KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RASGELE HACİMLİ GENİŞLETİLMİŞ (s, S) TİPLİ MODELLERİN ANALİTİK VE ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Tülay KESEMEN

KASIM 2006
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

RASGELE HACİMLİ GENİŞLETİLMİŞ (s, S) TİPLİ MODELLERİN ANALİTİK VE ASİMPTOTİK YÖNTEMLERLE İNCELENMESİ

Tülay KESEMEN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Doktor"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 19.10.2006
Tezin Savunma Tarihi : 24.11.2006

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tahir KHANİYEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Hakkı YAVUZ
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Fikri ÖZTÜRK
Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT

TRABZON 2006

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, “Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modeller” denilen yarı-Markov bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik sürecin olasılık karakteristikleri ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir.

Tez konusunu belirleyen ve tezde ele alınan problemlerin çözülmesinde her türlü yardımlarını esirgemeyen danışman hocam, sayın Prof. Dr. Tahir KHANİEV’e en içten duygularımla teşekkür eder ve saygılarımı sunarım.

Tez çalışmam süresince, değerli öneri ve yardımlarından dolayı Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. İhsan Ünver’e, Bakü Devlet Üniversitesi öğretim üyelerinden Doç. Dr. Rovshan ALİYEV’e ve İstatistik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK’e teşekkür ederim.

Çalışmam süresince desteklerinden dolayı K.T.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ve İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü mensuplarına, manevi desteklerinden dolayı Doç. Dr. Funda KARAÇAL’a ve Öğr. Gör. Dr.Yasemin SAĞIROĞLU’na teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, doktora çalışmam süresince yaptıkları maddi ve manevi desteklerinden dolayı eşim Öğr. Gör. Orhan KESEMEN’e ve aileme şükranlarımı sunarım.

Tülay KESEMEN
Trabzon 2006

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ II

İÇİNDEKİLER III

ÖZET V

SUMMARY VI

ŞEKİLLER DİZİNİ VII

SEMBOLLER DİZİNİ VIII

1. GENEL BİLGİLER 1

1.1. Giriş 1

1.2. Literatür Araştırması 4

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR 10

2.1. Fiziksel Model 10

2.2. Sürecin Matematiksel İnşası 11

2.3. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İncelenmesi 13

2.4. Sürecin Bir Boyutlu Dağılımlarının İncelenmesi 17

2.5. Sürecin Toplamsal Fonksiyonellerinin İncelenmesi 21

2.6. Sürecin Ergodikliği 25

2.7. Sürecin Ergodik Dağılımının Karakteristik Fonksiyonunun Sınır Fonksiyonelleri Yardımı ile İfade Edilmesi 31

2.8. Genel Durumda Ergodik Dağılımın 1. ve 2. Momentleri İçin Kesin İfadeler 36

2.9. Müdahaleninin Üstel Dağılım Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri için Kesin İfadeler 39

2.10. Müdahalenin Üstel Dağılım Olması Durumunda, X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri İçin Üçüncü Mertebeden Asimptotik Açılımlar 43

2.11. Müdahaleninin 2. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Kesin İfadeler 56

2.12. Müdahaleninin 2. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Asimptotik Açılımlar..................... 59

2.13. Müdahaleninin 3. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Kesin İfadeler 64

2.14. Müdahaleninin 3. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Asimptotik Açılımlar..................... 67

2.15. Müdahaleninin Gamma Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri için Kesin İfadeler 71

2.16. Müdahalenin Gamma Dağılımı Olması Durumunda, X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri İçin Asimptotik Açılımlar 77

3. BULGULAR 94

4. İRDELEME.. 95

5. SONUÇLAR 96

6. ÖNERİLER 99

7. KAYNAKLAR.. 100

ÖZGEÇMİŞ.. 108

ÖZET

Bu çalışmada, “Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modeller” denilen yarı-Markov bir model ele alınmış ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak oluşturulmuştur. Ayrıca oluşturulan sürecin sonlu boyutlu dağılımları $\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra, sürecin sınır ve toplamsal fonksiyonelleri matematiksel olarak oluşturulmuş ve incelenmiştir. Bazı zayıf şartlar altında, sürecin ergodik olduğu gösterilmiş ve ergodik dağılım fonksiyonunun açık şekli bulunmuştur. Bunlara ek olarak sürecin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiş ve bundan yararlanarak, ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımına ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, kesin formüller elde edilmiştir. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımına ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri ve sürecin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edilmiştir. Aynı zamanda, ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda süreç için zayıf yakınsaklık teoremi verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yenileme Süreci, Rasgele Yürüyüş Süreci, Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci, Sınır Fonksiyoneli, Toplamsal Fonksiyonel, Wald Özdeşliği, Spitzer Özdeşliği, Basamak Değişkenleri, Zayıf Yakınsama, Asimptotik Davranış

SUMMARY

Investigation of extended models of type (s,S) with random volume by analytic and asymptotic methods

In this study, a semi-Markov model called "The extended model of type (s,S) with random volume" is considered and the stochastic process expressed by this model is constructed mathematically. Furthermore, finite-dimensional distributions of the constructed process are given by means of the probability characteristics of renewal process $\{T_n\}$ and random walk $\{Y_n\}$. Besides, boundary functional and additive functional of this process are constructed mathematically and investigated.

Under some weak assumptions the ergodicity of this process is discussed and function of ergodic distribution of this process is found explicitly.

In addition to these, the characteristic function of ergodic distribution of this process is expressed by means of boundary functional $S_{N(z)}$. Exact formulas for the first four moments of ergodic distribution of this process are obtained by using them when the random variable ζ_1 has an exponential distribution with $\lambda > 0$ parameter, Erlang distribution with second and third order, Gamma distribution with (α, λ) parameter. Moreover, based on the above results, asymptotic result for the first four moments and skewness, kurtosis of ergodic distribution of process are obtained when the random variable ζ_1 has an exponential distribution with $\lambda > 0$ parameter, Erlang distribution with second and third order, Gamma distribution with (α, λ) parameter as $\lambda \to 0$.

At the same time, weak convergence theorem is also given for the process when the random variable ζ_1 has an exponential distribution with $\lambda > 0$ parameter.

Key Words: Renewal Process, Random Walk Process, Semi-Markov Random Walk Process, Boundary Functional, Additive Functional, Wald Identity, Spitzer Identity, Ladder Variables, Weak Convergence, Asymptotic Behaviour.

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

Şekil 1. Rasgele Hacimli genişletilmiş (s,S) tipli model olan özel bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü. 13

SEMBOLLER DİZİNİ

$a < b$	a küçüktür b
$a > b$	a büyüktür b
$a \leq b$	a küçüktür veya eşittir
$a \geq b$	a büyüktür veya eşittir
$a \in A$	a A'nın elemanıdır
$a \notin A$	a A'nın elemanı değildir
$a = b$	a eşittir b
$a \neq b$	a farklıdır b
$\forall$	her
$\exists$	en az bir
∞	sonsuz
$a < \infty$	a sonludur
(a, b)	açık aralık
$[a, b)$	sağdan açık soldan kapalı aralık
$(a, b]$	soldan açık sağdan kapalı aralık
$[a, b]$	kapalı aralık
$\lvert x \rvert$	x sayısının mutlak değeri
$A \subseteq B$	B kümesi A kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
$A \supseteq B$	A kümesi B kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
min A	A kümesinin minimumu
max A	A kümesinin maksimumu
inf A	A kümesinin infumunu
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	$a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarını toplamı
$f_1 * f_2$	f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı
f^{*n}	f fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
$P\{.\}$	$\{.\}$ olayının olasılığı

$P_z\{.\}$	$\{.\}$ olayının koşullu olasılığı
$E(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E(\xi^n)$	ξ rasgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$E\|\xi\|$	ξ rasgele değişkeninin mutlak momenti
$Var(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin varyansı
$Var_z(\xi)$	ξ rasgele değişkeninin koşullu varyansı
$f(x)\big\|_{x=0}$	f(x) fonksiyonu x=0 noktasındaki değeri
d_zF	F fonksiyonunun z deişkenine göre diferansiyeli
$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[F(x,y)]$	$F(x,y)$ 'nin x değişkenine göre n. kısmi türevi
$\lim_{x\to\infty} f(x)$	x ∞ a giderken f(x) fonksiyonunun limiti

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Olasılık teorisinde stokastik kavramı, ilk kez bu teorinin kurucularından olan J. Bernoulli (1654–1705) tarafından kullanılmaya başlamıştır. Sonra bu kavram bir süre unutulmuş olmasına rağmen ünlü olasılıkçı V. Bortkiyeviç (1868–1913)'in büyük katkısıyla yirminci asrın başlarında yeniden kullanılmaya başlamıştır.

Stokasik süreç kavramı ise sistematik olarak A.N. Kolmogorov ve A.Y. Hinçin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A.N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreçler olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken, A.Y. Hinçin çalışmalarında stasyoner süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Bu alanda emeği geçen başlıca bilim adamları arasında N. Wiener, W. Feller, J. Dobb, R. Fisher, J. Neumann ve H. Cramer gibi olasılıkçıların isimlerini anabiliriz.

Stokastik modellerin özellikle de Markov veya yarı-Markov stokastik modellerin uygulama alanları hızla genişlemektedir. Örneğin güvenirlilik, stok kontrol, risk, matematiksel biyoloji ve sigorta teorisine ilişkin bazı problemler Markov veya yarı-Markov modeller ile çözülebilmektedir. Literetürde, özellikle sigorta teorisi ilgili pek çok çalışmalar bulunmaktadır. Örneğin, J. Debicka ilgi düzeyi ve gelecek - yaşam süresinin rastgele olduğu bir sigorta kontratından gelen gelecek ödemelerinin nakit para değerleri için bir model çalışmıştır. Sigorta poliçelerinin bir portfolyosuna ait gelecek ödemeleri akışının nakit para değerinin ilk iki adımına formül oluşturmak üzere bir matris formu türetmiştir. İlgi düzeyi için ise Wiener yöntemini şart koşmuştur [20].

Bir insanın yaşamında yapılan sigorta, sigorta sözleşmesinin iki farklı bileşimi şekilde yapılandırıldığı bilinmektedir.

—Belli tarihlerde, sabit miktarlarda ödenen yıllık hayat ödenekleri,

—Sigortalının ölümünde ödenen sabit miktarda hayat sigortaları.

Aktüel teoride, gelecek tazminatları (yıllık ödeneğe veya hayat sigortasına göre ödenen), bazı ilgi düzeylerince bugüne iskonto edilir. Bu, rasgele değişken olan tazminatın bugünkü değerini üretir. Pratikte, aktüel değer olarak adlandırılan, sigortalı bireyin yaşam süresine dair tazminatların bugünkü değerinin anlamını bulmak önemlidir. Tazminatların bugünkü değerinin ilk iki momentinin hesaplanması gerekir. Çünkü bunlar primlerin değerlendirilmesi ve hayat sigortası kontratlarının portföy koşullarının saptanması için önemli bir rol oynarlar. Stokastik ölüm sıklığında tazminatların bugünkü değeriyle ilgilenen çok fazla literatür vardır. Yıllık ödenek kontratları için bazı özel yaşam ödeneği kontratlarının gelecek ödeme eğilimlerinin (bir sürekli-zaman modeli için) bugünkü değerlerinin standart sapmasını ve ana değerini hesaplamıştır. Bir kesikli-zaman model için beklenen değer ve yakın-yıllık ödeneğin bugünkü değerinin standart sapmasını vermektedir [80]. Hayat sigortası sorununda, portföy ve geçici sigorta, tazminatların bugünkü değerlerinin verildiği anlarda, Parker tarafından analiz edilmiştir [81].

Diğer taraftan, hayat sigortası matematiksel olarak; sigortalıdan sigortacıya akan prim ödemeleri akışı ile (karşı yönde), hayat sigortası ürününde sabit miktarlar olduğunda, gelecek nakit akışları belirleyen bir dizi seriler olarak hesaba katılır. Bu nedenle, sıfır zamanına gerileyen sigorta kontratından gelen gelecek nakit akışı olarak, tazminatın şimdiki değerinin benzerdir. Gelecek ödeme akışlarının anlarının analizi için, Parker'a başvurunuz [80]. Discrete-time modeli için hayat sigortası poliçelerinin (geçici kapsam, bağış, kuramsal bağış) genel bir portföyosunun tazminat yükümlülüklerinden gelen gelecek nakit akışının bugünkü değerine ait açıklamalar, Parker tarafından analiz edilmiştir [81]. Yine araba sigortaları modelleri ile stokastik çalışmayı Gourieroux ve Jasiak vermiştir. Yani, onlar tamsayı değerli otoregresif (INAR) modelini gözlemlenemeyen hetorejenlikle açıklamışlardır. Modeli araba sigortasında prim yenilemeye uygulamışlardır ve negatif binomial dağılıma dayanan standart yöntemle karşılaştırmışlardır. Primi alacak kayıtlarına ve alacak dönüşlerinin zamanlamasına bağlamışlardır[35].

Gajek L., farklı zaman modellerinde iflas dağılımlarının sigorta firmaları üzerindeki olumsuz etkilerini incelemiş ve iflasın zaman dağılımını aşağıdan ve yukarıdan sınırlayan bir algoritma geliştirmiştir. Artıca algoritmayı bir monoton integral operatörü üzerine kurmuş ve alt ve üst sınırların birbirlerine zarar dağılımlarının kesin değerlerinin üstel oranlarını yaklaştırmıştır [31].

Bu çalışmada ise, iflas anına ek olarak ifade edilen modelin stasyoner karakteristikleri de ayrıntılı bir biçimde ele alınmaktadır. Özellikle, asimptotik yöntemleri uygulayarak alınan borç miktarının ortalamasının yüksek olduğu durumlarda ve bazı koşullarda, modeli ifade eden sürecin ilk dört momentleri için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmektedir. Bu çalışmamızda kullanılan asimptotik yöntemler bir matematiksel araç olarak kullanıldığını ve borç miktarının en büyük olduğunda sürecin sayısal karakteristikleri için asimptotik açılımların elde edileceğini vurgulamamız gerekir. Gerçek sistemlerde genellikle borç miktarı yukarda varsaydığımız gibi sonsuz büyüklükte olamaz. Bu durumda elde edilen açılımların ilk üç teriminden yardımıyla bulunan yaklaşık formüller, ortalama borç miktarının çok da büyük olmayan değerlerinde bile geçerli olacaktır.

Gerek Markov ve gerekse yarı-Markov modelleri ile ilgili olarak pek çok teorik çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmaların önemli bir bölümünde sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da, uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek özellikte değillerdir. Oysa uygulamadaki bazı sorunlara net çözümler üreten hatırı sayılır araştırmalarda vardır. Ancak bu araştırmalarda incelenen modellerin gereğinden fazla idealize edilmiş olmaları önemli bir eksiklik olarak karşımıza çıkmaktadır. Örneğin, Saaty'nin ele aldığı (s,S) tipli modelleri banka sistemlerinin veya sigorta şirketlerinin çalışmalarına uygulamak mümkündür [87]. Diğer yandan, bu modele göre çalışabilen bir banka sistemine, sistemdeki toplam sermaye miktarının belli bir sınır düzeyinin altına inmediği sürece sisteme bir miktar ekleme yapmak mümkün değildir. Böyle bir varsayım, ele alınmış modelin matematiksel olarak incelenmesini kolaylaştırmasına karşın, gerçekçi değildir. Örneğin, büyük banka sistemlerinde paranın akışını optimal idare edebilmek için bu sisteme sürekli olarak bir miktar paranın eklenmesi gerekir. Bu durumda, bankadaki paranın rasgele miktarını, Saaty'nin sunduğu klasik (s,S) modeli ile vermek mümkün olmamaktadır. Bu ve buna benzer birçok problemdeki benzer zorluklar yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin kullanılmasıyla aşılabilmektedir.

Bu nedenle, bu çalışmada, rasgele müdahaleli (s,S) tipli modellerin bazı genişlemeleri ele alındıktan sonra, bu modelleri ifade eden Stokastik süreçler matematiksel olarak oluşturulup, hem uygulamada hem de teorik bakımdan önemli bazı özellikleri incelenecektir.

Başlangıç olarak, bu konuda elde edilen kesin (analitik) formüllerin karmaşık yapılarından dolayı (örneğin; çok katlı integraller, çok katlı toplamlar v.s.) somut pratik problemlerin çözümü için kullanmak neredeyse imkânsızdır. (Bazı basit özel durumlar hariç). Bu nedenle ele alınacak problemlerin hem analitik hem de asimptotik yöntemlerle önemli özelliklerinin incelenmesi gerekir. Bilindiği gibi, yenileme süreçleri, rasgele yürüyüş süreçleri ve harmonik yenileme ölçüleri için son yıllarda birçok asimptotik formüller elde edilmiştir [16,87]. Bu sonuçlarda, göz önünde bulundurularak, ele alınacak modeller için gerekli kesinliğe sahip olan birçok asimptotik formüllerin elde edilmesi amaçlanmaktadır.

Çalışmamız kapsamında incelenen rasgele yürüyüş süreçleri ve yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerine ilişkin kaynaklar özetlenerek aşağıda bir alt alt bölüm şeklinde verilmiştir.

1.2. Literatür Araştırması

Bu çalışmada, stokastik süreçlerin önemli bir sınıfını oluşturan “Rasgele Müdahaleli Genişletilmiş (s,S) tipli modeller” ele alınacaktır. Böylece, arz-talep miktarlarını ve onların ortaya çıkma anlarını, rasgele değişkenler dizisi yardımıyla ifade ettikten sonra, belirli yenileme ve rasgele yürüyüş süreçlerini tanımlayarak, bu kavramların aracılığıyla fiziksel model, özel bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci biçiminde matematiksel olarak tanımlamak mümkün olacaktır. İlk aşamada bir veya iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin son yıllardaki gelişimini incelemeye çalışalım. Bilindiği gibi yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri yarı-Markov süreçlerinin özel bir halidir. Yarı-Markov süreç kavramı ise ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda, Levy [67], Smith [98], ve Takacs [105] gibi olasılıkçılar tarafından ortaya atılmıştır. Ancak yarı-Markov süreclerinin tümünde durum uzayı sonlu olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlendiğinden bu kavramın genelleştirilmesi zorunlu olmaktaydı. Bu nedenle Çınlar [17], Gihman ve Skorohod [32], Serfoza [89], Ezhov ve Korolyuk [26] çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci tanımlarını vermişlerdir. Örnek olarak, Gihman ve Skorohod tarafından verilen tanımı inceleyelim.

$(\Omega, \Im, P_x)$, $x \in X$, olasılık uzayları ailesi verilmiş olsun ve bir (Ω, σ, P_x) olasılık uzayında tanımlanmış bir $\{X_n : n \geq 0\}$ Markov zincirinin verilmiş olduğunu kabul edelim.

Bu zincirin,

$$P_x\{X_0(w) = x\} = 1$$

olmak üzere, durum uzayı (X,B) ve geçiş olsılığı ise $\Pi(x, B)$ olsun. $\eta_1(w)$, $\eta_2(w)$, $\eta_3(w)$,... bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip, $\{X_n : n \geq 0\}$ ailesinden [0,1] aralığında düzgün dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$’nin negatif olmayan herhangi bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olduğunu varsayalım. $\varphi_{x,y}(t)$ ise $F_{x,y}(t)$ fonksiyonu, $\varphi_{x,y}(\xi)$’nin [0,1]’de dağılım fonksiyonu olacak şekilde negatif olmayan bir fonksiyon olsun, burada ξ rasgele değişkeni [0,1] aralığında düzgün dağılıma sahip bir rasgele değişkendir. Bu durumda,

$$\tau_k = \varphi_{x_{k-1},x_k}(\eta_k)$$

olmak üzere,

$$X(t) = X_{k-1}(w),\ \text{eğer } \sum_{i=1}^{k-1}\tau_i \le t < \sum_{i=1}^{k}\tau_i \ \text{ ise,}$$

ifadesiyle tanımlanan sürece bir yarı-Markov süreç adı verilir. Burada $\sum_{i=1}^{0} = 0$ ’dur.

Nasirova [75] ise 1970 yılında Ghiman ve Skorohod’un vermiş olduğu yarı-Markov süreç tanımının özel bir durumu olan yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci tanımını vermiştir. Şimdi bu tanımı verelim:

$\{(\xi_i,\eta_i) : i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinden tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler çiftleri dizisi olup, ξ_i ’ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1, i = 1,2,...$ olsun. Bu takdirde,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n}\eta_i\ ,\ \text{eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n}\xi_i \le t < \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i = T_{n+1} \ \text{ ise,}$$

ile tanımlanan X(t) stokastik sürecine bir yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci adı verilir.

Yarı-Markov süreçleri ile ilgili birçok önemli problemleri Borovkov [11,12,13,14], Korolyuk ve Turbin [60], Çınlar [17,18,19], Takacs [104,105], Korolyuk ve Pirliev [61], Tomko [106], Smith [98,99,100,101], Spitzer [102,103], Feller [29,30], Anisimov [5,6,7], Gnedenko ve Kovalenko [33], Shurenkov [91,92] v.s., çalışmalarında ayrıntılı bir biçimde incelemişlerdir.

Stokastik süreçlerin esas sınır fonksiyonlarının incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu konuda ilk çalışmayı Spitzer [102] yapmıştır. Onun çalışmalarını, Rogozin [84] ve Gusak ve Korolyuk [37] toplam dizisi için genelleştirmiştir. Daha sonra Rogozin [85] aynı çalışmaları artımları bağımsız olan süreçler için de hesaplanmış ve genel sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca Gusak ve Korolyuk [39] sürecin değerinin ve supremumunun ortak dağılımını vermiştir. Skorohod [96] sıçramalarının işareti aynı olan süreçlerin özellikleri ile verilen bir seviyeye ilk kez ulaşması anı arasındaki ilişkileri ortaya koymuştur. Borovkov [11] sıçramalarının işareti aynı ve artımları bağımsız olan süreçlerin belirli bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımı ile sürecin değerinin dağılımı arasındaki ilişkileri vermiştir. Levy [67] ise böyle bir sürecin değerinin infimumu ile supremumunun ortak dağılımını vermiştir.

Hem pratik hem de teorik bakımdan yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve bu süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Yarı-Markov sınıfına ait olan yenileme süreçleri için esas ergodik teorem 1975 yılında Smith [99] tarafından ispatlanmıştır. Ayrıca Ezhov ve Shurenkov [27] tarafından da yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ispatlanmıştır. Shurenkov [92] yarı-Markov süreçlerin ergodik dağılımının varlığı için gerek ve yeter şartları elde etmiştir.

Yarı-Markov süreçler için en genel durumda limit teoremleri Anisimov [5,6,7], Sil'vestrov [94,95], Dzhafarov, Nasirova ve Skorohod [23], Korolyuk ve Svishchuk [62] tarafından verilmiştir. Rasgele yürüyüş süreçleri için limit teoremleri ise Skorohod ve Slobodenyuk [97], Nasirova [75] ve Harlamov [40] tarafından verilmiştir.

Yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleriyle ilgili, fakat daha karmaşık olan süreçlerden biri de yarı-Markov toplam rasgele yürüyüş süreci olarak adlandırılan bir stokastik süreçtir. Bu süreçlere örnek olarak Nasirova'nın ele aldığı süreç gösterilebilir [75]. Bu süreci kısaca aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz.

$(\Omega, \Im, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere $\{(\xi_i^+, \eta_i^+, \xi_i^-, \eta_i^-):\ i = 1,2,...\}$, bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rasgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. ξ_i^+, η_i^+ ve ξ_i^- rasgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rasgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım. Bu takdirde,

$$X^+(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^+ \text{, eğer } T_n^+ = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^+ \le t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^+ = T_{n+1}^+,\ n \ge 1 \text{ ise,}$$

ve

$$X^-(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^- \text{, eğer } T_n^- = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^- \le t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i^- = T_{n+1}^-,\ n \ge 1 \text{ ise,}$$

olmak üzere (burada $T_0^+ = T_0^- = 0$ 'dır)

$$X(t) = X^+(t) + X^-(t)$$

ile tanımlanan X(t) stokastik süreci *yarı-Markov toplam rasgele yürüyüş süreci* olarak adlandırılır. Bu süreç için önemli olan bütün olasılık karakteristikleri incelenmiştir.

Yarı-Markov süreçlerinin incelenmesinden sonra, uygulamada ortaya çıkan bazı problemlerin incelenmesi ve çözümlenmesi için yarı-Markov sürecinin kendisi değil onun değişik tipleri, yani bariyerli tipleri incelenmeye başlamıştır. Bunlar bir bariyerli veya iki bariyerli olarak sınıflandırılabilir. Sözü edilen bariyerler ise ortaya çıkan somut problemlere bağlı olarak yansıtan, tutan, yutan, v.s., olabilir.

Nasirova [75] sıfır seviyesinde tutan bariyere sahip olan bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini şu şekilde oluşturmuştur: $\{(\xi_i, \eta_i): i = 1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler çiftleri dizisi olup ξ_i 'ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i > 0\} = 1,\ i = 1,2,...$ olsun. Bu durumda,

$$X_n = \max\{0, X_{n-1} + \eta_n\},\ n \geq 1;\ X_0 = z > 0$$

olmak üzere,

$$X(t) = X_n \text{ eğer } T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan X(t) stokastik süreci *sıfır seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci* oluşturacaktır.

Nasirova [75,76] bu sürecin dağılımını, sürecin esas sınır fonksiyonallarının dağılımını incelemiştir. Nasirova ve Skorohod [73] bu süreç için ergodik teoremi ispatlanmış ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu elde etmişlerdir. Nasirova [75] ve Borovkov [12] bu süreç için seriler şeklinde limit teoremlerini kanıtlamışlardır.

Stok kontrol, kuyruk ve güvenirlik teorilerinin bir çok önemli problemi iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla verilebilir ve bu bariyerler belirli türlerden olabilirler. Hem pratik hem de teorik bakımdan önemli olmasından dolayı iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçleri hakkında çok sayıda bilimsel çalışma yapılmıştır. Ancak yapılan bu çalışmaların çoğu sonlu durum uzayına sahip rasgele yürüyüş süreçleri için sınır-değer problemlerine ayrıldığı görülmüştür (Korolyuk ve Borovskikh [63], Lotov [68,69,70], Prabhu [82], Zhang [110], El-Shehawey [24], Weesakul [108], Kastenbaum [44], v.s.).

Sınır-değer probleminin incelenmesi önemli olmasına karşın ele alınan süreçlerin kendi karakteristiklerinin incelenmesi de oldukça önemlidir. Bu nedenle iki bariyerli rasgele yürüyüş süreçlerinin kendi karakteristiklerine ilişkin bazı bilimsel çalışmalar da mevcuttur (Feller [30], Spitzer [102], Borovkov [12], Lotov [68], Afanas'eva ve Bulinskaya [1, 2, 3], Khaniev [47–59], Zhang [110], v.s.). Bunlardan Borovkov [12] iki bariyerli ve bir boyutlu rasgele yürüyüş süreçleri için ergodik teoremini ispatlamış ve ergodik dağılım fonksiyonu için bir formül ortaya koymuştur. Feller [30] bariyerlerinin her ikisi de yansıtan olan veya her ikisi de yutan olan bir boyutlu rasgele yürüyüş süreçlerini kurmuş ve bu süreçlerin bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamıştır.

Literatürde iki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri hakkında da bazı bilimsel çalışmalar bulunmaktadır. Ancak bu çalışmalarda bariyerlerin her ikisinin de tutan veya yutan olduğu durumlar ele alınmıştır. Khaniev [47-48] iki tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecini aşağıdaki gibi oluşturmuştur.

$\{(\xi_i,\eta_i): i=1,2,...\}$ aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişken çiftleri dizisi olup ξ_i'ler pozitif değerli, yani $P\{\xi_i>0\}=1, i=1,2,...$, olsun. Bu takdirde,

$$X_n = \min\{\beta, \max\{0, X_{n-1}+\eta_n\}\},\ n\geq 1;\ X_0 = z\in[0,\beta]$$

olmak üzere,

$$X(t)=X_n \text{, eğer } T_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \leq t < \sum_{i=1}^{n+1}\xi_i = T_{n+1} \text{ ise,}$$

ile tanımlanan X(t) stokastik süreci sıfır ve $\beta>0$ *seviyelerinde tutan bariyerli bir yarı-Markov rasgele yürüyüş süreç* oluşturacaktır.

Khaniev [47-48] bu süreç için sürecin dağılımını, verilen bir seviyeye ilk kez ulaşma anının dağılımının ve sürecin beklenen değer ve varyansı gibi bazı olasılık karakteristiklerini hesaplamış ve süreç için ergodik teoremini kanıtlamıştır. Bu süreç için limit teoremlerini vermiş ve sürecin asimptotik durumunu incelemiştir.

Ayrıca Nasirova, Yapar ve Khaniev [77] sıfır seviyesinde yansıtan ve β, $\beta>0$, seviyesinde tutan bariyerli yarı-Markov toplam rasgele yürüyüş sürecinin şu şekilde kurmuş ve çalışmışlardır: $(\Omega,\Im,P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere, $\{(\xi_i^+,\eta_i^+,\xi_i^-,\eta_i^-):\ i=1,2,...\}$ bu uzay üzerinde tanımlı bağımsız ve aynı tür dağılmış rasgele değişkenler dörtlüleri dizisi verilmiş olsun. ξ_i^+,η_i^+ ve ξ_i^- rasgele değişkenlerinin pozitif değerli ve η_i^- rasgele değişkeninin ise negatif değerli olduğunu varsayalım.

$$T_k^+=\sum_{i=1}^{k}\xi_i^+ \text{ ve } T_k^-=\sum_{i=1}^{k}\xi_i^-\ \ k\geq 1,\ T_0^+=T_0^-=0$$

olmak üzere, T_k^+ ve T_k^- rasgele değişkenlerini artan sırada yeniden düzenleyelim ve bu düzenlemeyi T_k ile gösterelim.

$$\eta_k=\begin{cases}\eta_i^+, & T_k=T_i^+\\ \eta_j^-, & T_k=T_j^-\end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu takdirde,

$$X_k = \min\{\beta, |X_{k-1} + \eta_k|\},\ k \geq 1,\ X_0 = z > 0$$

olmak üzere,

eğer $T_k =\leq t < T_{k+1}$ ise, $X(t) = X_k$

ile tanımlanan stokastik süreç *sıfır seviyesinde yansıtan ve* $\beta > 0$ *seviyesinde tutan bariyerli bir yarı-Markov toplam rasgele yürüyüş süreci* oluşturur.

Nasirova, Yapar ve Khaniev [77] bu sürecin dağılım fonksiyonunun Laplace dönüşümü ile sürecin ilk kez yansıma anının ve ilk kez tutulma anının dağılımlarını vermişlerdir. Ayrıca süreç için seriler şeklinde limit teoremlerini ispatlamışlardır.

Bunlara ek olarak, Maden'in [72], 'Yansıtan ve tutan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci üzerine', Dikmenoğlu'nun [22], ' İki yansıtan bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci' ve Küçük'ün [65], 'İki bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçlerinin asimptotik yöntemlerle incelenmesi üzerine' adlı doktora tezlerinde iki bariyer arasında hareket eden bir parçacığın hareketi incelenmiştir. Bu çalışmalarda, bu iki bariyer arasındaki hareket için matematiksel model oluşturulmuş ve gereken olasılık karakteristikleri hesaplanmıştır.

Ayrıca, özel bir bariyere sahip yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri hakkında çalışmalar da literatürde mevcuttur. Kesemen [46], 'Genişletilmiş (s,S) tipli modellerin analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmesi' adlı yüksek lisans tezinde, fiziksel model özel bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci yardımıyla ifade edilmiştir. $X(t)$ süreci bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak oluşturulmuştur. Ayrıca bu sürecin olasılık karakteristikleri, kesikli müdahaleyi ifade eden (borç alma stratejisi) ζ_1 rasgele değişkeninin $[0,\beta]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olması durumunda, analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir.

Bu çalışmada ise, borç alma stratejisi olarak yorumlanan ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımlarına ve (α,λ) parametreli gamma dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için kesin formüller ve asimptotik açılımlar ile sürecin ergodik dağılımın basıklık ve çarpıklık katsayılarının asimptotik açılımlar elde edilecektir. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılım olması durumunda, sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsaklık teoremi ispat edilecektir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Fiziksel Model

Bu çalışmada, ele alınacak olan stokastik süreci oluşturulmadan önce aşağıdaki gerçek modellere göz atalım.

Model 1. Merkez bankasındaki para rezervlerinin optimal yönetilmesi:

Merkez bankasındaki para stoklarının belirli bir aralıklarla (zaman aralıklarının olasılık karakteristikleri verilebilecektir) fazladan ekler yaparak para rezervlerinin kritik seviyeye inmesini önlemek ve dolayısıyla Merkez bankasına bağlı olan kuruluşların dünya ve ülke şartlarından doğan kritik anlarda zor duruma düşmesini önlemek için bu çalışmada, elde edilen sonuçları uygulamak mümkün olacaktır. Ayrıca, bu sonuçlardan, Merkez bankasında ve hazinede olan para rezervlerinin en uygun dağıtımını veya yönlendirilmesini sağlamak için optimal ölçütler çıkarılabilecektir.

Model 2. Su barajlarındaki stok miktarının optimal kullanımı:

Barajda toplanan suyun artışı, bu baraja akan ırmaklardaki duruma ve o bölgede yağan yağmurun miktarına bağlı olarak, değişkenlik gösterir. Diğer taraftan barajdan sulama için ayrılan sular, buharlaşama, yanlara sızma sonucunda kaybedilen sular ve çeşitli amaçlar için diğer bölgelere veya ülkelere verilen su miktarı da barajdaki suyun seviyesinin azalmasına neden olan başlıca faktörlerdir. Bu faktörlerin hemen hemen hepsi rasgele anlarda ve rasgele miktarlarda geçekleştiği göz önünde bulundurulursa, barajdaki su düzeyinin belli bir sınır düzeyinden aşağıya inmeden önce önlem alınmalı ve dolayısıyla sistemsiz kullanımdan dolayı ortaya çıkabilecek sakıncalı durumların önlenmesi gerekir. Bu çalışma kapsamında sözü edilen önlemler ve sakıncalı durumların çözülmesine bilimsel katkılar sağlanabilecektir. Duruma göre çeşitli kararlar alınabilir; örneğin, barajdan diğer ırmakların suyunun akıtılması, mümkünse akıtılabilir veya stokta bulunan daha kanaatkar biçimde kullanımı tavsiye edilebilir.

Model 3. Sigorta şirketlerinin çalışması:

Bilinmektedir ki, sigorta şirketlerinin anaparası müşterilerinin ödedikleri ücretlerle artan, rasgele anlarda gerçekleşen kazalar sonucu oluşan zarardan dolayı müşteriye ödenen miktarlarla da azalır. Şansa bağlı olarak, sigorta şirketlerinde işlerin bir süre iyi gitmesi, bu şirketlerin uzun bir süre istikrarlı bir biçimde çalışabilmesinin garantisi olamaz. Çünkü (şansızlıktan da olsa) arka arkaya gelen kazalar şirketi iflasın eşiğine getirebilir. Bu durumla karşılaşmak istemeyen sigorta şirketleri zamanında ek önlemler almak mecburiyetindedir. Bu model Şekil 1'de grafiksel olarak gösterilmiştir.

Bu çalışmanın sonuçları, sözü edilen önlemlerin niteliği ve niceliği hakkında bilgiler verirken, sigorta şirketlerindeki ana paranın optimal biçimde yönlendirilmesinin (şansa bırakılmaksızın) matematiksel algoritmasınıda geliştirmiş olacaktır.

Şimdi, yukarıda açıklanan gerçek modelleri ifade edebilen stokastik süreci matematiksel olarak oluşturmaya çalışalım.

2.2. Sürecin Matematiksel İnşası

$\{(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)\}$, $n \geq 1$, (Ω, F, P) aynı olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler üçlüleri dizisi olsun. Ayrıca ξ_1 rasgele değişkenleri yalnız pozitif değerler, η_1 hem pozitif hem de negatif değerler, ζ_1 ise (s,S) aralığından değerler alabilsinler. Yani, $P\{\xi_1 > 0\} = 1$; $P\{\eta_1 > 0\} > 0$; $P\{\eta_1 < 0\} > 0$ ve $P\{\zeta_1 \in (s,S)\} = 1$'dir. Burada s ve S sabit değerler olup, $0 < s < S < \infty$'dur.

$\xi_1, \eta_1,$ ve ζ_1 rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonlarının bilindiğini varsayalım ve onları sırası ile aşağıdaki gibi gösterelim:

$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}$;

$F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}$;

$\pi(v) = P\{\zeta_1 \leq v\}$,

burada, $t \in (0, +\infty)$; $x \in (-\infty, +\infty)$; $v \in (s, S)$'dir

$\{T_n\}$ yenileme dizisini ve $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş sürecini aşağıdaki gibi inşa edelim:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \quad Y_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \quad n \geq 1,$$

burada, $T_0 = Y_0 = 0$'dır.

Şimdi de, tam değerler alan $\{N_n\}$, $n \geq 0$ rasgele değişken dizisini tanımlayalım:

$$N_1 = N(z) = N_z = \inf\{k \geq 1 : z + Y_k < s\},$$

burada, $N_0 = 0$'dır.

$$N_{n+1} = \inf\{k \geq N_n + 1 : \zeta_n + Y_k - Y_{N_n} < s\}, \quad n \geq 1,$$

burada, $\inf(\varnothing) = +\infty$ şartı kabul edilmiştir.

Ayrıca, $\tau_n = T_{N_n}$, $n \geq 1$ dir. Burada, $\tau_0 = 0$ ‘dır. Ve her $t > 0$ için, $\nu(t) = \max\{\ n \geq 0 :\ T_n \leq t\ \}$ olsun.

Şimdi de ele alacağımız stokastik süreci aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Her $t \in [\tau_n, \tau_{n+1})$, $n \geq 0$, için,

$$X(t) = \max\left\{\ 0,\ \zeta_n + Y_{\nu(t)} - Y_{N_n}\ \right\}$$

olsun.

Burada,

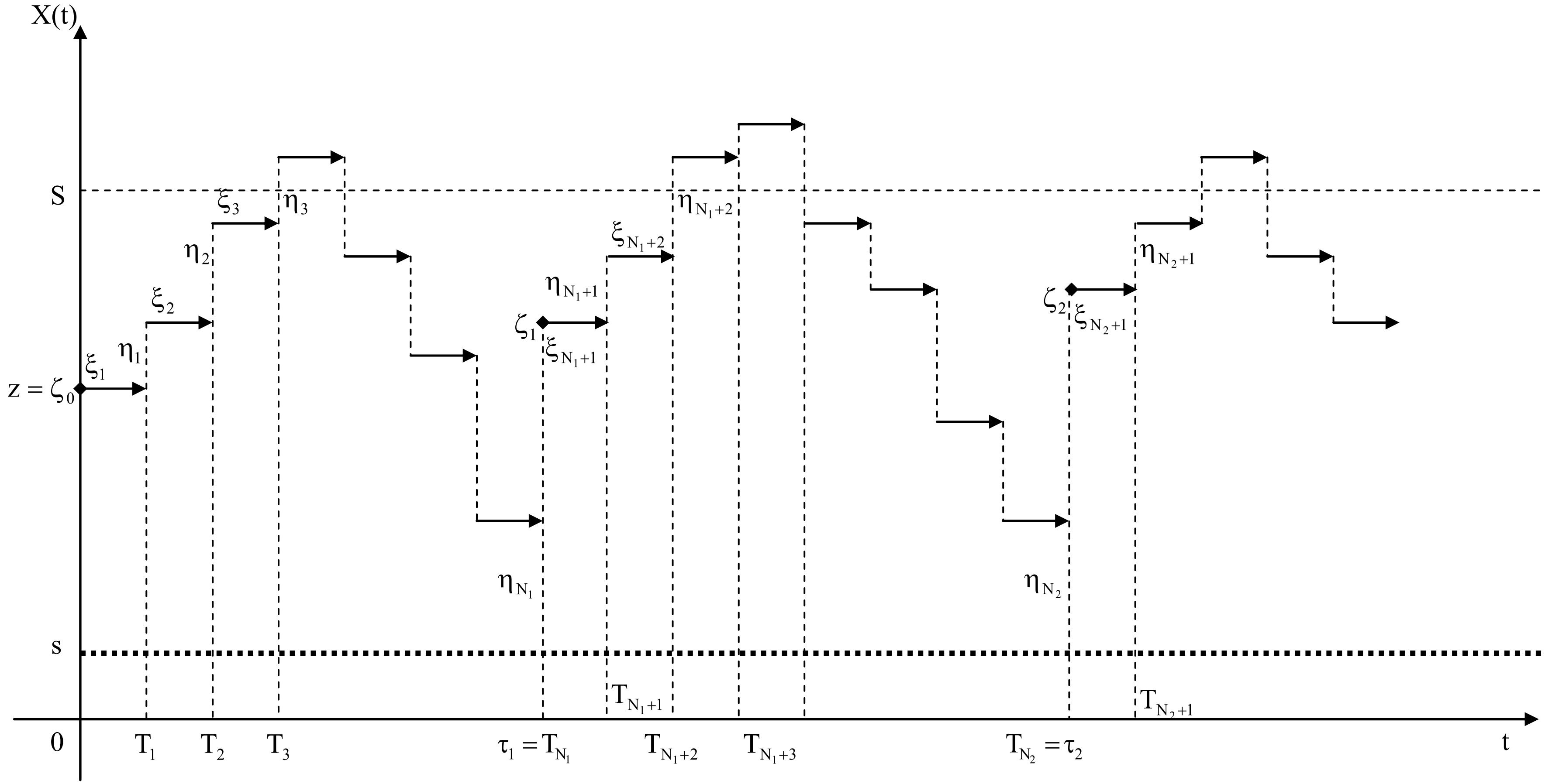
$\zeta_0 = z \in (s,S)$ ve $Y_{\nu(\tau_n + 0)} = Y_{N_n}$ ’dir.

X(t) süreci bir bariyerli belli bir Yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecidir. Bu süreç “Rasgele müdahaleli genişletilmiş (s,S) tipli yarı-Markov Model” olarak bilinen bir stokastik modelin matematiksel ifadesidir. Bu konudaki çalışmalardan farklı olarak (bak, örneğin, Nasirova, Yapar, Khaniev [77]) bu tezde stokun seviyesi, kontrol seviyesinden (s) aşağı olduğunda depoya, önceden belirlenmiş miktarda ek stok ilave etmeye gerek yoktur. Sadece eklemelerden sonra seviyenin s’den büyük olması yeterlidir. Bu özellik ele alınan modeli diğerlerinden farklı kılan önemli bir özelliktir.

Amacımız, bu sürecin bir boyutlu dağılımları, sınır ve toplamsal fonksiyonellerinin yanı sıra sürecin kendi karakteristiklerini de incelemektir. Bu nedenle önce sürecin sınır fonksiyonellerini inceleyelim.

2.3. Sürecin Sınır Fonksiyonellerinin İncelenmesi

τ_1 rasgele değişkenine, “sürecin ilk kez kontrol seviyesine ulaşma anı” denir ve bu rasgele değişken, sınır fonksiyoneli olup, sürecin bir çok karakteristiklerinin öğrenilmesinde büyük önem taşımaktadır. Özellikle, sürecin sonlu boyutlu ve ergodik dağılımlarının incelenmesi için, τ_1 rasgele değişkeninin dağılımının ve bazı sayısal karakteristiklerinin bilinmesi gereklidir. Bu nedenle bu kısımda, τ_1 rasgele değişkenin bazı olasılık ve sayısal karakteristikleri incelenecektir. Bunun için bazı gerekli notasyonları dahil edelim:



Şekil 1. Rasgele Hacimli genişletilmiş (s,S) tipli model olan özel bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin bir görünüşü.

$$\Phi_n(t) = P\{\, T_n \le t \,\} = \Phi^{*n}(t),\ n \ge 1,$$

$$\Phi_0(t) = \Phi^{*0}(t)$$

$$= \varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & t \ge 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases},$$

$$a_n(z) = P\left\{\, z + Y_k > s, \quad k = \overline{1,n} \,\right\},\ n \ge 1,$$

burada,

$a_0(z) = P\{\, z > s \,\} = 1$ 'dır.

Her sınırlı $M(t, x, z)$ fonksiyonu için, $M(t, x, \bullet)$ notasyonu ile aşağıdaki işlemi gösterelim:

$$M(t, x, \bullet) = \int_s^S M(t, x, z) d\pi(z).$$

Bu kısmın temel sonucunu aşağıdaki gibi ifade edelim.

Teorem 1. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri bağımsız iseler, bu takdirde, τ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu R(t) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$R(t) = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)],$$

burada,

$a_n \equiv a_n(\bullet)$ 'dır.

τ_1 'in koşullu dağılım fonksiyonunu R(t,z) ile gösterelim.

$$R(t,z) = P_Z\{\, \tau_1 \le t \,\},\ t \ge 0,\ z \in (s,S).$$

İspat. Tam olasılık formülüne göre,

$$1 - R(t,z) = P_z\{\, \tau_1 > t \,\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{\, \nu(t) = n;\ \tau_1 > t \,\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ T_n \le t < T_{n+1};\ T_{N_1} > t \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\, T_n \le t < T_{n+1};\ N_1 \ge n + 1 \,\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\, T_n \le t < T_{n+1};\ N_1 > n \,\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\, T_n \le t < T_{n+1};\ z + Y_1 > s,\ z + Y_2 > s, \ldots, z + Y_n > s \,\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{\, T_n \le t < T_{n+1} \,\} P\left\{\, z + Y_k > s,\ k = \overline{1,n} \,\right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n(z)$$

$$= (1 - \Phi(t)) a_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n(z)$$

$$= 1 - \Phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n(z)\text{'dir.} \qquad (1)$$

Dolayısıyla,

$$R(t,z) = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n(z)\text{'dir.} \qquad (2)$$

(2) eşitliğinin her tarafı $\pi\{dz\}$ ile çarpılıp, s'den S'ye kadar integrallenirse,

$$R(t) \equiv R(t, \bullet) \equiv P\{\, \tau_1 \le t \,\} = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n \ \text{olur.}$$

Burada,

$$a_n \equiv a_n(\bullet) = \int_s^S a_n(z) d\pi(z)\text{'dur.}$$

Böylece teorem ispatlanmış olur. ■

Not. Bazı özel durumlarda, τ_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonunu açık biçimde yazmak mümkündür. Örneğin, ξ_1 rasgele değişkeni, $\alpha > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunda, $\Phi_n(t)$ fonksiyonu n. mertebeden Erlang dağılım fonksiyonu olacağına göre R(t) dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi açık şekilde yazılabilir:

$$R(t) = 1 - e^{-\alpha t} - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(\alpha t)^n}{n!} e^{-\alpha t}.$$

Fakat dağılım fonksiyonlarının n kat konvolüsyon çarpımını her zaman hesaplamak yukarıdaki gibi kolay değildir. Bu nedenle τ_1 rasgele değişkeninin momentlerini inceleyebilmemiz için, τ_1'in dağılım fonksiyonunun Laplace-Stiltijes dönüşümünü ele almamızda fayda vardır. Bu bölümde ve daha sonralarda da sınırlı M(t,x,z) fonksiyonunun

Laplace ve Laplace-Stiltijes dönüşümleri sırasıyla $\widetilde{M}(\lambda, x, z)$ ve $M^*(\lambda, x, z)$ ile gösterilecektir. Yani,

$$\widetilde{M}(\lambda, x, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} M(t, x, z)\, dt\,;$$

ve

$$M^*(\lambda, x, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} d_t M(t, x, z)\text{'dir.}$$

Burada, $\lambda > 0$ 'dır.

Şimdi de, aşağıdaki sonucu verelim:

Teorem 2. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri bağımsız iseler, bu takdirde, τ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun Laplace –Stiltijes dönüşümü, ξ_1 rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunun Laplace-Stiltijes dönüşümü ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$L_\tau(\lambda) \equiv R^*(\lambda) \equiv E(e^{-\lambda\tau_1}) = \varphi_\xi(\lambda) - \left(1 - \varphi_\xi(\lambda)\right)\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varphi_\xi(\lambda))^n\,;$$

burada,

$$\varphi_\xi(\lambda) = \Phi^*(\lambda) \equiv E(e^{-\lambda\xi_1})\text{ 'dır.}$$

İspat. Teorem 1'in sonucuna göre,

$$\begin{aligned} E(e^{-\lambda\tau_1}) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} dR(t) \\ &= R^*(\lambda) = \Phi^*(\lambda) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[(\Phi^*(\lambda))^n - (\Phi^*(\lambda))^{n+1}\right]a_n \\ &= \varphi(\lambda) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varphi(\lambda))^n (1 - \varphi(\lambda)) \\ &= \varphi(\lambda) - (1 - \varphi(\lambda))\sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varphi(\lambda))^n \text{ 'dır.} \end{aligned} \tag{3}$$

(3) eşitliğinden sonsuz serinin, her $\lambda > 0$,değeri için sonlu olduğu kolayca görülür ki, $|\varphi(\lambda)| = \left|Ee^{-\lambda\xi_1}\right| \le E\left|e^{-\lambda\xi_1}\right| < 1$ 'dır.

Böylece, τ_1 rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu, ξ_1 rasgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu ile (3)'deki gibi ifade edilebilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar. ■

Pratik problemlerin çözümü için çoğu zaman, τ_1 rasgele değişkeninin beklenen değer ve varyansı gerekmektedir. Bu nedenle aşağıda, τ_1'in beklenen değeri ve varyansı hesaplanacaktır.

Sonuç 1. Eğer ξ_1 ve N_1 rasgele değişkenlerinin beklenen değerleri sonlu ise, bu durumda, τ_1 rasgele değişkenin beklenen değeri de sonludur ve aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$E(\tau_1) = E\xi_1 EN_1, \tag{4}$$

burada,

$$EN_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_s^S a_n(z)\, d\pi(z) \text{ 'dır.}$$

İspat. (4) eşitliğini, Wald özdeşliğinden yaralanarak, direkt olarak $\tau_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i$ tanımından veya Teorem 2'den elde etmek mümkündür. ■

Sonuç 2. ξ_1 ve N_1 rasgele değişkeninin 2. momentleri sonlu iseler, bu takdirde, τ_1 rasgele değişkenin varyansı sonludur ve aşadaki gibi hesaplanabilir:

$$Var(\tau_1) = Var(\xi_1)EN_1 + Var(N_1)E(\xi_1)^2 \tag{5}$$

İspat. (5)'in ispatı Wald özdeşliğinden basit hesaplamalar yaparak elde edilebilir. ■

Not. Not edelim ki; $E(\eta_1) < 0$ olduğu takdirde, $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş süreci 1 olasılığı ile $-\infty$'a gider. Dolayısıyla, her $z \in (s, S)$ için n'nin yeterince büyük değerlerinde $z + Y_n < 0 < s$ olacaktır. Yani N_1 rasgele değişkenin sonlu olması 1 olasılığına sahiptir.

2.4. Sürecin Bir Boyutlu Dağılımlarının İncelenmesi

$$M(t, x, \bullet) = \int_s^S M(t, x, z)\, d\pi(z);$$

$$a_n(x, z) = P\left\{ z + Y_k > s, \quad k = \overline{1,n}\,; \;\; z + Y_n \le x \right\};$$

$$b_n(z) = P\left\{ z + Y_k > s, \;\; k = \overline{1,n} \right\};$$

$$Q(t,x,z) = P_z\{\, X(t) \le x \,\};$$

olsun.

Bu takdirde, aşağıdaki sonuç doğrudur:

Teorem 3. ξ_1, η_1 ve ζ_1 rasgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız iseler, bu takdirde, X(t) sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonları Q(t,x,z), başlangıç rasgele değişkenin olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$Q(t,x,z) = G(t,x,z) + G(t,x,\bullet) * U_\tau(t) * R(t,z),$$

burada,

$$G(t,x,z) = [1-\Phi(t)]\varepsilon(x-z) + \sum_{n=1}^{\infty}[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)]a_n(x,z) \text{'dur.}$$

$U_\tau(t)$ fonksiyonu, τ_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olan $R(t,\bullet)$'nin oluşturduğu yenileme fonksiyonudur ve

$$R(t,z) = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty}[\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)]b_n(z) \text{'dir.}$$

İspat.

$Q(t,x,z) = P_z\{\, X(t) \le x \,\}$ olsun.

Burada,

$x \in [0,+\infty)$, $t \in [0,+\infty)$ ve $z \in [s,S]$'dır.

$$Q(t,x,\bullet) = \int_s^S Q(t,x,z)\pi\{dz\}$$

$$\begin{aligned} Q(t,x,z) &= P_z\{\, X(t) \le x \,\} \\ &= P_z\{\, t < \tau_1;\; X(t) \le x\} + P_z\{t \ge \tau_1;\; X(t) \le x \,\} \qquad (6) \end{aligned}$$

(6) eşitliğinin birinci terimini G(t,x,z) ile gösterelim. Yani,

$G(t,x,z) = P_z\{\, \tau_1 > t;\; X(t) \le x \,\}$ olsun.

(6) eşitliğini ikinci terimini ise aşağıdaki gibi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} P_z\{\, t \ge \tau_1;\; X(t) \le x \,\} &= \int_0^t P_z\{\, \tau_1 \in du;\; X(t) \le x \,\} \\ &= \int_0^t \int_s^S P_z\{\, \tau_1 \in du;\; \zeta_1 \in dv \,\} P_v\{\, X(t-u) \le x \,\} \\ &= \int_0^t \int_s^S Q(t-u,x,v) R(du,z) \pi\{dv\} \end{aligned}$$

$$= \int_0^t R(du, z) \int_s^S Q(t-u, x, v)\,\pi d\{v\} \tag{7}$$

$\int_s^S Q(t, x, z)\,\pi\{dz\} = Q(t, x, \bullet)$ notasyonunu dahil edelim. Bu notasyon göz önüne alındığında (7) ifadesi aşağıdaki şekli alır:

$$P_z\{\, t \geq \tau_1;\ \ X(t) \leq x \,\} = \int_0^t R(du, z) Q(t-u, x, \bullet).$$

Bu takdirde, (6) denklemi aşağıdaki gibi olur:

$$Q(t, x, z) = G(t, x, z) + \int_0^t Q(t-u, x, \bullet) R(du, z)$$

$$= G(t, x, z) + Q(t, x, \bullet) * R(t, z), \tag{8}$$

burada,

$M_1(t) * M_2(t) = \int_0^t M_1(t-u)\, dM_2(u)$'dur.

(8) integral denkleminde, her tarafı $\pi(dz)$'le çarpılıp, s'den S'ye integrallenirse,

$$Q(t, x, \bullet) = G(t, x, \bullet) + Q(t, x, \bullet) * R(t, \bullet) \tag{9}$$

denklemi elde edilir.

Kolayca görmek mümkündür ki, (9) denklemi $Q(t, x, \bullet)$ fonksiyonuna göre bir yenileme denklemidir (bak, [30], s.359). (9) denkleminin çözümünü aşağıdaki gibi verebiliriz (bak, [30], s.359).

$$Q(t, x, \bullet) = G(t, x, \bullet) * U_\tau(t), \tag{10}$$

burada, $U_\tau(t)$ fonksiyonu, $R_\tau(t)$ dağılım fonksiyonun oluşturduğu bir yenileme fonksiyonudur.

Yani,

$U_\tau(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\tau^{*n}(t)$'dir.

Burada $F_\tau^{*n}(t)$ ile $F_\tau(t)$ dağılım fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımını göstermektedir. Böylece,

$F_\tau^{*0}(t) = \varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ ve $F_\tau^{*1}(t) = F_\tau(t)$'dır.

Şimdi de, (10) daki ifade (8) formülünde yerine yazılırsa;

$$Q(t,x,z) = G(t,x,z) + G(t,x,\bullet) * U_{\tau}(t) * R(t,z), \tag{11}$$

elde edilir.

Böylece, eğer G(t,x,z) ve R(t,z) fonksiyonları, başlangıç rasgele değişkenlerinin olasılık karakteristikleri ile ifade edilirse, sürecin bir boyutlu dağılımları elde edilmiş olur. Bu nedenle şimdi de, G(t,x,z) ve R(t,z) fonksiyonlarını, ξ_1, η_1 ve ζ_1 rasgele değişkenlerinin olasılık karakteristikleri ile ifade edelim.

G(t,x,z)'nin Hesaplanması:

$$\begin{aligned}
G(t,x,z) &= P_z\{\tau_1 > t;\ X(t) \le x\} \\
&= P_z\{t \in (0,\tau_1);\ X(t) \le x\} \\
&= P_z\{T_{N_1} > t;\ X(t) \le x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{\nu(t) = n;\ T_{N_1} > t;\ X(t) \le x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\{T_n \le t < T_{n+1};\ T_{N_1} > t;\ z + Y_n \le x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1};\ N_1 \ge n+1;\ z + Y_n \le x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \le t < T_{n+1}\} P\{N_1 \ge n+1;\ z + Y_n \le x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] P\{N_1 \ge n;\ z + Y_n \le x\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] P\left\{z + Y_n > s, k = \overline{1,n}\ ,\ z + Y_n \le x\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n(x,z)
\end{aligned} \tag{12}$$

burada,

$\Phi_n(t) = \Phi^{*n}(t)$'dır.

(12) ifadesini göz önüne alarak, G(t,x,z)'i aşağıdaki biçimde yazmak mümkündür:

$$G(t,x,z) = [1 - \Phi(t)] a_0(x,z) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] a_n(x,z) \tag{13}$$

burada,

$$a_0(x,z) = P\{\, z \le x \,\} = P\{\, x - z \ge 0 \,\} = \varepsilon(x - z)\text{'dır.} \tag{14}$$

$$R(t,z) = P_z\{\, \gamma_1 \le t \,\}$$

$$1 - R(t,z) = P_z\{\, \gamma_1 > t \,\} = \lim_{x\to\infty} G(t,x,z)$$

$$= 1 - \Phi(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] b_n(z)$$

burada,

$$b_n(z) = \lim_{x\to\infty} a_n(x,z) = P\left\{ z + Y_k > s,\ \ k = \overline{1,n} \right\}\text{'dır.}$$

Dolayısıyla,

$$R(t,z) = \Phi(t) - \sum_{n=1}^{\infty} [\Phi_n(t) - \Phi_{n+1}(t)] b_n(z)\text{'dır.}$$

2.5. Sürecin Toplamsal Fonksiyonellerinin İncelenmesi

Birçok pratik ve teorik problemlerin çözümünde, sürecin sınır fonksiyonelleri ve kendi karakteristiklerinin, yanı sıra, toplamsal fonksiyonelleri de önemli rol oynamaktadır. Fakat literatürde toplamsal fonksiyoneller, sınır fonksiyonelleri kadar ayrıntılı bir biçimde incelenmemiştir. Tüm bunlar göz önüne alınarak, bu bölümde ele alınan sürecin toplamsal fonksiyonellerinin bir boyutlu dağılımları incelenecektir.

$f : R^+ \to R$ keyfi sınırlı bir fonksiyon olsun. X(t) sürecinin toplamsal fonksiyonellerini, aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$J_f(t) = \int_0^t f(x(u))\,du, \qquad t \ge 0.$$

Amacımız $J_f(t)$ toplamsal fonksiyonelinin bir boyutlu dağılım fonksiyonlarının ikili dönüşümünü (Laplace-Fourier) hesaplamaktır.

Bu nedenle $\tilde{\tilde{M}}(\lambda, \mu, z)$ ve $M^{**}(\lambda, \mu, z)$ ile sınırlı $M(t, x, z)$ fonksiyonunun, sırasıyla Laplace-Fourier ve Laplace-Stiltijes-Fourier Stiltijes dönüşümlerini gösterelim. Yani,

$$\tilde{\tilde{M}}(\lambda, \mu, z) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\lambda t} e^{i\mu x} M(t, x, z)\,dt\,dx$$

ve

$$M^{**}(\lambda, \mu, z) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} dt \left\{ \int_{-\infty}^\infty e^{i\mu x} d_x\ \ M(t, x, z) \right\} \text{ olsun.}$$

Burada,

$\lambda \in R^{+}$ ve $\mu \in R$ 'dir.

$Q_f(t,x,z)$ ile $J_f(t)$'nin toplamsal fonksiyonelinin koşullu dağılım fonksiyonunu gösterelim:

$$Q_f(t,x,z) = P_z\{J_f(t) \le x\},$$

burada,

$t \ge 0$, $z \in (s,S)$, $x \in (-\infty,+\infty)$'dur.

Bu bölümün asıl sonucunu ifade etmek için aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$G_f(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\Big\{T_n \le t < T_{n+1}; z + Y_k > s; k = \overline{1,n};$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z+Y_k)\xi_{k+1} + (t - T_n) f(z + Y_k) \le x\Big\} \tag{15}$$

$$R_f(t,x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} P\Big\{T_n \le t; z + Y_k > s; k = \overline{1,n-1}; z + Y_n \le s;$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(z+Y_k)\xi_{k+1} \le x\Big\}\text{'dır.} \tag{16}$$

Şimdi de aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 4. ξ_1 ve η_1 rasgele değişkenleri bağımsız oldukları takdirde, $J_f(t)$ toplamsal fonksiyonellerinin bir boyutlu dağılım fonksiyonunun Laplace-Fourier ikili dönüşümü aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\tilde{\tilde{Q}}(\lambda,\mu,z) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,z) + \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda,\mu,\bullet) R_f^{**}(\lambda,\mu,z)\left[1 - R_f^{**}(\lambda,\mu,\bullet)\right]^{-1},$$

burada,

$G_f(t,x,z)$ ve $R_f(t,x,z)$ fonksiyonları, $\{\xi_n\}$ ve $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenleri dizilerinin olasılık karakteristikleri ile (15) ve (16) formülleri yardımı ile ifade edilir.

İspat. Önce $Q_f(t,x,z)$ fonksiyonu için yenileme tipli integral denklemi çıkartalım:

$$Q_f(t,x,z) = P_z\{J_f(t) \le x\}$$

$$= P_z\{\tau_1 > t;\ J_f(t) \le x\} + P_z\{\tau_1 \le t;\ J_f(t) \le x\} \tag{17}$$

(17) eşitliğindeki birinci terimi $G_f(t,x,z)$ ile gösterelim ve ikinci terimi de aşağıdaki şekilde yeniden yazalım:

$$P_z\{\tau_1 \le t;\, J_f(t) \le x\} = \int_0^t \int_s^S \int_{-\infty}^{+\infty} P_z\{\tau_1 \in du; X(\tau_1) \in dv; J_f(\tau_1) \in dy\} P_v\{J_f(t-u) \le x-y\}$$

$$= \int_0^t \int_s^S \int_{-\infty}^{+\infty} P_z\{\tau_1 \in du, J_f(\tau_1) \in dy\} P\{\zeta_1 \in dv\} Q(t-u,\ x-y, v)$$

$$= \int_0^t \int_s^S \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(du, dy, z) d\pi(v) Q(t-u,\ x-y, v), \qquad (18)$$

burada,

$$d\pi(v) = P\{\zeta_1 \in dv\}$$

ve

$R_f(du, dy, z) = P_z\{\tau_1 \in du;\ J_f(u) \in dy\}$’dur.

(17) eşitliği, (18)’de yerine yazılırsa,

$$Q_f(t, x, z) = G_f(t, x, z) + \int_0^t \int_s^S \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(du, dy, z) Q(t-u, x-y, v) d\pi(v) \qquad (19)$$

integral denklemi elde edilir.

$$\int_s^S Q_f(t-u, x-y, v) d\pi(v) = Q_f(t-u, x-y, \bullet)$$

notasyonu göz önüne alınarak (19) denklemi aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$Q_f(t, x, z) = G_f(t, x, z) + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(du, dy, z)\ Q(t-u,\ x-y, \bullet) \qquad (20)$$

(20) denkleminin her tarafı önce $e^{-\lambda t}$’ye sonra ise, $e^{i\mu x}$’e çarpılıp, sırasıyla t’ye ve x’e göre integrallenirse,

$$\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda, \mu, z) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda, \mu, z) + \tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda, \mu, \bullet) R_f^{**}(\lambda, \mu, z) \qquad (21)$$

denklemi elde edilir.

Bu denklemin her iki tarafı z’ye göre ortalanırsa,

$$\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda, \mu, \bullet) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda, \mu, \bullet) + \tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda, \mu, \bullet) R_f^{**}(\lambda, \mu, \bullet)$$

denklemi elde edilir. Buradan,

$$\tilde{\tilde{Q}}(\lambda, \mu, \bullet) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda, \mu, \bullet)\left[1 - R_f^{**}(\lambda, \mu, \bullet)\right]^{-1} \qquad (22)$$

olduğu görülür.

(22) formülü, (21)’de yerine yazılırsa,

$$\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda, \mu, z) = \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda, \mu, z) + \tilde{\tilde{G}}_f(\lambda, \mu, \bullet) R_f^{**}(\lambda, \mu, z)\left[1 - R_f^{**}(\lambda, \mu, z)\right]^{-1} \qquad (23)$$

eşitliği elde edilir.

Böylece, aranılan $\tilde{\tilde{Q}}_f(\lambda, \mu, z)$ fonksiyon $\tilde{\tilde{G}}_f(\lambda, \mu, z)$ ve $R_f^{**}(\lambda, \mu, z)$ ile ifade edilmiş olur.

Şimdi de $G_f(t, x, z)$ ve $R_f^{**}(t, x, z)$ fonksiyonlarını, başlangıç rasgele değişkenler dizisinin belirli olasılık karakteristikleri ile ifade edelim. Önce,

$G_f(t, x, z)$'i hesaplayalım:

$$G_f(t,x,z) = P_z\left\{ \tau_1 > t,\ J_f(t) \le x \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_z\left\{ \nu(t) = n;\ \nu_1 > n; \int_0^t f(X(u))du \le x \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ T_n \le t < T_{n+1};\ z + Y_k > s,\ k = \overline{1, n};\right.$$
$$\left. \sum_{k=0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} f(X(u))du + (t - T_n)f(z + Y_n) \le x \right\}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ T_n \le t < T_{n+1};\ z + Y_k > s,\ k = \overline{1, n};\right.$$
$$\left. \sum_{k=0}^{n-1} f(z + Y_k)\xi_{k+1} + (t - T_n)f(z + Y_n) \le x \right\} \tag{24}$$

burada, $\sum_{k=0}^{-1} = 0$ kabul edilmiştir.

Özetle,

$$G_f(t,x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left\{ T_n \le t < T_{n+1};\ z + Y_k > s,\ k = \overline{1, n};\right.$$
$$\left. \sum_{k=0}^{n-1} f(z + Y_k)\xi_{k+1} + (t - T_n)f(z + Y_n) \le x \right\} \text{'dır.} \tag{25}$$

Şimdi de, $R_f(du, dy, z)$'i hesaplanırsa,

$$R_f(du,dy,z) \equiv P_z\left\{ \tau_1 \in du; J_f(\tau_1) \in dy \right\}$$

$$= P_z\left\{ T_{N_1} \in du; \int_0^{T_{N_1}} f(X(t))dt \in dy \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_z\left\{ N_1 = n;\ \ T_n \in du; \int_0^{T_n} f(X(t))dt \in dy \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ T_n \in du; z + Y_k > s, k = \overline{1, n-1}; z + Y_k \le s; \right.$$

$$\left. \sum_{k=0}^{n-1} \int_{T_k}^{T_{k+1}} f(X(t))dt) \in dy \right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ T_n \in du; z + Y_k > s, k = \overline{1, n-1}; z + Y_n \le s; \right.$$

$$\left. \sum_{k=0}^{n-1} f(z + Y_k)\xi_{k+1} \in dy \right\}$$

elde edilir.

Buradan,

$$R_f(t, x, z) \equiv P_z\{\tau_1 \le t; J_f(\tau_1) \le x\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ T_n \le t; z + Y_k > s, k = \overline{1, n-1}; z + Y_k \le s; \right.$$

$$\left. \sum_{k=0}^{n-1} f(z + Y_k)\xi_{k+1} \le x \right\} \tag{26}$$

olduğu görülür.

Böylece teorem 4'ün ispatı tamamlanmış oldu. ■

2.6. Sürecin Ergodikliği

Yukarıdaki bölümlerde edinilen sonuçlardan da görüldüğü gibi, ister sürecin sınır ve toplamsal fonksiyonellerinin, isterse de sürecinin kendinin sonlu boyutlu dağılımlarının hesaplanması oldukça zordur. Bu zorluğu aşmak için sürecin stasyoner (durağan) karakteristiklerinin hesaplanması amaca yönelik bir aşamadır. Fakat, sürecin stasyoner karakteristiklerinin incelenebilmesi için, önce sürecin bazı koşullar altında ergodik olduğunu ispatlamak gereklidir. Bu nedenle, bu bölümde ele aldığımız X(t) sürecinin ergodikliği incelenecek ve ergodik dağılımın açık şekli bulunacaktır. Önce sürecin ergodikliğini belirten teoremi verelim.

Teorem 5. Başlangıç rasgele değişkenler dizisi için ek olarak aşağıdaki koşulları sağlasın:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 < 0$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişkendir.

Bu takdirde, $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat. Ele aldığımız $X(t)$ süreci literatürde "Kesikli Şans Karışımlı yarı-Markov Süreçleri" diye adlandırılan genel bir stokastik süreçler sınıfına aittir. Bu sınıf için Smith'in "anahtar yenileme teoremi" tipli genel ergodik teoremi literatürde bilinmektedir. (bak, [32], s.243 veya [91]).

Fakat genel durumda, bu teoremin şartları ve ifadesi oldukça karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu kısımda, sürecin özelliklerinden yararlanılarak, yeterince zayıf şartlar altında süreç için ergodik teorem ispatlanmaya çalışılacaktır. Hatırlatalım ki, ele alınan süreç için ergodik teoremini ispatlamak teorem 5'in koşulları sağlandığında, yukarıda adı geçen genel ergodik teoremin şartlarının da sağlandığı anlamına gelmektedir. Bu nedenle, ispat aşamalı bir şekilde verilecektir:

1. Aşama. Sürecin ergodik olduğunu gösterebilmemiz için öyle bir pozitif değerli, monoton artan rasgele değişkenler dizisi seçmemiz gerekiyor ki, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri bir ergodik Markov zinciri oluşturabilsin.

Bu koşullu sağlayan rasgele zaman anları olarak kısım 2.2'de tanımlanan $\{\tau_n\}$, $n \geq 0$, rasgele değişkenler dizisi ele alınabilir. Çünkü, tanımına göre 1 olasılığı ile $0 \equiv \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < ... < \tau_n < \tau_{n+1} < ...$ ve $X(\tau_n + 0) = \zeta_n$, $n \geq 1$,'dır.

$\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$, dizisi $[s,S]$ aralığında değerler alan, bağımsız ve aynı tür dağılıma $(\pi(B))$ sahip rasgele değişkenlerin oluşturduğu bir dizi olduğu için, doğrudan bir Markov zinciri olacaktır. Diğer taraftan, bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip olan $(\pi(B))$ rasgele değişkenlerin bir ergodik Markov zinciri oluşturdukları literatürde bilinmektedir (bak, [91]). Bu zincirin durağan dağılımı, ζ_1'in dağılımı olan $\pi(B)$ ile aynıdır. Böylece, genel ergodik teoremin 1. koşulunun sağlandığı görülür.

2.Aşama. Genel ergodik teoremin 2. şartı, yukarıda belirtildiği gibi $\{\tau_n\}$, $n \geq 1$, dizisinin 1. teriminin beklenen değerinin sonlu olmasıdır. 2. aşamadaki amacımız teorem 5'in şartları altında sözü edilen kuralın sağlandığını göstermektir. Diğer bir anlatımla, $E\tau_1 < \infty$ olduğunu göstermek yeterli olmaktadır. Verilen tanıma göre,

$$\tau_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i \text{ 'dir.} \tag{27}$$

$N_1 = N(z)$ rasgele değişkeni, $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenlerinin dizisi yardımıyla tanımlandığına ve $\{\eta_n\}$ dizisinin, $\{\xi_n\}$ dizisinden bağımsız olduğuna göre, (27) eşitliğine Wald özdeşliğini uygulamak mümkündür:

$$E(\tau_1) = E\xi_1 EN_1 \tag{28}$$

Teorem 5'in şartlarına göre $E\xi_1 < +\infty$'dur. Dolayısıyla, $E\tau_1 < \infty$ şartı, $EN_1 < \infty$ şartına denktir. $EN_1 < \infty$ olduğunu ispat etmek için rekord değerler yöntemini uygulayacağız. Bunun için aşağıdaki noyasyonları dahil edelim.

1) $S_n = -\sum_{i=1}^{n} \eta_i,\ n \geq 1$, burada, $\nu_0 = 0,\ \chi_0 = S_{\nu_0} = 0$'dır.

2) $\nu_1 = \inf\{k \geq 1 :\ S_k > 0\}$ tanımlanırsa,

$$\nu_n = \inf\{k \geq \nu_{n-1} + 1 :\ S_k > \chi_{n-1}\} - \nu_{n-1},\quad n \geq 1,$$

burada, $\chi_n = S_{\nu_n} - \chi_{n-1}$'dur.

Burada, $\sum_{i=1}^{n} \nu_i,\ n \geq 0$, tam değerli rasgele değişkenlerine $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ardışık artan basamak anları; $\chi_n,\ n \geq 0$, pozitif değerli rasgele değişkenlerine ise $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ardışık basamak yükseklikleri, $\sum_{i=1}^{n} \chi_i,\ n \geq 0$, ise $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin artan rekord değerleri denir. Literatürde, bu özelliklere sahip olan rasgele değişken ikililerine yani $\left(\nu_n, \sum_{i=1}^{n} \chi_i\right)$ çoğu zaman artan basamak değişkenleri denir. Yukarıda dahil ettiğimiz basamak değişkenlerinden yararlanarak N_1 rasgele değişkenini aşağıdaki şekilde yazmak mümkündür:

$$N_1 = N(z) = \sum_{i=1}^{H(z-s)} \nu_i\,, \tag{29}$$

burada, $\sum_{i=1}^{0} = 0$ kabul edilmiştir.

$$H(z-s) = \min\left\{n \geq 1 :\ \sum_{i=1}^{n-1} \chi_i \ \geq z - s\right\} \text{'dir.}$$

(29) eşitliğine Wald özdeşliği uygulanırsa,

$$E(N_1(z)) = E\left(\sum_{i=1}^{H(z-s)} \nu_i\right) = E\nu_1 E(H(z-s)) \text{ elde edilir.} \tag{30}$$

$-E\eta_1 = a > 0$ olduğunda ν_1 rasgele değişkeninin beklenen değerinin sonlu olduğu bilinmektedir (bak, [30], s. 396–397, Teorem 2(ii)).

Diğer taraftan, tanımına göre $H(z-s)$ rasgele değişkeni, $\{\chi_n\}$, $n \geq 0$, basamak yüksekliklerinin oluşturduğu bir yenileme sürecidir. Buna göre, $E(H(z-s)) = U_\chi(z-s)$ olup, her $z \in (s, S)$ için sonludur. Hatırlatalım ki, $E\eta_1 = -a < 0$ iken,

$$E\chi_1 = (-E\eta_1)E(\nu_1) > 0 \tag{31}$$

olduğu bilinmektedir (bak, [30], Teorem 2(ii), s.396–397)

Dolayısıyla, pozitif değerler alan $\{\chi_n\}$ rasgele değişkenlerinin oluşturduğu yenileme fonksiyonu olarak, $U_\chi(z-s)$ fonksiyonu da her sonlu z için sonlu olacaktır (bak, [30], s.185).

Böylece, $E\eta_1 = -a < 0$ olduğunda, her $z \in (s, S)$ için,

$$E(N(z)) < +\infty\text{'dur.} \tag{32}$$

$E(N(z))$'in sonlu olduğu, (28)'de göz önüne alınırsa, Teorem 5'in şartları altında $E(\tau_1) < +\infty$ olduğu görülür.

Dolayısıyla, Teorem 5'in koşulları altında, τ_1 rasgele değişkeninin beklenen değerinin sonlu olduğunu gösterdik. Bu, ergodik teoremin 2. aşamasının ispatını tamamlar.

Şimdi de ergodik dağılımın açık şeklini yazmaya çalışalım.

Teorem 6. Teorem 5'in koşulları sağlandığında her ölçülebilir sınırlı f(x) fonksiyonu $(f : [0, +\infty) \to R)$ için aşağıdaki bağıntı 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} J_f(t) \equiv \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u))\,du$$

$$= \frac{E\xi_1 \int_0^\infty f(x)\,dA(x,\bullet)}{E\xi_1 A(\infty,\bullet)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty f(x)\,dA(x,\bullet)}{A(\infty,\bullet)}$$

burada,

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^\infty a_n(x,z)\text{'dir.}$$

İspat. Genel ergodik teoreme göre (bak, [32], s.243) X(t) süreci ergodik ise, bu takdirde ölçülebilir ve sınırlı $f:[0,+\infty)\to R$ fonksiyonu için 1 olasılığı ile aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}J_f(t)=\frac{1}{E(\tau_1)}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_s^{S} f(x)P_z\{\tau_1>t; x(t)\in dx\}dt\, d\pi(z). \tag{33}$$

Amacımız (33) eşitliğinin sağ tarafını, $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin olasılık karakteristikleri ile ifade etmektir.

Hatırlatalım ki, kısım 2.4'de $G(t,x,z)$ ile aşağıdaki olasılık gösterilmiştir:

$$G(t,x,z)=P_z\{\tau_1>t; X(t)\le x\} \tag{34}$$

ve formül (13)'de $G(t,x,z)$ için aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$G(t,x,z)=(1-\Phi(t))\varepsilon(x-z)+\sum_{n=1}^{\infty}[\Phi_n(t)-\Phi_{n+1}(t)]a_n(x,z) \tag{35}$$

(35) formülünün her iki tarafı $e^{-\lambda t}$'ye çarpılıp, t'ye göre 0'dan ∞'a kadar integrallenirse,

$$\tilde{G}(\lambda,x,z)=\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\varepsilon(x-z)+\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi(\lambda))^n a_n(x,z) \tag{36}$$

olduğu görülür. Burada her $\lambda>0$ için,

$\varphi(\lambda)=E(e^{-\lambda\xi_1})$'dır.

Kolayca görmek mümkündür ki, ξ_1 rasgele değişkenin beklenen değerleri sonlu olduğunda, aşağıdaki limit mevcuttur:

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{1-\varphi(\lambda)}{\lambda}=E\xi_1$$

Diğer taraftan, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,z)$ serisi mevcut ve sonlu olduğunda, (36) eşitliğinde, $\lambda\to 0$ iken, limite geçmek mümkündür. Bu işlemin sonucunda,

$$\int_0^{\infty}G(t,x,z)dt=E\xi_1\, A(x,z) \tag{37}$$

olduğu görülür. Burada,

$A(x,z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x,z)$ 'dir.

Şimdi de, (37) eşitliğinin her iki tarafı, z parametresine göre ortalanır, yani her iki taraf $d\pi(z)$'le çarpılıp, z'ye göre s'den S'ye kadar integrallenirse,

$$\int_{s}^{S}\int_{0}^{\infty} G(t,x,z)\,dt\,d\pi(z) = E\xi_1\, A(x,\bullet) \tag{38}$$

eşitliği elde edilir.

(38) eşitliğini, (33) formülünde yerine yazalım,

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}J_f(t) = \frac{1}{E\tau_1}\left[E\xi_1\int_0^{\infty} f(x)\,dA(x,\bullet)\right] \tag{39}$$

olduğunu görürüz.

Hatırlatalım ki,

$E(\tau_1) = E\xi_1 EN_1$ ’dır. (40)

Burada, $EN_1 = \int_s^S EN(z)\,d\pi(z) = EN(\bullet)$’dır.

Eşitlik (40)’ı ifade (39)’da yerine yazarsak dolayısıyla, 1 olasılığı ile aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t f(X(u))\,du = \frac{E\xi_1\int_0^{\infty} f(x)\,dA(x,\bullet)}{E\xi_1 EN_1}$$

$$= \frac{\int_0^{\infty} f(x)\,dA(x,\bullet)}{EN_1} \tag{41}$$

Böylece, teorem 6’ın ispatı tamamlanır.

Not. Teorem 5 ve teorem 6’dan X(t) sürecinin ergodik dağılımının mevcut olduğunu ve ergodik dağılım fonksiyonunun aşikâr şeklini elde etmek mümkündür.

Özellikle, (41) formülünde, f(x) fonksiyonunun yerine indikator (ayırıcı) fonksiyonu yazarsak, ergodik dağılım fonksiyonunu elde edebiliriz. X(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu Q(x) ile gösterelim ve aşağıdaki sonucu verelim:

Sonuç 3. Teorem 5’in koşulları sağlandığında, X(t) sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu mevcuttur ve o, her $x \in (0,\infty)$ için aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$Q(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \le x\} = \frac{E\xi_1 A(x,\bullet)}{E\xi_1 EN(\bullet)}$$

$$= \frac{A(x,\bullet)}{EN(\bullet)} \tag{42}$$

Not. (41) formülünde, f(x) fonksiyonu yerine $f(x)=e^{i\alpha x}, \alpha \in R$ yazılırsa, X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu elde edilebilir. Bu karakteristik fonksiyonu $\varphi_x(\alpha)$ ile gösterelim ve aşağıdaki sonucu ifade edelim:

Sonuç 4. Teorem 5'in koşulları altında X(t) süreci ergodiktir ve ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\varphi_x(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} E\left(e^{i\alpha X(t)}\right)$$

$$= \frac{E\xi_1 A^*(\alpha,\bullet)}{E\xi_1 EN(\bullet)}$$

$$= \frac{A^*(\alpha,\bullet)}{EN(\bullet)},$$

burada,

$$A^*(\alpha,\bullet) = \int_0^\infty e^{i\alpha x} dA(x,\bullet) \text{ 'dir.}$$

2.7. Sürecin Ergodik Dağılımının Karakteristik Fonksiyonunun Sınır Fonksiyonelleri Yardımı ile İfade Edilmesi

Bölüm 2.6'da sürecin ergodik dağılımını, $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin A(x,z)'nin olasılık karakteristiği ile ifade ettik. Fakat uygulamada A(x, z) fonksiyonunu açık bir şekilde hesaplamak çok zordur. Diğer taraftan, literatürde, sürecin bir sınır fonksiyoneli olan $Y_{N(z)}$ hakkında yeterince bilgiler mevcuttur (bak, [16], [98], [12], [30], [68] v.s.).

Ayrıca, bazı özel çalışmalarda (bak, [101], [30]) ortaya konulmuştur sonuçlar doğrultusunda, A(x,z) fonksiyonu, sürecin bazı sınır fonksiyonelleri yardımıyla ifade edilebilmesinin mümkün olduğu sonucuna varılmıştır. Bu nedenle, bu bölümde A(x,z) karakteristiğini, $N(z)$ ve $Y_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin uygun karakteristikleri ile ifade edilmeye çalışılacaktır.

Bu kısımda ve daha sonraki bölümlerde, $\{S_n\}$ ile aşağıdaki rasgele yürüyüş sürecini göstereceğiz:

$$S_n = -Y_n, \quad n \geq 1.$$

Burada, $S_0 = 0$'dır.

Amacımız bu rasgele yürüyüş sürecinin $B_z = (-\infty, z-s)$ aralığındaki hareketini olasılık yönünden incelemektir. Tanımından göründüğü gibi $N(z)$ rasgele değişkeni $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ilk kez z-s seviyesinin dışına çıkma anıdır, yani B_z aralığını terk ettiği ilk andır. Aşağıdaki $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımını bulmaya çalışacağız. Bu amaçla aşağıdaki notasyonları verelim. Her $I \subseteq B'_z$ için,

$$d_n(I, z) = P\{N(z) = n,\ S_{N(z)} \in I\}$$

olsun, burada $B'_z = [z-s, \infty)$ kümesi, B_z kümesinin tümleyicisidir. Her $n \geq 0$ ve $I \subset B_z$ için ise,

$$d_n(I, z) = 0$$

olsun.

$N(z)$ rasgele değişkeninin tanımına göre, her $I \subset B'_z$ için,

$$d_n(I, z) = P\{S_1 < z-s, S_2 < z-s, \ldots, S_{n-1} < z-s, S_n \geq z-s,\ S_n \in I\}$$

$$= P\left\{S_k \in B_z, k = \overline{1, n-1}; S_n \in B'_z,\ S_n \in I\right\} \text{'dır.}$$

Ayrıca, her $n \geq 0$ ve $I \subset B_z$ için $c_n(I, z)$ olasılıklarını,

$$c_n(I, z) = P\{S_1 \in B_z, S_2 \in B_z, \ldots, S_n \in B_z,\ S_n \in I\}$$

ile gösterelim.

Diğer taraftan, her $I \subseteq B'_z$ için, $c_n(I, z) = 0$ kabul edilebilir.

$N(z)$ ve $S_{N(z)}$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılımlarını incelemek için $N(z)$ rasgele değişkenlerinin moment çıkaran fonksiyonu, $S_{N(z)}$ rasgele değişkeninin ise karakteristik fonksiyonu göz önüne alınacaktır. Bu durumda $d_n(I, z)$ ve $c_n(I, z)$ olasılıkları için sırasıyla aşağıdaki dönüşümleri tanımlamakta yarar vardır:

$$\tilde{d}^*(\beta, \alpha, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta^n \int_{B'_z} e^{i\alpha x} d_n(dx, z);$$

$$\tilde{c}^*(\beta, \alpha, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_{B_z} e^{i\alpha v} c_n(dv, z),$$

(Sıfırıncı terimler sırasıyla, 0 ve 1'e eşittirler).

Bu serilerin en az $|\beta| \leq 1$ değerleri için yakınsak oldukları bilinmektedir (bak, [30], p.601).

Her ölçülebilir sınırlı $M(x,z)$ fonksiyonu için,

$$M^*(\alpha, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} d_x M(x, z)$$

ve

$$\varphi(\alpha) = E\left(e^{i\alpha\eta_1}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} dF(x) = F^*(\alpha)$$

olsun.

Spitzer özdeşliğinden yararlanarak, aşağıdaki temel eşitlik yazılabilir:

$$1 - \tilde{d}^*(\beta, \alpha, z) = \tilde{c}^*(\beta, \alpha, z)\left[1 - \beta\varphi_{-\eta}(\alpha)\right] \tag{43}$$

Bu eşitliğin asıl önemi $\{S_n\}$ rasgele yürüyüş sürecinin ilk n adımdaki trajectoryasınına bağlı olan $c_n(x,z)$ olasılığını; sürecin ilk kez $B_z = (-\infty, z - s)$ aralığından çıkma anı olan $N(z)$ rasgele değişkeninin bir karakteristiği olan $d_n(x,z)$ ile ifade edilebilmesindedir.

Bu eşitlikten yola çıkılarak, sürecin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ rasgele değişkenlerinin bazı olasılık karakteristikleri ile ifade edilecektir. Bunun için, $\psi(\beta,\alpha)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
\psi(\beta,\alpha,\bullet) &= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_s^S \pi d\{z\} \int_s^S e^{i\alpha x} P\left\{z + Y_k > s, k = \overline{1,n}; z + Y_k \in dx\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_s^S \pi\{\, dz \,\} \int_s^{\infty} e^{i\alpha x} P\left\{S_k < z - s, k = \overline{1,n}; z - S_k \in dx\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_s^S \pi\{dz\} \int_{-\infty}^{z-s} e^{i\alpha(z-v)} P\left\{S_k < z - s, k = \overline{1,n}; S_k \in dv\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_s^S e^{+i\alpha z} \pi\{\, dz \,\} \int_{-\infty}^{z-s} e^{i\alpha v} P\left\{S_k < z - s, k = \overline{1,n}; S_k \in dv\right\} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_s^S e^{+i\alpha z} \pi\{dz\} \int_{B_z} e^{i\alpha v} P\left\{S_k \in B_z, k = \overline{1,n}; S_k \in dv\right\} \\
&= \int_s^S e^{+i\alpha z} \pi\{\, dz \,\} \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \int_{B_z} e^{i\alpha v} P\left\{S_k \in B_z, k = \overline{1,n}; S_k \in dv\right\}
\end{aligned} \tag{44}$$

$c_n(I,z)$ ve $\tilde{c}^*(\beta,\alpha,z)$ notasyonlarını göz önüne alarak (44) eşitliğini aşağıdaki gibi yeniden yazabiliriz:

$$\psi(\beta,\alpha,\bullet)=\int_{s}^{S} e^{i\alpha z}\pi\{dz\}\tilde{c}^{*}(\beta,-\alpha,z) \tag{45}$$

Diğer taraftan, (43) özdeşliğinden,

$$\tilde{c}^{*}(\beta,-\alpha,z)=\frac{1-\tilde{d}^{*}(\beta,-\alpha,z)}{1-\beta\varphi_{-\eta}(-\alpha)}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik (45)'de yerine yazılırsa,

$$\psi(\beta,\alpha,\bullet)=\int_{s}^{S} e^{i\alpha z}\frac{1-\tilde{d}^{*}(\beta,-\alpha,z)}{1-\beta\varphi_{-\eta}(-\alpha)}d\pi(z) \tag{46}$$

formülü elde edilir.

Kısım 2.6'da belli koşullar altında, X(t) sürecinin ergodik olduğu ispatlamıştır ve bu ispat esnasında $E(N(z))$'in sonlu olduğu da gösterilmiştir. Kolayca görmek mümkündür ki, $EN(z)$'yi sonlu yapan koşullar altında $\tilde{c}^{*}(\beta,-\alpha,z)$ fonksiyonunun, $\beta\to 1$ iken, limiti mevcuttur ve sonludur. Bu nedenle, (46) eşitliğinde, $\beta\to 1$, iken limite geçebilir ve sonuçta;

$$A^{*}(\alpha,\bullet)\equiv\lim_{\beta\to 1}\psi(\beta,\alpha,\bullet)$$

$$=\int_{s}^{S} e^{i\alpha z}\frac{1-\tilde{d}^{*}(1,-\alpha,z)}{1-\varphi_{-\eta}(-\alpha)}d\pi(z) \tag{47}$$

olduğu görülür.

Burada,

$$\tilde{d}^{*}(1,-\alpha,z)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{z-s}^{\infty} e^{-i\alpha x}d_n(dx,z)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{z-s}^{\infty} e^{-i\alpha x}P\left\{S_k\in B_z,\ k=\overline{1,n-1};\ S_n\in B'_z;\ S_n\in dx\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{z-s}^{\infty} e^{-i\alpha x}P\{N(z)=n;\ S_n\in dx\}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{z-s}^{\infty} e^{-i\alpha x}P\{N(z)=n;\ S_{N(z)}\in dx\}$$

$$=\int_{z-s}^{\infty} e^{-i\alpha x}P\{S_{N(z)}\in dx\}\equiv E\left(e^{-i\alpha S_{N(z)}}\right)\text{'dır.} \tag{48}$$

(48) eşitliği, (47) formülünde yerine yazılırsa,

$$A^{*}(\alpha,\bullet) = \int_{s}^{S} e^{i\alpha z} \frac{E\left[\; e^{-i\alpha S_{N(z)}} - 1\right]}{E\left[\; e^{i\alpha\eta_1} - 1\right]} d\pi(z)$$

elde edilir.

Böylece, istendiği şekilde $A^{*}(\alpha,\bullet)$ olasılık fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristik fonksiyonu yardımı ile ifade edilmiş oldu.

Bu ifadeyi, yani (48) eşitlikliğini, sonuç 4 ve formül (42)'de göz önüne alınırsa, X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu için aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\varphi_x(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} E\{\, \exp(i\alpha X(t))\,\}$$

$$= \frac{E\xi_1}{E\xi_1 EN_1} A^{*}(\alpha,\bullet)$$

$$= \frac{E\xi_1}{E\xi_1 EN_1} \int_{s}^{S} e^{i\alpha z} \frac{E\{\exp(-i\alpha S_{N(z)}) - 1\}}{E\{\exp(i\alpha\eta_1) - 1\}} d\pi(z)$$

$$= \frac{1}{EN_1} \int_{s}^{S} e^{i\alpha z} \frac{E\{\exp(-i\alpha S_{N(z)}) - 1\}}{E\{\exp(i\alpha\eta_1) - 1\}} d\pi(z)$$

Notasyon kısalığı için,

$E\{\, \exp(-i\alpha S_{N(z)})\,\} = \varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha)$ ile gösterildiğinde,

$$\varphi_x(\alpha) = \frac{1}{EN_1}\left\{\int_{s}^{S} e^{i\alpha z} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(\alpha) - 1} d\pi(z)\;\right\}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 7. Ergodik teorem 5'in koşulları altında, X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunu, $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin olasılık karakteristikleri ile aşağıdaki gibi elde etmek mümkündür:

$$\varphi_x(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} E\{\, \exp(i\alpha X(t))\,\}$$

$$= \frac{1}{EN_1}\left\{\int_{s}^{S} e^{i\alpha z} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(\alpha) - 1} d\pi(z)\;\right\} \tag{49}$$

Not. (49) formülü, X(t) sürecinin stasyoner (durağan) karakteristiklerini $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin, uygun olasılık karakteristikleri ile ifade edilmesine imkan verir. $N(z)$ ve $S_{N(z)}$ sınır fonksiyonellerinin, literatürde ayrıntılı bir biçimde incelendiklerini de göz önünde bulundurduğumuzda, (49) formülünün ister teorik isterse de pratik yönden ne kadar önemli olduğu ortaya çıkar.

Hemen belirtelim ki, (49) eşitliğinden yararlı bilgiler elde etmek mümkündür. Ayrıca, (49) eşitliğinin her iki tarafını, α parametresine göre diferansiyelleyip, daha sonra $\alpha \to 0$ iken, limite geçmekle, X(t) sürecinin ergodik dağılımının momentlerini $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade etmek mümkündür. Aşağıdaki teorik ve pratik yönden önemi göz önünde bulundurarak, X(t) sürecinin ergodik dağılımının bazı momentleri için kesin formüller elde edilecektir.

2.8. Genel Durumda Ergodik Dağılımın 1. ve 2. Momentleri İçin Kesin İfadeler

Uygulamanın ihtiyacını karşılayabilmek amacı ile sürecin ergodik dağılımın 1. ve 2. momentleri için kesin ifadeleri elde etmeye çalışalım.

Bu bölümün temel sonucunu verebilmek için aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$m_k = E(\eta_1^k), \quad M_k(x) = E(S^k{}_{N(x)}), \qquad k = 1,2,3; \;\; x > 0;$$

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}; \qquad M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}, \;\; k = 2,3.$$

Şimdi aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 8. Ergodik Teoreminin varsayımlarına ilaveten aşağıdaki koşullar sağlanmış olsunlar:

a) $E|\eta_1|^3 < \infty$;

b) $E(\zeta_1^3) < \infty$ olsun.

Bu takdirde, X(t) sürecinin ergodik dağılımının 1. ve 2. momentleri $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momenti yardımı ile aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

1) $$E(X) = \frac{1}{E[M_1(\zeta_1 - s)]}\left\{E[2\zeta_1 + m_{21})M_1(\zeta_1 - s)] - E(M_2(\zeta_1 - s)\right\},$$

2) $$E(X^2) = \frac{1}{E[M_1(\zeta_1 - s)]}\Big\{E[M_3(\zeta_1 - s) - 3E[(\frac{1}{2}m_{21} + \zeta_1)M_2(\zeta_1 - s)] +$$

$$E[(\frac{c_1}{2} + 3m_{21}\zeta_1 + 3\zeta_1^2)M_1(\zeta_1 - s)\Big\};$$

burada, $c_1 = 3m_{21}^2 - 2m_{31}$ ’dır.

İspat:

$$\varphi_\eta(-\alpha)-1=E\left(e^{-i\alpha\eta_1}\right)-1 \tag{50}$$

olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda,

$$E\left(e^{-i\alpha\eta_1}\right)=1-i\alpha E\eta_1-\frac{\alpha^2}{2!}E\eta_1^2+i\frac{\alpha^3}{3!}E\eta_1^3+o\left(\alpha^3\right) \tag{51}$$

yazılabilir (bak, [66], [30]).

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(-\alpha)-1&=-i\alpha m_1+\frac{(-i\alpha)^2}{2}m_2+\frac{(-i\alpha)^3}{6}m_3+o\left(\alpha^3\right)\\&=-i\alpha m_1\left\{1-\frac{i\alpha m_2}{2m_1}+\frac{(i\alpha)^2m_3}{6m_1}+o\left(\alpha^2\right)\right\}\\&=-i\alpha m_1\left\{1-\frac{i\alpha}{2}m_{21}+\frac{(i\alpha)^2}{6}m_{31}+o\left(\alpha^2\right)\right\}\end{aligned} \tag{52}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\varphi_{S_{N(x)}}(-\alpha)-1&=E\left(e^{-i\alpha S_{N(z)}}\right)-1\\&=-i\alpha M_1(x)\left\{1-\frac{i\alpha}{2}M_{21}(x)+\frac{(i\alpha)^2}{6}M_{31}(x)+o\left(\alpha^2\right)\right\}\end{aligned} \tag{53}$$

yazılabilir (bak, [66], [30]).

(53) formülü, (52) formülüne taraf tarafa bölünürse,

$$\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}=\frac{M_1(x)}{m_1}\,\frac{\left\{1-\frac{i\alpha}{2}M_{21}(x)+\frac{(i\alpha)^2}{6}M_{31}(x)+o\left(\alpha^2\right)\right\}}{\left(1-\frac{i\alpha}{2}m_{21}+\frac{(i\alpha)^2}{6}m_{31}+o\left(\alpha^2\right)\right)} \tag{54}$$

elde edilir.

(54) formülünün ikinci tarafının paydası ele alınıp, Taylor serisine açılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}=-\frac{M_1(x)}{m_1}\Big\{1-\frac{i\alpha}{2}\left[M_{21}(x)-m_{21}\right]+\\\frac{(i\alpha)^2}{12}\left[2M_{31}(x)-3m_{21}M_{21}(x)+c_1\right]+o\left(\alpha^2\right)\Big\}\end{aligned} \tag{55}$$

elde edilir. Burada, $c_1=3m_{21}^2-2m_{31}$'dır. $\alpha\to 0$ iken,

$$e^{i\alpha z} = 1 + i\alpha z + \frac{(i\alpha)^2}{2} z^2 + o(\alpha^2) \tag{56}$$

yazılabilir.

Formül (55) ve (56) taraf tarafa çarpılırsa,

$$e^{i\alpha z} \frac{\varphi_{S_{N(z)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(\alpha)-1} = \frac{M_1(x)}{m_1}\Big\{1 - \frac{i\alpha}{2}[M_{21}(x) - m_{21}] +$$

$$+ \frac{(i\alpha)^2}{12}[2M_{31}(x) - 3m_{21}M_{21}(x) + c_1] + i\alpha z -$$

$$- \frac{(i\alpha)^2}{2}[zM_{21}(x) - m_{21}z] + \frac{(i\alpha)^2}{2} z^2 + o(\alpha^2)\Big\}$$

$$= \frac{M_1(x)}{m_1}\Big\{1 + \frac{i\alpha}{2}[2z - M_{21}(x) + m_{21}] +$$

$$+ \frac{(i\alpha)^2}{12}[2M_{31}(x) - 3m_{21}M_{21}(x) + c_1$$

$$- 6zM_{21}(x) + 6zm_{21} + 6z^2] + o(\alpha^2)\Big\} \tag{57}$$

elde edilir. x=z-s olduğu göz önünde bulundurularak (57) formülü integrallenirse,

$$\int_s^\infty e^{i\alpha z} \frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1} d\pi(z) = \frac{E[M_1(\zeta_1 - s)]}{m_1} +$$

$$+ \frac{i\alpha}{2m_1}\int_0^\infty [2(x+s)M_1(x) - M_2(x) + m_{21}M_1(x)]d\pi(x+s) +$$

$$+ \frac{(i\alpha)^2}{12m_1}\int_0^\infty [2M_3(x) - 3m_{21}M_2(x) + c_1M_1(x) - 6(x+s)M_2(x) +$$

$$+ 6(x+s)m_{21}M_1(x)$$

$$+ 6(x+s)^2 M_1(x)]d\pi(x+s) + o(\alpha^2) \tag{58}$$

elde edilir.

$$EN\varphi_x(\alpha) = \frac{E[M_1(\zeta_1 - s)]}{m_1} + \frac{i\alpha}{2m_1}\int_0^\infty [2(x+s)M_1(x) - M_2(x) + m_{21}M_1(x)]d\pi(x+s) +$$

$$+ \frac{(i\alpha)^2}{12m_1}\int_0^\infty [2M_3(x) - 3m_{21}M_2(x) + c_1M_1(x) - 6(x+s)M_2(x) +$$

$$+ 6(x+s)m_{21}M_1(x) + 6(x+s)^2 M_1(x)]d\pi(x+s) + o(\alpha^2) \tag{59}$$

Burada,

$$EN=\int_0^\infty EN(z-s)d\pi(z)=\int_0^\infty EN(x)f_\zeta(x+s)dx$$

$$=\int_0^\infty \frac{M_1(x)}{m_1}f_\zeta(x+s)dx=\frac{1}{m_1}E[M_1(\zeta_1-s)] \text{ 'dır.}$$

EN (59) formülünde yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\varphi_x(\alpha)=1+\frac{i\alpha}{2}\frac{1}{E[M_1(\zeta_1-s)]}\int_0^\infty[2(x+s)M_1(x)-M_2(x)+m_{21}M_1(x)]d\pi(x+s)+$$

$$+\frac{(i\alpha)^2}{6}\frac{1}{E[M_1(\zeta_1-s)]}\int_0^\infty[M_3(x)-\frac{3}{2}m_{21}M_2(x)+\frac{c_1M_1(x)}{2}-3(x+s)M_2(x)+$$

$$+3(x+s)m_{21}M_1(x)+3(x+s)^2M_1(x)]d\pi(x+s)+o(\alpha^2) \tag{60}$$

elde edilir. $\varphi_x(\alpha)=1+\frac{i\alpha}{2}E(X)+\frac{(i\alpha)^2}{6}E(X^2)+o(\alpha^2)$ olduğunu biliyoruz.

Buradan,

$$E(X)=\frac{1}{E[M_1(\zeta_1-s)]}\{E[2\zeta_1+m_{21})M_1(\zeta_1-s)]-E(M_2(\zeta_1-s)\}, \tag{61}$$

$$E(X^2)=\frac{1}{E[M_1(\zeta_1-s)]}\Big\{E[M_3(\zeta_1-s)-3E[(\frac{1}{2}m_{21}+\zeta_1)M_2(\zeta_1-s)]+$$

$$+E[(\frac{c_1}{2}+3m_{21}\zeta_1+3\zeta_1^2)M_1(\zeta_1-s)\Big\} \text{ 'dır.} \tag{62}$$

Şimdi de müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkenin bazı özel dağılımlara sahip olması durumunda X(t) sürecinin ergodik dağılımının momentleri için bazı kesin formüller ve asimptotik açılımlar elde etmeye çalışalım.

2.9. Müdahalenin Üstel Dağılım Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri için Kesin İfadeler

Bu bölümün amacı, müdahalenin üstel dağılım olması durumunda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentlerini $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin uygun momentleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaç için öncelikle aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$m_k=E(\eta_1^k),\ \ M_k(x)=E(S_{N(x)}^k),\quad k=1,2,3,4,5\quad x>0.$$

Kısalık amacıyla ise şu natosyonları dahil edelim:

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1},\ M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}, \quad k = 2{,}3{,}4{,}5 \quad EX^k = \lim_{t\to\infty} E(X^k(t)),\ k = 1{,}2{,}3{,}4.$$

Ayrıca hesaplamalarda kolaylık olması amacıyla süreci ortalayalım, yani $\overline{X}(t) = X(t) - s$ olsun.

Şimdi de bu bölümün temel teoremini verelim:

Teorem 9. Sürecin ergodiklik koşularına ek olarak, $E|\eta_1|^5 < \infty$ koşulunu da sağlansın. Ayrıca, ζ_1 rastgele değişkeni (s, ∞) aralığında $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için kesin formüller, $S_{N(X)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkenin uygun momentleri yardımıyla aşağıdaki ifade edilebilir:

$$E\overline{X} = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)}\left\{-\widetilde{M}_1'(\lambda) - \frac{1}{2}\widetilde{M}_2(\lambda) + \frac{A_1}{2}\widetilde{M}_1(\lambda)\right\}, \tag{63}$$

$$E(\overline{X}^2) = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)}\left\{\widetilde{M}_1''(\lambda) - A_1\left(\widetilde{M}_1'(\lambda) + \frac{\widetilde{M}_2(\lambda)}{2}\right) + \widetilde{M}_2'(\lambda) + \frac{\widetilde{M}_3(\lambda)}{3} + A_2\widetilde{M}_1(\lambda)\right\}, \tag{64}$$

$$E(\overline{X}^3) = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)}\left\{-\widetilde{M}_1'''(\lambda) - \frac{3}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda) - \widetilde{M}_3'(\lambda) - \frac{1}{4}\widetilde{M}_4(\lambda) + \frac{3}{2}A_1\widetilde{M}_1''(\lambda) + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}A_1\widetilde{M}_2'(\lambda) + \frac{1}{2}A_1\widetilde{M}_3(\lambda) - 3A_2\widetilde{M}_1'(\lambda) - \frac{3}{2}A_2\widetilde{M}_2(\lambda) + 3A_3\widetilde{M}_1(\lambda)\right\}, \tag{65}$$

$$E(\overline{X}^4) = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)}\left\{\widetilde{M}_1^{iv}(\lambda) + 2\widetilde{M}_2'''(\lambda) + 2\widetilde{M}_3''(\lambda) + \widetilde{M}_4'(\lambda) + \frac{1}{5}\widetilde{M}_5(\lambda) - 2A_1\widetilde{M}_1'''(\lambda) - \right.$$
$$- 3A_1\widetilde{M}_2''(\lambda) - 2A_1\widetilde{M}_3'(\lambda) - \frac{1}{2}A_1\widetilde{M}_4(\lambda) + 6A_2\widetilde{M}_1''(\lambda) + 6A_2\widetilde{M}_2'(\lambda) +$$
$$\left. + 2A_2\widetilde{M}_3(\lambda) - 12A_3\widetilde{M}_1'(\lambda) - 6A_3\widetilde{M}_2(\lambda) + 3A_4\widetilde{M}_1(\lambda)\right\}, \tag{66}$$

burada, $\widetilde{M}_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} M_k(x)dx$, $\lambda > 0$; $\quad M_k(k) \equiv E(S^k_{N(x)})$, k=1,2,3,4,5.

$$A_1 = m_{21},\ A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3},\ A_3 = \frac{m_{41}}{12} - \frac{m_{31}m_{21}}{3} + \frac{m_{21}^3}{4},$$

$$A_4 = \frac{m_{21}^4}{4} - \frac{m_{31}m_{21}^2}{2} + \frac{m_{41}m_{21}}{6} + \frac{m_{31}^2}{9} - \frac{m_{51}}{30} \text{'dır.}$$

İspat. Hatırlatalım ki, Teorem 8'de ζ_1 rasgele değişkeninin genel duruma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için kesin ifadeler aşağıdaki gibi elde edilmişti:

$$E(X) = \frac{1}{E[M_1(\zeta_1 - s)]}\{E[2\zeta_1 + m_{21})M_1(\zeta_1 - s)] - E(M_2(\zeta_1 - s)\},$$

$$E(X^2) = \frac{1}{E[M_1(\zeta_1 - s)]}\Big\{E[M_3(\zeta_1 - s) - 3E[(\frac{1}{2}m_{21} + \zeta_1)M_2(\zeta_1 - s)] +$$

$$E[(\frac{c_1}{2} + 3m_{21}\zeta_1 + 3\zeta_1^2)M_1(\zeta_1 - s)\Big\};$$

burada, $c_1 = 3m_{21}^2 - 2m_{31}$'dır.

ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda,

$$E(X) = \frac{1}{E[M_1(\zeta_1 - s)]}\{E[2\zeta_1 + m_{21})M_1(\zeta_1 - s)] - E(M_2(\zeta_1 - s)\}$$

$$= \frac{1}{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} M_1(x)dx}\Big\{\int_0^\infty \lambda(x+s)e^{-\lambda x}M_1(x)dx + \int_0^\infty \frac{\lambda m_{21}}{2}e^{-\lambda x}M_1(x)dx$$

$$-\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}M_2(x)dx\Big\}$$

$$= \frac{1}{\int_0^\infty e^{-\lambda x} M_1(x)dx}\Big\{\int_0^\infty xe^{-\lambda x}M_1(x)dx + \int_0^\infty s\,e^{-\lambda x}M_1(x)dx + \frac{m_{21}}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda x}M_1(x)dx$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda x}M_2(x)dx\Big\}$$

elde edilir.

Buradan özetle,

$$E\overline{X} = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)}\Big\{-\widetilde{M}_1'(\lambda) - \frac{1}{2}\widetilde{M}_2(\lambda) + \frac{A_1}{2}\widetilde{M}_1(\lambda)\Big\},$$

elde edilir.

Burada, $\widetilde{M}_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\ M_k(x)dx$, $\lambda>0$; $\quad M_k(k)\equiv E(S^k_{N(x)})$, k=1,2. $A_1=m_{21}$'dır.

Şimdi de, ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda>0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ikinci momenti için kesin formülü elde edelim.

$$E(X^2)=\frac{1}{E[M_1(\zeta_1-s)]}\left\{E[M_3(\zeta_1-s)-3E[(\frac{1}{2}m_{21}+\zeta_1)M_2(\zeta_1-s)]+\right.$$

$$\left.E[(\frac{c_1}{2}+3m_{21}\zeta_1+3\zeta_1^2)M_1(\zeta_1-s)\right\}$$

$$=\frac{1}{\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}M_1(x)dx}\left\{\frac{1}{3}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}M_3(x)dx-\int_0^\infty(\frac{m_{21}}{2}+(s+x))\lambda e^{-\lambda x}M_2(x)dx\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\int_0^\infty\left[\frac{c_1}{2}+3m_{21}(s+x)+3(s+x)^2\right]M_1(x)\lambda e^{-\lambda x}dx\right\}.$$

Buradan özetle,

$$E(\overline{X}^2)=\frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)}\left\{\widetilde{M}_1''(\lambda)-A_1(\widetilde{M}_1'(\lambda)+\frac{\widetilde{M}_2(\lambda)}{2})\right.$$

$$\left.+\widetilde{M}_2'(\lambda)+\frac{\widetilde{M}_3(\lambda)}{3}+A_2\,\widetilde{M}_1(\lambda)\right\}$$

elde edilir.

Burada, $\widetilde{M}_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\ M_k(x)dx$, $\lambda>0$; $\quad M_k(k)\equiv E(S^k_{N(x)})$, k=1,2,3,4,5.

$A_1=m_{21}$, $\quad A_2=\dfrac{m_{21}^2}{2}-\dfrac{m_{31}}{3}$'dır.

ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda>0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri için kesin formüller benzer biçimde elde edilir.

Bu da Teorem 9'un ispatını tamamlar.

Not. Bu formüller uygulama için önemlidir. Fakat karmaşık matematiksel yapılarından dolayı uygulamanın ihtiyacını karşılayamamaktadır. Bu nedenle uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek sadelikte formüller elde etmeye ihtiyaç vardır. Bu ise ancak asimptotik yöntemlerle elde edilebilir. Bunun için, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için $\lambda \to 0$ iken, asimptotik açılımlar elde edelim.

2.10. Müdahalenin Üstel Dağılım Olması Durumunda, X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri İçin Üçüncü Mertebeden Asimptotik Açılımlar

X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için asimptotik sonucun elde edilebilmesi için basamak değişkenlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle, hatırlatma amacıyla, basamak değişkenlerin tanımı ve onlarla ilgili birçok ilginç özellikler aşağıda verilecektir. Önce, $\{\eta_i\}$, $i \geq 1$, rastgele değişkenler dizisinin yardımıyla aşağıdaki rastgele yürüyüş sürecinin tanımlayalım

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \quad , n \geq 1 \, , \; S_0 = 0$$

ve bu sürecin basamak değişkenlerini aşağıdaki gibi verelim.

$$\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\},$$

$$\nu^+{}_{n+1} = \inf\{k \geq 1 : S_{\nu_{n+k}} > S_{\nu_n}\}, \qquad n \geq 1,$$

$$\chi_{n+1}^+ = S_{\sum_{i=1}^{n+1} \nu_i} - \sum_{i=1}^{n} \chi_i \, .$$

Her $n \geq 1$ için $\sum_{i=1}^{n} \nu_i^+$ tam değerli rasgele değişkenlerine n. (yukarı) basamak anı; $\sum_{i=1}^{n} \chi_i^+$ pozitif değerli rasgele değişkenlerine ise n. (yukarı) basamak yüksekliği denir.

Hatırlatalım ki, $n \geq 1$ için (ν_n^+, χ_n^+)'ler bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi oluşturduğu bilinmektedir.(bak, [30], s.193).

(ν_n^+, χ_n^+) çiftine ise (yukarı) basmak değişkenleri denir. Basamak değişkenleri , özellikle birinci basamak anı (ν_1^+) ve birinci basamak yüksekliği (χ_1^+) rasgele yürüyüş sürecinin incelenmesinde önemli rol oynamaktadır.

Şimdi N(z) sınır fonksiyonelini basamak değişkenleri yardımıyla ifade edelim.Bunun için H(x) yenileme sürecini tanımlayalım.

$$H(x) = \min\left\{ n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \geq x \right\}, \qquad x \geq 0.$$

Kolayca görmek mümkündür ki, her x>0 için H(x) süreci , $\{\chi_n^+\}$, $n \geq 1$, dizisinin oluşturduğu bir yenileme sürecidir.Diğer taraftan N(z) tanımına göre,

$N(x) = \sum_{i=1}^{H(x)} \nu_i^+$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda, N(z) süreci ödüllü yenileme süreci olur. Bu sürecin olasılık karakteristikleri literatürde iyi bilinmektedir (bak, [16]). Bunların yardımıyla $S_{N(x)}$ sürecini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(x)} \chi_i^+ .$$

Bu bilgilerden sonra amacımıza ulaşmak için $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri için kesin formüller elde etmeliyiz. Bunun için aşağıdaki dönüşümü incelemeliyiz.

$$\Psi(\lambda, k) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} E(e^{-kS_{N(t)}})dt, \;\; \lambda > 0, \;\; k \geq 0 .$$

Şimdi de yardımcı teoremi verelim.

Yardımcı Teorem 1. $\Psi(\lambda, k)$ dönüşümü χ_1^+ 'nın Laplace Stiltejis $(\varphi(\alpha))$ yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\Psi(\lambda, k) = \frac{\varphi(k) - \varphi(\lambda + k)}{\lambda(1 - \varphi(\lambda + k))},$$

burada, $\varphi(\alpha) = E(e^{-\alpha\chi_1^+}) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} dF(t), \;\; \alpha \geq 0 , \;\; F(t) \equiv P\{\chi_1^+ \leq t\}, \; t \geq 0 .$

İspat. Kolayca görmek mümkündür ki;

$$\int_{t=0}^\infty e^{-\lambda t} \int_{x=t}^\infty e^{-kx} P\{S_{N(t)} \in dx\}dt = \int_{t=0}^\infty e^{-\lambda t} \int_{x=t}^\infty e^{-kx} \sum_{n=0}^\infty P\{N(t) = n; \; T_n \in dx\}dt =$$

$$= \int_{t=0}^\infty e^{-\lambda t} \int_{x=t}^\infty e^{-kx} \int_{s=0}^t P\{s + \xi_1 \in dx\} \, d_s \, U(s)dt = \widetilde{L}_1(\lambda) \; L_2^*(\lambda) \text{ 'dır.}$$

Burada $L_1(t) = \int_t^\infty e^{-kx} dF(x)$, $L_2\{dt\} = e^{-kt} dU(t)$ ve $U(t) = \sum_{n=0}^\infty F^{*n}(t)$ 'dır.

$L_2^*(\lambda)$ ile $L_2(t)$ fonksiyonun Laplace Stiltijis dönüşümü ve $\widetilde{L}_1(\lambda)$ ile $L_1(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü gösterilmiştir..

Kolayca gösterilebilir ki:

$$L_2^*(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} L_2\{dt\} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-kt} U\{dt\} = \int_0^\infty e^{-(\lambda+k)} U\{dt\} = U^*(\lambda + k) ;$$

$$\widetilde{L}_1(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda t}\left[\int_t^{\infty}e^{-kx}dF(x)dx\right]dt=\frac{1}{\lambda}\varphi(k)-\frac{1}{\lambda}\varphi(k+\lambda)=\frac{1}{\lambda}[\varphi(k)-\varphi(k+\lambda)].$$

Diğer taraftan $U(t)=\sum_{n=0}^{\infty}F^{*n}(t)$ olduğundan

$U^*(\lambda+k)=\dfrac{1}{1-\varphi(\lambda+k)}$ 'dır.

Sonuçta ,

$\Psi(\lambda,k)=\dfrac{\varphi(k)-\varphi(\lambda+k)}{\lambda(1-\varphi(\lambda+k))}$ elde edilir. (67)

Bu da yardımcı teorem 1'in ispatını tamamlar.

Yardımcı teorem 1 'i kullanarak , $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momentleri için kesin formüller elde edilebilir.

Sonuç 5. χ_1^+ rasgele değişkenin ilk üç momentleri mevcut ve sonlu olduğu takdirde, $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk üç momentlerinin Laplace dönüşümlerinin kesin ifadeleri yenileme fonksiyonun yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilebilir:

a) $\widetilde{M}_1(\lambda)=\mu_1\widetilde{U}(\lambda)$, (68)

b) $\widetilde{M}_2(\lambda)=2\widetilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)(-\mu_1\varphi_1(\lambda))+\mu_2\widetilde{U}(\lambda)$, (69)

c) $\widetilde{M}_3(\lambda)=6\widetilde{U}(\lambda)U_*^2(\lambda)(\mu_1\varphi_1^2(\lambda))+3\widetilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)[\mu_1\varphi_2(\lambda)-\mu_2\varphi_1(\lambda)]+\mu_3\widetilde{U}(\lambda)$, (70)

d) $\widetilde{M}_4(\lambda)=24\widetilde{U}(\lambda)U_*^3(\lambda)(-\mu_1\varphi_1^3(\lambda))+12\widetilde{U}(\lambda)U_*^2(\lambda)[-2\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)+\mu_2\varphi_1^2(\lambda)]+$

$2\widetilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)[-2\mu_1\varphi_3(\lambda)+3\mu_2\varphi_2(\lambda)-2\mu_3\varphi_1(\lambda)]+\mu_4\widetilde{U}(\lambda)$, (71)

e) $\widetilde{M}_5(\lambda)=120\widetilde{U}(\lambda)U_*^4(\lambda)(\mu_1\varphi_1^4(\lambda))+60\widetilde{U}(\lambda)U_*^3(\lambda)[3\mu_1\varphi_1^2(\lambda)\varphi_2(\lambda)-\mu_2\varphi_1^3(\lambda)]+$

$10\widetilde{U}(\lambda)U_*^2(\lambda)[4\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_3(\lambda)+3\mu_1\varphi_2^2(\lambda)-6\mu_2\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)+2\mu_3\varphi_1^2(\lambda)]+$

$5\widetilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)[\mu_1\varphi_4(\lambda)-2\mu_2\varphi_3(\lambda)+2\mu_3\varphi_2(\lambda)-\mu_4\varphi_1(\lambda)]+\mu_5\widetilde{U}(\lambda)$, (72)

burada $M_k(x)\equiv E(S_{N(x)}^k)$, $\varphi(\lambda)=E(e^{-\lambda\chi_1^+})$, $\varphi_k(\lambda)\equiv\varphi^{(k)}(\lambda)$, k=1,2,3,4'dır.

$U_*(\lambda)=\dfrac{1}{1-\varphi(\lambda)}$, $\widetilde{U}(\lambda)=\dfrac{1}{\lambda(1-\varphi(\lambda))}$, $\mu_k=E(\chi_1^+)^k$, k=1,2,3,4,5.

$$\widetilde{M}_k(\lambda)=\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}M_k(x)dx.$$

$U(t)$, χ_1^+ rasgele değişkeni tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur. $\widetilde{U}(\lambda)$ ile $U(t)$'nin Laplace dönüşümü ve $U_*(\lambda)$ ile $U(t)$'nin Laplace- Stiltijes dönüşümü gösterilmiştir.

Şimdi temel teoremi verebiliriz.

Teorem 10. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, ∞) aralığında $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun.

Bu taktirde, $X(t)$ süreci ergodiktir ve sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım yazılabilir:

$$EX = \frac{1}{\lambda} + s + \frac{A_1 - \mu_{21}}{2} + o(\lambda),$$

$$E(\overline{X}^2) = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{A_1 - \mu_{21}}{\lambda} + \frac{\mu_{31}}{3} - \frac{A_1 \mu_{21}}{2} - 3A_2 + o(1), \tag{73}$$

burada $\mu_k = E(\chi_1^+)^k$, $\mu_{k1} = \dfrac{\mu_k}{\mu_1}$, $k = 2,3.$, $m_k = E(\eta_1)^k$, $m_{k1} = \dfrac{m_k}{m_1}$,

ve $A_1 = m_{21}$, $A_2 = \dfrac{m_{21}^2}{2} - \dfrac{m_{31}}{3}$'dır.

İspat. Önce X(t) sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri için üç terimli asimptotik açılımı elde etmeye çalışalım. Hatırlatalım ki, Teorem 9'da $E\overline{X}$ için kesin formül aşağıdaki gibi elde edilmişti:

$$E\overline{X} = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)} [-\widetilde{M}_1'(\lambda) - \frac{1}{2} \widetilde{M}_2(\lambda) + \frac{m_{21}}{2} \widetilde{M}_1(\lambda)]. \tag{74}$$

Sonuç 5'de $\widetilde{M}_1(\lambda)$ için aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\widetilde{M}_1(\lambda) = \mu_1 \widetilde{U}(\lambda) \text{ ve } \widetilde{U}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(1 - \varphi(\lambda))}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\widetilde{M}_1(\lambda) = \frac{\mu_1}{\lambda(1 - \varphi(\lambda))} \tag{75}$$

elde edilir.

$\varphi(\lambda)$ ' yı $\lambda \to 0$ iken Taylor açılımına açarsak ve (75)'de yerine yazarsak, $\widetilde{M}_1(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{\mu_{21}}{2\lambda} + \frac{\mu_{21}^2}{4} - \frac{\mu_{31}}{6} + o(1). \tag{76}$$

İfade (75)'de $\widetilde{M}_1(\lambda)$ 'in türevini alırsak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_1{}'(\lambda) = -\frac{\mu_1}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))} + \frac{\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}.$$

Benzer biçimde, $\lambda \to 0$ iken, $\widetilde{M}_1{}'(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_1{}'(\lambda) = -\frac{2}{\lambda^3} - \frac{\mu_{21}}{2\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{77}$$

Sonuç 5'de $\widetilde{M}_2(\lambda)$ in kesin ifadesi aşağıdaki biçimde elde edilmiştir:

$$\widetilde{M}_2(\lambda) = 2\widetilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)(-\mu_1\varphi_1(\lambda)) + \mu_2\widetilde{U}(\lambda).$$

Yardımcı Teorem 1'i kullanarak,

$$\widetilde{M}_2(\lambda) = \frac{\mu_2}{\lambda(1-\varphi(\lambda))} - \frac{2\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} \tag{78}$$

elde edilir.

Uygun hesaplamalar yapılarak $\lambda \to 0$ iken, $\widetilde{M}_2(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_2(\lambda) = \frac{2}{\lambda^3} + \frac{\mu_2}{\mu_1\lambda^2} + \frac{\mu_3}{3\mu_1\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{79}$$

Kısalık amacıyla $J_1(\lambda)$'yı aşağıdaki gibi dahil edelim:

$$J_1(\lambda) = -\widetilde{M}_1{}'(\lambda) - \frac{1}{2}\widetilde{M}_2(\lambda) + \frac{A_1}{2}\widetilde{M}_1(\lambda). \tag{80}$$

(76), (77) ve (79)'daki asimptotik açılımları, formül (80)'de yerlerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken , $J_1(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$J_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda^3} + \frac{A_1}{2\lambda^2} + \left(-\frac{\mu_{31}}{6} + \frac{A_1\mu_{21}}{4}\right)\frac{1}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{81}$$

(76)'daki asimptotik açılım kullanılırsa, $\lambda \to 0$ iken, $K_1(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$K_1(\lambda) \equiv \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)} = \frac{\lambda^4 \mu_{31}}{6} - \frac{\lambda^3 \mu_{21}}{2} + \lambda^2 + o(\lambda^2). \tag{82}$$

$E\overline{X}$ için elde edilen kesin ifade (74)'de asimptotik açılımlar (81) ve (82) yerlerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken , $E\overline{X}$ için aşağıdaki asimptotk açılım elde edilir:

$$E\overline{X} = J_1(\lambda)K_1(\lambda) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{2}(A_1 - \mu_{21}) + o(\lambda). \tag{83}$$

Şimdi de, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti için $\lambda \to 0$, asimptotik açılımlar elde etmeye çalışalım.

Teorem 9'da $E(\overline{X}^2)$ için kesin formül aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$E(\overline{X}^2) = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)}\Bigg[\widetilde{M}_1''(\lambda) - m_{21}(\widetilde{M}_1'(\lambda) + \frac{\widetilde{M}_2(\lambda)}{2}) +$$

$$\widetilde{M}_2'(\lambda) + \frac{\widetilde{M}_3(\lambda)}{3} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6}\widetilde{M}_1(\lambda)\Bigg]. \tag{84}$$

(75)'deki $\widetilde{M}_1(\lambda)$ 'in kesin ifadesinin iki defa türevini alınırsa, $\widetilde{M}_1''(\lambda)$ 'nin kesin ifadesi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\widetilde{M}_1''(\lambda) = \frac{2\mu_1}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))} - \frac{2\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{2\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}. \tag{85}$$

Uygun hesaplamalar yapılarak, $\lambda \to 0$ iken, $\widetilde{M}_1''(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_1''(\lambda) = \frac{6}{\lambda^4} + \frac{\mu_{21}}{\lambda^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{86}$$

(78)'deki $\widetilde{M}_2(\lambda)$'nin kesin ifadesini türevini alarak, $\widetilde{M}_2'(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_2'(\lambda) = -\frac{\mu_2}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))} + \frac{\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} +$$

$$+\frac{2\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{4\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} - \frac{2\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} \tag{87}$$

$\varphi(\lambda)$ ' yı $\lambda \to 0$ iken Taylor açılımına açılır ve (87)'de yerine yazılırsa, $\widetilde{M}_2'(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_2{}'(\lambda) = -\frac{6}{\lambda^4} - \frac{2\mu_{21}}{\lambda^3} - \frac{\mu_{31}}{3\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{88}$$

Hatırlayalım ki, Sonuç 5'de $\widetilde{M}_3(\lambda)$ 'in kesin ifadesi aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$\widetilde{M}_3(\lambda) = 6\widetilde{U}(\lambda)U_*^2(\lambda)(\mu_1\varphi_1^2(\lambda)) + 3\widetilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)[\mu_1\varphi_2(\lambda) - \mu_2\varphi_1(\lambda)] + \mu_3\widetilde{U}(\lambda) \tag{89}$$

Yardımcı Teorem 1'i kullanarak,

$$\widetilde{M}_3(\lambda) = \frac{6\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{3\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{3\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{\mu_3}{\lambda(1-\varphi(\lambda))}. \tag{90}$$

elde edilir.

Uygun hesaplamalar yapılarak, $\lambda \to 0$ iken, $\widetilde{M}_3(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_3(\lambda) = \frac{6}{\lambda^4} + \frac{3\mu_{21}}{\lambda^3} + \frac{\mu_{31}}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{91}$$

Kısalık amacıyla $J_2(\lambda)$'yı aşağıdaki biçimde dahil edelim:

$$J_2(\lambda) = \widetilde{M}_1{}''(\lambda) - A_1\left(\widetilde{M}_1'(\lambda) + \frac{\widetilde{M}_2(\lambda)}{2}\right) + \widetilde{M}_2'(\lambda) + \frac{\widetilde{M}_3(\lambda)}{3} + A_2\,\widetilde{M}_1(\lambda) \tag{92}$$

(76), (77), (79), (86), (88) ve (91)'deki asimptotik açılımları, (92)'deki ifadede yerlerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken, $J_2(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$J_2(\lambda) = \frac{2}{\lambda^4} + \frac{A_1}{\lambda^3} + \frac{3A_2}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{93}$$

Dikkat edilirse, asimptotik açılım (82)'de $\lambda \to 0$ iken, $K_1(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım bulunmuştur:

$$K_1(\lambda) \equiv \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)} = \frac{\lambda^4\mu_{31}}{6} - \frac{\lambda^3\mu_{21}}{2} + \lambda^2 + o(\lambda^2). \tag{94}$$

Kolayca görülebilmektedir ki,

$E(\overline{X}^2) = J_2(\lambda)K_1(\lambda)$'dır. (95)

Asimptotik açılımlar (93) ve (94)'ü, kesin formül (95)'de yerlerine yazılır ve uygun hesaplamalar yapılırsa, $\lambda \to 0$ iken, $E(\overline{X}^2)$ için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılım elde edilir:

$$E(\overline{X}^2) = J_2(\lambda)K_1(\lambda) = \frac{2}{\lambda^2} + \frac{A_1 - \mu_{21}}{\lambda} + \frac{\mu_{31}}{3} - \frac{A_1\,\mu_{21}}{2} - 3A_2 + o(1). \tag{96}$$

Bu da Teorem 10'un ispatını tamamlar.

Sonuç 6. Teorem 10'un koşulları sağlandığı takdirde, $\lambda \to 0$ iken, X(t) sürecinin ergodik dağılımının varyansı için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{5m_{21}^2}{4} + \frac{\mu_{31}}{3} - \frac{\mu_{21}^2}{4} - m_{31} + o(1). \tag{97}$$

Şimdi de, X(t) sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri için $\lambda \to 0$, asimptotik açılımlar elde etmeye çalışalım. Bununla ilgili temel teoremi verelim.

Teorem 11. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, ∞) aralığında $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun.

Bu durumda, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(\overline{X}^3) = \frac{6}{\lambda^3} + (3A_1 - 3\mu_{21})\frac{1}{\lambda^2} + (3A_2 - \frac{3}{2}A_1\mu_{21} + \mu_{31})\frac{1}{\lambda} + O(1), \tag{98}$$

$$E(\overline{X}^4) = \frac{24}{\lambda^4} + 12(A_1 - \mu_{21})\frac{1}{\lambda^3} + (12A_2 + 4\mu_{31} - 6A_1\mu_{21})\frac{1}{\lambda^2} + O(\frac{1}{\lambda}), \tag{99}$$

burada $A_1 = m_{21}$, $A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$'dır.

İspat. Öncelikle, $E(\overline{X})^3$ için ispatı verelim. Bilinmektedir ki, Teorem 9'da $E(\overline{X})^3$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$E(\overline{X}^3) = \frac{1}{\tilde{M}_1(\lambda)}\Big\{-\tilde{M}_1'''(\lambda) - \frac{3}{2}\tilde{M}_2''(\lambda) - \tilde{M}_3'(\lambda) - \frac{1}{4}\tilde{M}_4(\lambda) + \frac{3}{2}A_1\tilde{M}_1''(\lambda) + \frac{3}{2}A_1\tilde{M}_2'(\lambda) +$$

$$\frac{1}{2}A_1\tilde{M}_3(\lambda) - 3A_2\tilde{M}_1'(\lambda) - \frac{3}{2}A_2\tilde{M}_2(\lambda) + 3A_3\tilde{M}_1(\lambda)\Big\} \tag{100}$$

Yukardaki kesin ifadenin asimptotik açılımını bulmak için aşağıdaki asimptotik açılımlara ihtiyaç vardır.

Sonuç 5'i kullanılarak, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik açılımlar aşağıdaki gibi hesaplanabilirler:

$$\tilde{M}_1'''(\lambda) = -\frac{24}{\lambda^5} - 3\frac{\mu_{21}}{\lambda^4} + O(\frac{1}{\lambda^2}), \tag{101}$$

$$\widetilde{M}_2''(\lambda) = \frac{24}{\lambda^5} + 6\frac{\mu_{21}}{\lambda^4} + \frac{2\mu_{31}}{3\lambda^3} + O(\frac{1}{\lambda^2}), \tag{102}$$

$$\widetilde{M}_3'(\lambda) = -\frac{24}{\lambda^5} - 9\frac{\mu_{21}}{\lambda^4} - 2\frac{\mu_{31}}{\lambda^3} + O(\frac{1}{\lambda^2}), \tag{103}$$

$$\widetilde{M}_4(\lambda) = \frac{24}{\lambda^5} + 12\frac{\mu_{21}}{\lambda^4} + 4\frac{\mu_{31}}{\lambda^3} + O(\frac{1}{\lambda^2}) \tag{104}$$

Yukardaki asimptotik açılımlar (76), (77), (79), (82), (86), (88), (91), (101), (102), (103), (104)'ü kesin ifade (100)'de yerlerine yazılır ve kolay hesaplamalar yapılırsa, $\lambda \to 0$ iken, $E(\overline{X})^3$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E(\overline{X}^3) = \frac{6}{\lambda^3} + (3A_1 - 3\mu_{21})\frac{1}{\lambda^2} + (3A_2 - \frac{3}{2}A_1\,\mu_{21} + \mu_{31})\frac{1}{\lambda} + O(1), \tag{105}$$

burada, $A_1 = m_{21}$'dır.

Şimdi de, $E(\overline{X})^4$ için asimptotik ifade elde etmeye çalışalım. Hatırlatalım ki, $E(\overline{X})^4$ için kesin ifade Teorem 9'da aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned} E(\overline{X}^4) = \frac{1}{\widetilde{M}_1(\lambda)} \Big\{ & \widetilde{M}_1^{IV}(\lambda) + 2\widetilde{M}_2'''(\lambda) + 2\widetilde{M}_3''(\lambda) + \widetilde{M}_4'(\lambda) + \\ & + \frac{1}{5}\widetilde{M}_5(\lambda) - 2A_1\widetilde{M}_1'''(\lambda) - 3A_1\widetilde{M}_2''(\lambda) - \\ & - 2A_1\widetilde{M}_3'(\lambda) - \frac{1}{2}A_1\widetilde{M}_4(\lambda) + 6A_2\widetilde{M}_1''(\lambda) + 6A_2\widetilde{M}_2'(\lambda) + 2A_2\widetilde{M}_3(\lambda) - \\ & - 12A_3\widetilde{M}_1'(\lambda) - 6A_3\widetilde{M}_2(\lambda) + 3A_4\widetilde{M}_1(\lambda) \Big\}. \end{aligned} \tag{106}$$

Amacımıza ulaşmak için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılımlara ihtiyaç vardır.

$$\widetilde{M}_1^{IV}(\lambda) = \frac{120}{\lambda^6} + 12\frac{\mu_{21}}{\lambda^5} + O(\frac{1}{\lambda^3}), \tag{107}$$

$$\widetilde{M}_2'''(\lambda) = -\frac{120}{\lambda^6} - 24\frac{\mu_{21}}{\lambda^5} - 2\frac{\mu_{31}}{\lambda^4} + O(\frac{1}{\lambda^3}), \tag{108}$$

$$\widetilde{M}_3''(\lambda)\frac{120}{\lambda^6} + 36\frac{\mu_{21}}{\lambda^5} + 6\frac{\mu_{31}}{\lambda^4} + O(\frac{1}{\lambda^3}), \tag{109}$$

$$\widetilde{M}_4'(\lambda) = -\frac{120}{\lambda^6} - 48\frac{\mu_{21}}{\lambda^5} - 12\frac{\mu_{31}}{\lambda^4} + O(\frac{1}{\lambda^3}), \tag{110}$$

$$\widetilde{M}_5(\lambda) = \frac{120}{\lambda^6} + 60\frac{\mu_{21}}{\lambda^5} + 20\frac{\mu_{31}}{\lambda^4} + O(\frac{1}{\lambda^3}), \tag{111}$$

Asimptotik açılımlar (76), (77), (86), (88), (91), (94), (102), (103), (104), (107), (108), (109), (110) (111) ‘leri, kesin ifade (106) ‘da yerlerine yazar ve kolay hesaplamalar yaparsak, $E(\overline{X})^4$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E(\overline{X}^4) = \frac{24}{\lambda^4} + 12(A_1 - \mu_{21})\frac{1}{\lambda^3} + (12A_2 + 4\mu_{31} - 6A_1\,\mu_{21})\frac{1}{\lambda^2} + O(\frac{1}{\lambda}), \tag{112}$$

burada, $A_1 = m_{21}$, $A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$ ’dır.

Bu da Teorem 11’in ispatını tamamlar.

Yukarda X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için asimptotik açılımları elde ettik. Bu asimptotik açılımlardan yararlanarak, X(t) sürecinin ergodik dağılımının bir çok diğer karakteristikleri hesaplamak mümkündür. Bu karakteristikler içersinden hem teorik hem de pratik açıdan önemli olanlardan birisi asimetri katsayısı diğeri ise basıklık katsayısıdır. Aşağıda bu karakteristiklerle ilgili asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Çarpıklık ve basıklık katsayılarını sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\gamma_3 = \frac{E(X-a)^3}{\sigma^3}, \quad \gamma_4 = \frac{E(X-a)^4}{\sigma^4} - 3.$$

Burada, $a = E(X)$ ’dır.

Sonuç 7. Başlangıç rasgele değişkenleri ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, ∞) aralığında $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun.

Bu durumda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının asimetri ve basıklık katsayıları için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar, sırasıyla yazılabilir:

$$\gamma_3 = 2 + O(\lambda^3),$$

$$\gamma_4 = 6 + O(\lambda^2),$$

İspat. Teorem 10, Teorem 11 ve Sonuç 6'daki asimptotik açılımlar $\gamma_3 = \dfrac{E(X-a)^3}{\sigma^3}$ ve $\gamma_4 = \dfrac{E(X-a)^4}{\sigma^4} - 3$'de yerlerine yazılır ve uygun hesaplamalar yapılırsa aşağıdaki asimptotik açılımlar elde edilir.

$$\gamma_3 = 2 + O(\lambda^3), \tag{113}$$

$$\gamma_4 = 6 + O(\lambda^2). \tag{114}$$

Bu da sonuç 7'in ispatını tamamlar.

Not. Belirtelim ki, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip bir Y rasgele değişkenin asimetri ve basıklık katsayıları sırasıyla $\gamma_3 \equiv 2$; $\gamma_4 \equiv 6$'dır. Yani, $\lambda \to 0$ iken, asimetri ve basıklık katsayıları için elde edilen asimptotik açılımlar, bu parametrelerin değerlerinin üstel dağılıma sahip rastgele değişkenin asimetri ve basıklık katsayılarına yeterince yaklaştığını göstermektedir. Dolayısıyla, ele alınan sürecin durağan özellikleri $\lambda \to 0$ iken, kendilerini bir üstel dağılıma sahipmiş gibi gösterdiklerini görüyoruz. Bu durumda, üstel dağılımın unutkanlık özelliğinin yarattığı kolaylıktan yararlanarak ele alınan sürecin durağan özellikleri için yeteri kadar sade ve yeteri kadar uyumluluk gösteren yaklaşık formüller elde edilmiştir. Fakat bu sezgizel sonucun kesin ispatına ihtiyaç vardır.

Şimdi de, bu sezgisel sonucun kesin ispatını, zayıf yakınsaklık teoreminden faydalanarak yapalım.

Amacımıza ulaşmak için aşağıdaki notasyonları dahil edelim.

$$\varphi_{S_{N(x)}}(u) = Ee^{iuS_{N(x)}},\ \varphi_{\eta_1}(u) = Ee^{iu\eta_1},\ \varphi_X(u) = \lim_{t\to\infty} Ee^{iuX(t)},\ u \in R,$$

$$Q_{\overline{W}_\lambda}(x) = \lim_{t\to\infty} P\{\overline{W}_\lambda(t) \le x\},\ N(x) = \inf\{n \ge 0 : S_n \ge x\}.$$

Teorem 12. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, ∞) 'da $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olsun.

Bu takdirde, X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $u \ne 0$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\varphi_X(u)=\frac{1}{\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}EN(x)dx}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}e^{iux}\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-u)-1}dx \tag{115}$$

Şimdi de, aşağıdaki gibi $\overline{W}_\lambda(t)$ sürecini tanımlayalım:

$$\overline{W}_\lambda(t)=\lambda\overline{X}(t),$$

burada, hatırlatalım ki, $\overline{X}(t)=X(t)-s$ 'dır.

Not edelim ki, ergodik teoremin koşulları altında $X(t)$ sürecinin ergodik olduğunu ispatlamıştık (bak. Kısım 2.6). Aynı zamanda, $\overline{W}_\lambda(t)$ sürecide ergodiktir. Çünkü $\overline{W}_\lambda(t)$ süreci, $X(t)$ sürecinin bir lineer dönüşümüdür.

$\overline{W}_\lambda(t)$ sürecinin karakteristik fonksiyonunu $\varphi_{\overline{W}_\lambda}(u)$, $u\in R$, ile gösterelim.

Teorem 13. Teorem 12'nin koşullarına ek olarak, $E\eta_1^{\;2}<\infty$ da sağlansın. Bu takdirde, $\overline{W}_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu $\lambda\to 0$ iken, $\varphi_{\overline{W}_\lambda}(u)$, $u\in R$, fonksiyonuna yakınsar:

$$\varphi_{\overline{W}_\lambda}(u)\to\frac{1}{1-iu}$$

İspat. Teorem 12 'nin koşulları altında $\overline{W}_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\varphi_{\overline{W}_\lambda}(u)=e^{-iu}\varphi_{\overline{X}}(\lambda u)=\frac{1}{E\tilde{N}(\lambda)}[\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}e^{i\lambda ux}\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-\lambda u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-\lambda u)-1}dx \tag{116}$$

Formül (116)'daki $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelini amacımıza ulaşmamızda kolaylık sağlaması için, aşağıdaki gibi kaydırma işlemi uygulayalım:

$$\overline{S}_{N(x)}=S_{N(x)}-x.$$

Bu $\overline{S}_{N(x)}$, ifade (116)'da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\varphi_{\overline{W}_\lambda}(u)&=\frac{1}{E\tilde{N}(\lambda)}[\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}e^{i\lambda ux}\frac{e^{-i\lambda ux}\varphi_{\overline{S}_{N(x)}}(-\lambda u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-\lambda u)-1}dx\\&=\frac{1}{E\tilde{N}(\lambda)[1-\varphi_{\eta_1}(-\lambda u)]}[\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}[e^{i\lambda ux}-1]dx-\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}E[e^{-i\lambda u\overline{S}_{N(x)}}-1]dx]\\&=\frac{1}{I_1(\lambda)}[\frac{iu}{(1-iu)\lambda}-I_2(\lambda)]\end{aligned} \tag{117}$$

elde edilir.

Burada, $I_1(\lambda) = E\widetilde{N}(\lambda)[1-\varphi_{\eta_1}(-\lambda u)]$ ve $I_2(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} E[e^{-i\lambda u \overline{S}_{N(x)}} - 1]dx$ 'dır.

$E\widetilde{N}(\lambda)$ 'nın asimptotik açılımı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E\widetilde{N}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} EN(x)dx = \frac{1}{\lambda(1-\varphi\ (\lambda))} \tag{118}$$

$\lambda \to 0$ iken , $\varphi\ (\lambda) = Ee^{-\lambda\eta_1} = 1 - m_1\lambda + o(\lambda)$ 'dur (bak, [30]). (119)

Asimptotik açılım (119), aşağıdaki ifade de yerine yazılırsa, $\lambda \to 0$ iken,

$$\frac{1}{1-\varphi\ (\lambda)} = [\lambda m_1[1+o(1)]]^{-1}$$

$$= \frac{1}{m_1\lambda}[1+o(1)] \tag{120}$$

elde edilir. Asimptotik açılım (120)'yi, ifade (118)'de yerine yazarsak, $\lambda \to 0$ iken,

$$E\widetilde{N}(\lambda) = \frac{1}{m_1\lambda^2}[1+o(1)] \tag{121}$$

elde edilir. $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılımı yazmak mümkündür (bak, Feller [7]):

$$1-\varphi_{\eta_1}(-\lambda u) = i\lambda u m_1 + o(\lambda) = i\lambda u m_1[1+o(1)]\,. \tag{122}$$

Asimptotik açılımlar (121)'i ve (122)'yi, $I_1(\lambda)$ ifadesinde yerlerine yazarsak, $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$I_1(\lambda) = E\widetilde{N}(\lambda)[1-\varphi_{\eta_1}(-\lambda u)] = iu\,\frac{1}{\lambda}[1+o(1)]\,. \tag{123}$$

$I_2(\lambda)$ ifadesinin asimptotik açılımının hesaplamasında yararlanacağımız önemli bilgiler kısım 2.6'da teze dahil edilmiştir. Oradaki bilgilerin yardımıyla $S_{N(x)}$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(x)} \chi_i^+ \,.$$

Şimdi de, yenileme teoremini kullanarak, $E(\overline{S}_{N(x)})$ 'in asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$E\overline{S}_{N(x)} = E(S_{N(x)} - x) = \frac{\mu_2}{2\mu_1} + o(1)\,. \tag{124}$$

Diğer taraftan,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} E\overline{S}_{N(x)} dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} [ES_{N(x)} - x] dx = \mu_1 \frac{1}{\lambda(1-\varphi_+(\lambda))} - \frac{1}{\lambda^2} \text{ ‘ dır.}$$

$\lambda \to 0$ iken,

$$\frac{1}{1-\varphi_+(\lambda)} = [\lambda\mu_1[1 - \frac{\mu_2}{2\mu_1}\lambda + o(\lambda)]]^{-1} = \frac{1}{\mu_1\lambda}[1 + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\lambda + o(\lambda)],$$

olduğu için,

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} E\overline{S}_{N(x)} dx = \frac{\mu_2}{2\mu_1}\frac{1}{\lambda} + o(\frac{1}{\lambda}) \text{ ’ dır.} \tag{125}$$

$\mu_2 < \infty$ olduğu için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur (bak, [30]):

$$\left| Ee^{-iu\lambda \overline{S}_{N(x)}} - 1 \right| \le |\lambda\, u| E\overline{S}_{N(x)} \tag{126}$$

(125) eşitliğini ve (126) eşitsizliğini dikkate alarak $\lambda \to 0$ iken,

$$I_2(\lambda) = O(1) \tag{127}$$

elde edilir. (123) ve (127) asimptotik ifadeleri, formül (117)’de yerlerine yazarak, $\lambda \to 0$ iken,

$$\varphi_{\overline{W}_\lambda}(u) = \frac{\lambda}{iu}[1 + o(1)]\,[\frac{iu}{(1-iu)\lambda} + O(1)\,] \;\; + [\frac{1}{m_1\lambda^2}[1 + o(1)]]^{-1}$$

$$= \frac{1}{1-iu}[1 + o(1)] \tag{128}$$

elde edilir.

Bu da Teorem 13’ün ispatını tamamlar.

Sonuç 8. Teorem 13’ün koşulları altında, $\overline{W}_\lambda(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $\lambda \to 0$ iken, zayıf manada aşağıdaki dağılım fonksiyonuna yakınsar.

$$Q_{\overline{W}_\lambda}(x) \to 1 - e^{-x}, \quad x \ge 0. \tag{129}$$

2.11. Müdahalenin 2. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Kesin İfadeler

Bu kısmın temel amacı, müdahalenin 2. mertebeden Erlang dağılımı olması durumunda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentlerini $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin uygun momentleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaç için öncelikle aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$m_k = E(\eta_1^k), \; M_k(x) = E(S_{N(x)}^k), \quad k = 1,2,3. \; x > 0.$$

Kısalık amacıyla ise şu natosyonları dahil edelim:

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1},\; M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}, \quad k = 2{,}3.\;\; EX^k = \lim_{t\to\infty} E(X^k(t)),\;\; k = 1{,}2.$$

Ayrıca hesaplamalarda kolaylık olması amacıyla süreci ortalayalım, yani $\overline{X}(t) = X(t) - s$ olsun.

Şimdi de, bu kısmın temel teoremini verelim:

Teorem 14. Sürecin Ergodiklik koşularına ek olarak $E|\eta_1|^3 < \infty$ koşulu da sağlansın. Ayrıca, ζ_1 rastgele değişkeni (s, ∞) aralığında 2. merbeden Erlanğ dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için kesin formüller, $S_{N\,(X)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkenin uygun momentleri yardımıyla aşağıdaki ifade edilebilir:

$$E\overline{X} = -\frac{1}{\widetilde{M}_1{}'(\lambda)}\left[\widetilde{M}_1{}''(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{M}_2{}'(\lambda)\right] + \frac{m_{21}}{2}, \tag{130}$$

$$E(\overline{X}^2) = -\frac{1}{\widetilde{M}_1{}'(\lambda)}\left[-\widetilde{M}_1'''(\lambda) + m_{21}\widetilde{M}_1{}''(\lambda) + \frac{m_{21}}{2}\widetilde{M}_2{}'(\lambda) - \widetilde{M}_2{}''(\lambda) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3}\widetilde{M}_3{}'(\lambda)\right] + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6}, \tag{131}$$

burada $\widetilde{M}_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, M_k(x)dx$, $\lambda > 0$; $M_k(k) \equiv E(S^k_{N(x)})$, k=1,2,3.'dır.

İspat. Hatırlatalım ki, Teorem 8'de ζ_1 rasgele değişkeninin genel duruma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için kesin ifadeler aşağıdaki gibi elde edilmiştir. ζ_1 rasgele değişkeninin 2. merteben Erlang dağılımına sahip olması durumunda,

$$E(X) = \frac{1}{E[M_1(\zeta_1 - s)]}\{E[2\zeta_1 + m_{21})M_1(\zeta_1 - s)] - E(M_2(\zeta_1 - s)\}$$

$$= \frac{1}{\int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x} M_1(x)dx}\left\{\int_0^\infty \lambda^2 x(x+s)\, e^{-\lambda x} M_1(x)dx + \int_0^\infty \frac{\lambda^2 m_{21} x}{2} e^{-\lambda x} M_1(x)dx\right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \lambda^2 x e^{-\lambda x} M_2(x)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\int_0^\infty xe^{-\lambda x}M_1(x)dx}\left\{\int_0^\infty x^2\,e^{-\lambda x}M_1(x)dx+\int_0^\infty x\,e^{-\lambda x}M_1(x)dx+\frac{m_{21}}{2}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}M_1(x)dx\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-\lambda x}M_2(x)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\widetilde{M}_1'(\lambda)}\left\{-\widetilde{M}_1''(\lambda)+(\frac{m_{21}}{2}+s)\widetilde{M}_1'(\lambda)-\frac{1}{2}\widetilde{M}_2'(\lambda)\right\}$$

elde edilir. Özetle,

$$E(X)=\frac{1}{\widetilde{M}_1'(\lambda)}\left\{-\widetilde{M}_1''(\lambda)+(\frac{m_{21}}{2}+s)\widetilde{M}_1'(\lambda)-\frac{1}{2}\widetilde{M}_2'(\lambda)\right\}$$

$$E\overline{X}=-\frac{1}{\widetilde{M}_1{}'(\lambda)}\left[\widetilde{M}_1{}''(\lambda)+\frac{1}{2}\widetilde{M}_2{}'(\lambda)\right]+\frac{m_{21}}{2} \tag{132}$$

elde edilir. Burada, $\widetilde{M}_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\ M_k(x)dx$, $\lambda>0$; $M_k(k)\equiv E(S^k_{N(x)})$, k=1,2,3.'dır.

Şimdi de, ζ_1 rasgele değişkeninin 2. merteben Erlang dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ikinci momenti için kesin formülü aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E(X^2)=\frac{1}{E[M_1(\zeta_1-s)]}\left\{E[M_3(\zeta_1-s)-3E\left[(\frac{1}{2}m_{21}+\zeta_1)M_2(\zeta_1-s)\right]\right.$$

$$\left.+E[(\frac{c_1}{2}+3m_{21}\zeta_1+3\zeta_1^2)M_1(\zeta_1-s)\right\}$$

$$=\frac{1}{\int_0^\infty \lambda^2xe^{-\lambda x}M_1(x)dx}\left\{\frac{1}{3}\int_0^\infty\lambda^2xe^{-\lambda x}M_3(x)dx-\int_0^\infty(\frac{m_{21}}{2}+(s+x))\lambda^2xe^{-\lambda x}M_2(x)dx\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}\int_0^\infty\left[\frac{c_1}{2}+3m_{21}(s+x)+3(s+x)^2\right]M_1(x)\lambda^2xe^{-\lambda x}dx\right\}.$$

Buradan,

$$E(\overline{X}^2)=-\frac{1}{\widetilde{M}_1{}'(\lambda)}\left[-\widetilde{M}_1'''(\lambda)+m_{21}\widetilde{M}_1{}''(\lambda)+\frac{m_{21}}{2}\widetilde{M}_2{}'(\lambda)-\widetilde{M}_2{}''(\lambda)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{3}\widetilde{M}_3{}'(\lambda)\right]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}, \tag{133}$$

elde edilir. Burada, $\widetilde{M}_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \; M_k(x)dx$, $\lambda > 0$; $M_k(k) \equiv E(S^k_{N(x)})$, k=1,2,3.'dır.

Bu da Teorem 14'ün ispatını tamamlar.

Kesin ifadedeki formüllerin daha sade olması için, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için asimptotik açılımlar elde etmeye çalışalım.

2.12. Müdahalenin 2. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Asimptotik Açılımlar

Teorem 15. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s,∞) aralığında $\lambda > 0$ parametreli ikinci mertebeden Erlang dağılımına sahip olsun, yani, $d\pi(z) = \lambda^2 (z-s)e^{-\lambda(z-s)}dz$, $z \geq s$ 'dır.

Bu durumda, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının iki momentleri için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$EX = \frac{3}{2\lambda} + s + \frac{4m_{21} - 3\mu_{21}}{8} + \left(\frac{3}{32}\mu_{21}^2 - \frac{1}{12}\mu_{31}\right)\lambda + o(\lambda), \tag{134}$$

burada, $\mu_k = E(\chi_1^+)^k$, $\mu_{k1} = \frac{\mu_k}{\mu_1}$, $k = 2,3$ ve $m_k = E(\eta_1)^k$, $m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}$ 'dır.

İspat. Bilinmektedir ki, Teorem 14'de $E\overline{X}$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$E\overline{X} = -\frac{1}{\widetilde{M}_1'(\lambda)}\left[\widetilde{M}_1''(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{M}_2'(\lambda)\right] + \frac{m_{21}}{2}. \tag{135}$$

Sonuç 5'de $\widetilde{M}_1(\lambda)$ için aşağıdaki ifade elde edilmiştir:

$$\widetilde{M}_1(\lambda) = \mu_1 \widetilde{U}(\lambda) \text{ ve } \widetilde{U}(\lambda) = \frac{1}{\lambda(1-\varphi(\lambda))}$$

olduğu gözönüne alınırsa,

$$\widetilde{M}_1(\lambda) = \frac{\mu_1}{\lambda(1-\varphi(\lambda))} \tag{136}$$

elde edilir. İfade (136)'da $\widetilde{M}_1(\lambda)$ 'in türevini alırsak, aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_1'(\lambda) = -\frac{\mu_1}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))} + \frac{\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}.$$

Benzer biçimde, $\lambda \to 0$ iken, $\widetilde{M}_1'(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_1'(\lambda) = -\frac{2}{\lambda^3} - \frac{\mu_{21}}{2\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{137}$$

$\widetilde{M}_1(\lambda)$’in (136)’daki kesin ifadesinde iki kez türev alınırsa, $\widetilde{M}_1''(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_1''(\lambda) = \frac{2\mu_1}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))} - \frac{2\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{2\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} \tag{138}$$

Uygun hesaplamaları yapılırsa, $\widetilde{M}_1''(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_1''(\lambda) = \frac{6}{\lambda^4} + \frac{\mu_{21}}{\lambda^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{139}$$

Hatırlatalım ki, $\widetilde{M}_2(\lambda)$ için sonuç 5’de aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$\widetilde{M}_2(\lambda) = 2\widetilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)(-\mu_1\varphi_1(\lambda)) + \mu_2\widetilde{U}(\lambda).$$

Yardımcı Teorem 1’den yararlanarak aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\widetilde{M}_2(\lambda) = \frac{\mu_2}{\lambda(1-\varphi(\lambda))} - \frac{2\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}. \tag{140}$$

Uygun hesaplamalar yapılarak $\lambda \to 0$ iken, $\widetilde{M}_2(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_2(\lambda) = \frac{2}{\lambda^3} + \frac{\mu_2}{\mu_1\lambda^2} + \frac{\mu_3}{3\mu_1\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{141}$$

İfade (140)’da, $\widetilde{M}_2(\lambda)$’nin kesin ifadesinin bir kez türevi alınırsa, $\widetilde{M}_2'(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_2'(\lambda) = -\frac{\mu_2}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))} + \frac{\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} +$$

$$+\frac{2\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{4\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} - \frac{2\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} \tag{142}$$

$\varphi(\lambda)$’ nın $\lambda \to 0$ iken, Taylor açılımı açılırsa ve (142)’de yerine yazılırsa, $\widetilde{M}_2'(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\tilde{M}_2'(\lambda) = -\frac{6}{\lambda^4} - \frac{2\mu_{21}}{\lambda^3} - \frac{\mu_{31}}{3\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{143}$$

Kısalık amacıyla aşağıdaki $J_1(\lambda)$ notasyonunu dahil edelim.

$$J_1(\lambda) = \tilde{M}_1''(\lambda) + \frac{1}{2}\tilde{M}_2'(\lambda). \tag{144}$$

(143) ve (139)'daki asimptotik açılımlar, formül (144)'de yerlerine yazılırlarsa, $\lambda \to 0$ iken, $J_1(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$J_1(\lambda) = \frac{3}{\lambda^4} - \frac{\mu_{31}}{6\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{145}$$

(137)'deki asimptotik açılımı kullanarak, $K_1(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$K_1(\lambda) \equiv -\frac{1}{\tilde{M}_1'(\lambda)} = \frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda^4\mu_{21}}{8} + \frac{\lambda^5\mu_{21}^2}{16} + o(\lambda^5). \tag{146}$$

Asimptotik açılımlar (145) ve (146), kesin formül (135)'de yerlerine yazılırlarsa ve uygun hesaplamalar yapılırsa, $\lambda \to 0$ iken, $E(\overline{X})$ için aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımı elde edilir:

$$E\overline{X} = J_1(\lambda)K_1(\lambda) = \frac{3}{2\lambda} + \frac{4m_{21} - 3\mu_{21}}{8} + \left(\frac{3}{32}\mu_{21}^2 - \frac{1}{12}\mu_{31}\right)\lambda + o(\lambda). \tag{147}$$

Burada, $EX = E\overline{X} + s$ olduğuna dikkat edilirse, EX için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$EX = \frac{3}{2\lambda} + s + \frac{4m_{21} - 3\mu_{21}}{8} + \left(\frac{3}{32}\mu_{21}^2 - \frac{1}{12}\mu_{31}\right)\lambda + o(\lambda).$$

Bu da Teorem 15'in ispatını tamamlar.

Şimdi de, diğer bir önemli bir sonucu verelim. X(t) sürecinin ergodik dağılımının ikinci momentinin asimptotik açılımını elde edelim.

Teorem 16. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, ∞) aralığında $\lambda > 0$ parametreli ikinci mertebeden Erlang dağılımına sahip olsun, yani, $d\pi(z) = \lambda^2(z-s)e^{-\lambda(z-s)}dz$, $z \geq s$ 'dır.

Bu durumda, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(\overline{X}^2) = \frac{4}{\lambda^2} + \frac{3m_{21} - 2\mu_{21}}{2\lambda} + \frac{2\mu_{21}^2 - 3m_{21}\mu_{21}}{8} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} + o(1) .$$

İspat. Hatırlatalım ki, Teorem 14'de $E(\overline{X}^2)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$E(\overline{X}^2) = -\frac{1}{\tilde{M}_1'(\lambda)}\Big[-\tilde{M}_1'''(\lambda) + m_{21}\tilde{M}_1''(\lambda) + \frac{m_{21}}{2}\tilde{M}_2'(\lambda) - \tilde{M}_2''(\lambda) - $$

$$-\frac{1}{3}\tilde{M}_3'(\lambda)\Big] + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} \qquad (148)$$

$\tilde{M}_1(\lambda)$'in (136)'daki kesin ifadesinde üç kez türev alınırsa, $\tilde{M}_1'''(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\tilde{M}'''(\lambda) = -6\frac{\mu_1}{\lambda^4(1-\varphi(\lambda))} + 6\frac{\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^2} - 6\frac{2\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3} - 3\frac{\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2}$$

$$+6\frac{\mu_1\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4} + 6\frac{\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{\mu_1\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} . \qquad (149)$$

Uygun hesaplamalar yapılırsa, $\tilde{M}_1'''(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılımı elde edilir:

$$\tilde{M}_1'''(\lambda) = -\frac{24}{\lambda^5} - \frac{3\mu_{21}}{\lambda^4} + o(\frac{1}{\lambda^2}) . \qquad (150)$$

İfade (140)'da, $\tilde{M}_2(\lambda)$'nin kesin ifadesinin iki kez türevi alınırsa, $\tilde{M}_2''(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\tilde{M}_2''(\lambda) = 2\frac{\mu_2}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))} - 2\frac{\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} + 2\frac{\mu_2\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{\mu_2\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}$$

$$-4\frac{\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^2} + 8\frac{\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))} + 4\frac{\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2}$$

$$-12\frac{\mu_1\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4} - \frac{\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} - 2\frac{\mu_1\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} \qquad (151)$$

$\varphi(\lambda)$' nın $\lambda \to 0$ iken, Taylor açılımı açılırsa ve (151)'de yerine yazılırsa, $\tilde{M}_2''(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir :

$$\tilde{M}_2''(\lambda) = \frac{24}{\lambda^5} + \frac{6\mu_{21}}{\lambda^4} + \frac{2\mu_{31}}{3\lambda^3} o(\frac{1}{\lambda^2}). \tag{152}$$

$\tilde{M}_3(\lambda)$ için Sonuç 5'de aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$\tilde{M}_3(\lambda) = 6\tilde{U}(\lambda)U_*^2(\lambda)(\mu_1\varphi_1^2(\lambda)) + 3\tilde{U}(\lambda)U_*(\lambda)[\mu_1\varphi_2(\lambda) - \mu_2\varphi_1(\lambda)] + \mu_3\tilde{U}(\lambda). \tag{153}$$

Yardımcı Teorem 1'i kullanarak aşaıdaki kesin ifadeyi elde etmek mümkündür.

$$\tilde{M}_3(\lambda) = \frac{6\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{3\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{3\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{\mu_3}{\lambda(1-\varphi(\lambda))}. \tag{154}$$

Gerekli hesaplamaları yaparsak, $\tilde{M}_3(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılımlar elde edilir:

$$\tilde{M}_3(\lambda) = \frac{6}{\lambda^4} + \frac{3\mu_{21}}{\lambda^3} + \frac{\mu_{31}}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{155}$$

$\tilde{M}_3(\lambda)$'in (154)'deki kesin ifadesinde bir kez türev alınırsa, $\tilde{M}_3'(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{M}_3'(\lambda) = &-\frac{6\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{18\mu_1\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4} + \frac{18\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} - \frac{3\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} + \\ &+ \frac{3\mu_1\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{3\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{6\mu_2\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} - \frac{3\mu_2\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} - \\ &- \frac{\mu_3}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))} + \frac{\mu_3\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2}.\end{aligned} \tag{156 }$$

Uygun hesaplamalar yapılırsa, $\tilde{M}_3'(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\tilde{M}_3'(\lambda) = -\frac{24}{\lambda^5} - \frac{9\mu_{21}}{\lambda^4} - \frac{2\mu_{31}}{\lambda^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right). \tag{157}$$

Kısalık amacıyla $J_2(\lambda)$ 'yı aşağıdaki gibi dahil ettik.

$$J_2(\lambda) = -\tilde{M}_1'''(\lambda) + m_{21}\tilde{M}_1''(\lambda) + \frac{m_{21}}{2}\tilde{M}_2'(\lambda) - \tilde{M}_2''(\lambda) - \frac{1}{3}\tilde{M}_3'(\lambda) \tag{158}$$

Sonuçta, (157), (152), (150), (143), (139) asimptotik açılımlar, ifade (158)'de yerlerine yazılırsa, $J_2(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$J_2(\lambda) = \frac{8}{\lambda^5} + \frac{3m_{21}}{\lambda^4} - \frac{m_{21}\mu_{31}}{6\lambda^2} + o(\frac{1}{\lambda^2}). \tag{159}$$

Hatırlatalım ki, ifade (146)'da $K_1(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$K_1(\lambda) \equiv -\frac{1}{\tilde{M}_1'(\lambda)} = \frac{\lambda^3}{2} - \frac{\lambda^4 \mu_{21}}{8} + \frac{\lambda^5 \mu_{21}^2}{16} + o\left(\lambda^5\right). \tag{160}$$

Kolayca görmek mümkündür ki,

$$E(\overline{X}^2) = J_2(\lambda) K_1(\lambda) \text{'dır.} \tag{161}$$

Asimptotik açılımlar (160) ve (159), kesin ifade (161)'de yerlerine yazılırlarsa, $E(\overline{X}^2)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E(\overline{X}^2) = J_2(\lambda) K_1(\lambda)$$

$$= \frac{4}{\lambda^2} + \frac{3m_{21} - 2\mu_{21}}{2\lambda} + \frac{2\mu_{21}^2 - 3m_{21}\mu_{21}}{8} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} + o(1). \tag{162}$$

Bu da Teorem 16'in ispatını tamamlar.

Sonuç 9. Teorem 16'nın koşulları sağlansın. Bu takdirde, X(t) sürecinin ergodik dağılımının varyansı için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\operatorname{Var}(X) = \frac{7}{4\lambda^2} + \frac{\mu_{21}}{8\lambda} + A + o(1),$$

burada, $A = \frac{\mu_{31}}{4} - \frac{m_{31}}{3} - \frac{41\mu_{21}^2}{64} + \frac{m_{21}^2}{4}$'dır.

Şimdide müdahalenin üçüncü mertebeden Erlang dağılımı olması durumunda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının momentlerini inceleyelim.

2.13. Müdahalenin 3. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Kesin İfadeler

Bu bölümün amacı, müdahalenin 3. mertebeden Erlang dağılımı olması durumunda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentlerini $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin uygun momentleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaç için öncelikle aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$m_k = E(\eta_1^k), \; M_k(x) = E(S_{N(x)}^k), \quad k = 1,2,3. \; x > 0.$$

Kısalık amacıyla ise şu natosyonları dahil edelim:

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}, \; M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}, \quad k = 2,3. \;\; EX^k = \lim_{t\to\infty} E(X^k(t)), \; k = 1,2.$$

Ayrıca hesaplamalarda kolaylık olması amacıyla süreci ortalayalım, yani $\overline{X}(t) = X(t) - s$ olsun.

Şimdi de, bu kısmın temel teoremini verelim:

Teorem 17. Sürecin Ergodiklik koşularına ek olarak $E|\eta_1|^3 < \infty$ koşulu da sağlansın. Ayrıca, ζ_1 rastgele değişkeni (s, ∞) aralığında 3. merbeden Erlanğ dağılımına sahip olduğu varsayılsın. Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için kesin formüller, $S_{N\,(X)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkenin uygun momentleri yardımıyla aşağıdaki ifade edilebilir:

$$E\overline{X} = -\frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)}\left[\widetilde{M}_1'''(\lambda) + \frac{1}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda)\right] + \frac{m_{21}}{2}, \tag{163}$$

$$E(\overline{X}^2) = \frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)}\left[\widetilde{M}_1^{(IV)}(\lambda) - m_{21}\widetilde{M}_1'''(\lambda) - \frac{m_{21}}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda) + \widetilde{M}_2'''(\lambda) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\widetilde{M}_3''(\lambda)\right] + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6}, \tag{164}$$

Burada,

$$\widetilde{M}_k(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\, M_k(x)dx\,,\ \lambda > 0\,;\quad M_k(k) \equiv E(S_{N(x)}^k)\,,\ k=1,2,3.\text{'dır.}$$

İspat. Hatırlatalım ki, Teorem 8'de ζ_1 rasgele değişkeninin genel duruma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için kesin ifadeler aşağıdaki gibi elde edilmiştir. ζ_1 rasgele değişkeninin 3. merteben Erlang dağılımına sahip olması durumunda,

$$E(X) = \frac{1}{E[M_1(\zeta_1 - s)]}\{E[2\zeta_1 + m_{21})M_1(\zeta_1 - s)] - E(M_2(\zeta_1 - s)\}$$

$$= \frac{1}{\int_0^\infty \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} M_1(x)dx}\left\{\int_0^\infty \lambda^3 x^2 (x+s) e^{-\lambda x} M_1(x)dx + \int_0^\infty \frac{\lambda^3 m_{21} x^2}{2} e^{-\lambda x} M_1(x)dx\right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x} M_2(x)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} M_1(x)dx}\left\{\int_0^\infty x^3 e^{-\lambda x} M_1(x)dx+\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} M_1(x)dx\right.$$

$$\left.+\frac{m_{21}}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} M_1(x)dx-\frac{1}{2}\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} M_2(x)dx\right\}$$

$$=\frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)}\left\{-\widetilde{M}_1'''(\lambda)+(\frac{m_{21}}{2}+s)\widetilde{M}_1''(\lambda)-\frac{1}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda)\right\}$$

elde edilir. Özetle,

$$E(X)=\frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)}\left\{-\widetilde{M}_1'''(\lambda)+(\frac{m_{21}}{2}+s)\widetilde{M}_1''(\lambda)-\frac{1}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda)\right\}$$

$$E\overline{X}=-\frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)}\left[\widetilde{M}_1'''(\lambda)+\frac{1}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda)\right]+\frac{m_{21}}{2} \tag{165}$$

elde edilir. Burada, $\widetilde{M}_k(\lambda)=\int_0^\infty e^{-\lambda x}\ M_k(x)dx$, $\lambda>0$; $M_k(k)\equiv E(S^k_{N(x)})$, k=1,2,3.'dır.

Şimdi de, ζ_1 rasgele değişkeninin 3. merteben Erlang dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ikinci momenti için kesin formülü aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$E(X^2)=\frac{1}{E[M_1(\zeta_1-s)]}\left\{E[M_3(\zeta_1-s)-3E[(\frac{1}{2}m_{21}+\zeta_1)M_2(\zeta_1-s)]+\right.$$

$$\left.E[(\frac{c_1}{2}+3m_{21}\zeta_1+3\zeta_1^2)M_1(\zeta_1-s)\right\}$$

$$=\frac{1}{\int_0^\infty \frac{\lambda^3x^2}{2}e^{-\lambda x}M_1(x)dx}\left\{\frac{1}{3}\int_0^\infty\frac{\lambda^3x^2}{2}e^{-\lambda x}M_3(x)dx\right.$$

$$-\int_0^\infty(\frac{m_{21}}{2}+(s+x))\frac{\lambda^3x^2}{2}e^{-\lambda x}M_2(x)dx$$

$$\left.+\frac{1}{3}\int_0^\infty\left[\frac{c_1}{2}+3m_{21}(s+x)+3(s+x)^2\right]M_1(x)\frac{\lambda^3x^2}{2}e^{-\lambda x}dx\right\}.$$

Buradan,

$$E(\overline{X}^2)=-\frac{1}{\widetilde{M}_1'(\lambda)}\left[-\widetilde{M}_1'''(\lambda)+m_{21}\widetilde{M}_1''(\lambda)+\frac{m_{21}}{2}\widetilde{M}_2'(\lambda)-\widetilde{M}_2''(\lambda)-\right.$$

$$-\frac{1}{3}\widetilde{M}_3{}'(\lambda)\Bigg]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6} \tag{166}$$

elde edilir. Burada, $\widetilde{M}_k(\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda x}\ M_k(x)dx$, $\lambda>0$; $M_k(k)\equiv E(S_{N(x)}^k)$, k=1,2,3.'dır.

Bu da Teorem 17'in ispatını tamamlar.

Kesin ifadedeki formüllerin daha sade olması için, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için asimptotik açılımlar elde etmeye çalışalım.

2.14. Müdahalenin 3. Mertebeden Erlang Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk İki Momentleri için Asimptotik Açılımlar

Teorem 18. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1,η_1,ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0<E\xi_1<\infty$,

2) $E\eta_1>0$ ve $E|\eta_1|^3<\infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s,∞) aralığında $\lambda>0$ parametreli üçüncü mertebeden Erlang dağılımına sahip olsun, yani, $d\pi(z)=\frac{1}{2}\lambda^3(z-s)^2e^{-\lambda(z-s)}dz$, $z\geq s$ 'dır.

Bu durumda, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının iki momentleri için $\lambda\to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$EX=\frac{2}{\lambda}+s+\frac{3m_{21}-2\mu_{21}}{6}+\left(\frac{\mu_{21}^2-\mu_{31}}{18}\right)\lambda+o(\lambda), \tag{167}$$

burada $\mu_k=E(\chi_1^+)^k$, $\mu_{k1}=\frac{\mu_k}{\mu_1}$, $k=2,3$ ve $m_k=E(\eta_1)^k$, $m_{k1}=\frac{m_k}{m_1}$ 'dır.

İspat. Hatırlatalım ki, Teorem 17'de $E\overline{X}$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmiştir:

$$E\overline{X}=-\frac{1}{\widetilde{M}_1{}''(\lambda)}\left[\widetilde{M}_1'''(\lambda)+\frac{1}{2}\widetilde{M}_2{}''(\lambda)\right]+\frac{m_{21}}{2}. \tag{168}$$

Yukarda aşağıdaki asimptotik açılımlar elde etmiştir:

$$\widetilde{M}_1{}''(\lambda)=\frac{6}{\lambda^4}+\frac{\mu_{21}}{\lambda^3}+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{169}$$

$$\widetilde{M}_1'''(\lambda)=-\frac{24}{\lambda^5}-3\frac{\mu_{21}}{\lambda^4}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{170}$$

$$\widetilde{M}_2''(\lambda)=\frac{24}{\lambda^5}+6\frac{\mu_{21}}{\lambda^4}+\frac{2\mu_{31}}{3\lambda^3}+O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{171}$$

Kısalık amacıyla $J_4(\lambda)$ 'yı dahil edelim.

$$J_4(\lambda)=\widetilde{M}_1'''(\lambda)+\frac{1}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda) \tag{172}$$

Asimptotik açılımlar (170) ve (171), kesin ifade (172)'de yerlerine yazılırlarsa, $J_4(\lambda)$ için $\lambda\to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$J_4(\lambda)=-\frac{12}{\lambda^4}+\frac{\mu_{31}}{3\lambda^3}+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \tag{173}$$

Asimptotik açılım (169)'u kullanarak, $K_2(\lambda)$ için $\lambda\to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$K_2(\lambda)=-\frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)}=\frac{6}{\lambda^4}-\frac{\mu_{21}}{\lambda^3}+\frac{\mu_{21}^2}{6\lambda^2}+o(\lambda^2) \tag{174}$$

Asimptotik açılımlar (173) ve (174), kesin ifade (168)'de yerlerine yazılırlarsa, $E\overline{X}$ için $\lambda\to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E\overline{X}=J_2(\lambda)K_2(\lambda)=\frac{2}{\lambda}+\frac{3m_{21}-2\mu_{21}}{6}+\left(\frac{\mu_{21}^2-\mu_{31}}{18}\right)\lambda+o(\lambda). \tag{175}$$

Burada $EX=E\overline{X}+s$ olduğundan $\lambda\to 0$ iken EX için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir.

$$EX=\frac{2}{\lambda}+s+\frac{3m_{21}-2\mu_{21}}{6}+\left(\frac{\mu_{21}^2-\mu_{31}}{18}\right)\lambda+o(\lambda).$$

Bu da Teorem 18'in ispatını tamamlar.

Şimdide, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ikinci momentinin asimptotik açılımını elde edelim.

Teorem 19. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1,η_1,ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0<E\xi_1<\infty$,

2) $E\eta_1>0$ ve $E|\eta_1|^3<\infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s,∞) aralığında $\lambda>0$ parametreli üçüncü mertebeden Erlang dağılımına sahip olsun, yani, $d\pi(z)=\frac{1}{2}\lambda^3(z-s)^2e^{-\lambda(z-s)}dz$, $z\geq s$ 'dır.

Bu durumda, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(\overline{X}^2) = \frac{20}{3\lambda^2} + \frac{18m_{21} - 10\mu_{21}}{9\lambda} + \frac{5\mu_{21}^2}{27} - \frac{m_{21}\mu_{21}}{3} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} + o(1).$$

İspat. Hatırlatalım ki, Teorem 17'de $E(\overline{X}^2)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilmişti:

$$E(\overline{X}^2) = \frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)}\Bigg[\widetilde{M}_1^{(IV)}(\lambda) - m_{21}\widetilde{M}_1'''(\lambda) - \frac{m_{21}}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda) + \widetilde{M}_2'''(\lambda) +$$

$$+\frac{1}{3}\widetilde{M}_3''(\lambda)\Bigg] + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6}, \tag{176}$$

(136)'daki kesin ifadenin dört kez türevi alınırsa, $\widetilde{M}_1^{(IV)}(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_1^{(IV)}(\lambda) = \frac{24\mu_1}{\lambda^5(1-\varphi(\lambda))} - \frac{24\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^4(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{24\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{12\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^2} -$$

$$\frac{24\mu_1\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^4} - \frac{24\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3} - \frac{4\mu_1\varphi_3(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{24\mu_1\varphi_1^4(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^5} +$$

$$\frac{36\mu_1\varphi_1^2(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4} + \frac{6\mu_1\varphi_2^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{8\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_3(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{\mu_1\varphi_1^4(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}. \tag{177}$$

Uygun hesaplamalar yapılırsa, $\widetilde{M}_1^{(IV)}(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptoitk açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_1^{(IV)}(\lambda) = \frac{120}{\lambda^6} + \frac{12\mu_{21}}{\lambda^5} + o(\frac{1}{\lambda^3}). \tag{178}$$

İfade (140)'da $\widetilde{M}_2(\lambda)$'nin kesin formülünde üç kez türev alınırsa, $\widetilde{M}_2'''(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_2'''(\lambda) = -\frac{6\mu_2}{\lambda^4(1-\varphi(\lambda))} + \frac{6\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{3\mu_2\varphi_2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} + \frac{6\mu_2\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} -$$

$$\frac{6\mu_2\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{6\mu_2\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4} + \frac{\mu_2\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{2\mu_1\varphi_4(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2} -$$

$$\frac{24\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^3} + \frac{6\mu_1\varphi_3^2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2} - \frac{16\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3} - \frac{12\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^2} +$$

$$\frac{36\mu_1\varphi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3}-\frac{12\mu_1\varphi_2^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3}-\frac{72\mu_1\varphi_2(\lambda)\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4}+\frac{12\mu_1\varphi_1(\lambda)}{\lambda^4(1-\varphi(\lambda))^2}+$$

$$\frac{36\mu_1\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^4}-\frac{48\mu_1\varphi_1^4(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^5}. \tag{179}$$

Uygun hesaplamalar yapılırsa, $\lambda \to 0$ iken $\widetilde{M}_2'''(\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir.

$$\widetilde{M}_2'''(\lambda)=-\frac{120}{\lambda^6}-\frac{24\mu_{21}}{\lambda^5}-\frac{2\mu_{31}}{\lambda^4}+o(\frac{1}{\lambda^3}). \tag{180}$$

İfade (154)'deki $\widetilde{M}_3(\lambda)$'ün iki kez türevi alınırsa, $\widetilde{M}_3''(\lambda)$ için aşağıdaki kesin ifade elde edilir:

$$\widetilde{M}_3''(\lambda)=-\frac{36\mu_1\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^4}+\frac{72\mu_1\varphi_1^4(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^5}-\frac{6\mu_1\varphi_3(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2}+\frac{6\mu_1\varphi_2(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^2}-$$

$$\frac{6\mu_2\varphi_1(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^2}-\frac{18\mu_2\varphi_1(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3}+\frac{24\mu_1\varphi_1(\lambda)\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3}-\frac{36\mu_1\varphi_2(\lambda)\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3}+$$

$$\frac{18\mu_1\varphi_2^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3}+\frac{108\mu_1\varphi_1^2(\lambda)\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4}+\frac{12\mu_1\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))^3}+\frac{3\mu_1\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}+$$

$$\frac{6\mu_2\varphi_2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2}+\frac{12\mu_2\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^3}-\frac{18\mu_1\varphi_1^3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^4}-\frac{3\mu_2\varphi_3(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}+$$

$$\frac{2\mu_3}{\lambda^3(1-\varphi(\lambda))}-\frac{2\mu_3\varphi_1(\lambda)}{\lambda^2(1-\varphi(\lambda))^2}+\frac{\mu_3\varphi_2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^2}+\frac{2\mu_3\varphi_1^2(\lambda)}{\lambda(1-\varphi(\lambda))^3}. \tag{181}$$

Gerekli hesaplamalar yapılırsa, $\widetilde{M}_3''(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\widetilde{M}_3''(\lambda)=\frac{120}{\lambda^6}+\frac{36\mu_{21}}{\lambda^5}+\frac{6\mu_{31}}{\lambda^4}+o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right). \tag{182}$$

Kısalık amacıyla $J_5(\lambda)$ 'yı dahil edelim.

$$J_5(\lambda)=\widetilde{M}_1^{(IV)}(\lambda)-m_{21}\widetilde{M}_1'''(\lambda)-\frac{m_{21}}{2}\widetilde{M}_2''(\lambda)+\widetilde{M}_2'''(\lambda)+\frac{1}{3}\widetilde{M}_3''(\lambda) \tag{183}$$

Asimptotik açılımlar (170), (171), (178), (180) ve (182), kesin ifade (183)'de yerlerine yazılırlarsa, $J_5(\lambda)$, için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$J_5(\lambda)=\frac{40}{\lambda^6}+\frac{12m_{21}}{\lambda^5}+o(\frac{1}{\lambda^3}). \tag{184}$$

Asimptotik açılım (169) kullanılarak, $K_2(\lambda)$ için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılımı elde edilir:

$$K_2(\lambda) = \frac{1}{\widetilde{M}_1''(\lambda)} = \frac{6}{\lambda^4} - \frac{\mu_{21}}{6\lambda^3} + \frac{\mu_{21}^2}{36\lambda^2} + o(\lambda^2). \tag{185}$$

Kolayca görülebilir ki,

$$E(\overline{X}^2) = J_5(\lambda)K_2(\lambda)\text{'dır.} \tag{186}$$

Asimptotik açılımlar (184) ve (185), kesin ifade (186)'da yerlerine yazılırlarsa, $E(\overline{X}^2)$ için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E(\overline{X}^2) = \frac{20}{3\lambda^2} + \frac{18m_{21} - 10\mu_{21}}{9\lambda} + \frac{5\mu_{21}^2}{27} - \frac{m_{21}\mu_{21}}{3} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6} + o(1). \tag{187}$$

Bu da Teorem 19'un ispatını tamamlar.

Sonuç 10. Teorem 19'un koşulları sağlansın. Bu takdirde, X(t) sürecinin ergodik dağılımının varyansı için $\lambda \to 0$ iken aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{8}{3\lambda^2} + \frac{2\mu_{21}}{9\lambda} + A + o(1), \tag{188}$$

burada , $A = \dfrac{2\mu_{31}}{9} - \dfrac{m_{31}}{3} - \dfrac{4\mu_{21}^2}{27} + \dfrac{m_{21}^2}{4}$'dır.

2.15. Müdahalenin Gamma Dağılımı Olması Durumunda Sürecin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri için Kesin İfadeler

Bu bölmün temel amacı, müdahalenin (α,λ) parametreli Gamma dağılımı olması durumunda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentlerini $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkeninin uygun momentleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaç için öncelikle aşağıdaki notasyonları dahil edelim:

$$m_k = E(\eta_1^k),\ M_k(x) = E(S_{N(x)}^k),\quad k = 1,2,3,4,5\quad x > 0.$$

Kısalık amacıyla ise şu natosyonları dahil edelim:

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1},\ M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)},\quad k = 2,3,4,5\quad EX^k = \lim_{t\to\infty} E(X^k(t)),\ k = 1,2,3,4.$$

Ayrıca, hesaplamalarda kolaylık olması amacıyla süreci ortalayalım, yani $\overline{X}(t) = X(t) - s$ olsun. Bu kısımda, temel teoremi vermeden önce aşağıdaki notu belirtmekte fayda vardır.

Not. ζ_1 rasgele değişkeni, $[s,\infty)$ aralığında, (α,λ) parametreli Gamma dağılımına ($d\pi(z)=\dfrac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}(z-s)^{\alpha-1}e^{-\lambda(z-s)}dz,\ z\ge s$), sahipse bu takdirde X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonunu aşağıdaki biçimde yazmak mümkündür:

$$\varphi_X(u)=\frac{e^{ius}}{EN(\alpha,\lambda)}\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}e^{iux}\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-u)-1}dx,$$

burada $EN(\alpha,\lambda)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}EN(x)dx,\ \alpha>1$ 'dır.

Şimdi de bu kısmın temel teoremini verelim:

Teorem 20. Sürecin Ergodiklik koşularına ek olarak $E|\eta_1|^3<\infty$ koşulunu da sağlansın. Ayrıca, ζ_1 rastgele değişkeni (s,∞) aralığında (α,λ) parametreli Gamma dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Bu takdirde, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için kesin formüller, $S_{N\,(X)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkenin uygun momentleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E\overline{X}=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\ I_2(\alpha,\lambda)+\frac{m_{21}}{2}, \tag{189}$$

$$E\overline{X}^2=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\left[I_1(\alpha,\lambda)+m_{21}I_2(\alpha,\lambda)+\frac{M_3(\alpha,\lambda)}{3}\right]\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}, \tag{190}$$

burada, $I_1(\alpha,\lambda)=M_1(\alpha+2,\lambda)-M_2(\alpha+1,\lambda)$, $\quad I_2(\alpha,\lambda)=M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)$,

$M_k(\alpha,\lambda)=\int_0^{\infty}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\ M_k(x)dx$, $\lambda>0$ ve $E\overline{X}^2=E(X-s)^2$ 'dır.

İspat. Teorem 20'in koşullarında var olan $E\eta_1>0$ ve $E|\eta_1|^3<\infty$ sağlandığı takdirde, $u\to 0$ iken,

$$\varphi_{\eta_1}(-u)-1=-ium_1\left[1-\frac{iu}{2}m_{21}+\frac{(iu)^2}{6}m_{31}+o(u^2)\right], \tag{191}$$

$$\varphi_{S_{N(x)}}(-u)-1=-iuM_1(x)\left[1-\frac{iu}{2}M_{21}(x)+\frac{(iu)^2}{6}M_{31}(x)+o(u^2)\right] \tag{192}$$

yazılabilir.

Eşitlik (191), eşitlik (192)' ye bölünürse,

$$\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-u)-1}=\frac{M_1(x)}{m_1}\frac{1-\frac{iu}{2}M_{21}(x)+\frac{(iu)^2}{6}M_{31}(x)+o(u^2)}{1-\frac{iu}{2}m_{21}+\frac{(iu)^2}{6}m_{31}+o(u^2)}$$

$$=\frac{M_1(x)}{m_1}\left[1-\frac{iu}{2}M_{21}(x)+\frac{(iu)^2}{6}M_{31}(x)+o\left(u^2\right)\right]$$

$$\left[1+\frac{iu}{2}m_{21}-\frac{(iu)^2}{6}m_{31}+\frac{(iu)^2}{4}m_{21}^2+o(u^2)\right]$$

$$=\frac{M_1(x)}{m_1}\left\{1-\frac{iu}{2}\left[M_{21}(x)-m_{21}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{(iu)^2}{12}\left[2(M_{31}(x)-m_{31})-3m_{21}(M_{21}(x)-m_{21})\right]+o(u^2)\right\}$$

elde edilir.

Özetle,

$$\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-u)-1}=\frac{M_1(x)}{m_1}\left\{1-\frac{iu}{2}\left[M_{21}(x)-m_{21}\right]+\frac{(iu)^2}{12}[2(M_{31}(x)-m_{31})\text{ -}\right.$$

$$\left.-3m_{21}(M_{21}(x)-m_{21})]+o(u^2)\right\}\text{'dur.} \tag{193}$$

Diğer taraftan, $u \to 0$ iken,

$$e^{iux}=1+iux+\frac{(iu)^2}{2}x^2+o(u^2) \tag{194}$$

yazılabilir.

(194) eşitliği ile (193) eşitliği taraf tarafa çarpılırsa,

$$e^{iux}\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-u)-1}=\frac{M_1(x)}{m_1}\left\{1+iu\left[x-\frac{1}{2}(M_{21}(x)-m_{21})\right]+\right.$$

$$+\frac{(iu)^2}{2}\left[x^2-x(M_{21}(x)-m_{21})-\frac{1}{2}m_{21}(M_{21}(x)-m_{21})\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3}(M_{31}(x)-m_{31})\right]+o(u^2)\right\} \tag{195}$$

elde edilir.

(195) eşitliğinin sade olması amacıyla A(x)'i aşağıdaki gibi belirtelim:

$$A(x)=\left[x^2-x(M_{21}(x)-m_{21})-\frac{1}{2}m_{21}(M_{21}(x)-m_{21})+\frac{1}{3}(M_{31}(x)-m_{31})\right]. \tag{196}$$

Bu takdirde,

$$e^{iux}\frac{\varphi_{S_{N(x)}}(-u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-u)-1}=\frac{M_1(x)}{m_1}\left\{1+iu\left[x-\frac{1}{2}(M_{21}(x)-m_{21})\right]+\right.$$
$$\left.\frac{(iu)^2}{2}A(x)+o(u^2)\right\}. \qquad (197)$$

olur.

Yine işlemlerimizde kolaylık olması amacıyla, $\overline{X}(t)=X(t)-s$ olsun. Karakteristik fonksiyonun özelliğinden yararlanarak,

$$\varphi_{\overline{X}}(u)=e^{-ius}\varphi_X(u)$$

yazılabilir. Bu kısımda verilen nottan yararlanarak, aşağıdakileri elde etmek mümkündür:

$$\varphi_{\overline{X}}(u)=e^{-ius}\varphi_X(u)$$
$$=\frac{1}{EN(\alpha,\lambda)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}e^{iux}\frac{\varphi_{S_{N(zx)}}(-u)-1}{\varphi_{\eta_1}(-u)-1}dx$$
$$=\frac{1}{EN(\alpha,\lambda)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\frac{M_1(x)}{m_1}\left\{1+iu\left[x-\frac{1}{2}(M_{21}(x)-m_{21})\right]\right.$$
$$\left.+\frac{(iu)^2}{2}A(x)+o(u^2)\right\}dx$$
$$=\frac{1}{m_1EN(\alpha,\lambda)}\{\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)dx+iu[\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}xM_1(x)dx$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_2(x)dx$$
$$+\frac{m_{21}}{2}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)dx]+\frac{(iu)^2}{2}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)A(x)dx+o(u^2)\}$$
$$=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\{M_1(\alpha,\lambda)+iu[M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)+\frac{m_{21}}{2}M_1(\alpha,\lambda)]+$$
$$+\frac{(iu)^2}{2}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)A(x)dx+o(u^2)\}$$
$$=1+iu\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}[M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)+\frac{m_{21}}{2}M_1(\alpha,\lambda)]+$$

$$+\frac{(iu)^2}{2}\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)A(x)dx+o(u^2).$$

Özetle,

$$\varphi_{\overline{X}}(u)=1+iu\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\left[M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)+\frac{m_{21}}{2}M_1(\alpha,\lambda)\right]+$$

$$+\frac{(iu)^2}{2}\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)A(x)dx+o(u^2)\text{ 'dır.} \tag{198}$$

Diğer taraftan, $\overline{X}(t)$ sürecinin ikinci momenti ($E\overline{X}^2$) mevcut ve sonlu ise $u\to 0$ iken,

$$\varphi_{\overline{X}}(u)=1+iuE\overline{X}+\frac{(iu)^2}{2}E\overline{X}^2+o(u^2) \tag{199}$$

yazılabilir. Son iki eşitlikten yani (199) ve (198)'den yararlanarak, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci ve ikinci momentleri için kesin formüller aşağıdaki gibi yazılablir:

$$E\overline{X}=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\left[M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)\right]+\frac{m_{21}}{2}, \tag{200}$$

$$E\overline{X}^2=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)A(x)dx. \tag{201}$$

(196) eşitliğinden yararlanılarak aşağıdaki işlemler yapılabilir:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)A(x)dx=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}x^2M_1(x)\,dx-\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\,xM_2(x)dx+$$

$$+m_{21}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\,xM_1(x)dx-\frac{1}{2}m_{21}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_2(x)dx+\frac{1}{2}m_{21}^2\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)dx+$$

$$+\frac{1}{3}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_3(x)dx-\frac{m_{31}}{3}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)dx$$

$$=M_1(\alpha+2,\lambda)-M_2(\alpha+1,\lambda)+m_{21}M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{m_{21}}{2}M_2(\alpha,\lambda)+\frac{m_{21}^2}{2}M_1(\alpha,\lambda)+$$

$$+\frac{1}{3}M_3(\alpha,\lambda)-\frac{m_{31}}{3}M_1(\alpha,\lambda).$$

Sonuçta,

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)A(x)dx=M_1(\alpha+2,\lambda)-M_2(\alpha+1,\lambda)$$

$$+m_{21}M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{m_{21}}{2}M_2(\alpha,\lambda)+$$

$$+\frac{m_{21}^2}{2}M_1(\alpha,\lambda)+\frac{1}{3}M_3(\alpha,\lambda)-\frac{m_{31}}{3}M_1(\alpha,\lambda) \tag{202}$$

elde edilir.

(202) eşitliğini (201)'de yerine yazarsak,

$$E\overline{X}^2=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}[I_1(\alpha,\lambda)+m_{21}I_2(\alpha,\lambda)+\frac{M_3(\alpha,\lambda)}{3}]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6} \tag{203}$$

elde edilir. Burada, $I_1(\alpha,\lambda)=M_1(\alpha+2,\lambda)-M_2(\alpha+1,\lambda)$ ve

$I_2(\alpha,\lambda)=M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)$'dır.

Bu da Teorem 20'in ispatını tamamlar.

Şimdi de $\overline{X}(t)$'nin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri için kesin formüller elde edelim.

Teorem 21. Sürecin Ergodiklik koşularına ek olarak $E|\eta_1|^3<\infty$ koşulunu da sağlansın. Ayrıca, ζ_1 rastgele değişkeni (s,∞) aralığında (α,λ) parametreli Gamma dağılıma sahip olduğu varsayılsın. Bu takdirde, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri için kesin formüller, $S_{N(X)}$ sınır fonksiyonelinin ve η_1 rasgele değişkenin uygun momentleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned}E(\overline{X}^3)=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\Big[&M_1(\alpha+3,\lambda)-\frac{3}{2}M_2(\alpha+2,\lambda)+M_3(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{4}M_4(\alpha,\lambda)\\&+\frac{m_{21}}{2}(3M_1(\alpha+2,\lambda)-3M_2(\alpha+1,\lambda)+M_3(\alpha,\lambda))\\&+3A_1(M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda))\Big]+3A_2,\end{aligned} \tag{204}$$

$$\begin{aligned}E(\overline{X}^4)=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\Big[&M_1(\alpha+4,\lambda)-2M_2(\alpha+3,\lambda)+2M_2(\alpha+2,\lambda)-M_4(\alpha+1,\lambda)\\&+\frac{1}{5}M_5(\alpha,\lambda)+m_{21}(2M_1(\alpha+3,\lambda)-3M_2(\alpha+2,\lambda)\\&+2M_3(\alpha+1,\lambda)+\frac{1}{2}M_4(\alpha,\lambda)\\&+6A_1\left(M_1(\alpha+2,\lambda)-M_2(\alpha+1,\lambda)+\frac{1}{3}M_3(\alpha,\lambda)\right)\\&+6A_2\big(2M_1(\alpha+1,\lambda)-M_2(\alpha,\lambda)\big)\Big]+3A_3,\end{aligned} \tag{205}$$

burada, $A_1 = \dfrac{m_{21}^2}{2} - \dfrac{m_{31}}{3}$, $A_2 = \dfrac{m_{41}}{12} - \dfrac{m_{31}m_{21}}{3} + \dfrac{m_{21}^3}{4}$,

$A_3 = \dfrac{m_{21}^4}{4} - \dfrac{m_{31}m_{21}^2}{2} + \dfrac{m_{41}m_{21}}{6} + \dfrac{m_{31}^2}{9} - \dfrac{m_{51}}{30}$'dır.

İspat. Teorem 20'in ispatına benzer biçimde yapılır.

2.16. Müdahalenin Gamma Dağılımı Olması Durumunda, X(t) Sürecinin Ergodik Dağılımının İlk Dört Momentleri İçin Asimptotik Açılımlar

$\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için asimptotik sonucun elde edilebilmesi için basamak değişkenlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Hatırlatalım ki, basamak değişkenlerin tanımı ve onlarla ilgili birçok ilginç özellikler bölüm 2.6'da ayrıntılı bir biçimde verilmiştir. Bu nedenle, bu bölümde basamak değişkenlerine yer verilmeyecektir. Fakat müdahalenin Gamma dağılımı olması durumunda, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için asimptotik açılımlar elde edilebilmesi için bazı yardımcı teoremlere ihtiyacımız vardır. Bunun için öncelikle bu yardımcı teoremleri ve ispatlarını verelim.

Yardımcı Teorem 2. Teorem 20'in koşulları altında, $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk beş momentlerinin asimptotik açılımları $x \to \infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

1. $M_1(x) = x + \dfrac{1}{2}\mu_{21} + o\left(\dfrac{1}{x}\right);$ (206)

2. $M_2(x) = x^2 + x\mu_{21} + \dfrac{1}{3}\mu_{31} + o(1);$ (207)

3. $M_3(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}\mu_{21}x^2 + \mu_{31}x + o(x),$ (208)

4. $M_4(x) = x^4 + 2\mu_{21}x^3 + 2\mu_{31}x^2 + o(x^2);$ (209)

5. $M_5(x) = x^5 + \dfrac{5}{2}\mu_{21}x^4 + \dfrac{10}{3}\mu_{31}x^3 + o(x^3),$ (210)

burada, $\mu_{k1} = \dfrac{\mu_k}{\mu_1}$, $\mu_k = E(\chi_1^{+k})$, $k = 1,2,3,4,5$'dır. Hatırlatalım ki, χ_1^+, $\{S_n\}$, $n \geq 0$ rastgele yürüyüş sürecinin birinci basamak yüksekliğidir (bak, bölüm 2.6). Ayrıca belirtelim ki, B. A. Rogozin (bak, [84], s. 525) çalışmasında ispat edilmiştir ki, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} P\{S_n > 0\} = \infty$ ise bu takdirde, her sabit y için $H(x,y) = P\{\hat{\chi}_x^+ > y\}$ fonksiyonu x değişkenine göre soldan süreklidir ve x'in her sonlu değişim aralığında H(x,y) aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$H(x,y) = \int_0^x A_+(x+y-t)dU_+(t), \tag{211}$$

burada, $A_+(z) = 1 - F_+(z)$ 'dır.

Not edelim ki, Rogozin'in yukarıdaki çalışmasından aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 1. $E\eta_1 > 0$ koşulunun sağlanması $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} P\{S_n > 0\} = \infty$ olması için yeterlidir.

Yardımcı Teorem 3. $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ için bağımsız aynı mutlak sürekli dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Eğer $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^n < \infty$ ise bu takdirde,

$E(S^n_{N(x)}) = B_n(x) * U_+(x)$ 'dur.

Burada $B_n^+(x) = n\int_0^{\infty} y^{n-1} A_+(x+y)dy$, n=1,2,3,…'dır.

İspat. $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$, mutlak sürekli dağılıma sahip oldukları için χ_1^+'nın ise $\{\eta_n\}$ rasgele değişkenlerinin rasgele sayıda toplamı olduğuna göre χ_1^+ ve dolayısıyla $\hat{\chi}_x^+$ mutlak sürekli dağılıma sahip olacaklardır. $E(\hat{\chi}_x^{+n})$ tanımına ve (211) eşitliğine göre aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$E(\hat{\chi}_x^{+n}) = \int_0^{\infty} y^n P\{\hat{\chi}_x^+ \in dy\}$$

$$= \int_0^{\infty} ny^{n-1} H(x,y)dy$$

$$= \int_0^{\infty} ny^{n-1} \int_0^x A_+(x+y-t)dU_+(t)dy$$

$$= \int_0^x dU_+(t) \int_0^{\infty} ny^{n-1} A_+(x-t+y)dy$$

$$= \int_0^x B_n^+(x-t)dU_+(t)$$

$$= B_n^+(x) * U_+(x).$$

Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 11. Yardımcı Teorem 3.'in koşulları altında $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin k. mertebeye kadar momentleri $(\mu_k(x))$ mevcuttur ve $\mu_k(x)$ fonksiyonları x değişkenine göre $[0,\infty)$ aralığında süreklidir.

İspat. $U_+(x)$ yenileme fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve her sonlu aralıkta sınırlı olmasından dolayı elde edilir (bak. [30] s.164). Bu nedenle, $B_n^+(x) * U_+(x)$ fonksiyonu en az bir tanesi sürekli olan iki fonksiyonun konvolüsyon çarpımı olduğu için sürekli olacaktır.

Sonuç 12. Yardımcı Teorem 3'in koşulları altında, $R_n(x) = M_n(x) - c_n x^n - d_n x^{n-1}$ fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında sürekli ve dolayısıyla her $[0,b)$ sonlu aralığında sınırlıdır. Yani, $\max\limits_{x\in[0,b]} |R_n(x)| = h_n < \infty$'dur.

Burada, c_n, d_n, h_n'ler sabitlerdir.

Çalışmadaki asimptotik açılımları integralleyebilmemiz için aşağıdaki yardımcı teoreme ihtiyaç vardır.

Yardımcı Teorem 4. Eğer $g(x)$, $x \geq 0$, fonksiyonu sürekli ve $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ ise bu takdirde, her $\alpha > 1$ için aşağıdaki bağıntı doğrudur:

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} \cdot g\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt = 0, \quad \sup_{x\in R^+} |g(x)| = K < \infty .$$

İspat. Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $m(\varepsilon) > 0$ vardır, öyle ki $x \geq m(\varepsilon)$ için $|g(x)| < \varepsilon$'dır. En az bir $b(\varepsilon) > 0$ seçelim ki, $\int_0^b t^{\alpha-1} e^{-t} dt < \varepsilon$ olsun. Bu takdirde, $g(x)$ fonksiyonun $[0, b(\varepsilon)]$ aralığında maksimumu vardır. Ve $\lambda < \dfrac{b}{m(\varepsilon)}$ için, aşağıdaki işlemler yapılabilir:

$$\left| \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} g\left(\frac{t}{\lambda}\right) dt \right| \leq \int_0^b t^{\alpha-1} e^{-t} \left| g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right| dt + \int_b^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} \left| g\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right| dt \leq$$

$$\leq \max_{[0,b)} |g(x)| \int_0^b t^{\alpha-1} e^{-t} dt + \varepsilon \int_b^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt \leq \varepsilon M + \varepsilon \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \varepsilon (M + \Gamma(\alpha)) .$$

Bu da Yardımcı Teorem 4'ün ispatını tamamlar.

Teorem 22. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E|\eta_1|^3 < \infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, ∞) aralığında (λ, α), $\alpha > 1$, parametreli Gamma dağılımına sahip olsun.

Bu takdirde, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki üç terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$EX = \frac{\alpha+1}{2\lambda} + s + \left[\frac{m_{21}}{2} - \frac{(\alpha+1)}{4\alpha}\mu_{21}\right] + \left[\frac{(\alpha+1)}{8\alpha^2}\mu_{21}^2 - \frac{\mu_{31}}{6\alpha}\right]\lambda + o(\lambda), \tag{212}$$

$$E(\overline{X}^2) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{3\lambda^2} + \left[\frac{(\alpha+1)}{2}m_{21} - \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{6\alpha}\mu_{21}\right]\frac{1}{\lambda} +$$

$$+\left[\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{12\alpha^2}\mu_{21}^2 - \frac{(\alpha+1)}{4\alpha}\mu_{21}m_{21} + \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}\right] + o(1). \tag{213}$$

Burada, $\mu_k = E(\chi_1^+)^k$, $\mu_{k1} = \dfrac{\mu_k}{\mu_1}$, $k = 2,3$ ’dır.

Teorem 23. Teorem 22’in koşulları altında, her $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken, EX için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$EX = c_1\frac{1}{\lambda} + c_2 + c_3\lambda + o(\lambda),$$

burada, $c_1 = \dfrac{\alpha+1}{2}$, $c_2 = s + \dfrac{m_{21}}{2} - \dfrac{\mu_{21}}{4}\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$, $c_3 = \dfrac{\mu_{21}^2}{8}\dfrac{\alpha+1}{\alpha^2} - \dfrac{\mu_{31}}{6}\dfrac{1}{\alpha}$ ’dır.

İspat. Yardımcı Teorem 2’den, $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ilk momentinin asimptotik açılımı $x \to \infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_1(x) = x + \frac{\mu_{21}}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right), \; x \to \infty$$

Yardımcı Teorem 2-4 ve Sonuç 11-12’yi kullanarak aşağıdaki işlemleri $\lambda \to 0$ iken, yapmak mümkündür:

$$M_1(\alpha, \lambda) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_1(x)dx$$

$$= \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}xdx + \frac{\mu_{21}}{2}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx + \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}o\left(\frac{1}{x}\right)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha-1}}\right).$$

Özetle, $\lambda\to 0$ iken,

$$M_1(\alpha,\lambda)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha-1}}\right)\text{'dır.} \qquad (214)$$

Benzer biçimde, $\lambda\to 0$ iken,

$$M_1(\alpha+1,\lambda)=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right)\text{'dır.} \qquad (215)$$

Hatırlatalım ki, Yardımcı Teorem 2'den, $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin ikinci momentinin asimptotik açılımı $x\to\infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_2(x)=x^2+\mu_{21}x+\frac{\mu_{31}}{3}+o(1),\ x\to\infty$$

Yardımcı Teorem 2-4 ve Sonuç 11-12'yi kullanarak aşağıdaki işlemleri $\lambda\to 0$ iken, yapmak mümkündür:

$$M_2(\alpha,\lambda)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}M_2(x)dx$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+\frac{\mu_{31}}{3}\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right). \qquad (216)$$

Asimptotik ifadeler (215) ve (216)'yı $I_1(\alpha,\lambda)$'da yerlerine yazarsak, $\lambda\to 0$ iken, $I_1(\alpha,\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$I_1(\alpha,\lambda)=M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right)$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+\frac{\mu_{31}}{3}\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}-\frac{\mu_{31}}{6}\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}\left[1-\frac{\mu_{31}}{3}+\frac{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+2)\lambda^{\alpha}}+o(\lambda^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}\left[1-\frac{\mu_{31}}{3}+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lambda^2+o(\lambda^2)\right].$$

Kısaca,

$$I_1(\alpha,\lambda)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}\left[1-\frac{\mu_{31}}{3}+\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lambda^2+o(\lambda^2)\right]\text{'dır.} \tag{217}$$

Asimptotik açılım (214) ve Γ-fonksiyonunun $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$ özelliği kullanılırsa aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$[M_1(\alpha,\lambda)]^{-1}=\left[\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha)\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)\lambda^{\alpha}}+o\left(\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\lambda^{\alpha-1}}\right)\right]\right]^{-1}$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+o(\lambda^2)\right]^{-1}$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu_{21}^2}{4}\frac{\lambda^2}{\alpha^2}o(\lambda^2)\right].$$

Sonuçta,

$$[M_1(\alpha,\lambda)]^{-1}=\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu_{21}^2}{4}\frac{\lambda^2}{\alpha^2}o(\lambda^2)\right] \tag{218}$$

elde edilir. Asimptotik açılımlar (217) ve (218), $E\overline{X}$'in kesin ifadesi (189)'da yerlerine yazılırlarsa ve bazı matematiksel işlemler yapılırsa, $E\overline{X}$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E\overline{X}=\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu_{21}^2}{4}\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+o(\lambda^2)\right]\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}$$

$$\left[1-\frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lambda^2+o(\lambda^2)\right]+\frac{m_{21}}{2}$$

$$.\quad=\frac{1}{2}\frac{\alpha+1}{\lambda}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu_{21}^2}{4}\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+o(\lambda^2)-\frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lambda^2\right]+\frac{m_{21}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\alpha+1}{\lambda}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+\left(\frac{\mu_{21}^2}{4}\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)\lambda^2+o(\lambda^2)\right]+\frac{m_{21}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\alpha+1}{\lambda}-\frac{\mu_{21}}{4}\frac{\alpha+1}{\alpha}+\frac{1}{2}(\alpha+1)\left(\frac{\mu_{21}^2}{4}\frac{1}{\alpha^2}-\frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\right)\lambda+o(\lambda)+\frac{m_{21}}{2}$$

$$=\frac{\alpha+1}{2}\frac{1}{\lambda}+\frac{m_{21}}{2}-\frac{\mu_{21}}{4}\frac{\alpha+1}{\alpha}+\left(\frac{\mu_{21}^2}{8}\frac{\alpha+1}{\alpha^2}-\frac{\mu_{31}}{6}\frac{1}{\alpha}\right)\lambda+o(\lambda).$$

Özetle,

$$E\overline{X} = \frac{\alpha+1}{2}\frac{1}{\lambda} + \frac{m_{21}}{2} - \frac{\mu_{21}}{4}\frac{\alpha+1}{\alpha} + \left(\frac{\mu_{21}^2}{8}\frac{\alpha+1}{\alpha^2} - \frac{\mu_{31}}{6}\frac{1}{\alpha}\right)\lambda + o(\lambda)\text{'dır.} \tag{219}$$

$X(t) = \overline{X}(t) + s$ olduğu göz önünde bulundurulsa, $\lambda \to 0$ iken,

$$EX = c_1\frac{1}{\lambda} + c_2 + c_3\lambda + o(\lambda) \tag{220}$$

elde edilir. Burada, $c_1 = \frac{\alpha+1}{2}$, $c_2 = s + \frac{m_{21}}{2} - \frac{\mu_{21}}{4}\frac{\alpha+1}{\alpha}$ ve $c_3 = \frac{\mu_{21}^2}{8}\frac{\alpha+1}{\alpha^2} - \frac{\mu_{31}}{6}\frac{1}{\alpha}$'dır.

Bu da, Teorem 23'ün ispatını tamamlar.

Şimdi de, $\overline{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ikinci momenti için asimptotik açılım elde etmeye çalışalım.

Teorem 24. Teorem 22'in koşulları altında, $E\overline{X}^2$ için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur.

$$E\overline{X}^2 = d_1\frac{1}{\lambda^2} + d_2\frac{1}{\lambda} + d_3 + o(1), \tag{221}$$

burada $d_1 = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{3}$, $d_2 = \frac{m_{21}}{2}(\alpha+1) - \frac{\mu_{21}}{6}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}$,

$d_3 = \frac{\mu_{21}^2}{12}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha^2} - \frac{\mu_{21}m_{21}}{4}\frac{\alpha+1}{\alpha} + \frac{3m_{21}^2 - 2m_{31}}{6}$'dır.

İspat. $E\overline{X}^2$'in asimptotik açılımını hesaplayabilmek için öncelikle aşağıdaki asimptotik açılımların hesaplanmasına ihtiyaç vardır. $M_1(\alpha+2,\lambda)$'ın asimptotik açılımını, asimptotik açılım (214)'den yararlanarak aşağıdaki biçimde $\lambda \to 0$ iken, hesaplamak mümkündür:

$$\begin{aligned} M_1(\alpha+2,\lambda) &= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + \frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1 + \frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+3)}\lambda + o(\lambda^2)\right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1 + \frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda + o(\lambda^2)\right]. \end{aligned}$$

Kısaca,

$$M_1(\alpha+2,\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1 + \frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda + o(\lambda^2)\right]\text{'dır.} \tag{222}$$

Asimptotik açılım (216)'dan yararlanarak, $M_2(\alpha+1,\lambda)$'nın asimptotik açılımını $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki gibi hesaplamak mümkündür:

$$M_2(\alpha+1,\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + \mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + \frac{\mu_{31}}{3}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1+\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+3)}\lambda + \frac{\mu_{31}}{3}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1+\mu_{21}\frac{1}{\alpha+2}\lambda + \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right].$$

Özetle,

$$M_2(\alpha+1,\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1+\mu_{21}\frac{1}{\alpha+2}\lambda + \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]\text{'dır.} \qquad (223)$$

Asimptotik açılımlar (222) ve (223)'ü $I_2(\alpha,\lambda)$'da yerlerine yazarsak, $\lambda \to 0$ iken, $I_2(\alpha,\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$I_2(\alpha,\lambda) = M_1(\alpha+2,\lambda) - M_2(\alpha+1,\lambda)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda + o(\lambda^2)\right]$$

$$- \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1+\mu_{21}\frac{1}{\alpha+2}\lambda + \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda + o(\lambda^2)\right.$$

$$\left. -1-\mu_{21}\frac{1}{\alpha+2}\lambda - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right].$$

Özetle,

$$I_2(\alpha,\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]\text{'dır.} \qquad (224)$$

Hatırlatalım ki, Yardımcı Teorem 2'den, $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin üçüncü momentinin asimptotik açılımı $x \to \infty$ iken, aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$M_3(x) = x^3 + \frac{3}{2}\mu_{21}x^2 + \mu_{31}x + o(x)$$

Yardımcı Teorem 2-4 ve Sonuç 11-12'yi kullanarak aşağıdaki işlemleri yapmak mümkündür:

$$M_3(\alpha,\lambda) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} M_3(x)dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + \frac{3}{2}\mu_{21}\,\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + \mu_{31}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1 + \frac{3}{2}\mu_{21}\,\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+3)}\lambda + \mu_{31}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+3)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1 + \frac{3}{2}\mu_{21}\,\frac{1}{\alpha+2}\lambda + \mu_{31}\,\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

Sonuçta,

$$M_3(\alpha,\lambda) = \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1 + \frac{3}{2}\mu_{21}\,\frac{1}{\alpha+2}\lambda + \mu_{31}\,\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]\text{'dır.} \qquad (225)$$

Asimptotik açılımlar (217), (224) ve (225)'i kullanarak aşağıdaki asimptotik ifadeyi hesaplamak mümkündür:

$$I_2(\alpha,\lambda) + m_{21}\, I_1(\alpha,\lambda) + \frac{1}{3} M_3(\alpha,\lambda)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$+ m_{21}\,\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}\left[1 - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$+ \frac{1}{3}\,\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[1 + \frac{3}{2}\mu_{21}\,\frac{1}{\alpha+2}\lambda + \mu_{31}\,\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left\{-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right.$$

$$+ \frac{1}{2}\, m_{21}\,\frac{1}{\alpha+2}\lambda\left[1 - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right]$$

$$\left. + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\mu_{21}\,\frac{1}{\alpha+2}\lambda + \frac{1}{3}\mu_{31}\,\frac{1}{(\alpha+1)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right\}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left\{-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda - \frac{\mu_{31}}{3}\frac{1}{(\alpha+1)(\alpha+2)}\lambda^2 + o(\lambda^2)\right.$$

$$+m_{21}\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\mu_{21}\frac{1}{\alpha+2}\lambda+\frac{1}{3}\mu_{31}\frac{1}{(\alpha+1)}\lambda^2+o\left(\lambda^2\right)\Bigg\}$$

$$=\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[\frac{1}{3}+\frac{m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda+o\left(\lambda^2\right)\right].$$

Özetle,

$$I_2(\alpha,\lambda)+m_{21}\,I_1(\alpha,\lambda)+\frac{1}{3}M_3(\alpha,\lambda)=\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}\left[\frac{1}{3}+\frac{m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda+o\left(\lambda^2\right)\right]\text{'dır.} \qquad (226)$$

Yukarıdaki asimptotik ifadeyi ve asimptotik açılım (218)'i kullanarak, $E\overline{X}^2$ için $\lambda\to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$E\overline{X}^2=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^2}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+\frac{\mu_{21}^2}{4}\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+o\left(\lambda^2\right)\right]\left[\frac{1}{3}+\frac{m_{21}}{2(\alpha+2)}\lambda+o\left(\lambda^2\right)\right]$$

$$+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^2}\left[\frac{1}{3}+\frac{m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}\lambda-\frac{\mu_{21}}{6}\frac{\lambda}{\alpha}+o\left(\lambda^2\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_{21}m_{21}}{4}\frac{1}{\alpha(\alpha+2)}\lambda^2+\ +\frac{\mu_{21}^2}{12}\frac{\lambda^2}{\alpha^2}+o\left(\lambda^2\right)\right]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^2}\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+2}-\frac{\mu_{21}}{6}\frac{1}{\alpha}\right)\lambda\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{\mu_{21}m_{21}}{4}\frac{1}{\alpha(\alpha+2)}+\frac{\mu_{21}^2}{12}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\lambda^2+o\left(\lambda^2\right)\right]+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{3}\frac{1}{\lambda^2}+\left(\frac{m_{21}}{2}(\alpha+1)-\frac{\mu_{21}}{6}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}\right)\frac{1}{\lambda}-\frac{\mu_{21}m_{21}}{4}\frac{\alpha+1}{\alpha}$$

$$+\frac{\mu_{21}^2}{12}\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha^2}+\frac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}+o(1)\,.$$

Özetle,

$$E\overline{X}^2=d_1\frac{1}{\lambda^2}+d_2\frac{1}{\lambda}+d_3+o(1)\text{'dır.} \qquad (227)$$

Burada $d_1=\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{3}$, $d_2=\dfrac{m_{21}}{2}(\alpha+1)-\dfrac{\mu_{21}}{6}\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha}$ ve

$d_3=\dfrac{\mu_{21}^2}{12}\dfrac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\alpha^2}-\dfrac{\mu_{21}m_{21}}{4}\dfrac{\alpha+1}{\alpha}+\dfrac{3m_{21}^2-2m_{31}}{6}$'dır.

Bu da, Teorem 24'ün ispatını tamamlar.

Sonuç 13. Teorem 22'in koşulları altında, her $\alpha > 1$ için $\lambda \to 0$ iken, Var(X) için aşağıdaki asimptotik açılım yazılabilir:

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{12\lambda^2} + \frac{\alpha^2 - 1}{12\alpha\lambda}\mu_{21} + O(1). \tag{228}$$

Şimdi de, X(t) sürecinin ergodik dağılımının 3. ve 4. momentleri için asimptotik açılımları elde etmeye çalışalım:

Teorem 25. Başlangıç rasgele değişkenler ξ_1, η_1, ζ_1 aşağıdaki koşulları sağlasınlar:

1) $0 < E\xi_1 < \infty$,

2) $E\eta_1 > 0$ ve $E(\eta_1)^2 < \infty$,

3) η_1 rasgele değişkeni aritmetik olmayan rasgele değişken olsun.

4) ζ_1 rasgele değişkeni (s, ∞) aralığında (α, λ), $\alpha > 1$, parametreli Gamma dağılımına sahip olsun.

Bu durumda, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki iki terimli asimptotik açılımlar yazılabilir:

$$E(\overline{X}^3) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\lambda^3} + \left(2m_{21}\frac{1}{\alpha+3} - \frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\lambda^2} + o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right), \tag{229}$$

$$E(\overline{X}^4) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5}\frac{1}{\lambda^4} +$$

$$+\left(\frac{5m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+4} - \frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha}\right)\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5}\frac{1}{\lambda^3} + o(\frac{1}{\lambda^3}). \tag{230}$$

İspat. Öncelikle, $E(\overline{X}^3)$'nin asimptotik açılımını hesaplayalım. Bunun $E(\overline{X}^3)$'in kesin ifadesini aşağıdaki gibi yazalım:

$$E(\overline{X}^3) = \frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}[J_1 + J_2 + J_3] + 3A_2 \tag{231}$$

Şimdi de $J_1(\alpha,\lambda)$'nın $\lambda \to 0$ iken, asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$J_1(\alpha,\lambda) = M_1(\alpha+3,\lambda) - \frac{3}{2}M_2(\alpha+2,\lambda) + M_3(\alpha+1,\lambda) - \frac{1}{4}M_4(\alpha,\lambda)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + \frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right) -$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} - \frac{3}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right) +$$

$$+\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}+\frac{3}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}-\frac{12\mu_{21}}{4}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right).$$

Kısaca,

$$J_1(\alpha,\lambda)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right)\text{'dır.} \qquad (232)$$

Benzer şekilde, $J_2(\alpha,\lambda)$'nın $\lambda\to 0$ iken, asimptotik açılımı hesaplanır:

$$J_2(\alpha,\lambda)=\frac{3}{2}m_{21}\left[M_1(\alpha+2,\lambda)-M_2(\alpha+1,\lambda)+\frac{1}{3}M_3(\alpha,\lambda)\right]$$

$$=\frac{3}{2}m_{21}\left[\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)-\right.$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}-\frac{3}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)+$$

$$\left.+\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}+\frac{1}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)\right]$$

$$=\frac{3}{2}m_{21}\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}-\frac{1}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)\Bigg].$$

Özetle,

$$J_2(\alpha,\lambda)=\frac{3}{2}m_{21}\left[\frac{1}{3}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}-\frac{1}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)\right]\text{'dır.} \qquad (233)$$

Son olarak, $J_3(\alpha,\lambda)$'nın $\lambda\to 0$ iken, asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$J_3(\alpha,\lambda)=3A_1\left[M_1(\alpha+1,\lambda)-\frac{1}{2}M_2(\alpha,\lambda)\right]$$

$$=3A_1\left[\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}-\frac{1}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)\right] \qquad (234)$$

Asimptotik ifadeleri (232), (233) ve (234), kesin ifade (231)'de yerlerine yazılırlarsa,

$$E(\overline{X}^3)=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\left[\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{2}m_{21}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}-\frac{3}{4}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)+$$

$$\left.+\frac{3A_1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}++o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)\right]+3A_2$$

$$=\frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\left[\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}+\frac{1}{2}m_{21}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{3A_2}{2}-\frac{3}{4}\mu_{21}\right)\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}}+o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right)\right]+3A_2$$

$$=\frac{1}{4M_1(\alpha,\lambda)}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}\left[1+2m_{21}\frac{1}{\alpha+3}\lambda+4\left(\frac{3A_1}{2}-\frac{3}{4}\mu_{21}\right)\lambda^2+o(\lambda^2)\right]+3A_2$$

$$=\frac{1}{4M_1(\alpha,\lambda)}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}\left[1+2m_{21}\frac{1}{\alpha+3}\lambda+o(\lambda)\right]+3A_2$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha+1}}{4\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}}\left[1-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha}+o(\lambda)\right].\left[1+2m_{21}\frac{1}{\alpha+3}\lambda+o(\lambda)\right]+3A_2$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4}\frac{1}{\lambda^3}\left[1+2m_{21}\frac{1}{\alpha+3}\lambda-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{2}+o(\lambda)\right]+3A_2$$

$$=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4}\frac{1}{\lambda^3}+$$

$$+\left(2m_{21}\frac{1}{\alpha+3}-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha}\right)\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{4}\frac{1}{\lambda^2}+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)+3A_2$$

$$=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\lambda^3}+\left(2m_{21}\frac{1}{\alpha+3}-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\lambda^2}+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

elde edilir.

Özetle,

$$E(\overline{X}^3)=\frac{1}{4}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\lambda^3}+\left(2m_{21}\frac{1}{\alpha+3}-\frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha}\right)\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{1}{\lambda^2}+o\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)\text{'dır.} \qquad (235)$$

Şimdi de, $E(\overline{X}^4)$'in asimptotik açılımını hesaplayalım. Bunun için $E(\overline{X}^4)$'in kesin ifadesini işlemde kolaylık olması amacıyla kısımlara ayıralım.

Öncelikle, $I_1(\alpha,\lambda)$ ifadesinin asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$I_1(\alpha,\lambda) = M_1(\alpha+4,\lambda) - 2M_2(\alpha+3,\lambda) + 2M_3(\alpha+2,\lambda) - M_4(\alpha+1,\lambda) + \frac{1}{5}M_5(\alpha,\lambda)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} + \frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right) -$$

$$-2\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} - 2\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right) +$$

$$+2\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} + 3\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right) -$$

$$-\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} - 2\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} + \frac{1}{2}\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right).$$

Özetle,

$$I_1(\alpha,\lambda) = \frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right)\text{'dır.} \tag{236}$$

Şimdi de $E(\overline{X}^4)$'in kesin ifadesinin ikinci kısmının ($I_2(\alpha,\lambda)$) asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$I_2(\alpha,\lambda) = m_{21}\left[2M_1(\alpha+3,\lambda) - 3M_2(\alpha+2,\lambda) + 2M_3(\alpha+1,\lambda) - \frac{M_4(\alpha,\lambda)}{2}\right]$$

$$= m_{21}\left[2\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + 2\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} - 3\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} - 3\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right) +\right.$$

$$+2\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + 3\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right) -$$

$$\left.-\frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} - \mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right)\right]$$

$$= \frac{m_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right).$$

Özetle,

$$I_2(\alpha,\lambda) = \frac{m_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right)\text{'dır.} \tag{237}$$

$E(\overline{X}^4)$ ’in kesin ifadesinin üçüncü kısmının ($I_3(\alpha,\lambda)$) asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$I_3(\alpha,\lambda) = A_1[6M_1(\alpha+2,\lambda) - 6M_2(\alpha+1,\lambda) + 2M_3(\alpha,\lambda)]$$

$$= A_1\left[6\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + 6\frac{\mu_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right) - \right.$$

$$-6\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} - 6\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + o(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}) +$$

$$\left. +2\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + 3\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)\right].$$

Yukarıdaki ifadede matematiksel işlemler yapılırsa, $I_3(\alpha,\lambda)$ için aşağıdaki sade asimptotik açılım elde edilir:

$$I_3(\alpha,\lambda) = A_1\left[2\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right)\right]. \tag{238}$$

Son olarak, $E(\overline{X}^4)$ ’in kesin ifadesinin dördüncü kısmının ($I_4(\alpha,\lambda)$) asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$I_4(\alpha,\lambda) = A_2[12M_1(\alpha+1,\lambda) - 6M_2(\alpha,\lambda)]$$

$$= A_2\left[12\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + 6\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)\right.$$

$$\left. -6\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} - 6\mu_{21}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\lambda^{\alpha+1}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)\right].$$

Yukarda ki ifadede matematiksel işlemler yapılırsa, $I_4(\alpha,\lambda)$ için aşağıdaki sade asimptotik açılım elde edilir:

$$I_4(\alpha,\lambda) = A_2\left[6\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)\right] \tag{239}$$

Hatırlatalım ki, $E(\overline{X}^4)$ ’in kesin ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$E(\overline{X}^4) = \frac{1}{M_1(\alpha,\lambda)}\sum_{i=1}^{4} I_i(\alpha,\lambda) + 3A_3 \tag{240}$$

burada, $A_1 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$, $A_2 = \frac{m_{41}}{12} - \frac{m_{31}m_{21}}{3} + \frac{m_{21}^3}{4}$,

$A_3 = \frac{m_{21}^4}{4} - \frac{m_{31}m_{21}^2}{2} + \frac{m_{41}m_{21}}{6} + \frac{m_{31}^2}{9} - \frac{m_{51}}{30}$ ’dır.

$E(\overline{X}^4)$'nin asimptotik açılımını hesaplamak için öncelikle $\sum_{i=1}^{4} I_i(\alpha,\lambda)$'nin asimptotik açılımını hesaplayalım:

$$\sum_{i=1}^{4} I_i(\alpha,\lambda) = \frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+4}}\right) + 2A_1\frac{\Gamma(\alpha+3)}{\lambda^{\alpha+3}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+2}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}m_{21}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\lambda^{\alpha+4}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+3}}\right) + 6A_2\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\lambda^{\alpha+2}} + o\left(\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}\right)$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}}\left[1 + \frac{5m_{21}}{2}\frac{\Gamma(\alpha+4)}{\Gamma(\alpha+5)}\lambda + 30A_2\frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+5)}\lambda^3 + o(\lambda)\right]$$

$$= \frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}}\left[1 + \frac{5m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+4}\lambda + o(\lambda)\right].$$

Özetle,

$$\sum_{i=1}^{4} I_i(\alpha,\lambda) = \frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}}\left[1 + \frac{5m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+4}\lambda + o(\lambda)\right]\text{'dır.} \tag{241}$$

Kesin ifade (240)'da, $M_1(\alpha,\lambda)$'nın asimptotik açılımını ve (241)'deki $\sum_{i=1}^{4} I_i(\alpha,\lambda)$'nın asimptotik açılımını yerlerine yazarak, $E(\overline{X}^4)$'nin asimptotik açılımını hesaplanır:

$$E(\overline{X}^4) = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\left[1 - \frac{\mu_{21}}{2}\frac{\lambda}{\alpha} + o(\lambda)\right]\frac{1}{5}\frac{\Gamma(\alpha+5)}{\lambda^{\alpha+5}}\left[1 + \frac{5m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+4}\lambda + o(\lambda)\right]$$

$$= \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5}\frac{1}{\lambda^4} +$$

$$+\left(\frac{5m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+4} - \frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha}\right)\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5}\frac{1}{\lambda^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right).$$

Özetle,

$$E(\overline{X}^4) = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5}\frac{1}{\lambda^4} +$$

$$+\left(\frac{5m_{21}}{2}\frac{1}{\alpha+4} - \frac{\mu_{21}}{2}\frac{1}{\alpha}\right)\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)(\alpha+4)}{5}\frac{1}{\lambda^3} + o\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)\text{'dır.} \tag{242}$$

Yukarıda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Bu momentlerden yararlanarak X(t) sürecinin ergodik dağılımının birçok diğer karakteristikleri hesaplamak mümkündür. Bu karakteristikler içersinden hem teorik hem de pratik açıdan önemli olanlardan birisi asimetri katsayısı diğeri ise basıklık katsayısıdır. Aşağıda bu karakteristiklerle ilgili asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Hatırlatalım ki, çarpıklık ve basıklık katsayılarını sırasıyla aşağıdaki gibi kısım 2.10'da tanımlanmıştır:

$$\gamma_3 = \frac{E(X-a)^3}{\sigma^3},$$

$$\gamma_4 = \frac{E(X-a)^4}{\sigma^4} - 3.$$

Burada, $a = E(X)$'dır.

Sonuç 14. Teorem 25'in koşulları altında, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının asimetri ve basıklık katsayıları için $\lambda \to 0$ iken, aşağıdaki asimptotik açılımlar, sırasıyla yazılabilir:

$$\gamma_3 = \frac{6\sqrt{3}(\alpha+3)}{(\alpha+5)\sqrt{(\alpha+1)(\alpha+5)}} + O(\lambda), \tag{243}$$

$$\gamma_4 = \frac{9(\alpha^3+19\alpha^2+131\alpha+209)}{5(\alpha+1)(\alpha+5)^2} - 3 + O(\lambda). \tag{244}$$

Bu çalışma kapsamında incelenen kesikli müdahaleli X(t) sürecinin durağan özelliklerinin incelenmesi uygulama açısından çok önemlidir. Ancak, X(t) sürecinin durağan özelliklerine ilişkin kesin formüllerin karmaşık bir yapıda olmaları nedeniyle uygulamada istenen pratiklik sağlanamamaktadır. Bu nedenle çalışmamızda, kesikli müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametreli üstel dağlıma sahip olduğu durumda, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımına sahip olduğu durumlarda ve (α, λ), $\alpha > 1$, parametreli Gamma dağılımına sahip olduğu durumda, X(t) sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri, varyansı, üçüncü ve dördüncü momentleri asimptotik yöntemler kullanılarak incelenmiştir. Elde edilen asimptotik açılımların ilk terimlerine ek olarak 2. ve 3. terimlerinin de yalın bir biçimde bulunması bu yaklaşık ifadelerin kesin ifadelere yeteri kadar yüksek kesinlik derecesi kazanmasını sağlıyor. Diğer taraftan, elde edilen asimptotik açılımların ilk terimleri yalnızca ζ_1 rasgele değişkeninin olasılık karakteristiklerine bağlıdır. Bu bilgi kesikli müdahalenin baskın rolünü ortaya koymaktadır. Böylece, yalnız kesikli müdahalenin niteliğini değiştirmekle tüm süreci kontrol altında tutmak mümkündür. Ayrıca, elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların alınma yöntemleri daha geniş kesikli müdahale sınıflarını incelemeye de katkı sağlamaktadır.

3. BULGULAR

Bu çalışmada, stokastik süreçlerinin önemli bir sınıfını oluşturan “Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modeller” ele alınmıştır. Bu fiziksel modelleri ifade eden, özel bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreci X(t), matematiksel olarak oluşturulmuştur. Bu sürecin sınır fonksiyonellerinin temel olasılık parametreleri hesaplanmıştır. Sonra X(t) sürecinin sonlu boyutlu dağılımları ve toplamsal fonksiyonellerinin dağılımları incelenmiştir. Bu süreç için ergodik teorem ispat edilmiş ve ergodik dağılımın açık şekli bulunmuştur. Buna ek olarak, sürecin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir. Daha sonra, ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımına ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, kesin formüller elde edilmiştir. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımına ve (α, λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edilmiştir.

4. İRDELEME

Markov veya yarı-Markov modelleri ile ilgili olan birçok teorik çalışmalar literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların birçoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da, uygulamanın ihtiyacını karşılayabilecek nitelikte değillerdir. Buna karşın kesin ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalar da vardır. Ancak bu çalışmaların eksik olan yönü, ele alınan modellerin gereğinden fazla idealize edilmiş olmalarıdır. Bu çalışmadaki model, hayattaki gerçek modellere daha uygundur. Bu konudaki çalışmalardan farklı olarak (bak, [77]) bu çalışmada, depoya önceden belirlenmiş miktarda ek stok ilave etmeye gerek yoktur. Sadece eklemelerden sonra seviyenin $[s,\infty)$ aralığında olması yeterlidir. Bu özellik ele alınan modeli diğerlerinden farklı kılan önemli bir özelliktir.

Bu çalışmada söz konusu model, bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilmiştir. X(t) süreci, $\{T_n\}$ yenileme süreci ile $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak ifade edilmiş ve bu sürecin olasılık karakteristikleri analitik ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Çalışmamızda X(t) sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edilmiştir. ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımına ve (α,λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, kesin formüller elde edilmiştir. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma, 2. ve 3. mertebeden Erlang dağılımına ve (α,λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edilmiştir.

Bu çalışma kapsamında incelenen modelde istenen değişikliklerin yapılabilmesi mümkündür. Örneğin, ζ_1 rasgele değişkeninin Weibull, Jhanson's S_B ve Normal dağılım gibi dağılımlara sahip olması durumunda ortaya çıkacak benzer modeller incelenebilir. Ayrıca, ζ_1 rasgele değişkeninin genel duruma sahip olması durumunda ortaya çıkacak benzer modeller incelenebilir ve sürecin ergodik dağılım fonksiyonu asimptotik yöntemlerle incelenerek daha geniş kapsamlı bir araştırma da yapılabilir.

5. SONUÇLAR

Modern matematiğin önemli bir dalı olan stokastik modeller ve stokastik süreçler teorisi son yıllarda hızlı bir gelişme kaydetmektedir. Özellikle Markov ve yarı-Markov modellerinin yardımıyla fizik, kimya, biyoloji, çevrebilim, ekonomi ve teknolojide karşılaşılan bazı özel problemler çözülebilmektedir. Bilimsel ve teknolojik gelişmeler, yukarıda belirtilen bilim dallarına ilişkin problemlerin yeni ve ayrıntılı bir biçimde çözümlerinin araştırılmasını zorunlu hale getirmiştir. Bu çalışmada ele alınan "Rasgele hacimli genişletilmiş (s,S) tipli modeller"in rasgele yürüyüş süreçlerinin incelenmesi, hem teorik hem de uygulama bakımından önemlidir. Özellikle elde edilen sonuçların, su barajlarındaki su miktarının kontrol edilmesine, ülkenin petrol, gaz ve bankadaki para rezervlerinin, ayrıca askeri mühimmatın optimal biçimde kullanılması, dolayısıyla ülke ekonomisine önemli oranda katkıları olacaktır. Sözü edilen tüm ve benzer problemler, özel bir bariyerli yarı-Markov rasgele yürüyüş süreçleri yardımıyla ifade edilebilir.

Bu nedenle çalışmamızda, X(t) süreci, bir $\{T_n\}$ yenileme süreci ve bir $\{Y_n\}$ rasgele yürüyüş süreci yardımıyla matematiksel olarak oluşturulmuş ve bu süreçle ilgili aşağıdaki teorik sonuçlar elde edilmiştir.

1) İlgilenilen fiziksel modelleri ifade eden stokastik süreçler, matematiksel olarak oluşturuldu.
2) Bu sürecin sınır fonksiyonellerinin temel olasılık parametreleri hesaplandı.
3) Sürecin sonlu boyutlu dağılımları incelendi.
4) Sürecin toplamsal fonksiyonellerinin dağılımları incelendi.
5) Süreçle ilişkili olarak, ergodik teorem ispat edildi ve ergodik dağılımın açık şekli bulundu.
6) Ergodik dağılımın karakteristik fonksiyonu, $S_{N(z)}$ sınır fonksiyoneli yardımıyla ifade edildi.
7) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin genel duruma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının birinci ve ikinci momentleri için, kesin formüller elde edildi.

8) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, kesin formüller elde edildi.
9) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edildi.
10) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda, süreç için zayıf yakınsaklık teoremi ispat edildi.
11) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edildi.
12) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin 2. mertebeden Erlang dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için, kesin formüller elde edildi.
13) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin 2. mertebeden Erlang dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edildi.
14) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin 3. mertebeden Erlang dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için, kesin formüller elde edildi.
15) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin 3. mertebeden Erlang dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk iki momentleri için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edildi.
16) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin (α, λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, kesin formüller elde edildi.
17) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin (α, λ) parametreli Gamma dağılımına sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momentleri için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edildi.

18) Müdahaleyi ifade eden ζ_1 rasgele değişkeninin (α, λ) parametreli Gamma dağılıma sahip olması durumunda, sürecin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları için, $\lambda \to 0$ iken, asimptotik formüller elde edildi.

6. ÖNERİLER

Yapılan bu çalışmanın, stokastik süreç teorisindeki bir eksikliği giderebileceği umulmaktadır. Bunun la beraber bu çalışmanın aşağıdaki yönlerde de geliştirilebilmesi mümkündür:

1) Ergodik dağılım fonksiyonunun, asimptotik yöntemlerle incelenmesi.
2) ζ_1 Rasgele değişkeninin, weibull, normal v.s. gibi pratikte çok sık kullanılan dağılımlara sahip olması durumunda ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi.
3) ζ_1 Rasgele değişkeninin genel duruma sahip olması durumunda ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi.
4) Elde edilen kesin formüller ve asimptotik formüller arasındaki farkın değerlendirilmesi.
5) Somut modeller için, simülasyon yöntemleri uygulayarak olasılık karakteristiklerinin hesaplanması ve elde edilen sonuçların asimptotik sonuçlarla karşılaştırılması.
6) Başlangıç rasgele değişkenlerinin bağımlı olması durumunda ortaya çıkan benzer modellerin incelenmesi.
7) Varyansı sonsuz olan başlangıç rasgele değişkenleri için benzer problemlerin incelenmesi.

7. KAYNAKLAR

1. Afanas'eva, L. G. and Bulinskaya, E. V., Stochastic processes in the theory of queues and inventory control (Russian), Moscow, 1980.

2. Afanas'eva, L. G. and Bulinskaya, E. V., Storage capacity optimization, Eng. Cybern., 19, 5 (1981) 49-57.

3. Afanas'eva, L.G. and Bulinskaya, E. V., Some asymptotic results for random walks in a strip, Theory Probability and Its Applications, 29, 4 (1984) 654-668.

4. Alsmeyer, G., Some relations between harmonic renewal measure and certain first passage times, Statistics&Probabilty Letters, 12, 1 (1991) 19-27.

5. Anisimov, V. V., Limit distributions of functionals of a semi - Markov process given on a fixed set of states, up to the time of first exit, Überstzung in Soviet Math., 11 (1970) 1002-1004.

6. Anisimov, V. V., The limiting behaviour of a semi - Markov process with a decomposable state space, Soviet Math., 13 (1973) 1276-1279.

7. Anisimov, V. V., Limit theorems for processes with semi-Markov switchings and their applications, Random Operators and Stochastic Equations, 12, 4 (1994) 333-352.

8. Anisimov, V. V., Diffusion approximation in switching stochastic models and its applications, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skorohod and Yu. V. Borovskikh, VSP, Zeist, The Netherlands (1995) 13-40.

9. Aras G. and Woodroofe M., Asymptotic expansions for the moments of a randomly stopped average. Annals of Statistics, 21(1993) 503-519.

10. Artikis, T. and Voudouri A., A stochastic integral arising in discounting continuous cash flows and certain transformed characteristic functions. Applied Mathematical Letters 13, 4 (2000) 87-90.

11. Borovkov, A. A., On the first passage time for one class of processes with independent increments, Theor. Prob. Appl., 10 (1965) 331-334.

12. Borovkov, A. A., On a walk in a strip with inhibitory boundaries, Math. Notes, 17 (1975) 385-389.

13. Borovkov, A. A., Stochastic Processes in Queueing Theory., Springer-Verlag. X1., New York, 1976.

14. Borovkov, A. A., Asymptotic Methods in Queueing Theory, J. Wiley, New York, 1984.

15. Brown, M. and Ross, S.M., Asymptotic properties of processes, SIAM J. Appl. Math. 22, 1 (1972) 93-105.

16. Brown, M. and Solomon, H., A second-order approximation for the variance of a renewal reward process, Stochastic Processes and Their Application, 3 (1975) 301-314.

17. Çınlar, E., Some joint distributions for Markov renewal processes, Austral. J. Stat., 10 (1968) 1.

18. Çınlar, E., Markov renewal theory, Adv. Appl. Probab., 1 (1975) 123-187.

19. Çınlar, E., Introduction to stochastic processes, Englewood Cliffs, New Jersey,1975.

20. Debicka J., Moments of the cash value of future payment streams arising from life insurance contracts, Insurance: Mathematics and Economics, 33 (2003) 533-550.

21. Denuit M., Lefevre Cl. and Picard Ph. Polynomial structures in order statistics distributions. Journal of Statistical Planning and Inference, 113 (2003) 151-178.

22. Dikmenoğlu, S., İki Yansıtan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1997.

23. Dzhafarov, V. S., Nasirova, T. H. and Skorohod, A. V., On the limit of certain process with semi independent increments, Theor. Probab. Math. Statist., 5 (1976) 52-57.

24. El-Shehawey, M. A., Limit distribution of first hitting time of delayed random walk, J. Ind. Soc. Oper. Res.,13, 1-4 (1992) 63-72.

25. Embrechts P. and Kuppelberg C., Some aspects of insurance mathematics. Probability Theory and its Applications, 38 (1993) 374-415.

26. Ezhov, I. I. and Korolyuk, V. S., Semi-Markovian processes and their applications (Russian), Cybernetica, 5 (1967) 58-65.

27. Ezhov, I. I. and Shurenkov V. S., Ergodic theorems connected with the Markov property of random , Theor. Probab. Appl., 21 (1977) 620-624.

28. Federyuk, M.V., Asyptotics for integrals and Series (Russian), Nauko, Moscow, 1984.

29. Feller, W., On semi-Markov processes, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 51, 4 (1964) 130-145.

30. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Appl. II, J. Wiley, New York, 1971.

31. Gajek L., 2005, On the deficit distribution when ruin occurs- discrete time model, Insurance: Mathematics and Economics, 36 (2005) 13-24.

32. Gihman, I. I. and Skorohod, A.V., Theory of Stoch. Processes II, Springer, Berlin, 1975.

33. Gnedenke, I. I. and Kovalenko, I. N., Introduction to queing theory, IX, Translation edited by D. Louvish, Israel Program for Scientific Translation, Jerussalem,1968.

34. Goovaerts M., Dhaene J. and De Schepper A., Stochastics upper bounds for present value functions, Journal of Risk and Insurance, 67, 1 (2000) 1-14.

35. Gourieroux C. and Jasiak J., Heterogeneous INAR(1) model with application to car insurance, Insurance: Mathematics and Economics, 34 (2004) 177-192.

36. Grübel, R., On harmonic renewal measures, Prob. Th.and Rel. Fields, 71 (1986) 393-403.

37. Gusak, D. V. and Korolyuk, V. S., On the first passage time across a given level for processes with independent increments, Theor. Probab. Appl., 13 (1968) 448-456.

38. Gusak, D. V., On the joint distribution of the first exit time and exit value for homogeneous process with independent increments, Theor. Probab. Appl., 14 (1969) 14-23.

39. Gusak, D. V. and Korolyuk, V. S., On the joint distribution of the process with stationary movements and its maximum, Theor. Probab. Appl., 14 (1969) 400-469.

40. Harlamov, B. P., On convergence of semi-Markov walks to a continuous semi-Markov process, Theor. Probab. Appl., 21 (1977) 482-498.

41. Jewell, W.S., Fluctuation of a Renewal-Reward Process, Journal of Matematical Analysis and Applications, 19 (1967) 309-329.

42. Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., Modern Actuarial Risk Theory, Kluwer Academic Publishers, Boston, 2001.

43. Kaas R., Dhaene J., Goovaerts M., Upper and lower bounds for sums of variable, Insurance: Mathematics and Economics, 27, 2 (2000) 151-168.

44. Kastenbaum, M. A., A dialysis system with one absorbing and one semi-reflecting state, J.Appl. Probab., 3 (1966) 363-371.

45. Kemperman, J. H. B., A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary, Ann. Math. Statist., 34 (1963) 1168-1193.

46. Kesemen, T., Genişletilmiş (s, S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2001.

47. Khaniev, T. A., Distribution of a semi-Markov walk with two delay screens (Russian), Some questions of the theory of stochastic processes , Kiev 1984, Collect sci. Works, 106-113.

48. Khaniev, T. A., An ergodic theorem for a semi-Markov walk with two delay screens (Russian), İzv. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 4, (1986) 37-42.

49. Khaniev, T. A., The explicit form of the ergodic distribution of the process of semi-Markov walk dependent components (Russian), Probabilistic method for the investigation of systems with an infinite number of degrees of freedom, Kiev, 1986, Collect. Sci. Works, 119-125.

50. Khaniev, T. A., Distribution of a Process of semi-Markov walk on a closed interval with exponentially distributed components, İzv. Acad. Nauk. Az. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Math. Nauk, 1 (1988) 45-50.

51. Khaniev, T. A. and Özdemir, H., 'On the Laplace transform of finite dimensional distribution functions of semi-continuous random processes with reflecting and delaying screens, In: Exploring Stochastic Laws, eds., A. V. Skorohod and Yu. V. Borovskikh, VSP, Zeist, The Netherlands, (1995) 167-174.

52. Khaniev, T. A., On the probability characteristics of a semi-Markovian random walks with two barriers, Bulletin of the International Statistical Institute, 57, 2 (1997) 569-570 .

53. Khaniev, T. A., Some results on a stochastic process with a discrete chance interference, Mathematical & Computational Applications, 4, 2 (1999) 145-152.

54. Khaniev, T. A. and Ünver, İ., The study of the level zero crossing time of a semi-Markovian random walk with delaying screen, Turkish Journal of Mathematics, 21, 3 (1997) 257-268.

55. Khaniev, T. A., Özdemir, H. and Maden, S., Calculating the probability characteristics of a boundary functional of a semi-continuous random process with reflecting and delaying screens, Applied Stochastic Models and Data Analysis, 14 (1998) 117-123.

56. Khaniev, T. A., Ünver, İ. and Maden, S., On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19, 5 (2001) 799-819.

57. Khaniyev T., Some asimptotic results for the semi-Markov random walk with a special barrier, Turkish Journal of Mathematics, 27, 2 (2003) 251-272.

58. Khaniyev T.A. and Kucuk Z., 2004. Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers. Statistics & Probability Letters, 69, 1 (2004) 91-103.

59. Khaniyev T., Kesemen T., Kesemen O. and Aliyev R., Some asimptotic results fort he stationary characteristics of the semi-Markov random walk with barrier. Automatic Control and Computer Sciences, 1 (2006) 31-43 (in Russian).

60. Korolyuk, V. S., Turbin, A. F., Semi - Markov processes and their applications (Russian), Izdatel'stvo, Nauka Dumka, Kiev, 1976.

61. Korolyuk, V. S. and Pirliev, B., Random walk on a semi-axis on a superposition of two renewal processes (Russian), Ukr. Math. Zh., 36, 4 (1984) 433-436.

62. Korolyuk, V. S. and Svishchuk, A. V., Limit representation of continuous semi-Markovian random evolutions in as sheme of series (Russian), Ukr. Math. Zh., 41, 11 (1989) 1476-1482.

63. Korolyuk, V. S. and Borovskikh, Y. V., Analytical Problems for Asymptotics of Probability Distributions, Naukova Dumka, Kiev, 1981.

64. Kovalenko, I. N., Kuznetchov, N. and Shurenkov, V.M., Stochastic Processes, Naukova Dumka, Kiev, 1983.

65. Küçük, Z., İki Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi Üzerine, Doktora Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2003.

66. Lukac, E., Characteristics Function, Griffin, London, 1970.

67. Levy, P., Processus semi - Markoviens. Proc. III. Internat. Congr. Math., 1954, Amsterdam, 416-426.

68. Lotov, V. I., On asymptotics of distributions related to the departure of a non-discrete random walk from an interval (Russian), Predel'nye Teoremy Teori i Veroyatnoste i Smezhnye Vpoprosy, 1 (1982) 18-25.

69. Lotov, V. I., On random walks within a stripe, Theory Probability and Its Applications, 36, 1 (1991) 160-165.

70. Lotov, V. I., On the asymptotics of distributions in two-sided boundary problems for random walks defined on a Markov chain, Sib. Adv. Math., 1, 3 (1991) 26-51.

71. Lotov, V. I., On some boundry crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24, 4 (1996) 2154-2171.

72. Maden, S., Yansıtan ve Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreci Üzerine, Doktora Tez, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1997.

73. Nasirova, T. H. and Skorohod, A. V., On a class of jump processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 16 (1978) 81-94.

74. Nasirova, T. H., On ergodic theorems for some semi-Markov processes with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20 (1979) 90-97.

75. Nasirova, T. H., Distribution of a semi-Markov walk process with delaying barrier, Theor. Probab. Math. Statist., 20 (1979) 90-97.

76. Nasirova, T. I., Processes of Semi-Markovian Random Walk, ELM, Baku, 1984.

77. Nasirova, T. I., Yapar C. and Khaniev, T. A., On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s,S), Cybernetics and Systems Analysis, 5 (1998) 69-76.

78. Perry D. and Stadje W., Risk analysis for a stochastic cash management model with two type of customers. Insurance: Mathematics and Economics, 26, 1 (2000) 25-36.

79. Perry D., Stadje W., Function space integration for annuities. Insurance: Mathematics and Economics, 29, 1 (2001) 73-82.

80. Parker G., ‘Stochastic analysis of portfolio endowment insurance policies’’, Scandinavian Actuarial Journal, 77, 2 (1994) 119-130.

81. Parker G., Stochastic analysis of the interaction between investment and insurance risks. North American Actuarial Journal, 1, 2 (1994) 128–142.

82. Prabhu, N. U., Stochastic Storage Processes, Springer-Verlag, New York, 1981.

83. Resnick, S. I., Adventures in Stochastic Processes, Birkhaüser Boston, Cambridge, 1992.

84. Rogozin, B. A., On the distribution of the first jump, Theory Probab. Appl., 9 (1964) 450-464.

85. Rogozin, B. A., On some classes of processes with independent increments, Theory Probab. Appl., 10 (1965) 479-483.

86. Ross, S. M., Introduction to Probability Models, Academic Press, New York, 1993.

87. Saaty, T.L., Elements of Queueing Theory With Applications, Dover, New York, 1983.

88. Senturia, L. and Puri Prem, S. A., A semi-Markov storage model, Adv. App. Probab., 1, 2 (1973) 362-378.

89. Serfoza, R. F., Functions of semi-Markov processes, SIAM J. Appl. Math., 20 (1971) 3.

90. Schepper A., Goovaerts M., Dhaene J., Kaas R., Vyncke D., Bounds for present value function with stochastics interest rates and stochastics volatility. Insurance: Mathematics and Economics, 31 (2002) 87-103.

91. Shurenkov, V. M., Ergodic Theorems and related questions of the theory of random processes (Russian), Naukova Dumka, Kiev, 1981.

92. Shurenkov, V. M., On the Markov renewal theory, Teor. Veroyatn. Primen., 29, 2 (1984) 248-263.

93. Shurenkov, V.M., The Ergodic Markov Processes, Nauka, Moscow, 1989.

94. Sil'vestrov, D. S., Limit theorems for semi-Markov processes and their applications I., Theor. Probab. Math. Statist., 3 (1975) 159-176.

95. Sil'vestrov, D. S., Limit theorems for semi-Markov processes and their applications II., Theor. Probab. Math. Statist., 3 (1975) 177-198.

96. Skorohod, A. V., Random processes with independent increments, Nauka, Moscow, 1967.

97. Skorohod, A. V. , Slobodenyuk, N. P., Limit theorems for random walks, Ukr. SSR; Nauka Dumka, 1970.

98. Smith, W. L., Regenerative stochastic processes, Proc. Roy. Soc. Edinburg Ser. A, 232 (1955) 6-31.

99. Smith, W. L., Renewal theory and its ramifications, Journ. Roy. Statist. Soc., 20 (1958) 243-302.

100. Smith, W. L., On the cumulants of renewal processes, Biometrika, 46, 1 (1959) 1-29.

101. Smith,W.L., Some peculier semi-Markov processes, Proc.5-Th Berkelly Symp. Math.Statist. And Probab., 2, 2 (1965-1966) 255-263.

102. Spitzer, F., A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans.Amer. Math. Soc., 82, (1956) 323-339.

103. Spitzer, F., Principles of random walk, Princeton, N. J., D. Van Nostrand, 1964.

104. Takacs, L., Bizonyus tipusu requrrens sztochasztikus folyamotok vizsgalatarol, Magyartud. Akad. Math. Kutato. Int. Kozl., 3 (1954) 1-2.

105. Takacs, L., Combinatorial methods in the theory of stochastic processes, 2nd ed , Huntington, Robert E. Krieger Publishing Co. X1, New York, 1977.

106. Tomko, J., On the theory of semi-Markov processes with a general state space (Russian), Teor. Veroyatn. Primen., 34, 2 (1989) 314-329.

107. Ünver, İ., On distributions of the semi-Markovian random walk with reflecting and delaying barriers, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 89 (1997) 231-242.

108. Weesakul, B., The random walk between a reflecting and an absorbing barrier, Ann. Math. Statist., 23 (1961) 765-774 .

109. Vyncke D., Goovaerts M. and Dhaene J., Convex upper and lower bounds for present value functions. Onderzoeksrapport KUL, Departement Toegepaste Economische Wetenschappen, 25,1 (2000) 17-25.

110. Zhang, Y. L., Some problems on a one dimensional correlated random walk with various types of barrier, Journal of Applied Probability, 29 (1992) 196-201.

ÖZGEÇMİŞ

Tülay KESEMEN, 07.07.1977 tarihinde Yozgat ili, Sorgun ilçesi, Kodallı Çiftliği köyünde doğdu. İlköğrenimini Kodallı Çiftliği Köyü İlkokulu'nda Orta ve Lise öğrenimini Atatürk Anadolu Öğretmen Lisesi'nde (Ankara) tamamladı. 1994–1995 eğitim öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi Matematik öğretmenliği bölümünü kazandı. Temmuz 1998'de bu bölümden birincilikle mezun oldu.

Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalı Yüksek Lisans programına kayıt oldu. 27.08.2001 tarihinde Yüksek Lisans eğitimini başarıyla tamamladı.

1998-2002 yılları arasında MEB'da öğretmenlik görevinde bulundu. 2002-2006 yıllarında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Matematik Anabilim dalında Araştırma Görevlisi olarak çalıştı.

Halen, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümünde, Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır.

Evli olup, bir çocuk annesidir ve İngilizce bilmektedir.