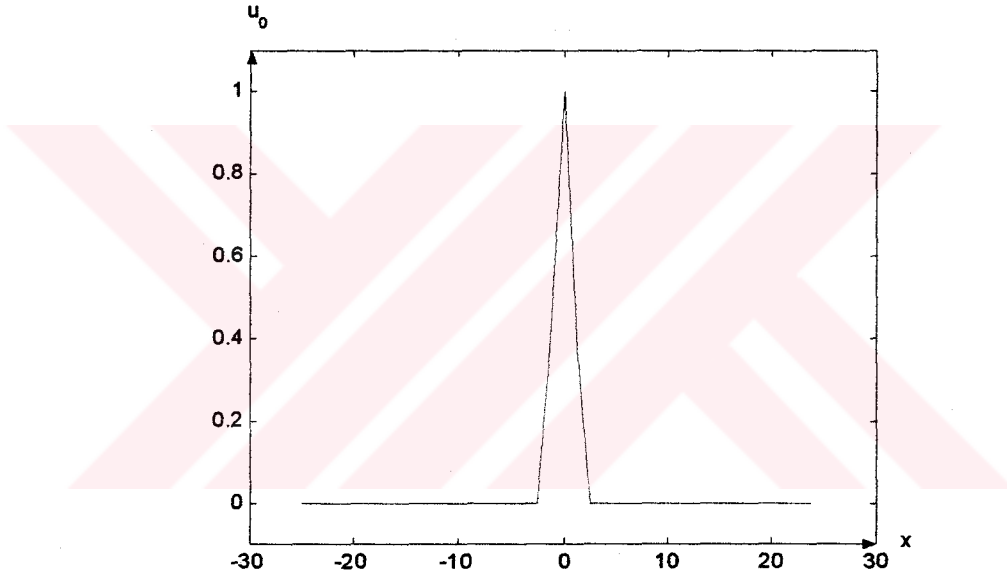
Şekil 23 ve 24 de telin başlangıç profili ve başlangıç hızı gösterilmiştir. $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ fonksiyonlarının grafikleri sırasıyla şekil 25 ve 26 da gösterilmiştir. (248), (250), (251) probleminin D'Alembert formülü yardımı ile elde edilen çözümlerinin grafikleri sırasıyla şekil 27 – 29 da sunulmuştur.

Göz önüne aldığımız problemin çözümünü, önerilmiş yardımcı problemin çözümü aracılığıyla bulduğumuz grafiklerle inceleyelim. Şekil 30 da (254) – (257) yardımcı problemin D’Alambert formülü ile bulunan çözümü gösterilmiştir. Şekil 31 de

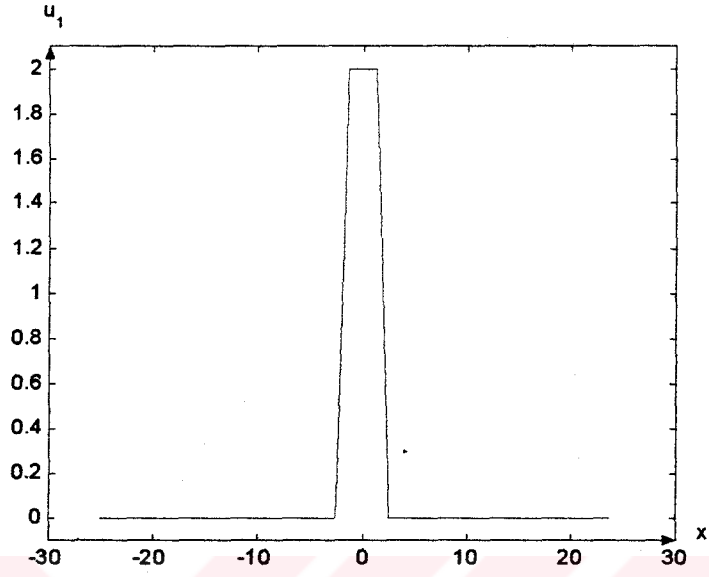
$u(x,t) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ eşitliği ile bulunan çözümünün grafiği gösterilmiştir.

Şekil 32 ve 33 de (254) – (257) probleminin farklı durumlardaki dinamiği sunulmuştur.

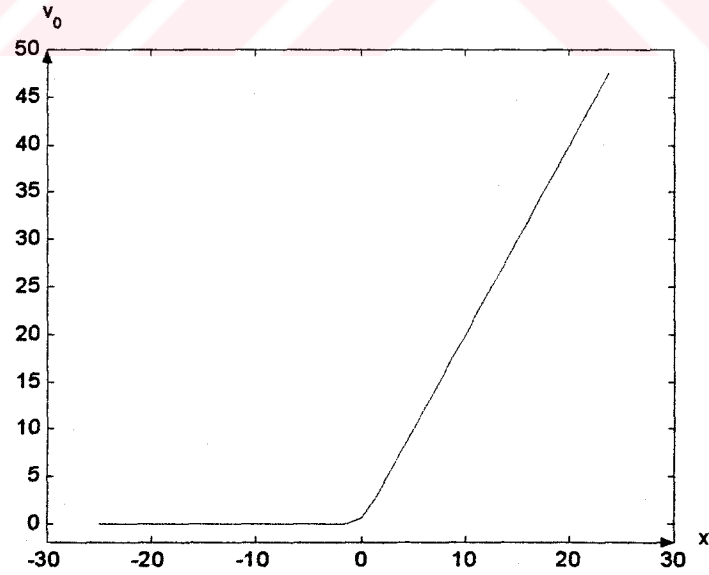
Grafiklerden görüldüğü gibi yardımcı problem aracılığıyla elde ettiğimiz çözümlerle esas problemin çözümleri aynı olmaktadır.



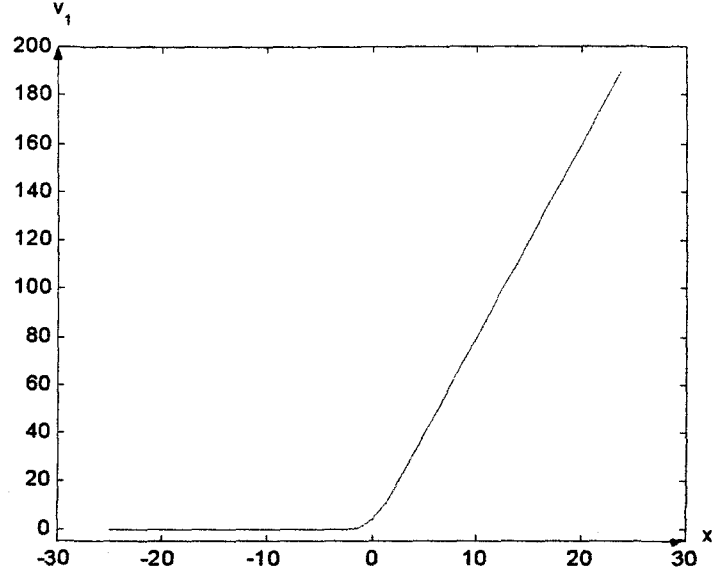
Şekil 23. Telin başlangıç profili



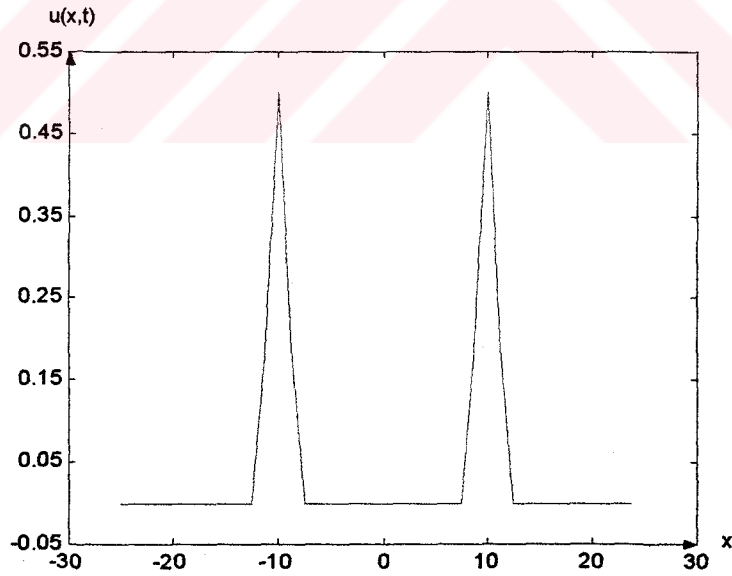
Şekil 24. Telin başlangıç hızı



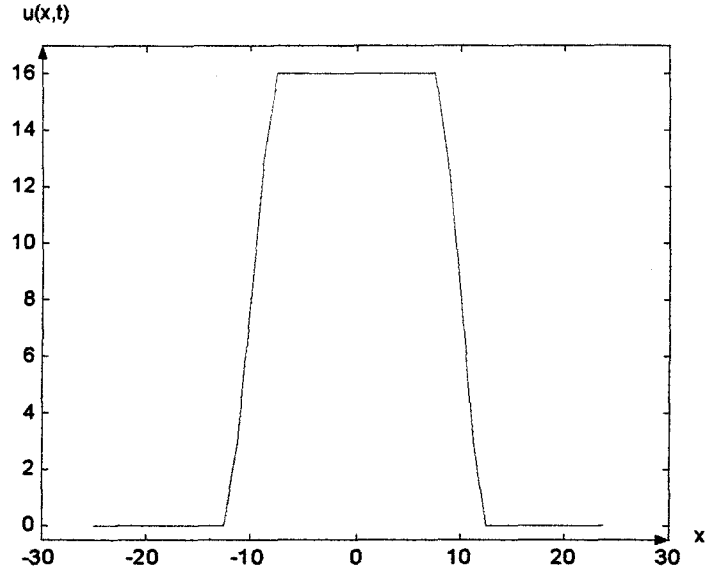
Şekil 25. Başlangıç profilin ikinci integrali



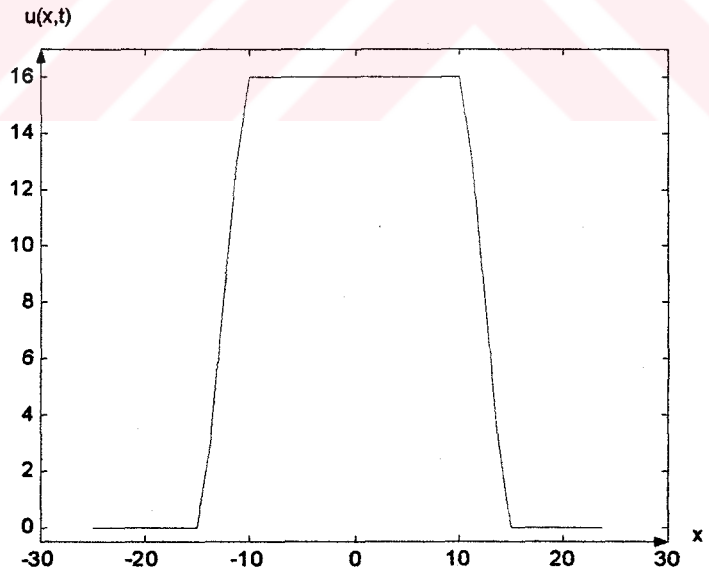
Şekil 26. Başlangıç hızın ikinci integrali



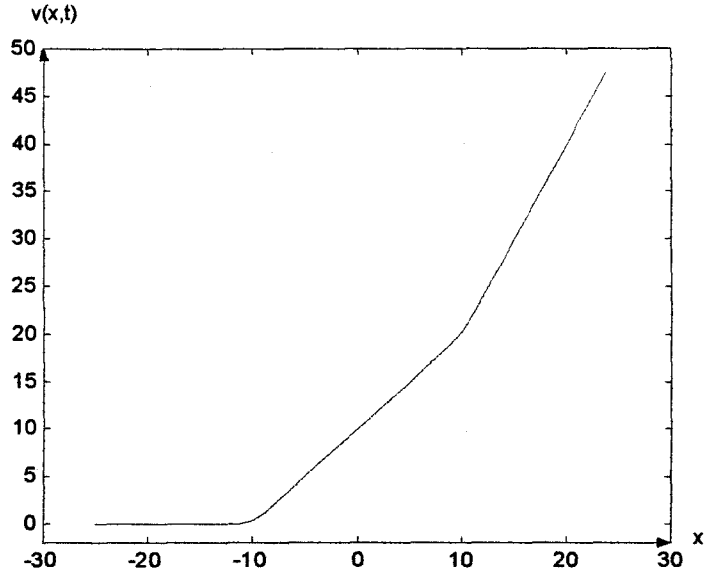
Şekil 27. Gerçek çözümün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği



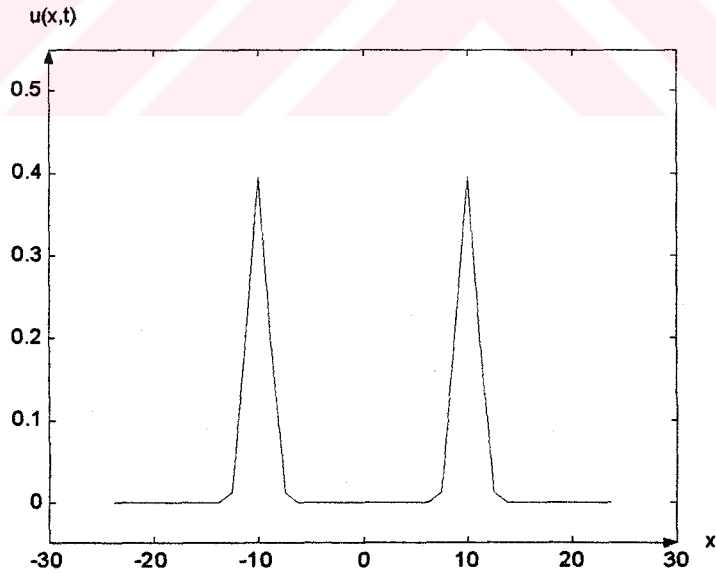
Şekil 28. Gerçek çözümün $u_0(x) = 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği



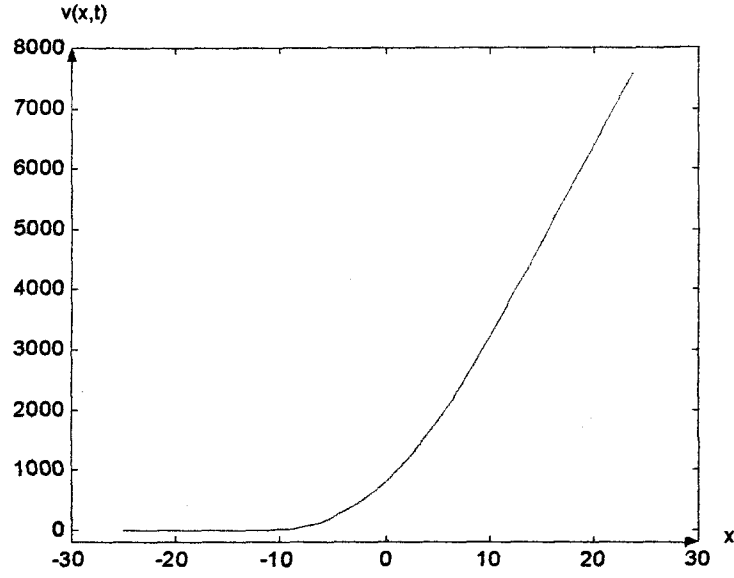
Şekil 29. Gerçek çözümün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 50$ durumundaki grafiği



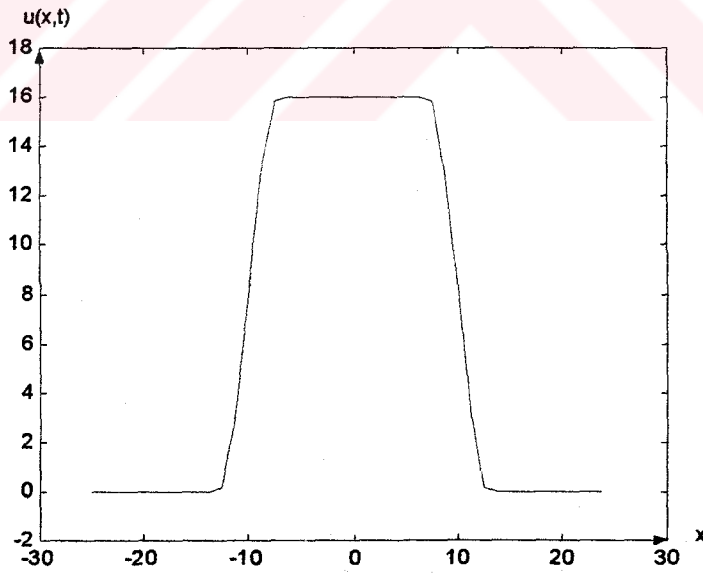
Şekil 30. Yardımcı problemin gerçek çözümünün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği



Şekil 31. Yardımcı problemde oluşan $u(x,t) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ fonksiyonunun $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği



Şekil 32. Yardımcı problemin çözümünün $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği



Şekil 33. $u(x,t) = \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$ fonksiyonunun $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$ ve $T = 40$ durumundaki grafiği

2.5.2. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Türevli Denklem İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü

Süreklili Fonksiyonlar Sınıfında Klasik Sayısal Çözüm. Bu bölümde lineer dalga denklemi için Cauchy probleminin sürekli fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünü inceleyelim. Aşağıdaki problemi göz önüne alalım

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (263)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (264)$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x). \quad (265)$$

Önce $u(x, t)$ fonksiyonunun tanım bölgesini ω_{h_x, h_t} ağı ile örtelim

$$\omega_{h_x, h_t} = \{x_i = ih_x, t_k = kh_t, i \in N, k = 0, 1, 2, \dots\}.$$

(263) – (265) problemi  şablonunda aşağıdaki şekilde sonlu farklarla

ayrıklaştıralım

$$\frac{1}{c^2} \frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{(h_t)^2} = \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{(h_x)^2} + F_{i,k}, \quad (266)$$

$$U_{i,0} = u_0(x_i), \quad (267)$$

$$\frac{U_{i,1} - U_{i,-1}}{2h_t} = c \frac{U_{i,1} - U_{i,-1}}{2h_x} = u_1(x_i). \quad (268)$$

Burada $U_{i,k}$ ve $F_{i,k}$ sırasıyla $u(x, t)$ ve $f(x, t)$ fonksiyonlarının ω_{h_x, h_t} ağının (x_i, t_k)

noktasındaki yaklaşım değerlerini ifade etmektedir. Eğer, $\frac{ch_t}{h_x} = 1$, ($c = 1$) şartı korunursa

(266) – (268) problemi aşağıdaki gibi yazılabilir

$$U_{i,k+1} = U_{i+1,k} + U_{i-1,k} - U_{i,k-1} + F_{i,k}, \quad (269)$$

$$U_{i,0} = u_i^{(0)}, \quad (270)$$

$$U_{i,1} - U_{i,-1} = \frac{2h_x}{c} u_i^{(0)}. \quad (271)$$

(271) ifadesinin mertebesini yükseltelim. (271) başlangıç şartından ve (269) cebirsel sisteminde $k = 1$ yazarak ele aldığımız denklemden $U_{i,-1}$ ifadesini bulup (271) de yerine yazarsak

$$U_{i,1} = \frac{u_{i,1}^{(0)} + u_{i,-1}^{(0)}}{2} + \frac{h_x}{c} u_i^{(1)} \quad (272)$$

alırız. Böylelikle (263) – (265) probleminin çözümünün bulunması için aşağıdaki algoritmayı ele alırız

$$U_{i,k+1} = U_{i+1,k} + U_{i-1,k} - U_{i,k-1} + (h_x)^2 F_{i,k}, \quad (273)$$

$$U_{i,0} = u_i^{(0)}, \quad (274)$$

$$U_{i,1} = \frac{u_{i+1}^{(0)} + u_{i-1}^{(0)}}{2} + \frac{h_x}{c} u_i^{(1)} + h_x^2 F_{i,0}. \quad (275)$$

(275) şartından görüldüğü gibi $U_{i,k}$ nin değerleri sıfıncı ve birinci katlarda yani, ağı

$t = 0$ ve $h_t = \frac{h_x}{c}$ katları üzerinde yerleşen noktalarda verilmektedir.

Önemle belirtelim ki, keyfi (i,k) noktasında $U_{i,k}$ yi bulurken (273) – (275) algoritmasında $U_{i,k}$ nin yalnız ox -ekseni ve $x_i = ihx$, $t_k = kh_t = k \frac{h_x}{c}$ noktalarından çıkan $x-at=const$, $x+at=const$ karekteristiklerinin meydana getirdiği üçgenin tepe noktalarındaki değerleri iştirak eder.

Şimdi şöyle bir sonlu fark karşılığını göz önüne alalım

$$\frac{1}{c^2} \left[\frac{U_{i,k+1} - 2U_{i,k} + U_{i,k-1}}{h_t^2} \right] = \frac{U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}}{h_x^2}. \quad (276)$$

$\frac{c^2 h_t^2}{h_x^2} = \gamma$ olsun. Bu durumda (276) dan

$$U_{i,k+1} = \gamma U_{i+1,k} + 2(1-\gamma)U_{i,k} + \gamma U_{i-1,k} - U_{i,k-1} \quad (277)$$

elde ederiz. Eğer, $U_{i,k} = \frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k}}{2}$ kabul ederek (277) sistemini

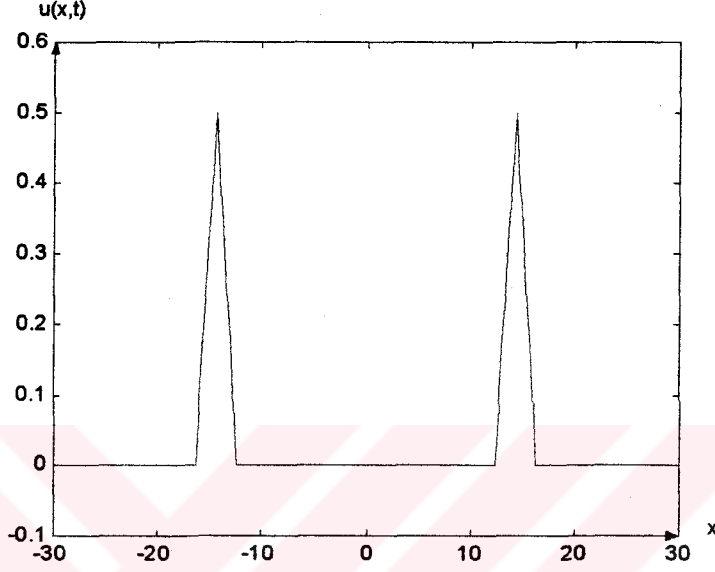
$$U_{i,k+1} = \gamma U_{i+1,k} + 2(1-\gamma) \frac{U_{i+1,k} + U_{i-1,k}}{2} + \gamma U_{i-1,k} - U_{i,k-1}$$

şeklinde yazabiliriz ve yahut

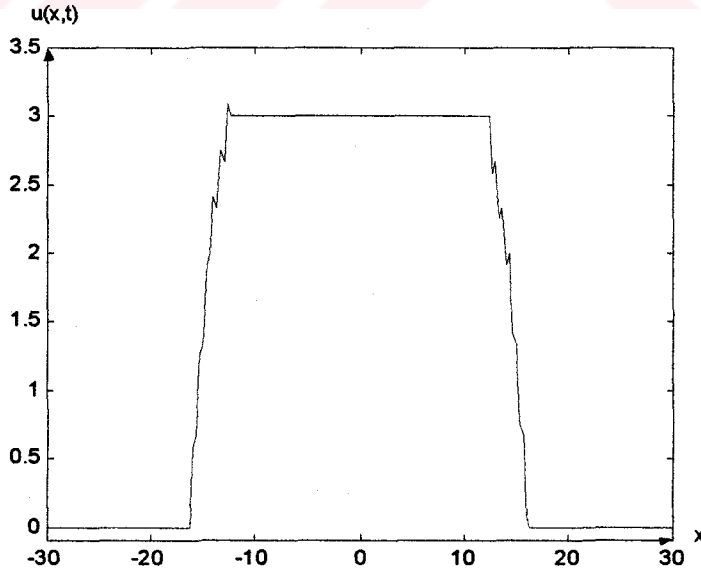
$$U_{i,k+1} = \gamma U_{i+1,k} + (1-\gamma)U_{i+1,k} + (1-\gamma)U_{i-1,k} + \gamma U_{i-1,k} - U_{i,k-1},$$

$$U_{i,k+1} = U_{i+1,k} + U_{i-1,k} - U_{i,k-1} \quad (278)$$

yazılabilir. (278) denklemler sistemi için başlangıç koşulları (274) – (275) olmaktadır. Şekil 34 ve 35 de (273) – (275) algoritması yardımı ile bulunan sayısal çözümün grafikleri gösterilmiştir. (Kolaylık için bilgisayar hesaplamalarında $f(x,t) = 0$ alınmıştır).



Şekil 34. (273) – (275) algoritmasına göre elde edilen sayısal çözümün grafiği, $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$, $T = 40$



Şekil 35. (273) – (275) algoritmasına göre elde edilen sayısal çözümün grafiği, $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) \neq 0$, $T = 40$

Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözüm. (254) – (256) problemini $\omega_{h,\tau}$ ağının keyfi (i,k) düğüm noktalarında ayrıklaştıralım

$$V_{i,k+1} = V_{i,k-1} + V_{i+1,k} - V_{i-1,k}, \quad (279)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i), \quad (280)$$

$$V_{i,1} = v_0(x_i) + \tau v_1(x_i). \quad (281)$$

Burada $V_{i,k}$ ağ fonksiyonu $v(x,t)$ fonksiyonunun $\omega_{h,\tau}$ ağının keyfi (i,k) noktasındaki yaklaşık değerlerini gösterir.

$v_0(x_i)$ ve $v_1(x_i)$ fonksiyonları (227) den

$$v_0(x) = \int_{-l}^x (x-z)u_0(z)dz + P_1(x), \quad (282)$$

$$v_1(x) = \int_{-l}^x (x-z)u_1(z)dz + P_2(x) \quad (283)$$

olarak bulunur. Burada $v_0(x), v_1(x) \in C^2(Q_T)$ bilinen fonksiyonlardır ve $P_1(x), P_2(x)$ 1. dereceden polinomlardır. Bu durumda da teorem 10 sağlanır. (282) ve (283) den

$$(V_0)(x_i) = h \sum_{j=1}^i (x_i - x_j)u_0(x_j) + P_1(x_i), \quad (284)$$

$$(V_1)(x_i) = h \sum_{j=1}^i (x_i - x_j)u_1(x_j) + P_2(x_i) \quad (285)$$

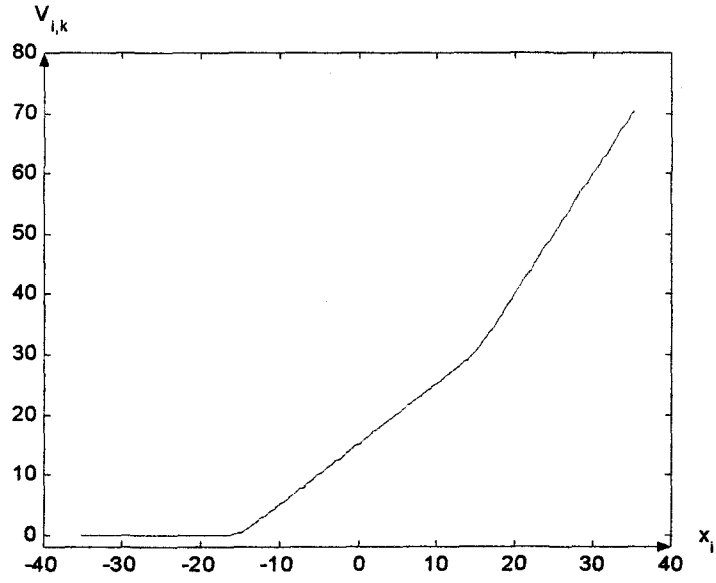
elde edilir.

Teorem 12: Keyfi i, k için aşağıdaki bağıntı geçerlidir

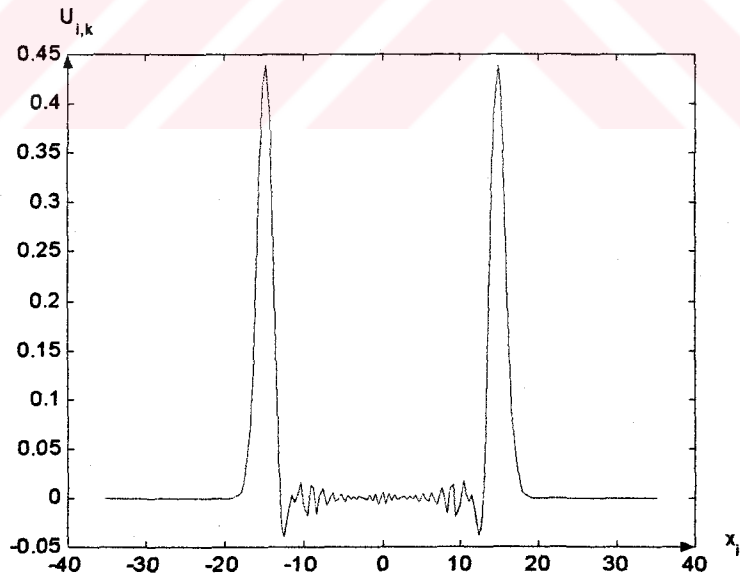
$$U_{i,k+1} = \frac{V_{i+1,k+1} - 2V_{i,k+1} + V_{i-1,k+1}}{h^2}.$$

(279) – (281) den görüldüğü gibi önerilen algoritmalar hesaplama açısından çok efektif ve ekonomiktir. (279) – (281) algoritması ile bulunan çözümlerin grafikleri şekil 36 ve 37 de gösterilmiştir. Grafiklerden görüldüğü gibi yardımcı problem aracılığıyla bulunan sayısal çözümler de gerçek çözümlere yeteri kadar yakın olmaktadır.

Şimdi nonlinear dalga denkleminin çözümünün ele alınması ile uğraşalım. Açık ki, (219) denklemi için yazılmış Cauchy ve sınır değer probleminin gerçek çözümünü ele almak imkansızdır. Bu nedenle (219) için yazılmış Cauchy probleminin sayısal çözümünü inceleyelim.



Şekil 36. Yardımcı problemin sayısal çözümünün grafiği,
 $u_0(x) \neq 0$, $u_1(x) = 0$



Şekil 37. $U_{i,k} = V_{x\bar{x}}$ fonksiyonunun grafiği

Şekil 36 ve 37 de sırasıyla (279) – (281) algoritmasına göre elde edilen $V_{i,k}$ ve yardımcı problem aracılığıyla hesaplanmış $U_{i,k}$ fonksiyonlarının $T = 10$ değerindeki grafikleri gösterilmiştir.

2.5.3. Bir Boyutlu İkinci Mertebeden Nonlinear Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümleri ve İncelenmesi

Temeli Stokes G.G ve Riemann tarafından koyulmuş nonlinear dalgaların dağılım problemlerinin incelenmesi çağdaş dünyamızın bugününde bile kendi aktüelliğini kaybetmemiş olmaktadır. Çünkü çağdaş problemlerden olan subsonik ve süpersonik hıza sahip olan cisimlerin hareketi, elektromagnetik dalgalarda nonlinear türbin motorlarındaki faz değişimleri proseslerinin hesaplanması ve bu gibi fiziksel olayların hepsi genelde Navier-Stokes denklem sistemi ile ifade edilmektedir. Söz konusu denklemler sistemi nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemlerden oluştuğundan dolayı, sistemi sayısal yöntemlerin yardımı ile bile çözmek imkansız olmaktadır. Bu nedenle, pratik önem taşıyan bazı problemler gereken fiziksel yaklaşımlar çerçevesinde sadeleştirilip sonra çözülebilir duruma indirgenir. Örneğin L.Prandtl göstermiştir ki, Reynolds sayısının büyük değerlerinde viskositenin etkisi sert yüzeylerin çok yakınında olmaktadır [26]. Eğer sözünü ettiğimiz yaklaşım Navier-Stokes sisteminde dikkate alınır, bu sistemde viskositenin ve sıcaklığın etkisi göz önüne alınmayabilir ve bu durumda ele aldığımız sistem Euler sistemi oluşturur. Euler denklemler sistemi ile sıvı dinamiğinin bir çok önemli pratik problemleri çözülebilir.

Sıvıların akışında iç sıçrayışlar, örneğin darbe dalgaları veya kontakt sıçrayışları ortaya çıkabilir ve söz konusu sıçrayışların yeri önceden belli değildir. Rankine-Hugoniot koşulları sıçrayış noktalarının arka ve ön taraflarında sıvı parametrelerini birbiri ile bağlamaktadır.

Eğer, Euler denklemler sistemine zamana bağlı bir parametre konursa, söz konusu denklem sistemi Mach sayısının bazı değerlerinde hiperbolik veya parabolik tür denklemlere indirgenebilir. Stasioner akışımarda tam farklı olay ortaya çıkar. Bu durumda Euler denklem sistemi subsonik akışları ifade eder ve eliptik tür denkleme dönüşür.

Bir akış alanında, akış her yerde subsonik olduğunda, sıkışabilir mükemmel bir akışkanın iki boyutlu izentropik akışının yapısı sıkışamayan mükemmel bir akışkana

karşılık gelen iki boyutlu izentropik akıştan biraz farklılık gösterir. Böyle durumda iyi bilinen matematiksel yöntemlerin birisi ile akış alanını hesaplayabiliriz. Eğer akış alanının her yerinde akış süpersonikse o zaman karakteristikler yöntemi ile akış modelini belirleyebiliriz [65].

Bununla beraber subsonik ve supersonik bölgelerin her ikisini içeren transonik akışları hesaplarken zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu zorluk, akışı modelleyen temel diferansiyel denklemin subsonik bölgede eliptik, supersonik bölgede ise hiperbolik türe dönüşmesinden ortaya çıkmaktadır. Yani transonik akışı ifade eden diferansiyel denklem tanım bölgesinde türünü değiştirir. Genelde transonik akışı modelleyen denklemi R_T^2 uzayında (x,y) değişkenlerinde aşağıdaki gibi yazabiliriz [26], [65]

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F(u(x,y))}{\partial y^2} . \quad (286)$$

Burada $F(u)$ aşağıdaki özelliklere sahip fonksiyondur:

- (i) F sürekli olup, sınırlı u fonksiyonları için sınırlıdır,
- (ii) $F'(u)$ fonksiyonu mevcuttur ve işaret değiştirmektedir, yani $F(u)$ pozitif ve negatif eğimlere sahiptir.

Eğer $F(u) = c^2 u$ olursa (286) denklemi lineer denkleme dönüşür ve küçük dalgaların akustik dağılımını ifade eder (Bu problemin çözümünü yukarıda inceledik). Lineer durumda (286) denklemiyle bir çok pratik problemlerde karşılaşılır ve bu lineer diferansiyel denklemlerin teorisinde çok geniş incelenmiştir ([2], [12], [38], [39], [40], [41], [63], [64]). Literatürden bellidir ki, lineer dalga denkleminin çözümü iki farklı karakteristik üzerinde aynı c hızı ile dağılan dalgaların toplamının sonucu gibi ifade edilmektedir, yani lineer dalga denkleminin çözümü

$$u(x, y) = f(y + cx) + g(y - cx) \quad (287)$$

cinsinden ifade edilmektedir. Burada $f, g \in C^2(R)$ den keyfi fonksiyonlardır. Eğer genelde $u(x, y)$ fonksiyonu klasik anlamda türevlere sahip olmasa bile (287) ifadesi ile gösterilebilen $u(x, y)$ fonksiyonu (286) denkleminin zayıf çözümü gibi ele alınabilir. (287) ile ifade edilen $u(x, y)$ fonksiyonu aşağıdaki fonksiyonel denklemi

$$u(x, y) - u(y + c\xi x + \xi) - u(y - c\eta x + \eta) + u(y + c\xi - c\eta, x + \xi + \eta) = 0 \quad (288)$$

sağlar [40]. (288) denklemine (286) nın $F(u) = c^2 u$ olduğu durumda fonksiyonel şekli denir.

Ayrıca da literatürden iyi bilinir ki, lineer dalga denkleminin çözümünün türevleri karakteristikler üzerinde sıçrayışlara sahiptirler ([12], [39], [63]).

Eğer,

$$F(u) = \frac{u(x, y)}{1 - M_\infty^2}$$

olursa (286) Prandtl-Goertler denklemi olarak adlandırılan

$$(1 - M_\infty^2)u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (289)$$

şekline indirgenebilir ve bu denklem ısı yalıtımlı viskositesiz mükemmel gazın transonik akışını ifade eder [26]. Burada M_∞^2 Mach sayısıdır ve eğer $M_\infty^2 > 1$ olursa (289) denklemi hiperbolik, $M_\infty^2 < 1$ olursa eliptik türe dönüşür. $M_\infty^2 = 1$ olduğu durumda ise (289) denklemi dejenere olur.

[65] de (286) denklemi için $F(u) = u^2$ olduğu ve F' nün u ya bağlı bazı nonlinear olduğu durumlarda gerçek çözümler bulunmuş ve transonik akışın dinamiği incelenmiştir. [12], [15], [57] ve de (286) denklemi yardımı ile gaz dinamiğinin, elektromagnetizmanın bazı fiziksel problemleri ifade edilmiştir. Genelde nonlinear ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin gerçek çözümü bulunamaz. Bu yüzden bu tür denklemleri sayısal yöntemler yardımı ile çözmek gerekmektedir.

Açıktır ki, keyfi bir diferansiyel denkleme sayısal çözüm yöntemlerini uygularken denklemin çözümünden yüksek mertebeden diferansiyellenebilme özelliği talep edilmektedir. Ama bilindiği gibi nonlinear denklemlerin çözümleri talep edilen diferansiyellenebilme özelliğine sahip olmayabilir. Bu nedenle iyi bilinen klasik yöntemler direkt nonlinear denkleme uygulanamazlar. Literatürde iyi bilinen sayısal yöntemlerin hepsi lineer denklem üzerinde kurulmuştur.

Lineer dalga denklemi için yazılmış olan sonlu fark yöntemlerinin temelini aşağıdaki lemma oluşturmaktadır.

Lemma 1: Üç defa diferansiyellenebilen (287) cinsinden ifade edilebilen $u(x, y)$ fonksiyonu

$$u(y - k, x - h) + u(y + k, x + h) = u(y + h, x + k) + u(y - h, x - k) \quad (290)$$

sonlu fark denklemini sağlamaktadır [15].

İkinci mertebeden lineer dalga denklemi için sayısal yöntemlerden biri olan sonlu fark yöntemleri genelde karakteristikler yöntemine dayanmaktadır. Hiperbolik tür denklemler öyle bir yön belirler ki, bu yönler genelde çözümün tanım bölgesini tanımlar.

Bu dalgalar tanım bölgesinin kapsadığı diğer noktalardaki çözümleri etkilemeyerek söz konusu yönlere istikametine dağılmaktadır. Zaten karakteristikler bu fiziksel özelliği yansıtır. Karakteristikler yöntemine dayanılarak yapılmış olan sonlu fark yöntemleri literatürde detaylı olarak incelenmiştir [26], [29], [47].

Diferansiyel problemin çözümünün diferansiyellenebilme özelliğini araştırmadan formal olarak denklemleri sonlu farklara ayırklaştıran yöntemlere [9], [15], [16], [26], [47], [57], [66], [67], [68], [69] ve sair gibi kaynaklarda rastlanılır.

Bilindiği gibi ikinci mertebeden nonlinear diferansiyel denklemleri kuazi lineer birinci mertebeden diferansiyel denklemler sistemine dönüştürebiliriz. Örneğin (286) denklemi

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}(F'.w) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (291)$$

birinci mertebeden sisteme indirgenebilir. Ama keyfi nonlinear $F'(u)$ fonksiyonu için (291) sisteminin yararlı gerçek entropiye sahip olan zayıf çözümü hakkında bilinen hiç bir sonuç yoktur. Çünkü, lineer sistemde bile küçük nonlinear heyecanlanma, problemin çözülmesini çok zor bir probleme dönüştürebilir [17].

Fiziksel problemleri çözerken süreksiz fonksiyonlarla karşılaşmak zorunda olduğumuzdan dolayı ve problemin çözümünün fiziksel özelliklerini gerçek şekilde aksettirmek amacı ile bu çalışmada (286) cinsinden olan denklemler için süreksiz fonksiyonlar sınıfında yeni efektif sonlu fark yöntemi önerilmiştir.

Yardımcı Problem. Kolaylık için (286) denklemini (x,t) koordinatlarında yazacağız.

Q_T ile aşağıdaki sonsuz bölgeyi gösterelim

$Q_T = \{(x,t) \in R^2 \mid -\infty < x < \infty, 0 \leq t < T\}$. $\overset{\circ}{Q}_{T,I}$ ile Q_T nin bir açık alt kümesini gösterelim. Q_T de aşağıdaki Cauchy problemini göz önüne alalım

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F(u)}{\partial x^2}, \quad (292)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in I \equiv (-\infty, \infty), \quad (293)$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = u_1(x), \quad x \in I. \quad (294)$$

Burada $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ kompakt taşıyıcıya sahip, bilinen fonksiyonlardır.

Tanım 26: (293), (294) koşullarını sağlayan ve $\varphi(x, T) = 0$ olan her $\varphi(x, t) \in W_{2,2}^0(Q_{T,1})$ test fonksiyonu için aşağıdaki

$$\int_{b_T} \left\{ u(x, t) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial t^2} - F(u(x, t)) \frac{\partial^2 \varphi(x, t)}{\partial x^2} \right\} dx dt + \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) \frac{\partial \varphi(x, 0)}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, 0) u_1(x) dx = 0 \quad (295)$$

integral eşitliğini koruyan $u(x, t)$ fonksiyonuna (292) – (294) probleminin zayıf çözümü denir.

(292) – (294) probleminin zayıf çözümünü belirlemek için aşağıdaki yardımcı problemi göz önüne alalım

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2}\right), \quad (296)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad (297)$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = v_1(x). \quad (298)$$

Burada $v_0(x)$ ve $v_1(x)$ sırasıyla aşağıdaki diferansiyel denklemleri koruyan keyfi fonksiyonlardır

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} = u_0(x), \quad (299)$$

$$\frac{d^2 v_1(x)}{dx^2} = u_1(x). \quad (300)$$

(296) – (298) yardımcı problemi aşağıdaki avantajlara sahiptir:

(i) $v(x, t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliği $u(x, t)$ fonksiyonunun $v(x, t)$ diferansiyellenebilme özelliğinden iki merteye daha yüksektir;

(ii) $u(x, t)$ çözümünü de elde etmek için $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ve $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevlerinin olması

gerekmemektedir;

(iii) Yardımcı problem $u(x, t)$ nin türevlerini içermediğinden onun çözümünü elde etmek için uygulanan klasik yöntemler esas problemde bulunan engellerle karşılaşmamaktadır ve kolayca çözülebilir.

Teorem 13: Eğer $v(x,t)$ (292) – (294) yardımcı probleminin sürekli çözümü ise

$$u(x,t) = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (301)$$

eşitliği ile bulunan $u(x,t)$ (292) – (294) probleminin (295) anlamında zayıf çözümüdür.

(301) den

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-z)u(z,t)dz + P_1(x), \quad (302)$$

dır. Burada $P_1(x)$ birinci dereceden bir polinomdur. Buradan

$$\frac{\partial^\alpha v(x,t)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} (x-z)^{1-\alpha} u(z,t)dz + P_{1-\alpha}(x) \quad (303)$$

dır. Burada $\Gamma(\alpha)$ alışımlı Euler fonksiyonu ve $P_{1-\alpha}(x)$ $(1-\alpha)$. dereceden polinomdur ($P_0(x) = const$, her α için $P_{-\alpha}(x) \equiv 0$ dır).

Sürekli Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözüm. (292) – (294) problemini sayısal yöntemle hesaplamak için ilk olarak Q_T bölgesini

$$\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_k) : x_i = -l + ih, t_k = k\tau, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; k = 0, 1, \dots; h > 0, \tau > 0\}$$

ağı ile örtelim. Burada h ve τ $\Omega_{h,\tau}$ ağının sırasıyla x ve t ye göre adım aralıklarıdır. $(-l, l)$ $supp u_0(x)$ ve $supp u_1(x)$ i içeren herhangi bir aralıktır. (296) – (298) yardımcı probleminin $\Omega_{h,\tau}$ ağının keyfi (x_i, t_k) noktasında sonlu fark yöntemini aşağıdaki gibi uygulayabiliriz

$$V_{i,k+1} = 2V_{i,k} - V_{i,k-1} + \tau^2 F(U_{i,k}), \quad (304)$$

$$V_{i,0} = v_0(x_i), \quad (305)$$

$$V_{i,0} = w_0(x_i). \quad (306)$$

Burada $V_{i,k}$ ve $U_{i,k}$ ağ fonksiyonları sırasıyla $v(x,t)$ ve $u(x,t)$ fonksiyonlarının (i,k) noktasındaki yaklaşık değerlerini gösterir. $v_0(x_i)$ ve $v_1(x_i)$ fonksiyonları

$$(V_0)(x_i) = h \sum_{j=1}^i (x_i - x_j) u_0(x_j) + P_1(x_i), \quad (307)$$

$$(V_1)(x_i) = h \sum_{j=1}^i (x_i - x_j) u_1(x_j) + P_2(x_i) \quad (308)$$

dır.

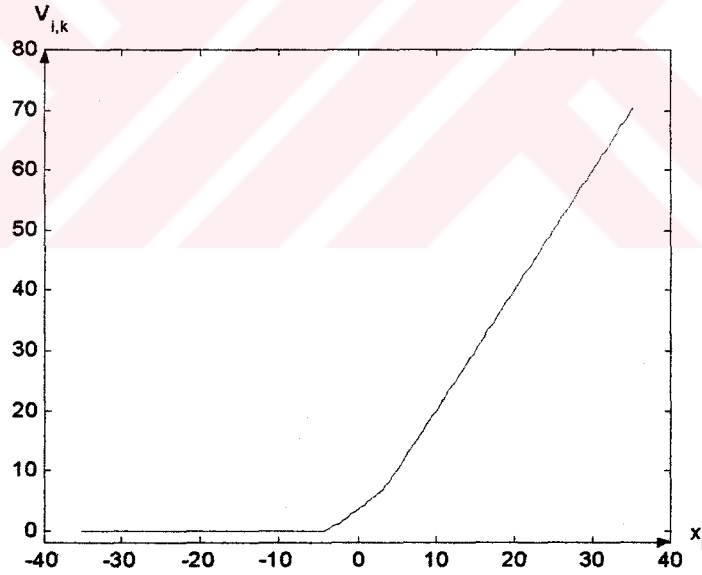
Teorem 14: Keyfi i, k için aşağıdaki bağıntı geçerlidir

$$U_{i,k+1} = \frac{V_{i+1,k+1} - 2V_{i,k+1} + V_{i-1,k+1}}{h^2}. \quad (309)$$

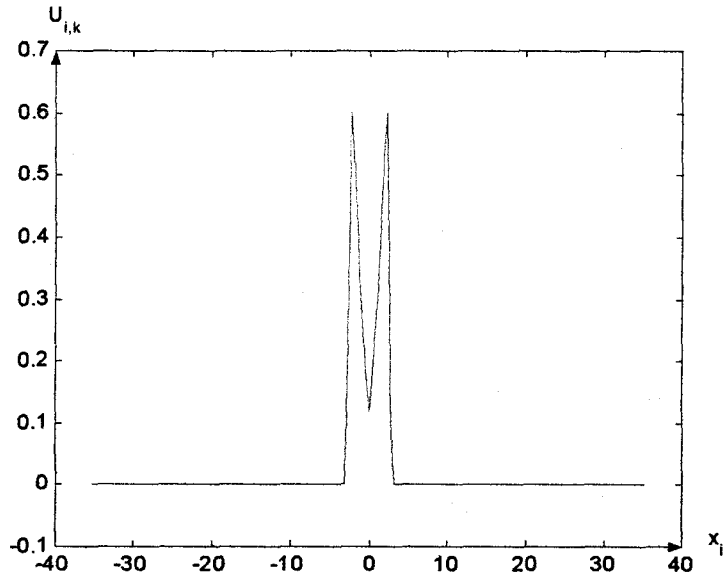
Böylece, (309) bağıntısıyla tanımlanan $U_{i,k+1}$ ağ fonksiyonu (292) – (294) esas probleminin sayısal çözümünü vermektedir. (304) – (306) dan görüldüğü gibi önerilen algoritmalar hesaplama açısından çok efektif ve ekonomiktir.

(304) sonlu fark denkleminin mertebesi $O(\tau^2 + h^2)$ olmaktadır. Söz konusu denklemler sisteminin τ ya göre mertebesini yükseltmek mümkündür. Örneğin, yukarıda verilen denklemlere Runge-Kutta metodu uygulanarak esas problem için τ ya göre yüksek mertebeden bir sonlu fark yöntemi elde edilebilir.

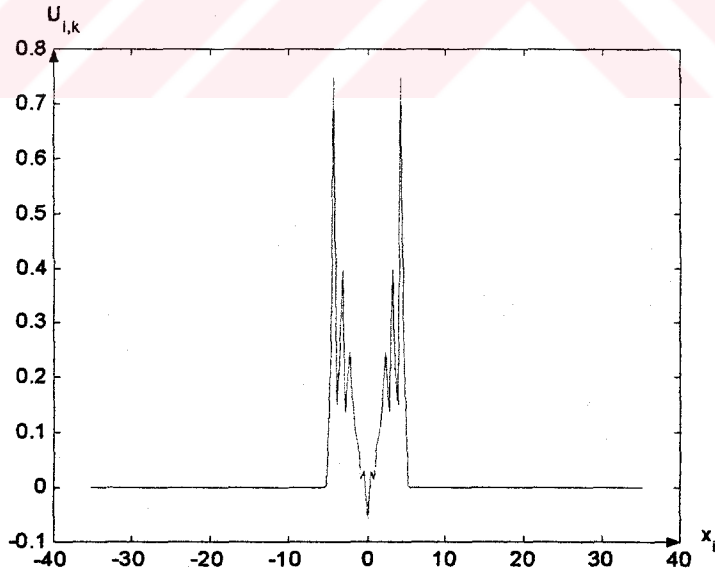
Önerilmiş algoritmalara dayanarak bilgisayar deneyleri yapılmıştır. Deneyde kullandığımız veriler yukarıdaki verilerin aynısı olmaktadır. Ağın zaman değişkenine göre adımı olarak $dt = dx/5$ alınmıştır.



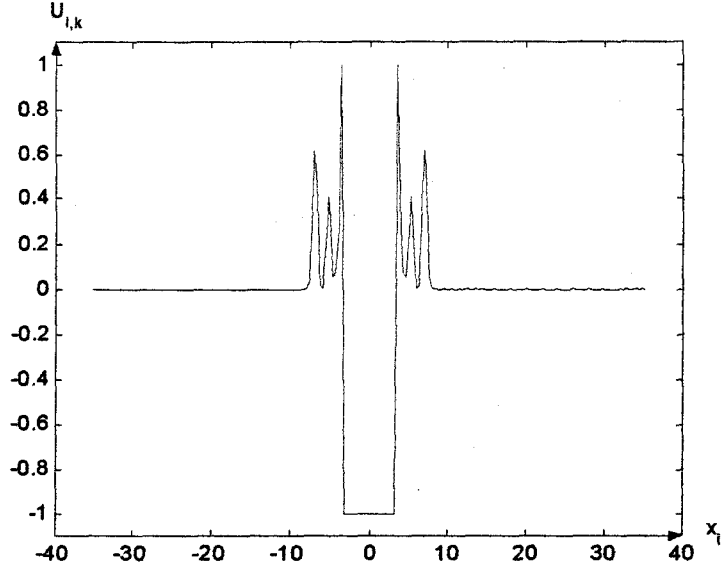
Şekil 38. $V_{i,k}$ çözümünün $T = 5$ değerindeki grafiği (nonlinear durum)



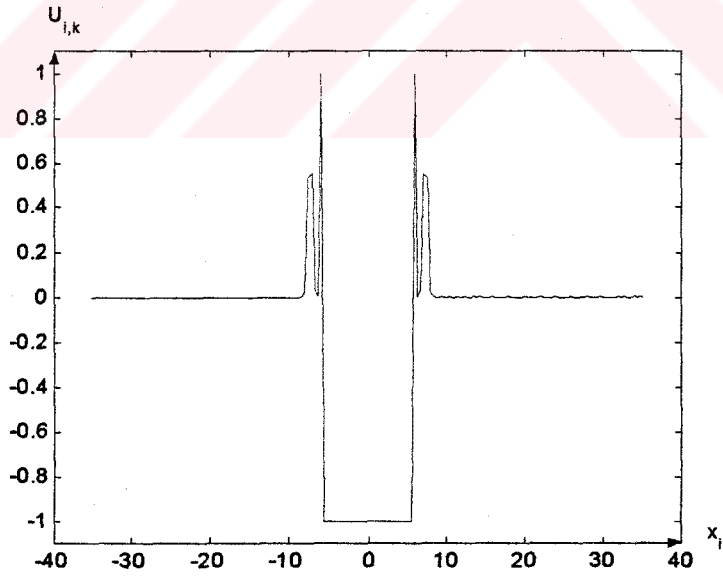
Şekil 39. $U_{i,k} = V_{x\bar{x}}$ fonksiyonunun $T = 2$ değerindeki grafiği
(nonlinear durum)



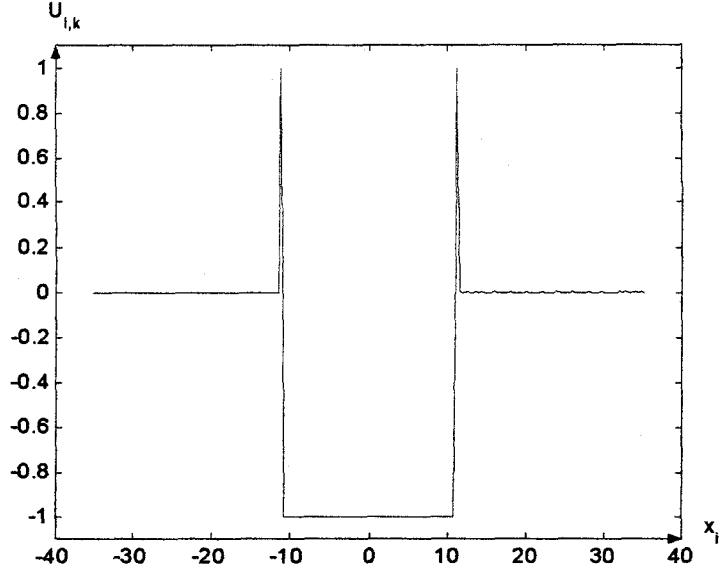
Şekil 40. $U_{i,k}$ nın $T = 5$ değerindeki grafiği



Şekil 41. $U_{i,k}$ nın $T = 8.5$ değerindeki grafiği



Şekil 42. $U_{i,k}$ nın $T = 9$ değerindeki grafiği



Şekil 43. $U_{i,k}$ nın $T = 10$ değerindeki grafiği

Uyarı 4: Önerilmiş sayısal algoritmaların gerçek çözüme yaklaşım problemi fonksiyonel şekilde değil; bilgisayar yaklaşımı anlamında göz önüne alınmıştır. Yani her bir problemin çözümünün zamanın k ve $k+1$ katlarındaki değerlerinin farkı $\|U_{i,k+1} - U_{i,k}\|$ nın yeteri kadar küçük olması sağlanmıştır.

Sayısal çözümün yaklaşım çözüme yakınsaklığının matematiksel ispatı yeni bir araştırma konusu olabilir.

3. İRDELEME

Tezin ikinci bölümünün birinci kısmında tezde kullanılan ve geliştirilen yöntemin matematiksel yapısı araştırılmıştır. Literatürde alışılan yöntem, göz önüne alınan problemin çözümünde bulunan özelliklerini; örneğin darbe dalgaları, iç kontaklar, “blow-up” (yani çözümde bulunan süreksizlik noktalarını) vs. dikkate almaksızın, çözüm için homojen algoritmalar üretme biçimindedir. Ama bilindiği gibi, bazı nonlinear problemlerin çözümünde yeri önceden bilinmeyen sıçrayış noktaları mevcuttur. Bu tür problemlerden biri de Hopf denklemi için Cauchy problemi olmaktadır. Hopf denklemi için [13], [15], [23], [26], [28], [43], [44], [47], [57], [66], [68], [69], [70] vs. gibi kaynaklarda çözüm için homojen algoritmalar önerilmiş ve bazı sınıf fiziksel problemlere uygulanmıştır. Tezin 2.2. bölümünde Hopf denklemi için periyodik sınır koşullu problemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal bir çözümü geliştirilmiştir. Söz konusu yöntem ilk kez [21], [22], [42], [45] de Hopf denklemi için başlangıç değer ve başlangıç-sınır değer problemlerinin problemin fiziksel özelliklerini gerçek gösterebilen çözümlerinin bulunması için önerilmiştir.

2.3. Bölümde ise geliştirilen yöntem iki boyutlu nonlinear dalga denkleminin Cauchy ve sınır değer problemlerinin çözümlerinin bulunması için uygulanmıştır. Çok boyutlu problemlerde bulunan süreksizlik noktalarının yerini bulmanın bir boyutlu problemlere nispeten zor olduğu açıktır. Çünkü, fiziksel sıçrayış noktalarının yerinin bulunması için ağdaki noktaların sayısının fazla alınması zorunludur. Bu ise bilgisayar açısından zorluk meydana getirir. Ama tezin bu bölümünde içerilmiş yardımcı problem yer değişkenlerine göre hiç bir türev içermediğinden bahsedilen zorluklar burada ortaya çıkmaz ve problemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında çözümü çok kolay ve efektif olarak elde edilir.

2.4. Bölümde bir boyutlu genel şekilde yazılmış nonlinear kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi incelenmiştir. Söz konusu denklemler sistemi özel durumda, zamana bağlı sıkışabilir akışkanların sabit basınç altında izentropik akışını temsil eder. Bu tür denklemler için yazılmış Cauchy problemlerinin çözümlerinde yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarının olduğu bilinmektedir. Buna rağmen yine de [13], [19], [28], [43], [44], [48] de gaz dinamiği denklemler sistemi için homojen algoritmalar verilmiştir. Burada, süreksiz fonksiyonlar sınıfında çalışma zorunda olduğumuz için, çözümünün diferansiyellenebilme özelliği, esas problemin çözümünün diferansiyellenebilme

özelliğinden bir merteye daha yüksek olan yardımcı problem önerilmiştir. Söz konusu yardımcı problem üzerinde problemin fiziğinde ortaya çıkan darbe dalgalarını gerçek gösterebilen algoritmalar geliştirilmiştir. Önerilen algoritmalar efektif ve sade olmaktadır.

Ayrıca tezde gaz dinamiği denklemler sistemi için başlangıç-sınır değer problemi de incelenmiştir. Geliştirilmiş yöntemle dayanarak kısım 2.4.3. de petrolün karbonlaştırılmış su ile sıkıştırılıp çıkarılması problemi incelenmiştir. [55], [56], [70] de söz konusu problemin çözümünün bulunması için uygulanan yöntemlerde, çözümde fiziksel bir gerçeklik olan sıçrayış noktalarının varlığı dikkate alınmamıştır. Bu bakımdan da tezde önerilen yöntem çok efektif sonuçlar vermektedir.

Son olarak, tezin 2.5. bölümünde gazların transonik akışını ifade edebilen ikinci mertebeden nonlinear kısmi türevli denklem için Cauchy probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümü incelenmiştir.

[15], [17], [18], [37] vs. gibi kaynaklarda söz konusu denklem bir mertebeli denklemler sistemine indirgenir ve çözülür. Ama [17] de gösterildiği gibi keyfi nonlinear $F'(u)$ fonksiyonu için ele alınmış sistemin yararlı gerçek entropiye sahip olan zayıf çözümü hakkında bilinen hiç bir sonuç yoktur. Kısım 2.5.3. de çözümün diferansiyellene bilme özelliği, esas problemin diferansiyellenebilme özelliğinden iki merteye yüksek olan yardımcı problem önerilmiş ve söz konusu yardımcı problem aracılığı ile esas problemin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümünün bulunması için algoritmalar verilmiştir.

Önerilen algoritmanın efektifliğini göstermek amacı ile kısım 2.5.1 de tezin küçük titreşimlerini ifade eden dalga denklemi için Cauchy problemi incelenmiş ve alınan sonuçlar literatürde bulunan klasik çözümlerle karşılaştırılmıştır. Ulaşılan sonuçlar, geliştirilmiş yöntemin avantajlı olduğunu göstermektedir.

4. SONUÇLAR

Bu tezde elde edilen en önemli sonuçlar şunlardır:

1. Bir boyutlu birinci mertebeden nonlinear dalga denkleminin periyodik sınır koşulları çerçevesinde süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümü için ekonomik algoritma sunulmuştur.

2. İki boyutlu birinci mertebeden nonlinear dalga denklemi için Cauchy ve sınır değer probleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek çözümü elde edilmiş, ve ayrıca da süreksiz fonksiyonlar sınıfında bilgisayar açısından ekonomik olan efektif sayısal algoritmalar önerilmiştir.

3. Sıkışabilir gazların sabit basınçlı izentropik akışını ifade eden bir boyutlu nonlinear diferansiyel denklemler sisteminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında gerçek çözümü bulunmuş ve ayrıca da fiziksel problemin gerçek özelliklerini ifade edebilen sayısal çözümün bulunması için algoritma sunulmuştur.

4. Tabakalı ortamlarda petrolün karbonlaştırılmış su ile sıkıştırılmasını modelleyen bir boyutlu diferansiyel denklemler sisteminin sayısal çözümü için ekonomik algoritma incelenmiştir.

5. Transonik akışları ifade eden ve dejenere olan ikinci mertebeden nonlinear dalga denkleminin süreksiz fonksiyonlar sınıfında sayısal çözümü incelenmiş ve ekonomik algoritmalar önerilmiştir.

5. ÖNERİLER

1. Tezde önerilen yöntem ve elde edilen sonuçlar, bazı sınıf lineer ve nonlineer kısmi türevli denklemlerin gerçek çözümlerinin bulunmasında önemli olabilir.

2. Önerilen yöntem, hidrodinamiğin ve aerodinamiğin bir çok pratik önem taşıyan problemlerin fiziksel özelliklerini gerçek ifade edebilen çözümlerinin elde edilmesinde çok önemli olabilir.

3. Bazı sınıf nonlineer kısmi türevli diferansiyel denklemler için Cauchy ve sınır değer problemlerinin süreksiz fonksiyonlar sınıfında zaman değişkenine göre yüksek mertebeden sonlu fark karşılığı yazılırken önemli olabilir.

4. Önerilen yöntem, kısmi türevli diferansiyel denklemler için yer değişkenine göre çok boyutlu problemlerin sayısal çözümlerinin elde edilmesinde önemli araç olarak kullanılabilir.

5. Önerilen yöntem, tabakalı ortamlarda petrolün sıkıştırılması olayında gereken bir dizi teknolojik parametrelerin bulunmasında (petrolün debisi, su petrol sınırlarının bulunması vs. gibi) önemli olabilir.

6. KAYNAKLAR

1. Gelfant I. M. ve Shilov G. E., Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations, Academic Press, New York, 1964.
2. Sobolev, S. L., Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1978.
3. Schwartz, L., Théorie des Distributions, Vols. I and II, Hermann, Paris, 1957-1959.
4. Antosik, P., Mikusinski, J. ve Sikorski, R., Theory of Distributions The Sequential Approach, Elsevier Scientific, Amsterdam, 1973.
5. Konig H., Neue Berrün Dung Der Theorie Der Distribution, Math. Nachr., 9, 1953.
6. Sikorski, R., On Substitution in the Dirac Delta- Distribution, Bull. Dead. Pol. Sci., 1960.
7. Lusternik, L. A. ve Sobolev, V. I., Elements of Functional Analysis, Nauka, Moscow, 1965.
8. Stepanov, V. V., A Course in Differential Equations, Gostekhizdat, Moscow, 1950, (in Russian).
9. Samarskii, A. A., Theory of Difference Schemes, Nauka, Moscow, 1977.
10. Hopf, E., The Partial Differential Equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, Comm. Pure Appl. Math., 3 (1950) 201-230.
11. Oleinik, O. A., Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations, Usp. Math. Nauk, 12 (1957) 3-73.
12. Tikhonov, A. N. ve Samarski, A. A., On Discontinuous Solution of First-Order Quasi Linear Equation, DAN SSSR, 99, 1 (1954) 27-30.
13. Lax, P. D., Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computations, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 7 (1954) 159-193.
14. Gelfand, I., Some Problems in the Theory of Quasi Linear Equations, Usp. Mat. Nauk., 14 (1959) 87-158.
15. Smoller, J. A., Shock Wave and Reaction Diffusion Equations, Springer -Verlag, New York Inc., 1983.

16. Kruskov, S., First-Order Quasi Linear Equations with Several Space Variables, Mat. Sb., 123 (1970) 228-255; English Transl. In Math. USSR Sb., 10 (1970) 217-273.
17. Goritskii, A. A., Krjukov, S. N. ve Chechkin, G. A., First Order Quasi Linear Equations with Partial Differential Derivatives, Pub. of Moscow University, Moscow, 1997.
18. Debnath, L., Nonlinear Partial Differential Equations, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 1997.
19. Dietmar, K., Numerical Schemes for Conservation Laws, Wiley, Teubner, 1997.
20. Sneddon, I. N., Elements of Partial Differential Equations, Mc. Grav- Hill Book Company Inc., 1957.
21. Rasulov, M. A., On a Method of Solving the Cauchy Problem for a First Order Nonlinear Equation of Hyperbolic Type with a Smooth Initial Condition, Sov. Math.Dok. 43, No.1, 1991.
22. Rasulov, M. A., Finite Difference Scheme for Solving of Some Nonlinear Problems of Mathematical Physics in a Class of Discontinuous Functions, Baku, 1996, (in Russian).
23. Lax, P. D. ve Wendorff B., System of Conservation Laws, Comm. Pure Appl. Math., Vol.13 (1960) 217-237.
24. Rasulov, M., Karagüler, T. ve Sinsoysal, B., Numerical Solution of Cauchy Problem for Second Order Nonlinear Wave Equation with Changeable Type in a Class of Discontinuous Functions, App. Math. and Comp. (to appear).
25. Rasulov, M., Coşkun, E. ve Sinsoysal, B., A Finite Differences Method for a Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Equation in a Class of Discontinuous Functions, App. Math. and Comp., Vol. 140, 2-3 (2003) 255-277.
26. Anderson, D. A., Tannehill, J. C. ve Pletcher, R. H., Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, Vol. 1, 2, Hemisphere Publishing Corporation, 1984.
27. Douglis, A., An Ordering Principle and Generalized Solutions of Certain Quasi Linear Partial Differential Equations, Comm. Pure Appl. Math., Vol.12 (1959) 87-112.
28. Noh, W. F. ve Protter, M. H., Difference Methods and the Equations of Hydrodynamics, Journal of Math. and Mechanics, Vol 12, No.2, (1963).
29. Courant, R. ve Friedrichs, K. O., Supersonic Flow and Shock Waves, Springer-Verlag, New York, 1976.

30. Rasulov, M. ve Sinsoysal, B., Finite Difference Schemes for Solving Boundary Initial Value Problem of a System Equations of Gas Dynamic in a Class of Discontinuous Functions, The Third International Conference, "Tools for Mathematical Modelling", 18-23 June 2001, Saint Petersburg, Russia.
31. Rasulov, M. ve Karagüler, T., Finite Difference Schemes for Solving System Equations of Gas Dynamic in a Class of Discontinuous Functions, App. Math. and Comp., 143 (2003) 145-164.
32. MacCormack, R. W., The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering, AIAA, Cincinnati, Ohio, 1969.
33. Glimm, J., Solutions in the Large for Nonlinear Hyperbolic Systems of Equations, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965) 95-105.
34. Bakhvalov, N. S., Jidkov, N. P. ve Kobelkov, G. M., Numerical Methods, Moscow, Nauka, 1987.
35. Rasulov, M. A. ve Coskun, E., An Effective Numerical Method for Solving the Korteweg- de Vries Equation in a Class of Discontinuous Functions, Appl. Math. and Comp., 102 (1999) 139-154.
36. Rasulov, M. A., Coskun, E. ve Sinsoysal, B., İkinci Mertebeden Nonlineer Değişken Türlü Denklem İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü, I. Türk Dünyası Matematik Sempozyumu, 29 Haziran- 2 Temmuz 1999, Fırat Üniversitesi, Elazığ.
37. Ames, W. F., Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, Academic Press, New York, London, 1965.
38. Clive R. Chester, Techniques in Partial Differential Equations, McGraw-Hill Book Company, 1971.
39. Courant, R., Nonlinear Partial Differential Equations, New York- London, 1962.
40. Fritz, J., Partial Differential Equations, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1986.
41. Godunov, S. K., Equations of Mathematical Physics, Nauka, Moscow, 1979.
42. Rasulov, M. A. ve Ragimova, T. A., A Numerical Method of the Solution of one Nonlinear Equation of a Hyperbolic Type of the First Order Dif. Equations, Minsk, Vol. 28, No.7 (1992) 2056-2063.
43. Courant, R. ve Lax, P., On Nonlinear Partial Differential Equations with two independ variable, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 2, No.3 (1949) 255-273.
44. Oran, E. S. ve Boris, J. P., Numerical Simulation of Reactive Flow, Elsevier, New- York, Amsterdam, London, 1987.

45. Rasulov, M. A., Identification of the Saturation Jump in the Process of Oil Displacement by Water in a 2D Domain, Dokl. RAN, Vol. 319, No. 4 (1991) 943-947.
46. Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley Int., New York, 1974.
47. Ames, W. F., *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Academic Press, New York, 1977.
48. Godunov, S. K. ve Ryabenkii, V. S., *Finite Difference Schemes*, Moscow, Nauka, 1972.
49. Malek J., Necas J. ve Rokuta M., *Weak and Measure-Valued Solution to Evolutionary PDE's*, CHAPMAN & HALL, 1996.
50. Courant, R., Isaacson, E. ve Rees, M., On the Solution of Nonlinear Hyperbolic Differential Equations by Finite Differences, Comm. on Pure Appl. Math., Vol. 5 (1952) 243-255.
51. Lepsky, O., Changqing H. ve Chu-Wang S., Analysis of the Discontinuous Galerkin Method for Hamilton-Jacobi Equations, Applied Numerical Mathematics, 33 (2000) 423-434.
52. Barenblatt G. I., Entov V. M. ve Rjik V. M., *The Theory of Nonstationary Filtration of Oil and Gas*, Nedra Pub., Moscow, 1972.
53. Stoker, J. J., *Water Waves*, Interscience Publishers Inc., New York, 1957.
54. Rasulov, M. A., Yildiz, B. ve Bayram, M., On a Method of Calculation of the First Phase Saturation during the Process of Displacement of Oil by Water from Porous Media, App. Math. Comp., 85 (1997) 1-16.
55. Aziz, K. ve Settari, A., *Petroleum Reservoir Simulation*, Elsevier App. Sci. Pub., London, 1979.
56. Entov, B. M. ve Zazovskii, A. F., *Hydrodynamics of Process of Increase of Oil Efficiency*, Moscow, Nedra, 1989.
57. Dodd, R. K., Eilbek, J. C., Gibbon, J. D. ve Morris, H. C., *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London, 1984.
58. Bhatnagar, P. L., *Nonlinear Waves in One-Dimensional Dispersive Systems*, Clarendon Press, Oxford, 1979.
59. Cole, J. D. ve Cook, L. P., *Transonic Aerodynamics*, Elsevier Science Publishers, 1986.

60. Ablowitz, M. J. ve Segur, H., Solitons and the Inverse Scattering Transform, SIAM, Philadelphia, 1981.
61. Drazin, P. G., Solitons, Cambridge University Press, London, 1983.
62. Berg, P. W. ve McGregor, J. L., Elementary Partial Differential Equations, Holden Deg, San Francisco, 1966.
63. Petrovsky, I. G., Lectures on Partial Differential Equations, Int. Pub., 1954.
64. Mikhailov, V. P., Partial Differential Equations, Nauka, Moscow, 1976.
65. Tomatika, S. ve Tamada, K., Studies on Two-Dimensional Transonic Flows of Compressible Fluid, Part-1, Quart. App. Math., Vol. 7 (1949) 381-397.
66. Richmyer, R. D. ve Morton, K. W., Difference Methods for Initial Value Problems, New York, Wiley Int., 1967.
67. Lax, P. D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws II, Comm. of Pure and App. Math., Vol. 10 (1957) 537-566.
68. Lax, P. D. ve Wendrof, B., Systems of Conservation Laws, Los Alamos Scientific Laboratory, LA-2285, 1959.
69. Lax, P. D., The Formation and Decay of Shock Waves, Amer. Math Monthly, 79, (1972), pp 227-241.
70. Rozdestvenskii, B. L. ve Yanenko, N. H., Systems of Quasi-Linear Equations, Nauk, Moscow, 1960, (in Russian).
71. Rasulov, M. A., Coskun, E. ve Sinsoysal, B., İki Boyutlu Birinci Basamaktan Nonlineer Hiperbolik Denklem İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Çözümü, II. Kızılırmak Fen Bilimleri Kongresi, 20- 22 Mayıs 1998, Kırıkkale Üniversitesi, Kırıkkale.
72. Rasulov, M. A., Coskun, H. ve Sinsoysal, B., Dalga Denklemi İçin Cauchy Probleminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Gerçek ve Sayısal Çözümü, KTÜ ve TUMTMK X Diferansiyel Denklemler Sempozyumu, 22-23 Eylül 1997, KTÜ Fen Edebiyat Fakültesi, Trabzon.
73. Rasulov, M. A., Coskun, E. ve Sinsoysal, B., Birinci Mertebeden Nonlineer Hiperbolik Denklem Sisteminin Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sayısal Çözümü, Sakarya Matematik Sempozyumu, 11-13 Eylül 1997, Sakarya Üniversitesi, Adapazarı.

ÖZGEÇMİŞ

Bahaddin SİNSOYSAL, 02. 03. 1969 tarihinde İstanbul' da doğdu. 1980 yılında Çamaltı İlkokulu' ndan, 1983 yılında Kavacık Ortaokulu' ndan, 1986 yılında Üsküdar Halide Edip Adivar Lisesi' nden, 1991 yılında K.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nden mezun oldu. Aynı yıl başladığı K.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü yüksek lisans (matematik) programını 1995 de tamamladı ve 1996 yılından itibaren de aynı enstitüde doktora programına devam etmektedir. 1994 yılında K.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı' na araştırma görevlisi olarak atandı ve 1999 yılından itibaren de öğretim görevlisi olarak hizmet vermektedir. Yabancı dili İngilizce' dir. Evli ve bir çocuk babasıdır.

