ÖZEL ÜNİVALENT FONKSİYONLAR TEORİSİNE KATKILAR

Evrim TOKLU

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU
Prof. Dr. Árpád BARICZ
2017

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

ÖZEL ÜNİVALENT FONKSİYONLAR TEORİSİNE KATKILAR

Evrim TOKLU

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2017

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

ÖZEL ÜNİVALENT FONKSİYONLAR TEORİSİNE KATKILAR

Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU danışmanlığında, Prof. Dr. Árpád BARICZ ortak danışmanlığında Evrim TOKLU tarafından hazırlanan bu çalışma, 24/11/2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Çiğdem BEKTAŞ	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Halit ORHAN	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Muhammet YILDIRIM	İmza	:
Üye	: Prof. Dr. Mehmet AKBAŞ	İmza	:
Üye	: Doç. Dr. İsa YILDIRIM	İmza	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 30/11/2017 tarih ve 47/13 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

ÖZEL ÜNİVALENT FONKSİYONLAR TEORİSİNE KATKILAR

Evrim TOKLU

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU
Ortak Danışman: Prof. Dr. Árpád BARICZ

Bu tezde esasen bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için katsayı problemi ve Wright fonksiyonunun geometrik özellikleri ele alınmıştır. Sălăgean türev operatörü yardımıyla tanımlanmış bi-ünivalent fonksiyonların k-bi-yıldızıl alt sınıfı $S^{\star}_{\sigma,k}$ tanıtılmış ve bu sınıfa ait özellikler incelenmiştir. Ayrıca, Chebyshev polinomları kullanılarak $\mathcal{N}_{\sigma}^{\mu,\delta}(\lambda,t)$ sınıfına ait Hadamard çarpımı vasıtasıyla tanımlanmış fonksiyonların ikinci Hankel determinantı için üst sınır elde edilmiştir. Daha sonra, Wright fonksiyonlarının yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı bulunmuş ve normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının sıfır mertebeden yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

2017, 109 sayfa

Anahtar Kelimeler: Bi-ünivalent fonksiyon, Hankel determinant, Chebyshev polinomları, Wright fonksiyonu, tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı, Euler-Rayleigh eşitsizlikleri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

CONTRIBUTIONS TO THE THEORY OF SPECIAL UNIVALENT FUNCTIONS

Evrim TOKLU

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Analysis and Function Theory

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU
Co-supervisor: Prof. Dr. Árpád BARICZ

In this thesis, we mainly focus on coefficient problem for some subclasses of bi-univalent functions and geometric properties of Wright functions. k-bi-starlike functions belonging to the class $S_{\sigma,k}^{\star}$ defined by making use of the Sălăgean derivative operator which are subclasses of bi-univalent functions are introduced and its some properties are studied. Moreover, upper bound estimate for the second Hankel determinant for functions defined by convolution belonging to the class $\mathcal{N}_{\sigma}^{\mu,\delta}(\lambda,t)$ by using Chebyshev polynomials are found. Finally, we find the radii of starlikeness and convexity of the normalized Wright functions. In addition, by using the Euler-Rayleigh inequalities we obtain some tight lower and upper bounds for the radii of starlikeness and convexity of order zero for the normalized Wright functions.

2017, 109 pages

Keywords: Bi-univalent function, Hankel determinant, Chebyshev polynomials, Wright functions, Laguerre-Pólya class of entire functions, Euler-Rayleigh inequalities.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca, tez konumda çalışmamı sağlayan, önümde yeni ufuklar açan, engin tecrübesiyle çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, beni yönlendiren ve rehberlik eden saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ekrem KADIOĞLU'na;

ortak danışmanlığımı üstlenerek, değerli bilgileriyle bana ışık tutan, her konuda yardımcı ve yol gösterici olan,

Sayın Prof. Dr. Árpád BARICZ'e;

ve ayrıca bu çalışmanın oluşturulmasında desteği ve engin bilgisiyle beni yönlendiren, ilgisini ve içten desteğini her zaman yanımda hissettiğim,

Sayın Prof. Dr. Halit ORHAN'a;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Doktora eğitimim boyunca her daim beni destekleyen başta eşim Alev TOKLU olmak üzere çocuklarım Efe Kağan ve Egemen Doruk'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Evrim TOKLU
Kasım, 2017

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$ doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{U}_r$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < r\}$ şeklinde tanımlanmış açık disk
$\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert < 1\}$ birim disk
$\partial\mathcal{U}$	$\{z \in \mathbb{C} : \lvert z\rvert = 1\}$ birim çember
$\mathcal{A}$	$\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n\, z^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	$\mathcal{A}$ sınıfındaki ünivalent fonksiyonların sınıfı
$S^\star$	$\mathcal{A}$ sınıfındaki yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$S^\star(\alpha)$	$\mathcal{A}$ sınıfındaki α mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	$\mathcal{A}$ sınıfındaki konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	$\mathcal{A}$ sınıfındaki α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
$r_\alpha^\star(f)$	f fonksiyonunun α mertebeden yıldızıllık yarıçapı
$r_\alpha^c(f)$	f fonksiyonunun α mertebeden konvekslik yarıçapı
$\wp$	Carathèodory sınıfı
σ	Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı
$S_\sigma^\star$	Bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$S_\sigma^\star(\alpha)$	α mertebeden bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}_\sigma$	Bi-konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}_\sigma(\alpha)$	α mertebeden bi-konveks fonksiyonların sınıfı
$arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$Re f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$Im f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun imajiner kısmı
$H_q(n)$	$f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun q nuncu Hankel determinantı
$D^k\big(f(z)\big)$	$f(z)$ fonksiyonunun k mertebeden Sălăgean türevi
$*$	Hadamard çarpım sembolü
$\Gamma(z)$	Gamma fonksiyonu

$F(a,b;c;z)$	Gauss hipergeometrik fonksiyonu
$\mathcal{J}_p(z)$	p mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu
$\phi(\rho,\beta,.)$	Wright fonksiyonu
$\mathcal{LP}$	Tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Analitik fonksiyonların belli alt sınıflarının çeşitli geometrik özelliklerinin incelendiği ya da bazı geometrik özelliklerle tanımlanmış analitik fonksiyonların araştırıldığı geometrik fonksiyonlar teorisi Kompleks Analizin en önemli dallarından biridir. Geometrik fonksiyonlar teorisi, ilk olarak 1851 yılında G. Bernhard Riemann'ın doktora tezinde ifade ettiği ve "Riemann Dönüşüm Teoremi" olarak bilinen teoremi ile ortaya çıkmıştır. Riemann Dönüşüm Teoreminin farklı ifadeleri mevcut olmakla beraber esasen bu teorem ile D_1 $(D_1 \neq \mathbb{C}), z$ düzleminde verilen basit bağlantılı herhangi bir bölge ve D_2, w düzleminde verilen herhangi bir basit bağlantılı bölge olmak üzere D_1 bölgesini D_2 bölgesine resmeden analitik bir f fonksiyonunun varlığı garantilenmektedir. Ancak Riemann'ın verdiği ispatta bir takım boşlukların olması teoremin öneminin yirminci yüzyılın başlarına kadar anlaşılmasının önündeki en büyük engel olmuştur. Bu teoremin tam ispatı ilk olarak Constantin Carathèodory (1912) tarafından Riemann yüzeyleri kullanılarak verilmiştir. Daha sonra meşhur matematikçi Paul Koebe (1912) bu teoremi daha da sadeleştirerek, "$D = D_1 \neq \mathbb{C}$ olmak üzere, $z_0 \in D,\ f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olmak üzere, D bölgesini $\mathcal{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskine resmeden D de analitik ve ünivalent (yalınkat) bir tek f fonksiyonu vardır." şeklinde ifade ve ispat etmiştir. Bir analitik ve ünivalent fonksiyon eğriler arasındaki açıları koruduğundan konform dönüşüm olarak da adlandırılabilir. Riemann dönüşüm teoreminin bu güçlü versiyonu, keyfi basit bağlantılı bir D bölgesinin $\mathcal{U}$ birim diski ile yer değiştirebilmesine olanak sağlamakta olup bu durum birçok problemin çözümünü kolaylaştırmıştır. Ayrıca 1914 yılında Gronwall tarafından alan teoreminin ispatının verilmesi, 1916 yılında Bieberbach 'ın normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar için verdiği katsayı tahmini ile geometrik fonksiyonlar teorisi matematiğin birçok dalında kendisine uygulama alanı bulmuş ve ayrıca ünivalent fonksiyonlar teorisinin ortaya çıkmasına da vesile olmuştur. Tamda bu noktada, çalışmamız boyunca sıkça değineceğimiz, ünivalent fonksiyonlar teorisinin tarihsel seyri hakkında birkaç temel hatırlatmayı yapmak oldukça faydalı olacaktır.

Bilindiği üzere; $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $f(z_1) = f(z_2)$ olması $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa bu f fonksiyonunun bu D bölgesinde ünivalent (veya schlicht) olduğu söylenir. Yukarıda ifade edilen Riemann Dönüşüm Teoreminin bir sonucu olarak D bölgesi yerine $\mathcal{U}$ birim diskini almamızda herhangi bir sakınca olmayacağı, aksine $\mathcal{U}$ birim diskinde çalışmanın birçok kolaylıklar sağlayacağı iyi bilinen bir gerçektir. Şimdi D bölgesi yerine $\mathcal{U}$ birim diskini ele alarak bu ifadeyi geometrik olarak yorumlamak gerekirse; Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini, $f(\mathcal{U})$ görüntü bölgesi üzerine bire bir resmediyorsa bu $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olduğu söylenir. Esasen biz $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik (regular ya da holomorf) olan univalent fonksiyonlarla ilgileneceğiz. Sonuç olarak, bir $f(z)$ fonksiyonun ünivalent olması bu fonksiyonun analitik olmasını beraberinde getirecektir. Fakat birçok durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ da bir tek basit kutba sahip olmasına müsaade edeceğimiz için ünivalentlik tanımına bu terimi dâhil etmedik (Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da ünivalent ise bu fonksiyon, $\mathcal{U}$ birim diskinde, birden fazla kutba sahip olamaz).

Eğer bir $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ise

$$g(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots = \sum_{n \geq 0} b_n z^n \tag{1.1}$$

biçiminde $\mathcal{U}$ da yakınsak bir Maclaurin seri açılımına sahiptir. Şimdi, ünivalent fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturacak olan, $g(z)$ fonksiyonun bu temsili hakkında şu iki soruyu sormak son derece doğaldır. (b_n) dizisi verildiğinde, bu dizi $g(z)$ nin geometrik özelliklerini nasıl etkiler? Ayrıca, $g(z)$ nin bazı özellikleri verildiğinde, bu özellikler (1.1) deki katsayıları nasıl etkiler? Elbette, biz ünivalent fonksiyonlar ile ilgilendiğimizden bu soruları şu şekilde özelleştirebiliriz: (I) Eğer $g(z)$ ünivalent bir fonksiyon ise, bu durum, (1.1) de verilen, b_n katsayılarında nasıl bir kısıtlamaya neden olur? (II) (1.1) deki katsayılar verildiğinde, $g(z)$ fonksiyonunun $\mathcal{U}$ da ünivalent olup olmadığına karar verebilir miyiz?

Şimdi (1.1) deki gibi verilen $g(z)$ fonksiyonunu normalize edelim: Kabul edelim ki, $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olsun. O halde, bu fonksiyona bir sabitin eklenmesi ya da fonksiyondan bir sabitin çıkarılması sadece fonksiyonun görüntü bölgesini değiştirir ancak $g(z)$ nin ünivalentliğine etki etmez. Yani $g(z)$ fonksiyonu ünivalent kalır. Normalizasyonun ilk adımı olarak, b_0 keyfi bir sabit olduğundan, (1.1) deki ifadenin her iki yanından b_0 ı çıkarırsak $g(z) - b_0$ elde ederiz. Ayrıca, eğer $g'(z_0) = 0$ ise $g(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir komşuluğunda ünivalent olmayacağından $b_1 = g'(0) \neq 0$ olur. Böylece, en son elde ettiğimiz $g(z) - b_0$ ifadesini b_1 e bölerek $f(z) = (g(z) - b_0)/b_1$ elde ederiz. Kolayca görülebileceği üzere, eğer $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ise, o zaman $f(z) = (g(z) - b_0)/b_1$ fonksiyonu da aynı bölgede ünivalenttir. Böylece, (1.1) deki seri açılımında $\frac{b_n}{b_1} = a_n$ yazılarak normalize edilmiş $f(z)$ fonksiyonunu elde etmiş oluruz.

Bu çalışmamız boyunca, $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşulu ile normalize edilmiş ve $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz. Bu halde, $\mathcal{A}$ sınıfındaki herhangi bir $f(z)$ fonksiyonunun

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n \tag{1.2}$$

biçiminde bir seri açılımına sahip olacağı açıktır. Ayrıca, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfını ise $\mathcal{S}$ ile göstereceğiz. Kolaylıkla görülebileceği üzere, $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ dır. Tüm bu açıklamaların sonucunda, (1.1) deki gibi verilmiş bir $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olsun. O halde, $g(z)$ uygun bir M sayısı ile çarpılarak, $|b_n|$ ler keyfi oranda büyütülebilir. Fakat normalize edilmiş ünivalent fonksiyonların $\mathcal{S}$ sınıfını göz önüne aldığımızda, $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir $f(z)$ fonksiyonu için $|a_n| \leq A_n,\ (n > 2)$ olacak biçimde bir A_n sınırı vardır. Esasen, Koebe (1909) tarafından böyle bir A_n sınırının varlığının gösterilmesiyle ünivalent fonksiyonlar teorisi yirminci yüzyılın başlarında şekillenmeye başlamıştır. Ardından Alman matematikçi Ludwig Bieberbach (1916) tarafından;

“(1.2) deki gibi tanımlanmış $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için,

$$|a_n| \leq n, \qquad (n \geq 2) \tag{1.3}$$

dir.”

olarak verilen, literatürde “Bieberbach Tahmini” olarak bilinen, bu katsayı problemi üzerinde birçok matematikçi kafa yormuştur. Bu problemin doğruluğu, $n = 2{,}3{,}4{,}5{,}6$ değerleri için, sırasıyla, Bieberbach (1916), Löwner (1923), Garabedian and Schiffer (1955), Pederson and Schiffer (1972) ve Pederson (1968) matematikçileri tarafından ispat edilmiştir. Nihayet 1984 yılının sonlarına doğru, pek çok matematikçiyi yaklaşık olarak yetmiş yıl meşgul eden Bieberbach tahmini Louis de Branges tarafından hipergeometrik fonksiyonlar ve Löewner teorisi kullanılarak ispatlanmış ve böylelikle bu problem sonlandırılmıştır. Ancak, bu problemin çözümünde kullanılan yöntem ünivalent fonksiyonlar teorisinde farklı problemlerin ortaya çıkmasına vesile olmuş ve ünivalent fonksiyonlar teorisi bu yeni problemlerle daha da zenginlik kazanmıştır.

Branges’in Bieberbach probleminin çözümünde hipergeometrik fonksiyonları kullanması ve ayrıca hipergeometrik fonksiyonların geometrik fonksiyonlar teorisindeki başka bazı problemlerin çözümünde kullanılmaya başlanması, pek çok matematikçinin bu fonksiyonlar üzerine yoğunlaşmasına sebep olmuştur.

$a, b, c \in \mathbb{C}$ ve $c \neq 0, -1, -2, \ldots$ olmak üzere,

$${}_2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n \geq 0} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < 1$$

fonksiyonu $z(1-z)w''(z) + (c - (a+b+1)z)w'(z) - abw(z) = 0$ ikinci mertebeden hipergeometrik diferansiyel denkleminin bir özel çözümü olan bu fonksiyona Gauss hipergeometrik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon ilk olarak L. Euler’in çalışmalarında görülmesine rağmen C.F. Gauss tarafından sistematik olarak sunulmuştur. Bu fonksiyonun özellikleri ilk olarak L. Fuchs, E.E. Kummer, B.

Riemann, H.A. Schwarz ve F. Klein tarafından incelenmiştir. Ayrıca, 1961 yılında E.P. Merkes ve W.T. Scott tarafından bu fonksiyonun ünivalentliği ve yıldızıllığı sürekli kesirler kullanılarak ele alınmıştır. 1984 yılında B.C. Carlson ve D.B. Shaffer hipergeometrik fonksiyonlar sınıfının α mertebeden yıldızıl ve konveks sınıflarını tanıtmıştır. 1986 yılında S. Ruscheweyh ve V. Singh $a > 0$, $c = a + 1$ ve $-1 \leq \rho b \leq 1 + \rho a$ şartları altında $z \mapsto zF(a, b; c; \rho z)$ fonksiyonunun yıldızıllık mertebesini elde etmiştir. 1987 yılında S. Owa ve H.M. Srivastava genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerini inceledi. 1993 yılında H. Silverman tarafından Gauss hipergeometrik fonksiyonunun yıldızıllığı ve konveksliği incelendi.

Son yıllarda hipergeometrik fonksiyonlar ile ilgili ortaya konan çalışmalardan bazıları (Owa and Srivastava 1987; Ponnusamy and Sabapathy 1997; Dziok and Srivastava 2003; Orhan and Güneş 2009; Orhan and Raducanu 2009; Orhan and Raducanu 2010) şeklinde verilebilir.

Birçok özel fonksiyon hipergeometrik fonksiyonların özel halleridir. İlk olarak 1732 yılında D. Bernoulli tarafından çalışılan ancak ismini F.W. Bessel (1734-1846) den alan Bessel fonksiyonu da hipergeometrik fonksiyonların özel bir halidir. Bessel fonksiyonlarının geometrik özellikleri birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. İlk olarak 1960 yılında R.K. Brown, Bessel fonksiyonlarının ünivalentliğini incelemiştir. Aynı yıl E. Kreyszing ve J. Todd tarafından Bessel fonksiyonlarının ünivalentlik yarıçapı elde edilmiştir. V. Selinger, 1995 yılında normalize edilmiş Bessel fonksiyonlarının geometrik özelliklerini araştırmıştır.

Özel fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine çalışmalar hâlâ canlılığını korumakta olup son zamanlarda ortaya konan çalışmalardan bazıları şunlardır: (Baricz *et al.* 2014; Baricz and Szász 2014; Baricz and Szász 2015; Baricz and Szász 2016; Baricz *et al.* 2016; Baricz and Yağmur 2017; Aktaş *et al.* 2017a, 2017b).

Bu tezde ilk olarak, yukarıda bahsedilen çalışmalardan ilham alarak normalize edilmiş Wright fonksiyonları için yıldızıllık ve konvekslik yarıçaplarını elde ettik. Wright fonksiyonu, (3.3) deki gibi tanımlanmış birinci tür Bessel fonksiyonun genelleştirilmiş bir hali olduğundan Aktaş *et al.* (2017a, 2017b) tarafından elde edilen sonuçları genelleştirerek ilave yeni bazı sonuçlar elde ettik.

Elbette ünivalent fonksiyonlar teorisindeki çalışmalar sadece özel fonksiyonların geometrik özelliklerinin incelenmesi ile sınırlı kalmamıştır. Yukarıda bahsedilen tarihsel süreç içerisinde bir yandan da ünivalent fonksiyonlar ve alt sınıfları üzerine çalışmalar canlılığını korumuş ve bu alanda da ilginç sonuçlar elde edilerek ünivalent fonksiyonlar teorisine önemli katkılar sunulmuştur.

Koebe-1/4 teoreminin bir sonucu olarak, her $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun f^{-1} ters fonksiyonuna sahip olduğu iyi bilinir. Ancak, $f \in \mathcal{S}$ olmasına rağmen, f^{-1} ters fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olması gerekmeyeceği açıktır. O halde, bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verildiğinde, hem bu f fonksiyonu hem de f^{-1} ters fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent ise bu $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna bi-ünivalent fonksiyon denir. $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlanmış bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı σ ile gösterilir. Bu sınıf ile ilgili ilk çalışma Lewin (1967) tarafından yapılmış ve her $f \in \sigma$ fonksiyonu için $|a_2| \leq 1.51$ olduğunu göstermiştir. Lewin'in bu çalışması birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve bu yeni sınıf ile ilgili sonuçlar elde etmeye odaklanmışlardır. Ardından D.A. Brannan ve J.G. Clunie, σ sınıfındaki fonksiyonlar için, $|a_2| \leq \sqrt{2}$ tahmininde bulunmuştur. 1969 yılında E. Netenyahu $\max_{f \in \sigma} |a_2| = \frac{4}{3}$ olduğunu göstermiştir. 1985 yılında D.L. Tan tarafından, σ sınıfındaki fonksiyonlar için $|a_2| < 1.485$ elde edilmiş olup, bu sonuç bi-ünivalent fonksiyonlar için bilinen en iyi sonuçtur. Ayrıca, birçok matematikçi tarafından, bi-ünivalent fonksiyonların σ sınıfı ile ilgili çeşitli alt sınıflar tanımlanmış ve Taylor Maclaurin seri açılımındaki ilk iki katsayı olan $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için kesin olmayan sonuçlar elde edilmiştir. Ancak, $n \in \mathbb{N} \backslash \{2,3\}$ olmak üzere her bir $|a_n|$ için katsayı problemi hâlen açık bir problemdir.

Bi-ünivalent fonksiyonların σ sınıfı üzerine son zamanlarda yapılan çalışmalardan bazıları şunlardır: (Srivastava *et al.* 2010; Frasin and Aouf 2011; Magesh and Yamini

2012; Srivastava *et al.* 2013; Çağlar *et al.* 2013; Altınkaya and Yalçın 2014; Orhan *et al.* 2015; Srivastava and Bansal 2015; Srivastava *et al.* 2015; Deniz *et al.* 2015; Orhan *et al.* 2016; Bulut *et al.* 2017; Orhan *et al.* 2017a, 2017b, 2017c).

$H_q(n)$, (3.2) deki gibi tanımlanmış q nuncu Hankel determinantı olmak üzere $H_2(1) = a_3 - a_2^2$ ifadesi Fekete-Szegö fonksiyoneli olarak bilinir. Keogh and Merkes (1969) tarafından yıldızıl fonksiyonların $S^{\star}$ sınıfı ve konveks fonksiyonların $\mathcal{C}$ sınıfı için Fekete-Szegö problemi araştırılmıştır. Son zamanlarda pek çok matematikçi ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarına ait fonksiyonların Hankel determinantı için üst sınırlar elde etmişlerdir. Bu çalışmalardan bazıları Ali *et al.* (2009), Orhan *et al.* (2010), Deekonda and Thoutreedy (2015) şeklinde sıralanabilir. İlk kez Zaprawa (2014) tarafından Fekete-Szegö problemi bi-ünivalent fonksiyonların σ sınıfları için ele alınmıştır. Ardından pek çok matematikçi bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarına ait fonksiyonların Hankel determinantı için üst sınır elde etmeye odaklanmıştır.

Bu tezde son olarak, yukarıdaki çalışmalardan ilham alarak bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ ikinci Hankel fonksiyoneli için üst sınır elde ettik. Esasen, bu çalışma ile Deniz *et al.* (2015) tarafından elde edilen sonuçları genelleştirdik ve bazı yeni sonuçlar elde ettik.

Özel ünivalent fonksiyonlar teorisine katkılar başlığı altında sunulan bu tez beş ana bölümden oluşmaktadır.

Tezin birinci bölümünü oluşturan giriş bölümünde, tez konusu ile ilgili konular üzerine dünden bugüne yapılmış çalışmalar, tarihi bir seyir içerisinde verilmiştir.

Kuramsal temeller olarak adlandırılan ikinci bölüm, tezde kullandığımız bazı tanım, teorem ve örneklere ayrılmıştır.

Tezin üçüncü bölümünü oluşturan materyal ve yöntem bölümünde, bi-ünivalent fonksiyonlar, bazı özel fonksiyonlar ve tam fonksiyonların özellikleri ile ilgili bazı önemli tanım, teorem ve örnekler sunulmuştur.

Araştırma bulguları olarak adlandırılan dördüncü bölümde, bi-ünivalent fonksiyonların alt sınıfları ile ilgili bazı yeni sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının yıldızıllık ve konvekslik yarıçapları hesaplanmıştır.

Tezin beşinci bölümünde ise, Wright fonksiyonu ile ilgili bazı problemlerin kısa bir listesi sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda kompleks fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli olan ve bu çalışmamızda da çok sık faydalanacağımız bazı tanım, teorem ve örneklere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (r komşuluğu) Bir $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilmiş olsun. Bu durumda, $\mathcal{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| < r\}$ kümesine z_0 noktasının r komşuluğu denir.

Bu $\mathcal{U}(z_0, r)$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı disk adı da verilmektedir. $\bar{\mathcal{U}}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| \leq r\}$ kümesine $\mathcal{U}(z_0, r)$ kümesinin kapanışı, $\partial\mathcal{U}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}: |z - z_0| = r\}$ kümesine de $\mathcal{U}(z_0, r)$ nin sınırı adı verilmektedir. Ayrıca, kolaylık sağlaması bakımından, bundan sonra orijin merkezli r yarıçaplı diski $\mathcal{U}_r$ ile ve orijin merkezli yarıçapı bir birim olan diski (birim disk) $\mathcal{U}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.1.2 (İç nokta) S, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. $z_0 \in S$ için $\mathcal{U}(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme) S, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. S kümesinin her noktası bir iç nokta ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme) S, $\mathbb{C}$ nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Bu S kümesinin tümleyeni açık küme ise S ye kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme) $S \subset \mathbb{C}$ verilmiş olsun. Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \emptyset$, $S \cap S_2 \neq \emptyset$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \emptyset$ olacak şekilde $\mathbb{C}$ de S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise S ye bağlantılı küme denir, aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.6 (Bölge) Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Limit) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası ve w_0 bir kompleks sayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < |z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa z, z_0 a yaklaşırken $f(z)$ fonksiyonunun limiti w_0 dır denir ve bu durum kısaca

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

şeklinde yazılarak gösterilir.

Tanım 2.1.8 (Süreklilik) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu $A_1 \subset A$ kümesinin her noktasında sürekli ise f ye A_1 kümesinde sürekli fonksiyon denir. Eğer, f fonksiyonu A kümesinde sürekli ise f fonksiyonuna sürekli fonksiyon adı verilir.

Tanım 2.1.9 (Diferansiyellenebilme) $f: A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyon $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilir (veya türevlenebilir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Kompleks Analizde z_0 noktasının bir komşuluğundaki tüm noktalarda diferansiyellenebilen fonksiyonlar çok daha zengin özelliklere sahip olduklarından, bu tür fonksiyonlarla çalışmaya odaklanmak oldukça önemlidir. Bir başka ifadeyle, bir noktanın komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilen fonksiyonlar Kompleks Analizin ilgi alanıdır. Bu nedenle, aşağıdaki tanımda ifade edileceği üzere bu tür fonksiyonlara özel bir isim vereceğiz.

Tanım 2.2.1 (Analitik Fonksiyonlar) $f(z)$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir (veya holomorfiktir) denir.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir B bölgesindeki tüm noktalarda analitik ise $f(z)$ fonksiyonu B de analitiktir denir. Ayrıca, bu çalışmamız boyunca, (1.2) deki gibi normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz. Bu halde, $\mathcal{A}$ sınıfının küme gösterimi

$$\mathcal{A} = \{f : f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n \text{ ve } f(z), \mathcal{U} \text{ da analitik}\}$$

olarak verilir.

Tanım 2.2.2 (Tam Fonksiyon) Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

Tanım 2.2.3 (Eğri) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ de eğri denir.

Bu tanımda a noktasındaki sürekliliğin sağdan ve b noktasındaki sürekliliğin soldan olduğu anlaşılacaktır. Ayrıca $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonunun kuralı parametrik olarak $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ ile verilir. Ayrıca, $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ eğrisini $\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$ ile de gösterebiliriz. Bir eğriyi geometrik olarak $[a, b]$ aralığının γ fonksiyonu altındaki görüntüsü olan şekil ile veririz.

$\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$ eğrisi verildiğinde $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ eğrinin uç noktaları olarak adlandırılır. $\gamma(a)$ ya eğrinin başlangıç noktası, $\gamma(b)$ ye de eğrinin bitiş noktası adı verilir.

Tanım 2.2.4 (Kapalı Eğri) $\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.2.5 (Basit Kapalı Eğri) Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğriler denir.

Yani, $\gamma(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$ eğrisi $[a, b)$ (veya $(a, b]$) aralığında bire-bir ise $\gamma(t)$ eğrisine basit eğri adı verilir. Buradan anlaşılacağı gibi eğrinin uç noktalarının çakışması onun basit eğri oluşunu etkilemez. Bir eğri hem basit hem de kapalı olabilir. Böyle eğrilere basit kapalı eğri (veya Jordan eğrisi) denir.

Basit kapalı γ eğrisi, kompleks düzlemi biri sınırlı diğeri sınırsız iki bölgeye ayırır. Sınırlı bölgeye γ basit kapalı eğrisinin içi, sınırsız bölgeye ise γ basit kapalı eğrisinin dışı denir.

Teorem 2.2.6 (Cauchy Türev Formülü) $f(z)$, pozitif yönlü basit kapalı γ çevresi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta olsun. Bu durumda, $n = 0,1,2, \ldots$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

olur.

Teorem 2.2.7 (Taylor Serisi) $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik olsun. O halde,

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının bir komşuluğundaki Taylor serisi denir.

Tanım 2.2.8 (Singüler Nokta) f fonksiyonu z_0 noktasında analitik değilse z_0 noktasına f fonksiyonunun singüler (tekil) noktası denir.

Bir $f(z)$ fonksiyonunu analitik olmadığı bazı noktaların civarındaki halka bölgelerde seri ile temsil edebiliriz. Dolayısıyla, z_0, $f(z)$ fonksiyonu için bir singüler nokta ise $f(z)$ fonksiyonunu z_0 ın bir delinmiş komşuluğunda Laurent serisi olarak bilinen bir seri ile temsil edebiliriz.

Tanım 2.2.9 (*i*) $f(z)$ fonksiyonunun $A(R_1;R_2) = \{z : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ halka bölgesinde analitik olsun. O halde,

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$$

serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası civarındaki Laurent serisi denir.

(*ii*) $\sum_{n\geq 1}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$ ve $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ serilerine, sırasıyla, Laurent serisinin esas ve analitik kısmı denir.

Singüler noktaları, ayrık singüler nokta ve ayrık olmayan singüler nokta diye iki kısma ayırırız.

Tanım 2.2.10 (i) z_0, $f(z)$ fonksiyonun bir singüler noktası olsun. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının $\mathcal{U}^{\star}(z_0, r) = \mathcal{U}(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik oluyorsa z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir ayrık singüler noktası denir.

(ii) z_0, $f(z)$ fonksiyonun bir singüler noktası olsun. Eğer z_0 noktasının her $\mathcal{U}^{\star}(z_0, r)$ delinmiş komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonunun en az bir singüler noktası varsa z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir ayrık olmayan singüler noktası denir.

Ayrık singüler noktaların uygun bir delinmiş komşuluğunda fonksiyon analitik olacağından Laurent serisine açılabilir. Bu nedenle, biz ayrık singüler noktalarla çalışacağız. Ayrıca, bu Laurent seri açılımına bakılarak ayrık singüler noktalar, kaldırılabilir singüler nokta, kutup noktası ve esas singüler nokta olmak üzere üç kısma ayrılır. Biz burada sadece kutup noktasını vereceğiz.

Tanım 2.2.11 (Kutup Noktası) z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Bu noktanın uygun bir delinmiş komşuluğunda, $f(z)$ fonksiyonunun Laurent serisini göz önüne alalım. Bu serinin esas kısmında sonlu sayıda terim varsa z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası (veya kutbu) denir.

Tanım 2.2.12 (Meromorf fonksiyon) $f(z)$ fonksiyonunun bir B bölgesinde kutup noktalarından başka singüler noktası yoksa $f(z)$ fonksiyonuna B bölgesinde meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.2.13 (Maksimum Modül Teoremi) $f(z)$, B bölgesinde analitik ancak sabit olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde maksimum değer alamaz (Ponnusamy and Silverman 2006).

B, sınırlı bir bölge ve sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli içinde ise analitik olsun. O halde, $|f(z)|$ maksimum değerini B bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.2.14 (Minimum Modül Teoremi) $f(z)$, B bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, B bölgesinde minimum değer alamaz.

B sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z \in B$ için $f(z) \neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun B bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. O halde, $|f(z)|$ minimum değerini B bölgesinin sınırında alır.

Teorem 2.2.15 (Schwarz Lemması) $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik olsun. Eğer bu diskte, $|f(z)| \leq 1$, $f(0) = 0$ şartları sağlanıyorsa

$$|f(z)| \leq |z| \text{ ve } |f'(0)| \leq 1$$

olur. $\mathcal{U}$ diskinde sıfırdan farklı en az bir z noktasında $f(z) = |z|$ olması için gerek ve yeter şart $|c| = 1$ olmak üzere $f(z) = cz$ olmasıdır (Ponnusamy and Silverman 2006).

Şimdi, birçok matematikçi tarafından detaylı bir şekilde incelenmiş olan ve bu çalışmamız boyunca sıkça kullanacağımız ünivalent fonksiyon kavramına değineceğiz.

Tanım 2.2.16 (Ünivalent Fonksiyon) $f, B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her bir $z_1, z_2 \in B$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olması $f(z_1) \neq f(z_2)$ olmasını gerektiriyorsa) f fonksiyonuna B bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlict) fonksiyon adı verilir (Duren 1983).

Bu çalışmamız boyunca (1.2) deki gibi normalize edilmiş, $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilecektir. Yani,

$$\mathcal{S} = \{f: \mathcal{U} \to \mathbb{C}: \; f(z), \mathcal{U} \text{ da analitik, ünivalent}, f(0) = 0 \text{ ve } f'(0) = 1\}$$

dır.

Geometrik olarak, bir ünivalent fonksiyon basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Analitik ve ünivalent fonksiyonlar ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere resmeder.

Teorem 2.2.17 f analitik fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu bir B bölgesinde ünivalent ise her $z_0 \in B$ için $f'(z_0) \neq 0$ dır.

Aşağıda $\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir:

(i) $f(z) = Log(\frac{1+z}{1-z})$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\left\{-\frac{\pi}{2} < Imz < \frac{\pi}{2}\right\}$ sonsuz şeridi üzerine resmeder.

(ii) $f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \cdots$ fonksiyonu altında $\mathcal{U}$ birim diskinin görüntüsü $\{w = u + iv: Rew > -1/2\}$ kümesidir.

(iii) $f(z) = \frac{z}{1-z^2} = z + z^3 + z^5 + \cdots$ fonksiyonu altında $\mathcal{U}$ birim diskinin görüntüsü $\mathbb{C} - \left\{\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, \infty\right)\right\}$ bölgesidir.

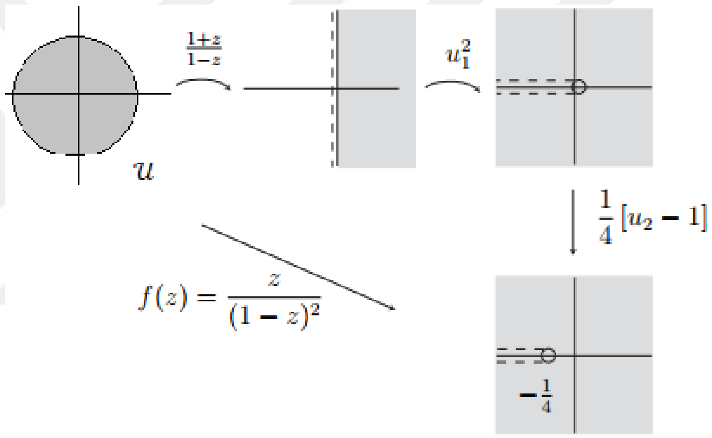
(iv) $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$ fonksiyonu Koebe fonksiyonu olup bu fonksiyon ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok önemli bir yere sahiptir. Bu fonksiyon altında $\mathcal{U}$ birim diskinin görüntüsünü bulmak için, Koebe fonksiyonunu

$$k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right]$$

şeklinde düzenleyelim ve

$$u_1(z) = \frac{1+z}{1-z},\ u_2(z) = u_1^2(z) \text{ ve } u_3(z) = \frac{1}{4}[u_2(z) - 1]$$

diyelim. Bu halde, $k(z) = (u_3 \circ u_2 \circ u_1)(z)$ olduğu kolaylıkla görülebilir. u_1 Möbius dönüşümü olup $\mathcal{U}$ birim diskini, sınırı imajiner eksen olan sağ yarı düzleme resmeder. u_2, u_1 in karesi dönüşümü olup sağ yarı düzlemi negatif reel eksen boyunca uzanan yarık hariç tüm kompleks düzleme resmeder. u_3 ise, bu son bölgeyi bir birim sola öteler ve ¼ ile çarpar.



Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu altında $\mathcal{U}$ birim diskinin görüntüsü

$f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise $f(z)$ fonksiyonuna yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.18 Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeter şart $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır.

$f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ analitik fonksiyonunun ünivalent olması için gerekli ancak yeterli değildir. Bir başka ifadeyle, eğer f analitik fonksiyonu bir B bölgesinde ünivalent ise bu bölgedeki her bir z_0 noktası için $f'(z_0) \neq 0$ dır. Bu ifadenin tersinin her zaman doğru olması gerekmez. Aşağıdaki örnek yerel ünivalent ve ünivalent fonksiyonlar arasındaki ilişkinin anlaşılması bakımından önemlidir.

Örnek 2.2.19 $D = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 2,\ 0 < argz < 3\pi/2\}$ bölgesi ve $f: D \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2$ fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonu D bölgesinde analitiktir. Ayrıca, her bir $z_0 \in D$ için $f'(z_0) = 2z_0 \neq 0$ olduğundan f fonksiyonu D bölgesinde yerel ünivalenttir. Ancak,

$$f\left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{3}{2\sqrt{2}}i\right) = f\left(-\frac{3}{2\sqrt{2}} - \frac{3}{2\sqrt{2}}i\right) = \frac{9}{4}i$$

olduğundan f fonksiyonu D bölgesinde ünivalent değildir. Fakat, fonksiyonun tanım bölgesi $D_1 = \{z \in \mathbb{C}: (Re(z) - 1)^2 + Im(z)^2 < \frac{1}{4}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: (x - 1)^2 + y^2 < \frac{1}{4}\}$ alınırsa, $f(z) = z^2$ fonksiyonu D_1 bölgesinde ünivalent olur.

Eğer $f(z)$ analitik fonksiyonu bir B bölgesinde yerel ünivalent ise $f'(z)$ türev fonksiyonu $z \in B$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ uzunluklar için yerel büyüme miktarını ve $argf'(z)$ ise yerel dönme miktarını verir. Ayrıca, $f: B \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Cauchy-Riemann denklemlerini sağladığı göz önünde bulundurulduğunda bu dönüşümün Jacobian determinantı $|f'(z)|^2$ olur. Teorem 2.2.17 dikkate alındığında, analitik bir fonksiyonun Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması bu fonksiyonun yerel ünivalent olması için gerek ve yeter şart olarak verilebilir.

Tanım 2.2.20 (Konform Dönüşüm) $f: B \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ görüntü eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından aynı α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir.

Teorem 2.2.21 f fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 noktasında konform bir dönüşümdür denir (Duren 1983).

Sonuç olarak, bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konform dönüşümdür.

Tanım 2.2.22 (Riemann Dönüşüm Teoremi) Kompleks düzlemin her basit bağlantılı bir $D \subsetneq \mathbb{C}$ bölgesi, $\mathcal{U}$ birim diski üzerine konform olarak resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in D$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ şartını sağlayan ve D bölgesini $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

Teorem 2.2.23 (Liouville Teoremi) Tam ve sınırlı bir $f(z)$ fonksiyonu sabittir.

2.3. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Altsınıfları

Tanım 2.3.1 (Yıldızıl Küme) $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin ve $w_0 \in B$ olsun. Bu durumda, her $w \in B$ için $\{(1-t)w + tw_0\} \subseteq B$ ise B kümesine w_0 noktasına göre yıldızıl (starlike veya star-shaped) küme denir.

Yani, B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her bir $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. Bir başka ifadeyle, $w_0 \in B$ noktasından çıkan her bir ışın B kümesinin sınırını bir tek noktada kesiyorsa B ye yıldızıl küme denir. Eğer w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir.

Tanım 2.3.2 (Yıldızıl Fonksiyon) Bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $f(z_0) = w_0$ noktasına göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak, $f \in S$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini orijine göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna, kısaca, yıldızıl fonksiyon denir (Graham and Kohr 2003).

Yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^{\star}$ ile göstereceğiz. O halde, $S^{\star}$ sınıfını analitik olarak aşağıdaki gibi verebiliriz:

Teorem 2.3.3 $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f nin yıldızıl fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0, \qquad z \in \mathcal{U}$$

olmasıdır.

$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0$ şartını, $\arg\{f(z)\}$, $\arg\{z\}$ nin artan bir fonksiyonudur şeklinde geometrik olarak yorumlamak mümkündür. Yani, $arg\{z\}$ arttıkça $\arg\{f(z)\}$ de artar. Ayrıca, bu şartın sağlanması $f(\mathcal{U})$ nun yıldızıl bir bölge olmasını gerektirir ancak f nin ünivalentliğini garanti etmez. Örneğin $f(z) = z^2$ fonksiyonunu ele alalım. $Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) = 2 > 0$ ve $f(0) = 0$ olmasına rağmen $f(z) = z^2$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent değildir. Ayrıca, $\mathcal{U}$ birim diskini yıldızıl bir bölgeye resmeden ünivalent olmayan bir fonksiyonun orijindeki türevi sıfır olur. Şunu da vurgulayalım ki $f(z) = z^2 \notin \mathcal{S}$ dir.

Teorem 2.3.4 $f(z)$ fonksiyonu (1.2) deki gibi seri açılımına sahip $S^{\star}$ sınıfına ait bir fonksiyon olsun. O halde, $|a_n| \leq n, (n = 2,3, \dots)$ dir.

Yukarıda verilen teorem 1920 yılında Nevanlinna tarafından ifade ve ispat edilmiştir. Bu teorem $S^{\star}$ sınıfındaki fonksiyonlar için Bieberbach tahminin doğruluğunu göstermesi açısından son derece önemlidir. Esasen, bu teoremden sonra Bieberbach tahminin doğru olduğuna dair umutlar artmıştır. Ancak, bir önceki bölümde ayrıntılarıyla ifade edildiği üzere, bu teoremden çok uzun yıllar sonra Bieberbach tahmininin $\mathcal{S}$ sınıfından fonksiyonlar için de doğruluğu gösterilebilmiştir.

Şimdi, $S^{\star}$ sınıfının en önemli alt sınıflarından biri olan β mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı vereceğiz. Bu sınıf, ilk olarak, 1936 yılında M.S. Robertson tarafından çalışılmıştır.

Tanım 2.3.5 $f(z) \in \mathcal{S}$ olsun. O halde, $0 \leq \beta < 1$ için

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta, \qquad z \in \mathcal{U}$$

ise $f(z)$ fonksiyonuna β mertebeden yıldızıl fonksiyon denir.

β mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfını $S^{\star}(\beta)$ ile göstereceğiz. Bu halde, $S^{\star}(\beta)$ sınıfının küme gösterimi

$$S^{\star}(\beta) = \left\{f \in \mathcal{S}: Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta, \qquad z \in \mathcal{U}\right\}$$

olur.

Açıkça görülebileceği üzere, $\beta = 0$ için, $S^{\star}(0) \equiv S^{\star}$ dır. Yani, $S^{\star}(\beta) \subseteq S^{\star}(0) \equiv S^{\star}$ dir.

Tanım 2.3.6 (Konveks Küme) $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1, w_2 \in B$ için $\{tw_1 + (1-t)w_2\} \subseteq B$ ise B kümesine konveks küme denir.

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Her $w_1, w_2 \in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme adı verilir.

Tanım 2.3.7 (Konveks Fonksiyon) Eğer bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini konveks bir kümeye resmediyorsa bu f fonksiyonuna konveks fonksiyon adı verilir. Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem konveks fonksiyonların analitik tasvirini vermektedir.

Teorem 2.3.8 $f \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda,

$$Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0, \qquad z \in \mathcal{U}$$

dır.

Teorem 2.3.5 ve Teorem 2.3.8 teoremleri dikkate alındığında J.W. Alexander tarafından verilen aşağıdaki önemli sonucu elde edebiliriz.

Teorem 2.3.9 $f\colon \mathcal{U} \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyon olsun. O halde, f nin konveks olması için gerek ve yeter şart zf' nin yıldızıl olmasıdır.

Aşağıdaki teorem 1917 yılında Loewner tarafından ifade ve ispat edilmiş olup Bieberbach tahmininin konveks fonksiyonların $\mathcal{C}$ sınıfı için doğruluğunu göstermesi bakımından önemlidir.

Teorem 2.3.10 $f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n \in \mathcal{C}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu halde, $|a_n| \leq 1$ $(n = 1,2,\dots)$ dir.

Bu teorem için birim diski konveks bir bölgeye resmeden $f(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu ekstremal fonksiyondur. Dikkat edilecek olursa, $zf'(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ Koebe fonsiyonudur. Koebe fonksiyonu $S^{\star}$ sınıfı için ekstremal fonksiyondur. Ayrıca, $f \in S$ (ya da $f \in S^{\star}$) için $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}(0, 1/4)$ iken $f \in \mathcal{C} \Rightarrow f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}(0, 1/2)$ dir.

Tanım 2.3.11 $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer, $0 \leq \beta < 1$ için,

$$Re\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\beta, \qquad z\in\mathcal{U}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna β mertebeden konveks fonksiyon denir. β mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir.

Konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile β mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}(\beta)$ arasında $\mathcal{C}(\beta)\subseteq\mathcal{C}(0)\equiv\mathcal{C}$ bağıntısı vardır.

Aşağıdaki teorem, konveks ve yıldızıl fonksiyon sınıfları arasında var olan Alexander bağıntısının, β mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfı içinde geçerli olduğunu göstermesi bakımından oldukça önemlidir.

Teorem 2.3.12 $f(z)\in\mathcal{C}(\beta)$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z)\in S^{\star}(\beta)$ olmasıdır.

Tüm bu incelemelerin ışığında şu önemli çıkarımı yapabiliriz: $\mathcal{C}$, S^{*} ve $\mathcal{S}$ fonksiyon sınıfları arasında $\mathcal{C}\subset S^{*}\subset\mathcal{S}$ şeklinde bir kapsama bağıntısı vardır.

Tanım 2.3.13 (Ünivalentlik Yarıçapı) $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu verilmiş olsun. f fonksiyonu $\mathcal{U}_{\rho}$ diskinde ünivalent olacak şekilde belirlenen en büyük ρ_0 reel sayısına f fonksiyonunun ünivalentlik yarıçapı denir.

Tanım 2.3.14 (Yıldızıllık Yarıçapı) f fonksiyonu (1.2) deki gibi tanımlanmış olsun. O halde, $0\leq\beta<1$ için,

$$r_{\beta}^{\star}(f)=sup\left\{r>0:Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\beta, \qquad z\in\mathcal{U}_r\right\} \tag{2.1}$$

reel sayısına f fonksiyonunun β mertebeden yıldızıllık yarıçapı denir.

Bu tanıma göre, $r_\beta^\star(f)$ biçiminde gösterdiğimiz bu yarıçap $w = f(z) \in \mathcal{S}$ fonksiyonu altında orijine göre yıldızıl bir bölgeye resmedilen $\mathcal{U}_r$ çemberlerinin r yarıçapları için bir üst sınırdır. Ayrıca, $r_0^\star(f) = r^\star(f)$ reel sayısı, $f(\mathcal{U}_{r^\star(f)})$ görüntü bölgesi orijine göre yıldızıl bir bölge olacak şekilde, en büyük yarıçaptır.

Tanım 2.3.15 (Konvekslik Yarıçapı) f fonksiyonu (1.2) deki gibi tanımlanmış olsun. O halde, $0 \leq \beta < 1$ için,

$$r_\beta{}^c(f) = sup\left\{r > 0 :\ Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta, \qquad z \in \mathcal{U}_r\right\} \tag{2.2}$$

reel sayısına f fonksiyonunun β mertebeden konvekslik yarıçapı denir.

Yukarıdaki açıklamaya benzer olarak: $r_0^c(f) = r^c(f)$ reel sayısı, $f(\mathcal{U}_{r^c(f)})$ görüntü bölgesi konveks bir bölge olacak şekilde en büyük yarıçaptır.

Şimdi, ünivalent fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli subordinasyon kavramını vereceğiz.

Tanım 2.3.16 $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik fonksiyonlar olsun. Eğer,

$$f(z) = g\big(\omega(z)\big), \qquad (|z| < 1)$$

olmak üzere, $\omega(0) = 0$ ve $|\omega(z)| < 1$ şartlarını sağlayan $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik $\omega(z)$ fonksiyonu varsa $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna subordinedir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir.

Lemma 2.3.17 $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olsun. Bu durumda, $f(z) \prec g(z)$ olması için gerek ve yeter şart $f(0) = g(0)$ ve $f(\mathcal{U}) \subset g(\mathcal{U})$ olmasıdır.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayan ancak geometrik fonksiyonlar teorisindeki bir çok problemin çözümünde oldukça önemli olan fonksiyon sınıfları da mevcuttur. Bu fonksiyon sınıflarından birkaçı aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.3.18 (Carathèodory Sınıfı) $\mathcal{U}$ birim diskinde $p(0) = 1$ ve $Re(p(z)) > 0$ koşulunu sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n\geq 1} p_n z^n$ şeklindeki analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Carathèodory sınıfı ya da $\wp$ sınıfı denir (Pommerenke 1975).

$z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait olup, bu fonksiyon $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzleme resmeden konform bir dönüşümdür. $\wp$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z) = 1 + z^n$ fonksiyonu $\wp$ sınıfına ait olmasına rağmen $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ için ünivalent değildir.

Lemma 2.3.19 $p \in \wp$ olmak üzere $p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots$ fonksiyonu verilmiş olsun. O halde,

$$|p_n| \leq 2, \quad (n = 1,2, \dots)$$

dir (Pommerenke 1975).

Lemma 2.3.20 $p \in \wp$ olsun. O halde, bazı $|x| \leq 1$ ve $|z| \leq 1$ için,

$$2p_2 = p_1^2 + x(4 - p_1^2)$$

ve

$$4p_3 = p_1^3 + 2(4 - p_1^2)p_1 x - p_1(4 - p_1^2)x^2 + 2(4 - p_1^2)(1 - |x|^2)z$$

dir (Grenander and Szegö 1958).

Tanım 2.3.21 $\mathcal{U}$ birim diskinde $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ şartlarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

$\wp$ sınıfına ait fonksiyonlarla Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z) \in \wp \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)}, \qquad \varphi(z) \in \Omega.$$

$\wp$ sınıfı ile ünivalent fonksiyonların alt sınıfları arasında da yakın bir ilişki vardır.

Teorem 2.3.22 $f(z)$ analitik fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \wp$$

olmasıdır (Pommerenke 1975).

Teorem 2.3.23 $f(z)$ analitik fonksiyonunun $\mathcal{U}$ birim diskinde konveks olması için gerek ve yeter şart

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \wp$$

olmasıdır (Pommerenke 1975).

Şimdi geometrik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan Hadamard çarpımı (ya da konvülasyon) kavramını tanımlayalım.

Tanım 2.3.24 $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n z^n, \qquad g(z) = z + \sum_{n\geq 2} b_n z^n$$

şeklinde verilmiş olsun. O halde, f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı (ya da konvülasyonu)

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre $f * g = g * f$ olur.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tezin temel kısımlarının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremlerin yanı sıra konuların daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı örnekler sunulmuştur.

3.1. Bi-ünivalent Fonksiyonlar ve Alt Sınıfları

Bu kısımda, tezimizde oldukça önemli olan, bi-ünivalent fonksiyonlar ve onun bazı alt sınıflarını vereceğiz.

Aşağıdaki teorem 1907 yılında Koebe tarafından verilmiş ve 1916 yılında da Bieberbach tarafından ispat edilmiştir.

Teorem 3.1.1 (Koebe-$1/4$ Teoremi) $f \in \mathcal{S}$ ve $\mathcal{U}$ birim diski verilmiş olsun. Bu durumda, $f(\mathcal{U}) \supset \mathcal{U}_{1/4} = \{w: |w| < 1/4\}$ olur.

Bu teoreme göre, f fonksiyonu (1.2) deki gibi normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyon ise bu f fonksiyonu altında $\mathcal{U}$ birim diskinin görüntüsü $1/4$ yarıçaplı $\mathcal{U}_{1/4}$ diskini ihtiva eder. Bir başka ifadeyle, $w \notin f(\mathcal{U})$ ise $|w| \geq 1/4$ olur. Ayrıca, Şekil 2.1 incelediğinde $\frac{|f'(0)|}{4} = \frac{1}{4}$ sayısı kesindir. Ayrıca, $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda bu teoremin geçerli olamayacağına dikkat etmeliyiz. Bir başka deyişle, bu teoremde f fonksiyonunun ünivalent olma koşulu kaldırılamaz.

Yukarıdaki teoremde ifade edilen Koebe-$1/4$ teoreminin bir sonucu olarak $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu $f^{-1}(z)$ ters fonksiyonuna sahiptir. Yani $f \in \mathcal{S}$ olmak üzere $f^{-1}: f(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ ters fonksiyonu

$$f^{-1}\big(f(z)\big) = z, (z \in \mathcal{U}) \text{ ve } f\big(f^{-1}(w)\big) = w, (|w| < r_0(f);\ r_0(f) \geq \tfrac{1}{4})$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca, bazı temel hesaplamaların sonucunda, f^{-1} ters fonksiyonunun, $w \in f(\mathcal{U})$ olmak üzere,

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \cdots \qquad (3.1)$$

şeklinde bir seri açılımına sahip olduğu kolayca görülebilir. Ancak $f \in \mathcal{S}$ olmasına rağmen, $f^{-1}(z)$ ters fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfından bir fonksiyon olması yani ünivalent olması gerekmez. Hem kendisi hem de tersi $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olan fonksiyonlara bi-ünivalent fonksiyonlar diyecek ve bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını σ ile göstereceğiz. σ sınıfındaki fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma 1967 yılında Lewin tarafından yayınlanmıştır. Aşağıda σ sınıfına ait bazı fonksiyon örnekleri verilmiştir.

$$f_1(z) = log\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \qquad f_2(z) = z, \qquad f_3(z) = \frac{z}{1-z}, \qquad f_4(z) = -\log(1-z).$$

Yukarıdaki fonksiyonların her birinin görüntü bölgesinin $\mathcal{U}$ birim diskini ihtiva ettiğine dikkat ediniz.

Ancak, Koebe fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olmasına rağmen σ sınıfına ait değildir. Ayrıca aşağıdaki fonksiyonların her biri $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olmasına rağmen σ sınıfına ait değillerdir.

$$g_1(z) = z - \frac{z^2}{2}, \qquad g_2(z) = \frac{z}{1-z^2}.$$

Yukarıda verilen fonksiyonların ve Koebe fonksiyonunun görüntü bölgesinin $\mathcal{U}$ birim diskini ihtiva etmediğine dikkat ediniz.

Şimdi çalışmamızda önemli bir yere sahip olan bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarını vereceğiz:

Tanım 3.1.2 Hem kendisi hem de tersi $\mathcal{U}$ birim diskinde yıldızıl (konveks) olan fonksiyonlara bi-yıldızıl (bi-konveks) fonksiyon denir.

Bu çalışmamız boyunca, bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfını $S_\sigma^\star$ ile ve bi-konveks fonksiyonların sınıfını ise $\mathcal{C}_\sigma$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.3 Hem kendisi hem de tersi $\mathcal{U}$ birim diskinde β $(0 \leq \beta < 1)$ mertebeden yıldızıl (konveks) fonksiyonlara β mertebeden bi-yıldızıl (bi-konveks) fonksiyon denir.

Bu çalışmamız boyunca β mertebeden bi-yıldızıl fonksiyonların sınıfını $S_\sigma^\star(\beta)$ ve β mertebeden bi-konveks fonksiyonların sınıfını ise $\mathcal{C}_\sigma(\beta)$ ile göstereceğiz.

Şimdi çalışmamızda önemli bir yere sahip olan Hankel determinantını tanımlayacağız.

Tanım 3.1.4 (Hankel Determinantı) $n, q \in \mathbb{N}$ olmak üzere, herhangi bir $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $H_q(n)$ Hankel determinantı

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix}, (a_1 = 1) \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlanır (Noonan and Thomas 1976).

Tanımdan kolayca görülebileceği üzere

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_3 - a_2^2, \qquad H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2$$

olur. $H_2(1)$ ve $H_2(2)$ Hankel determinantları, sırasıyla, Fekete-Szegö fonksiyoneli ve ikinci Hankel fonksiyoneli olarak bilinir. Pek çok matematikçi tarafından, ünivalent ve bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarına ait fonksiyonların Hankel determinantı için (özellikle $H_2(1)$ ve $H_2(2)$ fonksiyonelleri için) üst sınırlar elde edilmiştir.

3.2. Bazı Özel Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1 $Rez > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

fonksiyonuna gamma fonksiyonu adı verilir.

Bu tanımda geçen integral ikinci tür Euler integrali olarak bilinir.

Tanım 3.2.2 (Pochhmmer (Apell) sembolü) Γ, gama fonksiyonunu göstermek üzere $n \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{C}$ ve $a \neq 0, -1, -2, \ldots$ olması durumunda

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ a(a+1)\ldots(a+n-1), & n \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer a ve $(a+n)$ negatif tamsayı ise $(a)_n = \lim_{t\to 0} \frac{\Gamma(a+n+t)}{\Gamma(a+t)}$ formülü geçerlidir. Pochhammer sembolü için $(a)_{n+1} = (a+n)(a)_n$ eşitliği her zaman sağlanır.

Tanım 3.2.3 $z(1-z)u''(z) + (c-(a+b+1)z)u'(z) - abu(z) = 0$ ikinci mertebeden hipergeometrik diferansiyel denkleminin $a, b, c \in \mathbb{C}, c \neq 0, -1, -2, \ldots$ ve $(a)_n$ Pochhammer sembolü olmak üzere,

$$F(a,,b,c;z) = \ {}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a)_n(b)_n z^n}{n!\,(c)_n}, \qquad |z| < 1$$

şeklindeki özel çözüm fonksiyonuna Gauss hipergeometrik fonksiyonu adı verilir.

Tanım 3.2.4 $p, q \geq 1$ şartını sağlayan birer tam sayı, $a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q$ birer kompleks sayı ve her $k \in \{1,2,\dots,q\}$ için $b_k \neq 0, -1, -2, \dots$ olmak üzere

$${}_pF_q\left(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; z\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{(a_1)_n(a_2)_n \dots (a_p)_n}{(b_1)_n(b_2)_n \dots (b_q)_n} \frac{z^n}{n!}$$

fonksiyonuna genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyon adı verilir.

Tanım 3.2.6 (Bessel Fonksiyonu) p, reel ya da kompleks bir sayı ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$z^2u''(z) + zu'(z) + (z^2 - p^2)u(z) = 0$$

ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemine Bessel diferansiyel denklemi denir. Bu denklemin bir özel çözümü olan

$$\mathcal{J}_p(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(p+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+p} \tag{3.3}$$

fonksiyonuna ise, p mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu adı verilir.

Tanım 3.2.7 (Mittag-Leffler Fonksiyonu) $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$E_\alpha(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}, \alpha \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0$$

fonksiyonuna Mittag-Leffler fonksiyonu denir.

Mittag-Leffler fonksiyonu genelleştirilerek

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+\beta)}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$$

şeklinde de verilebilir. Bu da genelleştirilimiş Mittag-Leffler fonksiyonu olarak bilinir.

$E_\alpha(z)$ fonksiyonu 1903 yılında Mittag-Leffler tarafından tanımlanmış ve çalışılmıştır. $E_\alpha(z)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş bir hali olan $E_{\alpha,\beta}(z)$ fonksiyonu ise 1905 yılında Wiman tarafından çalışılmıştır.

Not 3.2.8 Aşağıda verilen ifadeler Tanım 3.2.7 nin doğrudan bir sonucudur

(*i*) $$E_0(z) = \frac{1}{1-z}, |z| < 1,$$

(*ii*) $$E_1(z) = e^z,$$

(*iii*) $$E_{\alpha,1}(z) = E_\alpha(z).$$

Şimdi, birinci tür Bessel fonksiyonu ile yakından ilişkili olan ve E.M. Wright (1933) tarafından çalışılan Wright fonksiyonunu tanımlayacağız. Bu çalışmamızda Aktaş *et al.* (2017a, 2017b) tarafından birinci tip Bessel fonksiyonu için elde edilen sonuçları genelleştirerek Wright fonksiyonu için benzer sonuçlar elde ettik. Bu bakımdan, aşağıda tanımlayacağımız ve ilerleyen kısımlarda da bazı temel özelliklerini sunacağımız Wright fonksiyonu oldukça önemlidir.

Tanım 3.2.9 (Wright Fonksiyonu) $\rho > -1$ ve $z, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\phi(\rho, \beta; z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!\,\Gamma(n\rho + \beta)} \tag{3.4}$$

özel fonksiyonuna Wright fonksiyonu denir (Gorenflo *et al.* 1999).

Bu fonksiyon, esasen, $\rho > 0$ için Wright tarafından bölüntülerin asimptotik teorisi ile ilgili araştırmalarıyla ilişkili olarak tanımlanmıştı (Wright 1933). Ayrıca önemli bir not olarak, $\rho > -1$ için Wright fonksiyonunun bir tam fonksiyonu olduğunu vurgulayalım. Dolayısıyla tezimizin bazı kısımlarında tam fonksiyonlar teorisindeki bazı özellikleri Wright fonksiyonuna uygulayacağız.

Not 3.2.9 (3.3) ve (3.4) eşitlikleri göz önüne alındığında, ν mertebeden birinci tip Bessel fonksiyonu ile Wright fonksiyonu arasında

$$\phi\left(1, \nu + 1; -\frac{1}{4}z^2\right) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \mathcal{J}_\nu(z) \tag{3.5}$$

ilişkisi olduğu kolaylıkla görülebilir. Bundan dolayı $\phi(\rho, \beta; z)$ Wright fonksiyonu, $\mathcal{J}_\nu(z)$ Bessel fonksiyonunun genelleştirilmiş hali olarak düşünülebilir.

3.3. Tam Fonksiyonların Bazı Özellikleri

Bilindiği üzere tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir. Bu kısımda tam fonksiyonlarla çalışacağız ve aşağıdaki üç soruya cevap arayacağız:

1. Bir tam fonksiyon nerede sıfır olur? (z_n), $\mathbb{C}$ de limit noktasına sahip olmayan kompleks sayıların bir dizisi olsun. Bu durumda, sadece bu dizinin terimlerinde sıfır olan bir tam fonksiyon vardır. Aslında, bu istediğimiz fonksiyonun inşası Euler'in $sin\pi z$ için verdiği çarpım formülünden esinlenerek oluşturulmuş olsa da bu kısımda

ilave bazı düzenlemeler gerekmektedir. Bu düzenlemeleri Weierstrass kanonik çarpım teoreminde göreceğiz.

2. Tam fonksiyonların sonsuzdaki büyümesi nasıldır? Burada, konular şu önemli ilke ile kontrol edilmektedir: bir fonksiyon ne kadar büyükse, o kadar çok sıfıra sahip olabilir. Bu durum polinomlarda kendini açıkça göstermektedir. Cebirin temel teoreminden, derecesi d olan bir P polinomunun sıfırlarının sayısı tam olarak, P nin büyüme mertebesindeki üs olan d dir. Yani;

$$\sup_{|z|=R} |P(z)| \approx R^d, \; R \to \infty.$$

Bu genel ilkenin tam hali, bu kısımda vereceğimiz, Jensen formülünde bulunmaktadır. Bu kısımda sunulan teoremlerin çoğunun merkezi olan bu formül, bir diskte bir fonksiyonun sıfırlarının sayısı ile bu disk üzerinde fonksiyonun (logaritmik) ortalaması arasındaki yakın ilişkiyi göstermektedir. Aslında, Jensen formülü bu kısım için bir başlangıç noktası oluşturmaktadır.

3. Tam fonksiyonlar sıfırları vasıtasıyla ne ölçüde belirlenebilir? Bir tam fonksiyon sonlu bir (üstel) büyüme mertebesine (growth order) sahipse, o zaman bu tam fonksiyon sıfırları vasıtasıyla belirlenebilir. Bu iddianın tam hali ileride vereceğimiz Hadamard çarpım teoremidir.

Teorem 3.3.1 (Jensen Formülü) $f(z)$ fonksiyonu $|z| < R$ de analitik olsun. Kabul edelim ki, $f(0) \neq 0$ ve $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ler $|z| < R$ diskinde $f(z)$ fonksiyonunun sıfırlarının azalmayan bir dizi olarak düzenlenmiş modülleri olsun. Eğer $r_n < r < r_{n+1}$ ise, bu durumda,

$$log \frac{r^n |f(0)|}{r_1 r_2 \ldots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right| d\theta.$$

Jensen formülü, bir fonksiyonun modülü ile fonksiyonun sıfırlarının modülü arasındaki ilişkiyi verir. Ayrıca, Jensen formülü bir analitik fonksiyonun büyümesini bu fonksiyonun bir disk içerisindeki sıfırlarının sayısı ile ilişkilendirmemize imkân vermektedir.

Şimdi, bir tam fonksiyonun büyüme mertebesi kavramını tanımlayalım: f bir tam fonksiyon olsun.

$$|f(z)| \leq e^{|z|^{\lambda}}, \qquad |z| = r > r_0$$

olacak şekilde pozitif bir λ sayısı varsa f fonksiyonu sonlu büyüme mertebesine sahiptir denir. Açıkça görüleceği üzere, bu eşitsizlik belli bir λ için doğruysa $\lambda' > \lambda$ için de doğrudur. Böylelikle, bu eşitsizliği sağlayan sonsuz çoklukta $\lambda > 0$ sayısı vardır.

Bu λ ların alt sınırına f fonksiyonunun büyüme mertebesi denir ve genellikle ρ ile gösterilir. Yani, $\rho = inf\lambda$ dır. O halde, $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$|f(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \qquad |z| = r > r_0$$

olacak şekilde bir r_0 sayısı vardır. Bu ise, $r \to +\infty$ için $M(r) > e^{r^{\rho-\varepsilon}}$ iken

$$M(r) = \max_{|z|=r}|f(z)| < e^{r^{\rho+\varepsilon}}, \qquad r > r_0$$

olmasını gerektirir. Böylelikle, $r \to +\infty$ için

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} < \rho + \varepsilon \text{ ve } \frac{\log\log M(r)}{\log r} > \rho - \varepsilon$$

olduğundan

$$\rho = \limsup_{r\to+\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

yazılır.

Örneğin $F(z) = e^{e^z}$ fonksiyonun büyüme mertebesini elde edelim. $z = x + iy$ denilirse

$$|F(z)| = e^{Re(e^z)} = e^{e^x \cos y} \leq e^{e^x} \leq e^{e^r}$$

elde edilir. Böylece

$$M(r) = e^{e^r}$$

yazılır. Bu durumda,

$$\frac{\log\log M(r)}{\log r} = \frac{r}{\log r} \to \infty \quad (r \to \infty)$$

olur. Bu halde $F(z)$ fonksiyonunun büyüme mertebesi $\rho = \infty$ dur.

Eğer bir tam fonksiyonun kuvvet serisi biliniyorsa, bu fonksiyonun büyüme mertebesi katsayılara bağlı bir formül ile de verilebilir.

Teorem 3.3.2 $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ tam fonksiyonunun büyüme mertebesinin ρ olması için gerek ve yeter şart

$$\rho = \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{n\log n}{-\log|a_n|}\right) \tag{3.6}$$

olmasıdır.

Şimdi, bu teoremin uygulamasına dönük bazı örnekler vereceğiz.

Örnek 3.3.3 (i) $f(z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^{kn}},\ (k > 0)$ fonksiyonunu ele alalım. Açıkça görüldüğü üzere

$$a_n = \frac{1}{n^{kn}}$$

dir. O halde,

$$\begin{aligned}\rho &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{-\log\left(\frac{1}{n^{kn}}\right)} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{kn\log n} \\ &= \frac{1}{k}\end{aligned}$$

bulunur.

(ii) Şimdi ise, (3.4) deki gibi tanımlanmış Wright fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda, açıkça görülebileceği üzere

$$a_n = \frac{1}{n!\,\Gamma(n\alpha + \beta)}$$

dır. Bu halde, $n! = \Gamma(n+1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log\Gamma(bn + c)}{n\log n} = b$$

olduğu göz önüne alındığında Wright fonksiyonunun büyüme mertebesi

$$\begin{aligned}\rho &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{-\left(\log\left|\left(\frac{1}{n!\,\Gamma(n\alpha+\beta)}\right)\right|\right)} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log\big(n!\,\Gamma(n\alpha+\beta)\big)} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \frac{n\log n}{\log\big(\Gamma(n+1)\big)+\log\big(\Gamma(n\alpha+\beta)\big)} \\ &= \frac{1}{1+\alpha}\end{aligned} \tag{3.7}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3.4 Eğer f tam fonksiyonunun büyüme mertebesi ρ ise f' fonksiyonunun büyüme mertebesi de ρ olur.

Tanım 3.3.5 k negatif olmayan bir tam sayı olmak üzere

$$E(z;k) = \begin{cases} 1-z & ,k=0 \\ (1-z)e^{z+\frac{1}{2}z^2+\cdots+\left(\frac{1}{k}\right)z^k} & ,k\geq 1\end{cases}$$

fonksiyonuna Weierstrass esas çarpanı denir.

$E(z;k)$ fonksiyonu sonsuz çoklukta sıfırlara sahip olan bir tam fonksiyonun çarpımsal halini temsil etmektedir.

Teorem 3.3.6 (Weierstrass Çarpım Teoremi) $a_0 = 0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ kompleks sayıların $\mathbb{C}$ de yığılma noktası olmayan bir dizisi olsun. Bu durumda, sıfırları sadece bu dizinin terimleri olan en genel tam fonksiyon

$$F(z) = e^{h(z)} z^m \prod_{n\geq 1} E\left(\frac{z}{a_n}; k_n\right) \tag{3.8}$$

olur. Burada $m \geq 0$, $a_0 = 0$ terimindeki sıfırların katlılığının derecesi (ki bu dizinin kaç teriminin sıfır olduğu anlamını da taşır); k_n ler de her $z \in \mathbb{C}$ için $\sum_{n\geq 1} \left|\frac{z}{a_n}\right|^{k_n+1}$ serisinin yakınsaklığını sağlayacak negatif olmayan tam sayılar ve $h(z)$ keyfi bir tam fonksiyondur (González 1992).

Tanım 3.3.7 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{|a_n|^{k+1}}$ serisi yakınsak olacak biçimde negatif olmayan k tam sayıları varsa, bu k tam sayılarının en küçüğüne, (a_n) dizisinin ve dolayısıyla da $\prod_{n\geq 1} E(\frac{z}{a_n}; k_n)$ sonsuz çarpımının rankı denir. Eğer böyle bir k sayısı bulunamıyorsa, bu çarpımın rankı sonsuzdur diye söylenir.

Ayrıca, k sonsuz çarpımın rankını göstermek üzere, her n için, $k_n = k$ alınırsa sonsuz çarpım $\prod_{n\geq 1} E(\frac{z}{a_n}; k)$ biçiminde yazılabilir. Bu türden sonsuz çarpımlara düzgün çarpım adı verilir. Tüm bu açıklamalar ışığında, eğer (a_n) kompleks sayı dizisinin rankı k olarak alınacak olursa (3.8) eşitliği

$$F(z) = e^{h(z)} z^m \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right) e^{\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{a_n}\right)^k}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Ayrıca, rankı k olan düzgün çarpımı $P(z) = \prod_{n\geq 1} E(\frac{z}{a_n}; k)$ ile gösterecek olursak, yukarıdaki son eşitlik

$$F(z) = e^{h(z)} z^m P(z)$$

biçiminde daha kısa olarak düzenlenebilir.

Teorem 3.3.8 (Hadamard Çarpım Teoremi) $F(z)$ tam fonksiyonunun mertebesi sonlu bir ρ sayısı olsun. O halde, $h(z)$ fonksiyonu $der[h(z)] \leq \rho$ olacak şekilde bir polinom,

$m \geq 0$, $F(z)$ fonksiyonunun orijindeki sıfırının katlılığı ve k, $P(z)$ çarpımının rankı olmak üzere $k \leq \rho$ için, $F(z)$ tam fonksiyonu

$$\begin{aligned} F(z) &= e^{h(z)} z^m P(z) \\ &= e^{h(z)} z^m \prod_{n \geq 1} E(\frac{z}{a_n}; k) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır (González 1992).

Örneğin $f(z) = \sin(\pi z)$ fonksiyonunun sonsuz çarpım temsilini Hadamard teoremini kullanarak elde edelim. Bunun için öncelikle $f(z)$ fonksiyonunun büyüme mertebesini bulalım

$$f(z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$$

olduğundan $|f(z)| \leq e^{\pi|z|}$ olur. Bu halde f fonksiyonunun büyüme mertebesi $\rho \leq 1$ dir. $z = ix$ $(x \in \mathbb{R})$ alınacak olursa f fonksiyonunun büyüme mertebesinin $\rho = 1$ olduğu görülür. Bu durumda, Hadamard teoremi gereğince $der[h(z)] \leq 1$ dir. Bir başka ifadeyle, $h(z) = a + bz$ şeklinde bir polinomdur. Ayrıca her bir $n \in \mathbb{Z}$ için $z = n$ ler f fonksiyonunun sıfırlarını göstermek üzere

$$\sin(\pi z) = e^{h(z)} z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}$$

olup, buradan

$$e^{h(z)} = \frac{\sin(\pi z)}{z \prod_{n \geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)} \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu halde $e^{h(z)}$ çift fonksiyon olup $e^{a+bz} = e^{a-bz}$ dir. O halde, $e^{2bz} = 1$ olacağından $b = 0$ dır. (3.9) ifadesinin her iki yanının $z \to 0$ için limiti alınacak olursa $e^{a} = \pi$ ve dolayısıyla $e^{h(z)} = \pi$ elde edilir. Sonuç olarak

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

bulunur.

Teorem 3.3.9 Sonlu büyüme mertebesine sahip bir tam fonksiyonun büyüme mertebesi tam sayı değilse bu fonksiyon sonsuz çoklukta sıfıra sahiptir.

Örneğin, $\rho > 0$ için (3.4) deki gibi tanımlanmış Wright fonksiyonunun büyüme mertebesinin $1/(1+\rho)$ olduğu (3.7) de elde ettik. Bu halde Teorem 3.3.9 un bir sonucu olarak Wright fonksiyonu sonsuz çoklukta sıfıra sahiptir.

Şimdi, bu çalışmamızda oldukça önemli olan Euler-Rayleigh eşitsizliklerini vereceğiz.

Kabul edelim ki $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = 1 + \sum_{k\geq 1} a_k\, z^k \tag{3.10}$$

biçiminde seri açılımına ve $\sum |z_k|^{-1} < \infty$ olmak üzere

$$f(z) = \prod_{k\geq 1}\left(1 - \frac{z}{z_k}\right) \tag{3.11}$$

şeklinde sonsuz çarpım temsiline sahip olsun. O halde, (3.11) ifadesinin her iki yanının logaritmik türevi alınarak $|z| < z_1$ için, $S_n = \sum_{k\geq 1} z_k^{-n}$ olmak üzere

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\sum_{k\geq 1}\frac{1}{z_k - z} = -\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 1}\frac{z^n}{z_k^{n+1}} = -\sum_{n\geq 0} S_{n+1}\, z^n$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitliğin sağ ve sol yanındaki ifadelerin katsayılarının kıyaslanması ile S_n toplamının a_k terimleri cinsinden elde edilebileceği açıktır. Örneğin

$$S_1 = -a_1$$
$$S_2 = -2a_2 + a_1^2$$

dir.

Lemma 3.3.10 (Euler-Rayleigh Eşitsizlikleri) Kabul edelim ki (3.10) daki gibi tanımlanmış $f(z)$ tam fonksiyonun tüm γ_k sıfırları için

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$$

olsun. O halde, $S_n^{-\frac{1}{n}} < \gamma_1 < \frac{S_n}{S_{n+1}}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eşitsizlikleri geçerlidir (Ismail and Muldoon 1995).

Son olarak, çalışmalarımızda çok önemli bir yere sahip olan tam fonksiyonların $\mathcal{LP}$ Laguerre-Pólya sınıfını tanımlayacağız.

Eğer, $\psi(x)$ reel tam fonksiyonu, $c, \beta, x_k \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $\sum_{k\geq 1} x_k^{-2} < \infty$ olmak üzere,

$$\psi(x) = cx^m e^{-\alpha x^2 + \beta x} \prod_{k\geq 1}\left(1 + \frac{x}{x_k}\right) e^{-\frac{x}{x_k}}$$

şeklinde ifade edilebiliyorsa bu $\psi(x)$ tam fonksiyonu $\mathcal{LP}$ Laguerre-Pólya sınıfına aittir denir (Dimitrov and Cheikh 2009).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. $\boldsymbol{k}$-bi-yıldızıl Fonksiyonlar için İkinci Hankel Determinant Problemi

Tanım 4.1.1 (Sălăgean Türev Operatörü) $f(z) \in \mathcal{A}$ ve $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. Bu durumda, $D^k: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ Sălăgean türev operatörü

$$\begin{gathered} D^0 f(z) = f(z); \\ D^1 f(z) = Df(z) = zf'(z); \\ \vdots \\ D^k f(z) = D(D^{k-1} f(z)) \end{gathered}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanıma göre $f \in \mathcal{A}$ olmak üzere $f(z) = z + \sum_{n \geq 2} a_n z^n$ için Sălăgean türev operatörü

$$D^k\big(f(z)\big) = z + \sum_{n \geq 2} n^k a_n z^n$$

olarak verilebilir.

Tanım 4.1.2 $f(z) \in \sigma$ fonksiyonu verilmiş olsun. $g(w) = f^{-1}(w)$ olmak üzere

$$Re\left(\frac{D^{k+1} f(z)}{D^k f(z)}\right) > \beta; \;\; 0 \leq \beta < 1, z \in \mathcal{U}$$

ve

$$Re\left(\frac{D^{k+1} g(w)}{D^k g(w)}\right) > \beta; \;\; 0 \leq \beta < 1, w \in \mathcal{U}$$

şartları sağlanıyorsa $f \in \sigma$ fonksiyonu β mertebeden k-bi-yıldızıl fonksiyonların $S^{\star}_{\sigma,k}(\beta)$ sınıfına aittir denir.

Yukarıdaki tanımda $k = 0$ alınarak $S^{\star}_{\sigma,0}(\beta) = S^{\star}_{\sigma}(\beta)$ ve $k = 1$ alınarak $S^{\star}_{\sigma,1}(\beta) = \mathcal{C}_{\sigma}(\beta)$ elde edilir.

Bu çalışmadaki amacımız, k-bi-yıldızıl fonksiyonların $S^{\star}_{\sigma,k}(\beta)$ sınıfına ait herhangi bir f fonksiyonu verildiğinde, D^k Sălăgean türev operatörünü kullanarak, $H_2(2) = a_2a_4 - a_3^2$ fonksiyoneli için bir üst sınır elde etmektir.

Teorem 4.1.3 $S^{\star}_{\sigma,k}(\beta)$ $(0 \leq \beta < 1)$ sınınıfına ait bir f fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda, $k = 1, 2, 3$ için

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{(1-\beta)^2}{2^{2k}}\left(\frac{2^{2k}}{3^{2k}} - \frac{3.2^k.M^2}{3^{2k}.N}\right)$$

ve $k = 0$ ve $k \geq 4$ $(k \in \mathbb{N})$ için

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \dfrac{(1-\beta)^2}{3^{2k+1}2^{5k}}(N + 6.2^{2k}M + 3.2^{5k}), & \beta \in [0, \beta_1'] \\ \dfrac{(1-\beta)^2}{2^{2k}}\left(\dfrac{2^{2k}}{3^{2k}} - \dfrac{3.2^k.M^2}{3^{2k}.N}\right), & \beta \in (\beta_1', 1) \end{cases}$$

dir. Burada

$$M = 6^k + 2.3^{2k} - 2^{3k} - 6^k\beta,$$

$$N = 16.3^{2k}.(1-\beta)^2(3.2^k + 2^{2k} - 3^{k+1}) - 6.3^k2^{3k}(1-\beta) + 3.2^{5k} - 8.2^{2k}3^{2k}$$

ve

$$\beta_1' = \frac{3.2^{k+5} + 2^{2k+5} - 2^{3k}3^{1-k} - 32.3^{k+1} - \left(\frac{2}{3}\right)^k\sqrt{9.2^{4k} + 2^{2k+7}3^{2k} + 2^{k+7}3^{2k} - 128.3^{3k+1}}}{2(3.2^{k+4} + 2^{2k+4} - 16.3^{k+1})}$$

dir (Orhan *et al.* 2017b).

İspat: $f \in S^{\star}_{\sigma,k}(\beta)$ olsun. O halde, $p, q \in \wp$ ve $g = f^{-1}$ olmak üzere

$$\frac{D^{k+1}f(z)}{D^k f(z)} = \beta + (1-\beta)p(z) \tag{4.1}$$

$$\frac{D^{k+1}g(z)}{D^k g(z)} = \beta + (1-\beta)q(z) \tag{4.2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Bazı temel hesaplamaların ardından, (4.1) deki ifadenin katsayılarının kıyaslanması ile

$$2^k a_2 = (1-\beta)p_1, \tag{4.3}$$

$$2.3^k a_3 - 2^{2k} a_2^2 = (1-\beta)p_2, \tag{4.4}$$

$$3.4^k a_4 + 2^{3k} a_2^3 - 3.6^k a_2 a_3 = (1-\beta)p_3 \tag{4.5}$$

ve (4.2) denkleminin katsayılarının karşılaştırılması sonucunda da

$$-2^k a_2 = (1-\beta)q_1, \tag{4.6}$$

$$(4.3^k - 2^{2k})a_2^2 - 2.3^k a_3 = (1-\beta)q_2, \tag{4.7}$$

$$(6.6^k - 2^{3k} - 15.4^k)a_2^3 + (15.4^k - 3.6^k)a_2 a_3 - 3.4^k a_4 = (1-\beta)q_3 \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.3) ve (4.6) denklemlerinden

$$p_1 = -q_1 \tag{4.9}$$

ve

$$a_2 = \frac{1-\beta}{2^k} p_1 \tag{4.10}$$

bulunur. Ayrıca (4.7) eşitliğinden (4.4) eşitliği çıkarılıp elde edilen ifade de (4.9) ve (4.10) değerleri yerine yazılacak olursa

$$a_3 = \frac{(1-\beta)^2}{2^{2k}} p_1^2 + \frac{1-\beta}{4.3^k}(p_2 - q_2) \tag{4.11}$$

elde edilir. Son olarak (4.8) eşitliğinden (4.5) eşitliği çıkartılıp gerekli işlemler yapıldığında

$$a_4 = \frac{(3^{k+1} - 2^{2k})(1-\beta)^3}{3.2^{4k}} p_1^3 + \frac{5(1-\beta)^2}{8.6^k} p_1(p_2 - q_2) + \frac{1-\beta}{6.4^k}(p_3 - q_3) \tag{4.12}$$

bulunur. (4.10), (4.11) ve (4.12) eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} |a_2 a_4 - a_3^2| \le \Bigg| &-\frac{(1-\beta)^4(3^{k+1} - 2^{2k} - 3.2^k)}{3.5^{2k}} p_1^4 + \frac{(1-\beta)^3}{8.12^k} p_1^2 (p_2 - q_2) \\ &+ \frac{(1-\beta)^2}{6.2^{3k}} p_1(p_3 - q_3) - \frac{(1-\beta)^2}{16.9^k}(p_2 - q_2)^2 \Bigg| \end{aligned} \tag{4.13}$$

elde edilir.

Ayrıca, Lemma 2.3.20 den faydalanarak

$$p_2 - q_2 = \frac{4-p_1^2}{2}(x-y)$$

$$p_3 - q_3 = \frac{p_1^3}{2} + \frac{(4-p_1^2)p_1}{2}(x+y) - \frac{(4-p_1^2)p_1}{4}(x^2+y^2) \tag{4.14}$$
$$+\frac{4-p_1^2}{2}[(1-|x|^2)z - (1-|y|^2)w]$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.14) de elde edilen ifadeler (4.13) de yerine yazılır ve üçgen eşitsizliği kullanılacak olursa

$$\begin{aligned}|a_2a_4 - a_3^2| \leq & \frac{(1-\beta)^2}{6.\,2^{3k}}p_1(4-p_1^2) \\ & + \left(\frac{(1-\beta)^4(3.2^k + 2^{2k} - 3^{k+1})}{3.2^{5k}} + \frac{(1-\beta)^2}{12.3^k}\right)p_1^4 \\ & + \left[\frac{(1-\beta)^2}{6.2^{3k}}p_1^2\frac{4-p_1^2}{2} + \frac{(1-\beta)^3}{8.12^k}p_1^2\frac{4-p_1^2}{2}\right](|x|+|y|) \\ & + \left[\frac{(1-\beta)^2}{6.2^{3k}}p_1^2\frac{4-p_1^2}{2} - \frac{(1-\beta)^2}{6.2^{3k}}p_1^2\frac{4-p_1^2}{2}\right](|x|^2+|y|^2) \\ & + \frac{(1-\beta)^2}{16.9^k}\frac{(4-p_1^2)^2}{4}(|x|+|y|)^2\end{aligned} \tag{4.15}$$

bulunur. $p \in \wp$ olduğundan $|p_1| \leq 2$ dir (Pommerenke, 1975). $\wp$ sınıfı rotasyon altında invaryant olduğundan $p \in [0,2]$ alınabilir. Ayrıca, $\eta = |x| \leq 1$ ve $\mu = |y| \leq 1$ için

$$T_1 = T_1(p) = \frac{(1-\beta)^2}{3.2^{3k}}\left[\left((1-\beta)^2\frac{3.2^k + 2^{2k} - 3^{k+1}}{2^{2k}} + \frac{1}{4}\right)p^4 - \frac{p^3}{2} + 2p\right] \geq 0$$

$$T_2 = T_2(p) = \frac{(1-\beta)^2p^2(4-p^2)}{2^{2k+2}}\left(\frac{1}{3.2^k} + \frac{1-\beta}{4.3^k}\right) \geq 0$$

$$T_3 = T_3(p) = \frac{(1-\beta)^2p(4-p^2)(p-2)}{24.2^{3k}} \leq 0$$

$$T_4 = T_4(p) = \frac{(1-\beta)^2}{16.9^k}\frac{(4-p^2)^2}{4} \geq 0$$

olmak üzere

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq T_1 + (\eta+\mu)T_2 + (\eta^2+\mu^2)T_3 + (\eta+\mu)^2T_4 = G(\eta,\mu)$$

yazılabilir.

Şimdi, $G(\eta,\mu)$ fonksiyonunun $[0,1]\times[0,1]$ kapalı bölgesinde maksimum değerini bulmalıyız. $p \in [0,2]$ için $T_3 < 0$ ve $T_3 + 2T_4 > 0$ olduğundan, $G_{\eta\eta}G_{\mu\mu} - G_{\eta\mu}^2 < 0$ elde edilir. Böylece, G fonksiyonu bu bölgenin içinde bir yerel maksimuma sahip olamaz. Şu halde, şimdi bu bölgenin sınırında G fonksiyonunun maksimum değerini araştırmalıyız.

$\eta = 0$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ (benzer şekilde $\mu = 0$ ve $0 \leq \eta \leq 1$) için, $G(0,\mu) = H(\mu) = (T_3+T_4)\mu^2 + T_2\mu + T_1$ elde ederiz. Bu halde iki durum söz konusudur.

1. Durum: $T_3 + T_4 \geq 0$ olsun. $0 \leq \mu \leq 1$ ve herhangi bir sabit $p\,(0 \leq p < 2)$ için $H'(\mu) = 2(T_3+T_4)\mu + T_2 > 0$ olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu demektir ki; $H(\mu)$ fonksiyonu artandır. Böylece, sabit bir $p \in [0,2)$ için, $H(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ olması durumunda alır. O halde, max $H(\mu) = H(1) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ elde edilir.

2. Durum: $T_3 + T_4 < 0$ olsun. Bu halde, $0 \leq \mu \leq 1$ ve herhangi bir sabit $p\ (0 \leq p < 2)$ için, $T_2 + 2(T_3+T_4) \geq 0$ olduğundan, $T_2 + 2(T_3+T_4) < 2(T_3+T_4)\mu + T_2 < T_2$ dir. Böylece $H'(\mu) > 0$ bulunur. Şu halde, sabit $p \in [0,2)$ için, $H(\mu)$ fonksiyonu maksimum değerini $\mu = 1$ de alır.

Ayrıca, $p = 2$ için

$$G(\eta,\mu) = \frac{(1-\beta)^2}{3.2^{3k}}\left(\frac{(1-\beta)^2(3.2^k + 2^{2k} - 3^{k+1})}{2^{2k-4}} + 4\right) \tag{4.16}$$

elde edilir. 1. ve 2. durumları ile (4.16) denklemini göz önüne aldığımızda, $0 < \mu < 1$ ve herhangi bir sabit $0 \leq p \leq 2$ için, $\max H(\mu) = H(1) = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ sonucunu elde ederiz.

$\eta = 1$ ve $0 \leq \mu \leq 1$ (benzer olarak $\mu = 1$ ve $0 \leq \eta \leq 1$) için, kolayca elde edilebileceği üzere $G(1,\mu) = F(\mu) = (T_3 + T_4)\mu^2 + (T_2 + 2T_4)\mu + T_1 + T_2 + T_3 + T_4$ dir. Bu halde, $T_3 + T_4$ ün yukarıdaki durumlarına benzer bir inceleme yapılacak olursa, $maxF(\mu) = F(1) = T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 4T_4$ bulunur.

$p \in [0,2]$ için $H(1) \leq F(1)$ olduğundan, $\max G(\eta,\mu) = G(1,1)$ dir. Böylece, G fonksiyonu bu kapalı bölgedeki maksimum değerini $\eta = 1$ ve $\mu = 1$ de alır. $K: [0,2] \to \mathbb{R}$

$$K(p) = \max G(\eta,\mu) = G(1,1) = T_1 + 2T_2 + 2T_3 + 4T_4 \tag{4.17}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Yukarıda elde ettiğimiz T_1, T_2, T_3 ve T_4 değerleri (4.17) de tanımlanan K fonksiyonunda yerine yazılacak olursa

$$K(p) = \frac{(1-\beta)^2}{2^{2k}}\left(\frac{N}{48.2^{3k}3^{2k}}p^4 + \frac{M}{3^{2k}2^{k+1}}p^2 + \frac{2^{2k}}{3^{2k}}\right)$$

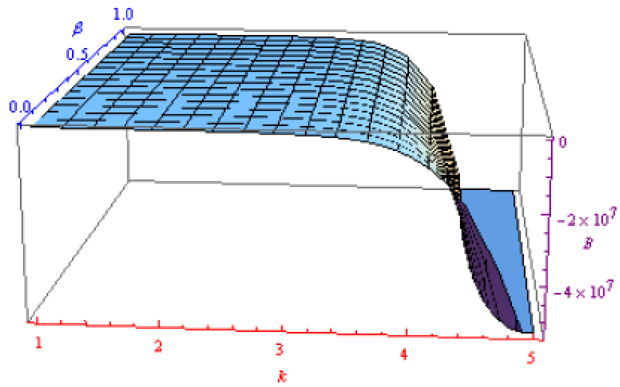
bulunur. Varsayalım ki; $K(p)$ fonksiyonu maksimum değerini $p \in [0,2]$ nin iç bölgesindeki bir noktada alsın. Bu halde, basit bazı temel hesaplamaların sonucunda

$$K'(p) = \frac{(1-\beta)^2}{2^{2k}}\left(\frac{N}{12.2^{3k}3^{2k}}p^3 + \frac{M}{2^k 3^{2k}}p\right)$$

elde ederiz. $K'(p) = 0$ denirse, bu K fonksiyonunun $p_{0_1} = 0$ ve $p_{0_2} = \sqrt{-\frac{12.2^k M}{N}}$ kritik noktalarını elde ederiz. Her $k \in \mathbb{N}$ ve her $\beta \in [0,1)$ için M nin pozitif bir reel sayı olduğu kolaylıkla görülebilir. O halde, şimdi N sayısını yorumlamalıyız. $N=0$ denkleminin köklerinden birinin

$$\beta_1 = \frac{3.2^{k+5}+2^{2k+5}-2^{3k+1}3^{1-k}-32.3^{k+1}}{2(3.2^{k+4}+2^{2k+4}-16.3^{k+1})} - \frac{2.3^{-2k}\sqrt{2^{4k+7}3^{4k}-2^{7k+4}3^{2k+1}-5.2^{6k}3^{2k+3}+2^{5k+4}3^{3k+2}+2^{3k+7}3^{4k+1}-2^{2k+7}3^{5k+1}}}{2(3.2^{k+4}+2^{2k+4}-16.3^{k+1})}$$

olduğu gösterilebilir. Bazı uzun hesaplamalardan sonra, $\beta \in [0,1)$ ve $k=1,2,3,4,5$ için N sayısının negatif bir reel sayı olduğu görülebilir (Bakınız Şekil 4.1). Ancak, elbette $k \geq 6$ $(k \in \mathbb{N})$ ve bazı $\beta \in [0,1)$ değerleri için N nin daima bir negatif reel sayı olmayacağı gösterilebilir.



Şekil 4.1. $k=1,2,3,4,5$ ve $\beta \in [0,1)$ için N bir negatif reel sayıdır.

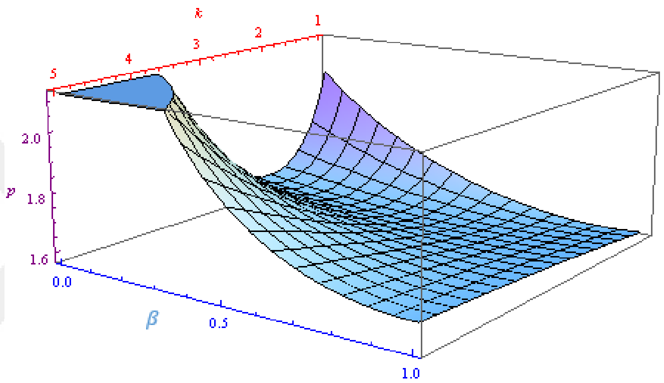
Yukarıdaki açıklamalar ışığında aşağıdaki değerlendirmeleri yapmak mümkündür.

Öncelikle, $k=1,2,3$ olması durumunu ele alalım. Bu durumda, her $\beta \in [0,1)$ için, $M>0$ ve $N<0$ olur. Her $\beta \in [0,1)$ ve $k=1,2,3$ için $p_{0_2}<2$ ve $K''(p_{0_2})<0$ olacağından, $K(p)$ maksimum değerini $p=p_{0_2}$ noktasında alır. Yani,

$$\max_{0\leq p\leq 2} K(p) = K(p_{0_2}) = \frac{(1-\beta)^2}{2^{2k}}\left(\frac{2^{2k}}{3^{2k}} - 3.2^k.\frac{M^2}{3^{2k}N}\right)$$

dir. Sonuç olarak, $K(0) < K(2) \leq K(p_{0_2})$ olduğundan max $K(p) = K(p_{0_2})$ elde edilir.

Şimdi ise $k = 4, 5$ durumlarını irdeleyelim. Bu durumda, bazı $\beta \in [0,1)$ için $p_{0_2} \geq 2$ bulunur (Bakınız Şekil 4.2). Ayrıca, Şekil 4.2 de de görüleceği üzere, $k > 3$ ($k \in \mathbb{N}$) ve bazı $\beta \in [0,1)$ değerleri için $p_{0_2} \geq 2$ ya da $p_{0_2} < 2$ dir. Tüm bu açıklamaların sonucu olarak aşağıdaki iki durum incelenmelidir.



Şekil 4.2. $k > 3$ ve bazı $\beta \in [0,1)$ değerleri için $p_{0_2} \geq 2$ ya da $p_{0_2} < 2$

1. Durum: Eğer $\beta \in [0, \beta_1{}']$ ise, bu durumda, $p_{(0_2)} \geq 2$ olur. Yani, p_{0_2}, $(0,2)$ aralığının dışındadır. Bu nedenle, K fonksiyonu $[0,2]$ aralığında artan olduğundan, K fonksiyonu maksimum değerini $p \in [0,2]$ aralığının sınırında yani $p = 2$ noktasında alır. Böylece,

$$\max_{0 \leq p \leq 2} K(p) = K(2) = \frac{(1-\beta)^2}{3^{2k+1} 2^{5k}} (N + 6.2^{2k} M + 3.2^{5k})$$

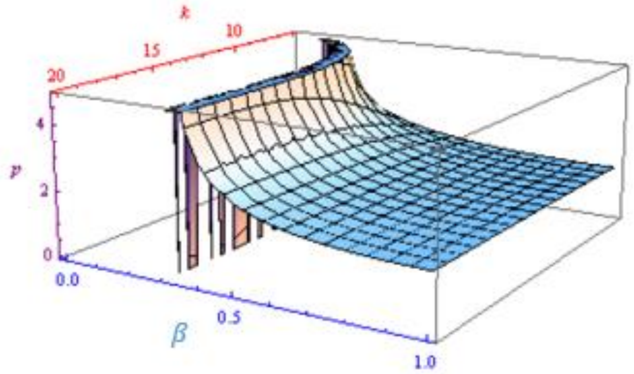
yazılır.

2. Durum: $\beta \in (\beta_1', 1)$ olduğunda, $p_{0_2} \leq 2$ olduğunu göstermek kolaydır. Yani, p_{0_2} noktası $[0,2]$ kapalı aralığının içine düşmektedir. $K''(p_{0_2}) < 0$ olacağından, $K(p)$ fonksiyonu maksimum değerini $p = p_{0_2}$ noktasında alır. Böylece,

$$\max_{0 \leq p \leq 2} K(p) = K(p_{0_2}) = \frac{(1-\beta)^2}{2^{2k}} \left(\frac{2^{2k}}{3^{2k}} - \frac{3.2^k M^2}{3^{2k} N} \right)$$

elde edilir.

Son olarak, $k \geq 6$ ve $k = 0$ olması durumlarını inceleyelim. Bu durumda, $\beta \in (\beta_1, 1)$ için N ifadesinin bir negatif reel sayı olduğu gösterilebilir (Bakınız Şekil 4.3). Dolayısıyla, p_{0_2} bir reel sayıdır. Şu halde, yine üç durum söz konusudur.



Şekil 4.3. $k \geq 6$ nın bazı değerleri için hem p hem de β gösterilmektedir.

1. Durum: $\beta \in [0, \beta_1)$ ise $N \geq 0$ olur. Dolayısıyla, $p \in (0,2)$ için $K'(p) > 0$ dır. K fonksiyonu $(0,2)$ açık aralığında artan olduğundan K maksimum değerini $p \in [0,2]$ aralığının sınırı olan $p = 2$ noktasında alır. Böylece,

$$\max_{0 \leq p \leq 2} K(p) = K(2) = \frac{(1-\beta)^2}{3^{2k+1} 2^{5k}} (N + 6.2^{2k} M + 3.2^{5k})$$

elde edilir.

2. Durum: $\beta \in [\beta_1, \beta_1{}']$ ise $p_{0_2} \geq 2$ dir. Yani, p_{0_2} noktası $(0,2)$ aralığının dışındadır. K fonksiyonu $[0,2]$ aralığında artan olduğundan, K maksimum değerine $p \in [0,2]$ aralığının sınırı olan $p = 2$ noktasında ulaşır. O halde,

$$\max_{0\leq p\leq 2} K(p) = K(2) = \frac{(1-\beta)^2}{3^{2k+1}2^{5k}}(N + 6.2^{2k}M + 3.2^{5k})$$

bulunur.

3. Durum: Eğer $\beta \in (\beta_1', 1)$ ise $p_{0_2} \leq 2$ olduğunu dolayısıyla p_{0_2} noktasının $[0,2]$ aralığının içinde yer aldığını göstermek kolaydır. $K''(p_{0_2}) < 0$ olduğundan, $p = p_{0_2}$ için $K(p)$ nin maksimum değeri elde edilmiş olur. Böylelikle,

$$\max_{0\leq p\leq 2} K(p) = K(p_{0_2}) = \frac{(1-\beta)^2}{2^{2k}}\left(\frac{2^{2k}}{3^{2k}} - \frac{3.2^k M^2}{3^{2k}N}\right)$$

sonucuna varılır. Böylece Teorem 4.1.3 ün ispatı tamamlanmış olur.

Son olarak Teorem 4.1.3 de $k = 0$ ve $k = 1$ özel değerlerine karşılık gelen durumları sırasıyla ele alacağız. Aşağıda verilen sonuçlar bununla ilgilidir.

Sonuç 4.1.4 (1.2) deki gibi tanımlanmış bir f fonksiyonu $S_\sigma^\star(\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu halde

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \dfrac{4(1-\beta)^2}{3}(4\beta^2 - 8\beta + 5), & \beta \in [0, \dfrac{29-\sqrt{137}}{32}) \\ (1-\beta)^2\left(\dfrac{13\beta^2 - 14\beta - 7}{16\beta^2 - 26\beta + 5}\right), & \beta \in [\dfrac{29-\sqrt{137}}{32}, 1) \end{cases}$$

dir (Deniz *et al.* 2015).

Sonuç 4.1.5 (1.2) deki gibi tanımlanmış bir f fonksiyonu $\mathcal{C}_\sigma(\beta)$ sınıfına ait olsun. Bu halde

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \frac{(1-\beta)^2}{24}(\frac{5\beta^2 + 8\beta - 32}{3\beta^2 - 3\beta - 4})$$

dir (Deniz *et al.* 2015).

4.2. Chebyshev Polinomlarını İçeren Bi-ünivalent Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları İçin İkinci Hankel Determinantı

Bu kısımda Chebyshev polinomlarını kullanılarak Hadamard çarpımıyla tanımlanmış fonksiyonların $\mathcal{N}_{\sigma}^{\mu,\delta}(\lambda,t)$ sınıfını tanımlayacağız ve bu sınıfa ait fonksiyonların $|a_2a_4 - a_3^2|$ ikinci Hankel determinantı için üst sınır elde edeceğiz.

Bilindiği üzere Chebyshev polinomları matematiğin birçok dalında, özellikle uygulamalı matematikte, çok önemli bir rol oynamaktadır. Esasen dört çeşit Chebyshev polinomu olmasına karşın biz bu çalışmamızda birinci ve ikinci tür Chebyshev polinomlarını ve bunlara ait bazı temel özellikleri vereceğiz. Birinci ve ikinci tür Chebyshev polinomlarını, sırasıyla, $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ ile göstereceğiz. Chebyshev polinomları ile ilgili daha detaylı bilgi için Doha (1994) ve Dziok *et al.* (2015) çalışmaları incelenebilir.

Birinci ve ikinci tür Chebyshev polinomları, $x \in (-1,1)$ olmak üzere,

$$T_n(x) = \cos(narccosx), \qquad U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)arccosx]}{\sin(arccosx)} = \frac{\sin[(n+1)arccosx]}{\sqrt{1-x^2}}$$

olarak tanımlanır. Şimdi ikinci tür Chebyshev polinomunun üreteç fonksiyonu olan

$$G(t,z) = \frac{1}{1-2tz+z^2}, \qquad t \in \left(\frac{1}{2},1\right), z \in \mathcal{U}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $t = \cos\theta$, $\theta \in (-\pi/3, \pi/3)$ denirse,

$$G(t,z) = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n+1)\,\theta}{\sin\theta} z^n$$
$$= 1 + 2\cos\theta\, z + (3\cos^2\theta - \sin^2\theta)z^2 + \cdots, \qquad (z \in \mathcal{U})$$

elde edilir. O halde, $U_n(t)$ ikinci tür Chebyshev polinomunu göstermek üzere

$$G(t,z) = 1 + U_1(t)z + U_2(t)z^2 + U_3(t)z^3 + \cdots, t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right), z \in \mathcal{U} \qquad (4.18)$$

elde edilir. İkinci tür Chebyshev polinomunun tanımından $U_1(t) = 2t$ olduğu görülebilir. Ayrıca ikici tür Chebyshev polinomları arasında

$$U_{n+1}(t) = 2tU_n(t) - U_{n-2}(t), \qquad (n \in \mathbb{N})$$

yineleme (rekürens) bağıntısı olduğundan

$$U_1(t) = 2t, \qquad U_2(t) = 4t^2 - 1, \qquad U_3(t) = 8t^3 - 4t, \ldots \qquad (4.19)$$

olduğu kolayca görülebilir.

Chebyshev polinomlarına ilişkin yukarıdaki önemli hatırlatmaları yaptıktan sonra, bu kısımdaki çalışmamızda önemli yeri olan

$$f_\delta(z) = \int_0^z \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^\delta \frac{1}{1-r^2}\, dr$$
$$= z + \delta z^2 + \frac{1}{3}(2\delta^2 + 1)z^3 + \cdots \qquad (4.20)$$
$$= z + \sum_{n\geq 2} b_n(\delta)\, z^n, \qquad (z \in \mathcal{U}, \delta \geq 1)$$

fonksiyonunun ele alalım (Trimble 1975). Dikkat edilecek olursa $\delta = 1$ için $zf_1'(z)$ fonksiyonu Koebe fonksiyonu olduğundan tüm f_δ fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde konveks ve ünivalenttir.

Şimdi (1.2) deki gibi seri açılımına sahip analitik $f(z)$ fonksiyonunu ve (4.20) de tanımlanan $f_\delta(z)$ fonksiyonlarının

$$h_\delta(z) = (f * f_\delta)(z) = z + \sum_{n\geq 2} a_n b_n(\delta)\, z^n = (f_\delta * g)(z) \tag{4.21}$$

Hadamard çarpımını göz önüne alalım.

Tanım 4.2.1 $\lambda, \delta \geq 1,\ \mu \geq 0$ ve $t \in (1/2,1]$ olmak üzere (4.21) deki gibi tanımlanmış $h_\delta \in \sigma$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda, $k_\delta = h_\delta^{-1}$ fonksiyonu (3.1) deki gibi bir seri açılımına sahip olmak üzere, her $z, w \in \mathcal{U}$ için,

$$(1-\lambda)\left(\frac{h_\delta(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda h_\delta'(z)\left(\frac{h_\delta(z)}{z}\right)^{\mu-1} \prec G(z,t) \tag{4.22}$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{k_\delta(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda k_\delta'(z)\left(\frac{k_\delta(w)}{w}\right)^{\mu-1} \prec G(w,t) \tag{4.23}$$

subordinasyon şartları sağlanıyorsa h_δ fonksiyonu $\mathcal{N}_\sigma^{\mu,\delta}(\lambda,t)$ sınıfına aittir denir.

Açıkça görülebileceği üzere $\delta = 1$ için $\mathcal{N}_\sigma^{\mu,1}(\lambda,t) = \mathcal{N}_\sigma^{\mu}(\lambda,t)$ elde edilir. $\mathcal{N}_\sigma^{\mu}(\lambda,t)$ sınıfı Bulut *et al.* (2017) tarafından çalışılmıştır.

Şimdi $\mathcal{N}_\sigma^{\mu,\delta}(\lambda,t)$ sınıfının bazı alt sınıflarını vereceğiz:

Uyarı 4.2.2 (i) $\delta = 1,\ \mu = 1$ için $\mathcal{N}_\sigma^{1,1}(\lambda, t) = \mathfrak{B}_\sigma(\lambda, t)$ sınıfı elde edilir. Eğer $f \in \sigma$ fonksiyonu $\mathfrak{B}_\sigma(\lambda, t)$ sınıfına aitse, $g = f^{-1}$ olmak üzere

$$(1-\lambda)\frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) \prec G(z,t)$$
$$(1-\lambda)\frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \prec G(w,t)$$

şartları sağlanır. $\mathfrak{B}_\sigma(\lambda, t)$ sınıfı Bulut *et al.* (2017) tarafından çalışılmıştır.

(ii) $\delta = 1,\ \lambda = 1$ için $\mathcal{N}_\sigma^{\mu,1}(1, t) = \mathfrak{B}_\sigma^{\mu}(t)$ aşağıdaki koşulları sağlayan bi-Bazilevič fonksiyonlarının sınıfı elde edilir:

$$f'(z)\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\mu-1} \prec G(z,t),$$
$$g'(w)\left(\frac{g(w)}{w}\right)^{\mu-1} \prec G(w,t).$$

(iii) $\delta = 1,\ \mu = 1,\ \lambda = 1$ için, aşağıdaki koşulları sağlayan $f \in \sigma$ fonksiyonlarından oluşan $\mathcal{N}_\sigma^{1,1}(1, t) = \mathfrak{B}_\sigma(t)$ sınıfı elde edilir.

$$f'(z) \prec G(z,t),$$
$$g'(w) \prec G(w,t).$$

(iv) $\delta = 1,\ \lambda = 1,\ \mu = 0$ için, aşağıdaki koşulları sağlayan $f \in \sigma$ fonksiyonlarından oluşan $\mathcal{N}_\sigma^{0,1}(1, t) = S_\sigma{}^{\star}(t)$ sınıfı elde edilir.

$$\frac{zf'(z)}{z} \prec G(z,t),$$
$$\frac{wg'(w)}{w} \prec G(w,t).$$

Teorem 4.2.3 (4.21**)** deki gibi verilmiş $h_\delta \in \sigma$ fonksiyonu $\mathcal{N}_\sigma^{\mu,\delta}(\lambda,t)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda,

$$|a_2a_4-a_3^2| \leq \begin{cases} \varphi(2^-,t), & \chi_1 \geq 0 \text{ ve } \chi_2 \geq 0 \\ \dfrac{36t^2}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}, & \chi_1 \leq 0 \; ve \; \chi_2 \leq 0 \\ \max\left\{\dfrac{36t^2}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}, \varphi(2^-,t)\right\}, & \chi_1 > 0 \; ve \; \chi_2 < 0 \\ \max\{\varphi(p_0,t), \varphi(2^-,t)\}, & \chi_1 < 0 \; ve \; \chi_2 > 0 \end{cases}$$

olur. Burada $p_0 = \sqrt{\frac{-18\chi_2}{\chi_1}}$ dir. Ayrıca,

$$\varphi(2^-,t) = \frac{\chi_1+9\chi_2}{6\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2(\lambda+\mu)^4} + \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2},$$

$$\varphi(p_0,t) = -\frac{27\chi_2^2}{8\chi_1\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2(\lambda+\mu)^4} + \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}$$

ve

$$\Omega_{\lambda,\mu,\delta}(t) = -U_1^3(t)(3\lambda+\mu)\{3(2\delta^2+1)^2(\mu^2+3\mu-4)+54\delta(\delta^3+2\delta)\} + 18(2\delta^2+1)^2(\lambda+\mu)^3U_3(t)$$

olmak üzere

$$\chi_1 = 18(\lambda+\mu)^3(3\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)-(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2)U_1^2(t)$$
$$-9(\lambda+\mu)^2(2\lambda+\mu)U_1(t)[(3\lambda+\mu)(8\delta^4-4\delta^2+5)U_1^2(t)$$
$$+4(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)(\lambda+\mu)U_2(t)]+(2\lambda+\mu)^2U_1(t)\left|\Omega_{\lambda,\mu,\delta}(t)\right|$$

ve

$$\chi_2 = (\lambda+\mu)^2\{(2\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)(8\delta^4-4\delta^2+5)U_1^3(t)$$
$$+(\lambda+\mu)U_1^2(t)\big(2(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2-12\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)\big)$$
$$+4(2\delta^2+1)^2(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2U_1(t)U_2(t)\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Orhan *et al.* 2017c).

İspat: $h_\delta \in \mathcal{N}_\sigma^{\mu,\delta}(\lambda,t)$ ve $k_\delta = h_\delta^{-1}$ fonksiyonu (3.1) deki gibi bir seri açılımına sahip olsun. O halde, $p, q \in \wp$ fonsiyonları

$$p(z) = \frac{1+u(z)}{1-u(z)} = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \cdots \qquad (4.24)$$

ve

$$q(w) = \frac{1+v(w)}{1-v(w)} = 1 + q_1 w + q_2 w^2 + q_3 w^3 + \cdots \qquad (4.25)$$

olmak üzere

$$(1-\lambda)\left(\frac{h_\delta(z)}{z}\right)^\mu + \lambda h_\delta'(z)\left(\frac{h_\delta(z)}{z}\right)^{\mu-1} = G(t,u(z)) \qquad (4.26)$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{k_\delta(w)}{w}\right)^\mu + \lambda k_\delta'(z)\left(\frac{k_\delta(w)}{w}\right)^{\mu-1} = G(t,v(w)) \qquad (4.27)$$

yazılır. (4.24) ve (4.25) ifadelerinden

$$u(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}=\frac{1}{2}\left(p_1z+\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)z^2+\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)z^3+\cdots\right) \qquad (4.28)$$

ve

$$v(w)=\frac{q(w)-1}{q(w)+1}=\frac{1}{2}\left(q_1w+\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)w^2+\left(q_3-q_1q_2+\frac{q_1^3}{4}\right)w^3+\cdots\right) \qquad (4.29)$$

elde edilir. Bulunan bu (4.28) ve (4.29) ifadeleri, (4.18) de verilen $G(t,z)$ fonksiyonunda kullanılacak olursa

$$\begin{aligned} G\big(t,u(z)\big)=1&+\frac{U_1(t)}{2}p_1z+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1^2\right]z^2\\ &+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)\right.\\ &\left.+\frac{U_3(t)}{8}p_1^3\right]z^3+\cdots \end{aligned} \qquad (4.30)$$

ve

$$\begin{aligned} G\big(t,v(w)\big)=1&+\frac{U_1(t)}{2}q_1w+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}q_1^2\right]w^2\\ &+\left[\frac{U_1(t)}{2}\left(q_3-q_1q_2+\frac{q_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{4}q_1\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)\right.\\ &\left.+\frac{U_3(t)}{8}q_1^3\right]w^3+\cdots \end{aligned} \qquad (4.31)$$

bulunur. (4.26) ve (4.30) eşitlikleri birlikte değerlendirildiğinde

$$(\lambda+\mu)a_2b_2(\delta)=\frac{U_1(t)}{2}p_1, \qquad (4.32)$$

$$(2\lambda+\mu)\left[a_3b_3(\delta)+(\mu-1)\frac{a_2^2b_2^2(\delta)}{2}\right]=\frac{U_1(t)}{2}\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1^2, \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned}(3\lambda+\mu)&\left[a_4b_4(\delta)+(\mu-1)a_2a_3b_2(\delta)b_3(\delta)+\frac{(\mu-1)(\mu-2)\left(a_2^3b_2^3(\delta)\right)}{6}\right]\\&=\frac{U_1(t)}{2}\left(p_3-p_1p_2+\frac{p_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{4}p_1\left(p_2-\frac{p_1^2}{2}\right)+\frac{U_3(t)}{8}p_1^3\end{aligned} \quad (4.34)$$

ve (4.27) ile (4.31) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$-(\lambda+\mu)a_2b_2(\delta)=\frac{U_1(t)}{2}q_1, \quad (4.35)$$

$$(2\lambda+\mu)\left[(\mu+3)\frac{a_2^2b_2^2(\delta)}{2}-a_3b_3(\delta)\right]=\frac{U_1(t)}{2}\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)+\frac{U_2(t)}{4}q_1^2, \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned}(3\lambda+\mu)&\left[(\mu+4)a_2a_3b_2(\delta)b_3(\delta)-(\mu+4)(\mu+5)\frac{a_2^3b_2^3(\delta)}{6}-a_4b_4(\delta)\right]\\&=\frac{U_1(t)}{2}\left(q_3-q_1q_2+\frac{q_1^3}{4}\right)+\frac{U_2(t)}{4}q_1\left(q_2-\frac{q_1^2}{2}\right)+\frac{U_3(t)}{8}q_1^3\end{aligned} \quad (4.37)$$

elde edilir. (4.32) ve (4.35) denklemlerini kullanarak

$$p_1=-q_1, \quad (4.38)$$

$$a_2=\frac{U_1(t)}{2\delta(\lambda+\mu)}p_1 \quad (4.39)$$

bulunur. Ayrıca (4.33) ve (4.36) denklemleri birbirinden çıkarılır ve elde edilen ifadede (4.38) ve (4.39) değerleri yerine yazılırsa

$$a_3 = \frac{3}{2\delta^2+1}\left[\frac{U_1^2(t)}{4(\lambda+\mu)^2}p_1^2 + \frac{U_1(t)}{4(2\lambda+\mu)}(p_2-q_2)\right] \tag{4.40}$$

elde edilir. Son olarak (4.34) ve (4.37) eşitlikleri birbirlerinden çıkarılıp elde edilen denklemde (4.38), (4.39) ve (4.40) değerleri yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned} a_4 = \frac{3}{\delta^3+2\delta}\Bigg[&\left(\frac{U_1(t)-2U_2(t)+U_3(t)}{8(3\lambda+\mu)} - \frac{(\mu^2+3\mu-4)U_1^3(t)}{48(\lambda+\mu)^3}\right)p_1^3 \\ &+ \frac{U_1(t)}{4(3\lambda+\mu)}(p_3-q_3) \\ &+ \frac{5U_1^2(t)}{16(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)}p_1(p_2-q_2) \\ &+ \frac{U_2(t)-U_1(t)}{4(3\lambda+\mu)}p_1(p_2+q_2)\Bigg] \end{aligned} \tag{4.41}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} |a_2a_4 - a_3^2| = \Bigg|&\frac{U_1(t)\Delta_{\lambda,\mu,\delta}(t)}{96\delta(2\delta^2+1)^2(\delta^3+2\delta)(3\lambda+\mu)(\lambda+\mu)^4}p_1^4 \\ &- \frac{9U_1^2(t)}{16(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}(p_2-q_2)^2 \\ &+ \frac{3U_1(t)\big(U_2(t)-U_1(t)\big)}{8\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)}p_1^2(p_2+q_2) \\ &+ \frac{3U_1^2(t)}{8\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)}p_1(p_3-q_3) \\ &+ \frac{U_1^3(t)\big(15(2\delta^2+1)^2-36\delta(\delta^3+2\delta)\big)}{32\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(\lambda+\mu)^2(2\lambda+\mu)}p_1^2(p_2-q_2)\Bigg| \end{aligned} \tag{4.42}$$

olduğu görülebilir. Yukarıda (4.42) denkleminde verilen $\Delta_{\lambda,\mu,\delta}(t)$

$$\Delta_{\lambda,\mu,\delta}(t) = 18(2\delta^2+1)^2(\lambda+\mu)^3\big(U_1(t) - 2U_2(t) + U_3(t)\big)$$
$$- U_1^3(t)(3\lambda+\mu)\big(3(2\delta^2+1)^2(\mu^2+3\mu-4) + 54\delta(\delta^3+2\delta)\big)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

Ayrıca Lemma 2.3.20 ve (4.38) eşitliği kullanılarak, $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$ ve $|w| \leq 1$ olmak üzere, bazı x, y, z ve w değerleri için,

$$p_2 - q_2 = \frac{4-p_1^2}{2}(x-y), \tag{4.43}$$

$$p_2 + q_2 = p_1^2 + \frac{4-p_1^2}{2}(x+y), \tag{4.44}$$

$$\begin{aligned} p_3 - q_3 = {} & \frac{p_1^3}{2} + \frac{(4-p_1^2)p_1}{2}(x+y) - \frac{(4-p_1^2)p_1}{4}(x^2+y^2) \\ & + \frac{4-p_1^2}{2}\left[(1-|x|^2)z - (1-|y|^2)w\right] \end{aligned} \tag{4.45}$$

olur. Yukarıda elde ettiğimiz (4.43), (4.44) ve (4.45) değerleri (4.42) de verilen ikinci Hankel fonksiyonelinde yerine yazılır ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\Omega_{\lambda,\mu,\delta}(t) = 18(2\delta^2+1)^2(\lambda+\mu)^3U_3(t)$$
$$- U_1^3(t)(3\lambda+\mu)\big(3(2\delta^2+1)^2(\mu^2+3\mu-4) + 54\delta(\delta^3+2\delta)\big)$$

olmak üzere

$$\left|a_2a_4 - a_3^2\right| \leq \frac{U_1(t)\left|\Omega_{\lambda,\mu,\delta}(t)\right|}{96\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(\lambda+\mu)^4}p_1^4 + \frac{3U_1^2(t)p_1(4-p_1^2)}{8\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)}$$
$$+\left[\frac{\big(15(2\delta^2+1)^2 - 36\delta(\delta^3+2\delta)\big)U_1^3(t)p_1^2(4-p_1^2)}{64\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(\lambda+\mu)^2(2\lambda+\mu)} + \frac{3U_1(t)U_2(t)p_1^2(4-p_1^2)}{16\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)}\right](|x|+|y|)$$

$$+\left[\frac{3U_1^2(t)p_1^2(4-p_1^2)}{32\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)}-\frac{3U_1^2(t)p_1(4-p_1^2)}{16\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)}\right](|x|^2+|y|^2)$$
$$+\frac{9U_1^2(t)(4-p_1^2)^2}{64(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}(|x|+|y|)^2$$

elde edilir. $\wp$ sınıfı rotasyon altında değişmediğinden, genelliği bozmadan, $p_1 := p \in [0,2]$ alınabilir. Böylece $\gamma_1 = |x| \leq 1$ ve $\gamma_2 = |y| \leq 1$ için

$$\kappa_1 = \frac{U_1(t)\left|\Omega_{\lambda,\mu,\delta}(t)\right|}{96\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(\lambda+\mu)^4}p^4 + \frac{3U_1^2(t)p(4-p^2)}{8\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)} \geq 0$$
$$\kappa_2 = \left[\frac{\left(15(2\delta^2+1)^2-36\delta(\delta^3+2\delta)\right)U_1^3p^2(4-p^2)}{64\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)}+\frac{3U_1(t)U_2(t)p^2(4-p^2)}{16\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)}\right] \geq 0$$
$$\kappa_3 = \frac{3U_1^2(t)p(p-2)(4-p^2)}{32\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)} \leq 0$$
$$\kappa_4 = \frac{9U_1^2(t)(4-p^2)^2}{64(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2} \geq 0$$

olmak üzere

$$|a_2a_4-a_3^2| \leq \kappa_1+\kappa_2(\gamma_1+\gamma_2)+\kappa_3(\gamma_1^2+\gamma_2^2)+\kappa_4(\gamma_1+\gamma_2)^2 = \psi(\gamma_1,\gamma_2)$$

elde edilir. Şimdi $\mathbb{S} = \{(\gamma_1,\gamma_2): 0 \leq \gamma_1 \leq 1,\ 0 \leq \gamma_2 \leq 1\}$ kapalı karesini göz önüne alalım. O halde, $p \in [0,2]$ için, $\mathbb{S}$ kapalı karesinde $\psi(\gamma_1,\gamma_2)$ fonksiyonunun maksimize etmeliyiz. $t \in (\frac{1}{2},1)$ ve $p \in (0,2)$ için, $\kappa_3 \leq 0$ ve $\kappa_3+2\kappa_4 \geq 0$ olduğundan, $\gamma_1,\gamma_2 \in \mathbb{S}$ için,

$$\psi_{\gamma_1\gamma_1}\psi_{\gamma_2\gamma_2}-\left(\psi_{\gamma_1\gamma_2}\right)^2 = 4(\kappa_3+\kappa_4)^2-4\kappa_4^2 = 4\kappa_3(\kappa_3+2\kappa_4) < 0$$

elde ederiz. Bu halde ψ fonksiyonu $\mathbb{S}$ karesinin iç bölgesinde yerel maksimuma sahip olamaz. Şimdi $\mathbb{S}$ karesinin sınırında ψ fonksiyonunun maksimumunu araştıralım.

$\gamma_1 = 0$ ve $0 \le \gamma_2 \le 1$ (ya da $\gamma_2 = 0$ ve $0 \le \gamma_1 \le 1$) için

$$\psi(0, \gamma_2) = \phi(\gamma_2) = \kappa_1 + \kappa_2\gamma_2 + (\kappa_3 + \kappa_4)\gamma_2^2$$

bulunur. Bu halde iki farklı durum karşımıza çıkar. Şimdi bu durumları ayrı ayrı ele alalım.

1. Durum: $\kappa_3 + \kappa_4 \ge 0$ olsun. O halde, $0 < \gamma_2 < 1$, $0 \le p < 2$ ve $\frac{1}{2} < t < 1$ için $\phi'(\gamma_2) = 2(\kappa_3 + \kappa_4)\gamma_2 + \kappa_2 > 0$ olur. Yani, $\phi(\gamma_2)$ artan bir fonksiyondur. Böylece $\phi(\gamma_2)$ fonksiyonu maksimum değerine $\gamma_2 = 1$ noktasında ulaşır ve

$$\max\big(\phi(\gamma_2)\big) = \phi(1) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$$

olur.

2. Durum: $\kappa_3 + \kappa_4 < 0$ olsun. Bu durumda, $0 < \gamma_2 < 1$, $0 \le p < 2$ ve $\frac{1}{2} < t < 1$ için $\kappa_2 + 2(\kappa_3 + \kappa_4) \ge 0$ olacağından, $\kappa_2 + 2(\kappa_3 + \kappa_4) < 2(\kappa_3 + \kappa_4)\gamma_2 + \kappa_2 < \kappa_2$ olduğu göz önüne alınarak, $\phi'(\gamma_2) > 0$ olur. Böylelikle $\phi(\gamma_2)$ fonksiyonu maksimum değerine $\gamma_2 = 1$ de ulaşır.

Şimdi ise $\gamma_1 = 1$ ve $0 \le \gamma_2 \le 1$ (ya da $\gamma_2 = 1$ ve $0 \le \gamma_1 \le 1$) olması durumunu ele alalım. Bu durumda,

$$\psi(1, \gamma_2) = \Psi(\gamma_2) = (\kappa_3 + \kappa_4)\gamma_2^2 + (\kappa_2 + 2\kappa_4)\gamma_2 + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$$

elde edilir. $\kappa_3 + \kappa_4$ için yukarıda verilen durumlar dikkate alındığında

$$\max \Psi(\gamma_2) = \Psi(1) = \kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + 4\kappa_4$$

olur. $p \in (0,2)$ ve $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ için $\phi(1) \leq \Psi(1)$ olduğundan, $\mathbb{S}$ karesinin sınırında

$$\max\big(\psi(\gamma_1, \gamma_2)\big) = \psi(1,1)$$

bulunur. Böylece, $\mathbb{S}$ kapalı karesinde, ψ fonksiyonu maksimum değerini $\gamma_1 = 1$ ve $\gamma_2 = 1$ de alır.

Şimdi, t nin sabit değerleri için

$$\varphi(p,t) = \max\big(\psi(\gamma_1, \gamma_2)\big) = \psi(1,1) = \kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 + 4\kappa_4 \qquad (4.46)$$

$\varphi: [0,2] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu tanımlayalım. κ_1, κ_2, κ_3 ve κ_4 değerleri (4.46) da tanımlanan φ fonksiyonunda yerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned}\chi_1 = 18(\lambda+\mu)^3(3\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu) - (2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2)U_1^2(t) \\ - 9(\lambda+\mu)^2(2\lambda+\mu)U_1(t)[(3\lambda+\mu)(8\delta^4-4\delta^2+5)U_1^2(t) \\ + 4(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)(\lambda+\mu)U_2(t)] + (2\lambda+\mu)^2U_1(t)\left|\Omega_{\lambda,\mu,\delta}(t)\right|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_2 = (\lambda+\mu)^2\{(2\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)(8\delta^4-4\delta^2+5)U_1^3(t) \\ +(\lambda+\mu)U_1^2(t)\big(2(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2 - 12\delta(\delta^3+2\delta)(\lambda+\mu)(3\lambda+\mu)\big) \\ +4(2\delta^2+1)^2(\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2U_1(t)U_2(t)\}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\varphi(p,t) = \frac{\chi_1 p^4 + 36\chi_2 p^2}{96\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2(\lambda+\mu)^4} + \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}$$

elde edilir. $\varphi(p,t)$ fonksiyonunun maksimum değerini $p \in [0,2]$ nin iç noktasında aldığını varsayarsak, bir dizi hesaplamalar sonucunda,

$$\varphi'(p,t) = \frac{\chi_1 p^3 + 18\chi_2 p}{24\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2(\lambda+\mu)^4}$$

bulunur. Bu halde, χ_1 ve χ_2 aşağıda verilen durumlarına bağlı olarak $\varphi'(p,t)$ fonksiyonunun işaretini incelemeliyiz.

(1) $\chi_1 \geq 0$ ve $\chi_2 \geq 0$ olsun. Bu durumda, $\varphi'(p,t) \geq 0$ olur. Böylece $\varphi(p,t)$ artan bir fonksiyondur. Böylece

$$\begin{aligned}\max\{\varphi(p,t): p \in (0,2)\} &= \varphi(2^-,t)\\ &= \frac{\chi_1 + 9\chi_2}{6\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2(\lambda+\mu)^4}\\ &\quad + \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. Bir başa ifadeyle

$$\max\left\{\max\{\psi(\gamma_1,\gamma_2): 0 \leq \gamma_1,\gamma_2 \leq 1\}: 0 < p < 2\right\} = \varphi(2^-,t)$$

olduğu görülür.

(2) $\chi_1 \leq 0$ ve $\chi_2 \leq 0$ olsun. Bu durumda, $\varphi'(p,t) \leq 0$ olup $\varphi(p,t)$ fonksiyonu (0,2) aralığında azalan bir fonksiyondur. Bu halde

$$\max\{\varphi(p,t): p \in (0,2)\} = \varphi(0^+,t) = 4\kappa_4 = \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2} \tag{4.48}$$

olur.

(3) $\chi_1 > 0$ ve $\chi_2 < 0$ olsun. Bu halde $p_0 = \sqrt{\frac{-18\chi_2}{\chi_1}}$, $\varphi(p,t)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır. $p_0 \in (0,2)$ olmak üzere $\varphi''(p_0,t) > 0$ olduğundan, p_0 noktası $\varphi(p,t)$ fonksiyonunun yerel minimum noktasıdır. Yani, $\varphi(p,t)$ fonksiyonu yerel maksimuma sahip olamaz.

(4) $\chi_1 < 0$ ve $\chi_2 > 0$ olsun. O halde, p_0 noktası $\varphi(p,t)$ fonksiyonunun kritik noktasıdır. $p_0 \in (0,2)$ olmak üzere $\varphi''(p_0,t) < 0$ olacağından p_0 noktası $\varphi(p,t)$ fonksiyonunun yerel maksimum noktasıdır. Yani, $\varphi(p,t)$ fonksiyonu maksimum değerini $p = p_0$ noktasında alır. Bir başka ifadeyle

$$\varphi(p_0,t) = -\frac{27\chi_2^2}{8\chi_1\delta(\delta^3+2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+\mu)(2\lambda+\mu)^2(\lambda+\mu)^4} + \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}$$

olmak üzere

$$\max\{\varphi(p,t): p \in (0,2)\} = \varphi(p_0,t) \qquad (4.49)$$

dir.

(4.47), (4.48) ve (4.49) dikkate alındığında Teorem 4.2.3 ispatlanmış olur.

Şimdi Teorem 4.2.3 de λ, μ ve δ nın bazı değerleri için elde edilen bir kısım sonuçları vereceğiz.

Teorem 4.2.3 de $\mu = 1$ alınacak olursa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2.4 (4.20) deki gibi tanımlanmış $h_\delta \in \sigma$ fonksiyonu $\mathfrak{B}_\sigma^\delta(\lambda,t)$ sınıfına ait olsun. O halde,

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \varphi(2^-, t), & \chi_3 \geq 0 \text{ ve } \chi_4 \geq 0 \\ \dfrac{36t^2}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}, & \chi_3 \leq 0 \; ve \; \chi_4 \leq 0 \\ \max\left\{\dfrac{36t^2}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+\mu)^2}, \varphi(2^-, t)\right\}, & \chi_3 > 0 \; ve \; \chi_4 < 0 \\ \max\{\varphi(p_0, t), \varphi(2^-, t)\}, & \chi_3 < 0 \; ve \; \chi_4 > 0 \end{cases}$$

olur. Burada $p_0 = \sqrt{\frac{-18\chi_4}{\chi_3}}$ ve $\chi_3 = \chi_1(\lambda, \mu = 1, \delta; t)$, $\chi_4 = \chi_3(\lambda, \mu = 1, \delta; t)$ olmak üzere

$$\varphi(2^-, t) = \frac{\chi_3 + 9\chi_4}{6\delta(\delta^3 + 2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+1)(2\lambda+1)^2(\lambda+1)^4} + \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+1)^2},$$

$$\varphi(p_0, t) = -\frac{27\chi_4^2}{8\chi_3\delta(\delta^3 + 2\delta)(2\delta^2+1)^2(3\lambda+1)(2\lambda+1)^2(\lambda+1)^4} + \frac{9U_1^2(t)}{(2\delta^2+1)^2(2\lambda+1)^2}$$

elde edilir (Orhan *et al.* 2017c).

Teorem 4.2.3 de $\lambda = 1$ ve $\mu = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2.5 (4.20) deki gibi tanımlanmış $h_\delta \in \sigma$ fonksiyonu $\mathfrak{B}_\sigma^\delta(t)$ sınıfına ait olsun. O halde,

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \varphi(2^-, t), & \dfrac{1}{2} < t \leq t_0 \\ \varphi(p_0, t), & t_0 < t < 1 \end{cases}$$

olur. Burada

$$\varphi(2^-,t)=\frac{3t^2((2\delta^2+1)^2)-t(5\delta^4+2\delta^2+2)}{(\delta^2+2)(2\delta^3+\delta)^2},$$

$$\begin{aligned}\nabla_{(a,b,c);(d,e,f)}^{(m,n,r)}(\delta;t)&=\nabla_{(a,b,c);(d,e,f)}^{m,n,r}\\&=m(2\delta^2+1)^2+nt(a+bt^2+ct^4)+rt^2(d+et^2+ft^4)\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\varphi(p_0,t)=\frac{-t\left(\nabla_{(4,20,-3);(22,40,64)}^{(3,1,-1)}\right)^2}{\delta(2\delta^2+1)^2(\delta^3+2\delta)\left(\nabla_{(-4,4,3);(22,40,64)}^{(3,1,-1)}+6t|t(5\delta^4+2\delta^2+2)-(2\delta^2+1)^2|\right)}+\frac{4t^2}{(2\delta^2+1)^2}$$

olarak tanımlanmıştır. Ayrıca, t_0 değeri, $\lambda=\mu=1$ ve $\frac{1}{2}<t<1$ için, $\chi_1=0$ denkleminin köküdür (Orhan *et al.* 2017c).

Sonuç 4.2.5 de $\delta=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2.6 (4.20) deki gibi tanımlanmış $h_\delta\in\sigma$ fonksiyonu $\mathfrak{B}_\sigma(t)$ sınıfına ait olsun. O halde,

$$|a_2a_4-a_3^2|\le\begin{cases}t^2(1-t^2), & \frac{1}{2}<t\le t_{0_1}\\ \dfrac{t(260t^4+84t^3-139t^2-18t+9)}{8(18t^3+42t^2-17t-9)}, & t_{0_1}<t<1\end{cases}$$

olur. $t_{0_1}=0.603615$ değeri, $\lambda=1$, $\delta=1$, $\mu=1$ ve $\frac{1}{2}<t<1$ için, $\chi_1=0$ denkleminin köküdür (Orhan *et al.* 2017a).

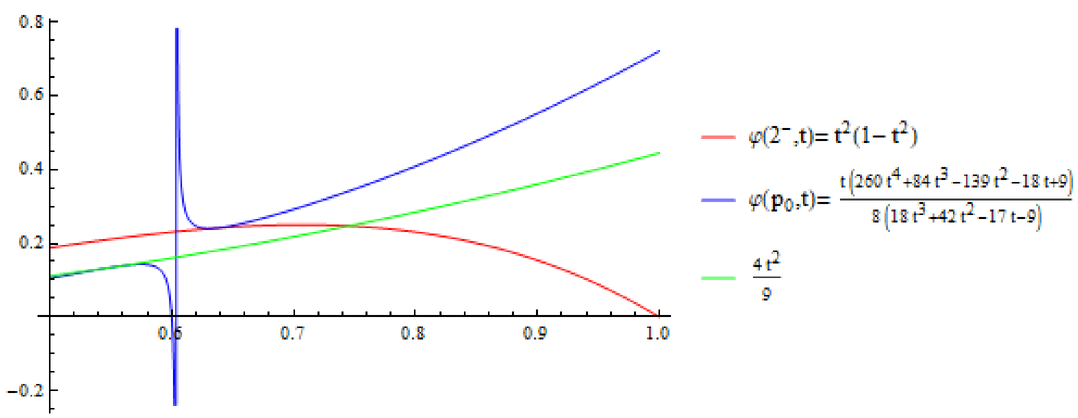
İspat: Teorem 4.2.3 de $\delta = \mu = \lambda = 1$ alınır ve $\frac{1}{2} < t < \frac{7+\sqrt{1561}}{84}$ için $\chi_1 > 0$, $\chi_2 < 0$; $\frac{7+\sqrt{1561}}{84} < t < t_{0_1} = 0.603615$ için $\chi_1 > 0$, $\chi_2 > 0$; $t_{0_1} < t < 1$ için $\chi_1 < 0$, $\chi_2 > 0$ olduğu göz önüne alınır ve Şekil 4.4 incelenirse

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \max\left\{\frac{4t^2}{9}, \varphi(2^-, t)\right\} = \varphi(2^-, t), & \frac{1}{2} < t < \frac{7+\sqrt{1561}}{84} \\ \varphi(2^-, t), & \frac{7+\sqrt{1561}}{84} < t < t_{0_1} \\ \max\{\varphi(p_0, t), \varphi(2^-, t)\} = \varphi(p_0, t), & t_{0_1} < t < 1 \end{cases}$$

ve

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} t^2(1-t^2), & \frac{1}{2} < t \leq t_{0_1} \\ \frac{t(260t^4 + 84t^3 - 139t^2 - 18t + 9)}{8(18t^3 + 42t^2 - 17t - 9)}, & t_{0_1} < t < 1 \end{cases}$$

elde edilir.



Şekil 4.4. $\delta = \mu = \lambda = 1$ için $\varphi(2^-, t)$, $\frac{4t^2}{9}$ ve $\varphi(p_0, t)$ fonksiyonlarının durumu

Şimdi, Teorem 4.2.3 de $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ alınırsa aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 4.2.7 (4.20) deki gibi tanımlanmış $h_\delta \in \sigma$ fonksiyonu $S_\sigma^{\star\,\delta}(t)$ sınıfına ait olsun. O halde,

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \varphi(2^-, t), & \frac{1}{2} < t \leq t_{0_2} \\ \varphi(p_0, t), & t_{0_2} < t < 1 \end{cases}$$

elde edilir. Burada

$$\varphi(2^-, t) = \frac{8t^2((2\delta^2+1)^2 - 6t^2(\delta^2-1)^2)}{(2\delta^3+\delta)^2(\delta^2+2)},$$

$$\varphi(p_0, t) = -\frac{t\left(\nabla_{(-2,10,1);(23,20,56)}^{(-2,-1,1)}\right)^2}{\delta(2\delta^2+1)^2(\delta^3+2\delta)\left(\nabla_{(4,-2,7);(23,20,56)}^{(-4,1,2)} - 8t|6t^2(\delta^2-1)^2 - (2\delta^2+1)^2|\right)} + \frac{9t^2}{(2\delta^2+1)^2}$$

ve t_{0_2} değeri, $\lambda = 1$, $\mu = 0$ ve $\frac{1}{2} < t < 1$ için, $\chi_1 = 0$ denkleminin köküdür (Orhan *et al.* 2017c).

Sonuç 4.2.7 de $\delta = 1$ alınacak olursa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2.8 (4.20) deki gibi tanımlanmış $h_\delta \in \sigma$ fonksiyonu $S_\sigma^\star(t)$ sınıfına ait olsun. O halde,

$$|a_2a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \dfrac{8t^2}{3}, & \dfrac{1}{2} < t \leq \dfrac{7+\sqrt{401}}{44} \\ t^2 + \dfrac{t(2+t-11t^2)^2}{3(-4-7t+22t^2)}, & \dfrac{7+\sqrt{401}}{44} < t < 1 \end{cases}$$

elde edilir (Orhan *et al.* 2017a).

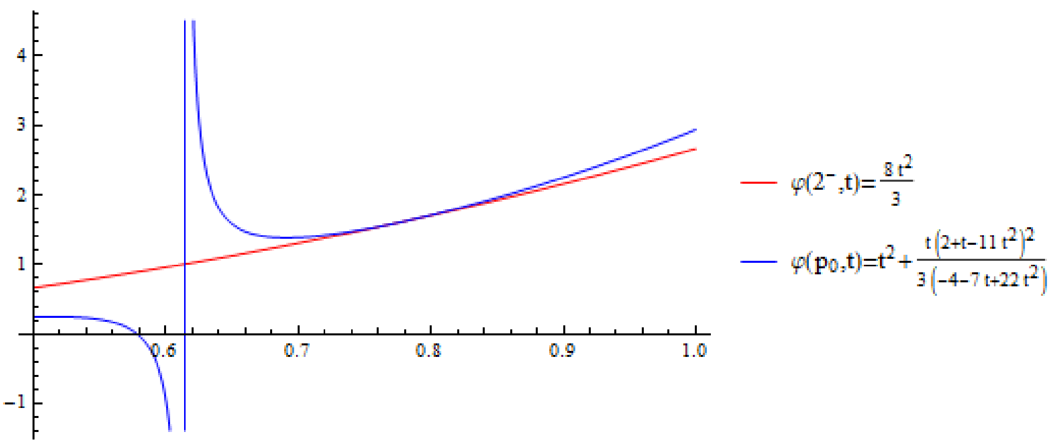
İspat: Teorem 4.2.3 de $\delta = \lambda = 1$ ve $\mu = 0$ olarak seçilsin (ya da Sonuç 4.2.7 de $\delta = 1$ seçelim). Bu durumda, $\frac{1}{2} < t < 1$ için $\chi_2 > 0$; $\frac{1}{2} < t \leq \frac{7+\sqrt{401}}{44}$ için $\chi_1 > 0$ ve $\frac{7+\sqrt{401}}{44} < t < 1$ için $\chi_1 < 0$ olur. Bu halde

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \varphi(2^-, t), & \frac{1}{2} < t \leq \frac{7+\sqrt{401}}{44} \\ \max\{\varphi(p_0, t), \varphi(2^-, t)\}, & \frac{7+\sqrt{401}}{44} < t < 1 \end{cases}$$

olup, Şekil 4.5 dikkate alındığında

$$|a_2 a_4 - a_3^2| \leq \begin{cases} \frac{8t^2}{3}, & \frac{1}{2} < t \leq \frac{7+\sqrt{401}}{44} \\ t^2 + \frac{t(2+t-11t^2)^2}{3(-4-7t+22t^2)}, & \frac{7+\sqrt{401}}{44} < t < 1 \end{cases}$$

elde edilir.



Şekil 4.5. $\delta = 1$, $\lambda = 1$ ve $\mu = 0$ için $\varphi(2^-, t)$ ve $\varphi(p_0, t)$ fonksiyonlarının durumu

4.3. Wright Fonksiyonunun Yıldızıllık ve Konvekslik Yarıçapları

Bu kısımda (3.4) deki gibi tanımlanmış Wright fonksiyonunun geometrik özelliklerini ele alacağız. Aşağıda verilen Lemma 4.3.1 bu kısımdaki çalışmalarımızın temelini oluşturması bakımından oldukça önemlidir.

Lemma 4.3.1 (i) Eğer $\rho > 0$ ve $\beta > 0$ ise $z \mapsto \lambda_{\rho,\beta}(z) = \phi(\rho, \beta, -z^2)$ fonksiyonu tamamı reel olan sonsuz sayıda sıfıra sahiptir.

(ii) $\lambda_{\rho,\beta,n}$, $\phi(\rho, \beta, -z^2)$ fonksiyonunun n yinci sıfırını göstermek üzere,

$$\Gamma(\beta)\phi(\rho, \beta, -z^2) = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2}\right)$$

Weierstrass çarpımı geçerli olup bu çarpım kompleks düzlemin kompakt alt kümelerinde düzgün yakınsaktır.

(iii) Ayrıca, $\Psi_{\rho,\beta}(z) = z^\beta \lambda_{\rho,\beta}(z)$ olmak üzere, $\zeta'_{\rho,\beta,n}$ ile $\Psi'_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun n yinci sıfırını gösterelim. Bu durumda, $\Psi'_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun ardışık iki pozitif sıfırı arasında $\lambda_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun yalnız bir pozitif sıfırı (ya da $\Psi_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun pozitif reel sıfırı) vardır. Bir başka ifadeyle, bu fonksiyonların sıfırları arasında

$$\zeta'_{\rho,\beta,1} < \lambda_{\rho,\beta,1} < \zeta'_{\rho,\beta,2} < \lambda_{\rho,\beta,2} < \cdots$$

eşitsizlik zinciri geçerlidir (Baricz *et al.* 2017).

İspat: (i) Fonksiyonun sıfırlarının reel olduğunu Baricz and Singh (2017) çalışmasına benzer yaklaşımlar kullanarak göstermek mümkündür. $\phi(\rho, \beta, .)$ tam fonksiyonunun büyüme mertebesi, (3.7) de hesaplandığı üzere, $(1+\rho)^{-1}$ olup bu değer $(0,1)$ aralığında olduğundan Wright fonksiyonu sonsuz sayıda sıfıra sahiptir.

(ii) Ayrıca, Wright fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan, Hadamard çarpım teoremi gereğince, Lemma 4.3.1 deki gibi bir sonsuz çarpım temsiline sahiptir.

(iii) Bu sonsuz çarpım temsilini kullanarak,

$$\frac{\Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)}=\frac{\beta}{z}+\frac{\lambda'_{\rho,\beta}(z)}{\lambda_{\rho,\beta}(z)}=\frac{\beta}{z}+\sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2-\lambda^2_{\rho,\beta,n}} \tag{4.50}$$

elde edilir. (4.50) eşitliğinin her iki yanının diferansiyelini alırsak

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)}\right)=-\frac{\beta}{z^2}-2\sum_{n\geq 1}\frac{z^2+\lambda^2_{\rho,\beta,n}}{\left(z^2-\lambda^2_{\rho,\beta,n}\right)^2}, \qquad z\neq\lambda_{\rho,\beta,n}$$

bulunur. $\rho,\beta>0$ ve reel z değerleri için, yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı negatif bir reel sayı olduğundan $\left(\lambda_{\rho,\beta,n},\lambda_{\rho,\beta,n+1}\right), n\in\mathbb{N}$ açık aralığındaki reel değerler için z arrtıkça $\Psi'_{\rho,\beta}/\Psi_{\rho,\beta}$ oranı $+\infty$ dan $-\infty$ a azalan bir fonksiyondur. Bu halde, $\Psi'_{\rho,\beta}$ fonksiyonu $\lambda_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı arasında sadece bir kez sıfır değerini alır. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Açıkça görülebileceği üzere $z\mapsto\phi(\rho,\beta,-z^2)$ fonksiyonu $\mathcal{A}$ sınıfına ait değildir. Bu halde, öncelikle bu fonksiyonu normalize etmeliyiz. Aşağıdaki gibi tanımlanan ve $\phi(\rho,\beta,.)$ fonksiyonundan türetilen

$$f_{\rho,\beta}(z)=\left(z^{\beta}\Gamma(\beta)\phi(\rho,\beta,-z^2)\right)^{\frac{1}{\beta}},$$
$$g_{\rho,\beta}(z)=z\Gamma(\beta)\phi(\rho,\beta,-z^2),$$
$$h_{\rho,\beta}(z)=z\Gamma(\beta)\phi(\rho,\beta,-z),$$

fonksiyonlarının her biri $\mathcal{A}$ sınıfına aittir. Elbette, Wright fonksiyonunu daha başka şekillerde normalize etmek mümkündür. Ancak, literatürde Bessel fonksiyonları için yukarıdaki normalizasyonlara benzer fonksiyonlarla çalışıldığından dolayı bizde bu üç fonksiyon üzerinde çalışmaya odaklandık.

4.3.1. $f_{\rho,\beta}$, $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ Fonksiyonlarının α mertebeden Yıldızıllık Yarıçapları

Bu kısımdaki amacımız, normalize edilmiş Wright fonksiyonları olan $f_{\rho,\beta}$, $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonlarının yıldızıllık yarıçapları için elde ettiğimiz bazı sonuçları vermektir. Bu kısımda ilk olarak, normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının α mertebeden yıldızıllık yarıçaplarının bazı transandantal denklemlerin çözümleri olduğunu göreceğiz. Daha sonra, bu fonksiyonların sıfır mertebeden yıldızıllık yarıçapları için alt ve üst sınırlar vereceğiz.

Teorem 4.3.2 (Baricz *et al.* 2017) $\rho > 0$, $\beta > 0$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda,

a. $f_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun α mertebeden yıldızıllık yarıçapı $r_\alpha^\star(f_{\rho,\beta}) = x_{\rho,\beta,1}$ olup, $x_{\rho,\beta,1}$ sayısı

$$r\lambda'_{\rho,\beta}(r) - (\alpha - 1)\beta\lambda_{\rho,\beta}(r) = 0$$

transandantal denklemin en küçük pozitif sıfırıdır.

b. $g_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun α mertebeden yıldızıllık yarıçapı $r_\alpha^\star(g_{\rho,\beta}) = y_{\rho,\beta,1}$ olup, $y_{\rho,\beta,1}$ sayısı

$$r\lambda'_{\rho,\beta}(r) - (\alpha - 1)\lambda_{\rho,\beta}(r) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif sıfırıdır.

c. $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun α mertebeden yıldızıllık yarıçapı $r_{\alpha}^{\star}(h_{\rho,\beta}) = z_{\rho,\beta,1}$ olup, $z_{\rho,\beta,1}$ sayısı

$$\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - 2(\alpha - 1)\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) = 0$$

transandantal denkleminin en küçük pozitif sıfırıdır.

İspat $z \in \mathcal{U}_{x_{\rho,\beta,1}}(f_{\rho,\beta})$, $z \in \mathcal{U}_{y_{\rho,\beta,1}}(g_{\rho,\beta})$ ve $z \in \mathcal{U}_{z_{\rho,\beta,1}}(h_{\rho,\beta})$ için, sırasıyla,

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) \geq \alpha,\ Re\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) \geq \alpha \text{ ve } Re\left(\frac{zh'(z)}{h(z)}\right) \geq \alpha \tag{4.51}$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğunu ve bu eşitsizliklerin her birinin başka daha büyük disklerde geçerli olamayacağını göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} f_{\rho,\beta}(z) &= \left(z^{\beta}\Gamma(\beta)\phi(\rho,\beta,-z^2)\right)^{\frac{1}{\beta}}, \\ g_{\rho,\beta}(z) &= z\Gamma(\beta)\phi(\rho,\beta,-z^2), \\ h_{\rho,\beta}(z) &= z\Gamma(\beta)\phi(\rho,\beta,-z), \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Bu fonksiyonların her birinin logaritmik türevi alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)} &= 1 + \frac{1}{\beta}\left(\frac{z\lambda'_{\rho,\beta}(z)}{\lambda_{\rho,\beta}(z)}\right) = 1 - \frac{1}{\beta}\sum_{n\geq 1}\frac{2z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2}, \\ \frac{zg'_{\rho,\beta}(z)}{g_{\rho,\beta}(z)} &= 1 + \left(\frac{z\lambda'_{\rho,\beta}(z)}{\lambda_{\rho,\beta}(z)}\right) = 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{2z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2}, \\ \frac{zh'_{\rho,\beta}(z)}{h_{\rho,\beta}(z)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{z}\frac{\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{z})}{\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{z})}\right) = 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{z}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, $z \in \mathbb{C}$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ sayıları için $\theta > |z|$ ise

$$\frac{|z|}{\theta - |z|} \geq Re(\frac{z}{\theta - z}) \tag{4.52}$$

olduğunu biliyoruz (Baricz *et al.* 2014). Bu durumda, her $\rho > 0$, $\beta > 0$, $n \in \mathbb{N}$ ve $|z| < \lambda_{\rho,\beta,n}$ için

$$\frac{|z|^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2} \geq Re\left(\frac{z^2}{\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2}\right)$$

eşitsizliği geçerli olur. Böylece

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)}\right) &= 1 - \frac{1}{\beta} Re\left(\sum_{n\geq1} \frac{2z^2}{\left(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2\right)}\right) \\ &\geq 1 - \frac{1}{\beta}\sum_{n\geq1} \frac{2|z|^2}{\left(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2\right)} = \frac{|z|f'_{\rho,\beta}(|z|)}{f_{\rho,\beta}(|z|)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{zg'_{\rho,\beta}(z)}{g_{\rho,\beta}(z)}\right) &= 1 - Re\left(\sum_{n\geq1} \frac{2z^2}{\left(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z^2\right)}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{n\geq1} \frac{2|z|^2}{\left(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|^2\right)} = \frac{|z|g'_{\rho,\beta}(|z|)}{g_{\rho,\beta}(|z|)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{zh'_{\rho,\beta}(z)}{h_{\rho,\beta}(z)}\right) &= 1 - Re\left(\sum_{n\geq1} \frac{z}{\left(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - z\right)}\right) \\ &\geq 1 - \sum_{n\geq1} \frac{|z|}{\left(\lambda_{\rho,\beta,n}^2 - |z|\right)} = \frac{|z|h'_{\rho,\beta}(|z|)}{h_{\rho,\beta}(|z|)} \end{aligned}$$

elde edilir ve eşitlik hali sadece $z = |z| = r$ olduğunda geçerlidir. Bu son eşitsizlikler ve harmonik fonksiyonlar için minimum prensibinden dolayı, (4.51) eşitsizliklerinin geçerli olması için gerek ve yeter şart, $x_{\rho,\beta,1}$, $y_{\rho,\beta,1}$ ve $z_{\rho,\beta,1}$ sayıları, sırasıyla,

$$\frac{rf'_{\rho,\beta}(r)}{f_{\rho,\beta}(r)} = \alpha, \qquad \frac{rg'_{\rho,\beta}(r)}{g_{\rho,\beta}(r)} = \alpha \text{ ve } \frac{rh'_{\rho,\beta}(r)}{h_{\rho,\beta}(r)} = \alpha$$

transandantal denklemin kökleri olacak biçimde, $|z| < x_{\rho,\beta,1}$, $|z| < y_{\rho,\beta,1}$ ve $|z| < z_{\rho,\beta,1}$ olmasıdır. Yukarıda verilen son eşitliklerden

$$r\lambda'_{\rho,\beta}(r) - (\alpha-1)\beta\lambda_{\rho,\beta}(r) = 0,$$
$$r\lambda'_{\rho,\beta}(r) - (\alpha-1)\lambda_{\rho,\beta}(r) = 0,$$
$$\sqrt{r}\lambda'_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) - 2(\alpha-1)\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{r}) = 0$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki ifadeleri ispat etmiş olduk:

$$\inf_{z\in\mathcal{U}_r} Re\left(\frac{zf'_{\rho,\beta}(z)}{f_{\rho,\beta}(z)}\right) = \frac{rf'_{\rho,\beta}(r)}{f_{\rho,\beta}(r)} = F_{\rho,\beta}(r),$$
$$\inf_{z\in\mathcal{U}_r} Re\left(\frac{zg'_{\rho,\beta}(z)}{g_{\rho,\beta}(z)}\right) = \frac{rg'_{\rho,\beta}(r)}{g_{\rho,\beta}(r)} = G_{\rho,\beta}(r),$$
$$\inf_{z\in\mathcal{U}_r} Re\left(\frac{zh'_{\rho,\beta}(z)}{h_{\rho,\beta}(z)}\right) = \frac{rh'_{\rho,\beta}(r)}{h_{\rho,\beta}(r)} = H_{\rho,\beta}(r).$$

$F_{\rho,\beta}, G_{\rho,\beta}, H_{\rho,\beta}: (0, \lambda_{\rho,\beta,1}) \to \mathbb{R}$ reel fonksiyonlarının her biri azalan olduğundan ve

$$\lim_{r\searrow 0} F_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r\searrow 0} G_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r\searrow 0} H_{\rho,\beta}(r) = 1$$
$$\lim_{r\nearrow \lambda_{\rho,\beta,1}} F_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r\nearrow \lambda_{\rho,\beta,1}} G_{\rho,\beta}(r) = \lim_{r\nearrow \lambda_{\rho,\beta,1}} H_{\rho,\beta}(r) = -\infty$$

limit değerlerinden, (4.51) deki eşitsizliklerin, sırasıyla, $z \in \mathcal{U}_{x_{\rho,\beta,1}}$, $z \in \mathcal{U}_{y_{\rho,\beta,1}}$ ve $z \in \mathcal{U}_{z_{\rho,\beta,1}}$ için geçerli oldukları elde edilmiş olur. Böylece ispatımız tamamlanmıştır.

Aşağıdaki teoremde, yukarıda teoremde ele alınan normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının yıldızıllık yarıçapları için bazı alt ve üst sınıflar verilmiştir. Bu teoremlerde, kolaylık sağlaması bakımından,

$$\Delta_{a,b}(\rho,\beta) = a\Gamma(\beta)\Gamma(2\rho+\beta) - b\Gamma^2(\rho+\beta)$$

notasyonunu kullanacağız. Ayrıca, Euler gamma fonksiyonu log-konveks olduğundan, $a > b > 0$ ve $\rho, \beta > 0$ için bu ifadenin pozitif olduğu garantilenmektedir.

Teorem 4.3.3 $\rho, \beta > 0$ için $r^\star(f_{\rho,\beta})$ yıldızıllık yarıçapı,

$$\Xi_{\rho,\beta} = (\beta+2)^2\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{2(\beta+2),\beta+4}(\rho,\beta)$$

olmak üzere,

$$\sqrt{\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{(\beta+2)\Gamma(\beta)}} < r^\star\big(f_{\rho,\beta}\big) < \sqrt{\frac{\beta(\beta+2)\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{(\beta+2)^2,\beta+4}(\rho,\beta)}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{\beta\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{(\beta+2)^2,\beta+4}(\rho,\beta)}} < r^\star\big(f_{\rho,\beta}\big) < \sqrt{\frac{2\beta\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{(\beta+2)^2,\beta+4}(\rho,\beta)}{\beta(\beta+6)\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)+\Xi_{\rho,\beta}}}$$

eşitsizliklerini sağlanır (Baricz *et al.* 2017).

İspat: $f_{\rho,\beta}$ normalize edilmiş Wright fonksiyonunun yıldızıllık yarıçapı $\Psi_{\rho,\beta}(z) = z^\beta\lambda_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonunun yıldızıllık yarıçapı ile çakışır. Bu halde, $\Psi'_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun ve bu fonksiyonun türevinin sonsuz seri açılımları

$$\Upsilon_{\rho,\beta}(z) = \Psi'_{\rho,\beta}(\mathrm{z}) = \sum_{\mathrm{n}\geq 0} \frac{(-1)^n(2n+\beta)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)} z^{2n+\beta-1}, \tag{4.53}$$

$$\Upsilon'_{\rho,\beta}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(2n+\beta)(2n+\beta-1)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)} z^{2n+\beta-2} \tag{4.54}$$

şeklinde yazılır. Lemma 4.3.1 dikkate alındığında, $z \mapsto z^{1-\beta}\Upsilon_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonu $\mathcal{LP}$ Laguerre-Polya sınıfına aittir. Böylece, $\Upsilon_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun tüm sıfırları reeldir. Kabul edelim ki, $\ell_{\rho,\beta,n}$ ler $\Upsilon_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun sıfırları olsun. Bu halde, $\Upsilon_{\rho,\beta}$ fonksiyonu

$$\Gamma(\beta)\Upsilon_{\rho,\beta}(z) = \beta z^{\beta-1} \prod_{n\geq 1} \left(1 - \frac{z^2}{\ell^2_{\rho,\beta,n}}\right) \tag{4.55}$$

olarak yazılabilir. $|z| < \ell_{\rho,\beta,1}$ için, (4.55) ifadesinin her iki yanının logaritmik türevini alarak;

$$\frac{z\Upsilon'_{\rho,\beta}(z)}{\Upsilon_{\rho,\beta}(z)} - (\beta-1) = -2\sum_{n\geq 1} \frac{z^2}{\ell^2_{\rho,\beta,n} - z^2} = -2\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0} \frac{z^{2k+2}}{\ell^{2k+2}_{\rho,\beta,n}} = -2\sum_{k\geq 0} \chi_{\mathrm{k}+1} z^{2k+2} \tag{4.56}$$

elde edilir. Bu ifadede, $\chi_k = \sum_{n\geq 1} \ell^{-2k}_{\rho,\beta,n}$ dır. Böylelikle, (4.53), (4.54) ve (4.56) eşitlikleri kullanılarak;

$$\xi_n = (-1)^n \frac{(2n+\beta)(2n+\beta-1)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)} \text{ ve } \nu_n = (-1)^n \frac{(2n+\beta)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)}$$

olmak üzere

$$\frac{z\Upsilon'_{\rho,\beta}(z)}{\Upsilon_{\rho,\beta}(z)} = \sum_{n\geq 0} \xi_n z^{2n} \Big/ \sum_{n\geq 0} \nu_n z^{2n} \tag{4.57}$$

elde edilir. (4.56) ve (4.57) eşitliklerinin katsayılarının kıyaslanması ile

$$\begin{aligned}
&(\beta-1)\nu_0 = \xi_0\\
&(\beta-1)\nu_1 - 2\chi_1\nu_0 = \xi_1\\
&(\beta-1)\nu_2 - 2\chi_1\nu_1 - 2\chi_2\nu_0 = \xi_2\\
&(\beta-1)\nu_3 - 2\chi_1\nu_2 - 2\chi_2\nu_1 - 2\chi_3\nu_0 = \xi_3
\end{aligned}$$

bulunur. Bu son denklem sisteminin çözümünden

$$\chi_1 = \frac{(\beta+2)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)}, \qquad \chi_2 = \frac{(\beta+2)^2}{\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(\rho+\beta)} - \frac{\beta+4}{\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\rho+\beta)}$$

ve

$$\chi_3 = \frac{(\beta+2)^3}{\beta^2}\frac{\Gamma^3(\beta)}{\Gamma^3(\rho+\beta)} - \frac{(\beta+2)^2(\beta+4)\Gamma^2(\beta)}{2\beta^2\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)} + \frac{\beta+6}{\beta}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(3\rho+\beta)}$$

Rayleigh toplamları elde edilir. $\chi_k^{-\frac{1}{k}} < \ell_{\rho,\beta,1}^2 < \frac{\chi_k}{\chi_{k+1}}$, $(k \in \{1,2\}$ için$)$ Euler-Rayleigh eşitsizliklerinden yararlanarak

$$\sqrt{\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{(\beta+2)\Gamma(\beta)}} < r^\star(f_{\rho,\beta}) < \sqrt{\frac{\beta(\beta+2)\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{(\beta+2)^2,\beta+4}(\rho,\beta)}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{\beta\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{(\beta+2)^2,\beta+4}(\rho,\beta)}} < r^\star(f_{\rho,\beta}) < \sqrt{\frac{2\beta\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{(\beta+2)^2,\beta+4}(\rho,\beta)}{\beta(\beta+6)\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)+\Xi_{\rho,\beta}}}$$

istenilen eşitsizlikler elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.4 $\rho, \beta > 0$ olmak üzere $r^{\star}(g_{\rho,\beta})$ yıldızıllık yarıçapı için

$$\sqrt{\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{3\Gamma(\beta)}} < r^{\star}(g_{\rho,\beta}) < \sqrt{\frac{3\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{9,5}(\rho,\beta)}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{9,5}(\rho,\beta)}} < r^{\star}(g_{\rho,\beta})$$

$$< \sqrt{\frac{2\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{9,5}(\rho,\beta)}{9\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{6,5}(\rho,\beta)+7\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Baricz *et al.* 2017).

İspat: Teorem 4.3.2 (b) dikkate alındığında, $\alpha = 0$ için $g_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun sıfır mertebeden yıldızıllık yarıçapının $\left(z\lambda_{\rho,\beta}(z)\right)' = 0$ denkleminin en küçük pozitif kökü olduğu çıkarımını yapabiliriz. Böylece,

$$\psi_{\rho,\beta}(z) = \left(z\lambda_{\rho,\beta}(z)\right)' = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)} z^{2n} \tag{4.58}$$

yazılır. $\lambda_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun tam fonksiyonların Laguerre-Pólya sınıfına ait olduğunu ve bu sınıfın diferansiyel işlemi altında kapalı olduğunu biliyoruz. Bu yüzden, $\psi_{\rho,\beta}$ fonksiyonu da Laguerre-Pólya sınıfına aittir. Bu halde, $\psi_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun tüm sıfırları reeldir. Kabul edelim ki; $\gamma_{\rho,\beta,n}$ ler $\psi_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun pozitif sıfırları olsun. Bu durumda, $\psi_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun büyüme mertebesi Wright fonksiyonunun büyüme mertebesi ile çakışacağından, $\psi_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun sonsuz çarpım temsili şu şekilde verilir:

$$\Gamma(\beta)\psi_{\rho,\beta}(z)=\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{\gamma_{\rho,\beta,n}^2}\right). \tag{4.59}$$

Şimdi, (4.59) eşitliğinin her iki yanının logaritmik türevini alarak, $|z|<\gamma_{\rho,\beta,1}$ için, $\delta_k=\sum_{n\geq 1}\gamma_{\rho,\beta,n}^{-2k}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\frac{\psi'_{\rho,\beta}(z)}{\psi_{\rho,\beta}(z)}&=\sum_{n\geq 1}\frac{2z}{z^2-\gamma_{\rho,\beta,n}^2}=-2\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0}\frac{z^{2k+1}}{\gamma_{\rho,\beta,n}^{2k+2}}\\&=-2\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 1}\frac{z^{2k+1}}{\gamma_{\rho,\beta,n}^{2k+2}}=-2\sum_{k\geq 0}\delta_{k+1}z^{2k+1}\end{aligned} \tag{4.60}$$

elde ederiz. Böylelikle, (4.58) ifadesi göz önüne alındığında,

$$a_n=\frac{(-1)^n(2n+3)}{n!\,\Gamma\big((n+1)\rho+\beta\big)}\ \text{ ve } b_n=\frac{(-1)^n(2n+1)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)}$$

olmak üzere,

$$\frac{\psi'_{\rho,\beta}(z)}{\psi_{\rho,\beta}(z)}=-2\sum_{n\geq 0}a_nz^{2n+1}\Big/\sum_{n\geq 0}b_nz^{2n} \tag{4.61}$$

bulunur. (4.60) ve (4.61) ifadelerinin katsayıları kıyaslanarak,

$$\begin{aligned}&\delta_1b_0=a_0\\&\delta_2b_0+\delta_1b_1=a_1\\&\delta_3b_0+\delta_2b_1+\delta_1b_2=a_2\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da

$$\delta_1 = \frac{3\Gamma(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)}, \qquad \delta_2 = \frac{9\Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(\rho+\beta)} - \frac{5\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\rho+\beta)}$$

ve

$$\delta_3 = \frac{27\Gamma^3(\beta)}{\Gamma^3(\rho+\beta)} - \frac{45}{2}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)} + \frac{7}{2}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(3\rho+\beta)}$$

Rayleigh toplamları elde edilir. $\delta_k^{-\frac{1}{k}} < \gamma_{\rho,\beta,1}^2 < \frac{\delta_k}{\delta_{k+1}}$, $(k \in \{1,2\})$, Euler-Rayleigh eşitsizliği kullanılarak

$$\sqrt{\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{3\Gamma(\beta)}} < r^\star(g_{\rho,\beta}) < \sqrt{\frac{3\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{9,5}(\rho,\beta)}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{9,5}(\rho,\beta)}} < r^\star(g_{\rho,\beta})$$

$$< \sqrt{\frac{2\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{9,5}(\rho,\beta)}{9\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{6,5}(\rho,\beta) + 7\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}}$$

bulunur. Bu ise istenilen sonuçtur.

Teorem 4.3.5 $\rho, \beta > 0$ olmak üzere $r^\star(h_{\rho,\beta})$ yıldızıllık yarıçapı için

$$\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{2\Gamma(\beta)} < r^\star(h_{\rho,\beta}) < \frac{2\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{4,3}(\rho,\beta)},$$

$$\sqrt{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{4,3}(\rho,\beta)}} < r^\star(h_{\rho,\beta})$$

$$< \frac{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{4,3}(\rho,\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{8,9}(\rho,\beta) + 2\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Baricz *et al.* 2017).

İspat: Eğer Teorem 4.3.2 (c) de $\alpha = 0$ alınacak olursa, $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun yıldızıllık yarıçapının $\left(z\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{z})\right)' = 0$ transandantal denkleminin en küçük pozitif kökü olduğu sonucuna ulaşılır. Bu sonuçtan hareketle,

$$\Omega_{\rho,\beta}(z) = \left(z\lambda_{\rho,\beta}(\sqrt{z})\right)' = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n(n+1)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)} z^n \tag{4.62}$$

fonksiyonunun ilk pozitif sıfırı ile çalışacağız. Lemma 4.3.1 ve $\mathcal{LP}$ sınıfı diferansiyel işlemi altında kapalı olduğundan, $\Omega_{\rho,\beta}$ fonksiyonu Laguerre-Pólya sınıfına ait olduğu söylenir. Varsayalım ki; $\sigma_{\rho,\beta,n}$ ler $\Omega_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun pozitif sıfırları olsun. Bu durumda, Hadamard çarpım teoreminden dolayı $\Omega_{\rho,\beta}(z)$ fonksiyonu

$$\Gamma(\beta)\Omega_{\rho,\beta}(z) = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z}{\sigma_{\rho,\beta,n}}\right) \tag{4.63}$$

şeklinde yazılabilir. (4.63) ifadesinin her iki yanının logaritmik türevini almak suretiyle

$$\frac{\Omega'_{\rho,\beta}(z)}{\Omega_{\rho,\beta}(z)} = -\sum_{k\geq 0} \eta_{k+1} z^k, \qquad |z| < \sigma_{\rho,\beta,1} \tag{4.64}$$

elde edilir. Burada, $\eta_k = \sum_{n\geq 1} \sigma_{\rho,\beta,n}^{-k}$ dır. Ayrıca, (4.62) ifadesinin türevi alınarak,

$$c_n = \frac{(-1)^n(n+2)}{n!\,\Gamma\big((n+1)\rho+\beta\big)}, \qquad d_n = \frac{(-1)^n(n+1)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)}$$

olmak üzere,

$$\frac{\Omega'_{\rho,\beta}(z)}{\Omega_{\rho,\beta}(z)} = \left(-\sum_{n\geq 0} c_n z^n\right) \Bigg/ \left(\sum_{n\geq 0} d_n z^n\right) \tag{4.65}$$

yazılır. (4.64) ve (4.65) ifadelerinin katsayılarının kıyaslanmasının sonucunda

$$\eta_1 = \frac{2\Gamma(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)}, \qquad \eta_2 = \frac{4\Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(\rho+\beta)} - \frac{3\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\rho+\beta)}$$

ve

$$\eta_3 = \frac{8\Gamma^3(\beta)}{\Gamma^3(\rho+\beta)} + \frac{2\Gamma(\beta)}{\Gamma(3\rho+\beta)} - \frac{9\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}$$

Rayleigh toplamları elde edilmiş olur. Bu halde, $\eta_k^{-\frac{1}{k}} < \sigma_{\rho,\beta,1} < \frac{\eta_k}{\eta_{k+1}}$, $(k \in \{1,2\})$ Euler-Rayleigh eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{2\Gamma(\beta)} < r^\star(h_{\rho,\beta}) < \frac{2\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{4,3}(\rho,\beta)},$$

$$\sqrt{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{4,3}(\rho,\beta)}} < r^\star(h_{\rho,\beta})$$

$$< \frac{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{4,3}(\rho,\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{8,9}(\rho,\beta) + 2\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikler teoremde ifade edilen eşitsizliklerdir.

4.3.2. $f_{\rho,\beta}$, $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ Fonksiyonlarının α mertebeden Konvekslik Yarıçapları

Bu kısımda, $f_{\rho,\beta}$, $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonlarının α mertebeden konvekslik yarıçaplarını vereceğiz. Ayrıca, $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonları için sıfır mertebeden konvekslik yarıçapları için alt ve üst sınırlar elde edeceğiz.

Teorem 4.3.6 (Baricz *et al.* 2017) $\rho > 0$, $\beta > 0$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. Bu durumda,

a. $\Psi_{\rho,\beta}(z) = z^{\beta}\lambda_{\rho,\beta}(z)$ olmak üzere, $f_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun α mertebeden konvekslik yarıçapı olan sayı

$$1 + \frac{r\Psi''_{\rho,\beta}(r)}{\Psi'_{\rho,\beta}(r)} + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\frac{r\Psi'_{\rho,\beta}(r)}{\Psi_{\rho,\beta}(r)} = \alpha$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $g_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun α mertebeden konvekslik yarıçapı olan sayı

$$1 + \frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)} = \alpha$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun α mertebeden konvekslik yarıçapı olan sayı

$$1 + \frac{rh''_{\rho,\beta}(r)}{h'_{\rho,\beta}(r)} = \alpha$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

İspat: a. $\Psi_{\rho,\beta}(z) = z^{\beta}\lambda_{\rho,\beta}(z)$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} f_{\rho,\beta}(z) &= \left(z^{\beta}\Gamma(\beta)\lambda_{\rho,\beta}(z)\right)^{\frac{1}{\beta}} \\ &= \left(\Gamma(\beta)\Psi_{(\rho,\beta)}(z)\right)^{\frac{1}{\beta}}, \end{aligned}$$

$$f'_{\rho,\beta}(z) = \frac{1}{\beta}\Gamma(\beta)\Psi'_{\rho,\beta}(z)\left(\Gamma(\beta)\Psi_{\rho,\beta}(z)\right)^{\frac{1}{\beta}-1}$$

yazılır. Bu son ifadenin logaritmik türevini alarak

$$\frac{f''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)} = \frac{\Psi''_{\rho,\beta}(z)}{\Psi'_{\rho,\beta}(z)} + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{\Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)}$$

$$1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)} = 1 + \frac{z\Psi''_{\rho,\beta}(z)}{\Psi'_{\rho,\beta}(z)} + \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\frac{z\Psi'_{\rho,\beta}(z)}{\Psi_{\rho,\beta}(z)}$$

elde edilir. Ayrıca, $\beta \in (0,1]$ için (4.52) eşitsizliği kullanılarak, $|z| = r$ için,

$$Re\left(1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{\beta}-1\right)\sum_{n\geq 1}\frac{2r^2}{\zeta^2_{\rho,\beta,n} - r^2} - \sum_{n\geq 1}\frac{2r^2}{\zeta'^2_{\rho,\beta,n} - r^2} \tag{4.66}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca, $a > b > 0,\ z \in \mathbb{C}$ ve $|z| < b$ olmak üzere

$$\alpha Re\left(\frac{z}{a-z}\right) - Re\left(\frac{z}{b-z}\right) \geq \alpha\frac{|z|}{a-|z|} - \frac{|z|}{b-|z|}$$

yazılır (Baricz and Szász 2014). Bu eşitsizlik yardımıyla ve Lemma 4.3.1 den $\zeta_{\rho,\beta,n}$ ve $\zeta'_{\rho,\beta,n}$ sıfırları arasında $\zeta'_{\rho,\beta,1} < \zeta_{\rho,\beta,1}$ bağıntısı olduğundan, (4.66) ifadesinin her $z \in \mathcal{U}_{\zeta'_{\rho,\beta,1}}$ için, $\beta > 1$ olması durumunda da geçerli olduğu sonucuna ulaşılır. Yukarıda verilen eşitsizliklerden, $r \in (0, \zeta'_{\rho,\beta,1})$ için

$$\inf_{z\in\mathcal{U}_r}\left\{Re\left(1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right)\right\} = 1 + \frac{rf''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)}$$

elde edilir. Öte yandan, $\beta \in (0,1]$ için,

$$u_{\rho,\beta}(r) = 1 + \frac{rf''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)}$$

şeklinde tanımlanan $u_{\rho,\beta}\colon \left(0, \zeta'_{\rho,\beta,1}\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu azalan bir fonksiyondur. Ayrıca,

$$u'_{\rho,\beta}(r) = -\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\sum_{n\geq 1} \frac{4r\zeta^2_{\rho,\beta,n}}{\left(\zeta^2_{\rho,\beta,n} - r^2\right)^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{4r\zeta'^2_{\rho,\beta,n}}{\left(\zeta'^2_{\rho,\beta,n} - r^2\right)^2}$$
$$< \sum_{n\geq 1} \frac{4r\zeta^2_{\rho,\beta,n}}{\left(\zeta^2_{\rho,\beta,n} - r^2\right)^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{4r\zeta'^2_{\rho,\beta,n}}{\left(\zeta'^2_{\rho,\beta,n} - r^2\right)^2} < 0$$

olduğundan, bu fonksiyon $r \in \left(0, \zeta'_{\rho,\beta,1}\right)$ için, $\beta > 1$ olması durumunda da azalan bir fonksiyon olur. O halde;

$$\lim_{r\searrow 0} u_{\rho,\beta}(r) = 1, \qquad \lim_{r\nearrow \zeta'_{\rho,\beta,1}} u_{\rho,\beta}(r) = -\infty$$

limit değerlerinden, $z \in \mathcal{U}_{r_1}$ için,

$$Re\left(1 + \frac{zf''_{\rho,\beta}(z)}{f'_{\rho,\beta}(z)}\right) > \alpha$$

olması için gerek ve yeter şart $\left(0, \zeta'_{\rho,\beta,1}\right)$ aralığındaki r_1 sayısının

$$1 + \frac{rf''_{\rho,\beta}(r)}{f'_{\rho,\beta}(r)} = \alpha$$

denkleminin tek kökü olmasıdır.

b. $g_{\rho,\beta} \in \mathcal{LP}$ olduğundan $g'_{\rho,\beta} \in \mathcal{LP}$ olur. Ayrıca, bu iki fonksiyonun da büyüme mertebesi $(\rho + 1)^{-1}$ olur. Bu durumda, $\vartheta_{\rho,\beta,n}$ler $g'_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun pozitif sıfırları olmak üzere, Hadamard teoremi yardımıyla

$$g'_{\rho,\beta}(z) = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{\vartheta^2_{\rho,\beta,n}}\right)$$

yazılabilir. Bu son ifadenin her iki yanının logaritmik türevinden

$$1 + \frac{zg''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)} = 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{2z^2}{\vartheta^2_{\rho,\beta,n} - z^2}$$

sonucuna ulaşılır. Bu son elde ettiğimiz ifadeye (4.52) eşitsizliğini uygularsak, $|z| = r$ için,

$$Re\left(1 + \frac{zg''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)}\right) \geq 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{2r^2}{\vartheta^2_{\rho,\beta,n} - r^2}$$

elde edilir. Böylelikle, $r \in (0, \vartheta_{\rho,\beta,n})$ için,

$$\inf_{z\in\mathcal{U}_r}\left\{Re\left(1 + \frac{zg''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)}\right)\right\} = 1 - \sum_{n\geq 1}\frac{2r^2}{\vartheta^2_{\rho,\beta,n} - r^2} = 1 + \frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)}$$

yazılabilir. Bu halde,

$$\upsilon_{\rho,\beta}(r) = 1 + \frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)}$$

biçiminde tanımlanan $\upsilon_{\rho,\beta}: \left(0, \vartheta_{\rho,\beta,1}\right) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu azalan bir fonksiyon olup,

$$\lim_{r\searrow 0}\upsilon_{\rho,\beta}(r) = 1, \qquad \lim_{r\nearrow \vartheta'_{\rho,\beta,1}}\upsilon_{\rho,\beta}(r) = -\infty$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$1+\frac{rg''_{\rho,\beta}(r)}{g'_{\rho,\beta}(r)}=\alpha$$

denkleminin $\left(0,\vartheta_{\rho,\beta,1}\right)$ aralığındaki tek kökü r_2 olur. Bir başka ifadeyle,

$$Re\left(1+\frac{zg''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)}\right)>\alpha, \qquad z\in\mathcal{U}_{r_2} \text{ ve } \inf_{z\in\mathcal{U}_{r_2}}\left\{Re\left(1+\frac{zg''_{\rho,\beta}(z)}{g'_{\rho,\beta}(z)}\right)\right\}=\alpha$$

yazılabilir.

c. $\lambda_{\rho,\beta}$ Wright fonksiyonunun tüm sıfırlarının reel olduğunu kullanarak, Hadamard teoremi yardımıyla,

$$h'_{\rho,\beta}(z)=\prod_{n\geq 1}\left(1-\frac{z}{\tau_{\rho,\beta,n}}\right)$$

elde edilir. Bu son ifadenin her iki yanının logaritmik türevi alınarak;

$$1+\frac{zh''_{\rho,\beta}(z)}{h'_{\rho,\beta}(z)}=1-\sum_{n\geq 1}\frac{z}{\tau_{\rho,\beta,n}-z}$$

bulunur. $r\in(0,\tau_{\rho,\beta,1})$ olsun. Bu durumda, harmonik fonksiyonlar için minimum prensibi ve (4.52) eşitsizliği kullanılarak, $z\in\mathcal{U}_r$ için,

$$Re\left(1+\frac{zh''_{\rho,\beta}(z)}{h'_{\rho,\beta}(z)}\right)=Re\left(1-\sum_{n\geq 1}\frac{z}{\tau_{\rho,\beta,n}-z}\right)\geq\min_{|z|=r}Re\left(1-\sum_{n\geq 1}\frac{z}{\tau_{\rho,\beta,n}-z}\right)$$
$$=\min_{|z|=r}\left(1-\sum_{n\geq 1}Re\frac{z}{\tau_{\rho,\beta,n}-z}\right)\geq 1-\sum_{n\geq 1}\frac{r}{\tau_{\rho,\beta,n}-r}=1+\frac{rh''_{\rho,\beta}(r)}{h'_{\rho,\beta}(r)}$$

yazılabilir. Sonuç olarak,

$$\inf_{z\in\mathcal{U}_r}\left\{Re\left(1+\frac{zh''_{\rho,\beta}(z)}{h'_{\rho,\beta}(z)}\right)\right\}=1+\frac{rh''_{\rho,\beta}(r)}{h'_{\rho,\beta}(r)}$$

elde edilmiş olur. Şimdi kabul edelim ki r_3

$$1+\frac{rh''_{\rho,\beta}(r)}{h'_{\rho,\beta}(r)}=\alpha \tag{4.67}$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür. $z\in\mathcal{U}_{r_3}$ için,

$$Re\left(1+\frac{zh''_{\rho,\beta}(z)}{h'_{\rho,\beta}(z)}\right)>\alpha$$

dır. İspatımızı tamamlamak için (4.67) denkleminin $(0,\tau_{\rho,\beta,1})$ aralığında bir tek köke sahip olduğunu göstermeliyiz. (4.67) denklemi

$$w_\nu(r)=1-\alpha-\sum_{n\geq 1}\frac{r}{\tau_{\rho,\beta,n}-r}=0$$

ifadesine denktir. Ayrıca

$$\lim_{r\searrow 0}w_\nu(r)=1-\alpha>0,\qquad \lim_{r\nearrow\tau_{\rho,\beta,1}}w(r)=-\infty.$$

olur. w_ν fonksiyonu $(0,\tau_{\rho,\beta,1})$ aralığında azalan olduğundan $w_\nu(r)=0$ denklemi bir tek köke sahiptir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, Euler-Rayleigh eşitsizliklerini kullanarak $g_{\rho,\beta}$ ve $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonlarının konvekslik yarıçapları için bazı alt ve üst sınırlar vereceğiz.

Teorem 4.3.7 $\rho, \beta > 0$ için $g_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(g_{\rho,\beta})$, $\left(zg'_{\rho,\beta}(z)\right)' = 0$ denkleminin en küçük pozitif kökü olup $r^c(g_{\rho,\beta})$ için

$$\sqrt{\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{9\Gamma(\beta)}} < r^c(g_{\rho,\beta}) < \sqrt{\frac{9\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{81,25}(\rho,\beta)}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{81,25}(\rho,\beta)}} < r^c(g_{\rho,\beta})$$

$$< \sqrt{\frac{2\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{81,25}(\rho,\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{1458,675}(\rho,\beta) + 49\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}}$$

eşitsizlikleri sağlanır (Baricz *et al.* 2017).

İspat: Wright fonksiyonunun ve türevinin seri temsilini kullanarak

$$\Theta_{\rho,\beta}(z) = \left(zg'_{\rho,\beta}(z)\right)' = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (2n+1)^2 \Gamma(\beta)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)} z^{2n}$$

yazılabilir. $g_{\rho,\beta}$ fonksiyonu Laguerre-Pólya sınıfına ait olduğundan ve $\mathcal{LP}$ sınıfı türev işlemi altında kapalı olduğundan $\Theta_{\rho,\beta}$ fonksiyonu da Laguerre-Pólya sınıfına aittir ve tüm sıfırları reeldir. Kabul edelim ki; $\varsigma_{\rho,\beta,n}$ ler $\Theta_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun pozitif sıfırları olsun. Bu halde Hadamard teoremi yardımıyla $\Theta_{\rho,\beta}$ fonksiyonu

$$\Theta_{\rho,\beta}(z) = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z^2}{\varsigma^2_{\rho,\beta,n}}\right)$$

biçiminde yazılabilir. O halde, $|z| < \varsigma_{\rho,\beta,1}$ için

$$
\begin{aligned}
\frac{\Theta'_{\rho,\beta}(z)}{\Theta_{\rho,\beta}(z)} &= -2\sum_{n\geq 1}\frac{z}{\varsigma_{\rho,\beta,n}^{2}-z^{2}} = -2\sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 0}\frac{z^{2k+1}}{\varsigma_{\rho,\beta,n}^{2k+2}} = -2\sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 1}\frac{z^{2k+1}}{\varsigma_{\rho,\beta,n}^{2k+2}} \\
&= -2\sum_{k\geq 0}\kappa_{k+1}z^{2k+1}
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

elde edilir. Burada $\kappa_k = \sum_{n\geq 1}\varsigma_{\rho,\beta,n}^{-2k}$ dır. Ayrıca,

$$
q_n = \frac{(-1)^n(2n+3)^2\Gamma(\beta)}{n!\,\Gamma\big((n+1)\rho+\beta\big)}, \qquad r_n = \frac{(-1)^n(2n+1)^2\Gamma(\beta)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)}
$$

olmak üzere

$$
\frac{\Theta'_{\rho,\beta}(z)}{\Theta_{\rho,\beta}(z)} = \sum_{n\geq 0} q_n z^{2n+1}\Big/\sum_{n\geq 0} r_n z^{2n} \tag{4.69}
$$

yazılabilir. (4.68) ve (4.69) ifadelerinin katsayılarını kıyaslayarak

$$
\kappa_1 = \frac{9\Gamma(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)}, \qquad \kappa_2 = \frac{81\Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(\rho+\beta)} - \frac{25\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\rho+\beta)}
$$

ve

$$
\kappa_3 = \frac{729\Gamma^3(\beta)}{\Gamma^3(\rho+\beta)} + \frac{49}{2}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(3\rho+\beta)} - \frac{675}{2}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}
$$

Rayleigh toplamları elde edilir. Son olarak, $\kappa_k^{-\frac{1}{k}} < \varsigma_{\rho,\beta,1}^2 < \frac{\kappa_k}{\kappa_{k+1}}$, $(k \in \{1,2\})$ Euler-Rayleigh eşitsizliği kullanılarak teoremde ifade edilen

$$
\sqrt{\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{9\Gamma(\beta)}} < r^c\big(g_{\rho,\beta}\big) < \sqrt{\frac{9\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{81,25}(\rho,\beta)}},
$$

$$\sqrt[4]{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{81,25}(\rho,\beta)}} < r^c(g_{\rho,\beta})$$

$$< \sqrt{\frac{2\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{81,25}(\rho,\beta)}{\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{1458,675}(\rho,\beta)+49\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}}$$

eşitsizlikleri elde edilmiş olur.

Teorem 4.3.8 (Baricz *et al.* 2017) $\rho,\beta>0$ için $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun konvekslik yarıçapı $r^c(h_{\rho,\beta})$, $\left(zh'_{\rho,\beta}(z)\right)'=0$ denkleminin en küçük pozitif kökü olup aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{4\Gamma(\beta)} < r^c(h_{\rho,\beta}) < \frac{4\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{16,9}(\rho,\beta)},$$

$$\sqrt{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{16,9}(\rho,\beta)}} < r^c(h_{\rho,\beta})$$

$$< \frac{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{16,9}(\rho,\beta)}{8\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)+2\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{32,27}(\rho,\beta)}.$$

İspat: Wright fonksiyonunun tanımından

$$\omega_{\rho,\beta}(z)=\left(zh'_{\rho,\beta}(z)\right)'=1+\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n(n+1)^2\Gamma(\beta)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)}z^n \tag{4.70}$$

elde edilir. $h_{\rho,\beta}$ fonksiyonu $\mathcal{LP}$ Laguerre-Pólya sınıfına ait olduğundan $\omega_{\rho,\beta}$ fonksiyonu da $\mathcal{LP}$ sınıfına ait olur. Bir başka ifadeyle, $\omega_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun tüm sıfırları reeldir. Varsayalım ki $\varrho_{\rho,\beta,n}$ ler $\omega_{\rho,\beta}$ fonksiyonunun pozitif sıfırlarını göstersin, Hadamard çarpım teoreminden

$$\omega_{\rho,\beta}(z) = \prod_{n\geq 1}\left(1 - \frac{z}{\varrho_{\rho,\beta,n}}\right) \tag{4.71}$$

yazılır. (4.71) ifadesinin her iki yanının logaritmik türevini alarak, $|z| < \varrho_{\rho,\beta,1}$ için,

$$\frac{\omega'_{\rho,\beta}(z)}{\omega_{\rho,\beta}(z)} = -\sum_{k\geq 0}\mu_{k+1}z^k \tag{4.72}$$

elde ederiz. Burada $\mu_k = \sum_{n\geq 1}\varrho_{\rho,\beta,n}^{-k}$ dır. Ayrıca (4.70) ifadesinin türevi alınarak

$$t_n = \frac{(-1)^n(n+2)^2\Gamma(\beta)}{n!\,\Gamma\big((n+1)\rho+\beta\big)}, \qquad s_n = \frac{(-1)^n(n+1)^2\Gamma(\beta)}{n!\,\Gamma(n\rho+\beta)}$$

bulunur. Buradan,

$$\frac{\omega'_{\rho,\beta}(z)}{\omega_{\rho,\beta}(z)} = -\sum_{n\geq 0}t_n z^n \Big/ \sum_{n\geq 0}s_n z^n \tag{4.73}$$

yazılır. (4.72) ve (4.73) ifadelerinin katsayılarının kıyaslanması ile

$$\mu_1 = \frac{4\Gamma(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)}, \qquad \mu_2 = \frac{16\Gamma^2(\beta)}{\Gamma^2(\rho+\beta)} - \frac{9\Gamma(\beta)}{\Gamma(2\rho+\beta)}$$

ve

$$\mu_3 = \frac{64\Gamma^3(\beta)}{\Gamma^3(\rho+\beta)} + \frac{8\Gamma(\beta)}{\Gamma(3\rho+\beta)} - \frac{54\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}$$

Rayleigh toplamları elde edilir. $\mu_k^{-\frac{1}{k}} < \varrho_{\rho,\beta,1} < \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}}$, $(k \in \{1,2\})$ Euler-Rayleigh eşitsizlikleri göz önüne alındığında

$$\frac{\Gamma(\rho+\beta)}{4\Gamma(\beta)} < r^c(h_{\rho,\beta}) < \frac{4\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Delta_{16,9}(\rho,\beta)},$$

$$\sqrt{\frac{\Gamma^2(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)}{\Gamma(\beta)\Delta_{16,9}(\rho,\beta)}} < r^c(h_{\rho,\beta})$$

$$< \frac{\Gamma(\rho+\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{16,9}(\rho,\beta)}{8\Gamma^3(\rho+\beta)\Gamma(2\rho+\beta)+2\Gamma(\beta)\Gamma(3\rho+\beta)\Delta_{32,27}(\rho,\beta)}$$

elde edilmiş olur.

Şimdi, (3.4) deki gibi tanımlanmış Wright fonksiyonu ve (3.3) deki gibi verilmiş ν mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu göz önüne alındığında, Wright fonksiyonu ile Bessel fonksiyonu arasında

$$\lambda_{1,\nu+1}(z) = \phi(1,\nu+1,-z^2) = z^{-\nu}\mathcal{J}_\nu(2z)$$

bağınıtısını elde etmek mümkündür. Bu bağıntı dikkate alınarak, özellikle $\rho = 1$ ve $\beta = \nu + 1$ alınmak suretiyle, bazı ilginç sonuçlar elde edilir. Bu sonuçlardan bir tanesi Baricz *et al.* (2014) tarafından sunulan Teorem 1 deki sonuçların doğal bir tamamlayıcısıdır. Ayrıca $f_{1,\nu+1}$ fonksiyonu için elde ettiğimiz sonuç yeni olmasına karşın $g_{1,\nu+1}$ ve $h_{1,\nu+1}$ fonksiyonları için elde ettiğimiz sonuçların Baricz *et al.* (2014) çalışmasında ifade ve ispat edildiği görülebilir.

Sonuç 4.3.9 (Baricz *et al.* 2017) $\nu > 0$ ve $\alpha \in [0,1)$ olsun. O halde,

a. $f_{1,\nu+1}(z) = \left(\Gamma(\nu+1)z\mathcal{J}_\nu(2z)\right)^{\frac{1}{1+\nu}}$ fonksiyonunun α mertebeden yıldızıllık yarıçapı

$$2z\mathcal{J}'_\nu(2z) + \left(1-\alpha(\nu+1)\right)\mathcal{J}_\nu(2z) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

b. $g_{1,\nu+1}(z) = \Gamma(\nu+1)z^{1-\nu}\mathcal{J}_\nu(2z)$ fonksiyonunun α mertebeden yıldızıllık yarıçapı

$$2z\mathcal{J}'_\nu(2z) + (1-\alpha-\nu)\mathcal{J}_\nu(2z) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

c. $h_{1,\nu+1}(z) = \Gamma(\nu+1)z^{1-\frac{\nu}{2}}\mathcal{J}_\nu(2\sqrt{z})$ fonksiyonunun α mertebeden yıldızıllık yarıçapı

$$2\sqrt{z}\mathcal{J}'_\nu(2\sqrt{z}) + (2-2\alpha-\nu)\mathcal{J}_\nu(\sqrt{z}) = 0$$

denkleminin en küçük pozitif köküdür.

Teorem 4.3.3 de $\rho = 1$ ve $\beta = \nu + 1$ seçilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.3.10 $\nu > -1$ olsun. Bu durumda,

$$\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+3}} < r^\star(f_{1,\nu+1}) < \sqrt{\frac{(\nu+2)(\nu+3)}{\nu^3+7\nu^2+15\nu+13}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\nu+1)^3(\nu+2)}{\nu^3+7\nu^2+15\nu+13}} < r^\star(f_{1,\nu+1}) < (\nu+1)\sqrt{\frac{2(\nu+3)(\nu^3+7\nu^2+15\nu+13)}{\nu^5+15\nu^4+80\nu^3+222\nu^2+319\nu+196}}$$

elde edilir (Baricz *et al.* 2017).

Şimdi Wright fonksiyonu ile birinci tür Bessel fonksiyonu arasındaki ilişkiyi kullanarak, Teorem 4.3.4 ve Teorem 4.3.5 elde verilen sonuçlarda $\rho = 1$ ve $\beta = \nu + 1$ alındığında elde edilecek sonuçların Aktaş *et al.* (2017a, 2017b) tarafından verilen sonuçlarla çakıştığını göstereceğiz.

Sonuç 4.3.11 $\nu > -1$ olsun. Bu durumda,

$$\sqrt{\frac{\nu+1}{3}} < r^{\star}\left(g_{1,\nu+1}\right) < \sqrt{\frac{3(\nu+1)(\nu+2)}{4\nu+13}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)}{4\nu+13}} < r^{\star}\left(g_{1,\nu+1}\right) < \sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu+3)(4\nu+13)}{2(4\nu^2+26\nu+49)}}$$

elde edilir (Baricz *et al.* 2017).

Aktaş *et al.* (2017b) çalışmasında verilen $z \mapsto \varphi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\nu} \mathcal{J}_\nu(z)$ normalize edilmiş birinci tür Bessel fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda, açıkça görülebileceği üzere, $\varphi_\nu(2z) = 2g_{1,\nu+1}(z)$ olduğundan yukarıda verilen sonuçlar Aktaş *et al.* (2017b) de verilen sonuçlarla çakışır.

Sonuç 4.3.12 $\nu > -1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{\nu+1}{2} < r^{\star}\left(h_{1,\nu+1}\right) < \frac{2(\nu+1)(\nu+2)}{\nu+5},$$

$$\frac{(\nu+1)\sqrt{\nu+2}}{\sqrt{\nu+5}} < r^{\star}\left(h_{1,\nu+1}\right) < \frac{(\nu+1)(\nu+3)(\nu+5)}{\nu^2+8\nu+23}$$

elde edilir (Baricz *et al.* 2017).

Aktaş *et al.* (2017b) tarafından verilen $\Phi_\nu(z) = 2^\nu \Gamma(\nu+1) z^{1-\frac{\nu}{2}} \mathcal{J}_\nu(\sqrt{z})$ normalize edilmiş birinci tür Bessel fonksiyonu göz önüne alındığında $\Phi_\nu(4z) = 4h_{1,\nu+1}(z)$ elde edilir. Bu halde, yukarıda verilen eşitsizliklerin Aktaş *et al.* (2017b) tarafından verilen sonuçlarla çakıştığı görülebilir.

Son olarak, Teorem 4.3.7 ve Teorem 4.3.8 de $\rho = 1$ ve $\beta = \nu + 1$ $(\nu > -1)$ olarak alınacak olursa aşağıdaki sonuçları elde ederiz. O halde, aşağıda elde edilen sonuçlar Aktaş *et al.* (2017a) tarafından verilen Teorem 6 ve Teorem 7 deki sonuçlarla çakışır.

Sonuç 4.3.13 $\nu > -1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{\sqrt{\nu+1}}{3} < r^c(g_{1,\nu+1}) < 3\sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu+2)}{56\nu+137}},$$

$$\sqrt[4]{\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)}{56\nu+137}} < r^c(g_{1,\nu+1}) < \sqrt{\frac{(\nu+1)(\nu+3)(56\nu+137)}{2(208\nu^2+1172\nu+1693)}}$$

elde edilir (Baricz *et al.* 2017).

Sonuç 4.3.14 $\nu > -1$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{\nu+1}{4} < r^c(h_{1,\nu+1}) < \frac{4(\nu+1)(\nu+2)}{7\nu+23},$$

$$\sqrt{\frac{(\nu+1)^2(\nu+2)}{7\nu+23}} < r^c(h_{1,\nu+1}) < \frac{(\nu+1)(\nu+3)(7\nu+23)}{2(9\nu^2+60\nu+115)}$$

elde edilir (Baricz *et al.* 2017).

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmanın özünü oluşturan dördüncü bölümde, ilk olarak, bi-ünivalent fonksiyonların bazı yeni alt sınıfları tanımlanmış ve bu alt sınıflara ait fonksiyonların $|H_2(2)| = |a_2a_4 - a_3^2|$ ikinci Hankel determinantı için üst sınırlar elde edilmiştir. Son olarak, Wright fonksiyonunun geometrik özellikleri ele alınmış ve elde edilen özellikler Bessel fonksiyonu için daha önceden bilinen özelliklerle karşılaştırılmıştır.

Bu bölümde, geometrik fonksiyonlar teorisiyle ilgilenen araştırmacıların ilgisini çekeceğini düşündüğümüz bazı problemlere yer vereceğiz.

Birinci tür Bessel fonksiyonlarının özelliklerinin ne kadarının Wright fonksiyonuna genişletilebileceğini görmek oldukça ilginçtir. Bu tezde, Bessel fonksiyonlarının tam olmasından kaynaklanan özelliklerinin Wright fonksiyonuna genişletilebileceğini gördük. Fakat birinci tür Bessel fonksiyonlarının diğer özelliklerinin de Wright fonksiyonuna genişletip genişletemeyeceğimizi görmek istiyoruz. Bu düşünceyle bu bölümde çalışmaya değer olası bazı açık problem ya da soruların kısa bir listesini vereceğiz:

1. β (ya da ρ) ya göre $\lambda_{\rho,\beta,n}$ sıfırlarının monotonluğu hakkında ne söyleyebiliriz? Bu sorunun cevabı; Wright fonksiyonunun normalize edilmiş hallerinin ünivalent fonksiyonların belli bir sınıfına ait olacak şekilde ρ ve β parametrelerine gerekli ve yeterli şartların elde edilmesini mümkün kılmaktadır. Bu tür sonuçlar literatürde var olan sonuçları geliştirir.

2. Sabit n değerleri için, β (ya da ρ) ya göre $\lambda_{\rho,\beta,n}$ sıfırlarının türevini ifade etmek mümkün müdür? Birinci tür Bessel fonksiyonlarının sıfırlarının türevi için Watson formülü ve bunun türevi normalize edilmiş birinci tür Bessel fonksiyonlarının konveks fonksiyonlar sınıfına ait olacak şekilde bu fonksiyonların mertebesi ile ilgili gerekli ve yeterli şartların elde edilmesinde önemli rol oynar (Baricz and Szász 2014).

3. Normalize edilmiş Wright fonksiyonlarının konvekslik ve yıldızıllık mertebelerini elde etmek için sürekli kesirleri kullanmak mümkün müdür?

Wright fonksiyonu ikinci mertebeden homojen lineer bir diferansiyel denklemin çözümü olmadığından yukarıda listelenen soruların her birinin çözümü zor olacağı öngörülebilir. Ayrıca Wright fonksiyonunun kuvvet serisi açılımı yapısal olarak Bessel fonksiyonunun seri açılımına benzer olmasına rağmen Wright fonksiyonunun özelliklerini çalışmak çok daha zordur.

KAYNAKLAR

Aktaş, İ., Baricz, Á., Orhan, H., 2017a. Bounds for radii of starlikeness and convexity of some special functions, Turkish J. Math., (in press).

Aktaş, İ., Baricz, Á., Yağmur, N., 2017b. Bounds for the radii of univalence of some special functions, Math. Inequal. Appl. 20(2017), 825-843.

Ali, R.M., Lee, S.K., Ravichandran, V. and Supramanian, S., 2009. The Fekete-Szegö coefficient functional for transforms of analytic functions, Bull. Iranian Math. Soc., 35, no. 2, 119-142, 276.

Ali, R.M., Lee, S.K., Ravichandran, V., and Supramanian, S., 2012. Coefficient estimates for biunivalent Ma-Minda starlike and convex functions, Appl. Math. Lett. 25 (3), 344-351.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S., 2017. Chebyshev polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions, arXiv: 1605.08224v1.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S., 2016. Construction of second Hankel determinant for a new subclass bi-univalent functions, Turkish. J. Math.; doi: 10.3906/mat-1507-39.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S., 2014. Initial coefficient bounds for a general class of bi-univalent functions, Int. J. Anal., Article ID 867871,4 pp.

Altınkaya, Ş., Yalçın, S., 2016. Upper bound second Hankel determinant for bi-Bazilevič, Mediterr. J. Math. 13, no. 6, 4081-4090.

Baricz, Á., Dimitrov, D.K., Orhan, H., Yağmur, N., 2016a. Radii of starlikeness of some special functions, Proc. Amer. Math. Soc. 144(2016), 3355-3367.

Baricz, Á., Kupán, P.A., Szász, R., 2014. The radius of starlikeness of normalized Bessel functions of the first kind, Proc. Amer. Math. Soc. 142(2014), 2019-2025.

Baricz, Á., Orhan, H., Szász, R., 2016b. The radius of α-convexity of normalized Bessel func tions of the first kind, Comput. Methods Funct. Theory 16(2016), 93-103.

Baricz, Á., Toklu, E., Kadıoğlu, E., 2017. Radii of starlikeness and convexity of Wright Function, Math. Commun. 22, 1-21. (in press).

Baricz, Á., Singh, S., 2017. Zeros of some special entire functions, Proc. Amer. Math. Soc., doi 10.1090/proc./13927.

Baricz, Á., Szász, R., 2014. The radius of convexity of normalized Bessel functions of the first kind, Anal. Appl. 12(2014), 485-509.

Baricz, Á., Szász, R., 2015. The radius of convexity of normalized Bessel functions, Anal. Math. 41(2015), 141-151.

Baricz, Á., Szász, R., 2016c. Close-to-convexity of some special functions, Bull. Malay. Math. Sci. Soc. 39(2016), 427-437.

Baricz, Á., Yağmur, N., 2017. Geometric properties of some Lommel and Struve functions, Ramanujan J. 42(2017), 325-346.

Bieberbach, L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. Sitzungsberichte Preussische Preuss. Akad. Wiss. 38, 940–955.

Branges, L.,1985. A proof of the Bieberbach conjecture. Acta Math. 154, 137–152.

Brannan, D.A., Clunie, J.G. (Eds.), 1980. Aspects of Contemporary Complex Analysis (Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham; July 1–20, 1979), Academic Press, New York and London.

Brannan, D.A., Taha, T.S., 1986. On some classes of bi-univalent functions, Studia Universitatis Babeş-Bolyai. Math., 31 (2) 70-77.

Brown, R.K., 1960. Univalence of Bessel functions, Proc. Amer. Math. Soc. 11(1960), 278-283.

Brown, R.K., 1962. Univalent solutions of $W'' + pW = 0$, Canad. J. Math. 14, 69-78.

Brown, R.K.,1982. Univalence of normalized solutions of of $W''(z) + pW(z) = 0$, Int. J. Math. Math. Sci. 5(1982), 459-483.

Bulut, S., Magesh, N., Abirami, C., 2017. A comprehensive class of analytic bi-univalent functions by means of Chebyshev polynomials, J. Fract. Calc. Appl. 8, no 2, 32-39.

Cantor, D.G., 1963. Power series with integral coefficients, Bull. Amer. Math. Soc., 69, 362–366.

Caratheodory, C., 1912. Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Ann. 72, no. 1, 107-144.

Çağlar, M., Orhan, H., Yağmur, N., 2013. Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions, Filomat 27, no 7, 1165-1171.

Deekonda, V.K., Thoutreedy, R., 2015. An upper bound to the second Hankel determinant for functions in Mocanu class, Vietnam J. Math., 43, 541–549.

Deniz, E., Çağlar, M., Orhan, H., 2015. Second Hankel determinant for bi-starlike and bi-convex functions of order β, Appl. Math. Comp. 271, 301-307.

Dimitrov, D.K., Cheikh, Y.B., 2009. Laguerre polynomials as Jensen polynomials of Laguerre-Pólya entire functions, J. Comput. Appl. Math. 233, 703-707.

Doha, E.H., 1994. The first and second kind Chebyshev coefficients of the moments of the general-order derivative of an infinitely differentiable function, Int. J. Comput. Math. 51,23-35.

Duren, P., 1983. *Univalent Functions*. New York: Springer- verlag.

Dziok, J., Srivastava, H. M. (1999). Classes of analytic functions associated with the generalized hypergeometric function. *Appl. Math. Comput.*(103(1)), 1-13.

Dziok, J., Raina, R.K., Sokól, J., 2015. Applications of Chebyshev polynomials to classes of analytic functions, C.R. Math. Acad. Sci. Paris, 353(5), 433-438.

Fekete, M., Szegö, G., 1933. Eine Bermerkung Über Ungerade Schlichte Funktionen, J. London Math. Soc., 85-89.

Frasin, B.A., Aouf, M.K., 2011. New subclasses of bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 1569-1573.

Garabedian, P.R., Schiffer, M., 1955. A proof of the Bieberbach conjecture for the fourth coefficient, J. Rational Mech. Anal., 4, 427-465.

Goluzin, G. M., 1969. *Geometric Theory of Functions of a Complex Variable* . American Mathematical Society.

González, M. O., 1992. *Complex Analysis Selected Topics.* Marcel Dekker, Inc.

Goodman, A. W., 1983. *Univalent Functions.* Polygonal Pub House.

Gorenflo, R., Luchko, Y., Mainardi, F., 1999. Analytical properties and applications of the Wright function, Fract. Calc. Appl. Anal. 2, 383-414.

Graham, I., and Kohr, G., 2003. *Geometric Function Theory in One and Higher Dimensions.* New York: Marcel Dekker, Inc.

Grenander, U., Szegö, G. 1958. *Toeplitz form and their applications*, California Monographs in Mathematical Sciences, Univ. California Press, Berkeley.

Ismail, M.E.H., Muldoon, M.E., 1995. Bounds for the small real and purely imaginary zeros of Bessel and related functions, Methods Appl. Anal. 2, 1-21.

Kanas, S., Srivastava, H.M., 2000. Linear operators associated with k-uniformly convex functions, Integral Transforms Spec. Funct. 9 121–132. http://dx.doi.org/10.1080/10652460008819249.

Keogh, F.R., Merkes, E.P., 1969. A coefficient inequality for certain classes of analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc. 20, 8-12.

Koebe, P., 1909. Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imagiñarer Substitutionsgruppe. Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen, Math-Phys. Kl., 68–76.

Koebe, P., 1912. Über eine neue Methode der konformen Abbildung und Uniformisierung.Nachr. Kgl. Ges. Wiss. G¨ottingen, Math-Phys. Kl., 844–848.

Kreyszig, E. and Todd, J., 1960. The radius of univalence of Bessel functions, Illinois J. Math. 4, 143-149.

Lee, K., Ravichandran, V., Supramaniam, S., 2013. Bounds for the second Hankel determinant of certain univalent functions, J. Inequal. Appl., 281, 1-17.

Lewin, M., 1967. On a coefficient problem for bi-univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 18 63–68.

Löwner, K., 1923. Untersuchungen über schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises I. Math. Ann. 89, 103–121.

Luke, Y. L., 1969. *The Special Functions and Their Approximations*. London: Academic Press.

Luke, Y. L., 1975. *Mathematical Functions and their Approximations*. New York, London: Academic Press Inc.

Magesh, N., Yamini, J., 2012. Coefficient bound for a certain subclass of bi-univalent functions, Int. Math. Forum, 8 (27) 1337-1344.

Mustafa, N., 2016. Geometric properties of normalized Wright functions, Math. Comput. Appl. 21 Art. 14, 10 pp.

Mustafa, N., 2017. Integral operators of the normalized Wright functions and their some geometric properties, GU. J. Sci. 30, 333-343.

Mustafa, N., 2017. Univalence of certain integral operators involving normalized Wright functions, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sr. A1 Math. Stat. 66, 19-28.

Mustafa, N. Upper bound for the second Hankel determinant of certain subclass of analytic and bi-univalent functions, arXiv-1702.06826.

Netanyahu, E., 1969. The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in $|z| < 1$, Arch. Ration. Mech. Anal., 32, 100-112.

Noonan, J.W., Thomas, D.K., 1976. On the second Hankel determinant of areally mean p-valent functions, Trans. Amer. Math. Soc., 223, (2) 337-3346.

Olver, F. W., 1974. *Asymptotic and Special Functions*. New York: Academic Press.

Orhan, H., Deniz, E., Raducanu, D., 2010. The Fekete-Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains. Comput Math Appl; 59: 283-295.

Orhan, H., and Güneş, E. 2009. Neighborhoods and partial sums of analytic functions based on Gaussian hypergeometric functions. *Indian Journal of Mathematics* (51(3)), 489-510.

Orhan, H., Magesh, N. and Balaji, V.K., 2016. Fekete-Szegö problem for certain classes of Ma-Minda bi-univalent functions, Afr. Mat., 27: 889-897.

Orhan, H., Magesh, N. and Balaji, V.K., 2017a. Second Hankel determinant for certain class of biunivalent functions defined by Chebyshev polynomials, arXiv:1705.03313.

Orhan, H., Magesh, N., Yamini, J., 2016. Bounds for the second Hankel determinant of certain bi-univalent functions, Turkish J. Math., 40, no. 3, 679-687.

Orhan, H., and Raducanu, D., 2010. On certain subclasses of analytic functions of complex order defined by generalized hypergeometric functions. *Punjab University Journal of Mathematics*(42), 25-40.

Orhan, H., and Raducanu, D., 2009. Fekete-Szegö problem for strongly starlike functions associated with generalized hypergeometric functions. *Mathematical and Computer Modelling* (50), 430-438.

Orhan, H., Toklu, E., Kadıoğlu, E., 2017b. Second Hankel determinant problem for k-bi-starlike functions, Filomat, 31:12, 3897-3904.

Orhan, H., Toklu, E., Kadıoğlu, E., 2017c. Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions involving Chebyshev polynomials (arXiv: 1706.07937).

Orhan, H., and Yağmur, N., 2013. Geometric properties of generalized Struve functions. The Scientific Annals of "Al.I. Cuza" University of Iasi.

Pederson, R.N., 1968. A proof of the Bieberbach conjecture fort he sixth coefficient, Arc. Rational Mech. Anal., 31, 331-351.

Pederson, R.N., Schiffer, M., 1972. A proof of the Bieberbach conjecture fort he fifth coefficient, Arc. Rational Mech. Anal, 45, 161-193.

Pommerenke, C., 1975. *Univalent Functions*, Vandenhoeck & Rubrecht, Göttingen.

Ponnusamy, S., and Sabapathy, S., 1997. Geometric properties of generalized hypergeometric functions. *Ramanujan J.*(1(2)), 187-210.

Robertson, M.S., 1936. On the theory of univalent functions, Ann. Math., 37, 374-408.

Prajapat, J.K., 2015. Certain geometric properties of the Wright function, Integral Transforms Spec. Funct. 26, 203-212.

Prajapat, J.K., 2016. Geometric properties of the Wright functions, J. Rajasthan Acad. Phys. Sci. 15, 63-71.

Raza, M., Din, M.U., Malik, S.N., 2016. Certain geometric properties of normalized Wright functions, J. Funct. Spaces 2016, Article ID 1896154, 8 pp.

Sălăgean, G.S., 1983. Subclasses of univalent functions, in Complex Analysis, Fifth Romanian-Finnish Seminar, Vol. 1013 of Lecture Notes in Mathematics, pp. 362–372, Springer, Berlin, Germany.

Silverman, H. 1978. Subclasses of starlike functions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 23, 1093-1099.

Srivastava, H.M., Bansal, D., 2015. Coefficient estimates for a subclass of analytic and bi-univalent functions, J. Egyptian Math. Soc. 23, 242-246.

Srivastava, H.M., Bulut, S., Çağlar, M. and Yağmur, N., 2013. Coefficient estimates for a general subclass of analytic and bi-univalent functions, Filomat 27 (5), 831-842.

Srivastava, H.M., Eker, S.S., Ali, R.M., 2015. Coefficient bounds for a certain class of analytic and bi-univalent functions, Filomat 29, 1839-1845.

Srivastava, H.M., Gaboury, S., Ghanim, F., 2015. Coefficient estimates for some subclasses of $m - fold$ symmetric bi-univalent functions, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. No. 41, 153-164.

Srivastava, H. M., Joshi, S.B., Joshi, S.S., Pawar, H., 2016. Coefficient estimates for certain subclasses of meromorphically bi-univalent functions, Palest. J. Math. 5 (Special Issue: 1), 250-258.

Srivastava, H.M., Mishra, A.K., Gochhayat, P., 2010. Certain Subclasses of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 23 (10), 1188-1192.

Srivastava, H.M., Murugusundaramoorthy, G., Magesh, N., 2013. Certain subclasses of bi-univalent functions associated with the Hohlov operator, Global J. Math. Anal. 1 (2), 67-73.

Szász, R., 2015. About the radius of starlikeness of Bessel functions of the firrst kind, Monatsh. Math. 176(2015), 323-330.

Szász, R., 2010. On starlikeness of Bessel functions of the first kind, in: Proceedings of the 8th Joint Conference on Mathematics and Computer Science, Kom_arno, Slovakia, 9 pp.

Trimble, S.Y., 1975. A coefficient inequality for convex univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. Volume 48, no. 1.

Watson, G. N., 1944. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge: Cambridge University Press.

Whittaker, T., Watson, G.N., 1996. A course of modern analysis, reprint of the fourth (1927) edition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press, Cambvridge.

Wilf, H. S., 1962. The radius of univalence of certain entire functions, Illinois J. Math. 6, 242-244.

Wright, E.M., 1933. On the coefficients of power series having exponential singularities, J.Lond. Math. Soc 8, 71-79.

Xu, Q.H., Gui, Y.C. and Srivastava, H.M., 2012. Coefficient estimates for a certain subclass of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett., 25, 990-994.

Xu, Q.H., Xiao, H.G. and Srivastava, H.M., 2012. A certain general subclass of analytic and bi-univalent functions and associated coefficient estimate problems, Appl. Math. Comput. 218, 11461-11465.

Zaprawa, P., 2014. On the Fekete-Szegö problem for classes of bi-univalent functions. Bull Belg Math Soc Simon Stevin; 21: 169-178.

Zaprawa, P.,2014. Estimates of initial coefficients for bi-univalent functions. Abstr Appl Anal.; 2014: 357480.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Mersin ilinin Anamur İlçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimlerini Hatay ilinin İskenderun ilçesinde tamamladı. 1998 yılında Atatürk üniversitesi fen edebiyat fakültesi matematik bölümünü kazandı ve 2002 yılında bu bölümü başarı ile tamamladı. Aynı yıl Atatürk üniversitesi fen bilimleri enstitüsünde tezsiz yüksek lisans eğitimine başladı ve 2004 yılında bu eğitimini başarı ile tamamladıktan sonra 2005 yılında askerlik görevini ifa etti. 2006 yılında Atatürk üniversitesi fen bilimleri enstitüsünde analiz ve fonksiyonlar teorisi bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı ve 2011 yılında başarı ile tamamladı. 2013 yılında Atatürk üniversitesi fen bilimleri enstitüsünde analiz ve fonksiyonlar teorisi bilim dalında hâlen devam etmekte olan doktora eğitimine başladı. Çeşitli özel eğitim kurumlarında matematik ve geometri öğretmeni olarak çalıştıktan sonra 2009 yılında Ağrı İbrahim Çeçen üniversitesinde öğretim görevlisi olarak yerleşti. Hâlen bu üniversitede öğretim görevlisi olarak çalışmakta olup evli ve iki çocuk babasıdır.

ESERLERİ

Orhan, H., Toklu, E., Kadıoğlu, E., 2017. Second Hankel Determinant Problem for k-bi-starlike Functions, Filomat 31:12, 3897-3904.

Baricz, A., Toklu, E., Kadıoğlu, E., 2017. Radii of starlikeness and convexity of Wright functions, Mat. Com. 22, 1-21.(accepted).

Orhan, H., Toklu, E., Kadıoğlu, E., 2017. Second Hankel determinant for certain subclasses of bi-univalent functions involving Chebyshev polynomials (arXiv: 1706.07937).

Baricz, A., Çağlar, M., Deniz, E., Toklu, E., Radii of starlikeness and convexity of regular Coulomb wave functions (arXiv: 1605-06763).

SEMİNERLER

2016- Geometric Properties of Coulomb Wave Function/ International Conference on Complex Analysis and Related Topics The 14th Romanian-Finnish Seminar, Bükreş, Romanya (23 Haziran 2016).