

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**3 BOYUTLU DAMAR YAPISININ 3 KEYFİ AÇIDAN ALINMIŞ İZDÜŞÜM  
GÖRÜNTÜLERİNDEKİ KENARLARDAN ELDE EDİLMESİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Elektronik Müh. Mehmet ÖZTÜRK**

**TEMMUZ 2007  
TRABZON**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI**

**3 BOYUTLU DAMAR YAPISININ 3 KEYFİ AÇIDAN ALINMIŞ İZDÜŞÜM  
GÖRÜNTÜLERİNDEKİ KENARLARDAN ELDE EDİLMESİ**

**Elektronik Mühendisi Mehmet ÖZTÜRK**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**

**“Elektronik Yüksek Mühendisi”**

**Ünvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

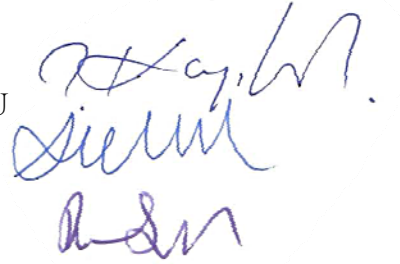
**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 08.06.2007**

**Tezin Savunma Tarihi : 09.07.2007**

**Tez Danışmanı : Doç. Dr. Temel KAYIKÇIOĞLU**

**Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Ali GANGAL**

**Jüri Üyesi : Prof. Dr. Rifat YAZICI**



**Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Emin Zeki BAŞKENT**

**Trabzon 2007**

## ÖNSÖZ

Bu tez, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı, Elektronik Mühendisliği Yüksek Lisans Programı'nda hazırlanmıştır. Bu çalışmada, 3 farklı açıdan alınmış anjiyo görüntülerinden damarlara ait kenar bilgilerini kullanarak 3 boyutlu yapı oluşturulmaya çalışılmıştır. Ayrıca, bu amaç doğrultusunda bir bilgisayar programı hazırlanmıştır.

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenerek, çalışmalarım boyunca yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Doç. Dr. Temel KAYIKÇIOĞLU'na, çalışmalarım esnasında moral verme ve motive etme konusunda bana destek veren aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Mehmet ÖZTÜRK

Trabzon, 2007

# İÇİNDEKİLER

	<b><u>Sayfa No</u></b>
ÖNSÖZ.....	II
İÇİNDEKİLER.....	III
ÖZET.....	V
SUMMARY .....	VI
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VII
TABLolar DİZİNİ .....	X
SEMBOLLER DİZİNİ.....	XI
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. X-Işını Anjiyografisinin Tarihçesi .....	1
1.2.1 Kalp Anjiyografisinin Gelişimi .....	2
1.2.2 Kalp Anjiyografisinde Görüntü Alma Sistemi.....	3
1.3. 3 Boyutlu Görüntü Oluşturma Teknikleri .....	7
1.4. Kenar Belirleme Metotları.....	7
1.5 Marquardt-Levenberg Algoritması.....	9
1.6. Kübik Smoothing Spline ile Veri İnterpolasyonu .....	14
1.6.1. Kübik Spline İnterpolasyonu.....	15
1.6.2. Kübik Smoothing Spline .....	21
1.7 Anjiyo Görüntüleme Sisteminin Modellenmesi ve 3B Görüntü Oluşturma ..	27
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR .....	32
2.1. Giriş.....	32
2.2. Genelleştirilmiş Silindirler .....	32
2.3. Damar Parlaklık Profillerinin Modellenmesi .....	37
2.4. 3 Boyutlu Damarın Bilgisayar Simülasyonu.....	41
2.5 Kenar Kestirimi .....	45
2.6 Kenar Kestirimi Performans Analizi .....	54
2.7. 3 Boyutlu Damar İskeletinin Yeniden Oluşturulması.....	57
2.8 Elips Parametrelerinin Hesaplanması.....	61
2.9 Gerçek Görüntüler Üzerinde Yapılan Çalışmalar .....	69
3 İRDELEME VE SONUÇLAR.....	72

4	ÖNERİLER .....	74
5	KAYNAKLAR.....	75
ÖZGEÇMİŞ		

## ÖZET

3B damar yapısının elde edilmesi insan sağlığı ve tedavisi açısından önem taşıyan bir araştırma alanıdır. Bu nedenle araştırmaya açık bu alanda yapılmış yoğun çalışmalar mevcuttur.

Bu tezde üç keyfi açıdan alınmış kalp damarlarına ait anjiyo görüntüleri kullanılarak bu damara ilişkin 3B yapı oluşturulmuştur

Bir damar eliptik kesit alanlarına sahip genelleştirilmiş silindirler ile modellenmiştir. Bu genelleştirilmiş silindiri oluşturmak için bir merkez eksene ve bu merkez eksen üzerine dik olarak yerleştirilecek elipslere ihtiyacımız vardır. Merkez eksen ve elipsleri elde etmek için damarların kenarları ve merkez çizgisi bilgisi damar parlaklık profillerine damar izdüşümü parametrik modeli uydurularak elde edilmiştir. Model parametrelerinin elde edilmesi için *Marquardt-Levenberg* doğrusal olmayan minimizasyon algoritması kullanılmıştır.

3 adet görüntüden elde edilmiş merkez çizgisi bilgisi ve bunlara ek olarak görüntülerin depolandığı DICOM dosyalarından elde edilen izdüşümü parametreleri kullanılarak damarın 3B merkez ekseni oluşturulmuştur. Merkez eksen elde edildikten sonra üç adet görüntüdeki kenar noktaları kullanılarak elipsler oluşturulmuş ve bu elipsler merkez eksen üzerine genelleştirilmiş silindir teorisine uygun olarak yerleştirilmiştir.

Kübik Smoothing Spline yardımıyla merkez eksen ve elips parametreleri hem çoğaltılmış hem de yumuşatılarak damar üzerindeki devamlılık sağlanmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** 3B Görüntü Oluşturma, Kenar Belirleme, Anjiyo, Genelleştirilmiş Silindirler, Doğrusal Olmayan Model Kestirimi, Kübik Smoothing Spline,

## SUMMARY

### 3D RECONSTRUCTION OF CORONARY ARTERIAL SEGMENTS FROM EDGES IN ITS THREE IMAGES TAKEN AT ARBITRARY VIEWS

3D reconstruction of vessels is an important research area for human health and care. Thus there are lots of intensive studies in this open area.

In this thesis a 3D representation of coronary vessels is reconstructed from its three angiographic images taken at arbitrary views.

A vessel is modeled by generalized cylinders having elliptical cross-sections. To build this generalized cylinder one must have a medial axis and ellipses that can be placed on the medial axis orthogonally. To obtain the medial axis and ellipses the vessels' edges and centerline information is extracted by fitting a parametric model of vessel projection. *Marquardt-Levenberg* nonlinear minimization algorithm is used to determine model parameters.

By using vessel centerline information from three images, 3D vessel medial axis is reconstructed with the assistance of projection parameters obtained in DICOM files that the images are stored. Once the medial axis is reconstructed, ellipse parameters is obtained from three boundary points in three images of the vessel and placed on the medial axis according to generalized cylinders theory.

Cubic smoothing spline is used to smooth and also interpolate medial axis and ellipse parameters to obtain continuity on the vessel.

**Key Words:** 3D Reconstruction, Edge Estimation, Angiography, Generalized Cylinders, Non-linear Model Fitting, Cubic Smoothing Splines

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Wilhelm Conrad ROENTGEN.....	2
Şekil 2. İlk x-ışını görüntüsü.....	2
Şekil 3. İlk anjiyo görüntüsü.....	2
Şekil 4. Örnek bir anjiyo cihazı.....	3
Şekil 5. Görüntü yoğunlaştırıcı.....	4
Şekil 6. <i>Rotation</i> açısı $\alpha > 0$ (RAO) ve $\alpha < 0$ (LAO) konumları.....	5
Şekil 7. <i>Angulation</i> açısı $\beta < 0$ (CRA) ve $\beta > 0$ (CAU) konumları.....	6
Şekil 8. SID değişimi.....	6
Şekil 9. Kübik <i>spline</i> interpolasyonuna bir örnek.....	18
Şekil 10. Kübik <i>smoothing spline</i> interpolasyonu.....	26
Şekil 11. (b) Kamera modeli ve (a) anjiyografik görüntü alma modeli.....	27
Şekil 12. Epipolar geometriye örnek.....	30
Şekil 13. (a) Başlangıç, (b) 10 iterasyon sonra ve (c) son durum.....	31
Şekil 14. Genelleştirilmiş silindir yapısına bir örnek.....	32
Şekil 15. 3B Yörünge örneği.....	33
Şekil 16. 2B kontur örneği.....	33
Şekil 17. <i>Frenet frame</i> tanımındaki belirsizlik noktasına örnek.....	34
Şekil 18. Yörünge eğrisi ve <i>frenet frame</i> için birim vektörler.....	35
Şekil 19. Konturların yerleştirilmiş görünümü.....	36
Şekil 20. 3B genelleştirilmiş silindir yüzeyi.....	36
Şekil 21. Damar izdüşüm düzeneği.....	38
Şekil 22. $p_{max}$ , $f_{cen}$ ve $p_{cen}$ büyüklüklerinin tanımlanması.....	41
Şekil 23. Örnek 3B damar iskeleti.....	42
Şekil 24. Eliptik kontur giydirilmiş 3B damar modeli.....	42
Şekil 25. 3B Damar modeli.....	43
Şekil 26. 3B Hacimsel damar modeli.....	43
Şekil 27. Anjiyo simülasyonu örneği.....	44
Şekil 28. (a) Parlaklık profili seçimi, (b) ilgili profilin grafiği.....	44
Şekil 29. Bulanıklaştırılmış damar görüntüsü.....	45
Şekil 30. Bulanıklaştırılmış damar + arkaplan.....	46



Şekil 31.	Profil genişliğinin belirlenmesi.....	46
Şekil 32.	Kullanıcı tarafından çizilen merkez çizgisi.....	46
Şekil 33.	Merkez çizgisinin son hali.....	47
Şekil 34.	Alınan profillere ait kılavuz çizgileri.....	48
Şekil 35.	Alınan profillerin ardışık olarak gösterimi.....	48
Şekil 36.	Başlangıç parametrelerinin belirlenmesi için kullanılan profil resmi.....	49
Şekil 37.	Profil ve ilgili türevin grafiği.....	49
Şekil 38.	(a) Filtrelenmiş profiller, (b) orijinal profiller.....	50
Şekil 39.	Örnek bir profilin filtreli ve filtresiz durumları.....	50
Şekil 40.	Kübik <i>smoothing spline</i> uydurulmuş arkaplan.....	51
Şekil 41.	Arkaplan çıkartılmış olarak elde edilen kestirim.....	52
Şekil 42.	Tümüyle kestirilmiş profil.....	52
Şekil 43.	İlk kenar kestirim işleminin sonucu.....	53
Şekil 44.	İkinci kenar kestirim işleminin sonucu.....	53
Şekil 45.	Kenar kestirim işleminin son hali.....	54
Şekil 46.	Kestirim sonucu hesaplanan $p_{max}$ grafiği.....	54
Şekil 47.	$p_{max}$ değişimi için kullanılan test görüntüleri.....	55
Şekil 48.	$f_{cen}$ değişimi için kullanılan test görüntüleri.....	55
Şekil 49.	$\sigma$ değişimi için kullanılan test görüntüleri.....	56
Şekil 50.	$\sigma_n$ değişimi için kullanılan test görüntüleri.....	57
Şekil 51.	(0, 60) açılarından alınmış ve kenar kestirimi yapılmış izdüşümü görüntüsü....	59
Şekil 52.	(30, 45) açılarından alınmış ve kenar kestirimi yapılmış izdüşümü görüntüsü...	60
Şekil 53.	(-30, 20) açılarından alınmış ve kenar kestirimi yapılmış izdüşümü görüntüsü..	60
Şekil 54.	Yeniden oluşturulmuş iskelet.....	61
Şekil 55.	Her bir merkez noktası için yapılan hata.....	61
Şekil 56.	Tek açılı projeksiyon geometrisi.....	62
Şekil 57.	Tek açılı projeksiyonda eliptik kesitin yeniden oluşturulması.....	62
Şekil 58.	<i>Primary angle</i> sabit tutularak, <i>secondary angle</i> değişimine göre bakış düzlemleri.....	65
Şekil 59.	Sabit <i>primary angle</i> kullanarak alınmış projeksiyonlar.....	65
Şekil 60.	Sabit <i>primary angle</i> kullanarak alınmış projeksiyonlara ilişkin $p_{max}$ değerleri....	66
Şekil 61.	3B yeniden oluşturulmuş damar ve orijinal damar.....	68
Şekil 62.	Damar boyunca alanların karşılaştırılması.....	68
Şekil 63.	Gerçek anjiyo resmi 1.....	70

Şekil 64.	Gerçek anjiyo resmi 2.....	70
Şekil 65.	Gerçek anjiyo resmi 3.....	71
Şekil 66.	Gerçek anjiyo görüntüsünden elde edilen damar.....	71
Şekil 67.	Gerçek damar görüntüsü ile oluşturulan 3B damara ait alan dağılımı.....	71
Şekil 68.	Damar bulanıklığının kestirim üzerindeki etkisi.....	72

## TABLolar DİZİNİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
Tablo 1. $p_{max}$ için performans analizi sonuçları.....	55
Tablo 2. $f_{cen}$ için performans analizi sonuçları .....	56
Tablo 3. $\sigma$ için performans analizi sonuçları .....	56
Tablo 4. $\sigma_n$ için performans analizi sonuçları .....	57
Tablo 5. Gerçek anjiyo görüntüleri için projeksiyon verileri.....	70

## SEMBOLLER DİZİNİ

$a, b, c$	:	Elips parametreleri
$C$	:	Optik merkez noktası
$f$	:	Odak uzaklığı
$F$	:	Amaç fonksiyonu
$g$	:	<i>Gradyan</i> fonksiyonu
$H$	:	<i>Hessian</i> matrisi
$J$	:	<i>Jacobian</i> matrisi
$k$	:	Kontur eğrisi
$l$	:	Damar kalınlığı
$m$	:	Model
$R$	:	Dönme matrisi
$S$	:	3. dereceden polinom parçaları
$t$	:	Yer değiştirme vektörü
$u, v$	:	Görüntü düzleminin eksenleri
$y$	:	Deneysel veriler
$cc$	:	3 boyutlu nokta koordinatları
$cc_h$	:	Hesaplanmış 3 boyutlu nokta koordinatı
$c_m$	:	Büyütme sabiti
$CAU$	:	<i>Caudal</i> bakış açısı
$CRA$	:	<i>Cranial</i> bakış açısı
$e_1, e_2, e_3$	:	<i>Frenet frame</i> için birim vektörler
$f_{cen}$	:	Eliptik kesit izdüşümünün genliği
$f(p)$	:	Damar parlaklık profili fonksiyonu
$FP$	:	Odak noktası
$II$	:	Görüntü yoğunlaştırıcısı
$LAO$	:	Kalbin sol tarafı
$M_i$	:	$i$ numaralı resim için transformasyon matrisi
$OID$	:	Dönem eksenleri merkezinin $II'$ ya uzaklığı
$Ort()$	:	Aritmetik ortalama fonksiyonu
$p_{cen}$	:	Eliptik kesit izdüşümünün merkezi
$p_{hi}$	:	$cc_h$ değerleri için hesaplanan izdüşümü koordinatları

$p_i$	:	$i$ numaralı resim için koordinat vektörü
$p_{max}$	:	Eliptik kesit izdüşümü genişliğinin yarısı
$psf$	:	<i>Point spread function</i> (Nokta dağılım fonksiyonu)
$r1, r2, alfa$	:	Elips parametreleri
$RAO$	:	Kalbin sağ tarafı
$sigma_n$	:	Arkaplan gürültüsü standart sapması
$SID$	:	X-ışını kaynağının II' ya olan uzaklığı
$SOD$	:	X-ışını kaynağının hastaya olan uzaklığı
$Std()$	:	Standart sapma fonksiyonu
$Surf$	:	Genelleştirilmiş silindir yüzeyi
$u_0, v_0$	:	Odak noktasının görüntü düzlemimdeki koordinatları
$\alpha$	:	<i>RAO</i> veya <i>LAO</i> bakış açısı
$\beta$	:	<i>Cranial</i> veya <i>Caudal</i> bakış açısı
$\varphi$	:	2 numaralı projeksiyon açısı
$\eta$	:	Gürültü
$\mu$	:	x-ışını zayıflatma sabiti
$\mu_c$	:	x-ışını geçirgenlik katsayısı
$\sigma$	:	<i>Gauss</i> gürültüsü standart sapma değeri
$3B$	:	3 boyutlu

## 1. GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Günümüzün hızla gelişen teknolojisine paralel olarak, tıbbi alanda teknolojinin kullanımını da giderek artmaktadır. Özellikle de tedavi sürecinin ilk basamağı olan teşhis koyma aşamasında kullanılmasından dolayı görüntüleme teknikleri, tıbbi elektroniğin en önemli dalını oluşturmaktadır.

Tıbbi görüntüleme teknikleri basit bir görüntüleme aracı veya anatomik yapının incelenmesi için gerekli bir araç olmaktan öte, muhtemel bir cerrahi müdahale veya ışın tedavisi için planlama aracı ya da hastalığın ilerleyişinin gözlemlenmesi gibi durumlarda kullanılmak üzere oldukça önemli roller üstlenmeye başlamıştır [1]. Bu görüntüleme yöntemlerinin biri de X ışını ile görüntüleme, diğer bir ifadeyle X-ışını anjiyografisidir. Bu çalışmada X-ışını anjiyografisinden elde edilen görüntüler yardımıyla 3 boyutlu görüntü elde etme konusu incelenmiştir.

### 1.2. X-ışını Anjiyografisinin Tarihçesi

X-ışınlarının gözlemlenmesi ile alakalı ilk dokümanlar 8 Kasım 1895 tarihini gösteriyor. Wilhelm Conrad Roentgen (Şekil 1) katot ışınları ile deneyler yaparken ilk kez x-ışınlarını kaza eseri keşfetmiştir. Bu keşfin önemini anlayan Roentgen daha sonra çalışmalarını bu alanda yoğunlaştırmış ve x ışınları ile görüntülemenin pratik temellerini geliştirmiştir. Bu çalışmalar esnasında insan anatomisini gösteren ilk x-ışını görüntülerini de çekmiştir (Şekil 2).

X-ışınlarının kaynağı küçük bir voltaj kaynağı tarafından üretilen elektronlardır. Ancak bu elektronlar çok daha yüksek bir voltaj tarafından hızlandırılır ve böylece çok yüksek enerjili x ışınları üretilir. Enerjiyi taşıyan parçacıklar elektronlar olduğu için x-ışınları da aslında kızılötesi ışınlar, mor ötesi ışınlar, radyo dalgaları veya görünür ışık gibi elektromanyetik tayfin bir parçasıdır.

X ışınları çok yüksek frekanslı (dolayısıyla yüksek enerjili) ışınlar olduğu için madde ile etkileşimi de tayfin düşük enerjili bölgesinde kalan diğer tipteki ışınlardan oldukça farklıdır. Bu ışınlar maddenin içinden geçebilme özelliğine sahiptir. Bu özellik ışının taşıdığı enerjiyle doğru orantılı olarak artıp azalmaktadır. X ışınları bu kabiliyetinden dolayı tıbbi görüntüleme için oldukça değerli bir araç olmuştur.



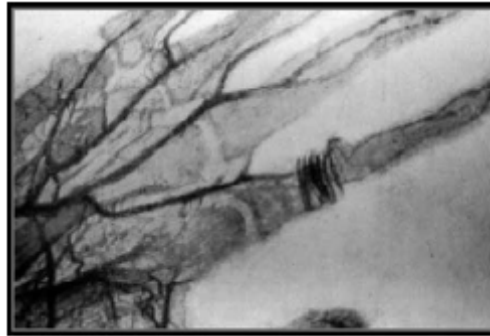
Şekil 1. Wilhelm Conrad Roentgen



Şekil 2. İlk X-ışını görüntüsü

### 1.2.1. Kalp Anjiyografisinin Gelişimi

İlk anjiyo görüntüsü Ocak 1896 yılında ölmüş bir insanın eline cıva bileşikleri enjekte edilerek alınmış görüntüdür (Şekil 3). Enjekte işlemi ve cıva bileşikleri damar yapısının belirginleştirilmesi için gerekli bir aşamadır çünkü kan veya damar çeperleri x ışınları için neredeyse saydam sayılabilecek maddelerdir. Bu nedenle hem damarın yapısını ortaya koyacak hem de x ışınlarına karşı direnç gösterecek bir madde damarın içine enjekte edilmelidir. Ancak x ışınlarına karşı oldukça başarılı bir engel olan cıva oldukça zehirli bir maddedir. Bu nedenle onun yerine günümüzde 36,5 °C de enjekte edilebilen iyodin çözeltisi kullanılmaktadır [1].



Şekil 3. İlk Anjiyo görüntüsü

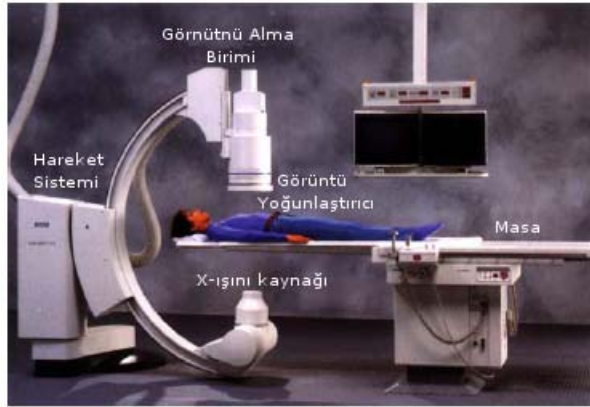
Bu tarihten çok sonra, 1929 yılında Berlin Üniversitesi Hastanesinde Werner Forssmann isimli bir öğrenci ilk kez bir sonda (kateder) kullanarak kalbe ulaşılabilirliğini ve x-ışınlarını kullanarak kalp damarlarından görüntü alınabileceğini kendi üzerinde deneyerek gösterdi. Böylece kalp anjiyografisi doğmuş oldu [1].

Günümüzün kalp-damar görüntüleme teknolojisindeki ilerlemelere rağmen anjiyografi kalp damarı hastalıkları teşhisinde bir “altın standart” olarak kalmıştır [2]. İlk yıllarda yapılan anjiyografilerden farklı olarak günümüzde oldukça küçük kesikler ile kateder başarılı bir şekilde enjekte edilebilmektedir. En önemli farklılıklar ise görüntü yoğunlaştırıcısının (*Image Intensifier*) anjiyo donanımlarına ilave edilmesi ve x-ışını üretmek için yeni tekniklerin keşfedilmesi olmuştur. Bunlar sayesinde öncekilere nazaran oldukça yüksek çözünürlükte ve netlikte görüntüler alınabilirken hastanın maruz kaldığı x-ışını miktarı da minimum seviyelere çekilmiştir.

Bugün kullanılan X-ışını görüntüleme teknikleri ile kalp damarlarının karmaşık yapısı iki boyutlu görüntüler olarak gösterilmektedir.

### 1.2.2. Kalp Anjiyografisinde Görüntü Alma Sistemi

Tipik bir kalp anjiyo görüntüleme sistemi şu elemanlardan oluşur: Bir x-ışını üretici veya kaynağı, hastanın yerleştirilebileceği bir masa, x-ışınlarını görünür ışığa çevirecek bir görüntü yoğunlaştırıcı, farklı açılardan görüntü almak için x-ışını kaynağı ve görüntü yoğunlaştırıcı çiftinin hareketine olanak veren bir sistem ve bir görüntü alma birimi. Şekil 4’te örnek bir anjiyografi sistemi gösterilmektedir.



Şekil 4. Örnek bir anjiyo cihazı

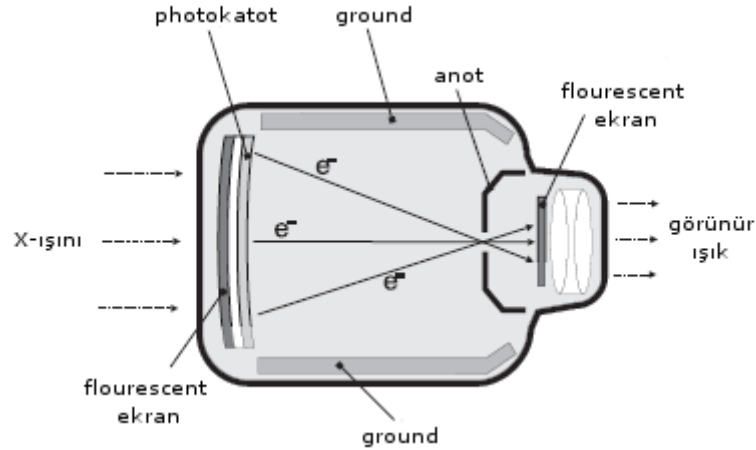


X-ışını anjiyografisinde görüntülerin hem uzamsal hem de zamansal olarak iyi bir çözünürlüğe sahip olmaları istenir. Bu gereksinimleri sağlamak amacı ile fan biçimli ışınlar kullanılmaktadır.

Görüntü alma sistemi flüoresan etki denen bir olaya dayanır. Bu etki, gelen bir ışınımı farklı frekansta bir ışınımına çevirme olarak tarif edilebilir. Bu etkiyi sağlayan fosfor elementi ile kaplanmış bir ekran, gelen x ışınlarını görünür ışığa çevirerek görüntü alma işlemini gerçekleştirir. Ancak buradaki sorun elde edilen görünür dalga boyundaki ışığın insan gözü için yeterli parlaklık düzeyine sahip olmamasıdır. Parlaklık düzeyini artırmak amacıyla ekrana gelen x-ışını miktarını artırmak insan için tehlikeli olacaktır. Bu nedenle görüntüyü daha görünür hale getirmek amacıyla görüntü yoğunlaştırıcısı geliştirilmiştir.

Şekil 5'te bir görüntü yoğunlaştırıcısı şeması verilmiştir. Şekil üzerinden de görüldüğü gibi görüntü yoğunlaştırıcısı, temel olarak havası boşaltılmış bir tüpün içinde ince saydam bir tabana tutturulmuş flüoresan giriş ekranından oluşur.

Gelen x-ışınları flüoresan ekrana çarparak görünür ışığa dönüşür. Daha sonra bu ışık *fotokatot* aracılığı ile elektronlara dönüştürülür. Bu elektronlar tüpün karşı ucuna yerleştirilmiş anot tarafından hızlandırılır ve ikinci bir flüoresan ekran üzerine yoğunlaştırılır. Elektronlar burada tekrar ışığa dönüştürülür ancak bu kez orijinalinden 10 000 kat daha parlaktırlar.



Şekil 5. Görüntü Yoğunlaştırıcısı

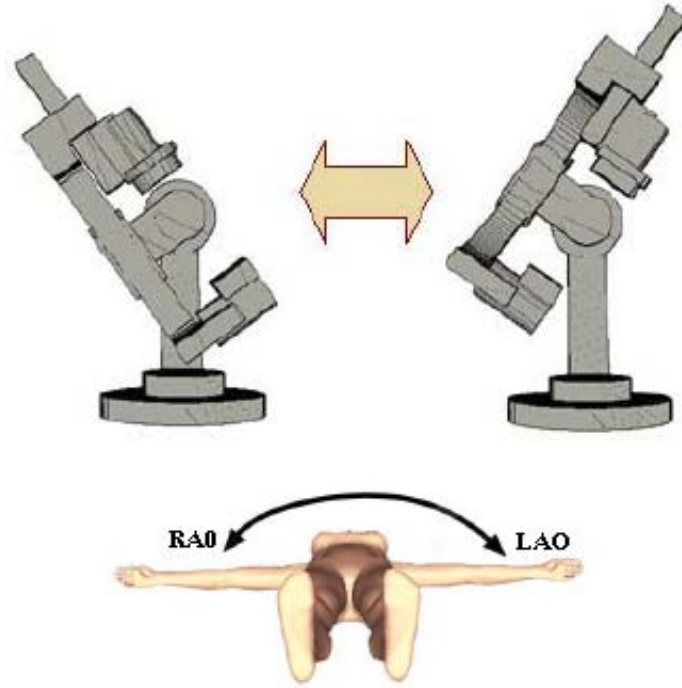
Klinik uygulamalarda genellikle görüntüleme (projeksiyon) açısının değiştirilmesi gerekir. Çünkü bir damarın tüm ayrıntılarını tek bir bakış açısından görmek mümkün olmamaktadır. Bu nedenle x-ışını cihazlarında projeksiyon açısının değiştirilebilmesine

olanak sağlayan sistemler eklenmiştir. Bu sistemler genellikle C şeklinde hareketli bir koldan oluşur. Kolun şeklinden dolayı bu tip sistemlere C-kolu Anjiyo Cihazı (*C-arm angiographer*) denilmektedir. X ışını kaynağı ve görüntü yoğunlaştırıcısı bu kolun uçlarına yerleştirilmiştir.

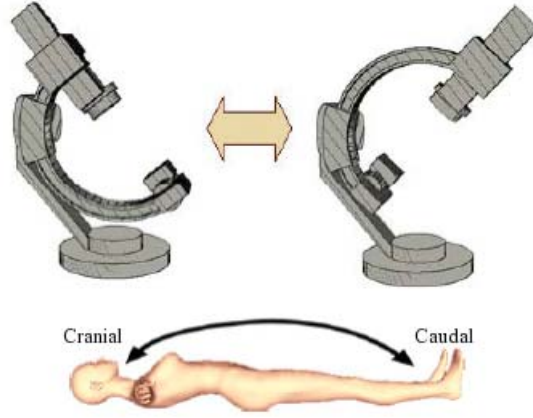
C kolları iki bağımsız şekilde dönme hareketi yapabilme kabiliyetine sahiptir. Bunlar dönme ve açısal hareket (*rotation* ve *angulation*) olarak adlandırılır. Genellikle bu anatomik açılar sırasıyla  $\alpha$  ve  $\beta$  ile temsil edilir.

Dönme ( $\alpha$ ) açısı ile, eğer  $\alpha > 0$  ise *Right Anterior Oblique* (RAO) veya  $\alpha < 0$  ise *Left Anterior Oblique* bakış doğrultularından görüntü alınır (Şekil 6).

Açısal hareket ( $\beta$ ) açısı ile de eğer  $\beta > 0$  ise *Cranial* (CRA) veya  $\beta < 0$  ise *Caudal* (CAU) bakış doğrultularından görüntü alınır (Şekil 7).



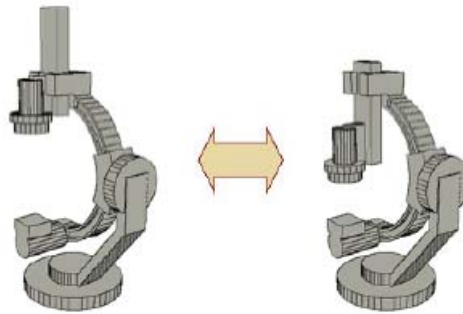
Şekil 6. Dönme açısı  $\alpha > 0$  (RAO) ve  $\alpha < 0$  (LAO) konumları



Şekil 7. Açısal hareket açısı  $\beta > 0$  (CRA) ve  $\beta < 0$  (CAU) konumları

Diğer çok bilinen bakış doğrultuları ve açıları ise şöyledir. Eğer  $\alpha=0$  ve  $\beta=0$  ise bu bakış *Anterior-Posterior* (AP) olarak adlandırılır ve kalbin önden bir görüntüsünü almak için kullanılır. Eğer  $\alpha=-90$  ve  $\beta=0$  ise bu kez *Lateral 90* olarak adlandırılır. Bu bakış ise genellikle sağ koronerden görüntü almak için kullanılır. [1]

Görüntüleme esnasında görüntü yoğunlaştırıcının (II) hastaya olan uzaklığın başka bir deyişle x-ışını kaynağı ile II arasındaki uzaklığı (SID) da değiştirmek gerekebilmektedir. II bunu sağlayacak olan bir sistem üzerinde kurulmuştur. Buna karşılık x-ışını kaynağı ile hasta arasındaki mesafe genellikle sabit kalmaktadır. Bu durumda eğer II hastadan uzaklaştırılırsa elde edilen görüntüler optik olarak büyütülmüş görüntüler olacaktır.



Şekil 8. SID değişimi

Günümüz modern anjiyografi cihazlarında farklı izdüşümü açılarından alınan görüntüler DICOM (*The Digital Imaging and Communications in Medicine*) formatında

dijital ortamda saklanmaktadır. Bu format, içerisinde resim verisi yanı sıra alınan resmin kime ait olduğu, hangi tip bir cihaz kullanıldığı, izdüşümü açıları gibi birçok bilgiyi de saklayabilmektedir. Tüm modern tıbbi görüntüleme cihazlarının desteklediği bu ortak format ile farklı görüntüleme cihazlarından alınan görüntülerin iletimi ve işlenmesi oldukça kolay bir hale gelmiştir.

### 1.3. 3 Boyutlu Görüntü Oluşturma Teknikleri

2 Boyutlu görüntülerden 3 boyutlu yapıları elde etmek için birçok yöntem geliştirilmiştir [1, 2, 3, 4]. Bunların birçoğu *biplane* anjiyo görüntüleri üzerine oluşturulmuş metotlardır. *Biplane* anjiyo görüntüleme sistemi aynı anda iki farklı açıdan görüntü almaya olanak veren iki adet x-ışını kaynağından ve iki adet görüntü yoğunlaştırıcısından oluşur. Görüntüler arasındaki açı sabit olduğu için bu görüntüler üzerinden 3 boyutlu yeniden oluşturma, tek görüntü alınan sistemlere nispeten daha kolaydır.

Bunların yanı sıra *ultrasound* gibi bazı görüntüleme sistemlerinin anjiyo görüntülemesiyle beraber kullanılmasıyla, bilinen klasik 3 boyutlu yapı oluşturma yöntemlerinden farklı metotlar da geliştirilmiştir [5]. *Ultrasound*, damar içerisinden gerçek zamanlı olarak görüntüler alarak anjiyo görüntülerine ek olarak sunar.

Tüm görüntüleme sistemlerinde sayısal analiz için damar yapısının bir şekilde çıkarılması gerekmektedir. Bu amaçla geliştirilen yöntemler oldukça geniş bir literatürü kapsar. Söz konusu çalışmaların önde gelenleri [6] 'de kategorilere ayrılarak ve karşılaştırmalı şekilde verilmiştir.

### 1.4. Kenar Belirleme Metotları

Damar görüntülerinin ilk olarak sayısal analizi, eşik alma algoritmalarına dayalı olarak yapılmıştır. Görsel tekniklere göre daha doğru sonuç vermelerine rağmen, tek eşik dayalı algoritmaların performansları, anjiyo görüntülerinde damar kalınlığının değişken olması ve arkaplanın düzgün olmaması gibi faktörlerden oldukça etkilenmektedir [7]. Ayrıca kenar üzerinde eşik değerlerinin seçilmesi de yanlış kenar kestirimine yol açmaktadır [8].

Kenar kestirim algoritmalarının çoğu türev-temelli tekniklere dayanır. Bu tekniklerde cismin kenar noktaları, cismin izdüşümünün birinci veya ikinci türevlerinin maksimumları kullanılarak elde edilir. Selzer [9,10] kenarları kestirmek için, önceden tanımlı merkez çizgilerine dik tarama çizgileri boyunca elde edilen görüntülere birinci ve ikinci türev metotlarını uyguladı.

Sanders [11], atardamar kenarlarını, kenarlara dik çizgiler boyunca birinci türevin maksimum olduğu noktalar toplamı olarak tanımladı. Birinci türev metodu kenarların gerçek değerinin altında bir değer kestirdiği [12] ve ikinci türev metodu da kenarların gerçek değerinin üstünde bir değer kestirdiği [10] için Kooijman; bu sorunu çözmek üzere bu metotların ağırlıklı ortalamasını kullanmayı denedi [13,14]. Ancak ağırlık faktörü, deneysel olarak belirlenme durumunda olup sonuçlar üzerinde büyük etkilere sahiptir.

Türev temelli metotlar, hesaplama kolaylığına rağmen tatminkâr bir performansa sahip değildirler. Bu metotlar buğulanma etkisini, arkaplan ve gürültü etkilerini de dikkate almamaktadırlar. Oysa bu bozucu kaynaklar, kestirilen kenarlarda süreksizliğe sebep olabilmektedirler. Bu sorunu çözmede; kenar kestiriminden sonra yumuşatma işlemi gibi bazı adımlar uygulanmalıdır. Türev temelli metotların diğer bir problemi; kenarlar görüntü piksellerinden daha iyi olmayan bir çözünürlükle kestirilmektedir. Bu durum çapraz-kesitin çok küçük olduğu durumlarda problem oluşturmaktadır. Üstelik herhangi bir türev temelli operatörü uygulamadan önce, gürültü etkisinden sakınmak için izdüşümü görüntüsünün, filtreleme işlemiyle düzgünleştirilmesi gerekir. Ancak bu iyileştirme de dar kesitlerde iyi bir kenar kestirimi için yeterli olmayabilmektedir.

Kenar belirlemede en iyi sonuçları parametrik modellemeye dayalı yöntemler vermiştir [15,16] . Çünkü bu yöntemler arkaplanı ve buğulama fonksiyonunu da hesaba katar. Öncelikle izdüşümü modeli elde edilir ve daha sonra herhangi bir kestirim algoritması yardımıyla modelde mevcut olan kenarla ilgili parametreler belirlenir.

Bu çalışmada kenar kestirimi için daha önce [17] de açıklanan parametrik modellemeye dayalı kenar belirleme yöntemi temel alınarak bir algoritma geliştirilmiştir. Bahsedilen çalışmada damar kenarları damar parlaklık profili için tanımlanan modeldeki parametrelerin kestirimi ile elde edilmiş ayrıca buğulanma etkisi de göz önünde tutulmuş ve parlaklık profili *gaussian* nokta dağılım fonksiyonu (*point spread function*) ile konvolüsyona tabi tutularak kestirim işlemine alınmıştır. Konvolüsyon işlemi kestirim aşamasında işlemlerin karmaşıklaşmasına neden olmaktadır. Bu nedenle tezde yapılan çalışmada buğulanma etkisi göz ardı edilmiştir. Yapılan deneysel çalışmalarda da bu

etkinin göz ardı edilmesinin kestirimin başarımı üzerinde oldukça etkisiz olduğu gözlemlenmiştir.

Kaynak [17] 'da anlatılan yöntemden diğer bir fark ise arkaplan için uydurulan modeldir. Söz konusu çalışmada ve buna benzer diğer çalışmalarda arkaplan 5. veya 3. dereceden polinomlar ile modellenmiştir. Bu tezdeki çalışmada ise arkaplan modellenmesi için kübik *smoothing spline* fonksiyonlarından yararlanılmıştır.

Lineer olmayan damar parlaklık modelinin parametreleri, *Marquardt-Levenberg* algoritması ile kestirildiği için bu algoritmaya değinmek gerekir.

### 1.5. Marquardt-Levenberg Algoritması

Bu algoritma doğrusal olmayan denklemlerin en küçük kareler yöntemine göre çözülmesinde kullanılan bir yöntemdir.  $f_i(x)=y_i-m(t_i, p)$  olmak üzere en küçük kareler yöntemi şu şekilde tanımlanır [18]:

$$x' = \arg \min_x \left\{ F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(x))^2 \right\} \quad (1)$$

Burada  $y_i$  deneysel verileri,  $m$  ise deneysel verileri temsil ettiğimiz modeli göstermektedir.  $F(x)$  fonksiyonuna ise *amaç* fonksiyonu denir. Amacımız  $F(x)$  fonksiyonunun minimum olduğu noktayı bulmaktır. Ancak bu sistemin çözümü oldukça zordur. O nedenle günümüz uygulamalarının birçoğunda bu sistemin biraz daha basit versiyonu olan yerel minimum noktasının bulunması problemi ele alınmaktadır.

$F$  fonksiyonunun türevi alınabilir ve aşağıdaki Taylor serisi açılımına müsait olacak şekilde sürekli olduğunu farz edelim;

$$F(x+h) = F(x) + h^T * g + \frac{1}{2} h^T * H * h + O(\|h\|^3) \quad (2)$$

$$g \equiv F'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$H \equiv F''(x) = \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} (x) \right] \quad (4)$$

Burada  $g$  *gradient*; ve  $H$  *Hessian* matrisleridir.

Eğer  $x^*$  bir lokal minimum noktası ise ve  $\|h\|$  yeteri kadar küçük bir değere sahipse; biz  $F$  fonksiyonunu daha küçük yapacak bir  $(x^* + h)$  noktası bulamayız. Bu da demek oluyor ki lokal minimum noktası için gerekli koşul

$$g^* \equiv F'(x^*) = 0 \quad (5)$$

olmasıdır. Ancak bu koşul tek başına yeterli değildir çünkü bu koşulu sağlayan ve durağan nokta (*stationary point*) olarak adlandırılan noktalar da mevcuttur. Bu noktaların ayrımını sağlayabilmek için denklem (2) deki Taylor açılımını ikinci terimi içerecek şekilde almalıyız.

$$F(x_s + h) = F(x_s) + h^T * g = 0 + \frac{1}{2} h^T * H_s * h + O(\|h\|^3) \quad (6)$$

Burada  $H_s = F''(x_s)$ .  $s$  alt indisi *stationary point* noktası nedeni ile kullanılmaktadır.

Tanımı dolayısı ile (4) *Hessian* matrisinin simetrik bir yapısı olduğu görülmektedir. Eğer bu matris aynı zamanda pozitif tanımlı (*positive definite*) bir matris olursa, matrisin öz değerleri  $\delta > 0$  gibi bir sayıdan büyük olacaktır [19]. Buradan yola çıkarak

$$h^T H_s h > \delta \|h\|^2 \quad (7)$$

elde edilir. Bu bize şunu göstermektedir: yeterince küçük bir  $\|h\|$  için (6) denkleminin sağ tarafında kalan 3. terimin etkisi ikinci terim tarafından bastırılacaktır. Bu terim pozitif bir terimdir böylece yerel bir minimum noktası için gerekli koşul elde edilmiş olur. Bu koşul da  $F''(x)$  matrisinin *pozitif tanımlı* olmasıdır. Eğer Bu matris negatif tanımlı ise o zaman bizim bulunduğumuz  $x$  noktası yerel bir maksimum noktasıdır.

Lokal minimum noktasını bulmak için gereken koşulları bulduktan sonra tekrar problemimize dönelim: amaç fonksiyonumuzu minimum yapmak.

$$x' = \arg \min_x \{ F(x) \}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (f_i(x))^2 = \frac{1}{2} \|f(x)\|^2 = \frac{1}{2} f(x)^T * f(x) \quad (8)$$

$f(x)$  fonksiyonu için *Taylor* açılımını yazarsak;

$$f(x+h) = f(x) + J(x) * h + O(\|h\|^2) \quad (9)$$

elde ederiz. Burada geçen  $J(x)$  fonksiyonu *Jacobian* matrisi olarak adlandırılır ve  $f(x)$  fonksiyonunun parametrelerine göre birinci türevlerini içerir.

$$(J(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad (10)$$

Buradan hareketle

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^m f_i(x) * \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \quad (11)$$

yazılabilir. Yani *gradient* matrisi

$$F'(x) = J^T(x) * f(x) \quad (12)$$

olarak yazılabilir. Aynı zamanda bize  $F$  fonksiyonunun *Hessian* matrisi de gerekiyor. *Hessian* matrisi aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$F''(x) = J^T(x)J(x) + \sum_{i=1}^m f_i(x)f''_i(x) \quad (13)$$

*Marquardt-Levenberg* metoduna geçmeden önce *Gauss-Newton* metodundan bahsetmek lazım çünkü *Marquardt-Levenberg* metodunun temelinde bu yöntem vardır.

*Gauss-Newton* metodu  $f(x)$  fonksiyonunun  $x$  civarındaki lineer bir yaklaşımını kullanır. Küçük  $\|h\|$  değerleri için  $f$  fonksiyonunu, *Taylor* açımı ile yaklaşık olarak ifade



edersek  $f(x+h) \approx \ell(h) \equiv f(x) + J(x)h$  ifadesini buluruz. Bu ifadeyi denklem (8) de yerine koyarsak

$$\begin{aligned} F(x+h) &\approx L(h) \equiv \frac{1}{2} \ell(h)^T \ell(h) \\ &= \frac{1}{2} f^T f + h^T J^T f + \frac{1}{2} h^T J^T J h \\ &= F(x) + h^T J^T f + \frac{1}{2} h^T J^T J h \end{aligned} \quad (14)$$

*Gauss-Newton* algoritmasının her bir iterasyonunda  $L(h)$  minimum yapılmaya çalışılır.

$$h_{gn} = \arg \min_h \{L(h)\} \quad (15)$$

Burada bize gereken  $L'(h)$  ve  $L''(h)$  ifadeleri ise

$$L'(h) = J^T f + J^T J h \quad (16)$$

$$L''(h) = J^T J \quad (17)$$

olur. Eğer bu denklemleri denklem (12) ile karşılaştırırsak şunu görürüz:  $L'(0) = F'(x)$ . Ayrıca  $L''(h)$  matrisi de  $h$  değerinden bağımsızdır ve simetriktir. Bununla beraber eğer  $L''(h)$  matrisi sütunları lineer bağımsız iseler  $L''(h)$  aynı zamanda pozitif tanımlı bir matris olmaktadır. Bu da bize  $L(h)$  'ı minimum yapan tek bir değer olduğunu gösterir ve bu da

$$J^T J h_{gn} = -J^T f \quad (18)$$

denkleminin çözümü ile bulunur. Bu çözüm  $F$  için azalan bir yön belirleyecektir çünkü  $h_{gn}^T F'(x) = h_{gn}^T (J^T f) = -h_{gn}^T (J^T J) h_{gn} < 0$ .  $x$  vektörünü (18) denkleminde elde edilen değerler ile güncellersek  $F(x)$  fonksiyonu için minimuma doğru bir adım atmış oluruz. *Marquardt-Levenberg* metodunda ise (18) denklemi şu şekilde modifiye edilir.

$$(J^T J + \mu I) h_{lm} = -J^T f \quad , \quad \mu \geq 0 \quad (19)$$

Burada kullanılan  $\mu$  katsayısı çeşitli etkilere sahiptir.

- Tüm  $\mu > 0$  değerleri için, katsayı matrisi pozitif tanımlı olur ve bu da  $h_{lm}$  değerinin azalan yönde olduğunu garantiler.
- Çok büyük  $\mu$  değerleri için  $h_{lm}$  ifadesi  $h_{lm} \approx -\frac{1}{\mu}g = -\frac{1}{\mu}F'(x)$  olur. Bu da minimum noktasından uzakta olduğumuz durumlarda küçük adımlarla azalma yönüne doğru yaklaşmayı diğer bir deyişle büyük adımlar ile minimum noktasını kaçırmaktan kurtulmayı sağlamaktadır.
- Eğer  $\mu$  değeri çok küçük ise ( $h_{lm} \cong h_{gn}$ ) bu da minimum noktasına yakın olduğumuz durumlarda minimuma doğru hızlı bir biçimde yaklaşmayı sağlar. Böylece iterasyon sayısı azalır.

Buradaki  $\mu$  değerinin seçimi

$$A_0 = J(x_0)^T J(x_0) \quad (20)$$

ifadesindeki elemanlar ile ilişkili olmalıdır ve bu ilişki şu şekilde kurulur:

$$\mu_0 = \tau * \max_i \{a^{(0)}_{ii}\} \quad (21)$$

Buradaki  $\tau$  katsayısı kullanıcı tarafından belirlenir. Döngü esnasında  $\mu$  değerinin güncellenmesi gerekir ve bu güncelleme aşağıdaki şekilde gerçekleştirilir [19].

*if*  $\rho > 0$

$$\mu = \mu * \max\{1/3, (2*\rho-1)^3\}; \quad v=2$$

*else*

$$\mu = \mu * v; \quad v=2*v;$$

*end*

Buradaki  $v$  değeri başlangıçta 2 olarak atanır. Ayrıca  $\rho$  katsayısı ise *kazanç katsayısı* olarak adlandırılır ve şu formülle hesaplanır:

$$\rho = \frac{F(x) - F(x + h_{lm})}{L(0) - L(h_{lm})} \quad (22)$$

Bu ifadenin paydasında yer alan kısım lineer model tarafından öngörülen kazançtır ve aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
L(0) - L(h_{lm}) &= -h_{lm}^T J^T f - \frac{1}{2} h_{lm}^T J^T J h_{lm} \\
&= -\frac{1}{2} h_{lm}^T (2 * J^T f + (J^T J + \mu I - \mu I) h_{lm}) \\
&= \frac{1}{2} h_{lm}^T (\mu h_{lm} - J^T f)
\end{aligned} \tag{23}$$

Büyük bir  $\rho$  değeri bize  $L(h_{lm})$  değerinin  $F(x+h_{lm})$  için iyi bir yaklaşım olduğunu ve  $\mu$  değerini küçültebileceğimizi belirtir.

Algoritmayı sonlandırmak için lokal bir minimum noktasına ulaştığımızı anlamamız gerekir. Bunu anlamak için şu ölçütler kullanılabilir.

- $\|J^T f\| \leq \varepsilon_1$  ; buradaki  $\varepsilon$  değeri çok küçük bir sayıyı temsil eder ve kullanıcı tarafından atanır.
- Eğer  $x$  vektöründeki değişim belli bir sayıdan küçük ise ( $\varepsilon_2$ ) döngü durdurulabilir  $\|x_{new} - x\| \leq \varepsilon_2 (\|x\| + \varepsilon_2)$
- Son olarak eğer belli bir sayıda döngü sonucunda minimum noktasına ulaşılamazsa algoritma durdurulur.

Kenar kestirimi ile elde edilen bilgiler resimdeki gürültü seviyesine bağlı olarak bir miktar gürültülü çıkmaktadır. Ayrıca herhangi bir profil için kestirim işleminden sağlıklı bir sonuç elde edilememiş olabilir. Bu nedenle kestirilen kenarlar üzerinde *smoothing spline* interpolasyonu işlemi uygulanır. Böylece hem gürültü azaltılmış olur hem de yanlış kestirim sonucu oluşan kenar parametrelerindeki hata miktarı azaltılmış olur.

## 1.6. Kübik Smoothing Spline ile Veri İnterpolasyonu

*Spline* fonksiyonu, birleşim noktalarındaki süreklilik gibi bazı kısıtlara bağlı olarak tanımlanmış polinom parçalarından oluşturulmuş bir eğridir [20]. Genellikle endüstriyel tasarım uygulamalarında kullanılmasından dolayı bu fonksiyonların geliştirilmesi için oldukça önemli bir çaba harcanmıştır. Diğer bir önemli uygulama alanı ise, özellikle istatistiksel uygulamalarda, verilere eğri uydurmak olmuştur. Buna karşılık *spline* fonksiyonları için çalışan bir algoritma ancak 60'lı yılların sonlarına doğru geliştirilebilmiştir.

Kübik *smoothing spline* fonksiyonları, sıradan bir kübik *spline* ile interpolasyon uygulamasının genelleştirilmiş halidir. Bu nedenle öncelikle *kübük spline* ile veri interpolasyonuna değinmek gerekir.

### 1.6.1. Kübik Spline İnterpolasyonu

$y = y(x)$  gibi bir fonksiyona ait  $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  gibi bir koordinat kümesinin verildiğini varsayalım. Amacımız  $(x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1})$  şeklindeki ardışık noktaları birbirine kübik fonksiyonları  $(S_i; i=0 \dots n-1)$  kullanarak bağlanmak olacaktır. Öyle ki bu fonksiyonlar bir araya geldiklerinde bir eğri oluşturacak ve sürekli birinci ve ikinci türevlere sahip olacaktır. *Kübik spline* olarak adlandırılan bu fonksiyonların birleşim noktalarına *knot* ya da *node* denmektedir [20].

$S_i$  fonksiyonu şu şekilde tanımlanabilir;

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad (24)$$

Burada  $x, x_i$  ile  $x_{i+1}$  arasında değişmektedir. Bu fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri ise

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \\ S''(x) &= 6a_i(x - x_i) + 2b_i \end{aligned} \quad (25)$$

$i=1 \dots n$  olmak üzere ardışık  $S_{i-1}$  ve  $S_i$  fonksiyonlarının  $(x_i, y_i)$  noktasında birleşmesi koşulu aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = y_i \quad (26)$$

ya da

$$a_{i-1}h^3_{i-1} + b_{i-1}h^2_{i-1} + c_{i-1}h_{i-1} + d_{i-1} = d_i = y_i \quad (27)$$

Burada  $h_i = x_i - x_{i-1}$  ile tanımlanır.

Birleşim noktalarındaki birinci türevlerin eşitliği koşulunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$S'_{i-1}(x_i) = S'(x_i) \quad (28)$$

ya da

$$3a_{i-1}h^2_{i-1} + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} = c_i \quad (29)$$

ve ikinci türevlerin yine birleşim noktalarında eşit olması koşulu da

$$S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i) \quad (30)$$

ya da

$$6a_{i-1}h_{i-1} + 2b_{i-1} = 2b_i \quad (31)$$

Aynı zamanda  $(x_0, y_0)$  ve  $(x_n, y_n)$  noktalarının durumlarını da belirlemek gerekmektedir. Kübik fonksiyonların bu noktadaki birinci türevleri ilgili fonksiyon olan  $y = y(x)$  fonksiyonunun türevlerine eşitlenebilir, şöyle ki;

$$S'_0(x_0) = c_0 = y'(x_0) \quad \text{ve} \quad S'_{n-1}(x_n) = c_n = y'(x_n) \quad (32)$$

Bu işlem kasma (*clamping*) olarak adlandırılır ve  $y = y(x)$  fonksiyonu hakkında ekstra bilgi sağladığı için daha iyi bir yaklaşımı mümkün kılar. Bununla beraber bu bilgi fonksiyonun uç noktalarına yakın kısımlara nokta ekleme ile de elde edilebilir.

Eğer uç noktaların serbest bırakıldığı düşünülürse

$$S''_0(x_0) = 2b_0 = 0 \quad \text{ve} \quad S''_{n-1}(x_n) = 2b_n = 0 \quad (33)$$

şeklinde hesaplanır. Bu da *spline* fonksiyonunun uç noktalardan geçerken lineer olarak davranması anlamına gelir.

Öncelikle doğal *spline* olarak da adlandırılan ve uç noktaların serbest bırakıldığı durumu inceleyerek *spline* parametrelerini elde etmeye başlayalım.

$b_0$  ve  $b_n$  parametreleri bilindiğine göre geriye kalan ikinci derece parametreleri olan  $b_1, \dots, b_{n-1}$  belirlememiz gerekir. Aşağıdaki dört durumu inceleyelim:

1.  $S_i(x_i) = y_i$
2.  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$

$$3. S''_i(x_i) = 2b_i$$

$$4. S''_{i+1}(x_{i+1}) = 2b_{i+1}$$

Bu durumlardan ilki bize

$$d_i = y_i \quad (34)$$

olduğunu gösterir. İkinci durum ise  $a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = y_{i+1}$  ve buradan da  $c_i$ 'yi çekersek

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - a_i h_i^2 - b_i h_i \quad (35)$$

Dördüncü durum da  $6a_i h_i + 2b_i = 2b_{i+1}$  eşitliğini belirler ve bu da bize

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{3h_i} \quad (36)$$

denklemini verir. Bu eşitliği (35) numaralı denklemde yerine koyarsak

$$c_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{1}{3}(b_{i+1} + 2b_i)h_i \quad (37)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece  $i$ . parçaya ait parametreleri ikinci derece parametreleri  $b_i$ 'ler ve veri değerleri  $y_i$ 'ler cinsinden ifade etmiş oluruz.

Birinci türevlerin uç noktalarındaki eşitliği koşulunu denklem (36) ve (37) yardımı ile tekrar yazarsak

$$b_{i-1}h_{i-1} + 2b_i(h_{i-1} + h_i) + b_{i+1}h_i = \frac{3}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \quad (38)$$

elde edilir.

$i = 1 \dots n-1$  ve  $b_0 = b_n = 0$  olduğunu göz önünde bulundurursak aşağıdaki  $n-1$  adet denklemden oluşan *tridiagonal* sistemi elde ederiz.

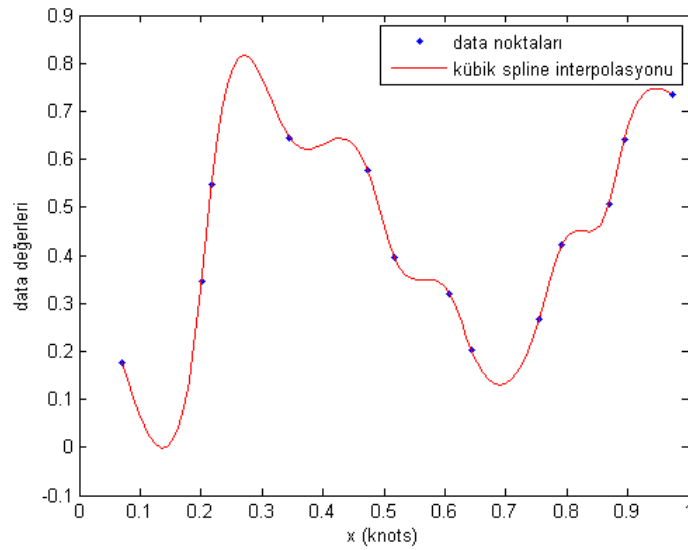
$$\begin{bmatrix} p_1 & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & p_2 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Burada  $p_i$  ve  $q_i$  aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\begin{aligned} p_i &= 2(h_{i-1} + h_i) = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) \\ q_i &= \frac{3}{h_i}(y_{i+1} - y_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) \end{aligned} \quad (40)$$

Bu sistemden  $b_i$ 'ler çözüldükten sonra  $a_i : i=0 \dots n-1$  değerleri denklem (36) den elde edilebilir.  $c_0$  değeri ise denklem (37) den elde edildikten sonra geriye kalan  $c$  değerleri yinelemeli olarak aşağıdaki denklemden elde edilebilir.

$$c_i = (b_i + b_{i-1})h_{i-1} + c_{i-1} \quad (41)$$



Şekil 9. Kübik *spline* interpolasyonuna bir örnek

Şimdi *spline* fonksiyonumuzun uç noktalarının da türevlerinin bilindiğini durum olan *clamping spline* durumunu göz önüne alalım. Bu durumda biz  $c_0$  ve  $c_n$  değerlerini biliyoruz ve geriye kalan  $c$  değerlerini data noktaları  $y_0, \dots, y_n$  ve süreklilik şartından yararlanarak bulabiliriz. Bu nedenle aşağıdaki dört durumu inceleyelim.

1.  $S_i(x_i) = y_i$
2.  $S_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
3.  $S'(x_i) = c_i$
4.  $S'(x_{i+1}) = c_{i+1}$

Birinci ve ikinci durumlar *natural spline* ile aynıdır ve denklem (35)' u sağlarlar. Üçüncü koşul yine bir özdeşliktir. Dördüncü ise aşağıdaki denklemi verir.

$$c_{i+1} = 3a_i h_i^2 + 2b_i h_i + c_i \quad (42)$$

Denklem (35) ve (42) ortak olarak çözümlerse

$$a_i = \frac{1}{h_i^2}(c_i + c_{i+1}) + \frac{2}{h_i^3}(y_i - y_{i+1}) \quad (43)$$

$$b_i = \frac{3}{h_i^2}(y_{i+1} - y_i) - \frac{1}{h_i}(c_{i+1} + 2c_i) \quad (44)$$

elde edilir.

Birleşim noktalarındaki ikinci türevlerin sürekliliği koşulunu denklem (43) ve (44) yardımıyla tekrar yazarsak;

$$\frac{c_{i-1}}{h_{i-1}} + 2\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)c_i + \frac{c_{i+1}}{h_i} = \frac{3}{h_{i-1}^2}(y_i - y_{i-1}) + \frac{3}{h_i^2}(y_{i+1} - y_i) \quad (45)$$

bulunur. Bu ifade de denklem (38)'e benzer bir ifadedir ve aşağıdaki *tridiagonal* denklem sistemini verir.



$$\begin{bmatrix} f_1 & h_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1^{-1} & f_2 & h_2^{-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2^{-1} & f_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-2} & h_{n-2}^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2}^{-1} & f_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 - c_0 h_0^{-1} \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_{n-2} \\ g_{n-1} - c_n h_{n-1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Burada

$$\begin{aligned} f_i &= 2(h_{i-1}^{-1} - h_i^{-1}) \\ g_i &= \frac{3}{h_{i-1}^2}(y_i - y_{i-1}) + \frac{3}{h_i^2}(y_{i+1} - y_i) \end{aligned} \quad (47)$$

Öncelikle (46) numaralı denklemden  $c$  değerleri çözülür. Daha sonra denklem (43) kullanılarak  $a$  değerleri elde edilir. Denklem (44) yardımıyla  $b_0$  değerini bulduktan sonra kalan  $b$  değerleri de aşağıdaki denklem yardımıyla yine yinelemeli olarak bulunabilir.

$$b_i = b_{i-1} + 3a_{i-1}h_{i-1} \quad (48)$$

*Clamping spline* hesaplamasının alternatif bir yöntemi de (39)'daki denklemler sisteminin uç noktadaki birinci türevleri de içerecek biçimde genişletilmesiyle gerçekleştirilir.

$x_0$  noktasındaki türev değeri *spline* parametrelerini aşağıdaki denklem üzerinden etkilemektedir:

$$y'_0 = c_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{1}{3}(b_1 + 2b_0)h_0 \quad (49)$$

Bu denklem (32)'deki şart ile (37) no.lu denklemden elde edilebilmektedir.

Eğer biz  $p_0$  ve  $q_0$  değerlerini

$$p_0 = 2h_0 \quad \text{ve} \quad q_0 = \frac{3}{h_0}(y_1 - y_0) - 3y'_0 \quad (50)$$

şeklinde tanımlarsak denklem (49) şu şekilde yazılabilir.

$$p_0 b_0 + h_0 b_1 = q_0 \quad (51)$$

Benzer şekilde  $x_n$  noktasındaki türev değerinin de *spline* fonksiyonu parametrelerine olan etkisi aşağıdaki denklem üzerinden olur:

$$y'_n = c_n = 3a_{n-1}h_{n-1}^2 + 2b_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1} \quad (52)$$

Bu denklem (32) ve (28) no.lu şartların birleşiminden çıkarılmıştır. (36) ve (37) yi kullanarak bu denklemi yeniden yazarsak

$$y'_n - \frac{(y_n - y_{n-1})}{h_{n-1}} = \frac{2}{3}b_n h_{n-1} + \frac{1}{3}b_{n-1}h_{n-1} \quad (53)$$

$$p_n = 2h_n \quad \text{ve} \quad q_n = 3y'_n - \frac{3}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1}) \quad (54)$$

olmak üzere yukarıdaki denklemi şu şekilde yazabiliriz:

$$h_{n-1}b_{n-1} + p_n b_n = q_n \quad (55)$$

Böylece genişletilmiş denklemler sistemini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{bmatrix} p_0 & h_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_0 & p_1 & h_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & p_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-1} & h_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-1} & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-1} \\ q_n \end{bmatrix} \quad (56)$$

### 1.6.2. Kübik Smoothing Spline

$f(x)$  iki boyutlu bir uzayda  $[x_0, x_n]$  aralığında tanımlı ve sürekli ikinci türe ve sahip herhangi bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun *squared normu* ile sağlanan eğrilik (*curvature*) ölçüsü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\|f\|^2 = \int_{x_0}^{x_n} \{f''(x)\}^2 dx \quad (57)$$

Bu eşitlik ideal *curvature* tanımı olan  $\{f''(x)\}^2$  ifadesinin, eğrinin izlediği yol boyunca alınan çizgisel integralinin bir yaklaşımıdır. *Curvature* aynı zamanda eğrinin potansiyel enerjisi olarak da adlandırılmaktadır.

Buradaki amacımız  $(x_i, y_i)$ ,  $i=0\dots n$  noktalarından geçen tüm fonksiyonlar arasında *squared norm* değerini minimum yapan fonksiyonun *spline* fonksiyonu olduğunu göstermektir.

*Spline* fonksiyonu  $x \in [x_0, x_n]$  olmak üzere  $S(x)$  ile gösterilsin ve  $i$ . parça aşağıdaki gibi ifade edilsin.

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (58)$$

Bu fonksiyonun türevleri

$$\begin{aligned} S'_i(x) &= 3a_i(x - x_i)^2 + 2b_i(x - x_i) + c_i \\ S''_i(x) &= 6a_i(x - x_i) + 2b_i \\ S'''_i(x) &= 6a_i \end{aligned} \quad (59)$$

olur. Kübik *spline* fonksiyonunun minimum norm özelliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\|f - S\|^2 = \|f\|^2 - \|S\|^2 - 2[S''(x)\{f'(x) - S'(x)\}]_{x_0}^{x_n} \quad (60)$$

Bu ifadenin ispatı kaynak [20] sayfa 16'ta bulunabilir.

Şimdi *doğal spline* fonksiyonunu göz önüne alırsak ki bu durumda fonksiyon  $S''(x_0)=0$  ve  $S''(x_n)=0$  koşullarını sağlamaktadır ve yukarıdaki denklemde yerine koyarsak

$$\|f - S\|^2 = \|f\|^2 - \|S\|^2 \quad (61)$$

elde ederiz. Bu da bize  $\|f\|^2 \geq \|S\|^2$  olduğunu gösterir. Aynı şekilde *clamping spline* fonksiyonu da (61) eşitliğine indirgenebilir.

Şimdi elimizdeki verilerin aşağıdaki fonksiyon ile verilmiş olduğunu düşünelim.

$$y_i = f(x_i) + \eta_i \quad (62)$$

Buradaki  $\eta_i, i = 0 \dots n$  değerleri, bağımsız olarak dağıtılmış standart sapmaları  $\sigma$  olan rastlantısal değerler olsun.  $f(x)$  fonksiyonunu, aşağıdaki değeri minimum yapacak şekilde  $S(x)$  *spline* fonksiyonlarını kullanarak tekrar oluşturalım.

$$L = \mu \sum_{i=0}^n \left( \frac{y_i - S_i}{\sigma_i} \right)^2 + (1 - \mu) \int_{x_0}^{x_n} \{S''(x)\}^2 dx \quad (63)$$

Yukarıdaki ifadede yer alan  $\mu$  değeri  $[0, 1]$  arasında değişen bir sabittir ve oluşturulan *spline* fonksiyonunun gerçek değerlere ne kadar yakın ya da ne kadar uzak olacağını belirler. Eğer  $\mu$  değeri 0 seçilirse, *spline* fonksiyonu  $S(x)$  düz bir çizgi olacaktır. Diğer taraftan eğer  $\mu = 1$  seçilirse bu durumda *spline* fonksiyonu tam olarak veri noktalarından geçen sıradan bir *spline* olacaktır.

*Spline* fonksiyonunun parçalı tanımından dolayı (63) numaralı denklemin sağ tarafındaki ikinci terim olan integral şu şekilde yazılabilir.

$$\int_{x_0}^{x_n} \{S_i''(x)\}^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \{S_i''(x)\}^2 dx \quad (64)$$

*Spline* fonksiyonu kübik parçalardan oluştuğu için herhangi bir  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığındaki ikinci türev  $2b_i$  'den  $2b_{i+1}$  'e kadar değişir. Bu nedenle

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \{S_i''(x)\}^2 dx = 4 \int_0^{h_i} \left\{ b_i \left(1 - \frac{x}{h_i}\right) + b_{i+1} \frac{x}{h_i} \right\}^2 dx = \frac{4h_i}{3} (b_i^2 + b_i b_{i+1} + b_{i+1}^2) \quad (65)$$

Şimdi kriter fonksiyonumuzu tekrar yazarsak

$$L = \sum_{i=0}^n \left( \frac{y_i - d_i}{\sigma_i} \right)^2 + 2\lambda \sum_{i=0}^{n-1} h_i (b_i^2 + b_i b_{i+1} + b_{i+1}^2) \quad (66)$$

elde ederiz. Burada  $d_i = S_i(x_i)$  ve  $\lambda = 2(1 - \mu)/3\mu$  dür.

Doğal *spline* fonksiyonlarını göz önünde bulundurursak, sıradan bir *spline* fonksiyonu ile *smoothing spline* fonksiyonu arasındaki fark  $d_i$  değerlerini belirlemek

olacaktır. Normal bir *spline* fonksiyonunda bu değerler veri değerleri olan  $y_i$  'ler ile aynı değere sahiptir.

$(x_i, d_i), (x_{i+1}, d_{i+1})$  noktaları arasında yer alan  $i$  sıralı kübik parçayı ele alalım. Bu parça için aşağıdaki şu dört durum geçerlidir:

1.  $S_i(x_i) = d_i$
2.  $S_i(x_{i+1}) = d_{i+1}$
3.  $S''_i(x_i) = 2b_i$
4.  $S''_i(x_{i+1}) = 2b_{i+1}$

1 numaralı durum bir özdeşlik olarak değerlendirilebilir. İkinci ise şu denklemi belirler:  $a_i h_i^3 + b_i h_i^2 + c_i h_i + d_i = d_{i+1}$  ve buradan da  $c_i$  değerini çekersek

$$c_i = \frac{d_{i+1} - d_i}{h_i} - a_i h_i^2 - b_i h_i \quad (67)$$

elde ederiz. 3 numaralı durum da yine bir özdeşliktir. Dört numaralı durum ise bize  $2b_{i+1} = 6a_i h_i + 2b_i$  denklemini verir ve buradan da  $a_i$  değerini çekersek

$$a_i = \frac{b_{i+1} - b_i}{3h_i} \quad (68)$$

elde edilir. Bulduğumuz bu sonucu (67) de yerine koyarsak

$$c_i = \frac{d_{i+1} - d_i}{h_i} - \frac{1}{3}(b_{i+1} + 2b_i)h_i \quad (69)$$

denklemine ulaşırız. Böylelikle  $a$  ve  $c$  değerleri için  $b$  ve  $d$  değerlerine bağlı eşitlikler elde etmiş olduk. Geri kalan diğer parametreleri belirlemek için ise birinci türevin sürekliliği koşulunu kullanabiliriz. Bu koşul bize  $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$  olduğunu söyler, buradan da

$$3a_{i-1}h_{i-1}^2 + 2b_{i-1}h_{i-1} + c_{i-1} = c_i \quad (70)$$

elde edilebilir. Bu denklemde daha önce elde ettiğimiz  $a_{i-1}$  ve  $c_{i-1}$  değerlerini yerine koyarsak aşağıdaki denkleme ulaşırız:

$$b_{i-1}h_{i-1} + 2b_i(h_{i-1} + h_i) + b_{i+1}h_i = \frac{3}{h_i}(d_{i+1} - d_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(d_i - d_{i-1}) \quad (71)$$

Bu denkleme  $i=1\dots n-1$  olarak yerleştirirsek ve  $b_0 = b_n = 0$  olan uç noktaları koşulunu yerine koyarsak aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz.

$$\begin{bmatrix} p_1 & h_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ h_1 & p_2 & h_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & p_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{n-2} & h_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & h_{n-2} & p_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_0 & f_1 & r_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & r_1 & f_2 & r_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & r_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & f_{n-1} & r_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$p_i = 2(h_{i-1} + h_i), \quad r_i = \frac{3}{h_i}, \quad f_i = -\left(\frac{3}{h_{i-1}} + \frac{3}{h_i}\right) = -(r_{i-1} + r_i) \quad (73)$$

Yukarıdaki denklem sistemini kısaca ifade etmek gerekirse

$$Rb = Q'd \quad (74)$$

Bu gösterimi kullanarak kriter fonksiyonumuzu tekrar yazalım:

$$L = \lambda(y-d)' \Sigma^{-1}(y-d) + \frac{2}{3}(1-\lambda)b'Rb, \quad \Sigma = \text{diag}\{\sigma_0, \dots, \sigma_n\} \quad (75)$$

$b = R^{-1}Q'd$  ifadesini kullanarak kriter fonksiyonumuzu tamamen *knot* değerlerini içeren  $d$  vektörü ile ifade edebiliriz.

$$L(d) = \lambda(y-d)' \Sigma^{-1}(y-d) + \frac{2}{3}(1-\lambda)d'QR^{-1}Q'd \quad (76)$$

$d$  vektörünün en uygun değeri  $L(d)$  fonksiyonunun minimum olduğu noktada bulunur. Bu nedenle  $L$  fonksiyonunun  $d'$ ye göre türevini alırsak ve sonucu sifıra eşitlersek:

$$\begin{aligned}
-2\lambda(y-d)'\Sigma^{-1} + \frac{4}{3}(1-\lambda)d'QR^{-1}Q' &= 0 \\
\lambda\Sigma^{-1}(y-d) &= \frac{2}{3}(1-\lambda)QR^{-1}Q'd = \frac{2}{3}(1-\lambda)Qb
\end{aligned} \tag{77}$$

Eşitliğin her iki tarafını  $\lambda^{-1}Q'\Sigma$  ile çarparak ve  $Rb = Q'd$  ifadesinin de yardımıyla

$$(\mu Q'\Sigma Q + R)b = Q'y, \quad \mu = 2(1-\lambda)/3\lambda \tag{78}$$

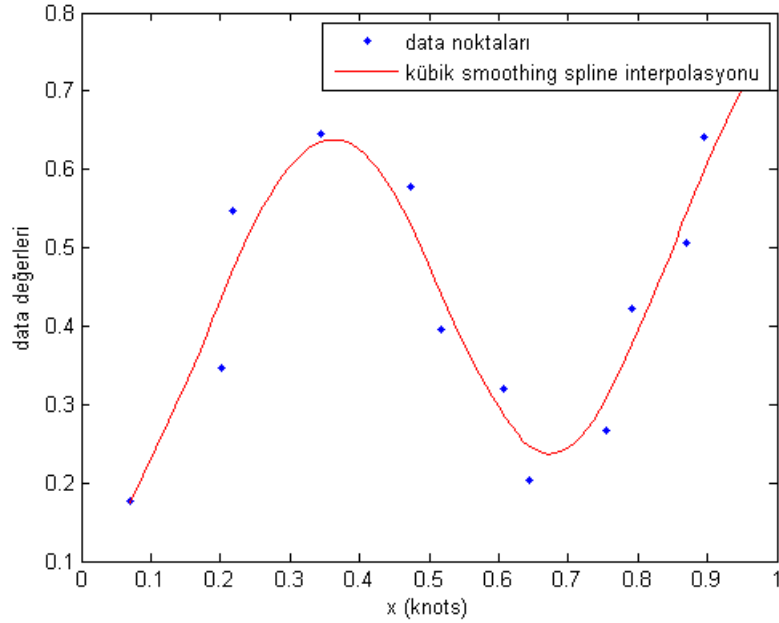
elde ederiz. Eğer bu denklemi  $b$  için çözersek,  $d$  değerlerini de denklem (79) yardımıyla elde edebiliriz.

$$d = y - \mu\Sigma Qb \tag{79}$$

Son olarak kriter fonksiyonumuzun değeri

$$L = (y-d)'\Sigma^{-1}(y-d) = \mu^2 b'Q'\Sigma Qb \tag{80}$$

olur.

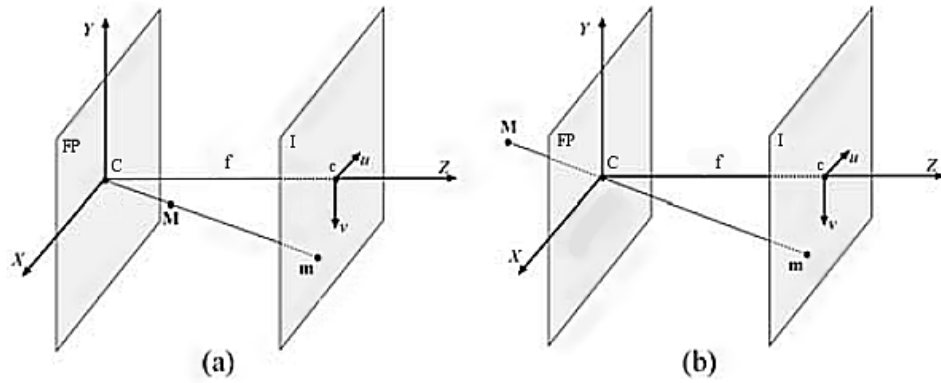


Şekil 10. Kübik *smoothing spline* interpolasyonu ( $\lambda=0.9999$ )

### 1.7. Anjiyo Görüntüleme Sisteminin Modellenmesi ve 3B Görüntü Oluşturma

İki boyutlu izdüşümlerden 3 boyutlu yapıyı oluşturabilmek için öncelikle izdüşümü geometrisinin bilinmesi gerekmektedir.

Bilgisayarlı görme uygulamalarında kullanılan kamera modeli ile anjiyografi görüntü alma sistemleri birbirine oldukça benzer.[1] Bilinen kamera (*pinhole camera*) modelinde odak düzlemi (FP) olarak adlandırılan düzlem görüntü düzleminin (I) önüne yerleştirilmiştir. FP ile I arasındaki uzaklığa ( $f$ ) da odak uzaklığı denir.



Şekil 11. (a) Anjiyografi görüntü alma modeli ve (b) kamera modeli

C noktasının optik merkez noktası olduğunu düşünürsek, optik eksen C noktasından geçen ve FP düzlemine dik olacak olan doğru olur. Optik eksen I düzlemini c noktasında keser ve bu noktaya *principle point* adı verilir. Geometrik olarak her iki izdüşümü tipi de perspektif izdüşümdür. Aralarındaki temel fark ise x-ışını görüntülerinin kamera görüntülerinden farklı olarak ters çevrilmemiş ve büyütülmüş olmalarıdır.

Transformasyon için ilk olarak 3 boyutlu (3B) dünya koordinatlarından ( $[X \ Y \ Z]^T$ ) 3B kamera koordinatlarına ( $[X_w \ Y_w \ Z_w \ 1]^T$ ) geçişi sağlayan doğrusal bir dönüşüm tanımlanır.

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [R \ t] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (81)$$



Burada  $R$  3x3 boyutlarında bir dönme matrisi ve  $t$  ise yer değiştirme vektörü olarak adlandırılır.  $R, t$  ikilisi *extrinsic* parametreleri içerirler. Bu parametreler görüntüleme sisteminin oryantasyon ( $R$ ) ve konum ( $t$ ) parametreleridir. [21]

İkinci olarak perspektif projeksiyon dönüşümü uygulanır. Bu dönüşüm aşağıdaki denklem sisteminde verilmiştir,

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ S \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}, \quad u = U/S, v = V/S, S \neq 0 \quad (82)$$

ve bu denklemdeki  $A$  matrisi de *intrinsic* parametreler olarak adlandırılan parametreleri içerir. *Intrinsic* parametreler x-ışını kaynağından  $I$  üzerine izdüşümü oluşturmak için gereken parametreleri tanımlar. Bu parametrelerin standart bir gösterimi ise şu şekilde verilir.[21]

$$A = \begin{bmatrix} f & 0 & u0 \\ 0 & f & v0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (83)$$

Bu gösterimde yer alan *intrinsic* parametrelerden  $f$  daha önce odak uzaklığı olarak adlandırılmıştı.  $u0$  ve  $v0$  ifadeleri de *principle point* ifadesinin piksel olarak koordinatlarıdır.

Denklem (81) ve (82) den aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ S \end{bmatrix} = A * [R \quad t] * \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u = U/S, v = V/S, S \neq 0 \quad (84)$$

*Extrinsic* parametreler bilinen bir referans pozisyonuna göre kolayca hesaplanabilir [21]. Bu parametreleri hesaplamak için anjiyo cihazının hareketi  $\alpha$  ve  $\beta$  açılara göre modellenmiştir [22]. Bu modele göre sabit dönme eksenini hastanın bulunduğu masaya göre yatay konumda ve masa boyunca uzanmıştır. Bu eksenin izdüşümü görüntülerde her zaman dik durumdadır. Diğer bir ifadeyle bu eksen izdüşümü görüntüsünde  $y$  eksenine paraleldir.

Bu eksen görüntü düzleminde  $v$  ile temsil edelim.  $v$  eksenine dik durumda olan eksene ise  $u$  eksenini

$$u = [0 \quad -\cos(\alpha) \quad \sin(\alpha)]^T \quad (85)$$

ile ifade edebiliriz. Görüntü düzlemine dik vektörü (bakış doğrultusu)  $w$  ile gösterelim. Bu vektör ise

$$w = [\sin(\beta) \quad \sin(\alpha)\cos(\beta) \quad \cos(\alpha)\cos(\beta)]^T \quad (86)$$

şeklinde hesaplanabilir. Lokal referans sistemi sol el kurallı bir sistem olarak seçildiği için  $v$  vektörünü

$$v = w \times u \quad (87)$$

$$v = [\cos(\beta) \quad -\sin(\alpha)\sin(\beta) \quad -\cos(\alpha)\sin(\beta)]^T \quad (88)$$

şeklinde elde ederiz. Denklem (85), (86) ve (88) den

$$R = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) \\ -\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (89)$$

ve

$$t = [0 \quad 0 \quad \|OID\|]^T \quad (90)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada  $OID$  dönme eksenleri merkezinin II 'a olan uzaklığını ifade eder.

Denklem (84) teki izdüşümü matrisi parametrelerini belirledikten sonra damar iskeletini oluşturmak için gerekli tüm parametreler belirlenmiş durumdadır. Denklem (84)'ü üç farklı görüntü için de yazarsak

$$\begin{bmatrix} ui \\ vi \\ 1 \end{bmatrix} = A_i * [R_i \quad t_i]^* \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}, i=1,2,3 \quad (91)$$

elde ederiz. Burada  $A_i * [R_i \quad t_i]$  matrisini  $M_i$  ile,  $[ui \quad vi \quad 1]^T$  matrisini  $p_i$  ile ve  $[X_w \quad Y_w \quad Z_w \quad 1]^T$  matrisini de  $cc$  ile temsil edelim.

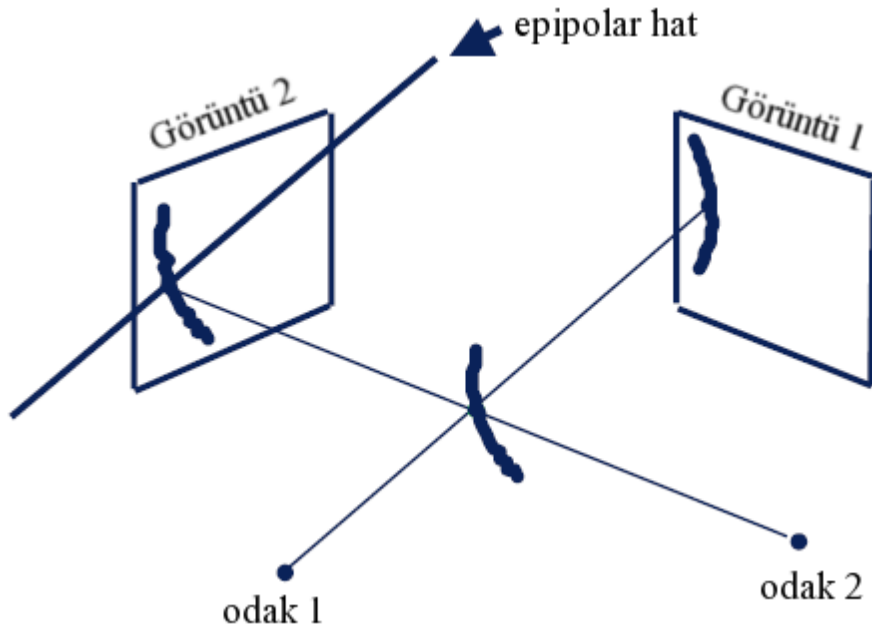
$$p_i = M_i cc \quad (92)$$

Bu denklem takımının en küçük kareler yöntemine göre çözümü ile

$$cc = (M_i^T M_i)^{-1} M_i^T p_i \quad (93)$$

ifadesine ulaşırız. Ancak buradaki sorunumuz hangi  $p_i$  noktalarını işleme almamız gerektiği yani nokta ilişkilendirmesi işlemidir (*point correspondness*).

2B noktaların birbirleri ile olan ilişkisini ortaya çıkarmak için *epipolar* geometriye dayalı ve *Dumay* [23] tarafından tanımlanan çeşitli yöntemler geliştirilmiştir.

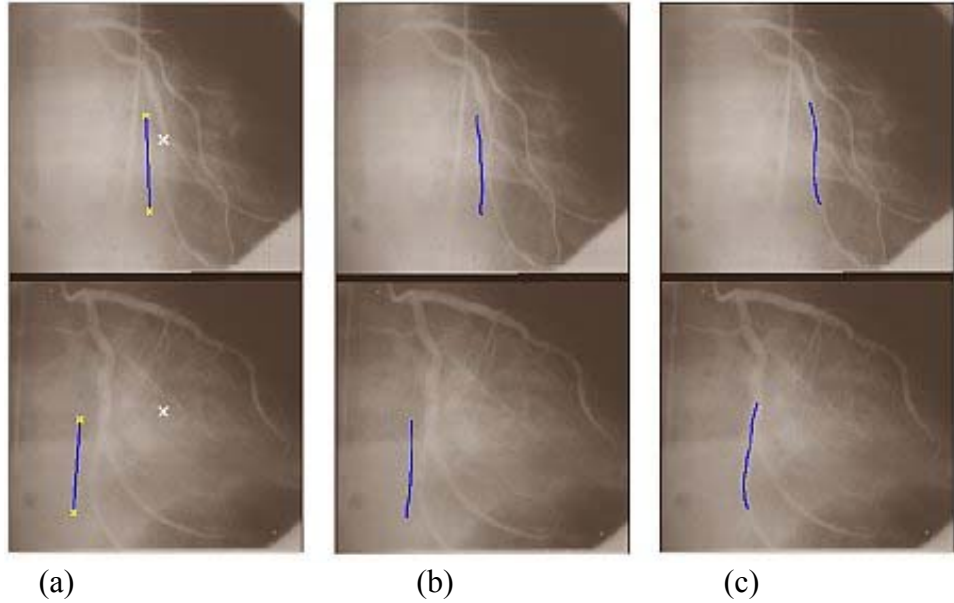


Şekil 12. Epipolar geometriye bir örnek

*Epipolar* geometri bir sahne veya objenin iki perspektif görüntüsü arasındaki ilişkiyi veren ve  $3 \times 3$  boyutlarında tekil bir matris ile tanımlanabilen bir kavramdır [24]. Bu matrisler her iki görüntü arasındaki nokta ilişkilendirme işlemi için gereken tüm geometrik bilgileri verir ve bu matrisleri kalibre edilmiş perspektif projeksiyon matrislerinden elde etmek mümkündür.

Görüntülerin kalibrasyonu işlemi otomatik olarak yapılabileceği gibi genelde manüel kalibrasyon tercih edilmektedir. Çünkü otomatik kalibrasyon için tıbbi görüntüleme işleminden önce test objeleri ile ekstra görüntüler almak gerekmektedir. Buna karşılık manüel kalibrasyon kullanıcı tarafından gerçekleştirilir ancak zaman alıcı bir işlem olarak görülebilir.

Bu gibi problemleri ortadan kaldırmak amacıyla direkt olarak 3B yapıyı oluşturma yöntemleri geliştirilmiştir [6, 25, 26]. Bu çalışmalarda *snake* olarak adlandırılan elastik bir eğri kullanılır. Bu yapı algoritmanın başlangıcında 3B olarak tanımlanır ve zaman içinde şeklini değiştirerek kendi izdüşümünü görüntülerdeki izdüşümlere adapte etmeye çalışır. Bu adaptasyon için gereken hareketi iç ve dış olmak üzere iki adet enerji ölçüsünü minimize ederek sağlar. İç enerji azaltımı (*minimization*) eğrinin düzgünlüğünü kontrol ederken dış enerji ise eğrinin şeklinin projeksiyonlardaki şekle uyumu ile azalır. Şekil 13'te bu yapıya bir örnek gösterilmiştir.



Şekil 13. (a) Başlangıç, (b) 10 iterasyon sonra, (c) son hali

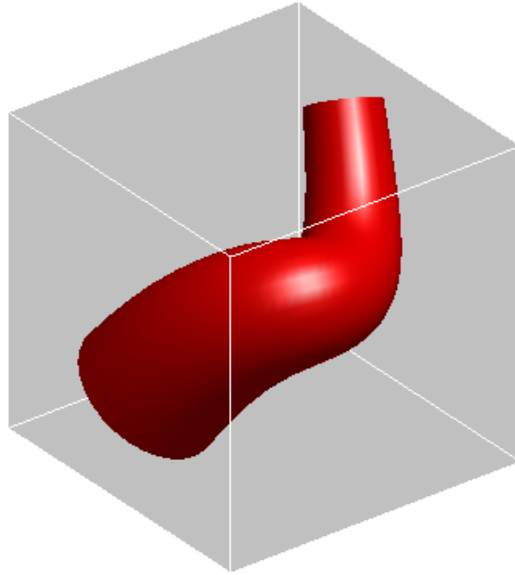
## 2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

### 2.1. Giriş

Bu çalışmanın amacı damarların anjiyo görüntülerinden yola çıkarak bu damarların 3B yapısını oluşturmaktır. Burada damarlar genelleştirilmiş silindirler yardımı ile modellenmiştir. Bu nedenle genelleştirilmiş silindirlerin yapısına değinmek gerekir.

### 2.2. Genelleştirilmiş Silindirler

Birçok cismin geometrik şekli, iki boyutlu bir konturun 3 boyutlu bir yörünge üzerinde gezdirilmesi ile oluşturulabilir [18]. Buradaki kontur ifadesi cismin kesit bölgesini ve yörünge ifadesi de cismin merkez eksenini ifade etmektedir. Genelleştirilmiş silindir ise keyfi bir kesit bölgesi ile yine keyfi bir 3B eksenin taranması olarak tanımlanmaktadır [27].

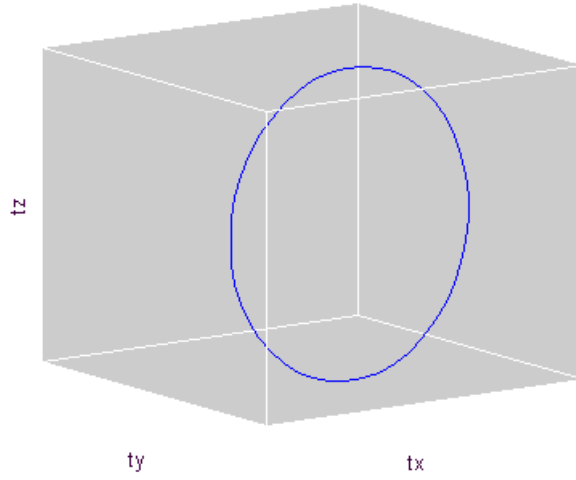


Şekil 14. Genelleştirilmiş silindir yapısına örnek

3B yörünge  $t$  uygun bir biçimde parametrik bir eğri ile tanımlanır.

$$t(u) = (t_x(u), t_y(u), t_z(u)) \quad , \quad u_i \leq u \leq u_f \quad (94)$$

$u$  parametresi  $u_i$ ' den  $u_f$ ' ye değiştikçe parametrik fonksiyonlar  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$  de tüm yörüngeyi tarayacaktır.

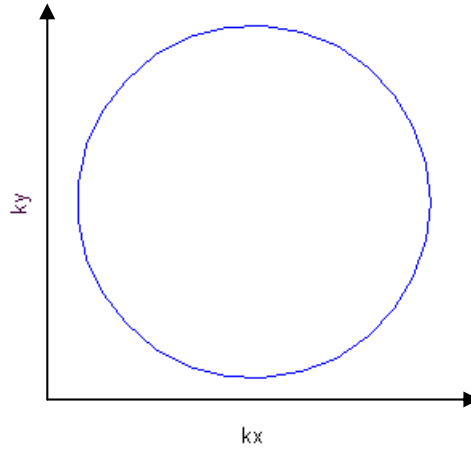


şekil 15. 3B yörünge örneği

2B kontur ise  $k$  ile temsil edilirse,

$$k(v) = (k_x(v), k_y(v)), \quad v_i \leq v \leq v_f \quad (95)$$

şeklinde parametrik olarak tanımlanabilir. Aynı şekilde  $v$   $v_i$  ile  $v_f$  arasında ilerledikçe tüm kontur oluşturulmaktadır.



şekil 16. 2B kontur örneği

Genelleřtirilmiř silindirler tanımlanırken konturun veya 3B yörüngeyiň şeklinde daha önemlisi konturun oryantasyonunun tanımlanmasıdır. Bu çalışmada kullanılan tanım

ise en sık olarak kullanılan ve en iyi şekilde anlaşılmış tanım olan konturun içinde bulunduğu düzlemin, yörüngenin ilgili noktasındaki teğet doğrusuna dik olması ve bu düzlem içindeki yerleşiminin de yörüngedeki yerel değişimlere göre ayarlanması tanımıdır. Böyle bir tanım için en uygun yapı ise *Frenet frame* olarak adlandırılan yapıdır. Çünkü bu yapı yörüngenin tanımlanmış olduğu koordinat sisteminden ve yörünge parametrelerinden bağımsızdır [18]. Bu durum aşağıdaki denklemler ile sağlanmaktadır.

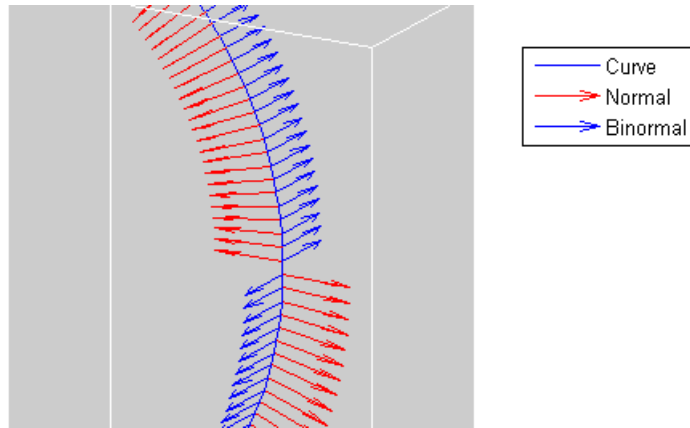
$t'(u)$  vektörü  $t'$ 'nin  $t(u)$  noktasındaki teğet vektörü ve  $t''(u)$  da  $t'(u)$  vektörünün lineer bağımsız vektörü olsun. Bu vektörler yardımı ile *Frenet frame* için gerekli birim vektörler olan  $e_1$ ,  $e_2$  ve  $e_3$  vektörleri aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$e_1 = \frac{t'}{|t'|} \quad (96)$$

$$e_3 = \frac{e_1 \times t''}{|e_1 \times t''|} = \frac{t' \times t''}{|t' \times t''|} \quad (97)$$

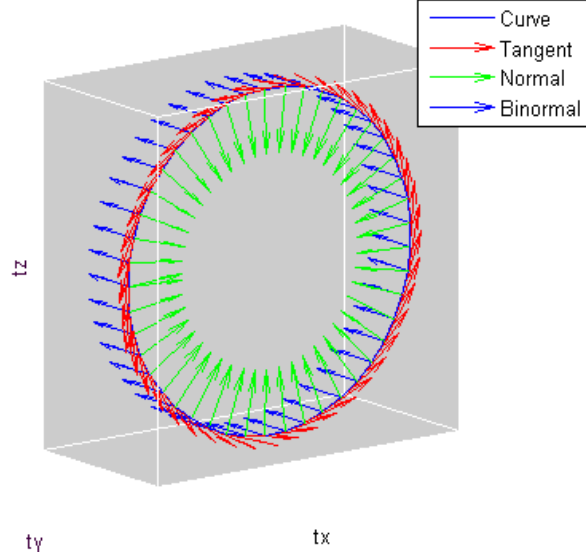
$$e_2 = e_3 \times e_1 = \frac{|t'|^2 t'' - (t' \cdot t'') t'}{|t'| |t' \times t''|} \quad (98)$$

Bu denklemlerden anlaşılan şu ki,  $e_1$  daima kontur düzlemine dik yani üçüncü koordinat eksenini,  $e_2$  ve  $e_3$  ise birinci ve ikinci koordinat eksenlerini tanımlamaktadır. Ancak bu tanımlamalarda şöyle bir zorluk vardır. Eğer yörünge eğrisinin  $t''$  vektörü, büküm noktaları veya doğru kısımları gibi noktalarda olduğu gibi  $t'$  vektörüne lineer olarak bağımlı olursa bu durumda *Frenet frame* tanımsız olmaktadır.



Şekil 17. Frenet frame tanımındaki belirsizlik noktasına örnek

Bu tanımsızlığı ortadan kaldırmak amacı ile farklı yöntemler geliştirilmiştir [28,29]. Bu yöntemlerin temel çalışma prensibi şöyledir: Yörünge eğrisi başlangıcında bir referans *frame* tanımlanır. Genellikle bu referans *frame*, *Frenet* denklemlerinde olduğu gibi  $e_1$ ,  $e_2$  ve  $e_3$  yardımıyla hesaplanır. Eğer burada da tanımsızlık söz konusu ise  $e_3$  vektörü  $e_1$ 'e dik herhangi bir birim vektör olarak tanımlanır. Daha sonra bu referans *frame* yörünge boyunca uygun bir şekilde kaydırılır.



Şekil 18. Yörünge eğrisi ve *Frenet frame* için birim vektörler

Bu çalışmada *Sloan* [30] tarafından önerilen ve yukarıda anlatılan prosedüre uygun olarak ilerleyen bir yaklaşım kullanılmıştır.

$$e_2^1 = e_3^0 \times e_1^1 \quad (99)$$

$$e_3^1 = e_1^1 \times e_2^1 \quad (100)$$

Bu yöntemle göre başlangıçta seçilen  $e_3^0$  vektörü yardımıyla ilk  $e_2^1$  vektörü hesaplanır ve daha sonra  $e_3^1$  vektör bu  $e_2^1$  vektörü yardımıyla hesaplanır ve bu işlem yörünge boyunca tekrarlanır.

Tüm kesit bölgeleri için oryantasyon vektörleri hesapladıktan sonra bu kesitleri yörünge eğrisi üzerine yerleştirme işlemine geçilir.

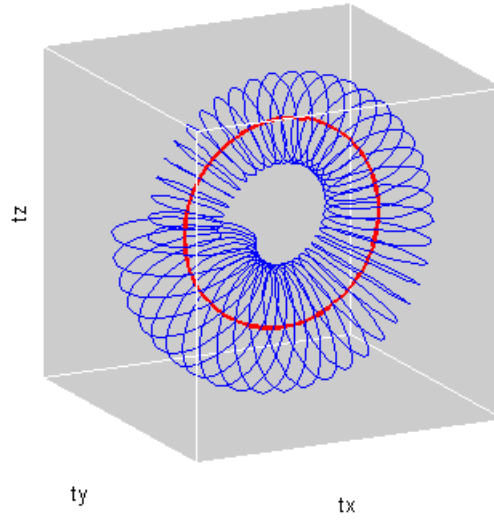
Denklem (94) ve (95) den yola çıkarak ve  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $e_3$  vektörlerini kullanarak geliştirilmiş silindirin üzerindeki herhangi bir noktayı şu şekilde ifade ederiz;



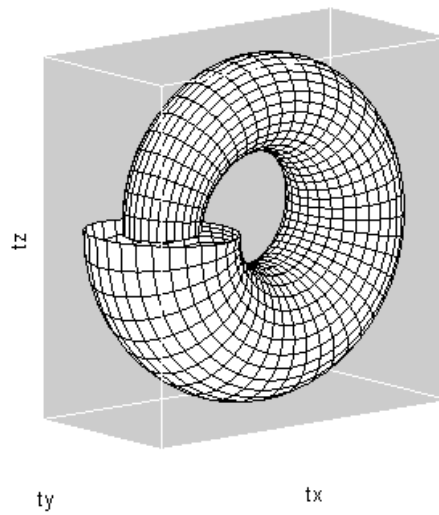
$$(t_x + k_x * e_{2x} + k_y * e_{3x}, t_y + k_x * e_{2y} + k_y * e_{3y}, t_z + k_x * e_{2z} + k_y * e_{3z}) \quad (101)$$

Ya da daha genel bir gösterimle

$$Surf = Mt * [k_x \ k_y \ 1]^T \text{ ve } Mt = \begin{bmatrix} e_{2x} & e_{3x} & t_x \\ e_{2y} & e_{3y} & t_y \\ e_{2z} & e_{3z} & t_z \end{bmatrix} \quad (102)$$



Şekil 19. Konturların yerleştirilmiş görünümü



Şekil 20. 3B genelleştirilmiş silindir yüzeyi

### 2.3. Damar Parlaklık Profillerinin Modellenmesi

Daha önce yapılan otopsi çalışmaları sonucunda elde edilen bilgilerde damar kesitlerinin %90 oranında eliptik bir yapıya sahip olduğu gösterilmiştir [31, 32]. Bu nedenle yapılan çalışmada damar kesitleri ile elipsler arasındaki ilişkiler kullanılarak matematiksel model oluşturulmuştur. İlk olarak eliptik kesitli nesnelere izdüşüm modelleri oluşturulmuş ve daha sonra bu model damarlar için genelleştirilmiştir.

Röntgen filmi çekerken, görüntülenmek istenen nesne açık olarak görüntülenemez. Bu sorunu çözmek için nesneye x-ışınlarına karşı zayıflama sabiti yüksek olan ve aynı zamanda insan sağlığı için zararsız bir madde olan *iodine* enjekte edilir. Tıpta anjiyografi olarak bilinen bu işlem sayesinde damarlar görünür hale getirilir.

Bir homojen malzemenin içinden geçen x-ışınının şiddeti;

$$I = I_0 \cdot e^{-\mu u} \quad (103)$$

denklemleriyle verilir. Burada  $I_0$ , x-ışınının materyale girişteki şiddeti,  $I$ , x-ışınının materyalden geçtikten sonraki şiddeti,  $u$ , materyalin boyu ve  $\mu$  ise malzemenin doğrusal zayıflama sabitidir. Bu bağıntıya dikkat edilirse, damar boyunca ışığın şiddetinde zayıflama olacağı açıkça görülmektedir. Şekil 21’ de damar tipi için tek-bakışlı bir sistemin izdüşümü düzenlenmiştir. Damarın  $z$  ekseninde uzandığı kabul edilirse x-ışınının da  $u-p$  düzlemlerine paralel geldiği görülür. İzdüşümlerde damarın kenarlarında ışık şiddeti koyu, ortalarına doğru ise daha açık olur. Bu açıklık ya da koyuluk  $\mu$  katsayısıyla doğru orantılıdır [33].  $\phi$  açısıyla alınmış herhangi bir izdüşümdeki  $p$  eksenindeki bu dağılım;

$$i(p, \phi) = -\ln(I / I_0) = \int \mu(x, y) \cdot du \quad (104)$$

ile verilir.

Doğrusal olan  $\mu$  zayıflamasının dışında yumuşak dokular, kemikler ve diğer damarlara ait başka zayıflamalar da vardır. Toplam parlaklık için bu zayıflamaların tümü göz önüne alınır.



ile tanımlanır. Burada elipsin denklemi  $x$ - $y$  koordinat sisteminde verilmiştir. Bu elipsin izdüşümünün  $x$ - $y$  eksenine göre  $\phi$  kadar dönmüş olan  $p$ - $u$  ekseninde alınması gerekir. Böylece  $p$  eksen  $x$ -ışınlarına dik ve  $u$  eksen de  $x$ -ışınlarına paralel olacaktır. Buna göre  $x$ - $y$  eksenindeki  $(x,y)$  noktasının  $p$ - $u$  eksenindeki bir  $(p,u)$  noktası ile ilişkisi

$$\begin{aligned} p &= x \cos \phi + y \sin \phi \\ u &= -x \sin \phi + y \cos \phi \\ x &= p \cos \phi - u \sin \phi \\ y &= p \sin \phi + u \cos \phi \end{aligned} \quad (108)$$

ile verilir. Bu yeni eksen takımına göre damarın toplam boyu, damarın çeperi boyunca

$$L_c(p, \phi) = \int d_c(p \cos \phi - u \sin \phi, p \sin \phi + u \sin \phi) du \quad (109)$$

çizgisel integraliyle verilir [14].  $L_c$  integralinin hesaplanabilmesi için integralin alt ve üst sınırlarının bilinmesi gerekir. Bu integral  $u$  üzerinden alındığı için elips denklemi  $u$  ve  $p$  cinsinden yazılır ve daha sonra elipsin sınırlarını temsil eden  $d_c(x,y)=1$  şartı;

$$\begin{aligned} &(a \sin^2 \phi - b \cos \phi \sin \phi + c \cos^2 \phi)u + \\ &(-2pa \cos \phi \sin \phi + pb \cos^2 \phi - pb \sin^2 \phi + 2pc \cos \phi \sin \phi) + \\ &ap^2 \cos^2 \phi \sin \phi + cp^2 \sin^2 \phi = 1 \end{aligned} \quad (110)$$

kullanılır. Çünkü diğer yerlerde (107) tanımından da görüleceği gibi elipsin değeri sıfırdır. Bu denklemin kökleri bize  $L_c$  integralinin sınırlarını verir. Buna göre hesaplanan  $L_c$  integralinin değeri ,  $p$  parametresine bağlı olarak

$$L_c(p, \phi) = \frac{\sqrt{-(4ac - b^2)p^2 + 4c \cos^2 \phi + 4b \sin \phi \cos \phi}}{c \cos^2 \phi + a \sin^2 \phi - b \sin \phi \cos \phi} \quad (111)$$

şeklinde bulunur. Bu ifade de  $b^2 - 4ac < 0$  şartı elipsin tanım bağıntısından dolayı her zaman sağlanır ve buna bağlı olarak kareköklü ifade her zaman sıfırdan büyük çıkar. Böylece toplam kalınlık hesaplandıktan sonra damarın geçirgenlik katsayısı olan  $\mu c$  ile çarpılırsa filmlere ait arka-plandaki toplam etkiyi bulmuş oluruz. Başka bir ifadeyle

$$f(p, \phi) = \mu_c L_c(p, \phi) \quad (112)$$

ile verilen bu çarpım eliptik bir kesite ait izdüşümünü temsil eder. Bu etki damar boyunca geçerlidir. Yani damarın dışındaki bölgeyi içermez. Buna göre elipsin izdüşümü, röntgen filmlerinde olduğu gibi damarın kenarlarına doğru koyu, ortasına doğru açık olacaktır. (112) ifadesi bir fonksiyon olarak

$$f(p, \phi) = \begin{cases} \mu_c f_{cen} \sqrt{1 - \frac{p^2}{p_{max}^2}} & : |p| \leq p \\ 0 & : |p| > p \end{cases} \quad (113)$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadede

$$p_{max} = \frac{2\sqrt{a \sin^2 \phi - b \sin \phi \cos \phi + c \cos^2 \phi}}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (114)$$

$$f_{cen} = \frac{2}{\sqrt{a \sin^2 \phi - b \sin \phi \cos \phi + c \cos^2 \phi}} \quad (115)$$

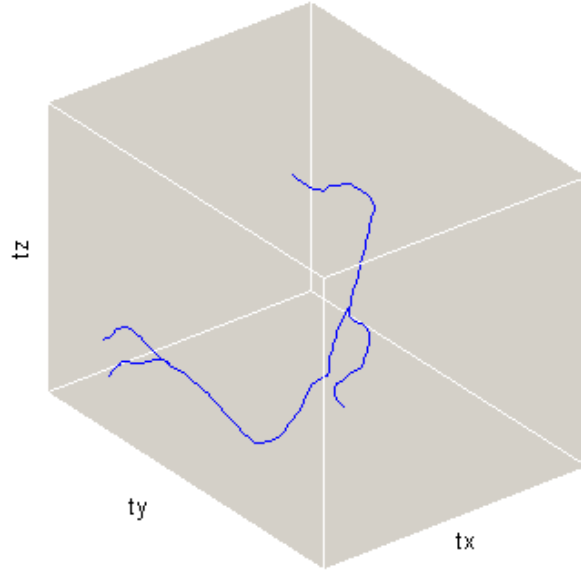
olarak tanımlanır [14]. Tanımda  $\mu_c$ , geçirgenlik katsayısı,  $f_{cen}$ , x-ışınlarına paralel olan damar kesitinin maksimum boyu,  $p_{max}$  ise söz konusu kesite  $\phi$  açısından bakıldığında  $p$  eksenine üzerine düşen izdüşümün yarısıdır. Yeni tanımlanan bu fonksiyon Şekil 22'de gösterilmiştir.

Fonksiyon, merkezi  $p$  eksenine üzerinde  $p_{cen}$ 'de olan bir çan eğrisi olarak geliştirilirse;

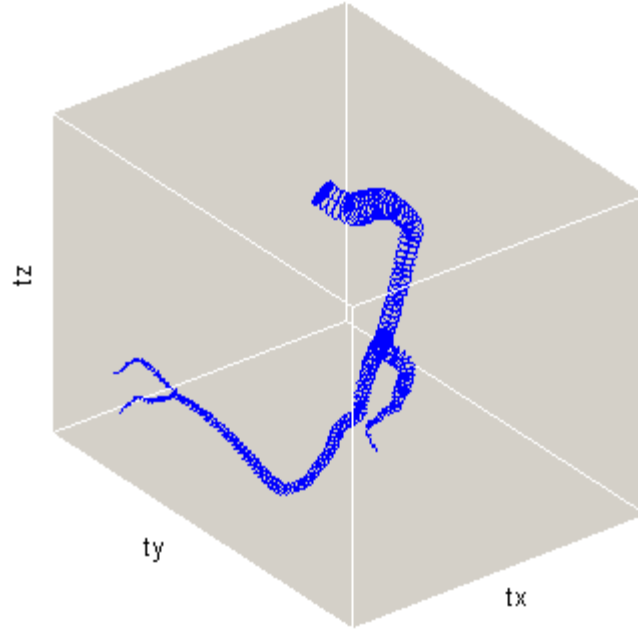
$$f(p, \phi) = \begin{cases} \mu_c f_{cen} \sqrt{1 - \frac{(p - p_{cen})^2}{p_{max}^2}} & : |p - p_c| \leq p_m \\ 0 & : |p - p_c| > p_m \end{cases} \quad (116)$$

şeklinde elde edilir. Bu bağıntıda verilen  $p_{cen}$ ,  $f_{cen}$  ve  $p_{max}$  değişkenleri şekil 21'de verilen herhangi bir u-p düzlemi kesiti göz önüne alınarak şekil 22'de daha açık bir biçimde gösterilmiştir.

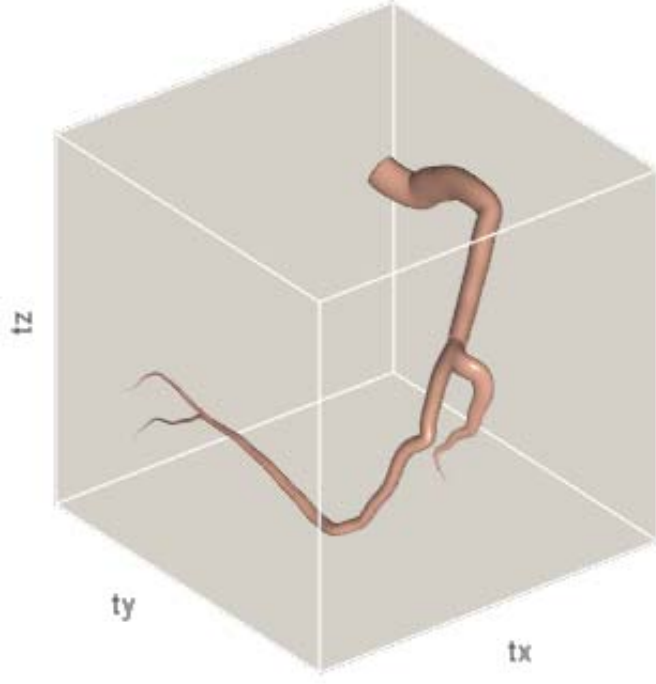




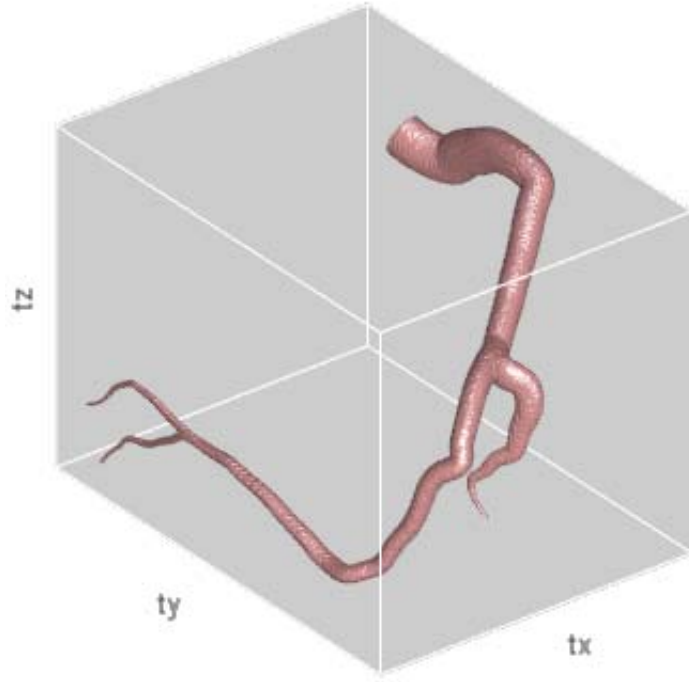
Şekil 23. Örnek 3B damar iskeleti



Şekil 24. Eliptik kontur giydirilmiş 3B damar modeli



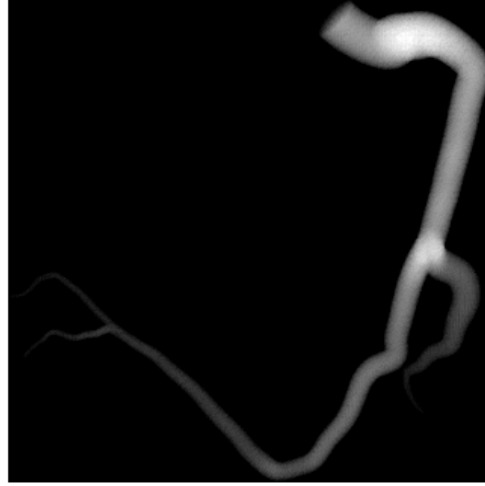
Şekil 25. 3B damar modeli



Şekil 26. 3B hacimsel damar modeli

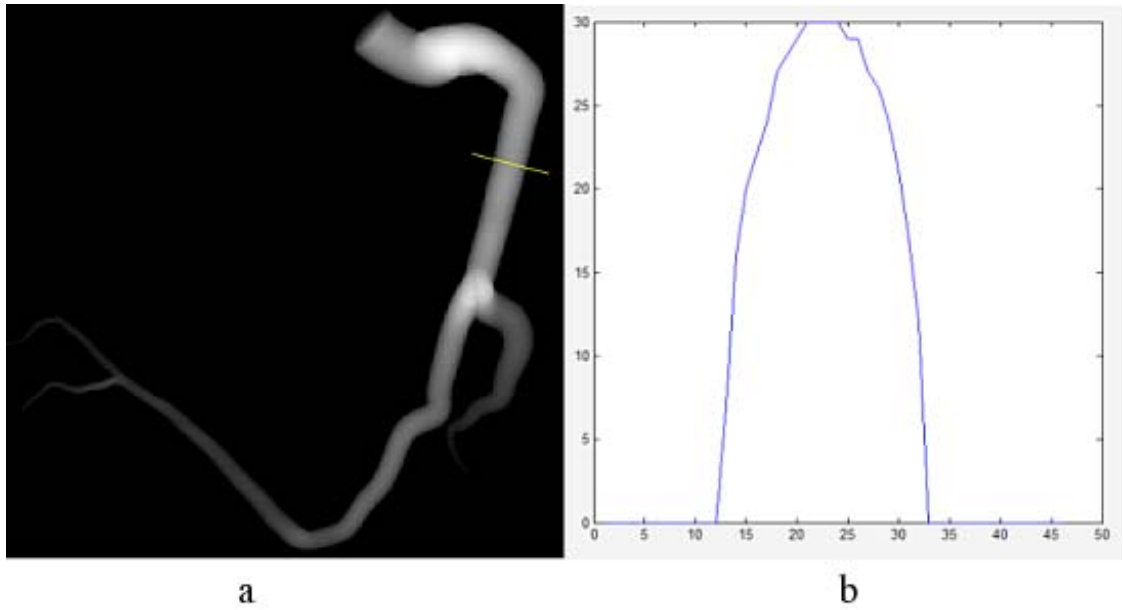


3B katı cisim olarak damar modelini elde ettikten sonra denklem (91) kullanılarak anjiyo görüntüleme sistemi simüle edilmiştir. Simülasyon sonucu elde edilen görüntüye bir örnek aşağıda verilmiştir.



Şekil 27. Anjiyo simülasyonu örneği

Daha önce (91) denklemi ile verilen damar parlaklık profili, eliptik kesitler ile modellenen damarın bilgisayar simülasyonu sonucu elde edilen anjiyo görüntüsü üzerinde test edilmiştir.



Şekil 28. (a) Parlaklık profili seçimi (çizgili yer) (b) ilgili profilin grafiği

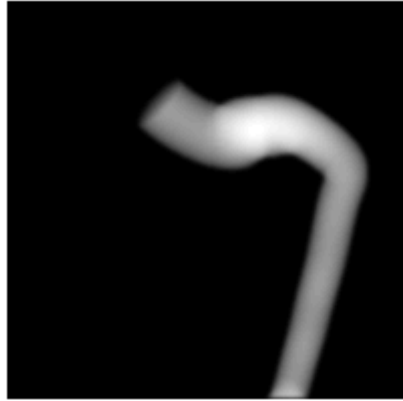
Damarların parlaklık profilleri anlaşıldıktan sonra yeniden oluşturma işlemi için bir sonraki aşama olan kenar belirleme aşamasına geçilir.

## 2.5. Kenar Kestirimi

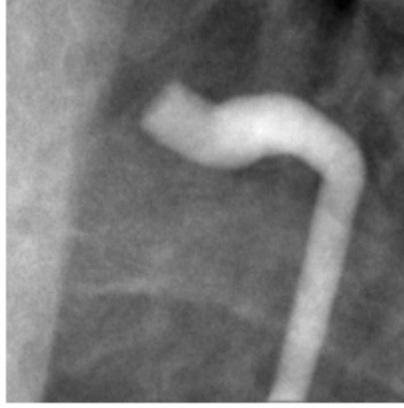
Kenar kestirimi algoritması kaynak [17] da açıklanan parametrik kestirim yöntemi temel alınarak oluşturulmuştur. Bu yöntemle göre kenar kestirimi, damarların izdüşümlerindeki parlaklıkları modellenerek bu modelin parametrelerinin kestirimi ile gerçekleştirilir. Damar parlaklık modellemesi daha önce anlatılmıştı. Kenar kestirim yöntemi ise adım adım uygulamalı olarak anlatılmıştır.

Kenar kestirimi için oluşturulan algoritma öncelikle bilgisayarda oluşturulan damar modeli üzerinde denenmiştir. Test görüntüsü için, gerçek bir anjiyo görüntüsünden alınan bir arkaplan üzerine anjiyo simülasyonu ile elde ettiğimiz ideal damar profili bindirilmiştir. Ancak ideal damar görüntümüz, görüntüleme sisteminden kaynaklanan buğulanma etkisini verebilmek için öncelikle standart sapması 1 piksel olan gauss fonksiyonu ile konvolüsyona tabi tutulmuştur.

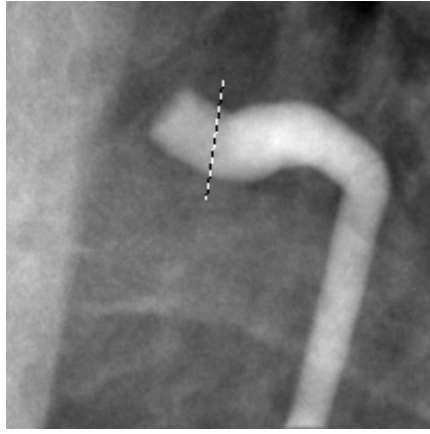
Kenar kestirimi işlemi ilk olarak ilgilenilen damar üzerinden damara ait parlaklık profillerinin alınması ile başlar. Seçilecek damardan alınacak profillerin genişliği, kullanıcı tarafından *mouse* yardımıyla bir çizgi çizilerek belirlenir. Daha sonra ilgili damar boyunca damarı yaklaşık olarak takip eden bir eğri çizilir.



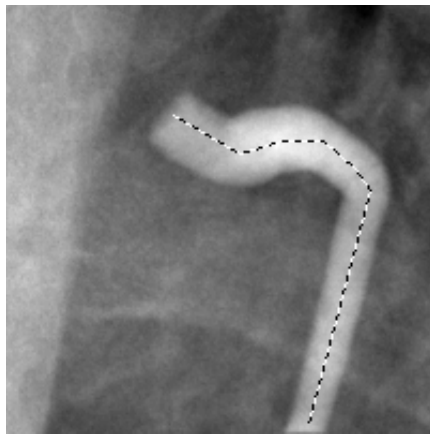
Şekil 29. Bulanıklaştırılmış damar görüntüsü



Şekil 30. Bulanıklaştırılmış damar + arkaplan



Şekil 31. Profil genişliğinin belirlenmesi

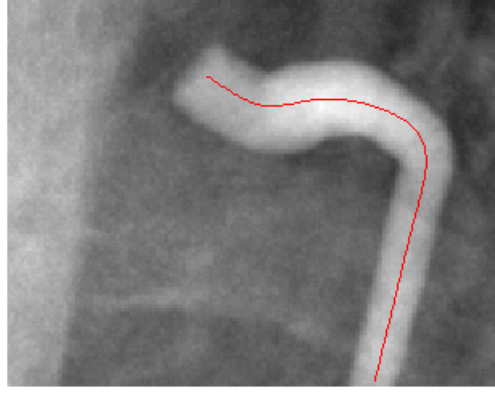


Şekil 32. Kullanıcı tarafından çizilen merkez çizgisi

Bu aşamadan sonra çizilen merkez çizgisine ait nokta koordinatları, tüm çizgi boyunca eşit aralıklarla dağılacak şekilde yeniden düzenlenir. Ancak nokta sayısı normalin

10 katına çıkarılır, yani tüm merkez çizgisi noktaları lineer interpolasyon ile artırılır ve yeni oluşturulan her bir nokta arasındaki uzaklıklar eşitlenir. Daha sonra ise yumuşatma katsayısı sabit bir kübik *smoothing spline* ile tekrar bir interpolasyon işlemine tabi tutulan merkez çizgisi artık damar boyunca yumuşak bir şekilde damarı takip eder.

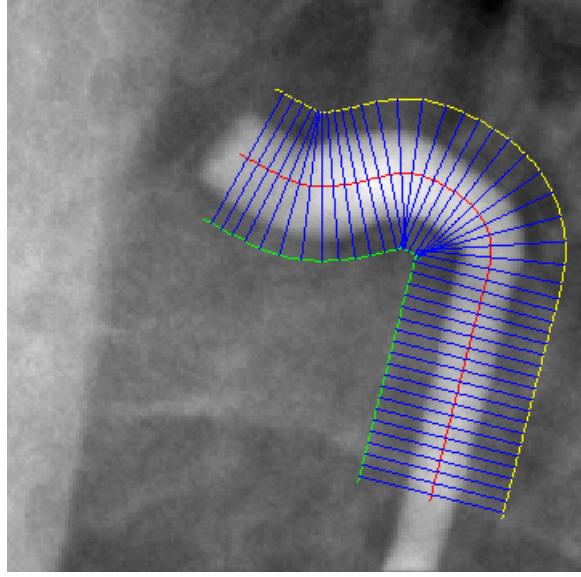
Damar boyunca ne kadar sık nokta seçilirse o kadar ayrıntılı olarak kenar kestirimi gerçekleştirilebilir. Ancak yaptığımız deneysel çalışmalarda seçilen merkez çizgisinin piksel olarak uzunluğu kadar alınan noktalar en iyi performansı vermiştir ve bu çalışmada eğrinin uzunluğu kadar nokta seçilmiştir. Yumuşatma işleminin amacı ise alınan profillerin birbirini en iyi şekilde takip etmesi ve ardışık profiller arasındaki farkların minimuma indirilmesidir.



Şekil 33. Merkez çizgisinin son hali

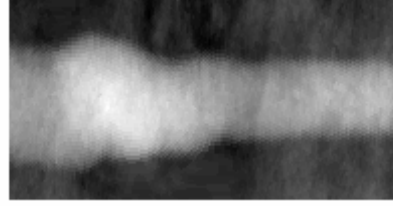
Yumuşatılmış merkez çizgisi oluşturulduktan sonra program, bu çizgi boyunca belirlenen genişlikteki profilleri resim üzerinden alır. Alınan profiller merkez çizgisine dik yönde alınır. Bu yönü belirlemek için geliştirilmiş silindirler konusunda anlatılan *Frenet* denklemleri kullanılır. Öncelikle merkez eksen üzerinden birinci türev ile teğetler hesaplanıp, daha sonra bu teğet doğrulara dik olacak şekilde normal doğruları belirlenir. Merkez çizgisi üzerindeki herhangi bir nokta ve bu noktaya ait normal doğrusu bilindikten sonra profil genişliği kadar uzunlukta bir doğru çizilebilir.

Profiller alınırken profil çizgisinin altında kalan piksellerden örnekler alınır. Bu örneklerin sayısı minimum 100 piksel olacak şekilde ayarlanmaktadır çünkü özellikle damar genişliğinin az olduğu bölgelerde kestirim işlemi daha fazla örnekle daha sağlıklı yapılabilmektedir.



Şekil 34. Alınan profillere ait kılavuz çizgiler (Profil sayısı 1/4 oranında azaltılmış olarak gösterilmektedir)

Profilleri alındıktan sonra ardışık olarak dizerek bir resim olarak gösterebiliriz.



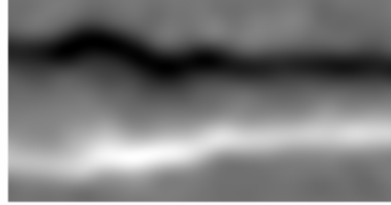
Şekil 35. Alınan profillerin ardışık olarak gösterimi (resim yatay olarak gösterilmiştir)

Damar profilinin kestirimi işleminde kullanılan *Marquardt-Levenberg* algoritması lineer olmayan bir kestirim algoritması olduğu için dögüsel olarak yapılan hatayı minimize eder ve bu nedenle başlangıç parametrelerine ihtiyaç duymaktadır. Bu parametreler sonuca ne kadar yakın olursa hem kestirim işleminin yakınsama olasılığı artar, hem de dögü sayısı o kadar azalır.

Başlangıç parametreleri, alınan profiller üzerinden elde edilir. Parametre vektörü  $(f_{cen}, p_{cen}, p_{max})$  şeklindedir. Bu parametrelerin yakınsama açısından en önemlileri profil merkezi ve genişliğidir. Diğer bir ifadeyle  $p_{cen}$  ve  $p_{max}$  parametreleridir.  $p_{cen}$  parametresi kullanıcı tarafından çizilen merkez çizgisi tarafından yaklaşık olarak belirlenmiştir. Diğer parametre ise profilin birinci türevi üzerinden oldukça iyi bir yaklaşıklıkla elde edilebilir. Ancak

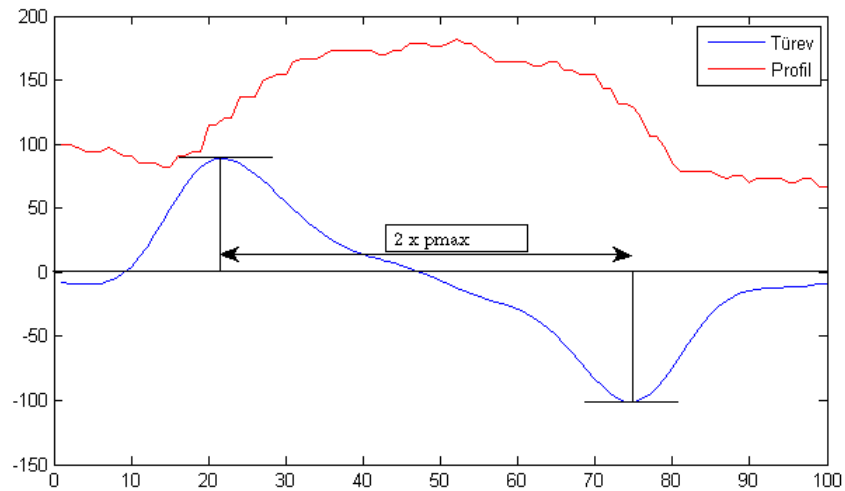
arkaplandan kaynaklanan bozucu etkiler dolayısı ile bu parametreler her zaman doğru belirlenmemektedir.

Bu bozucu etkileri minimuma indirmek için profil resmi iki boyutlu bir *gauss* filtresi ile filtrelenmiştir. Filtrenin tasarımında şu durum dikkate alınır: Bizim için en önemli noktalar olan kenar noktaları resim üzerinde yaklaşık olarak  $y$  eksenini boyunca uzanmaktadır. Dolayısıyla, eğer filtrenin etkisi  $x$  eksenini boyunca az,  $y$  eksenini boyunca çok olursa ve bu şekilde profillerin birinci dereceden  $x$  eksenini boyunca türevlerini alırsak, profillerdeki kenar noktalarını daha sağlıklı ortaya çıkarabiliriz. Bu şekilde filtrelenmiş ve türevi alınmış olan profil görüntüsü aşağıda verilmiştir.



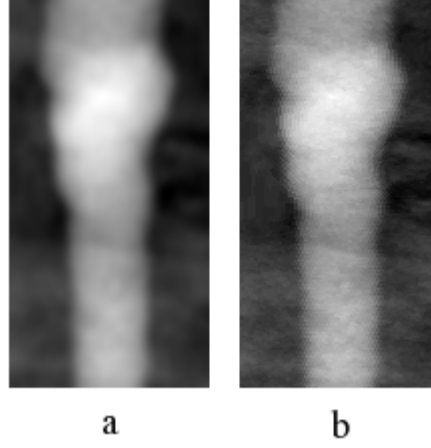
Şekil 36. Başlangıç parametrelerinin belirlenmesi için kullanılan profil resmi (resim yatay olarak gösterilmiştir)

Eğer türevlere dikkat edecek olursak, kenar noktalarına yakın yerlerde maksimum ve minimum geçişleri yapmakta olduğunu görürüz. Bu noktaların tespiti ile  $p_{max}$  değeri bulunabilir. Aşağıdaki şekilde tek bir profile ait grafik ve ilgili türev grafiği gösterilmiştir.

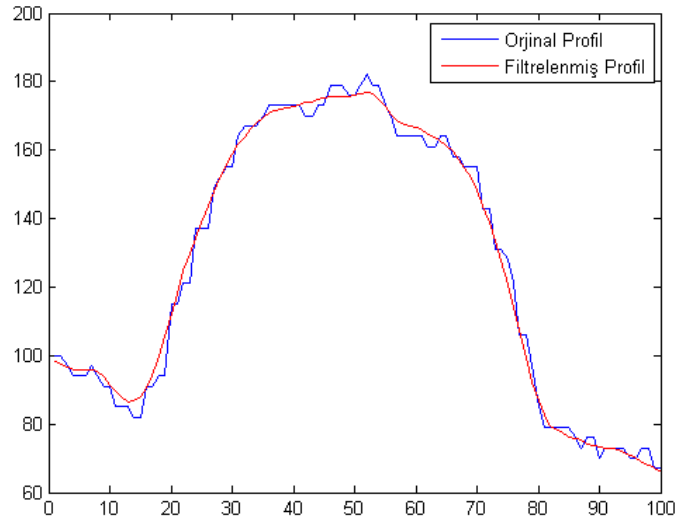


Şekil 37. Profil ve ilgili türevin grafiği

Başlangıç parametreleri belirlendikten sonra kestirim işlemi için orijinal profil görüntüsü kullanılır. Ancak profillerdeki gürültü miktarını azaltmak ve parlaklık farklarını daha belirgin hale getirmek amacıyla bir ön filtreleme yapılabilir. Bu filtreleme işlemi yine 2B *gauss* filtresi ile gerçekleştirilir. Filtre boyutları ve standart sapma değeri profil sayısına ve genişliğine göre otomatik olarak ayarlanır. Ancak bu filtre orijinal profili çok fazla bulanıklaştırmayacak şekilde oluşturulmalıdır. Yapılan deneysel çalışmalarda standart sapması 3 veya 4 piksele kadar olan *gauss psf* fonksiyonu ile yapılan filtrelemelerde kenar kestirim işleminin doğruluk derecesinin önemli ölçüde etkilenmediği görülmüştür.



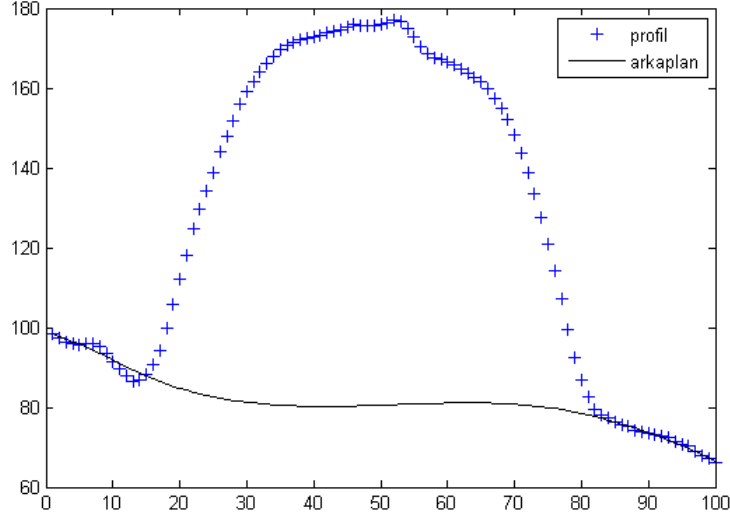
Şekil 38. (a) Filtrelenmiş profiller (b) orijinal profiller



Şekil 39. Örnek bir profilin filtreli ve filtresiz hali

Kestirim işlemi esnasında her bir profil damar parlaklık profillerinin modellenmesi kısmında anlatıldığı gibi damar + arkaplan olarak ele alınır. Arkaplanın kestirimi için türevlerden elde edilen başlangıç parametreleri kullanılır.

Arkaplan, kübik *smoothing spline* fonksiyonu ile modellenmiştir. Bunun için öncelikle profil boyu uzunluğunda bir ağırlık vektörü oluşturulur. Bu vektör başlangıç parametreleri arasında 0'a (sıfır) yakın, diğer yerlerde 1'e yakın değerler alır. Bunun amacı *spline* fonksiyonunu sadece arkaplan olarak seçilen kısımlara uydurmaktır. Bu vektörü oluşturmak için başlangıç parametrelerine göre ayarlanabilen çift taraflı bir *sigmoid* fonksiyonu kullanılır. Bu ağırlık vektörü yardımı ile arkaplan kübik *smoothing spline* ile temsil edilir.



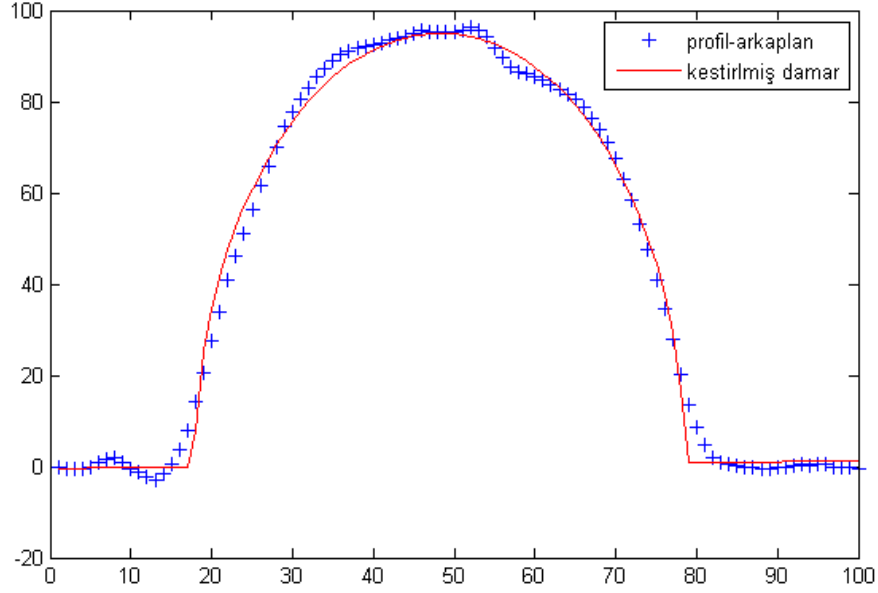
Şekil 40. Kübik *smoothing spline* uydurulmuş arkaplan

Arkaplan kestiriminden sonra kestirim, profilden çıkarılır. Bu bize damar profilini verir. Bu veriye *Marquard-Levenberg* algoritması ile damar parlaklık profili için geliştirilmiş model ( $f(p, \varphi)$ ) uydurulur ve ilgili parametreler belirlenir. Ancak bu eğri uydurma işleminde dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır.  $f(p)$  fonksiyonu  $-p_{max}$  ile  $p_{max}$  değerleri arasında tanımlıdır, diğer yerlerde sıfır değerini almalıdır. Ayrıca bu fonksiyonun *jacobian* matrisi de gereklidir ve aynı tanım aralığı burada da geçerlidir. Bu nedenle fonksiyonun tanım aralığı dışında kalan ve karmaşık sayılar içeren bölümleri programda 0 olarak değerlendirilmiştir. Bu durum *jacobian* matrisinde tanımsız veya sonsuz değere sahip sayıların çıkmasına neden olabilmektedir. Bu sayıları program içerisinde 0 olarak ele

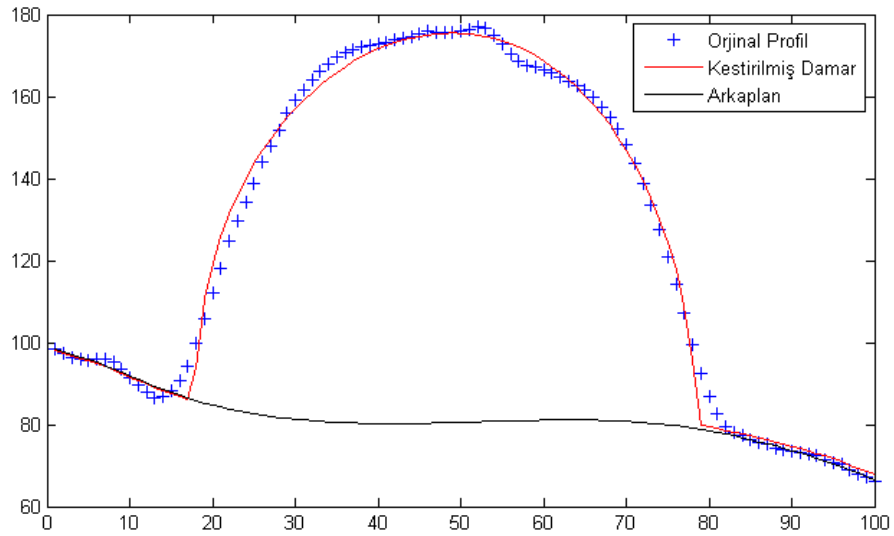


alınmış ve yakınsama performansının bu şekilde en iyi dereceye sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Kestirim işlemi tüm profiller için bir kez uygulanır.



Şekil 41. Arkaplan çıkartılmış olarak elde edilen kestirim



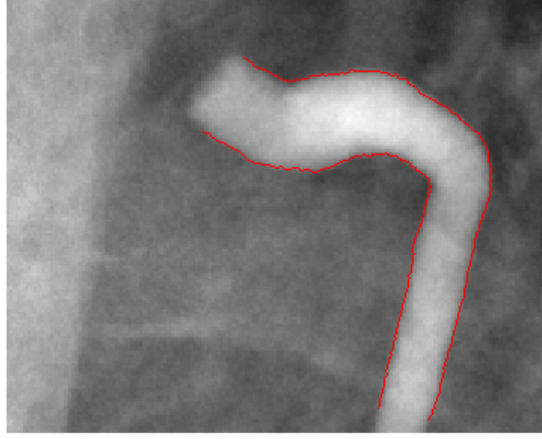
Şekil 42. Tümüyle kestirilmiş profil

Tüm kestirim işlemi bittikten sonra ikinci bir kez kestirim işlemine başlanır. Bir önceki kestirim işlemi esnasında her bir profil için yapılan toplam hata hesaplanmıştı. Bu hataların minimum olduğu profil baz alınarak ikinci kestirim işlemine bu profilden

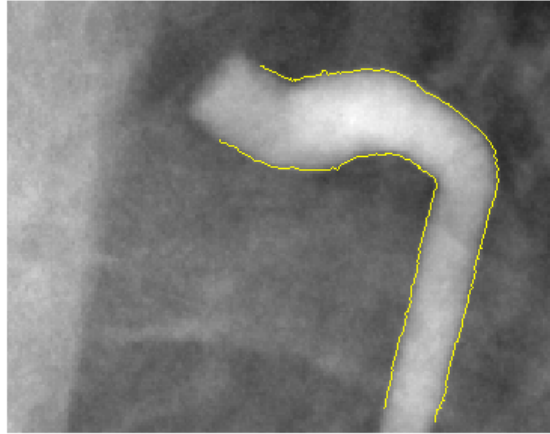
başlanır. Damarın sürekliliği göz önünde bulundurularak, başlangıç parametresi değerleri için bu kez bir önceki profilden elde edilen değerler kullanılır. Böylece kestirilen parametrelerdeki olası hatalar minimum seviyeye düşürülür.

İkinci kestirim işlemi de tamamlandıca kestirilen her iki kenar kübik *smoothing spline* eğri uydurma yöntemiyle yumuşatılır. Yumuşatma işleminin amacı kenarlardaki gürültülü görünümün önlenmesidir. Bu nedenle yumuşatma parametresi damarın genel hatlarını yumuşatmayacak ölçüde seçilir ve tüm işlemler için sabittir. Ayrıca hatalı olarak kestirilmiş kenarlar interpolasyon ile yeniden üretilir.

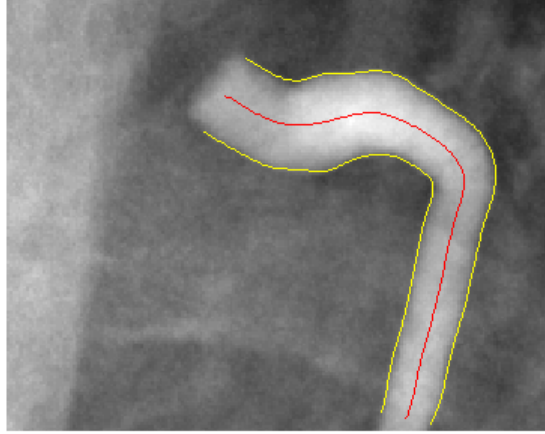
Yumuşatma işleminden sonra herhangi bir kenar boyunca normal doğruları hesaplanır. Bu doğruların yönünde kalan karşı kenar noktaları ile damarın o noktadaki genişliği yani  $p_{max}$  değerleri hesaplanmış olur.



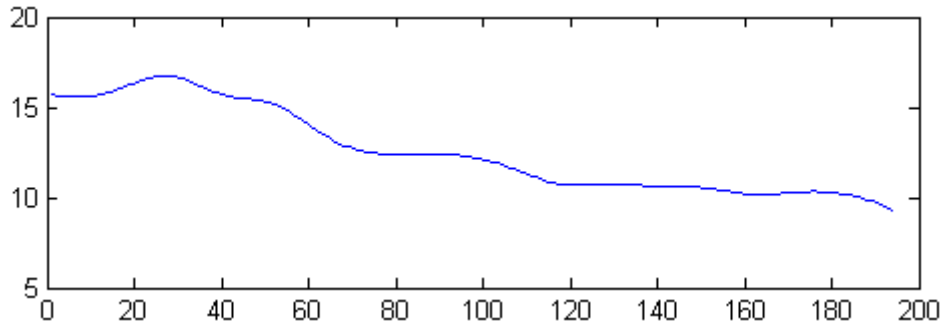
Şekil 43. İlk kenar kestirim işleminin sonucu



Şekil 44. İkinci kenar kestirim işleminin sonucu



Şekil 45. Kenar kestirim işlemini son hali



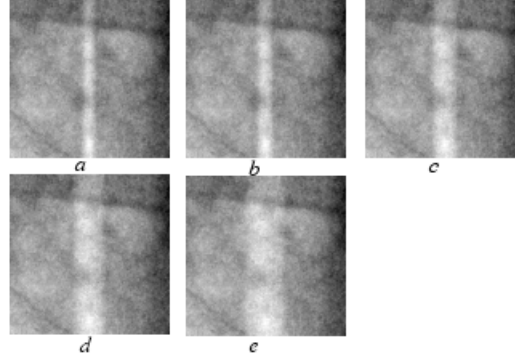
Şekil 46. Kestirim sonucu hesaplanan  $p_{max}$  grafiği

## 2.6. Kenar Kestirimi Performans Analizi

Burada anlatılan kenar kestirim metodunun performans analizi yapılmış ve sonuçlar aşağıda gösterilmiştir. Analizlerde  $p_{max}$ ,  $f_{cen}$ , buğulanma katsayısı  $\sigma$  ve arkaplan gürültüsünün standart sapması  $\sigma_n$  değerleri incelenmiştir. Test görüntüleri için bilgisayarda 100 piksel uzunluğunda eliptik silindir projeksiyonu oluşturulmuş ve *gaussian point spread function* ile konvolüsyona tabi tutulmuş, gerçek bir anjiyo görüntüsünden alınan arkaplan bu projeksiyon görüntüsü ile toplanmıştır. Arkaplan görüntüsünün etkisi bir katsayı ile çarpılarak değiştirilmiştir.

Kenar kestirim işleminin sonucunda elde edilen  $p_{max}$  değerlerinin ortalaması ve standart sapma değerleri üzerinden performans gösterilmiştir.

- $p_{max}$  değişimi için performans analizi  
 $f_{cen}=10$  piksel,  $\sigma=2$  piksel,  $\sigma_n=4.14$  piksel

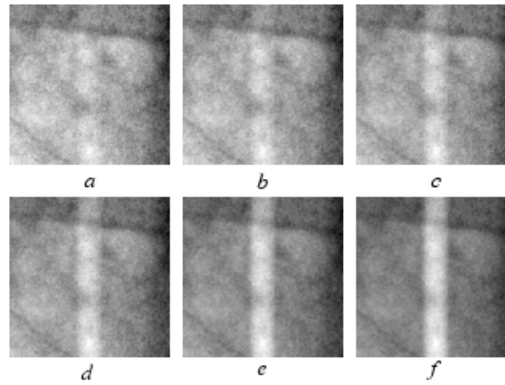


şekil 47.  $p_{max}$  değişimi için kullanılan test görüntüleri

Tablo 1.  $p_{max}$  için performans analizi sonuçları

	$p_{max}$	Ort( $p_{max}$ )	Std( $p_{max}$ )
a	3.8	4.23	0.27
b	5.8	5.94	0.25
c	7.6	7.34	0.49
d	9.7	9.18	0.65
e	12.7	12.34	0.75

- $f_{cen}$  değişimi için performans analizi  
 $p_{max}=7.6$ ,  $\sigma=2$ ,  $\sigma_n=4.14$



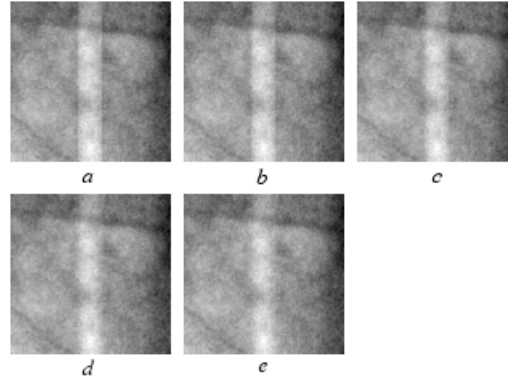
şekil 48.  $f_{cen}$  değişimi için kullanılan test görüntüleri

Tablo 2.  $f_{cen}$  için performans analizi sonuçları

	$f_{cen}$	Ort( $p_{max}$ )	Std( $p_{max}$ )
a	4	6.41	1.71
b	6	7.39	0.47
c	8	7.56	0.34
d	10	7.6	0.3
e	15	7.75	0.18
f	20	7.83	0.15

- $\sigma$  değişimi için performans analizi

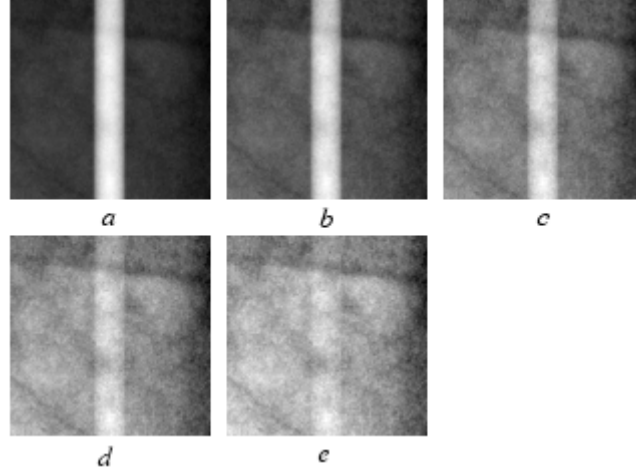
$$p_{max} = 7.6, f_{cen} = 10, \sigma_n = 4.14$$

şekil 49.  $\sigma$  değişimi için kullanılan test görüntüleriTablo 3.  $\sigma$  için performans analizi sonuçları

	$\sigma$	Ort( $p_{max}$ )	Std( $p_{max}$ )
a	0.2	7.72	0.2
b	1	7.64	0.19
c	2	7.65	0.31
d	3	7.75	0.34
e	4	7.85	0.48

- $\sigma_n$  değişimi için performans analizi

$$p_{max} = 7.6, f_{cen} = 10, \sigma = 1$$



şekil 50.  $\sigma_n$  değişimi için kullanılan test görüntüleri

Tablo 4.  $\sigma_n$  için performans analizi sonuçları

	$\sigma_n$	Ort( $p_{max}$ )	Std( $p_{max}$ )
a	0.25	7.83	0.06
b	0.50	7.77	0.05
c	1.00	7.79	0.06
d	2.00	7.75	0.12
e	4.00	7.60	0.22

### 2.7. 3 Boyutlu Damar İskeletinin Yeniden Oluşturulması

Genelleştirilmiş silindirler ile modellenen damarı yeniden oluşturmak için öncelikle merkez eksenin yani damar iskeletinin oluşturulması gerekmektedir. İskeleti oluşturmak için kenar kestirimi ile elde edilen damar merkez eksenleri kullanılır.

Genel bilgiler kısmında bahsedilen 3B iskelet oluşturma yöntemlerindeki durumdan farklı olarak bizim elimizde iskelet yapıyı oluşturmak için kullanmak üzere görüntüler yerine nokta koordinatları yani merkez eksenler vardır. Ayrıca izdüşüm aılları ve dolayısıyla projeksiyon geometrisi bilindiğine göre her bir resme ait noktaların diğer resimlerdeki karşılıklarını bulmak oldukça kolaydır.

Denklem (92)'yi hatırlarsak eğer,  $p_i = M_i cc$ ,  $i=1,2,3$  eşitliği ile  $i$ . resimdeki bir  $p$  noktası ile bu noktaya karşılık gelen 3B  $cc$  noktası arasındaki ilişki  $M_i$  izdüşümü matrisi ile verilmişti.  $c$  noktasının tam konumunun hesaplanabilmesi için iki adet  $p$  noktası yeterlidir. Ancak üçüncü bir nokta olası hataları daha da azaltacaktır. Bunun yanında üçüncü bir noktayı kullanmak denklem (92) ile verilen sistemin aşırı tanımlanmasına (*overdetermined*) neden olacağından bu sistemin çözümünün en küçük kareler yöntemine göre yapılması gerekmektedir. Bu sistemden  $c$  noktasının en küçük kareler yöntemiyle çözümü ise denklem (93)'te  $cc = (M_i^T M_i)^{-1} M_i^T p_i$  eşitliği ile verilmiştir. Bu denklemler yardımıyla noktaların karşılıklarını bulmak için uygulanabilecek en basit yöntem her üç resimdeki noktaların sırasıyla denklem (93)'te yerine konularak  $c_h$  değerlerini hesaplamaktır. Burada  $cc_h$  hesaplanan  $cc$  noktasını temsil etmektedir.

Elimizde her bir resme ait  $n$  adet nokta olduğunu düşünürsek

$$cc_h = (M_i^T M_i)^{-1} M_i^T p_i(1:n) , \quad (117)$$

ile  $n^3$  adet  $cc_h$  değeri hesaplanabilir. Bu değerler hesaplandıktan sonra her bir  $cc_h$  değeri için tekrar izdüşümleri hesaplanır.

$$p_{hi} = M_i cc_h \quad (118)$$

Yeniden hesaplanan izdüşüm noktaları ile gerçek değerler arasındaki toplam karesel hatanın minimum olduğu yerler bize ilişkili karşılık gelen noktaları verecektir.

$$j_i = \min \{ [p_{hi} - p_i]^2 \} \quad (119)$$

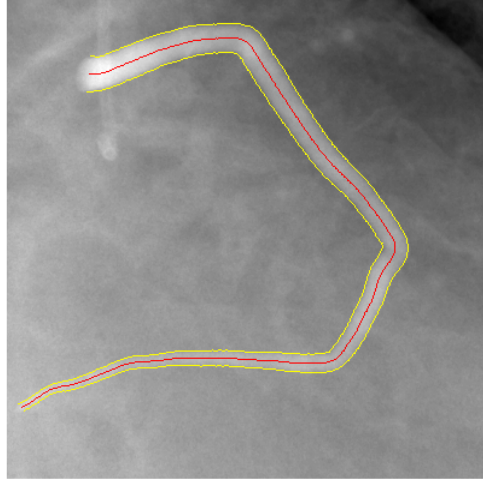
Bu yöntem hesaplama için oldukça fazla hafıza gereksinimine ihtiyaç duyacaktır. Eğer döngüsel olarak hesaplamak gerekirse de bu durumda hesaplama işlemi oldukça uzun sürecektir. Bu durumun önüne geçmek için aşağıdaki iki koşulu sağlayabiliriz.

- Kenar kestirim işlemi her üç resim için de karşılıklı olarak ilgili bölümler üzerinde yapılmalıdır. Bu zaten doğru bir 3B yeniden oluşturma işlemi için zorunludur.

- Seçilen bölgelerin başlangıç ve bitiş bölümleri her bir resim için olabildiğince birbirine yakın olmalıdır. Yani bir resimde damarın neresinden kenar kestirime başlamışsa, diğer resimlerde de aynı yer civarından başlanmalı ve bu durum bitiş noktaları için de sağlanmalıdır. Bu koşul da genelde sağlanabilecek olan bir koşuldur.

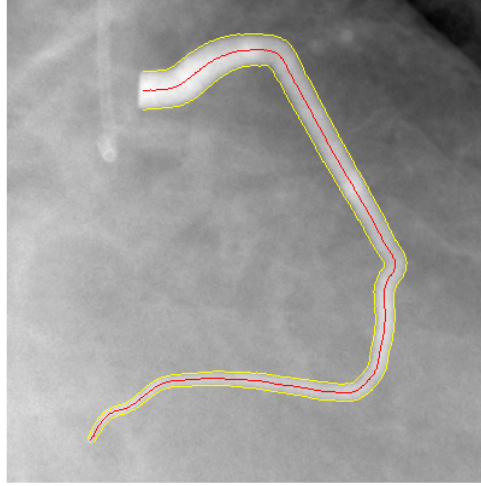
Eğer yukarıdaki her iki koşul da aynı anda sağlanırsa karşılık gelen noktalar yaklaşık olarak sıralı olacaktır. Yani birinci resimdeki 1. nokta ile diğer resimlerdeki 1. veya civarındaki noktalar karşılıklı olacaktır. Bu durumda (117) denkleminde tüm noktalar yerine referans resimden alınan noktanın sırasına göre belirli bir aralıktaki noktaları işleme alabiliriz. Çünkü  $j$ . noktaya karşılık gelen noktalar  $j-sp : j+sp$ ,  $sp=sabit$  gibi bir aralıkta yer alacaktır. Buradaki  $sp$  sabitinin seçimi tüm noktaların sayısı  $n$  ile ilişkilendirilebilir.

Aşağıda üç farklı açıdan alınmış sentetik damar görüntüleri verilmiştir. Bu görüntüler *gaussian psf* ile konvolüsyona tabi tutulmuş ve gerçek bir anjiyo görüntüsünden alınan arkaplan görüntüsü ile toplanmıştır. Görüntülerin izdüşüm açıları sırasıyla (0,60), (30,45), (-30,20) dir.

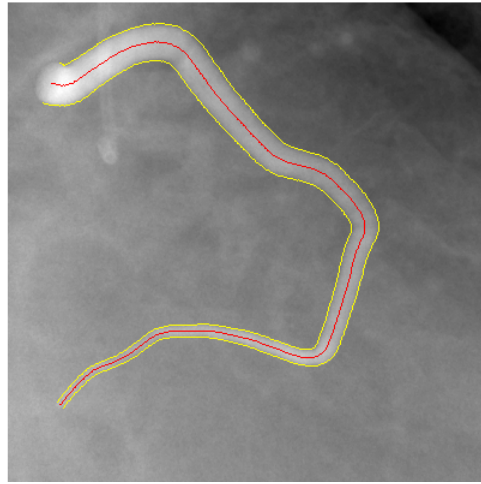


Şekil 51. (0,60) Açılarından alınmış ve kenar kestirimi yapılmış izdüşümü görüntüsü



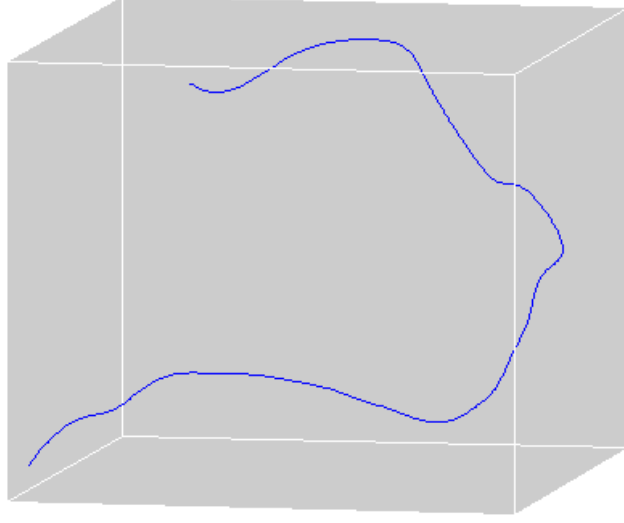


Şekil 52. (30,45) Açılardan alınmış ve kenar kestirimi yapılmış izdüşümü görüntüsü



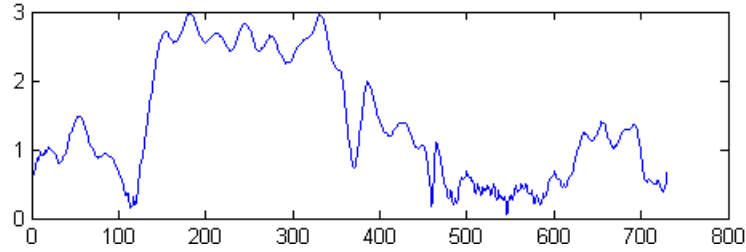
Şekil 53. (-30,20) Açılardan alınmış ve kenar kestirimi yapılmış izdüşümü görüntüsü

Bu görüntülerden elde edilen merkez eksenler ve  $p_{max}$  bilgileri kullanılarak 3B yapı oluşturulmuştur. Öncelikle yukarıda anlatılan ve en küçük kareler yöntemine dayanan algoritma ile 3B merkez eksen oluşturulmuştur. Tüm kenar kestirimi işlemlerinde alınan profillerin başlangıç ve bitiş noktaları damarın aynı bölgelerinden seçilmiştir ve tüm damarlardan alınan örnek sayısı 700 civarında tutulmuştur. Ayrıca karşılık gelen noktaların aranması için gereken nokta aralığının tespitinde kullanılan sabit ise 30 seçilmiştir. Bu parametrelere göre elde edilen iskelet aşağıda verilmiştir.



Şekil 54. Yeniden oluşturulmuş iskelet

Yapılan hata ise aşağıdaki grafikte gösterilmiştir. Burada yatay eksen merkez çizgisine ait nokta sayısını, dikey eksen ise yapılan hatanın piksel olarak değerini göstermektedir.



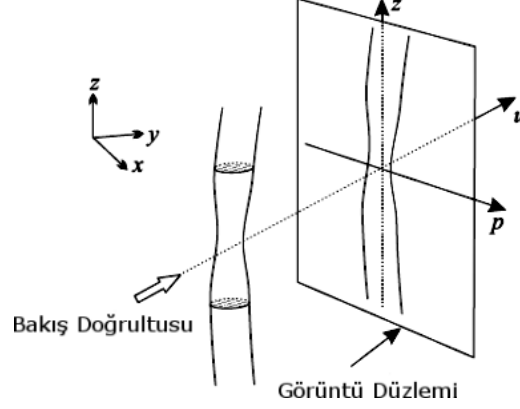
Şekil 55. Her bir merkez noktası için karesel hata (piksel olarak)

## 2.8. Elips Parametrelerinin Hesaplanması

Merkez eksen oluşturulduktan sonraki aşama, bu merkez eksen üzerine yerleştirilecek elips parametrelerini hesaplamaktır. Bu kısımda kaynak [23] 'da açıklanan ve bir elipsin üç farklı iz düşüm görüntüsündeki kenar bilgilerinin kullanılması ile bu elipse ait parametrelerinin belirlenmesi yöntemi baz alınmıştır.

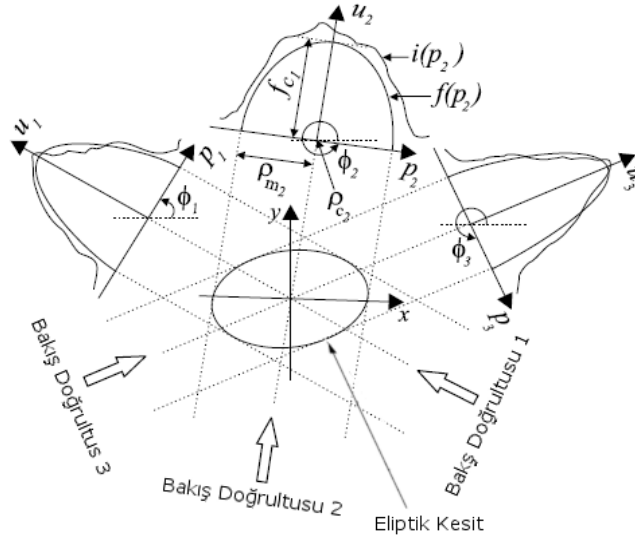
Bahsi geçen çalışmada damar eliptik kesitlerle temsil edilmiş ve  $x,y,z$  kartezyen koordinat sisteminde kamera  $z$  eksenini etrafında döndürülerek izdüşüm alınmıştır yani izdüşümü açısı burada tekdir. Bu tezdeki çalışma ile kaynak [23]'de önerilen çalışma arasındaki fark bu tezde iki adet projeksiyon açısının kullanılmış olmasıdır. Karşılaştırmak

gerekirse tezdeki çalışmada yer alan  $\alpha$  açısı bahsi geçen kaynaktaki çalışmada  $\Phi$  açısına karşılık gelmektedir. Diğer taraftan bu tezdeki  $\beta$  açısı 0 (sıfır) olmaktadır. Bu tür izdüşümleri tek açılı izdüşüm olarak isimlendirebiliriz. Buna göre izdüşümü geometrisi aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 56. Tek açılı izdüşüm geometrisi. İzdüşümler z eksenini etrafında dönülerek alınır.

Elipsleri oluşturma işlemini açıklayan geometrik şekil ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 57. Tek açılı projeksiyonda eliptik kesitin yeniden oluşturulması

Burada eliptik kesite ait izdüşüm profili  $f(p)$ ,  $u$  eksenini boyunca kesitin çizgisel integraline eşittir.

$$f(p) = \int d_c(x, y) du \quad (120)$$

Denklemdaki  $d_c$  ifadesi eliptik kesitin fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$d_c(x, y) = \begin{cases} \mu & \text{eger } a(x - x_0)^2 + b(x - x_0)(y - y_0) + c(y - y_0)^2 \\ 0 & \text{diger} \end{cases} \quad (121)$$

Denklemden yer alan  $a, b, c$  elipsin yarıçaplarını ve  $x-y$  düzlemindeki oryantasyonunu belirleyen katsayılar ve  $(x_0, y_0)$  ikilisi de elipsin merkez koordinatlarını belirleyen parametrelerdir.  $a, b, c$  katsayılarının bir elips belirlemesi için aşağıdaki koşullar sağlanmalıdır.

$$b^2 - 4ac < 0, \quad a > 0, \quad c > 0 \quad (122)$$

$x-y$  düzlemi ile  $p-u$  düzlemi arasındaki ilişki aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ u \end{bmatrix} \quad (123)$$

Buradan elde edilen  $x, y$  değerlerini denklem (121) de yerine koyarsak aşağıdaki denklemi elde ederiz

$$f(p_j) = \begin{cases} \mu_{c_j} f_{c_j} \sqrt{1 - \frac{(p_j - \rho_{c_j})^2}{\rho_{m_j}^2}} & \text{eger } |p_j - \rho_{c_j}| \leq \rho_{m_j} \\ 0 & \text{diger} \end{cases} \quad (124)$$

$$j=1, 2, 3;$$

Yukarıdaki denklemde yer alan  $\rho_m, f_c, \rho_c$ , elipsin profilinden elde edilen parametrelerdir.  $\rho_m$  profilin görünen genişliğinin yarısı,  $f_c$  profilin genliği ve  $\rho_c$  ise profilin merkezidir. Bu parametreler ile  $a, b, c$  parametreleri ve izdüşüm açısı  $\Phi$  ile olan ilişki aşağıda verilmiştir.

$$\rho_{m_j} = 2\sqrt{\frac{a \sin^2(\phi_j) - b \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + c \cos^2(\phi_j)}{4ac - b^2}} \quad (125)$$

$$fc_j = \frac{2}{\sqrt{a \sin^2(\phi_j) - b \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + c \cos^2(\phi_j)}} \quad (126)$$

$$\rho_{c_j} = \cos(\phi_j)x_0 + \sin(\phi_j)y_0 \quad (127)$$

Kenar parametreleri ( $\rho_m$ ) üzerinden elips parametrelerini ( $a, b, c$ ) tekrar elde etmek için denklem (125) aşağıdaki gibi tekrar düzenlenir.

$$\frac{a \sin^2(\phi_j) - b \sin(\phi_j) \cos(\phi_j) + c \cos^2(\phi_j)}{4ac - b^2} = \frac{\rho_{m_j}}{4} \quad (128)$$

Bu denklemin üç resim için de yazılmasıyla bilinmeyenleri  $a, b, c$  olan aşağıdaki doğrusal olmayan denklem sistemi elde edilir. Bu denklemde yer alan  $e, g,$  ve  $h$  yardımcı değişkenlerdir.

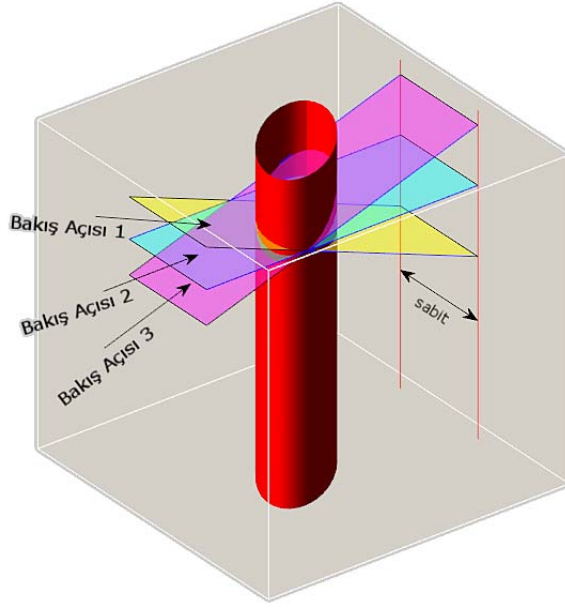
$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{(4eh - g^2)} \begin{bmatrix} e \\ g \\ h \end{bmatrix} \quad (129)$$

Ve

$$\begin{bmatrix} e \\ g \\ h \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \sin^2 \phi_1 & -\sin \phi_1 \cos \phi_1 & \cos^2 \phi_1 \\ \sin^2 \phi_2 & -\sin \phi_2 \cos \phi_2 & \cos^2 \phi_2 \\ \sin^2 \phi_3 & -\sin \phi_3 \cos \phi_3 & \cos^2 \phi_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \rho_{m1}^2 \\ \rho_{m2}^2 \\ \rho_{m3}^2 \end{bmatrix} \quad (130)$$

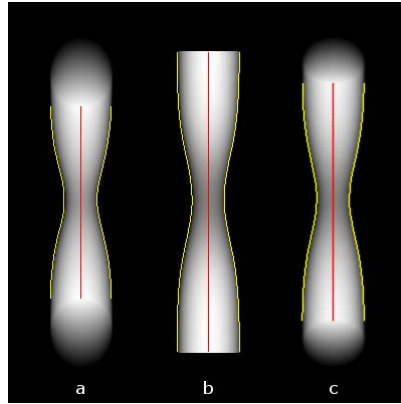
Buradan elde edilecek elips parametreleri  $0^\circ$  (sıfır derece)  $\beta$  açısı için elde edilmiştir. Ancak bu denklemler sıfırdan farklı  $\beta$  açısı için de geçerli olacaktır ki bu tezin temel alınan çalışmayla olan farkı bu kısımdadır.

Aşağıdaki şekilde eliptik kesitli bir silindir gösterilmiştir.



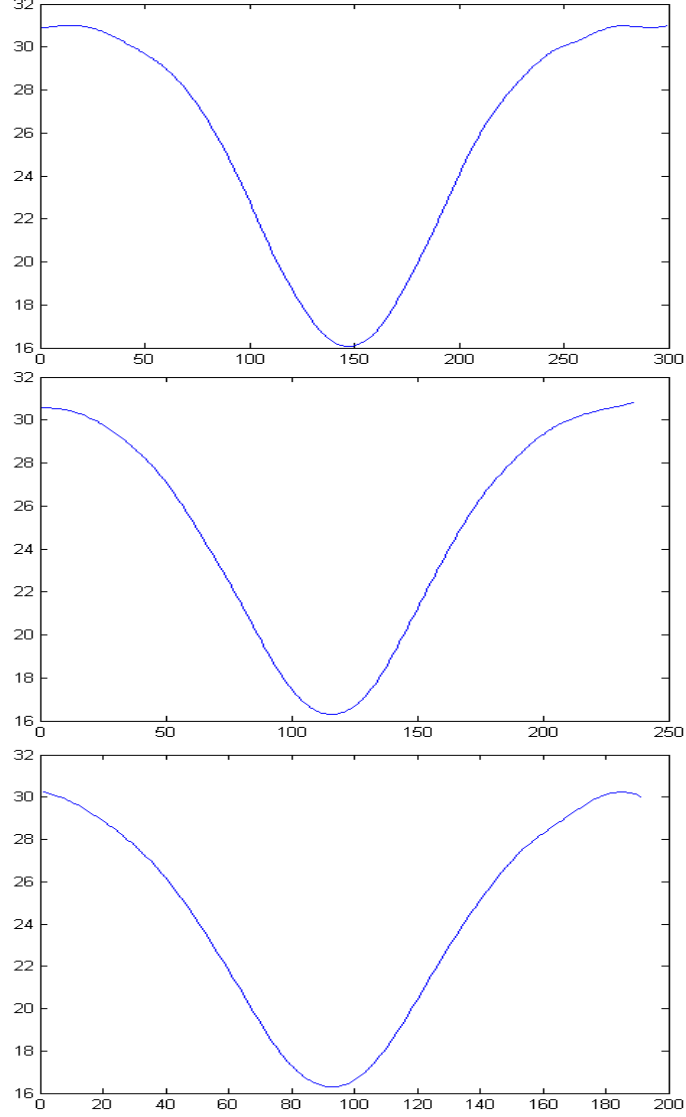
Şekil 58.  $\alpha$  açısı sabit tutularak  $\beta$  açısı değişimine göre bakış düzlemleri

Bu silindir üzerinden sabit bir  $\alpha$  açısı kullanılarak üç kesit alınmıştır. Bu kesitlerin her biri farklı  $\beta$  açısı değerlerindeki bakış düzlemlerini temsil etmektedir. Bakış açısı 2 ile gösterilen düzlem kaynak [23]'de anlatılan durum ile aynı durumu temsil etmektedir. Yani bu bakışta  $\beta$  açısı  $0^\circ$  (sıfır) değerini almıştır. Bu bakış açısı ile alınan profilin görünen uzunluğu yani  $p_{max}$  değeri, diğer açılardan alınmış (Bakış Açısı 1 ve Bakış Açısı 3) profillerin  $p_{max}$  değeri ile aynı olacaktır. Bu eşitlik durumu bilgisayarda oluşturulmuş yapay bir damar modeli üzerinde gösterilmiştir.



Şekil 59. Sabit  $\alpha$  açısı kullanılarak alınmış izdüşümler a){0,-30}, b){0,0} ve c){0,20}

Aşağıdaki şekillerde ise yukarıdaki izdüşümlerden elde edilen  $p_{max}$  değerleri sırasıyla gösterilmiştir. Bu şekillerde, yatay eksen piksel olarak merkez eksen uzunluğunu, dikey eksen ise yine piksel cinsinden  $p_{max}$  değerlerini göstermektedir.



Şekil 60. Sabit  $\alpha$  açısı kullanılarak alınmış projeksiyonlara ilişkin  $p_{max}$  değerleri (sırasıyla)

Bu şekillerden de anlaşıldığı gibi  $\alpha$  açısı sabit olmak üzere  $\beta$  açısı değiştirilerek elde edilen görüntülerdeki  $p_{max}$  değerleri aynı olacaktır, aralarındaki tek fark merkez eksen uzunluklarıdır. Merkez eksen uzunlukları farkı ise iskelet oluşturma bölümünde anlatıldığı gibi  $\beta$  açısı değerlerine göre telafi edilmektedir.

Denklem (129) kullanılarak elips parametreleri elde edildikten sonra elipsler merkez eksen üzerine genelleştirilmiş silindirler bölümünde anlatılan biçimde yerleştirilir. Burada elips parametreleri olarak  $a, b, c$  değerleri yerine yarıçaplar  $r1, r2$  ve  $x-y$  düzlemindeki dönme açısı  $alfa$  kullanılmıştır. Bu nedenle  $a, b, c$  parametreleri aşağıdaki eşitlikler yardımıyla birbirlerine dönüştürülebilirler.

$$r1 = \sqrt{\frac{2(a + c + \sqrt{(a - c)^2 + b^2})}{-b^2 + 4ac}} \quad (131)$$

$$r2 = \sqrt{\frac{2(a + c - \sqrt{(a - c)^2 + b^2})}{-b^2 + 4ac}} \quad (132)$$

$$alfa = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{-b}{c - a}\right) \quad (133)$$

Ve

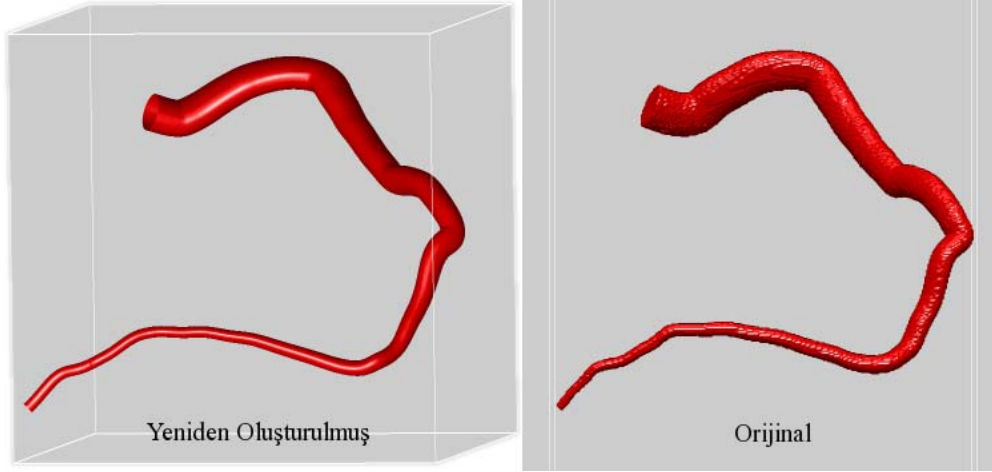
$$a = \left(\frac{\cos(alfa)}{r1}\right)^2 + \left(\frac{\sin(alfa)}{r2}\right)^2 \quad (134)$$

$$b = \sin(2alfa)\left(\frac{1}{r1^2} - \frac{1}{r2^2}\right) \quad (135)$$

$$c = \left(\frac{\sin(alfa)}{r1}\right)^2 + \left(\frac{\cos(alfa)}{r2}\right)^2 \quad (136)$$

Tüm bu parametrelerin hesaplanmasıyla ve elipslerin merkez eksene giydirilmesiyle 3B damar oluşturulmuş olur. Yüzey olarak oluşturulmuş ve boyanmış damar yapısı aşağıda gösterilmiştir. Ayrıca karşılaştırmak amacıyla orijinal damarın yüzey görüntüsü de verilmiştir.

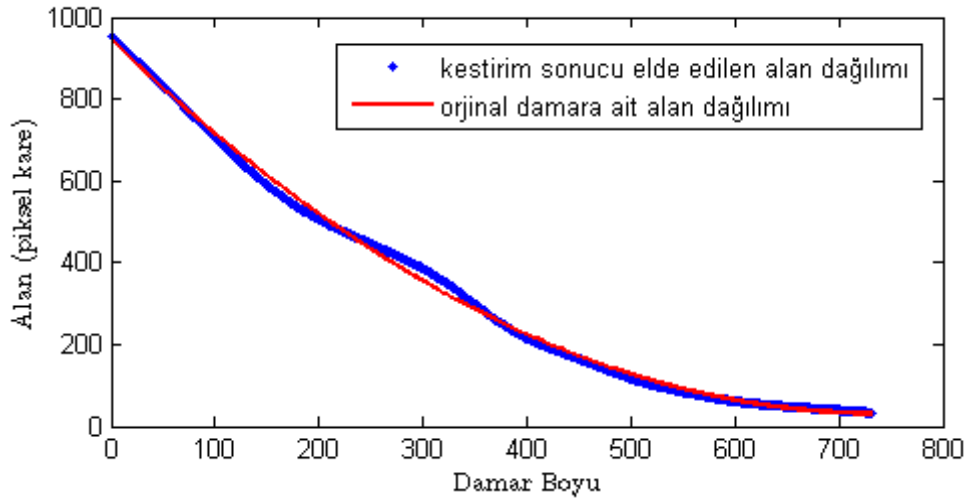




Şekil 61. 3B Yeniden oluşturulmuş damar ve orijinal damar

Sayısal bir karşılaştırma ve performans testi olarak ise orijinal damar yapısı boyunca hesaplanan alanların, yeniden oluşturulan damar için hesaplanan alanlar ile karşılaştırması aşağıda verilmiştir.

İlk grafikte alanların piksel<sup>2</sup> olarak gösterimi yer almaktadır. Burada anlaşılan şudur ki, damar çapı daralmasının kestirimdeki hataya olan etkisi çok fazla görülmemektedir. Bunun yanında izdüşüm açılarına bağlı olarak resimlerden elde edilen bilgi miktarı hata oranını değiştirmektedir.



Şekil 62. Damar boyunca alanların karşılaştırması

## 2.9. Gerçek Görüntüler Üzerinde Yapılan Çalışmalar

Gerçek anjiyo görüntüleri üzerinde yapılan deneysel çalışmalar ve sonuçları aşağıda verilmiştir.

KTÜ Tıp Fakültesinden elde ettiğimiz anjiyo görüntüleri arasından seçtiğimiz üç görüntüye öncelikle kenar belirleme işlemi uyguladık. Görüntüler DICOM formatında olduğu için optik büyütme oranları ve dönme açıları bu resimlerde ayrı bir veri olarak saklanmaktadır. 3B yapıyı doğru bir biçimde oluşturmak için optik büyütme oranlarını bilmemiz gerekmektedir. Bu bilgiler DICOM dosyasının bilgilerinin saklandığı kısımda aşağıdaki başlıklar ile bulunmaktadır.

*DistanceSourceToDetector*: SID olarak kısaltılır ve x-ışını kaynağının görüntü yoğunlaştırıcısına (II) olan uzaklığını verir.

*DistanceSourceToPatient*: SOD olarak kısaltılır ve x-ışını kaynağı ile hastanın bulunduğu masa arasındaki uzaklığı verir.

*IntensifierSize*: IS olarak kısaltılır ve II'in görüş alanı büyüklüğünü verir.

*PositionerPrimaryAngle*: PA olarak kısaltılır ve LAO veya RAO açılarını verir.

*PositionerSecondaryAngle*: SA olarak kısaltılır ve CRA veya CAU açılarını verir.

Görüntülerden elde edilen merkez eksen ve  $p_{max}$  bilgilerinin, referans olarak seçilen görüntüye ait aynı bilgiler ile optik büyütme olarak benzemesi gerekir. Bunu sağlamak için *SID*, *SOD* ve *IS* bilgileri kullanılır.

Referans görüntümüzdeki bilgileri *SID<sub>r</sub>*, *SOD<sub>r</sub>* ve *IS<sub>r</sub>* ile gösterelim. Büyütme oranını değiştirmek istediğimiz görüntünün bilgileri ise *SID<sub>c</sub>*, *SOD<sub>c</sub>* ve *IS<sub>c</sub>* ile gösterilirse aralarındaki büyütme sabiti  $c_m$  'yi aşağıdaki gibi hesaplarız.

$$c_m = IS_c / IS_r * (SID_r / SOD_r) / (SID_c / SOD_c) \quad (137)$$

Buradan elde edilen sabitler ile diğer ilgili iki resimden elde edilen merkez eksen ve  $p_{max}$  bilgileri çarpılarak büyütme oranı tüm resimler için sabitlenir. Bundan sonra yapılan işlemler bilgisayar simülasyonu ile oluşturulan damarın yeniden oluşturulması için yapılan işlemler ile aynıdır.

Burada kullanılan gerçek anjiyo görüntülerine ait bilgiler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5. Gerçek anjiyo görüntüleri için izdüşüm verileri

	SID(mm)	SOD(mm)	IS(mm)	PA(derece)	SA(derece)
Resim1	983	679.25	170	-31.4	-17.6
Resim2	970	751.55	170	52	-40.8
Resim3	1009	718.66	170	2.1	-32.4

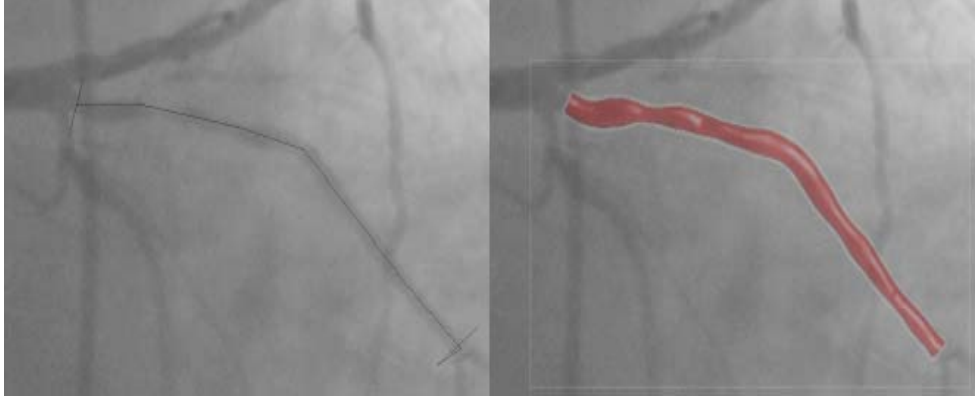
Kullanılan resimler ve üzerlerine elde edilen 3B yapının ilgili açıdan alınmış görüntüleri bindirilmiş durumları aşağıda verilmiştir.



Şekil 63. Gerçek anjiyo resmi 1

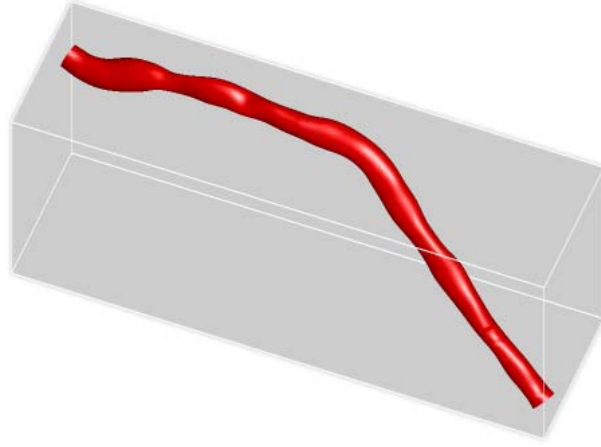


Şekil 64. Gerçek anjiyo resmi 2



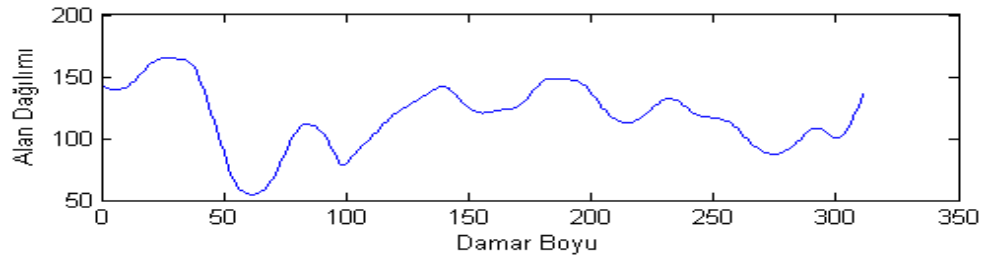
Şekil 65. Gerçek anjiyo resmi 3

Elde edilen 3B yapı aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 66. Gerçek anjiyo görüntüsünden elde edilen 3B damar

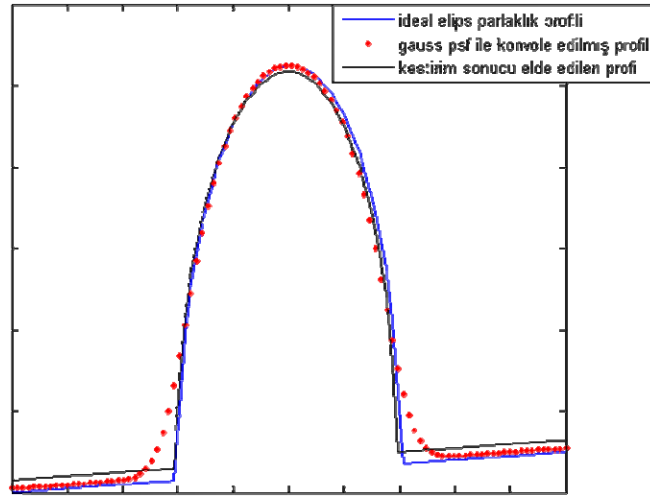
Bu damara ait kesit alanları dağılımı grafiği ise aşağıdaki gibidir.



Şekil 67. Gerçek damar görüntüsü ile oluşturulan 3B damara ait alan dağılım grafiği. Damar üzerinde yer alan daralma bölgesi açıkça görülmektedir

### 3. İRDELEME VE SONUÇLAR

Yapılan deneysel çalışmalarda görülmüştür ki kenar kestirimi için kullanılan damar parlaklık modelinde buğulanma etkisinin parametrik olarak modellenmemesinin kestirimin başarımı üzerinde olumsuz bir etkiye sahip değildir. Kullanılan model basit ve anlaşılır olmanın yanı sıra damar genişliği, gürültü miktarı ve damar buğulanma miktarı gibi etkenlere karşı yapılan performans testlerinde oldukça başarılı sonuçlar vermiştir.



Şekil 68. Damar bulanıklığının kestirim üzerindeki etkisi. İdeal bir damar profili standart sapması 5 piksel olan *gaussian psf* ile konvolüsyona tabi tutulmuş daha sonra is kestirim işlemine alınmıştır. Kestirim sonucu elde edilen profil ile gerçek profil kenar noktalarında birbirlerine oldukça yakındır.

Arkaplan temsili için polinom kullanmak yerine *spline* fonksiyonlarının kullanılması polinomların temsil etmekte zorlandıkları karmaşık arkaplanlarda daha iyi sonuçlar vermektedir. Yani arkaplan temsili için yapılan hata azalmaktadır.

3B merkez eksen oluşturma aşamasında yapılan işlemler referans alınan çalışmadakinden farklıdır. Bu farklılığın nedeni bu tezdeki çalışmada bakış açısının bir yerine iki açıdan oluşması serbestliğidir. Kaynak [23]'deki çalışmada damar merkez eksenini  $z$  eksenine paralel uzandıği için yerleştirilecek elipsler  $p-u$  düzlemine yerleştirilmektedir. Buna karşılık bu tezde herhangi bir eksene paralellik söz konusu değildir ve merkez eksen üzerinde elipslerin yerleştirilebilmeleri için dik düzlemler tanımlanmıştır.

3B damar yapısı oluşturulurken kullanılan izdüşüm açıları her ne kadar keyfi olsa da aslında damar hakkında en fazla bilgiyi verecek açılar seçilmelidir. Oluşturulan damarın gerçeğine benzemesi bakımından bu önemlidir. Bunun yanı sıra kullanılan açılar ya da diğer bir ifadeyle izdüşümü açıları birbirinden olabildiğince uzak seçilmelidir ki bu en fazla bilgiyi içermesi bakımından da gereklidir. Aksi halde aynı veya çok yakın açı değerlerine sahip görüntüler ile doğru bir 3B yapı oluşturulamaz.

#### 4. ÖNERİLER

Bu çalışmada üç farklı ve keyfi açıdan alınmış anjiyo görüntülerini kullanarak bu görüntüdeki damar yapısını 3B olarak elde etmeyi amaçladık. Bu sayede kalbin damarları üzerinde daha ayrıntılı bir inceleme yapmak mümkün olacaktır. Diğer bir amacımız ise geliştirilen programları doktorların hizmetine sunmaktır. Ancak yapabildiğimiz çalışmalar bu amaçlar için giriş seviyesinde sayılabilecek düzeydedir.

Amaçlarımızı gerçekleştirmek doğrultusunda ileride yapılabilecek çalışmalar arasında öncelikle kenar kestirimi algoritmasının tam otomatik bir hale getirilmesi yer alır. Özellikle günümüzde gelişim aşamasında olan yapay zekâya dayalı damar takip algoritmaları geliştirilerek merkez çizgisi seçimi işlemi için ayrılan zamandan tasarruf edilebilir.

Diğer taraftan merkez çizgisi belirleme işleminde kullanıcı ile etkileşim, anjiyo görüntülerinden 3B yapı oluştururken karşılaşılan en büyük sorunların çözümü için bir avantaja dönüştürülebilir. Bu sorunların en önemlileri, daha yüksek bir doğrulukla 3B yapı oluşturmak için gereken görüntülerin kalibrasyonu ve merkez eksenlerin oluşturulması için gereken nokta karşılıklarının tespitidir. Kullanıcı tarafından belirlenecek merkez eksenler kalibrasyon yapmak için kullanılabilir. Ayrıca 3B merkez eksen eğer 3B *spline* yardımı ile oluşturulursa, merkez eksenler bu *spline* fonksiyonunun şeklinin belirlenmesinde kullanılabilir.

3B yapı oluşturmada oluşturulan yapının başarımı temelde kenar belirleme algoritmasına dayanmaktadır. Bu nedenle kenar belirleme algoritması değişen görüntü şartlarına karşı ne kadar dirençli olursa başarı oranı o kadar artar. Bu durum parametrik modelleme ile kenar kestirimi sayesinde önemli ölçüde sağlanmıştır. Ancak bu algoritma damar dallanmalarını en genel şekliyle içerecek şekilde daha da geliştirilebilir.

Son olarak geliştirilen programlara kullanıcı ara yüzü eklenerek ilgili doktorların hizmetine sunulabilir. Bu sayede ihtiyaçlar ve talepler daha iyi belirlenir ve programın profesyonelliği artırılabilir.

## 5. KAYNAKLAR

1. Canero C, 3D Reconstruction of the Coronary Tree Using Biplane Snakes. Doktora Tezi, Universitat de Barcelona, 2002
2. Messenger J. C., Chen S. Y. J, Carroll J. D. ve Burchenal J.E.B., 3D Coronary Reconstruction from Routine Single-plane Coronary Angiograms International Journal of Cardiac Imaging, 16 (2000) 413
3. Pellot C, Herment A, Sigelle M, Horain P, Maitre H ve Peronneau P., A 3D Reconstruction of Vascular Structures from Two X-ray Angiograms Using an Adapted Simulated Annealing Algorithm. IEEE Trans Med Imag, 13 (1994) 48-60
4. Nguyen TV ve Sklansky J., Reconstructing the 3D Medial Axes of Coronary Arteries in Single-View Cineangiograms. IEEE Trans Med Imag, 13 (1994) 48-60
5. Pujol O, Canero C, Radova P, Toledo R, Saludes J, Gil D, Villanueva JJ, Mauri J, Garcia B, Gomez J, Cequier A ve Esplugas E., Three-Dimensional Reconstruction of Coronary Tree Using Intravascular Ultrasound Images, Computers in Cardiology, 26 (1999) 265-268
6. Kirbas C ve Quek F. A Review of Vessel Extraction Techniques and Algorithms, ACM Computing Surveys 36 (2004) 81-121
7. Brejl M ve Sonka M., Object Localization and Border Detection Criteria Design in Edge-Based Image Segmentation: Automated Learning from Examples, IEEE Transactions on Medical Imaging, 19 (2000) 973-985
8. Hoover A., Kouznetsova V. ve Goldbaum M. Locating Blood Vessels in Retinal Images by Piecewise Threshold Probing of a Matched Filter Response, IEEE Transactions on Medical Imaging, 19 (2000) 203-210
9. Selzer, R.H., Blankerhorn, D.H., Crawford, D.W., Brooks, S. H. ve Barndt, R., Computer Analysis of Cardiovascular Imagery, Proceeding of The Caltech/JPL Conference Image Processing Technology, Data Sources and Software for Commercial and Scientific Applications, (1976) 1-20.
10. Ledbetter, D.C., Selzer, R.H., Gordon, R.M., Blankerhorn, D.H. ve Sanmarco, M.E., Computer Quantitation of Coronary Angiograms, Noninvasive Cardiovascular Measurements, Miller (1978) 17-20.
11. Sanders J., Alderman L., Harrison D.C. ve Sanders V., Coronary Artery Quantitation Using Digital Image Processing Techniques, Comp. in Card., (1979) 15-20.
12. Spears J.R., Sandor J., Balm D.S., ve Pauli S., The Minimum Error in Estimating Coronary Luminal Cross-Sectional Area from Cineangiographic Diameter Measurements, Catheterization and Cardiovascular Diagnosis, 9 (1983) 119-128.



13. Reiber J.H.C., Gerbrands J.J., Kooijman C.J., Schuurbiens J.C.H., Slager C.J. den Boer, A. ve Serruys P.W., Quantitative Coronary Angiography with Automated Contour Edge Detection and Densitometry; Technical Aspects, <http://hdl.handle.net/1765/4222> 21 Mart 2007.
14. Kooijman C.J., Reiber J.C.H., Gerbrands J.J., Schuurbeir J.C.H., Slager C.J., Boer A. den ve Serruys ,P.W., Computer-Aided Quantitation of the Severity of Coronary Obstructions from Single View Cineangiograms, First IEEE Compt. Soc. Int. Symp. on Medical Imaging and Image Interpretations, IEEE Cat. 82, CH1804-4 (1982) 59-64.
15. Reiber J.H.C., Kooijman C.J., Slager C.J., Gerbrand J.J., Schuurbier J.C.H., Boer A.D., Boer W.D., Wijns W., Serruys P.W. ve Hugenholtz G., Coronary Artery Dimensions from Cineangiograms. Methodology and Validation of a Computer-Assisted Analysis Procedure, IEEE Trans. Med. Imaging, MI-3 (1984) 131-141.
16. Yuen H.K., Illingworth J. ve Kittler J., Detecting Partially Occluded Ellipses Using the Hough Transform, Image and Vision Computing, 7 (1989) 31-37.
17. Kayıkçıoğlu T ve Mitra S., A New Method for Estimating Dimensions and 3D Reconstruction of Coronary Arterial Trees from Biplane Angiograms, Sixth Annual IEEE Symposium on Computer-Based Medical Systems, Haziran 1993, 153-158.
18. Bronsvort W. F ve Klok F, Ray Tracing Generalized Cylinders, ACM Transactions on Graphics, 4 (1985) 291-303.
19. Madsen K, Nielsen H B ve Tingleff O., Methods for Non-linear Least Squares Problems, 2. Baskı Informatics and Mathematical Modeling, Technical University of Denmark, 2004.
20. Pollock D S G., Smoothing with Cubic Splines. Queen Mary and Westfield College, The University of London 1993.
21. Gorges S, Kerrien E, Berger M, Troussset Y, Pescatore J, Anxionnat R ve Picard L, Model of A Vascular C-arm for 3D Augmented Fluoroscopy in Interventional Radiology, MICCAI 3750 (2005) 214-222.
22. Dumay A, Reiber J. ve Gerbrands J., Determination of Optimal Angiographic Viewing Angles: Basic Principles and Evaluation Study, IEEE Trans. on Med. Imag., 13 (1994) 13-24.
23. Kayıkçıoğlu T, Gangal A ve Turhal M., Reconstructing Coronary Arterial Segments from Three Projection Boundaries, Pattern Recognition Letters 22 (2001) 611-624.
24. Zhang Z., Determining the Epipolar Geometry and its Uncertainty: A Review, International Journal of Computer Vision, 27 (1998) 161-195
25. Molina C, Prause G, Radeva P ve Sonka M., 3D Catheter Path Reconstruction from Biplane Angiograms, Proc. SPIE 3338 (1998) 504-512

26. Canero C., Deformable Models Applied in Medical Imaging. Tech Report 33, Computer Vision Centre, Universitat Autònoma de Barcelona 1999.
27. Ballard D. H. ve Brown C. M., Computer Vision, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1982.
28. Shani U. ve Ballard D. H. Splines as Embeddings for Generalized Cylinders, Comput. Graphics Image Process 27 (1984) 129-132.
29. Klok F. Two Moving Coordinate Frames for Sweeping along a 3D Trajectory, Computer Aided Geometric Design, 3 (1986) 217-229.
30. Bloomenthal J., Calculation of Reference Frames Along a Space Curve. Graphics Gems, (1990) 567-571.
31. Chow C.K. ve Kneko T., Boundary Detection of Radiographic Images by Threshold Method, In proceedings, IFIB Congress, (1971) 130-134.
32. Brown G., Bolson E., Frimer M. ve Dodge H.T., Quantitive Coronary Arteriography-Estimation Of The Dimensions, Hemodynamic Resistance and Atheroma Of Coronary Artery Lesions Using The Arteriogram And Digital Computation, Circulation, 55, 2 (1977) 329-337.
33. Hoover A., Kouznetsova V. ve Goldbaum M., Locating Blood Vessels in Retinal Images by Piecewise Threshold Probing of a Matched Filter Response, IEEE Transactions on Medical Imaging, 19 (2000) 203-210.
34. Merle AB, Finet G, Lienard J ve Magnin IE, 3D Reconstruction of the Deformable Coronary Tree Skeleton from Two X-Ray Angiographic Views, Computers in Radiology 25 (1998) 757-760.
35. Coatrieux JL, Garreau M, Collorec R ve Roux C., Computer Vision Approaches for the Three-Dimensional Reconstruction of Coronary Arteries : Review and Prospects. Critical Reviews in Biomedical Engineering 22 (1994) 1-38.
36. Wahle A, Oswald H ve Fleck E, 3D Heart-Vessel Reconstruction from Biplane Angiogram. IEEE Computer Graphics and Applications (1996) 65-73.
37. Hoffmann KR, Sen A ve Lan L, Determination of 3D Vessel Trees from Biplane Images for Coronary Angiography, Computer Assisted Radiology and Surgery (1997) 162-165.
38. Chen S J ve Carrol J D., 3D Reconstruction of Coronary Arterial Tree to Optimize Angiographic Visualization. IEEE Trans Med Imag, 19 (2000) 318-336.
39. Türe H., Parametrik Model Kullanarak Tıbbi Görüntülerde Kenar Belirleme, Yüksek Lisans Tezi Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1997.

## ÖZGEÇMİŞ

Mehmet ÖZTÜRK, 24.09.1980 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlköğretim öğrenimini Kireçhane İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Trabzon İmam-Hatip Lisesi'nde tamamladı. 1999 – 2000 eğitim-öğretim yılında, Kadir Has Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektronik Mühendisliği Bölümü'nü kazandı. 2004 yılında bu bölümden bölüm üçüncülüğü ile Elektronik Mühendisi olarak mezun oldu. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Kasım 2005'de aynı bölümde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. Halen bu görevine devam etmektedir. Yabancı dil olarak İngilizce bilmektedir.