ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

ON THE OSCILLATORY OF SOLUTIONS OF THIRD ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS

ŞENAY PASİNLİOĞLU

Hacettepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
BİLİM UZMANLIĞI TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

2000

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda BİLİM UZMANLIĞI TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan : **Prof.Dr.Okay Çelebi**

Üye : **Prof.Dr.Varga Kalantarov**

Üye (Danışman) : **Prof.Dr.Aydın Tiryaki**

ONAY

Bu tez ..../..../20.... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

..../..../20....

Prof.Dr. Seyfi KULAKSIZ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmada üçüncü basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı üzerinde durulmuştur.

Birinci bölümde ön bilgilere yer verilmiştir.

İkinci bölümde salınımlılık konusunda yakın zamanda yapılan ve daha çok integral metodunu esas alan Skerlik ve Parhi'nin

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

biçimindeki lineer denklem ve bunun özel durumlarına ilişkin çalışmalarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde de üçüncü basamaktan lineer olmayan bir denklem sınıfı için Skerlik'in A özelliğine ilişkin inşa ettiği sonuçlar üzerinde durulmuş, Parhi'nin salınımlılık ve salınımsızlığa ilişkin bazı kriterleri irdelenmiştir.

ABSTRACT

In this study consisting of three chapters, we deal with oscillation of solutions of third order differential equations.

The first chapter is devoted to the preliminaries.

In the second chapter, Skerlik and Parhi's recent studies about oscillation of solutions of the linear equation

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0$$

and some special cases of it, mostly based on integral methods, have been discussed.

In the third chapter, the results about property A, constructed by Skerlik for a class of nonlinear third order differential equations, and also some criteria by Parhi about oscillation and nonoscillation have been examined.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma sırasında çok değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman her konuda yol gösteren ve yardımcı olan, çok değerli tez hocam ve danışmanım Sayın Prof.Dr. Aydın Tiryaki'ye katkılarından dolayı teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bana her konuda yardımcı olan Araş.Gör. Dr. İpek Güleç'e, tez yazımı sırasında her türlü yardımda bulunan Araş.Gör. Öznur Özkan'a ve tüm bölüm arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

GİRİŞ

Fizik ve mühendislik gibi pek çok alanda diferensiyel denklemler çok geniş uygulama alanına sahiptir. Bu nedenle her denklemin çözümünün bilinmesini istemek doğaldır. Ancak bilindiği üzere çok az sayıdaki denklemler için bu mümkündür. Bundan ötürüdür ki bir denklemi çözmeksizin çözümleri hakkında bilgi edinmek oldukça önemlidir. Kalitatif inceleme alanına giren diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılık ve salınımsızlık problemi son yıllarda çok ilgi duyulan bir araştırma konusu olmuş, bu konuda yapılan bilimsel çalışmalarla oldukça büyük bir literatür meydana gelmiştir.

Bu tezde,

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + f(y) = 0 \tag{0.0.1}$$

biçimindeki üçüncü basamaktan denklem ve bunun özel durumları için daha çok integral metoduna dayalı olarak geliştirilen salınımlılık kriterlerine ilişkin yakın zamanda yapılan bazı çalışmalar üzerinde durulacaktır. İncelemelerimizi $T \geq 0$ olmak üzere $[T, \infty)$ aralığında denklemin mevcut aşikar olmayan gerçel çözümlerine kısıtlayacağız. Burada T, özel çözüme bağlı negatif olmayan sabittir.

Sturm, 1836 yılında, $q(t) \in C([t_0, \infty), R)$, $\quad t_0 \geq 0$ olmak üzere

$$x''(t) + q(t)x(t) = 0 \tag{0.0.2}$$

lineer diferensiyel denkleminin salınımlılık davranışını araştıran ilk kişi olmuştur. $q(t)$'nin negatif olmadığı durumda, pek çok salınımlılık kriterinin inşası Atkinson'un klasik çalışmasıyla başlamış, Moore ve Nehari, Jasni, Kurzweill, Belohorec, Kneser ve Kiguradze'nin çalışmaları ile sürmüştür. Hayli zengin literatür çalışmalarına sahip ikinci basamaktan denklemlerde gerek elemanter düzeyde, gerekse ileri düzeyde geliştirilen salınım kriterlerinin pek çoğu genelde limit ve integral metodunu içeren testlere dayalıdır.

İkinci basamaktan denklemler kadar zengin literatüre sahip olmayan üçüncü basamaktan diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığına ilişkin teori, özellikle Gregus, Hanan, Lazer, Rab, Svec, Villari tarafından geliştirilmesine rağmen bazı sonuçlar daha önceden de biliniyordu. Birkhoff 1911 yılında üçüncü basamaktan denklemler üzerindeki çalışmasıyla, ikinci basamaktan daha yüksek basamaklı denklemler için ayırma ve karşılaştırma teoremlerinin incelenmesine ışık tutmuştur. Daha sonra Reynolds [33] keyfi n. basamaktan denklemler için Birkhoff'un sonuçlarını geliştirmiştir.

İkinci basamaktan denklemlerin salınımlılık ve salınımsızlık kriterlerinin benzerleri son yıllarda üçüncü basamaktan diferensiyel denklemler için birçok araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Bunların en önemlileri olarak lineer durumda Gregus [10], Hanan[11], Lazer[19], Barett[1], Jones [15], Erbe [4,5], Chanturiya [2] ve Kiguradze [17]; lineer olmayan durumda da Erbe [6], Erbe ve Rao [7], Heidel [13], Nelson [20], Parhi ve Das [21,23,24], Kura [18], Tiryaki ve Çelebi [34]'yi söyleyebiliriz.

Birinci bölümde ikinci ve üçüncü basamaktan denklemlere ilişkin bazı önemli temel kavramlara yer verilmiştir. İkinci bölümde yakın zamanda yapılan ve integral metodunu esas alan lineer denklemlere ait Parhi ve Skerlik'in bazı çalışmaları araştırılmıştır.
Üçüncü bölümde de belli tipten üçüncü basamaktan lineer olmayan denklemlere ilişkin A özelliği ve bazı salınımlılık kriterleri üzerinde durulmuştur.

1 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ikinci ve üçüncü basamaktan lineer denklemlere ilişkin yeri geldikçe yararlanılacak bazı önemli tanım, teorem ve sonuçlardan söz edilecektir [10,27].

1.1. TEMEL FORMLAR

Bir $I \subset R$ için $a_0 \in C^2(I),\ a_1 \in C^1(I),\ a_2 \in C(I)$ ve I'da $a_0(t) \neq 0$ olmak üzere

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0 \tag{1.1.1}$$

ikinci basamaktan lineer diferensiyel denklemi gözönüne alalım. I aralığı üzerinde $a_0(t) \neq 0$ ise (1.1.1) denklemi

$$y(t) = u(t)exp\left[-\frac{1}{2}\int_a^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds\right] \tag{1.1.2}$$

dönüşümü yardımıyla

$$u'' + C(t)u = 0 \tag{1.1.3}$$

şeklinde kanonik (normal) biçimine dönüştürülebilir. Burada

$$C(t) = \frac{1}{{a_0}^2}\left[a_2a_0 - (\frac{1}{4}){a_1}^2 - \frac{1}{2}\left({a_1}'a_0 - a_1{a_0}'\right)\right]$$

dır.

Belirtelim ki üstel ifade sıfırdan farklı olduğundan (1.1.2) dönüşümü, (1.1.1) denkleminin çözümünün sıfırlarının sayısını ya da konumunu etkilemez.

Keza I aralığı üzerinde $a_0(t) \neq 0$ ise, (1.1.1) denklemi

$$h(t) = \frac{1}{a_0(t)}\int_a^t \frac{a_1(s)}{a_0(s)}ds$$

çarpanıyla çarpılarak

$$\left(p(t)y'\right)' + q(t)y = 0 \tag{1.1.4}$$

self-adjoint forma dönüştürülebilir. Burada $p(t) = a_0(t)h(t),\ q(t) = a_2(t)h(t)$ dır. Belirtelim ki (1.1.4) denklemi (1.1.1) denklemine göre daha geneldir. Çünkü

(1.1.1) denklemi (1.1.4) biçimine her zaman dönüştürülebildiği halde, tersinin olabilmesi için $p(t) \in C^1(I)$ olmalıdır.

Bir $I \subset R$ için $a,\ b,\ c \in C(I)$ olmak üzere

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{1.1.5}$$

üçüncü basamaktan lineer denklemi göz önüne alalım. Bu denklem,

$$y = ue^{-\frac{1}{3}\int a(t)dt} \tag{1.1.6}$$

dönüşümü ile

$$u''' + (m(t))\,u' + (n(t))\,u = 0 \tag{1.1.7}$$

denklemine dönüşür. Burada

$$m(t) = -\frac{1}{3}a^2(t) + b(t) \text{ ve } n(t) = \frac{2}{27}a^3(t) - \frac{1}{3}a(t)b(t) + c(t)$$

dır.

Daha önce ikinci basamaktan denklemler için belirtildiği gibi (1.1.6) dönüşümü (1.1.5) denkleminin çözümlerinin köklerinin sayısını ya da konumunu etkilemez.

Eğer (1.1.5) denklemi $r(t) = e^{\int_\sigma^t a(s)ds}$ ile çarpılırsa

$$\left(r(t)y''\right)' + q(t)y' + p(t)y = 0$$

formuna dönüştürülebilir. Burada $q(t) = b(t)r(t)$ ve $p(t) = c(t)r(t)$'dır.

1.2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

$p \in C^1((a,b))$, $q \in C((a,b))$ ve (a,b) aralığındaki her t için $p(t) > 0$ olmak üzere

$$\left(p(t)u'\right)' + q(t)u = 0 \tag{1.2.1}$$

denklemini göz önüne alalım.

Teorem 1.2.1 (STURM-AYIRMA). u_1 ve u_2, (a,b) aralığında (1.2.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun. (a,b) aralığında u_1'in ardışık iki sıfırı arasında u_2'nin bir ve yalnız bir sıfırı vardır.

Teorem 1.2.2 (STURM-KARŞILAŞTIRMA). (a,b) aralığında (1.2.1) denkleminin bir çözümü u ve

$$\left(p(t)u'\right)' + Q(t)u = 0 \tag{1.2.2}$$

denkleminin de bir çözümü v olsun. $Q(t) > q(t)$ olacak şekilde Q ve q fonksiyonları sürekli olsun. (a,b) aralığında t_1, t_2'ler u'nun ardışık iki sıfırı ise $t_1 < t < t_2$ aralığında v'nin en az bir sıfırı vardır.

c ve C, $t_0 \geq 0$ için $t_0 \leq t < \infty$ aralığında pozitif gerçel değerli sürekli fonksiyonlar ve de $c(t) \leq C(t)$ olmak üzere

$$y'' + c(t)y = 0 \tag{1.2.3}$$

ve

$$y'' + C(t)y = 0 \tag{1.2.4}$$

diferensiyel denklemlerini ele alalım.

Tanım 1.2.1. (1.2.3) denkleminin bir aşikar olmayan çözümü $[t_0, \infty)$ aralığında sonsuz sayıda sıfırlara sahip ise bu aralıkta *salınımlıdır* denir. Tersine (1.2.3) denkleminin bir aşikar olmayan çözümü $[t_0, \infty)$ aralığında sonlu sayıda sıfırlara

sahip ise bu aralıkta *salınımsızdır* denir [14,33].
Bu tanıma göre salınımlı bir y çözümü için $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ ve $y(t_n) = 0$ olacak şekilde bir (t_n) dizisi vardır. Çözüm salınımsız ise, her $t \geq t_1$ için $y(t) \neq 0$ olacak şekilde bir t_1 sayısı mevcuttur.

Belirtelim ki Tanım 1.2.1, denklem lineer olsun ya da olmasın üçüncü basamaktan denklem için de aynen geçerlidir.

Teorem 1.2.1'den, (1.2.3) denkleminin çözümlerinin ya hepsi salınımlıdır ya da hepsi salınımsızdır. Buna göre (1.2.3) denkleminin her çözümü salınımlı ise denkleme *salınımlı*, aksi takdirde *salınımsızdır* denir.
Belirtelim ki (1.2.3) denkleminin kapalı ve sınırlı bir I aralığında tanımlı aşikar olmayan bir çözümünün sıfırlarının sayısı sonlu olduğundan, kapalı ve sınırlı bir aralıkta (1.2.3) denklemi salınımsızdır [12].

Teorem 1.2.2 kullanılarak, salınımlılık özelliği bilinen bir denklemden diğerinin de salınımlılık özellikleri elde edilebilir. Örneğin,

$$y'' + \frac{a}{t^2}y = 0 \tag{1.2.5}$$

denklemini gözönüne alalım. Kolaylıkla görülebilir ki $a \leq 1/4$ olduğunda salınımsız ve $\epsilon > 0$ olmak üzere $a = (1+\epsilon)/4$ olduğunda salınımlıdır.

Teorem 1.2.3. $\epsilon > 0$ olmak üzere her $t \geq t_0 > 0$ için eğer $c(t) \geq (1+\epsilon)/(4t^2)$ ise (1.2.3) denklemi salınımlıdır.

İspat. $m > 0$ gerçel bir sabit olmak üzere

$$y'' + m^2 y = 0$$

denklemi salınımlıdır. Bu denklemde $t_1 = e^t$ konumu yapılırsa,

$${t_1}^2 \frac{d^2y}{d{t_1}^2} + t_1 \frac{dy}{dt_1} + m^2 y = 0$$

ve bu denkleme de $y = v/\sqrt{t_1}$ dönüşümü uygulanırsa, denklemin

$$\frac{d^2v}{dt_1{}^2} + \frac{1+4m^2}{4t_1{}^2}v = 0$$

şeklinde kanonik formu elde edilir.

Daha önce de belirtildiği üzere gözönüne alınan dönüşümler $y'' + m^2y = 0$ denkleminin sıfırlarını etkilemediğinden elde edilen bu son denklem salınımlıdır. Böylece Teorem 1.2.2' den

$$c(t) \geq \frac{1+4m^2}{4t^2} = \frac{1+\epsilon}{4t^2},\ \epsilon > 0$$

durumunda (1.2.3) denklemi salınımlıdır.

Sonuç 1.2.1. Her $t \geq t_0 > 0$ için $t^2c(t) \geq 1/4$ ise, (1.2.3) denklemi salınımlıdır [26].

Sonuç 1.2.2. Her $t \geq t_0$ için $c(t) \leq 0$ olsun. Bu durumda (1.2.3) denklemi salınımsızdır [26].

Teorem 1.2.4. Φ, $\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = 0$ olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$y'' + (1 + \Phi(t))\,y = 0 \tag{1.2.6}$$

denkleminin aşikar olmayan çözümü salınımlıdır.

İspat. Yeterince büyük t_0'lar için $\lim_{t\to\infty}\Phi(t) = 0$ olduğundan $t \geq t_0$ için $|\Phi(t)| \leq \epsilon$ $(\epsilon > 0)$ yazılabilir. Böylece $\forall t \geq t_0$ için

$$1 - \epsilon \leq 1 + \Phi(t) \leq 1 + \epsilon$$

dır. $\epsilon = 1/2$ seçersek, $t \geq t_0$ için

$$1 + \Phi(t) \geq 1/2$$

olur. $y'' + (1/2)y = 0$ denkleminin aşikar olmayan çözümleri salınımlı olduğundan Teorem 1.2.2'den (1.2.5)'in aşikar olmayan çözümleri de salınımlıdır.

Teorem 1.2.5. m bir gerçel sabit olmak üzere her t için eğer $c(t) \geq m^2 > 0$ ise (1.2.3) denkleminin aşikar olmayan çözümleri salınımlıdır.

İspat. $y'' + m^2 y = 0$ denklemi salınımlı olduğundan Teorem 1.2.2'den sonuç kolaylıkla görülebilir.

Teorem 1.2.6. Eğer monoton olarak $\lim_{t\to\infty} c(t) = \infty$ ise (1.2.3) denkleminin tüm aşikar olmayan çözümleri salınımlıdır.

İspat. Hipotezden t_0'dan büyük her t için $c(t) > \epsilon > 0$ olduğu açıktır. Böylece $y'' + \epsilon y = 0$, $(\epsilon > 0)$ denkleminin her aşikar olmayan çözümü salınımlı olduğundan Teorem 1.2.2'den istenen sonuç elde edilir.

Kneser, Euler denklemine ilişkin düşünceden hareketle W'yi

$$W = \lim_{t\to\infty} t^2 c(t) \tag{1.2.7}$$

biçiminde tanımlamış ve buna bağlı olarak (1.2.3) denkleminin $W > 1/4$ için salınımlı, $W < 1/4$ için salınımsız olduğunu ispatlamıştır. Kneser'in bu sonucundan sonra özellikle Bellman, Fite, Hartman, Hille, Leighton, Levinson, Moore, Nehari, Potter, Wintner ve daha birçok araştırmacı bu konuyu ele almışlardır. Wintner ve Leighton göstermişlerdir ki,

$$\int_0^\infty c(t)dt = \infty \tag{1.2.8}$$

ise, (1.2.3) denklemi salınımlıdır. Denklem salınımsız ise bu integral sonludur. Genel salınımlılık kriterleri Hille ve Nehari tarafından geliştirilmiş olup, çalışmaları özel durum olarak Wintner, Leighton, Kneser ve diğerlerininkini kapsamaktadır [33].

2 ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Bu bölümde, yakın zamanda yapılan ve daha çok integral metodunu esas alan Skerlik ve Parhi'nin

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{1.1.5}$$

biçimindeki üçüncü basamaktan lineer diferensiyel denklem ve bunun özel durumlarına ilişkin bazı çalışmaları irdelenecektir [28,32,31,22,21].

2.1. ÖZEL DURUMLAR

(1.1.5)'in bir özel durumu olan

$$y''' + q(t)y = 0, \tag{2.1.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $I = [t_0, \infty) \subset (0, \infty)$ olmak üzere $q : I \to R = (-\infty, \infty)$ sürekli fonksiyondur. Özel olarak q 'nun I üzerinde sabit işaretli olduğunu ve tüm $t \geq t_0$ 'lar için $sup\{|q(t)| : s \geq t\} > 0$ olduğunu varsayalım. Buna göre

$$q(t) \geq 0, \quad t \in I \tag{2.1.2}$$

ve

$$q(t) \leq 0, \quad t \in I \qquad (2.1.3).$$

olmak üzere q fonksiyonu için iki durum incelenecektir.

y, (2.1.1)'in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın y'yi pozitif varsayalım. y çözümü için (2.1.2) geçerli olmak üzere

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad y''(t) > 0, \quad y'''(t) \leq 0, \quad t \geq t_1, \qquad (2.1.4,0)$$

$$y(t) > 0, \quad y'(t) > 0, \quad y''(t) > 0, \quad y'''(t) \leq 0, \quad t \geq t_1, \qquad (2.1.4,2)$$

özelliklerinden biri sağlanacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Benzer şekilde (2.1.3)'ün olması halinde ise, y çözümü için

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad y''(t) > 0, \quad y'''(t) \geq 0, \quad t \geq t_1, \tag{2.1.4,1}$$

$$y(t) > 0, \quad y'(t) > 0, \quad y''(t) > 0, \quad y'''(t) \geq 0, \quad t \geq t_1, \tag{2.1.4,3}$$

özelliklerinden biri geçerli olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır [Kiguradze 17].

Foster ve Grimmer [8], (2.1.4,ℓ) ($\ell \in \{0,1,2,3\}$)'yi sağlayan salınımsız bir y çözümünü, ℓ. dereceden bir çözüm olarak tanımlamışlar ve bu tip çözümler kümesini N_ℓ ile göstermişlerdir. Eğer (2.1.1)'in tüm salınımsız çözümlerinin kümesi N ile gösterilirse, bu durumda

$$t \in I \text{ için } q(t) \geq 0, \text{ ise } \quad N = N_0 \cup N_2$$

ve

$$t \in I \text{ için } q(t) \leq 0, \text{ ise } \quad N = N_1 \cup N_3$$

olduğunu kanıtlamışlardır.

Tanım 2.1.1. Eğer $N = N_0$ ise (2.1.1) denklemi A özelliğine sahiptir, benzer şekilde $N \doteq N_3$ ise (2.1.1) denklemi B özelliğine sahiptir denir.

Bu tanımın bir sonucu olarak (2.1.1) denkleminin her y çözümü salınımlı ya da monoton olarak

$$\lim_{t \to \infty} y^{(i)}(t) = 0, \ (i = 0,1,2)$$

ise, denklem A özelliğine sahiptir. Öte yandan [2, Lemma 2.8]'den (2.1.1) denkleminin salınımlı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul A özelliğine sahip olmasıdır.

Tanımın bir diğer sonucu olarak eğer

$$\int^{\infty} t^{2-\epsilon}|q(t)|dt = \infty, \quad \epsilon \in (0,2]$$

ise (2.1.1) denklemi için $N = N_0$ ve $N = N_3$ özelliği geçerlidir.

$$\int^{\infty} t^2 |q(t)| dt = \infty, \tag{2.1.5}$$

koşulu (2.1.1) denkleminin A ve B özelliğine sahip olması için gerekli koşuldur.

Lemma 2.1.1.[17 ve 2,Lemma 1.3, $n = 3$, $\ell = 1$] $t \in I$ için $q(t) \leq 0$ olsun. Ayrıca y (2.1.1)'in bir pozitif çözümü ve $y \in N_1$ olsun. Eğer

$$\int_{t_1}^{\infty} t^2 y'''(t) dt = \infty \tag{2.1.6}$$

ise

$$0 < ty'(t) \leq y(t), \quad t \geq t_2$$

olacak şekilde $t_2 \geq t_1$ vardır.

Uyarı 2.1.1. $y \in N_1$ olduğunda (2.1.5), (2.1.6)'yı gerektirir.

Lemma 2.1.2. Tüm $x \in R$ 'ler için P_3 polinomu,

$$P_3(x) := x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda

$$x \geq 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ise } P_3(x) \geq -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ve

$$x \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{ ise } P_3(x) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

dır.

Uyarı 2.1.2. $-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ sayısı, $P_3(x)$'in $x_1 = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ noktasında yerel minimumu, $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ sayısı $P_3(x)$'in $x_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$ noktasında yerel maximumudur.

Chanturiya [2, Teorem 2.12], göstermiştir ki eğer

$$\liminf_{t \to \infty} t \int_t^{\infty} s|q(s)| ds > \frac{2}{3\sqrt{3}}$$

ise, (2.1.1) denklemi A ve B özelliğine sahiptir.

Burada problem

$$\int^{\infty} t^2 \left(q(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} t^{-3} \right) dt$$

integralinin ıraksak olması durumunda (2.1.1) denkleminin hangi özelliğe sahip olmasıdır.

1994 'te Skerlik bu soruya ilişkin olarak aşağıdaki sonuçları elde etmiştir [28].

Teorem 2.1.1. $t \in I$ için $q(t) \geq 0$ olsun. Eğer

$$\int^{\infty} \left(t^2 q(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} \right) dt = \infty, \tag{2.1.7}$$

ise (2.1.1) denklemi A özelliğine sahiptir.

İspat. y, (2.1.1)'in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın y'nin pozitif olduğunu ve y'nin (2.1.4,2)'yi sağladığını varsayalım. z,

$$z(t) = \frac{t y'(t)}{y(t)}, \quad t \geq t_1 \tag{2.1.8}$$

biçiminde alınırsa, tüm $t \geq t_1$'ler için $z(t) > 0$'dır ve z fonksiyonu ikinci basamaktan

$$\left((tz)' + \frac{3}{2} z^2 - 4z \right)' + \frac{1}{t} P_3(z) + t^2 q(t) = 0, \quad t \geq t_1 \tag{2.1.9}$$

Riccati denklemini sağlar.

Lemma 2.1.2'den $P_3(z) \geq -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ olup, (2.1.9)'dan

$$\left((tz)' + \frac{3}{2} z^2 - 4z \right)' \leq - \left(t^2 q(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t} \right), \quad t \geq t_1$$

elde edilir.

Yukarıdaki eşitsizlik t_1'den $t \geq t_1$'ye integre edilirse

$$(tz(t))' + \frac{3}{2} z^2(t) - 4z(t) \leq K_0 - \int_{t_1}^{t} Q(s) ds, \tag{2.1.10}$$

bulunur. Burada $Q(t) = t^2 q(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t}$ ve K_0 bir sabittir.

$$\frac{3}{2} z^2 - 4z \geq -\frac{8}{3}$$

olduğundan, (2.1.10) eşitsizliği tekrar t_1'den $t \geq t_1$'e integre edilirse K_1 ve K_2'ler sabitler olmak üzere

$$tz(t) \leq K_1 + K_2 t - \int_{t_1}^{t} \int_{t_1}^{s} Q(u)duds, \tag{2.1.11}$$

olur.

Böylece (2.1.7) ve (2.1.11)'den, yeterince büyük t'ler için $z(t) < 0$ sonucuna varılır ki bu $z(t)$'nin pozitifliğine çelişkidir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.2. $t \in I$ için $q(t) \leq 0$ olsun. Eğer

$$\int^{\infty} \left(t^2 q(t) + \frac{2}{3\sqrt{3}t} \right) dt = -\infty, \tag{2.1.12}$$

ise (2.1.1) denklemi B özelliğine sahiptir.

İspat. y, (2.1.1)'in salınımsız, pozitif bir çözümü ve $y \in N_1$ olsun. Lemma 2.1.1'den $t \geq t_2$ için $0 < z(t) \leq 1$ olacak şekilde bir $t_2 \geq t_1$ vardır. z, (2.1.8) ile tanımlı fonksiyon olmak üzere Lemma 2.1.2'deki $P_3(z) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$ sınırı kullanılırsa, (2.1.9)'dan

$$\left((tz)' + \frac{3}{2} z^2 - 4z \right)' \geq -Q_1(t), \quad t \geq t_2$$

elde edilir. Burada $Q_1(t) = t^2 q(t) + \frac{2}{3\sqrt{3}t}$'dir. Yukarıdaki eşitsizlik t_2'den $t \geq t_2$'ye integre edilirse K_3 bir sabit olmak üzere

$$(tz(t))' + \frac{3}{2} z^2(t) - 4z(t) \geq K_3 - \int_{t_2}^{t} Q_1(s)ds, \tag{2.1.13}$$

bulunur.

$z \in (0, 1]$ için $\frac{3}{2}z^2 - 4z < 0$ olduğundan, (2.1.13) eşitsizliği t_2'den $t \geq t_2$'ye integre edilirse K_4 ve K_5 sabitleri için

$$tz(t) \geq K_4 + K_5 t - \int_{t_1}^{t} \int_{t_1}^{s} Q_1(u)duds \tag{2.1.14}$$

olur.

(2.1.14) eşitsizliği t'ye bölünerek $t \to \infty$ için L'Hospital kuralı uygulanırsa, (2.1.12)'den

$$\lim_{t \to \infty} z(t) \geq K_5 - \lim_{t \to \infty} \int_{t_1}^{t} Q(s)ds = +\infty$$

elde edilir. Bu, z'nin yukarıdan sınırlı oluşuyla çelişir. Bu ispatı tamamlar.

Şimdi (1.2.5)'in bir diğer özel durumu olan

$$y^{'''} + p(t)y^{'} + q(t)y = 0 \tag{2.1.15}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $p,\ q,\ p^{'} : I \to R$ 'de sürekli, $I = [a,\infty) \subset (0,\infty)$, $R = (-\infty,\infty)$ 'dur. Özel olarak $p(t) \geq 0$, $q(t) \geq 0$ ve $\sup\{q(s) : s \geq t\} > 0, t \geq a$ olduğunu varsayalım.
$p(t) > 0$ ve $q(t) > 0$ için Hanan [11] ve Lazer [19] (2.1.15) denklemi için sırasıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.1.3.([11, Teorem 5.12]) $\alpha > 0$ olmak üzere (α,∞) 'da $p(t) > 0,\quad q(t) > 0$, ve $q(t) > p^{'}(t)$ olsun. Eğer

$$u^{''} + p(t)u = 0$$

denklemi salınımsız ve

$$\int_{\alpha}^{\infty} t\left[q(t) - p^{'}(t)\right] dt = \infty$$

ise (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.1.4.([19, Teorem 3.1]) I'nın bir alt aralığında özdeş olarak sıfır olmamak üzere $2q(t) - p^{'}(t) \geq 0$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$u^{''} + (p(t) + mtq(t))\,u = 0$$

ikinci mertebeden denklemi salınımlı olacak şekilde bir $m < \frac{1}{2}$ sayısı varsa (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

Skerlik [32] 1995'te Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.4'ün geçerli olmadığı durumlar için (2.1.15)'in salınımlılığına ilişkin aşağıda üzerinde durulacak bazı integral kriterleri oluşturmuştur.

(2.1.15)'in aşikar olmayan bir y çözümü için $F[y(t)]$,

$$F[y(t)] := 2y(t)y''(t) - y'^2(t) + p(t)y^2(t) \tag{2.1.16}$$

biçiminde tanımlansın.

Lemma 2.1.3. I'nın bir alt aralığında özdeş olarak sıfır olmamak üzere $2q(t) - p'(t) \geq 0$ olduğunu varsayalım ve y, $F[y(c)] \leq 0$ $(c \in I$ keyfi)'ı sağlayan, (2.1.15)'in negatif olmayan salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda $t \geq d$ için

$$y(t) > 0, \quad y'(t) > 0, \quad y''(t) > 0 \quad \text{ve} \quad y'''(t) \leq 0$$

olacak şekilde bir $d \geq c$ sayısı vardır.

Uyarı 2.1.3. t^*, bir y çözümünün sıfırı olmak üzere $F[y(t^*)] \leq 0$'dır.

Uyarı 2.1.4. $t > 0$ için $t^2p(t) > \frac{1}{4}$ olsun.

$$u'' + (p(t) + mtq(t))u = 0 \tag{2.1.17}$$

denklemi, Teorem 1.2.2 ve (1.2.7) Kneser Kriteri'nden salınımlı olduğu için Teorem 2.1.4 sağlanır. Bu yüzden $t^2p(t) \leq \frac{1}{4}$ durumu göz önünde bulundurulacaktır.

Kolayca görülebilir ki

$$4t^6p^3(t) + 15t^4p^2(t) + 12t^2p(t) - 4 = \left(4t^2p(t) - 1\right)\left(t^2p(t) + 2\right)^2$$

olduğundan

$$t^2p(t) \leq \frac{1}{4} \text{ için } tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t}\left(1 - t^2p(t)\right)^{3/2} \leq 0 \tag{2.1.18}$$

eşitsizliği her $t > 0$ için sağlanır.

Lemma 2.1.4. $t > 0$ için $0 \leq t^2p(t) \leq \frac{1}{4}$ olsun. z değişkenine bağlı P polinomu

$$P(z) = z^3 - 3z^2 + \left(2 + t^2p(z)\right)z + t^3q(t), \quad t > 0$$

olsun. Bu durumda $z \geq 1 - 2\sqrt{\frac{1-t^2p(t)}{3}}$ için

$$P(z) \geq t^3q(t) + t^2p(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1 - t^2p(t)\right)^{3/2}, \quad t > 0 \tag{2.1.19}$$

dır.

Uyarı 2.1.5. (2.1.19)'in ikinci yanı, P polinomunun $z_0 = 1 + \sqrt{\frac{1-t^2p(t)}{3}}$ noktasında yerel minimumudur.

Teorem 2.1.5. Lemma 2.1.3 'ün hipotezleri geçerli olsun. Ayrıca $t > 0$ için $t^2p(t) \leq \frac{1}{4}$ olsun. Eğer

$$\int^{\infty}\left(t^2q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t}\left(1 - t^2p(t)\right)^{3/2}\right)dt = \infty \tag{2.1.20}$$

ise (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

İspat. y, (2.1.15)'in $t_0 > a$ için $F[y(t_0)] \leq 0$ 'ı sağlayan bir çözümü olsun. Bu durumda Lemma 2.1.3 'den y, ya salınımlıdır ya da yeterince büyük t'ler için $y(t)y'(t) > 0$ 'dır. Genelliği bozmadan her $t \geq b \geq t_0$ için $y(t) > 0, \quad y'(t) > 0$ olduğunu varsayalım.
$t \geq b$ için z fonksiyonu $z(t) = \frac{ty'(t)}{y(t)}$ biçiminde seçilirse, $z(t) > 0$ olup ikinci basamaktan

$$\left((tz)' + \frac{3}{2}z^2 - 4z\right)' + \frac{1}{t}\left(z^3 - 3z^2 + \left(2 + t^2p(t)\right)z + t^3q(t)\right) = 0 \tag{2.1.21}$$

denklemini sağlar.
(2.1.19) eşitsizliği, (2.1.21) denkleminde yerine koyulursa $t \geq b$ için

$$\left((tz)' + \frac{3}{2}z^2 - 4z\right)' \leq -\frac{1}{t}\left(t^3q(t) + t^2p(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(1 - t^2p(t)\right)^{3/2}\right) = -Q(t)$$

bulunur. Bu eşitsizlik b'den $t \geq b$'ye integre edilirse

$$(tz(t))' + \frac{3}{2}z^2(t) - 4z(t) \leq K_0 - \int_b^t Q(s)ds$$

olur, burada K_0 bir sabittir. $\frac{3}{2}z^2(t) - 4z(t) \geq -\frac{8}{3}$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik b'den $t \geq b$ 'ye integre edilirse $K_1 = K_0 + \frac{8}{3}$ ve $K_2 = b(z(b) - K_1)$ olmak üzere

$$tz(t) \leq K_2 + K_1 t - \int_b^t \int_b^s Q(u)duds \tag{2.1.22}$$

elde edilir. (2.1.20) ve (2.1.22)'den, yeterince büyük t'ler için $z(t) < 0$ elde edilir ki bu z'nin pozitif oluşuyla çelişir. Böylece (2.1.15) denklemi yeterince büyük t'ler için $y(t)y'(t) > 0$ özelliğinde bir çözüme sahip olamaz ve Lemma 2.1.3'den (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir. Bu ispatı tamamlar.

Teorem 2.1.6. $0 \leq t^2p(t) \leq \frac{1}{4}$ ve $q(t) > 0, \quad t \in I$ olsun. Eğer (2.1.20) sağlanıyorsa (2.1.15) 'in salınımsız bir çözümü $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ özelliğine sahiptir.

İspat. $t^2p(t) \leq \frac{1}{4}, \quad t \in I$ olduğundan, (1.2.7) Kneser kriterinden

$$u'' + p(t)u = 0$$

denklemi salınımsızdır. [13] 'den her $t \geq d$ için $y(t)y'(t) \geq 0$ ya da $y(t)y'(t) < 0$ olacak şekilde bir $d \geq a$ sayısı vardır. y, salınımsız bir çözüm olsun ve $t \geq d$ için $y(t) > 0, \quad y'(t) \geq 0$ olduğunu varsayalım. $t \geq d$ için $z(t) = \frac{ty'(t)}{y(t)}$ alınırsa $z(t) \geq 0$ olur. Teorem 2.1.5 'in ispatında olduğu gibi (2.1.22)'den, yeterince büyük t'ler için z negatif olur. Bu, z 'nin pozitif oluşuyla çelişir.

Bu kez $t \geq d$ için $y(t) > 0, \quad y'(t) < 0$ olsun. Bu durumda $\lim_{t\to\infty} y(t) = L \geq 0$ 'dır. (2.1.15) denklemi t^2 ile çarpılıp, d'den $t \geq d$ 'ye integre edilirse K bir sabit olmak üzere

$$t^2y''(t) - 2ty'(t) + \frac{9}{4}y(t) \leq K - L\int_d^t s^2q(s)ds$$

bulunur. (2.1.18) ve (2.1.20) koşulundan

$$\int_t^2 q(t)dt = \infty$$

olur. Buradan ve son eşitsizlikten, her t için $y''(t) < 0$ elde edilir ki bu $y(t) > 0, \quad y'(t) < 0$ ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.1.
$$\int_1^\infty t^2\left(q(t)-\frac{2}{3\sqrt{3}}t^{-3}\right)dt=\infty$$
olsun. Bu durumda (2.1.1) denklemi A özelliğine sahiptir.

Uyarı 2.1.6. Sonuç 2.1.1, Chanturiya'nın sorusuna olumlu cevaptır.

Örnek 2.1.1. $p_0>0$, $q_0>\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ve $\beta\le -2$ şeklinde tanımlı sabitler olmak üzere
$$u'''+p_0t^\beta u'+q_0t^{-3}u=0,\quad t>0, \tag{2.1.23}$$
denklemini göz önüne alalım. Teorem 2.1.5 'den denklem salınımlı bir çözüme sahiptir. Belirtelim ki Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.4 bu denkleme uygulanamaz.

Şimdi de (2.1.15) denklemi için
$$p(t)\le 0,\quad q(t)>0,\quad t\in I, \tag{2.1.24}$$
ve
$$p(t)\le 0,\quad p'(t)-q(t)>0,\quad t\in I, \tag{2.1.25}$$
durumlarını göz önüne alalım.
(2.1.24) durumunda Lazer [19] ve Erbe [4] (2.1.15) denklemi için sırasıyla aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir:

Teorem 2.1.7.([19; Teorem 1.3]) (2.1.24) koşulu geçerli olsun. Eğer
$$\int^\infty\left(q(t)-\frac{2}{3\sqrt{3}}(-p(t))^{3/2}\right)dt=\infty \tag{2.1.26}$$
ise (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.1.8.([4; Teorem 2.4-2.6]) (2.1.24) koşulu ve $2q(t)-p'(t)\ge 0,\ t\in I$

olsun. Ayrıca her $\lambda > 0$ için

$$q(t) + \lambda p(t) \geq 0, \ \forall t \geq t_\lambda$$

ve

$$y''' + [q(t) + \lambda p(t)]y = 0$$

denklemi salınımlı olacak şekilde $t_\lambda \geq a$ 'nın varolduğunu kabul edelim. Son olarak $\int^\infty p(t)dt > -\infty$ ya da $K > 0$ için $|p(t)| < K$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$\int^\infty t^2(q(t) - p'(t))dt = \infty$$

ise (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

Skerlik [31] 1995'te Lazer ve Erbe'nin sonuçlarını geliştirerek bazı önemli kriterler elde etmiştir. Bunlara ilişkin olarak aşağıdaki lemmaları ispatsız olarak verelim. Belirtelim ki bu lemmalar bazı üçüncü basamaktan lineer olmayan denklemler için de geçerlidir [5], [20], [29].

Lemma 2.1.5.[19,Lemma 1.1, 1.3, Teorem 1.1],[4,Lemma 2.2] (2.1.24) geçerli olsun ve y, (2.1.15) 'in aşikar olmayan salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda her $t \geq b$ için

$$y(t)y'(t) < 0, \tag{2.1.27a}$$

ya da

$$y(t)y'(t) \geq 0, \quad y(t) \neq 0, \tag{2.1.27b}$$

olacak şekilde $b \geq a$ sayısı vardır.

Ayırca, (2.1.27a) tipindeki bir pozitif y çözümü

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad y''(t) > 0, \quad y'''(t) < 0, \quad t \geq a$$

ve

(2.1.28)

$$\lim_{t\to\infty} y''(t) = y'(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = L < \infty$$

koşullarını sağlar.

Lemma 2.1.6.[19,Teorem 1.1] (2.1.24) geçerli olsun. Bu durumda (2.1.15) 'in (2.1.27a) özelliğinde bir pozitif y çözümü vardır.

Teorem 2.1.9.[19,Teorem 1.2] (2.1.24) sağlansın. (2.1.15) denkleminin salınımlı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul aşikar olmayan salınımsız bir y çözümü için (2.1.27a) koşulunun geçerli olmasıdır.

Teorem 2.1.10.[15] (2.1.24) geçerli olsun ve (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahip olsun. Bu durumda salınımsız bir y çözümü için $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$'dır.

Uyarı 2.1.7. Yukarıdaki sonuçlardan, (2.1.15) denkleminin salınımlı bir çözüme sahip olduğunu ispat etmek yerine, (2.1.15)'in (2.1.27b) tipindeki salınımsız pozitif bir çözüme sahip olmadığını ispat etmek yeterlidir.

Lemma 2.1.7. (2.1.24) geçerli olsun. z değişkenli Q polinomu

$$Q(z) = \frac{1}{t^4}z^3 - \frac{3}{t^3}z^2 + \left(\frac{2}{t^2} + p(t)\right) z + t^2 q(t), \quad t > 0$$

olsun. Bu durumda her $z \geq 0$ için

$$Q(z) \geq t^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t}\left(1 - t^2 p(t)\right)^{3/2} = Q(z_0), \tag{2.1.29}$$

dır.

Uyarı 2.1.8. (2.1.29) 'un sağ tarafı, $z_0 = t\left[1 + 3^{-1/2}\left(1 - t^2 p(t)\right)^{1/2}\right]$ noktasında Q 'nun yerel minimumudur.

Teorem 2.1.11. $t \in I$ için $p(t) \leq 0$ ve $q(t) > 0$ olsun. Eğer

$$\int^{\infty} \left[t^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t}\left(1 - t^2 p(t)\right)^{3/2}\right] dt = \infty, \tag{2.1.30}$$

ise (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

İspat. y, (2.1.15) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın y'nin pozitif olduğunu varsayalım. y 'nin (2.1.27b) özelliğine sahip olamayacağı ispat edilecektir. Bunun için aksini kabul edelim, yani
$y(t) > 0, \quad y'(t) \geq 0, \quad t \geq b \geq a$ olsun. z'yi

$$z(t) = \frac{t^2 y'(t)}{y(t)}, \quad t \geq b$$

ile gösterelim.
$z(t) \geq 0$ 'dır ve kolayca gösterilebilir ki z, ikinci mertebeden

$$\left[z' + \frac{3}{2}t^{-2}z^2 - 4t^{-1}z\right]' + t^{-4}z^3 - 3t^{-3}z^2 + \left[2t^{-2} + p(t)\right]z + t^2 q(t) = 0, \quad t \geq b \tag{2.1.31}$$

denklemini sağlar.
(2.1.29), (2.1.31) 'de yerine koyulursa

$$\left[z' + \frac{3}{2}t^{-2}z^2 - 4t^{-1}z\right]' \leq -\left[t^2 q(t) + tp(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}t}\left(1 - t^2 p(t)\right)^{3/2}\right] = -Q(z_0(t)), \quad t \geq b$$

bulunur. Bu eşitsizlik b 'den $t \geq b$ 'ye integrallenirse, K_0 bir sabit olmak üzere

$$z'(t) + \frac{3}{2}t^{-2}z^2(t) - 4t^{-1}z(t)' \leq K_0 - \int_b^t Q(z_0(s))ds$$

olur.

$$\frac{3}{2}t^{-2}z^2(t) - 4t^{-1}z(t) \geq -\frac{8}{3}$$

olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik tekrar b 'den $t \geq b$ 'ye integre edilirse

$$z(t) \leq K_1 + K_2 t - \int_b^t \int_b^s Q\left[z_0(u)\right] du ds, \tag{2.1.32}$$

elde edilir. Burada $K_1 = z(b) - \frac{8}{3}b - K_0 b, \quad K_2 = K_0 + \frac{8}{3}$'tür. Böylece (2.1.30) ve (2.1.32) 'den, yeterince büyük t 'ler için $z < 0$ sonucu çıkar. Bu z 'nin pozitif oluşuyla çelişir.
O halde (2.1.15) denklemi (2.1.27b) özelliğinde bir çözüme sahip olamaz ve Uyarı

2.1.7 'den ispat tamamlanır.

Sonuç 2.1.2. (2.1.25) geçerli olsun. Eğer

$$\int^{\infty}\left[t^2\left[p'(t)-q(t)\right]+tp(t)-\frac{2}{3\sqrt{3}t}\left(1-t^2p(t)\right)^{3/2}\right]dt=\infty$$

ise (2.1.15) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

Örnek 2.1.2. $p_0<0,\ q_0>0$ sabitler ve $\delta\geq -3,\ 2\delta\geq 3\beta$ olmak üzere

$$y'''+p_0t^{\beta}y'+q_0t^{\delta}y=0 \tag{2.1.33}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denkleme ne Teorem 2.1.7 ne de Teorem 2.1.8 uygulanamaz. $\delta=-3,\ \beta=-2$ durumunda denklem Euler denklemi olup

$$q_0+p_0-\frac{2}{3\sqrt{3}}(1-p_0)^{3/2}>0 \tag{2.1.34}$$

ise (2.1.33) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir. Öte yandan Teorem 2.1.11'den $\delta=-3,\ \beta<-2,\ q_0>\frac{2}{3\sqrt{3}}$ ise (2.1.33) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir. Benzer şekilde $\delta>-3,\ 2\delta=3\beta$ ve $q_0>2(-p_0)^{3/2}/(3\sqrt{3})$ durumunda da denklem yine salınımlı bir çözüme sahiptir.

2.2. GENEL DURUM

Bu kesimde

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = 0 \tag{1.1.5}$$

şeklindeki üçüncü basamaktan lineer homojen diferansiyel denklemin katsayı fonksiyonlarının işaretlerine bağlı olarak çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili N.Parhi ve P.Das tarafından ele alınan çalışmaları incelenecektir [22, 21]. Burada
$a \in C^2([\sigma,\infty))$, $b \in C^1([\sigma,\infty))$ ve $C([\sigma,\infty))$, $\sigma \in R$ 'dır.

$a < 0$, $b < 0$, ve $c > 0$ olmak üzere üçüncü basamaktan

$$y''' + ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.2.1}$$

sabit katsayılı lineer diferensiyel denkleminin salınımlı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2}{3} - b\right)^{3/2} > 0$$

olmasıdır. Yine bu denklemin salınımlı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter koşul tüm salınımsız çözümlerinin $t \to \infty$ iken sıfıra gitmesidir [23]. Parhi ve Das, sabit katsayılı durumdaki bu sonuçları (1.1.5) denklemine genişletmişlerdir. Şimdi bu sonuçları irdeleyelim.

Lemma 2.2.1. $b(t) \leq 0$ ve $c(t) > 0$ olsun. Eğer y (1.1.5)'in salınımsız bir çözümü ise

$$y(t)y'(t) \leq 0, \; t \geq t_0 \tag{2.2.2}$$

ya da

$$y(t)y'(t) \geq 0, \; t \geq t_0 \tag{2.2.3}$$

olacak şekilde bir $t_0 \in [\sigma,\infty)$ vardır. Ayrıca, (2.2.2) geçerli ise

$$t \geq \sigma \text{ için } y(t)y'(t)y''(t) \neq 0, \; sgny(t) = sgny''(t) \neq sgny'(t) = sgny'''(t) \tag{2.2.4}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} y''(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} y(t) = \lambda \neq \pm\infty \tag{2.2.5}$$

dır.

Lemma 2.2.2. $b(t) \leq 0, \quad c(t) > 0$ olsun. (1.1.5)'in salınımlı çözümlere sahip olması için gerek ve yeter koşul aşikar olmayan salınımsız çözümler için (2.2.4) ve (2.2.5)'in geçerli olmasıdır.

Teorem 2.2.1. $a(t) \leq 0, \ b(t) \leq 0, \ c(t) > 0$ olsun. Eğer $b(t) - a'(t) \leq 0$ ve

$$\int_\sigma^\infty \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + c(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

ise (1.1.5) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

İspat. y, (1.1.5)'in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_1 \geq \sigma$ için $y(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. Lemma 2.2.1'den $t \in [t_0, \infty)$ için $y'(t) \leq 0$ ya da $y'(t) \geq 0$ olacak şekilde bir $t_0 \in [t_1, \infty)$ vardır. Lemma 2.2.1 'in ikinci kısmı ve Lemma 2.2.2'den $t \geq t_0$ için $y(t)y'(t) \geq 0$ 'ın geçerli olmadığını ispat etmek yeterlidir.

$t \geq t_0$ için $y(t)y'(t) \geq 0$ olsun. $u(t) = \frac{y'(t)}{y(t)} \geq 0, \quad t \geq t_0$ alınırsa, kolayca gösterilebilir ki ikinci mertebeden

$$u'' + 3uu' + a(t)u' = -\left[u^3 + a(t)u^2 + b(t)u + c(t)\right] \tag{2.2.6}$$

Riccati denkleminin bir çözmüdür. (2.2.6) eşitliği t_0'dan t'ye integre edilirse

$$u'(t) = u'(t_0) - \frac{3}{2}u^2(t) + \frac{3}{2}u^2(t_0) - a(t)u(t) + a(t_0)u(t_0) -$$

$$\int_{t_0}^t \left[u^3(s) + a(s)u^2(s) + \left(b(s) - a'(s)\right) u(s) + c(s)\right] ds \tag{2.2.7}$$

bulunur. (2.2.7)'de $u(t) \geq 0$ için

$u^3(t) + a(t)u^2(t) + \big(b(t) - a'(t)\big)\, u(t) + c(t)$'nin minimumu ve $u(t) \geq 0$ için

$-\frac{3}{2}u^2(t) - a(t)u(t)$'nin maximumu yazılırsa

$$u'(t) \leq u'(t_0) + \frac{3}{2}u^2(t_0) + a(t_0)u(t_0) + \frac{a^2(t)}{6} -$$

$$\int_{t_0}^{t} \left[\frac{2a^3(s)}{27} - \frac{a(s)b(s)}{3} + \frac{a(s)a'(s)}{3} + c(s) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2(s)}{3} - b(s) + a'(s)\right)\right] ds$$

$$\leq u'(t_0) + \frac{3}{2}u^2(t_0) + a(t_0)u(t_0) + \frac{a^2(t_0)}{6} -$$

$$\int_{t_0}^{t} \left[\frac{2a^3(s)}{27} - \frac{a(s)b(s)}{3} + c(s) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2(s)}{3} - b(s) + a'(s)\right)^{3/2}\right] ds$$

elde edilir. Buradan $\lim_{t\to\infty} u'(t) = -\infty$ olur. Sonuç olarak yeterince büyük t'ler için $u(t) < 0$ olur. Bu bir çelişkidir. Buradan (1.1.5)'in salınımlı bir çözüme sahip olduğu bulunur.

Örnek 2.2.1.

$$y''' - \left(1 - \frac{1}{t^2}\right) y'' - \frac{2}{t^3}y' + \left(2 - \frac{1}{t^2} - \frac{2}{t^3}\right) y = 0, \ t \geq 4$$

denklemi Teorem 2.2.1'in koşullarını sağlar. Bu yüzden denklem salınımlı bir çözüme sahiptir.

Örnek 2.2.2.

$$y''' - \frac{1}{t^2}y'' - \frac{2}{t^3}y' + \left(8 + \frac{4}{t^2} - \frac{4}{t^3}\right) y = 0, \ t \geq 5$$

denklemi, Teorem 2.2.1'in koşullarını sağladığından salınımlı bir çözüme sahiptir.

Teorem 2.2.2. $a(t) \geq 0$, $b(t) \leq 0$, $c(t) > 0$ ve $a'(t) \leq 0$ olsun. Eğer

$$\int_{\sigma}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + c(t) - \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2}\right] dt = \infty$$

ise (1.1.5) denklemi salınımlı bir çözüme sahiptir.

İspat. Teorem 2.2.1 'in ispatına benzerdir.

Örnek 2.2.3.

$$y''' + \frac{3}{t}y'' - \frac{1}{t^2}y + e^t y = 0, \ t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklem Teorem 2.2.2'nin koşullarını sağladığından salınımlı bir çözüme sahiptir.

Örnek 2.2.4.

$$y''' + \frac{1}{2t^2}y'' - \frac{1}{t^3}y' + e^t y = 0, \ t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Teorem 2.2.2'nin koşulları sağlandığı için en az bir salınımlı çözüme sahiptir.

Örnek 2.2.5.

$$y''' + \frac{1}{2t^{1/3}}y'' - \frac{1}{4t^{2/3}}y' + \frac{1}{t^2}y = 0, \ t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Teorem 2.2.2'nin koşulları sağlandığı için en az bir salınımlı çözüme sahiptir.

3 ÜÇÜNCÜ BASAMAKTAN LİNEER OLMAYAN DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Üçüncü basamaktan lineer olmayan denklemler için de pek çok araştırma söz konusudur. Bunların en önemlileri olarak Erbe [5], Erbe ve Rao [7], Heidel [13], Nelson [20], Parhi ve Das [24] ve Skerlik'in çalışmalarını söyleyebiliriz. Bu bölümde önce Skelik'in A özelliğine ilişkin inşa ettiği sonuçlar üzerinde durulacak. Daha sonra Parhi'nin salınımlılık ve salınımsızlığa ilişkin bazı kriterlerine yer verilecektir.

3.1. A ÖZELLİĞİNE İLİŞKİN KRİTERLER

Bu kesimde üçüncü basamaktan

$$y''' + p(t)y' + q(t)|y|^{\alpha} sgny = 0 \tag{3.1.1}$$

ve

$$y''' + p(t)y' + q(t)f(y) = 0 \tag{3.1.2}$$

şeklinde lineer olmayan denklemler için Skerlik tarafından elde edilen sonuçlar üzerinde durulacaktır [29]. Burada $p : I \to (-\infty, 0]$, $q : I \to (0, \infty)$, $f : R \to R = (-\infty, \infty)$ sürekli, $I = (a, \infty) \subseteq (0, \infty)$, $0 < \alpha \in R$ ve $x \neq 0$ için $xf(x) > 0$ 'dır. Ayrıca, I üzerinde $p(t) \not\equiv 0$ ve $t \in I$ için $p(t) \leq 0$, $q(t) > 0$ olduğunu kabul edelim.

Şimdi, lineer durumda Tanım 2.1.1 ile verilen (3.1.2) denklemine ait A özelliğini aşağıdaki gibi tekrar ifade edelim.

Tanım 3.1.1. (3.1.2) denkleminin her u çözümü salınımlı ya da her $t \geq T, \quad j = 0,1,2$ için $(-1)^j u^{(j)} sgn u(t) > 0$ ve

$$\lim_{t\to\infty} u^{(j)}(t) = 0, \quad j = 0,1,2$$

olacak şekilde bir $T \geq a$ noktası varsa, (3.1.2) denklemi A *özelliğine sahiptir* denir.

Tanım 3.1.2. Eğer

$$\int_\epsilon^\infty \frac{du}{u^\alpha} < \infty, \ \epsilon > 0 \tag{3.1.3}$$

ise (3.1.1) denklemine *süperlineer* denir. Benzer şekilde eğer

$$\int_{\mp\epsilon}^{\mp\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty, \ \epsilon > 0 \tag{3.1.4}$$

ise (3.1.2) denklemine *süperlineer* denir.

$p(t) \equiv 0$ özel durumunda (3.1.1) denklemi için aşağıdaki sonuç geçerlidir :

Teorem 3.1.1. [20] (3.1.1) denklemi (3.1.3) koşulunu sağlasın. Bu denklemin A özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\int^\infty t^2 q(t)dt = \infty \tag{3.1.5}$$

dır.

Öte yandan $\alpha > 1$ ve α tek pozitif tamsayıların bir oranı olmak üzere $q(t) > 0$ durumunda aşağıdaki sonuç geçerlidir [20], [6].

Teorem 3.1.2. $p \in C^1(I, R)$ olduğunu varsayalım.

$$I \text{ üzerinde } p \leq 0, \ p' \geq 0 \text{ ve } q > 0 \ (p < 0, \ p' \geq 0 \ ve \ q \geq 0) \tag{3.1.6}$$

ve

$$\int^\infty q(t)dt = \infty \tag{3.1.7}$$

olsun. Bu durumda (3.1.1) denklemi A özelliğine sahiptir.

Lemma 3.1.1. [6;Lemma 2.1], [19;Teo.1.1] $t \geq T \geq a$ için $y(t) \geq 0$, $y'(t) \leq 0$, ve $y''(t) \geq 0$, özelliklerine sahip (3.1.1) ((3.1.2))'nin bir aşikar olmayan y çözümü vardır. Eğer $\alpha \geq 1$ ise

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad y''(t) > 0, \quad t \geq T \geq a.$$

dır.

Lemma 3.1.2. [6;Teo 2.2],[19;Lemma 1.3 ve Lemma 2.1] y, (3.1.1) ((3.1.2))'in I üzerinde mevcut salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda I üzerinde ya

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad y''(t) > 0, \quad y'''(t) < 0 \tag{3.1.8}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} y''(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = L < \infty$$

ya da her $t \geq T$ için

$$y(t) > 0, \quad y'(t) \geq 0 \tag{3.1.9}$$

olacak şekilde bir $T \in I$ vardır.

Lemma 3.1.3. Q,

$$Q(z) = Az^3 - Bz + C, \quad A > 0, \quad B \geq 0, \quad z \in R$$

şeklinde tanımlı bir polinom olsun. Bu durumda

$$Q(z) \geq C - \frac{2}{3}\left(B^3/3A\right)^{1/2}, \quad \forall z \geq 0 \tag{3.1.10}$$

dır.

Teorem 3.1.3. $0 \leq \delta \leq 2$ bir reel sayı olsun ve I üzerinde

$$t^{\delta} p(t) \geq -M > -\infty \tag{3.1.11}$$

ve

$$\int^{\infty} t^{\delta} q(t) dt = \infty \tag{3.1.12}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.1.1) denklemi A özelliğine sahiptir.

İspat. y, (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmadan $t \geq t_1$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Önce y' nin (3.1.9) özelliğine sahip olamayacağı gösterilecektir. y (3.1.9)'u sağlayacak şekilde $T \in I, \quad T \geq a$ varolsun. (3.1.1) denklemi $t^\delta y^{-\alpha}(t)$ ile çarpılıp T' den $t \geq T$ 'ye kısmi integrasyonu alınırsa K bir sabit olmak üzere

$$\frac{t^\delta y''(t)}{y^\alpha(t)} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{y^\alpha(t)} + \frac{\alpha t^\delta y'^2(t)}{2y^{\alpha+1}(t)} +$$

$$\delta(\delta-1)\int_T^t \frac{s^{\delta-2}y'(s)}{y^\alpha(s)}ds + \int_T^t \frac{s^\delta p(s)y'(s)}{y^\alpha(s)}ds + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\int_T^t \frac{s^\delta y'^3(s)}{y^{\alpha+2}(s)}ds$$

$$-\frac{3}{2}\alpha s\int_T^t \frac{s^{\delta-1}y'^2(s)}{y^{\alpha+1}(s)}ds = K - \int_T^t s^\delta q(s)ds \tag{3.1.13}$$

bulunur.

$0 \leq \delta \leq 2$ için (3.1.3) ve (3.1.11)'den, (3.1.13) 'ün sol tarafındaki ilk iki integral alttan sınırlıdır.

$A > 0$ olmak üzere $Az^2 - Bz \geq -B^2/4A$ eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\int_T^t \left[\frac{\alpha+1}{2}s^\delta\left(\frac{y'(s)}{y(s)}\right)^2 - \frac{3}{2}\delta s^{\alpha-1}\frac{y'(s)}{y(s)}\right]\frac{y'(s)}{y^\alpha(s)}ds$$

$$\geq -\frac{9\delta^2}{8(\alpha+1)}\int_T^t s^{\delta-2}\frac{y'(s)}{y^\alpha(s)}ds > -\infty$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{t^\delta y''(t)}{y^\alpha(t)} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{y^\alpha(t)} + \frac{\alpha}{2}\frac{t^\delta y'^2(t)}{y^{\alpha+1}(t)} \leq K_1 - \int_T^t s^\delta q(s)ds$$

olur.

Son eşitsizlik T'den $t \geq T$ 'ye tekrar integre edilirse,

$$\frac{t^\delta y'(t)}{y^\alpha(t)} + \frac{3\alpha}{2}\int_T^t \frac{s^\delta y'^2(s)}{y^{\alpha+1}(s)}ds - 2\delta\int_T^t \frac{s^{\delta-1}y'(s)}{y^\alpha(s)}ds$$

$$\leq K_2 + K_1 t - \int_T^t \int_T^s u^\delta q(u) du ds \tag{3.1.14}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_T^t \left[\frac{3\alpha}{2} s^\delta \left(\frac{y'(s)}{y(s)} \right)^2 - 2\delta s^{\delta-1} \frac{y'(s)}{y(s)} \right] y^{1-\alpha}(s) ds$$

$$\geq -\frac{2\delta^2}{3\alpha} \int_T^t s^{\delta-2} y^{1-\alpha}(s) ds \geq -\frac{2\delta^2}{3\alpha} T^{\delta-2} y^{1-\alpha}(T) \int_T^t ds$$

olduğundan (3.1.14) 'ten

$$\frac{t^\delta y'(t)}{y^\alpha(t)} \leq K_4 + K_3 t - \int_T^t \int_T^s u^\delta q(u) du ds$$

elde edilir.

Bu ve (3.1.12) 'den, yeterince büyük t'ler için $y' < 0$ sonucu çıkar. Bu (3.1.9)'a çelişkidir. Böylece (3.1.1) denklemi, (3.1.9) özelliğinde bir çözüme sahip değildir. Buradan Lemma 3.1.2 gözönüne alınırsa y'nin (3.1.8) özelliğine sahip olduğu sonucu çıkar.

İspatı tamamlamak için $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $\lim_{t\to\infty} y(t) = L > 0$ olsun. (3.1.1) 'den

$$t^\delta y'''(t) \leq -L^\alpha t^\delta q(t), \quad t > a$$

bulunur. Bu eşitsizlik a'dan $t > a$'ye integre edilirse

$$t^\delta y''(t) - \delta t^{\delta-1} y'(t) + \delta(\delta-1) \int_a^t s^{\delta-2} y'(s) ds$$

$$\leq K_5 - L^\alpha \int_a^t s^\delta q(s) ds \tag{3.1.15}$$

elde edilir.

(3.1.12) koşulundan, sol taraftaki tüm terimler pozitif ya da sınırlı iken (3.1.15)'in sağ tarafı $t \to \infty$ iken $-\infty$'a gider. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.1.1. I üzerinde $p(t) \equiv 0$ özel durumu için $\delta = 2$ almak yeterlidir,

Lemma 3.1.1. [6;Lemma 2.1], [19;Teo.1.1] $t \geq T \geq a$ için $y(t) \geq 0$, $y'(t) \leq 0$, ve $y''(t) \geq 0$, özelliklerine sahip (3.1.1) ((3.1.2))'nin bir aşikar olmayan y çözümü vardır. Eğer $\alpha \geq 1$ ise

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad y''(t) > 0, \quad t \geq T \geq a.$$

dır.

Lemma 3.1.2. [6;Teo 2.2],[19;Lemma 1.3 ve Lemma 2.1] y, (3.1.1) ((3.1.2))'in I üzerinde mevcut salınımsız bir çözümü olsun. Bu durumda I üzerinde ya

$$y(t) > 0, \quad y'(t) < 0, \quad y''(t) > 0, \quad y'''(t) < 0 \tag{3.1.8}$$

ve

$$\lim_{t\to\infty} y'(t) = \lim_{t\to\infty} y''(t) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = L < \infty$$

ya da her $t \geq T$ için

$$y(t) > 0, \quad y'(t) \geq 0 \tag{3.1.9}$$

olacak şekilde bir $T \in I$ vardır.

Lemma 3.1.3. Q,

$$Q(z) = Az^3 - Bz + C, \quad A > 0, \quad B \geq 0, \quad z \in R$$

şeklinde tanımlı bir polinom olsun. Bu durumda

$$Q(z) \geq C - \frac{2}{3}\left(B^3/3A\right)^{1/2}, \quad \forall z \geq 0 \tag{3.1.10}$$

dır.

Teorem 3.1.3. $0 \leq \delta \leq 2$ bir reel sayı olsun ve I üzerinde

$$t^\delta p(t) \geq -M > -\infty \tag{3.1.11}$$

ve

$$\int^\infty t^\delta q(t)dt = \infty \tag{3.1.12}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda (3.1.1) denklemi A özelliğine sahiptir.

İspat. y, (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmadan $t \geq t_1$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Önce y' nin (3.1.9) özelliğine sahip olamayacağı gösterilecektir. y (3.1.9)'u sağlayacak şekilde $T \in I$, $\quad T \geq a$ varolsun. (3.1.1) denklemi $t^\delta y^{-\alpha}(t)$ ile çarpılıp T' den $t \geq T$ 'ye kısmi integrasyonu alınırsa K bir sabit olmak üzere

$$\frac{t^\delta y''(t)}{y^\alpha(t)} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{y^\alpha(t)} + \frac{\alpha t^\delta y'^2(t)}{2y^{\alpha+1}(t)} +$$

$$\delta(\delta-1)\int_T^t \frac{s^{\delta-2}y'(s)}{y^\alpha(s)}ds + \int_T^t \frac{s^\delta p(s)y'(s)}{y^\alpha(s)}ds + \frac{1}{2}\alpha(\alpha+1)\int_T^t \frac{s^\delta y'^3(s)}{y^{\alpha+2}(s)}ds$$

$$-\frac{3}{2}\alpha s\int_T^t \frac{s^{\delta-1}y'^2(s)}{y^{\alpha+1}(s)}ds = K - \int_T^t s^\delta q(s)ds \tag{3.1.13}$$

bulunur.

$0 \leq \delta \leq 2$ için (3.1.3) ve (3.1.11)'den, (3.1.13) 'ün sol tarafındaki ilk iki integral alttan sınırlıdır.

$A > 0$ olmak üzere $Az^2 - Bz \geq -B^2/4A$ eşitsizliği gözönüne alınırsa

$$\int_T^t \left[\frac{\alpha+1}{2}s^\delta\left(\frac{y'(s)}{y(s)}\right)^2 - \frac{3}{2}\delta s^{\alpha-1}\frac{y'(s)}{y(s)}\right]\frac{y'(s)}{y^\alpha(s)}ds$$

$$\geq -\frac{9\delta^2}{8(\alpha+1)}\int_T^t s^{\delta-2}\frac{y'(s)}{y^\alpha(s)}ds > -\infty$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{t^\delta y''(t)}{y^\alpha(t)} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{y^\alpha(t)} + \frac{\alpha}{2}\frac{t^\delta y'^2(t)}{y^{\alpha+1}(t)} \leq K_1 - \int_T^t s^\delta q(s)ds$$

olur.

Son eşitsizlik T'den $t \geq T$ 'ye tekrar integre edilirse,

$$\frac{t^\delta y'(t)}{y^\alpha(t)} + \frac{3\alpha}{2}\int_T^t \frac{s^\delta y'^2(s)}{y^{\alpha+1}(s)}ds - 2\delta\int_T^t \frac{s^{\delta-1}y'(s)}{y^\alpha(s)}ds$$

$$\leq K_2 + K_1 t - \int_T^t \int_T^s u^\delta q(u) du ds \tag{3.1.14}$$

bulunur. Öte yandan

$$\int_T^t \left[\frac{3\alpha}{2} s^\delta \left(\frac{y'(s)}{y(s)} \right)^2 - 2\delta s^{\delta-1} \frac{y'(s)}{y(s)} \right] y^{1-\alpha}(s) ds$$

$$\geq -\frac{2\delta^2}{3\alpha} \int_T^t s^{\delta-2} y^{1-\alpha}(s) ds \geq -\frac{2\delta^2}{3\alpha} T^{\delta-2} y^{1-\alpha}(T) \int_T^t ds$$

olduğundan (3.1.14) 'ten

$$\frac{t^\delta y'(t)}{y^\alpha(t)} \leq K_4 + K_3 t - \int_T^t \int_T^s u^\delta q(u) du ds$$

elde edilir.

Bu ve (3.1.12) 'den, yeterince büyük t'ler için $y' < 0$ sonucu çıkar. Bu (3.1.9)'a çelişkidir. Böylece (3.1.1) denklemi, (3.1.9) özelliğinde bir çözüme sahip değildir. Buradan Lemma 3.1.2 gözönüne alınırsa y'nin (3.1.8) özelliğine sahip olduğu sonucu çıkar.

İspatı tamamlamak için $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $\lim_{t\to\infty} y(t) = L > 0$ olsun. (3.1.1) 'den

$$t^\delta y'''(t) \leq -L^\alpha t^\delta q(t), \quad t > a$$

bulunur. Bu eşitsizlik a'dan $t > a$'ye integre edilirse

$$t^\delta y''(t) - \delta t^{\delta-1} y'(t) + \delta(\delta-1) \int_a^t s^{\delta-2} y'(s) ds$$

$$\leq K_5 - L^\alpha \int_a^t s^\delta q(s) ds \tag{3.1.15}$$

elde edilir.

(3.1.12) koşulundan, sol taraftaki tüm terimler pozitif ya da sınırlı iken (3.1.15)'in sağ tarafı $t \to \infty$ iken $-\infty$'a gider. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.1.1. I üzerinde $p(t) \equiv 0$ özel durumu için $\delta = 2$ almak yeterlidir, yani (3.1.5) koşulu geçerlidir.

Örnek 3.1.1. $\alpha > 1$ *ve* $\beta < 0$ veya $\beta \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ şeklinde tanımlı sabitler olmak üzere $t \geq a > 0$ için

$$y''' - t^{-2} + \beta[1-(\beta-1)(\beta-2)]t^{\beta(1-\alpha)-3}|y|^{\alpha} sgny = 0, \tag{3.1.16}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $\delta = 2$ olmak üzere Teorem 3.1.2'nin (3.1.6) ve Teorem 3.1.3'ün (3.1.11) koşulları sağlanır. Buna göre $\beta < 0$ için $y(t) = t^{\beta}$ A özelliğine sahip bir çözüm olmasına karşın $\beta \in \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$ için $y(t) = t^{\beta}$ A özelliğine sahip olmayan bir çözümdür. Çünkü bu durumda (3.1.12) koşulu sağlanmamaktadır.

Teorem 3.1.4. $0 \leq \delta \leq 2$ olsun. Eğer her pozitif D sabiti için

$$\int^{\infty} \left[q(t) - D\left(-p(t)\right)^{3/2}\right] t^{\delta} dt = \infty \tag{3.1.17}$$

ise (3.1.1) denklemi A özelliğine sahiptir.

İspat. y, (3.1.1) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmadan $t > t_1$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Teorem 3.1.3'ün ispatında olduğu gibi aynı işlemler yapılırsa (3.1.13) eşitliği

$$\frac{t^{\delta}y''(t)}{y^{\alpha}(t)} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{y^{\alpha}(t)} + \frac{\alpha}{2}\frac{t^{\delta}y'^{2}(t)}{y^{\alpha+1}(t)} +$$

$$\int_T^t \left[\frac{\alpha^2}{2}(y^{\alpha-1}(s))^2\left(\frac{y'(s)}{y^{\alpha}(s)}\right)^3 + p(s)\frac{y'(s)}{y^{\alpha}(s)} + q(s)\right] s^{\delta} ds$$

$$+\delta(\delta-1)\int_T^t \frac{s^{\delta-2}y'(s)}{y^{\alpha}(s)} ds +$$

$$\frac{\alpha}{2}\int_T^t \left[s^{\delta}\left(\frac{y'(s)}{y(s)}\right)^2 - 3\delta s^{\delta-1}\frac{y'(s)}{y(s)}\right]\frac{y'(s)}{y^{\alpha}(s)} ds = K \tag{3.1.13'}$$

olarak tekrar yazılabilir.

Teorem 3.1.3'de olduğu gibi kolayca gösterilebilir ki (3.1.13′) 'ün sol tarafındaki

son iki integral alttan sınırlıdır.
$t \geq T$ için $z(t) = \frac{y'(t)}{y^\alpha(t)}$ ile tanımlanırsa (3.1.10) 'dan

$$\text{her} \quad t \geq T \quad \text{için} \ \frac{\alpha^2}{2}(y^{\alpha-1}(t))^2 z^3 - (-p(t))z + q(t)$$

$$\geq q(t) - \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{y^{1-\alpha}(t)}{\alpha}(-p(t))^{3/2}$$

$$\geq q(t) - \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \frac{y^{1-\alpha}(T)}{\alpha}(-p(t))^{3/2} = q(t) - D_0(-p(t))^{3/2}$$

bulunur.
Bu ifade (3.1.13′) 'de yerine yazılırsa

$$\frac{t^\delta y''(t)}{y^\alpha(t)} - \delta \frac{t^{\delta-1} y'(t)}{y^\alpha(t)} + \frac{\alpha}{2} \frac{t^\delta y'^2(t)}{y^{\alpha+1}(t)} \leq K_6 - \int_T^t \left[q(s) - D_0(-p(s))^{3/2}\right] s^\delta ds$$

olur. İspatın geri kalan kısmı için Teorem 3.1.3'dekine benzer bir yol izlenir.

Örnek 3.1.2.

$$y''' + (3-2t^2)y' + (4t^3 - 6t)e^{(\alpha-1)t^2}|y|^\alpha sgny = 0, \quad \alpha > 1, \quad t > (3/2)^{1/2}, \quad (3.1.18)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Teorem 3.1.4'ün koşulları sağlanır. Bu yüzden (3.1.18) denklemi A özelliğine sahiptir. $y(t) = e^{-t^2}$ böyle bir çözüme örnektir. I üzerinde $p'(t) < 0$ olduğundan Teorem 3.1.2 (3.1.18) denklemine uygulanamaz.

Uyarı 3.1.2. Teorem 3.1.4, (3.1.16) denklemine de uygulanabilir.

Şimdi de (3.1.2) denklemini göz önüne alalım.

$$f'(u) \geq k_0, \ 2f'^2(u) - f(u)f''(u) > 0, \ \text{ve} \qquad (3.1.19)$$

$$f'^2(u)/[2f'^2(u) - f(u)f''(u)] \leq K_0, \ \text{her} \ |u| \geq |u_0|$$

olmak üzere $f \in C^2(R, R)$ ve tüm $|u_0| > 0$ 'lar için $K_0 = K_0(u_0) > 0$ ve $k_0 = k_0(u_0) > 0$ sabitlerinin bulunduğunu varsayalım.

Örnek 3.1.3.

$$f_1(u) = |u|^\alpha sgnu, \ \alpha > 1$$

$$f_2(u) = \frac{|u|^{2\alpha} sgnu}{1+|u|^\alpha}, \ \alpha > 1$$

$$f_3(u) = sinhu$$

şeklinde tanımlanan f_1, f_2, ve $f_3 : R \to R$ fonksiyonları (3.1.4) ve (3.1.19) koşullarını sağlar.

Teorem 3.1.5. (3.1.4), (3.1.11), (3.1.12) ve (3.1.19) koşulları sağlansın. Bu durumda (3.1.2) denklemi A özelliğine sahiptir.

İspat. Teorem 3.1.3 'ün ispatına benzer olarak y, (3.1.2) denkleminin salınımsız pozitif bir çözümü olsun ve y'nin (3.1.9) koşulunu sağladığını varsayalım. (3.1.2) denklemi $t^\delta/f(y(t))$ ile çarpılıp T 'den $t \geq T$ 'ye kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\frac{t^\delta y''(t)}{f(y(t))} - \delta \frac{t^{\delta-1}y'(t)}{f(y(t))} + \frac{t^\delta f'(y(t)) y'^2(t)}{2f^2(y(t))} +$$

$$\delta(\delta-1)\int_T^t \frac{s^{\delta-2}y'(s)}{f(y(s))}ds + \int_T^t \frac{s^\delta p(s) y'(s)}{f(y(s))}ds +$$

$$\frac{1}{2}\int_T^t \left[\frac{2f'^2(y) - f(y)f''(y)}{f^3(y(s))} s^\delta y'^3(s) - 3\delta \frac{s^{\delta-1}f'(y)}{f^2(y(s))} y'^2(s)\right] ds = K - \int_T^t s^\delta q(s) ds, \tag{3.1.20}$$

bulunur. Burada K bir sabittir.

$$\int_T^t \left\{ \left[2f'^2(y) - f(y)f''(y)\right] s^\delta \left(\frac{y'(s)}{f(y)}\right)^2 - 3\delta s^{\delta-1} f'(y) \frac{y'(s)}{f(y)} \right\} \frac{y'(s)}{f(y)} ds \geq$$

$$-\frac{9}{4}\delta^2 \int_T^t \frac{f'^2}{2f'^2 - ff''} s^{\delta-2} \frac{y'}{f(y)} ds \geq -\frac{9}{4}\delta^2 K_0 \int_T^t s^{\delta-2} \frac{y'(s)}{f(y(s))} ds > -\infty,$$

olduğundan (3.1.4), (3.1.11) ve (3.1.19) 'dan (3.1.20) 'nin sol tarafındaki tüm integraller alttan sınırlıdır. Böylece

$$\frac{t^\delta y''(t)}{f(y(t))} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{f(y(t))} + \frac{t^\delta f'(y(t))y'^2(t)}{2f^2(y(t))} \leq K_1 - \int_T^t s^\delta q(s)ds$$

yazılabilir.

Yukarıdaki eşitsizlik T'den $t \geq T$'ye integre edilirse

$$\frac{t^\delta y'(t)}{f(y(t))} \int_T^t \left[\frac{3s^\delta f'(y(s))y'^2(s)}{2f^2(y(s))} - 2\delta\frac{s^{\delta-1}y'(s)}{f(y(s))}\right] ds$$

$$\leq K_2 + K_1 t - \int_T^t \int_T^s u^\delta q(u)duds \qquad (3.1.21)$$

bulunur.

$$\int_T^t \left[\frac{3}{2}s^\delta f'(y)\left(\frac{y'(s)}{f(y)}\right)^2 - 2\delta s^{\delta-1}\frac{y'(s)}{f(y)}\right] ds$$

$$\geq -\frac{2}{3}\delta^2\int_T^t \frac{s^{\delta-2}}{f'(y)}ds \geq -\frac{2}{3}\delta^2\frac{T^{\delta-2}}{k_0}\int_T^t ds,$$

olduğundan (3.1.21)'den

$$\frac{t^\delta y'(t)}{f(y(t))} \leq K_4 + K_3 t - \int_T^t \int_T^s u^\delta q(u)duds$$

olup Teorem 3.1.3 'ün ispatına benzer yol izlenerek (3.1.2) denkleminin A özelliğine sahip olduğu sonucu elde edilir.

Örnek 3.1.4.

$$y''' - \frac{1}{t^2}y' + \frac{5}{t^4 sinh\frac{1}{t}} sinhy = 0, \quad t \geq a > 0 \qquad (3.1.22)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. $\delta = 2$ olmak üzere Teorem 3.1.5'in koşulları sağlanır. Bu yüzden (3.1.22) denklemi A özelliğine sahiptir.
$y(t) = \frac{1}{t}$ böyle bir çözüme örnektir.

Uyarı 3.1.3. I üzerinde $p(t) \equiv 0$ özel durumunda (3.1.5) koşulu (3.1.1) denkleminin A özelliğine sahip olması için yeterlidir. Fakat bu durumda f fonksiyonu

iki kez türevlenebilir olmak zorunda değildir.
Örneğin, eğer f azalmayan ise ve $u \geq 0,\ v \in R$ için $|f(uv)| \geq Cf(u)|f(v)|$ olacak şekilde bir $c > 0$ sabiti varsa, (3.1.5) koşulu ve

$$\int^{\infty} tq(t)f(t)dt = \infty,$$

süperlineer (3.1.2) denkleminin A özelliğine sahip olması için yeterlidir. ([9]'da Teo.1 ya da [30]'da Sonuç 1).

Örnek 3.1.5.

$$y''' - \frac{3}{t^2}y' + \frac{2}{t^2(t^2-1)}sinhy = 0, \quad t \geq a > 1$$

diferensiyel denklemi, A özelliğine sahip olmayan salınımsız bir $y(t) = lnt$ çözümüne sahiptir. Teorem 3.1.5'in (3.1.12) dışındaki tüm koşulları sağlanır.

Bu kesimde son olarak bu kez (3.1.2) denklemindeki f fonksiyonu için $f \in C^2(R,R)$ ve tüm $|u_0| > 0$ 'lar için

$$f'(u) \geq k_0, \quad Af'^2(u) - f(u)f''(u) > 0 \quad \text{ve}$$

$$f'^2(u)/[Af'^2(u) - f(u)f''(u)] \leq K_0 \quad \text{veya}$$

$$Af'^2(u) - f(u)f''(u) \geq k_0', \quad \forall|u| \geq |u_0| \tag{3.1.23}$$

olacak şekilde $K_0 = K_0(u_0) > 0, \quad k_0 = k_0(u_0) > 0$ ve $k_0' = k_0'(u_0) > 0$ sabitlerinin varolduğunu kabul edelim. Burada A, $0 < A < 2$ özelliğine sahip bir sabittir.

Uyarı 3.1.4. Örnek 3.1.3 'teki f_1, f_2, f_3 fonksiyonları (3.1.23) koşulunu sağlar.

Teorem 3.1.6. (3.1.4), (3.1.17) ve (3.1.23) koşulları geçerli olsun. Bu durumda (3.1.2) denklemi A özelliğine sahiptir.

İspat. y, (3.1.2) denkleminin salınımsız bir çözümü olsun. y 'nin (3.1.9) koşulunu sağladığını varsayalım. (3.1.20) özdeşliği

$$\frac{t^\delta y''(t)}{f(y(t))} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{f(y(t))} + \frac{t^\delta f'(y(t))y'^2(t)}{2f^2(y(t))} +$$

$$\int_T^t \left[\frac{Af'^2 - ff''}{2}s^\delta \left(\frac{y'(s)}{f(y)}\right)^2 - \frac{3}{2}\delta s^{\delta-1}f'(y)\frac{y'(s)}{f(y)}\right]\frac{y'(s)}{f(y)}ds +$$

$$\delta(\delta-1)\int_T^t \frac{s^{\delta-2}y'(s)}{f(y(s))}ds + \int_T^t \left[\frac{B}{2}f'^2(y)\left(\frac{y'(s)}{f(y)}\right)^3 + p(s)\frac{y'(s)}{f(y)} + q(s)\right]s^\delta ds = K \tag{3.1.20'}$$

ya da

$$\frac{t^\delta y''(t)}{f(y(t))} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{f(y(t))} + \frac{t^\delta f'(y(t))y'^2(t)}{2f^2(y(t))} +$$

$$\int_T^t \left[\frac{B}{2}f'^2(y)s^\delta \left(\frac{y'(s)}{f(y)}\right)^2 - \frac{3}{2}\delta s^{\delta-1}f'(y)\frac{y'(s)}{f(y)}\right]\frac{y'(s)}{f(y)}ds + \tag{3.1.20''}$$

$$\delta(\delta-1)\int_T^t \frac{s^{\delta-2}y'(s)}{f(y(s))}ds + \int_T^t \left[\frac{Af'^2 - ff''}{2}\left(\frac{y'(s)}{f(y)}\right)^3 + p(s)\frac{y'(s)}{f(y)} + q(s)\right]s^\delta ds = K$$

olarak yeniden yazılabilir. Burada B bir sabit ve $B = 2 - A$ 'dır.

$0 \leq \delta \leq 2$, (3.1.4) ve (3.1.23) 'den, (3.1.20′) ya da (3.1.20″)'nin sol tarafındaki ilk iki integral alttan sınırlıdır. Eğer tüm $t \geq T$'ler için
$z(t) = y'(t)/f(y(t))$ ile gösterilir ve (3.1.10) göz önüne alınırsa, (3.1.20′) ya da (3.1.20″) 'den

$$\frac{t^\delta y''(t)}{f(y(t))} - \delta\frac{t^{\delta-1}y'(t)}{f(y(t))} + \frac{t^\delta f'(y(t))y'^2(t)}{2f^2(y(t))}$$
$$\leq K_6 - \int_T^t \left[q(s) - D_0(-p(s))^{3/2}\right]s^\delta ds$$

elde edilir.

Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.5'in ispatlarına benzer bir yol izlenerek sonuca ulaşılır.

Örnek 3.1.6.

$$y''' + (3 - 2t^2)y' + (4t^3 - 6t)(e^{5t^2} + e^{2t^2})\frac{y^6 sgny}{1 + |y|^3} = 0, \quad t > \sqrt{3/2}$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Teorem 3.1.6'nın koşulları sağlandığından bu denklem A özelliğine sahiptir. $y(t) = e^{-t^2}$ böyle bir çözüme örnektir.

Uyarı 3.1.5. (3.1.17) koşulu sağlanmadığından Teorem 3.1.6, (3.1.22) denklemine uygulanamaz.

3.2. BAZI SALINIMLILIK KRİTERLERİ

Bu kesimde 1998 yılında, N. Parhi ve P. Das tarafından ele alınan

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y^{\gamma} = 0 \tag{3.2.1}$$

ve

$$y''' + a(t)y'' + b(t)y' + c(t)f(y) = 0 \tag{3.2.2}$$

biçimindeki üçüncü basamaktan lineer olmayan diferensiyel denklemin çözümlerinin salınımlılık ve salınımsızlığına ilişkin inşa edilen sonuçlar irdelenecektir [23]. Burada $a, b, c \in C([\sigma, \infty), R)$, $\sigma \in R$, $f \in C(R, R)$, $y \neq 0$ için $\frac{f(y)}{y} \geq \beta > 0$ ve $\gamma > 0$ tek tamsayıların bir oranıdır.

Parhi ve Das, Kesim 2.2'de (1.1.5) lineer denklemi için elde edilen sonuçların (3.2.1) ve (3.2.2) denklemlerine genişletilebileceğini kanıtlamışlardır.

Uyarı 3.2.1. Kesim 1.2'de olduğu gibi (3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri sırasıyla

$$\left(r(t)y''\right)' + q(t)y' + p(t)y^{\gamma} = 0 \tag{3.2.3}$$

ve

$$\left(r(t)y''\right)' + q(t)y' + p(t)f(y) = 0 \tag{3.2.4}$$

biçiminde yazılabilir. Burada $r(t) = exp\left(\int_{\sigma}^{t} a(s)ds\right)$, $q(t) = b(t)r(t)$ ve $p(t) = c(t)r(t)$'dir.

Şimdi katsayı fonksiyonlarının işaretlerine bağlı olarak bu sonuçları verelim.

3.2.I $a(t) \geq 0$, $b(t) \leq 0$, $c(t) > 0$, $t \geq \sigma$ Durumu

Lemma 3.2.1. Eğer y, $[T_y, \infty)$, $T_y \geq \sigma$ üzerinde (3.2.1) ya da (3.2.2)'nin salınımsız bir çözümü ise $t \geq t_0$ için $y(t)y'(t) > 0$ ya da $y(t)y'(t) < 0$ olacak şekilde bir $t_0 \in (T_y, \infty)$ vardır.

İspat. y, $[T_y,\infty)$ üzerinde (3.2.1)'in salınımsız bir çözümü olsun. Genelliği bozmaksızın $t \geq t_0 > T$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. $-y'(t)$, ikinci basamaktan homojen olmayan

$$\left(r(t)x''\right)' + q(t)x = p(t)y^{\gamma}(t),\ t \geq t_0 \tag{3.2.5}$$

diferansiyel denkleminin bir çözümü olup [25]'den bunun tüm çözümleri salınımsızdır yani $y'(t)$ salınımsızdır. Böylece (3.2.1) için lemmanın sonucu geçerli olur.

Eğer y, $[T_y,\infty)$ üzerinde (3.2.2)'nin salınımsız bir çözümü ve $t \geq t_0 > T_y$ için $y(t) > 0$ ise, bu durumda yukarıdakine benzer bir sonuç elde edilir. Eğer $t \geq t_0 > T_y$ için $y(t) < 0$ ise, benzer bir yolla lemmanın sonucuna ulaşılır.

Lemma 3.2.2. Aşağıdaki durumlar denktir:

(I) A ve B gerçel sayıları ve yeterince büyük t'ler için

$$A + Bt - \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s c(u)du\right) ds < 0,$$

(II)

$$\int_\sigma^\infty c(u)du = \infty.$$

İspat. Gerçekten,

$$G(t) = \int_\sigma^t \left(\int_\sigma^s c(u)du\right) ds$$

alınırsa, (I)'in sağlanması için gerek ve yeter koşulun

$$\lim_{t\to\infty} \frac{G(t)}{t} = \infty \tag{3.2.6}$$

olduğu görülür.

Ayrıca (3.2.6)'nın sağlanması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{t\to\infty} G'(t) = \infty$$

olmasıdır, yani

$$\lim_{t\to\infty} \int_\sigma^t c(s)ds = \infty$$

dır.

Teorem 3.2.1. $\gamma \geq 1$ olsun. Eğer her $\alpha > 0$ için

$$\int_\sigma^\infty \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \alpha c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2} \right] dt = \infty \tag{3.2.7}$$

ise (3.2.1)'in bir sıfıra sahip olan bir çözümü salınımlıdır.

İspat. y'nin $[T_y, \infty)$, $T_y \geq \sigma$ üzerinde (3.2.1)'in bir çözümü olduğunu ve $t_1 \geq T_y$ için $y(t_1) = 0$ olduğunu varsayalım. Ayrıca y salınımsız olsun. Bu durumda yeterince büyük t'ler için $y(t) > 0$ ya da $y(t) < 0$'dır. Genelliği bozmaksızın t_2, y'nin son sıfırı olmak üzere $t > t_2$ için $y(t) > 0$ alınabilir. Lemma 3.2.1'den $t \geq t_0 > t_2$ için $y'(t) < 0$ ya da $y'(t) > 0$ sonucu çıkar. $t \geq t_0$ için $y'(t) < 0$ olsun. $y(t_2) = 0$ ve $t > t_2$ için $y(t) > 0$ olduğundan $t \in (t_2, t_2 + \delta)$, $\delta > 0$ için $y'(t) > 0$'dır. Böylece $t > t_3$ için $y'(t_3) = 0$ ve $y'(t) < 0$ olacak şekilde $t_3 \in (t_2, t_0)$ olur. (3.2.3) $y'(t)$ ile çarpılıp t_3'ten $t(t_3 < t)$'ye integre edilirse

$$r(t)y'(t)y''(t) = \int_{t_3}^t \left[r(s)(y''(s))^2 - q(s)(y'(s))^2 - p(s)y^\gamma(s)y'(s) \right] ds > 0$$

bulunur. Böylece $t > t_3$ için $y''(t) < 0$ olur. Bu yeterince büyük t'ler için $y(t) < 0$'ı gerektirir. Bu da bir çelişkidir.

Eğer $t \geq t_0$ için $y'(t) > 0$ ise, bu durumda $t \geq t_0$ için $z(t) = y'(t)/y(t)$ alınırsa $z(t)$,

$$z'' + 3zz' + a(t)z' = -\left[z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + c(t)y^{\gamma-1}(t) \right] \tag{3.2.8}$$

denklemini sağlar. $t \geq t_0$ için $y'(t) > 0$ olduğundan, $t \geq t_0$ için $y^{\gamma-1}(t) > \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ vardır. Böylece (3.2.8) denklemi

$$z'' + 3zz' + a(t)z' \leq -\left[z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + \alpha c(t) \right] \tag{3.2.9}$$

dönüşür. Pozitif z için $(z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + \alpha c(t))$ 'nin minimumu

$$\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \alpha c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2}$$

dır. Böylece (3.2.9)'dan

$$z'' + 3zz' + a(t)z' \leq -\left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \alpha c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2}\right], \; t \geq t_0 \tag{3.2.10}$$

bulunur. (3.2.10)'un iki yanı t_0'dan t'ye integre edilirse,

$$z'(t) \leq z'(t_0) + \frac{3}{2}z^2(t_0) + a(t_0)z(t_0)$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[\frac{2a^3(s)}{27} - \frac{a(s)b(s)}{3} + \alpha c(s) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(s)}{3} - b(s)\right)^{3/2}\right] ds$$

olur. (3.2.7)'den $\lim_{t\to\infty} z''(t) = -\infty$ elde edilir. Bu da yeterince büyük t'ler için $z(t) < 0$ çelişkisini doğurur. Böylece y salınımlıdır. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.2. $a'(t) \leq 0$, $\gamma < 1$ ve her $\alpha > 0$ için (3.2.7) nin geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.2.1)'in bir sıfıra sahip sınırlı bir çözümü salınımlıdır.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 3.2.1'in ispatına benzerdir.

Teorem 3.2.3. $a'(t) \leq 0$, $b'(t) \leq 0$ ve $b(t)$ 'nin sınırlı olduğunu varsayalım. Eğer $\gamma \geq 1$ ve

$$\int_0^{\infty}\left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2}\right] dt = \infty \tag{3.2.11}$$

ise (3.2.1)'in bir sıfıra sahip bir çözümü salınımlıdır.

İspat. y, $t_1 \geq T_y \geq \sigma$ için $y(t_1) = 0$ olmak üzere (3.2.1)'in salınımsız bir çözümü olsun. $t_2 \geq t_1$, y'nin son sıfırı olmak üzere $t > t_2$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.1 'den $t \geq t_0 > t_2$ için $y'(t) < 0$ ya da $y'(t) > 0$ olduğu sonucu çıkar. Teorem 3.2.1'in ispatında olduğu gibi $t > t_0$ için $y'(t) < 0$ olmasının mümkün olamayacağını gösterebiliriz. Böylece $t > t_0$ için $y'(t) > 0$ 'dır.

$$A(t) = \frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3}, \quad B(t) = \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2}$$

alınırsa, $A(t) \geq 0$, $B(t) \geq 0$ ve $A^2(t) - B^2(t) \leq 0$ olduğu görülür. O halde $A(t) - B(t) \leq 0$ ve buradan

$$\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2} \leq 0 \tag{3.2.12}$$

bulunur. (3.2.11) ve (3.2.12)'den

$$\int_\sigma^\infty c(t)dt = \infty$$

sonucu çıkar.

Eğer y sınırlı ise, o zaman (3.2.1) t_0'dan t'ye integre edilirse

$$-\int_{t_0}^t c(s)y^\gamma(s)ds = y''(t) - y''(t_0) + a(t)y'(t) - a(t_0)y'(t_0) - b(t_0)y(t_0)$$
$$+b(t)y(t) - \int_{t_0}^t \left(a'(s)y'(s) + b'(s)y(s)\right) ds$$

yani

$$-y^\gamma(t_0)\int_{t_0}^t c(s)ds \geq y''(t) - y''(t_0) - a(t_0)y'(t_0) + b(t)y(t)$$

elde edilir. $b(t)y(t)$ sınırlı olduğundan

$$\lim_{t\to\infty} y''(t) = -\infty$$

olduğu görülür. Sonuç olarak yeterince büyük t'ler için $y'(t)$ negatif olur. Bu bir çelişkidir.

Eğer y sınırlı değilse, $t \geq t_3 > t_0$ için $y(t) > 1$ olduğunu kabul edelim.

$z(t) = y'(t)/y(t)$'nin, $t \geq t_3$ için

$$z'' + 3zz' + a(t)z' \leq -\left[z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + c(t)\right]$$

diferensiyel eşitsizliğini sağladığı açıktır. Pozitif z'ler için $[z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + c(t)]$'nin minimumu eşitsizlikte yazılarak t_2'den t'ye integre edilirse $\lim_{t\to\infty} z'(t) = -\infty$ bulunur. Böylece yeterince büyük t'ler için $z(t) < 0$ çelişkisi elde edilir. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.4. $a'(t) \leq 0$, $b'(t) \leq 0$ ve $b(t)$ 'nin sınırlı olduğunu varsayalım. Eğer $\gamma < 1$ ve (3.2.11) sağlanıyorsa (3.2.1)'in bir sıfıra sahip sınırlı bir çözümü salınımlıdır.

İspat. Teorem 3.2.3'ün ispatına benzer bir yol izlenerek sonuca ulaşılır.

Örnek 3.2.1.

$$y''' + t^{-2/3}y'' - \left(1 + \frac{1}{3}t^{-4/3}\right)y' + e^t y^{3/2} = 0,\ t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Teorem 3.2.1'in koşulları sağlanır. Fakat $b'(t) > 0$ olduğundan Teorem 3.2.3 bu denkleme uygulanamaz.

Örnek 3.2.2.

$$y''' + t^{-2/3}y'' - \left(1 - \frac{1}{3}t^{-4/3}\right)y' + \frac{2}{3\gamma^3}y^{3/2} = 0,\ t \geq 1$$

denklemini düşünelim. Teorem 3.2.3'ün bütün koşulları sağlanır. Fakat
$0 < \alpha < 3/4$ için

$$\int_\sigma^\infty \left[\frac{2}{27t^2} + \frac{1}{3}t^{-2/3} - \frac{1}{9t^2} + \frac{2\alpha}{3\gamma^3} - \frac{2}{3\gamma^3}\right] dt = -\infty$$

olduğundan Teorem 3.2.1 bu denkleme uygulanamaz.

Teorem 3.2.5. Eğer Teorem 3.2.1 ya da Teorem 3.2.3'ün hipotezleri sağlanıyorsa, bu durumda (3.2.1)'in salınımsız bir u çözümü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$u(t) \neq 0,\ t \geq T_u,$$

$$sgnu(t) = sgnu''(t) \neq sgnu'(t) = sgnu'''(t),\ t \geq T_u,$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} u'(t) = \lim_{t\to\infty} u''(t) = 0.$$

İspat. u'nun $[T_u, \infty)$, $T_u \geq \sigma$ üzerinde (3.2.1)'in salınımsız bir çözümü olduğunu varsayalım. Eğer u, $[T_u, \infty)$ aralığında bir sıfıra sahipse, bu durumda Teorem 3.2.1 ya da Teorem 3.2.3'ten u salınımlı olur ki bu bir çelişkidir. O halde u, $[T_u, \infty)$ aralığında sıfıra sahip değildir. Bu durumda $t \geq T_u$ için $u(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz. Teorem 3.2.1 ya da Teorem 3.2.3'ün ispatında olduğu gibi $t \geq t_0$ için $u'(t) \not> 0$ olduğu gösterilebilir. Böylece $t \geq t_0$ için $u'(t) < 0$ olur.

$t \geq t_0 \geq T_u$ için $\left(r(t)u''(t)\right)' = -q(t)u'(t) - p(t)u^{\gamma}(t) < 0$ olduğundan $u''(t)$ salınımsızdır. Böylece $t \geq t_1$ için $u''(t) < 0$ ya da $u''(t) > 0$ olacak şekilde bir $t_1 \geq t_0$ vardır. Eğer $t \geq t_1$ için $u''(t) < 0$ ise, yeterince büyük t'ler için u negatif olur. Bu bir çelişkidir. O halde $t \geq t_1$ için $u''(t) > 0$' dır ve $[T_u, \infty)$ aralığında $u'(t)$ ve $u''(t)$'nin bir sıfırı yoktur. Gerçekten kabul edelim ki bir $t_2 \in [T_u, \infty)$ için $u'(t_2) = 0$ ya da $u''(t_2) = 0$ olsun. Genelliği bozmaksızın $t > t_2$ için
$u'(t_2)u''(t_2) = 0$, $u'(t) < 0$ ve $u''(t) > 0$ olduğunu varsayalım.

$$\left(r(t)u''(t)\right)' + q(t)u'(t) + p(t)u^{\gamma}(t) = 0 \tag{3.2.13}$$

denklemi $u'(t)$ ile çarpılıp t_2'den $t > t_2$'ye integre edilirse

$$r(t)u'(t)u''(t) \geq -\int_{t_2}^{t} \left(q(s)\left(u'(s)\right)^2 + p(s)u^{\gamma}(s)u'(s)\right) ds > 0$$

çelişkisi elde edilir. O halde $t \geq T_u$ için $u'(t) < 0$ ve $u''(t) > 0$ olup
$\lim_{t\to\infty} u'(t) = 0$ 'dır. Aksi halde yeterince büyük t'ler için $u(t) < 0$ olur ki bu $u(t) > 0$ varsayımına çelişkidir.
Benzer şekilde (3.2.1)'den $t \geq T_u$ için $u'''(t) > 0$ iken $\lim_{t\to\infty} u''(t) = 0$'dır. Son olarak $\lim_{t\to\infty} u(t) = \mu$, $\mu > 0$ olduğunu varsayalım. $t \geq T_u$ için $u(t) \geq \mu$ olup (3.2.13) T_u'dan t'ye integre edilirse,

$$\begin{aligned} r(t)u''(t) &= r(T_u)r''(T_u) - \int_{T_u}^{t} q(s)u'(s)ds - \int_{T_u}^{t} p(s)u^{\gamma}(s)ds \\ &\leq r(T_u)u''(T_u) - \int_{T_u}^{t} c(s)r(s)u^{\gamma}(s)ds \\ &\leq r(T_u)u''(T_u) - r(T_u)\mu^{\gamma}\int_{T_u}^{t} c(s)ds \end{aligned}$$

bulunur. (3.2.7) ya da (3.2.11)'den

$$\int_{\sigma}^{\infty} c(s)ds = \infty$$

olup yeterince büyük t'ler için $u''(t) < 0$ olur. Bu bir $u''(t) > 0$'a bir çelişkidir. Böylece $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ bulunur. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.6. Teorem 3.2.2 ya da Teorem 3.2.4'ün hipotezlerinin sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.2.1)'in sınırlı salınımsız bir çözümü Teorem 3.2.5'deki özelliklere sahiptir.

İspat. Teorem 3.2.5'in ispatına benzer bir yol izlenerek sonuca ulaşılır.

Örnek 3.2.3.

$$y''' + t^{-4/3}y'' - \left(\frac{1}{2} - t^{-4/3}\right)y' + \frac{1}{2}e^{2t}y^3 = 0, \ t \geq 2$$

denklemini göz önüne alalım. Teorem 3.2.5'den denklemin salınımsız bir çözümü Teoremdeki özellikleri sağlar. Özel olarak $y(t) = e^{-t}$ denklemin, gerekli özellikleri sağlayan salınımsız bir çözümüdür.

Sonuç 3.2.1. Eğer Teorem 3.2.1 ya da Teorem 3.2.3'ün hipotezleri sağlanırsa, bu durumda (3.2.1)'in $[T_u, \infty)$'da birinci ya da ikinci türevi bir sıfıra sahip sınırlı bir çözümü salınımlıdır.
İspat. İspat, Teorem 3.2.5'ten çıkar.

Sonuç 3.2.2. Eğer Teorem 3.2.2 ya da Teorem 3.2.4'ün hipotezleri sağlanırsa, bu durumda (3.2.1)'in $[T_u, \infty)$'da birinci ya da ikinci türevi bir sıfıra sahip sınırlı bir çözümü salınımlıdır.
İspat. İspat, Teorem 3.2.6'dan çıkar.

Teorem 3.2.7. $a'(t) \leq 0, \ b'(t) \geq 0$ ve $\gamma > 1$ olduğunu varsayalım. Eğer

$$\int_{\sigma}^{\infty} c(t)dt = \infty$$

ise, $T_u \geq \sigma$ için $[T_u, \infty)$ üzerinde (3.2.1)'in salınımsız bir çözümü yeterince büyük t'ler için aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$sgnu(t) = sgnu''(t) \neq sgnu'(t) = sgnu'''(t),$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} u'(t) = \lim_{t\to\infty} u''(t) = 0.$$

İspat. $t \geq t_0 \geq T_u$ için $u(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.1'den $t \geq t_1 \geq t_0$ için $u'(t) > 0$ ya da $u'(t) < 0$'dır. $t \geq t_1$ için $u'(t) > 0$ ya da $u'(t) < 0$ olduğunu varsayalım. (3.2.1) denklemi $u^\gamma(t)$, $t \geq t_1$'ye bölünürse,

$$-c(t) = \frac{u'''(t)}{u^\gamma(t)} + a(t)\frac{u''(t)}{u^\gamma(t)} + b(t)\frac{u'(t)}{u^\gamma(t)} \tag{3.2.15}$$

olur. Bu eşitlik t_1'den $t_1 < t$'ye integre edilirse

$$A + Bt - \int_{t_1}^{t}\left(\int_{t_1}^{s} c(\theta)d\theta\right) ds$$

$$= \frac{u'(t)}{u^\gamma(t)} + \frac{3\gamma}{2}\int_{t_1}^{t}\frac{\left(u'(s)\right)^2}{u^{\gamma+1}(s)}ds + \frac{\gamma(\gamma+1)}{2}\int_{t_1}^{t}\frac{(t-s)(u'(s))^3}{u^{\gamma+2}(s)}ds - \frac{1}{\gamma-1}\int_{t_1}^{t}\frac{b(s)}{u^{\gamma-1}(s)}ds$$

$$+\frac{1}{\gamma-1}\int_{t_1}^{t}\frac{(t-s)b'(s)}{u^{\gamma+1}(s)}ds + \int_{t_1}^{t}\frac{a(s)u'(s)}{u^\gamma(s)}ds + \gamma\int_{t_1}^{t}\left(\int_{t_1}^{\theta} a(s)\frac{(u'(s))^2}{u^\gamma(s)}ds\right) d\theta$$

bulunur. Lemma 3.2.2'den, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı yeterince büyük t'ler için pozitif iken sol tarafı negatiftir. Bu bir çelişkidir. O halde $t \geq t_1$ için $u'(t) < 0$ 'dır. Böylece (3.2.3)'ten

$$t \geq t_1 \text{ için } \left(r(t)u''(t)\right)' = -q(t)u'(t) - p(t)u^\gamma(t) < 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $u''(t)$ salınımsızdır ve yeterince büyük t'ler için $u''(t) > 0$'dır. Aksi durumda $u(t) < 0$ elde edilir ki bu u'nun pozitifliğiyle çelişir. Öte yandan (3.2.1)'den $t \geq t_2 \geq t_1$ için $u'''(t) < 0$ bulunur. Sonuç olarak

$$\lim_{t\to\infty} u''(t) = \lim_{t\to\infty} u'(t) = 0$$

elde edilir. Şimdi de $\lim_{t\to\infty} u(t) = \mu > 0$ olduğunu varsayalım. (3.2.1) ifadesi t_2'den t'ye integre edilirse

$$u''(t) - u''(t_2) < -\mu^\gamma \int_{t_2}^{t} c(s)ds$$

olur. Buradan $t \to \infty$ iken $\lim_{t\to\infty} u''(t) = -\infty$ bulunur. Bu kabule çelişki olup $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ 'dır. Bu da teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.8. Teorem 3.2.7'nin koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.2.1)'in bir sıfıra sahip bir çözümü salınımlıdır.

İspat. $t_1 \geq T_y$ için $y(t_1) = 0$ olmak üzere y (3.2.1)'in salınımsız bir çözümü olsun. $t_2 > t_1$, y'nin son sıfırı olmak üzere $t > t_2$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz. $\delta > 0$ için $y'(t) > 0$, $t_2 < t < t_2+\delta$ olur. Lemma 3.2.1'den $t \geq t_0 > t_2$ için $y'(t) > 0$ ya da $y'(t) < 0$ bulunur. Teorem 3.2.7'dekine benzer olarak $t \geq t_0$ için $y'(t) > 0$'ın geçerli olmadığı gösterilebilir. O halde $t \geq t_0$ için $y'(t) < 0$ 'dır. Bu durumda $t > t_3$ için $y'(t_3) = 0$ ve $y'(t) < 0$ olacak şekilde bir $t_3 \in (t_2, t_0)$ noktası vardır. (3.2.3) denklemi $y'(t)$ ile çarpılıp t_3'ten t'ye integre edilirse

$$r(t)y'(t)y''(t) = \int_{t_3}^{t} \left[r(s)\left(y''(s)\right)^2 - q(s)\left(y'(s)\right)^2 - p(s)y^{\gamma}(s)y'(s) \right] ds > 0$$

bulunur. Bu $t > t_3$ için $y''(t) < 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak, yeterince büyük t'ler için $y(t) < 0$ çelişkisi elde edilir. Böylece y salınımlıdır. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 3.2.2. Teorem 3.2.7, Nelson [20] Teorem 1'in genelleştirilmesidir.

Teorem 3.2.9. $y \neq 0$ için $\frac{f(y)}{y} \geq \beta > 0$ olsun. $a'(t) \leq 0$ ve

$$\int_{\sigma}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \beta c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2} \right] dt = \infty \qquad (3.2.16)$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.2.2)'nin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

İspat. y, $t_1 \geq T_y \geq \sigma$ için $y(t_1) = 0$ olmak üzere $[T_y, \infty)$ üzerinde (3.2.2)'nin salınımsız bir çözümü olsun. $t_2 \geq t_1$, y'nin son sıfırı olmak üzere $t > t_2$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.1'den $t \geq t_0 > t_1$ için $y'(t) < 0$

ya da $y'(t) > 0$'dır. Eğer $t \geq t_0$ için $y'(t) > 0$ ise, bu durumda $t \geq t_0$ için $z(t) = y'(t)/y(t)$, ikinci basamaktan

$$z'' + 3zz' + a(t)z' \leq -\left[z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + \beta c(t)\right]$$

$$\leq -\left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \beta c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t)\right)^{3/2}\right] \tag{3.2.17}$$

diferensiyel eşitsizliğinin bir çözümüdür. Yukarıdaki eşitsizlik t_0'dan t'ye integre edilirse

$$z'(t) \leq z'(t_0) + \frac{3}{2}z^2(t_0) + a(t_0)z(t_0)$$

$$-\int_{t_0}^{t}\left[\frac{2a^3(s)}{27} - \frac{a(s)b(s)}{3} + \beta c(s) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(s)}{3} - b(s)\right)^{3/2}\right] ds$$

bulunur. Buradan $\lim_{t\to\infty} z'(t) = -\infty$ olur. Böylece yeterince büyük t'ler için $z(t) < 0$ elde edilir. Bu bir çelişkidir. O halde yeterince büyük t'ler için y pozitif olamaz. Yukarıdakine benzer olarak $y(t) < 0$ olamayacağı gösterilebilir. Buradan y salınımlıdır. Bu teoremin ispatını tamamlar.

Uyarı 3.2.3. **(i)** Teorem 3.2.1, (3.2.2) denklemine uygulanamayabilir. Fakat (3.2.16) koşulu (3.2.7) koşulundan daha zayıftır. Bununla birlikte Teorem 3.2.3, (3.2.2) denklemine uygulanamaz.

(ii) Teorem 3.2.9, Lazer [19]'deki Teorem 1.3'ün genelleştirilmesidir.

Örnek 3.2.4.

$$y''' + \frac{3}{t}y'' - \frac{1}{t^2}y' + e^t(1 + e^y)y = 0,\ t \geq 1$$

denklemini göz önüne alalım. Burada $y \neq 0$ için $f(y)/y = (1 + e^y) > 1$'dir. Teorem 3.2.9'un bütün koşulları sağlanır. Bu yüzden denklemin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

Teorem 3.2.10. Eğer Teorem 3.2.9'un hipotezleri sağlanıyorsa (3.2.2)'nin salınımsız bir u çözümü için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$u(t) \neq 0, \ t \geq T_u \geq \sigma$$

$$sgnu(t) = sgnu''(t) \neq sgnu'(t) = sgnu'''(t), \ t \geq T_u \geq \sigma$$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} u'(t) = \lim_{t\to\infty} u''(t) = 0.$$

İspat. Teorem 3.2.5'in ispatına benzer bir yol izlenerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.11. Eğer Teorem 3.2.9'un hipotezleri sağlanıyorsa (3.2.2)'nin birinci ya da ikinci türevi bir sıfıra sahip bir çözümü salınımlıdır.

İspat. Teorem 3.2.10'un ispatına benzer bir yol izlenerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.12. Eğer

$$\int_\sigma^\infty tc(t)dt = \infty \tag{3.2.18}$$

ise $\gamma \geq 1$ olmak üzere

$$y''' + c(t)y^\gamma = 0 \tag{3.2.19}$$

denkleminin ya da

$$y''' + c(t)f(y) = 0 \tag{3.2.20}$$

denkleminin her salınımsız çözümü Teorem 3.2.10'daki özelliklere sahiptir. Eğer

$$\int_\sigma^\infty t^\gamma c(t)dt = \infty \tag{3.2.21}$$

ise, $\gamma < 1$ olmak üzere (3.2.19)'un her salınımsız çözümü Teorem 3.2.10'daki özelliklere sahiptir.

İspat. y, $[T_y, \infty)$'da (3.2.19)'un salınımsız bir çözümü olsun. $t \geq t_1 > T_y$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayabiliriz. Sonuç olarak $t \geq t_1$ için $y'''(t) < 0$ olur. Buradan yeterince büyük t'ler için $y''(t) < 0$ ya da $y''(t) > 0$ 'dır. Fakat durum yeterince büyük t'ler için $y(t) < 0$'ı gerektirir. Bu da bir çelişkidir. Böylece

$t \geq t_2 \geq t_1$ için $y''(t) > 0$ olur. Bu, yeterince büyük t'ler için $y'(t) > 0$ ya da $y'(t) < 0$'ı gerektirir. $\alpha > 0$ bir sabit olmak üzere eğer yeterince büyük t'ler için $y'(t) > 0$ ise, $t > t_3 > |t_2|$ için $y(t) > \alpha t$ olur. (3.2.19) denklemi t_3'ten t'ye integre edilirse

$$y''(t) - y''(t_3) = -\int_{t_3}^{t} c(s)y^{\gamma}(s)ds < -\alpha^{\gamma}\int_{t_3}^{t} s^{\gamma}c(s)ds \qquad (3.2.22)$$

bulunur. (3.2.22)'den, $\gamma \geq 1$ için (3.2.18), (3.2.21)'i gerektirir. Bu yüzden

$$\lim_{t\to\infty} y''(t) = -\infty$$

çelişkisi elde edilir. Buradan, $t \geq t_3$ için $y(t) > 0$, $y'(t) < 0$, $y''(t) > 0$, $y'''(t) < 0$ olur. Açıkça görülür ki

$$\lim_{t\to\infty} y''(t) = \lim_{t\to\infty} y'(t) = 0 \text{ 'dır.}$$

Şimdi $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \mu > 0$$

olduğunu varsayalım. (3.2.19) t'den $s > t > t_3$'ye integre edilirse

$$y''(s) - y''(t) + \int_{t}^{s} c(u)y^{\gamma}(u)du = 0$$

yani

$$y''(t) \geq \int_{t}^{\infty} c(u)y^{\gamma}(u)du \qquad (3.2.23)$$

bulunur. (3.2.23) t_3'ten t'te integre edilirse,

$$y'(t) - y'(t_3) \geq \int_{t_3}^{t}\left(\int_{\theta}^{\infty} c(u)y^{\gamma}(u)du\right)d\theta,$$

$$\begin{aligned} y'(t) - y'(t_3) &\geq (t - t_3)\int_{t}^{\infty} c(s)y^{\gamma}(s)ds + \int_{t_3}^{t}(s - t_3)c(s)y^{\gamma}(s)ds \\ &\geq \int_{t_3}^{t}(s - t_3)c(s)y^{\gamma}(s)ds \geq \mu^{\gamma}\int_{t_3}^{t}(s - t_3)c(s)ds \qquad (3.2.24) \end{aligned}$$

bulunur. Kolaylıkla görülebilir ki $\int_{\sigma}^{\infty} tc(t)dt = \infty$ olması için gerek ve yeter koşul $\int_{\sigma}^{\infty}(t - t_3)c(t)dt = \infty$ olması ve de $\gamma < 1$ için (3.2.21)'in, (3.2.19)'u gerektirmesidir. Böylece (3.2.24)'ten $\lim_{t\to\infty} y'(t) = \infty$ sonucuna ulaşılır. Bu çelişki olup

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$'dır.

Eğer y (3.2.20)'nin salınımsız bir çözümü ise, yukarıdakine benzer şekilde işlemler sürdürülerek teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 3.2.13. Teorem 3.2.12'nin koşullarının sağlandığını varsayalım. Eğer (3.2.19) ya da (3.2.20)'nin bir çözümü bir sıfıra sahipse ya da birinci veya ikinci türevleri bir sıfıra sahipse çözüm salınımlıdır.

İspat. Teorem 3.2.12'den çıkar.

3.2.II. $a(t) \leq 0,\ b(t) \leq 0,\ c(t) > 0,\ t \geq \sigma$ **Durumu**

Lemma 3.2.3. Eğer y, $[T_y, \infty)$, $T_y \geq \sigma$ üzerinde (3.2.1) ya da (3.2.2)'nin salınımsız bir çözümü ise, bu durumda $t \geq t_0$ için $y(t)y'(t) > 0$ ya da $y(t)y'(t) < 0$ olacak şekilde bir $t_0 \in (T_y, \infty)$ vardır.

İspat. Lemmanın ispatı Lemma 3.2.1'in ispatına benzerdir.

Teorem 3.2.14. $b(t) - a'(t) \leq 0$ ve $\gamma \geq 1$ olduğunu varsayalım. Eğer her $\alpha > 0$ için

$$\int_\sigma^\infty \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \alpha c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t)\right)^{3/2}\right] dt = \infty \tag{3.2.25}$$

ise (3.2.1)'in bir sıfıra sahip bir çözümü salınımlıdır.

İspat. y, $t_1 \geq T_y \geq \sigma$ için $y(t_1) = 0$ olmak üzere (3.2.1)'in salınımsız bir çözümü olsun. $t_2 \geq t_1$ y'nin son sıfırı olmak üzere $t > t_2$ için $y(t) > 0$ olduğunu varsayalım. Lemma 3.2.2 'den $t \geq t_3 > t_2$ için $y'(t) < 0$ ya da $y'(t) > 0$ olduğu sonucu çıkar. Teorem 3.2.1'in ispatında olduğu gibi $t > t_3$ için $y'(t) < 0$ olmasının mümkün olamayacağını gösterebiliriz. Böylece $t > t_3$ için $y'(t) > 0$ 'dır. Açıktır ki $t \geq t_3$ için $z(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}$,

$$z'' + 3zz' + a(t)z' = -\left[z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + c(t)y^{\gamma-1}(t)\right] \tag{3.2.26}$$

denkleminin bir çözümüdür. $t \geq t_4 \geq t_3$ için $y^{\gamma-1}(t) > \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha > 0$ bulunabilir. Buradan $t \geq t_3$ için (3.2.26)'dan

$$z''(t) + 3z(t)z'(t) + a(t)z'(t) \leq -\left[z^3(t) + a(t)z^2(t) + b(t)z(t) + \alpha c(t)\right] \tag{3.2.27}$$

elde edilir. (3.2.27) t_4'ten t'ye integre edilirse

$$z'(t) \leq z'(t_4) + \frac{3}{2}z^2(t_4) + a(t_4)z(t_4) - \frac{3}{2}z^2(t) - a(t)z(t)$$

$$-\int_{t_4}^{t}\left[z^3(s) + a(s)z^2(s) + \left(b(s) - a'(s)\right)z(s) + \alpha c(s)\right]ds \tag{3.2.28}$$

olur.

$$G(z,t) = -\frac{3}{4}z^2 - a(t)z, \quad H(z,t) = z^3 + a(t)z^2 + b(t)z + \alpha c(t)$$

alınırsa, $z > 0$ için $G(z,t)$'nin maksimumu $\frac{a^2(t)}{6}$ ve $z > 0$ için $H(z,t)$'nin minimumu

$$\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)\left(b(t) - a'(t)\right)}{3} + \alpha c(t) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t)\right)^{3/2}$$

olur. (3.2.28)'den

$$z'(t) \leq z'(t_4) + \frac{3}{2}z^2(t_4) + a(t_4)z(t_4) + \frac{a^2(t)}{6}$$

$$-\int_{t_4}^{t}\left[\frac{2a^3(s)}{27} - \frac{a(s)\left(b(s) - a'(s)\right)}{3} + \alpha c(s) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(s)}{3} - b(s) + a'(s)\right)^{3/2}\right]ds$$

$$\leq z'(t_4) + \frac{3}{2}z^2(t_4) + a(t_4)z(t_4) + \frac{a^2(t_4)}{6} \tag{3.2.29}$$

$$-\int_{t_4}^{t}\left[\frac{2a^3(s)}{27} - \frac{a(s)b(s)}{3} + \alpha c(s) - \frac{2}{3\gamma^3}\left(\frac{a^2(s)}{3\gamma^3} - b(s) + a'(s)\right)^{3/2}\right]ds$$

bulunur. (3.2.29)'da $t \to \infty$ iken limit alınırsa $z'(t) \to -\infty$ elde edilir. Sonuç olarak yeterince büyük t'ler için $z(t) < 0$ çelişkisine ulaşılır. Bu durumda y

salınımlı olur. Bu, teoremin ispatını tamamlar.

Teorem 3.2.15. $b(t) - a'(t) \leq 0$ ve $\gamma < 1$ olduğunu varsayalım. Eğer her $\alpha > 0$ için (3.2.25) geçerli ise (3.2.1)'in bir sıfıra sahip her sınırlı çözümü salınımlıdır.

İspat. Teorem 3.2.14'ün ispatına benzerdir.

Teorem 3.2.16. Teorem 3.2.14'ün hipotezleri geçerli olsun. Bu durumda (3.2.1)'in salınımsız bir çözümü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$u(t) \neq 0, \ t \geq T_u,$$

$$sgnu(t) = sgnu''(t) \neq sgnu'(t), \ t \geq T_u \geq \sigma,$$

$$\lim_{t\to\infty} u'(t) = 0, \ \lim_{t\to\infty} u(t) = \lambda \neq \pm\infty.$$

Ayrıca, $\int_\sigma^\infty a(t)dt > -\infty$ ise $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$'dır.

İspat. Teorem 3.2.5 'in ispatına benzer bir yolla u için yukarıdaki özellikler elde edilir.

Örnek 3.1.5.

$$y''' - e^{-t}y'' - e^{-t}y' + e^{2t}y^3 = 0, \ t \geq 0$$

denklemini göz önüne alalım. Teorem 3.2.15'ten denklemin salınımsız bir çözümü teoremdeki özelliklere sahiptir. Örneğin $y(t) = e^{-t}$ bu denklemin gerekli özellikleri sağlayan salınımsız bir çözümüdür.

Teorem 3.2.17. Teorem 3.2.15'in koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda (3.2.1)'in sınırlı salınımsız bir çözümü Teorem 3.2.16'daki özelliklere sahiptir.

İspat. Teorem 3.2.5 'in ispatına benzer bir yol izlenerek sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.18. $b(t) - a'(t) \leq 0$ ve

$$\int_{\sigma}^{\infty} \left[\frac{2a^3(t)}{27} - \frac{a(t)b(t)}{3} + \beta c(t) - \frac{2}{3\gamma^3} \left(\frac{a^2(t)}{3} - b(t) + a'(t) \right)^{3/2} \right] dt = \infty$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda (3.2.2)'nin bir sıfıra sahip her çözümü salınımlıdır.

İspat. Teorem 3.2.14'ün ispatına benzerdir.

Teorem 3.2.19. Eğer Teorem 3.2.18'in hipotezleri sağlanıyorsa (3.2.2)'nin her salınımsız u çözümü Teorem 3.2.16'daki özellikleri sağlar.

İspat. Teorem 3.2.16'nın ispatına benzerdir.

Örnek 3.2.6.

$$y''' - e^{-t}y'' - e^{-t}y' + e^{2t}(1 + e^{y})y = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Teorem 3.2.17'den denklemin her salınımsız çözümü teoremdeki özellikleri sağlar.

KAYNAKLAR

[1] **Barrett, J.H.,** Oscillation theory of ordinary linear differential equation, Advances in Math. 3 (1969), 415-509; also in Lectures on Ordinary Differential Equations (1970), Academic Press, New York-London.

[2] **Chanturiya, T. A. and Kiguradze, I.T.,** Asymtotic properties of solutions of nonautonomous ordinary differential equations, Nauka, Moscov, 1990(in Russian).

[3] **Dzurina, J.,** Comparison theorems for nonlinear ODEs, Math. Slovaca 42 (1992), 299-315.

[4] **Erbe, L.,** Existence of oscillatory solutions and asymptotic behaviour for a class of a third order linear differential equations, Pacific J. Math. 64 (1976), 369-385.

[5] **Erbe, L.,** Oscillation and asymptotic behaviour of third order differential delay equations, SIAM J. Math. Anal. 7(1976),491-

[6] **Erbe, L.,** Oscillation, nonoscillation and asymptotic behaviour for third order nonlinear differential equations, Ann. Mar. Pura Appl. (4) 110 (1976), 373-391.

[7] **Erbe, L. and Rao, V.S.H.,** Nonoscillation results for third order nonlinear differential equations, J. Math. Anal. Appl.,125 (1987)471-482.

[8] **Foster, K.E.and Grimmer R.C.,** Nonoscillatory solutions of higher order differential equations, J. Math.Anal. Appl.71(1979),1-17.

[9] **Grace, S. R.,** Oscillation of even order nonlinear functional differential equa-

tions with deviating arguments, Math. Slovaca 41 (1991), 189-204.

[10] **Gregus, M.,** Third order linear differential equations, D. Reidel Publishig Company, Boston, Tokyo. 1987.

[11] **Hanan, M.,** Oscillation criteria for a third order linear differential equations, Pacific J. Math. 11 (1961), 919-944.

[12] **Hartman, P.,** Ordinary Differential equations, Wiley, New York, 1964.

[13] **Heidel, J.W.,** Qualitative behaviour of solutions of a third order nonlinear differential equation, Pacific J.Math. 27(1968),507-526.

[14] **Humi, M. and Miller W.,** Second course in ordinary differential equations and engineers, Springer-Verlag, New York, 1988.

[15] **Jones, G.D.,** An asymptotic property of solutions $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, Pasific J. Math. 17 (1973), 135-138.

[16] **Khvedelidze, N. N. and Chanturiya, T. A.,** Oscillation of solutions of third order linear ordinary differential equations, Differencialnye Uravneniya 27no.3,4 (1991), 452-460, 611-618 (in Russian).

[17] **Kiguradze, I.T.,** On the oscillation of solutions of the equation $\frac{d^m u}{dt^m} + a(t) \mid u \mid = 0$, Mat.Sb.65 (1964),172-187(in Russian).

[18] **Kura, T.,** Nonoscillation criteria for nonlinear ordinary differential equations of the third order. Nonlinear Anal. Theory, Methods and Appl., (1984) 8, 369-379.

[19] **Lazer, A.C.,** The behavior of solutions of the differential equation $y''' + p(x)y' + q(x)y = 0$, Pasific J. Math. 17(1966), 435-466.

[20] **Nelson, J.L.,** A stability theorem for a third order nonlinear differential equation, Pacific J.Math. 24 (1968), 341-344.

[21] **Parhi, N. and Das, P.,** Asymptotic property of solutions of a class of third order differential equations, Proc. Amer. Math. Soc. (1990) 110, 387-393.

[22] **Parhi, N. and Das, P.,** On asymptotic property of solutions of linear homogeneous third order differential equations, Bollettino U.M.I. (7) 7-B (1993), 775-786.

[23] **Parhi, N. and Das, P.,** Oscillatory and asymptotic behaviour of a class of nonlinear differential equations of third order, Acta Math. Sci., 18(1)(1998),95-106.

[24] **Parhi, N. and Das, P.,** Oscillation criteria for a class of nonlinear differential equations of third order, Ann. Polon. Math.,(in press).

[25] **Parhi, N. and Nayak, S. K.,** Nonoscillation of second order nonhomogeneous differential equations, J. Math. Anal. Appl. (1984)102, 62-74.

[26] **Rao, R.M.,** Ordinary Differential Equations, Edward Arnold Limited, London, 1980.

[27] **Ross L.S.,** Differential Equations, Wiley, New York, 1984.

[28] **Skerlik, A.,** An integral condition of property A and B for linear differential equation of third order, Proceeding of the Conference on Ordinary Differential

Equations Poprad (Slovak Republic), (1994), 81-85.

[29] **Skerlik, A.**, Criteria of property A for third order superlinear differential equations, Math. Slovaca 43 (1993), 171-183.

[30] **Skerlik, A.**, Oscillation theorems for third order nonlinear differential equations,Math.Slovaca, 42(1992),471-484.

[31] **Skerlik, A.**, Integral criteria of oscillation for a third order linear differential equation, Math.Slovaca, 45(1995),403-412.

[32] **Skerlik, A.**, An integral condition of oscillation for equation $y''' + p(t)y' + q(t)y = 0$ with nonnegative coefficients, Archivum Mathematicum (Brno), 31(1995), 155-161.

[33] **Swanson, C.A.**, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New York-London, 1968.

[34] **Tiryaki, A. and Çelebi, A.O.**, Nonoscillation and asymptotic behaviour for third order nonlinear differential equations, Czechoslov.Math.J. 48(123) (1998),677-685.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Şenay (Yaman) Pasinlioğlu

Doğum Yeri : Diyarbakır

Doğum Yılı : 08-01-1975

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 1989-1992 Edirne Uzunköprü Lisesi

Üniversite (Lisans) : 1992-1996 H.Ü.Fen Fakültesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi : 1996-1997 İstanbul Emir Sultan İlköğretim Okulu (Sınıf Öğrt.)

1997- ··· Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (Araş. Gör.)