DOKU UZAYLARINDA
DİMETRİKLER ÜZERİNE

Hamdi Mustafa CİHAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı
Prof. Dr. Tamer UĞUR
2018

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DOKU UZAYLARINDA DİMETRİKLER ÜZERİNE

Hamdi Mustafa CİHAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Topoloji Bilim Dalı

ERZURUM
2018

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

DOKU UZAYLARINDA DİMETRİKLER ÜZERİNE

Prof. Dr. Tamer UĞUR danışmanlığında, Hamdi Mustafa CİHAN tarafından hazırlanan bu çalışma 17/01/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans tezi olarak **oybirliği/~~oy çokluğu~~ (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Tamer UĞUR *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Ceren Sultan ELMALI *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 18/01/2018 tarih ve 3/32 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cavit KAZAZ
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DOKU UZAYLARINDA DİMETRİKLER ÜZERİNE

Hamdi Mustafa CİHAN

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Topoloji Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Tamer UĞUR

Bu tezde, ditopolojik doku uzaylarında dimetrik kavramı üzerinde çalışılmıştır. Daha önceki yıllarda üzerinde çok az çalışılan dimetrik kavramı üzerinde açık ve kapalı kümelerle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir ve diğer çalışmalardan farklı olarak tümleyenli dimetrik doku uzayı kavramı ilk defa olarak tanımlanmıştır. Ayrıca pseudo dimetrikler yardımıyla ditopoloji elde edilmiştir.

2018, 49 sayfa

Anahtar kelimeler: Ditopolojik Doku Uzayları, Dimetrik, Quasi-Pseudo Metrikler, Pseudo Dimetrikler

ABSTRACT

Master Thesis

ON DIMETRICS TEXTURE SPACES

Hamdi Mustafa CİHAN

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Topology

Supervisor: Proff. Dr. Tamer UĞUR

In this study, we study on the concept of dimetric in ditopological texture space. On the concept of dimetric which is studied very little in previous years is obtained some results related to open and closed sets. And unlike other studies, we defined the concept of complementary dimetric texture space. Also, we obtained ditopology by pseudo dimetrics.

2018, 49 pages

Keywords: Ditopological Texture Spaces, Dimetric, Quasi-Pseudo Metrics, Pseudo Dimetrics

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunda çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Tamer UĞUR'a en içten dileklerimle teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde çok değerli bilgi ve deneyimlerinden istifade ettiğim Topoloji Bilim Dalı hocaları Sayın Prof. Dr. Ahmet KÜÇÜK, Sayın Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU ve Sayın Ceren Sultan ELMALI'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında kendilerinden görmüş olduğum destek ve sonsuz güvenden dolayı başta eşim Sultan CİHAN olmak üzere, aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Hamdi Mustafa CİHAN
Ocak, 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

L	: Örgü
$(L, \leq)$	: Tam örgü
(i_S, I_S)	: $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki birim dibağıntı (birim difonksiyon)
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$	: Ditopolojik doku uzayı
$(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$	: Alt ditopolojik doku uzayı
(r, R)	: Dibağıntı
$(r, R)^{\leftarrow}$	: Dibağıntının tersi
$\prod_{i \in I} A_i$	: A_i ailesinin çarpımı
A^b	: A nın çekirdeği
$F^{\rightarrow}A$	: A nın kogörüntüsü
$F^{\leftarrow}A$	: A nın ters kogörüntüsü
P_s	: p-küme
Q_s	: q-küme
$(S, \mathcal{S}, \tau_\rho, \kappa_\rho)$	: Dimetrik ditopolojik doku uzayı
$(S, \mathcal{S}, \sigma)$	: Tümleyenli doku uzayı
$(S, \mathcal{S})$	: Doku uzayı
S_τ	: τ nun bir alttabanı
S_κ	: κ nın bir alttabanı
(f, F)	: Difonksiyon
$f^{\rightarrow}A$	: A nın görüntüsü
$f^{\leftarrow}A$	: A nın ters görüntüsü
$\overline{\rho}$	: Pseudo metrik
$\underline{\rho}$	: Pseudo kometrik
$\rho = (\overline{\rho}, \underline{\rho})$	: Dimetrik
$[A]$	: A nın kapanışı
$]A[$	: A nın içi
$\wedge$	: İnfimum (İnf)

$\vee$	: Supremum (Sup)
$D(a,r)$	: a merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$D[a,r]$	: a merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar
d	: Metrik
$\mathcal{P}(S)$	: S nin tüm altkümeleri ailesi

1. GİRİŞ

Metrik kavramı, $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ Öklid uzayındaki uzunluk kavramından gelmektedir. Bir metrik uzay, kabaca üzerinde bir uzunluk kavramı tanımlı olan bir kümedir. Her metrik uzaydan metrik topolojisi adı verilen bir topoloji elde edilir. Bazı topolojik kavramların anlaşılması metrik uzaylarda daha basittir. Topolojik uzaylardaki bir çok kavram metrik uzaylardaki kavramların geliştirilmiş halidir.

Doku uzayları teorisi bir çok matematiksel yapının noktadan ve tümleyenden bağımsız olarak ifade edilebilmesini sağlamakta ve söz konusu yapılar için doğal yaklaşımlar sunmaktadır.

Doku uzayları kavramı literatüre ilk defa Brown (1993a, 1993b) tarafından, belirsiz (fuzzy) kümelerin nokta-küme tabanlı bir karşılığı olarak, belirsiz yapılar (fuzzy structure) adıyla sunularak tanıtılmıştır. Daha sonra bu yapılar Brown ve Ertürk (2000a, 2000b) tarafından geliştirilerek doku uzayları (texture spaces) ismi verilmiştir ve bundan sonraki süreçte bu alanda yapılan çalışmalarda bu ad kullanmıştır.

2004 yılında Lawrence M. Brown, Rıza Ertürk ve Şenol Dost tarafından iki ayrı makale yayınlanmış ve bu makalelerde topolojinin temel kavramları doku uzaylarına taşınmıştır.

$(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde tanımlanan ditopoloji kavramı genel olarak birbirinden bağımsız olan açık ve kapalı küme şartlarını sağlayan τ, κ biçimindeki (τ, κ) ikilisidir. τ nun elemanları açık kümeler ve κ nın elemanları ise kapalı kümeler olarak adlandırılır. Diğer taraftan ditopolojiler, ikili topolojilerin bir genellemesi olup birçok bitopolojik kavram ditopolojik doku uzayların içinde ifade edilebilir. Ayrıca belirsiz topolojilerin basit dokular üzerindeki ditopolojiye karşılık gelebilir olması yönüyle de doku uzayları teorisinde elde edilen sonuçlar kısmen bitopoloji ve belirtisiz topolojilere uygulanabilir.

Sunulan bu tez, Giriş, Kuramsal Temeller, Materyal ve Yöntemler, Araştırma Bulguları ve Tartışma ve Sonuçlar olmak üzere beş bölümden oluşmaktadır. Kuramsal Temeller bölümünde ihtiyacımız olan temel topolojik tanımlar ve teoremler verilmiştir. Materyal ve Yöntemler bölümünde, doku uzayları ve ditopolojik doku uzayları hakkında tanım ve teoremler verilmiştir. Araştırma Bulguları bölümünde topolojik uzaylardaki metrik uzayların karşılığı olan dimetrik kavramı ve bununla ilgili tanım ve teoremler verilmiştir, bu teoremlere ek olarak bazı sonuçlar da elde edilmiştir ve quasi-pseudo metrikler yardımıyla ditopoloji elde edilmiştir. Ayrıca ilk defa olarak tümleyenli dimetrik doku uzayı kavramı literatüre kazandırılmıştır. Tartışma ve sonuç bölümünde ise elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölüm, tez içerisinde ön bilgi olarak ihtiyaç duyulan tanım ve teoremleri içermektedir.

Tanım 2.1 (Bağıntı): X ve Y boştan farklı kümeler olmak üzere

$$X \times Y = \{(x,y) | x \in X, y \in Y\}$$

kümesine X ve Y nin kartezyen çarpımı denir ve $X \times Y$ nin herhangi bir alt kümesine X den Y ye bir bağıntı denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.2 (Kısmi Sıralı Küme): Bir L kümesi ve bu küme üzerinde tanımlanan $\leq$ bağıntısı göz önüne alınsın.

(i) Her $x \in L$ için $x \leq x$ (yansıma),
(ii) Her $x, y \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq x \Rightarrow x = y$ (ters simetrik),
(iii) Her $x, y, z \in L$ için $x \leq y$ ve $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (geçişlilik),

şartlarını sağlayan $\leq$ bağıntısına L kümesi üzerinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı ve $(L, \leq)$ ikilisine de bir kısmi sıralı küme denir (Ergun 2005).

Tanım 2.3 (Tam Sıralı Küme): $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Her $x, y \in L$ noktaları için, ya $x < y$, ya $y < x$ ya da $x = y$ şartı sağlanıyorsa, yani L nin herhangi iki öğesi karşılaştırılabilir ise, $\leq$ bağıntısına L üzerinde tanımlı tam sıralama bağıntısı ve $(L, \leq)$ ikilisine de tam sıralı küme denir (Bizim 2013).

Tanım 2.4 (Zincir): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $A \subset L$ bir alt küme olsun. Eğer A tam sıralı ise, A kümesine L kümesi içinde bir zincir denir (Ergun 2005).

Tanım 2.5 (Sınırlılık): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme, $A \subset L$ bir altküme ve $x, y \in L$ olsun. Eğer $\forall a \in A$ için, $a \leq x$ ve $y \leq a$ ise sırasıyla x elemanına A kümesinin bir üst sınırı ve y elemanına da A kümesinin bir alt sınırı denir. Eğer A kümesi bir üst sınıra sahipse, A kümesine üstten sınırlı ve eğer A kümesi bir altsınıra sahipse, A kümesine alttan sınırlı denir. Ayrıca A kümesi, hem alt hem de üst sınıra sahip ise, A kümesine sınırlı denir. Açıktır ki bir kümenin alt ve üst sınırları kümenin kendisine ait olmayabilir (Yüksel 2002).

Tanım 2.6 (İnfimum, Supremum): $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi ve bir $A \subset L$ altkümesi verilsin. A kümesinin alt sınırlarının en büyüğüne, A kümesinin en büyük alt sınırı (infimumu) denir ve $\inf(\mathrm{A})$ şeklinde gösterilir. Benzer şekilde A kümesinin üst sınırlarının en küçüğüne, A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $\sup(\mathrm{A})$ şeklinde gösterilir. Açıktır ki bir A kümesi, en küçük üst sınıra ve en büyük alt sınıra sahip ise, bu elemanlar tektir (Birkhoff 1967).

Not: $x, y \in L$ için $A = \{x, y\}$ kümesinin en büyük alt sınırı $\inf(\mathrm{A}) = x \wedge y$ ve en küçük üst sınırı $\sup(\mathrm{A}) = x \vee y$ şeklinde ifade edilir (Davey and Priestley 2002).

Lemma 2.7 (Zorn Lemması): Her zinciri bir üst sınıra sahip olan, boştan farklı kısmi sıralı bir kümenin en az bir maximal elemanı vardır (Ergun 2005).

Tanım 2.8 (Sonlu Karaktere Sahip Aile): $\mathfrak{I}$ bir kümeler ailesi olmak üzere aşağıda verilen özellikleri sağlayan $\mathfrak{I}$ ailesine sonlu karaktere sahip aile denir.

(i) Her $A \in \mathfrak{I}$ için, A nın her sonlu alt kümesi $\mathfrak{I}$ ailesi tarafından içerilmelidir.
(ii)Eğer herhangi bir A kümesinin her sonlu altkümesi $\mathfrak{I}$ tarafından içeriliyorsa, A da $\mathfrak{I}$ ailesi tarafından içerilir.

Herhangi bir $\mathfrak{I}$ kümeler ailesi sonlu karaktere sahip ise bu aile için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i) Her $A \in \mathfrak{I}$ için, A nın sonlu veya sonsuz her altkümesi $\mathfrak{I}$ tarafından içerilir.

(ii)$\mathfrak{I}$ kümeler ailesi içerme ile kısmi sıralı olmak üzere $\mathfrak{I}$ ailesinin elemanlarının her zincirinin birleşimi de $\mathfrak{I}$ de olup, Zorn Lemmasından bu ailenin en az bir maximal elemanı vardır (Ergun 2005).

Lemma 2.9 (Teichmuller-Tukey Lemması): Boştan farklı, sonlu karaktere sahip kümelerin her sınıfı bir maximal elemana sahiptir (Ergun 2005).

Tanım 2.10 (Örgü): $(L, \leq)$ kısmi sıralı küme olsun. L nin elemanlarının her çiftinin, en büyük alt sınırı ve en küçük üst sınırı mevcut ise, $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine örgü denir. Yani, her $x, y \in L$ için $x \vee y$ ve $x \wedge y$ var ise L ye örgü denir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.11 : L bir örgü ve $x, y \in L$ olsun. Aşağıdaki özellikler denktir:

(i)$x \leq y$,
(ii)$x \wedge y = x$,
(iii)$x \vee y = y$ (Davey and Priestley 2002).

Teorem 2.12: L bir örgü olsun. Her $x, y, z \in L$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i)$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (Birleşme),
(ii)$x \vee y = y \vee x, x \wedge y = y \wedge x$ (Değişme),
(iii)$x \wedge (x \vee y) = x, x \vee (x \wedge y) = x$ (Yutma),
(iv)$x \vee x = x, x \wedge x = x$ (Sabit kuvvetlilik) (Cohn 2002).

Tanım 2.13 (Tam Örgü): $(L, \leq)$ bir kısmi sıralı küme olsun. L kümesinin boştan farklı her sonlu alt kümesinin en küçük üst sınırı ve en büyük alt sınırı varsa, $(L, \leq)$ kısmi sıralı kümesine tam örgü denir. $A \subseteq L$ olmak üzere A kümesinin en küçük üst sınırı $\bigvee A$ ve en küçük alt sınırı $\bigwedge A$ biçiminde gösterilir. Yani; $\sup(A) = \bigvee A$ ve $\inf(A) = \bigwedge A$ dir (Birkhoff 1967).

Örnek 2.14: $\mathbb{I} = [0,1]$ bilinen anlamdaki sıralama ile tam örgü oluşturur.

Önerme 2.15: Bir kısmi sıralı L kümesinin herhangi bir A altkümesi de kısmi sıralıdır. Fakat L örgü olsa bile A nın örgü olması gerekmez. A nın bir örgü olabilmesi için $\vee$ ve $\wedge$ işlemlerine göre kapalı olması gerekir (Cohn 2002).

Teorem 2.16: Her tam örgü bir örgüdür. Fakat tersi doğru değildir (Birkhoff 1967).

Örnek 2.17: $(\mathbb{R}, \leq)$ ikilisi bir örgüdür fakat $\mathbb{R}$ kümesinin en büyük elemanı yok olduğundan bir tam örgü değildir. Benzer mantıkla, $(\mathbb{N}, \leq)$ ikilisi bir örgüdür fakat tam örgü değildir.

Teorem 2.18: $X \in \mathcal{L}$ olmak üzere $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$, keyfi arakesit altında kapalı bir aile ise $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi bir tam örgüdür (Birkhoff1967).

Örnek 2.19: $X \neq \emptyset$ olmak üzere $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ bir tam örgüdür. $\mathcal{P}(X)$ in bir alt ailesinin elemanlarının arakesiti bu ailenin infimumu ve birleşimi de bu ailenin supremumudur.

Sonuç 2.20: $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ keyfi arakesit altında kapalı bir aile , $(\mathcal{L}, \subseteq)$ bir tam örgü ve $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}$ olsun. Bu durumda,

$$\bigvee \mathcal{A} = \bigcup \mathcal{A} \Leftrightarrow \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{L}$$

önermesi sağlanır (Birkhoff 1967).

Tanım 2.21 (Molekül): $(S, \leq)$, en küçük elemanı 0 olan bir örgü ve $0 \neq m \in S$ olsun.

Her $a, b \in S$ için

$$m \leq a \vee b \Longrightarrow m \leq a \text{ veya } m \leq b$$

şartı gerçekleşiyorsa, m noktasına molekül denir (Birkhoff 1967).

Tanım 2.22 (Dağılımlı Örgü): $x, y, z \in L$ olmak üzere,

(1) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$,
(2) $(x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$,

eşitliklerini sağlayan $(L, \leq)$ tam örgüsüne dağılımlı örgü denir (Birkhoff 1967).

Tanım 2.23 (Tamamen Dağılımlı Örgü): J indis kümesi, $i \in J$ ve J_i indis kümesi için $j \in J_i$ ve $a_j^i \in L$ olmak üzere

$$\bigwedge_{i \in J} \bigvee_{j \in J_i} a_j^i = \bigvee_{\gamma \in \prod_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in J} a_{\gamma(i)}^i$$

eşitliğini sağlayan $(L, \leq)$ tam örgüsüne tamamen dağılımlı örgü denir (Birkhoff 1967).

Teorem 2.24: X boştan farklı bir küme olmak üzere $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ tam örgüsü tamamen dağılımlı örgüdür (Gohar 2002).

Teorem 2.25: $\mathbb{I} = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, r] \mid r \in \mathbb{I}\} \cup \{[0, r) \mid r \in \mathbb{I}\}$ olmak üzere $(\mathcal{J}, \subseteq)$ ikilisi tam ve tamamen dağılımlı bir örgüdür (Gohar 2002).

Teorem 2.26: $L = (0,1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0,1] | \, r \in L\} \cup \{\emptyset\}$ olmak üzere $(\mathcal{L}, \subseteq)$ ikilisi tam ve tamamen dağılımlı bir örgüdür (Gohar 2002).

Tanım 2.27 (Topolojik Uzay): X boştan farklı bir küme olmak üzere aşağıda verilen özellikleri sağlayan her $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

(i)$X, \emptyset \in \tau$

(ii)$\forall\, G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$
(iii)$\forall G_i \in \tau,\, i \in I \Longrightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$

Burada τ nun elemanlarına (X, τ) topolojik uzayının açık kümeleri adı verilir (Bülbül 2004).

Tanım 2.28 (Altuzay Topoloji): (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun.

$$\tau_A = \{A \cap G |\, G \in \tau\}$$

ailesi A kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye τ nun A altkümesi üzerinde ürettiği altuzay topolojisi denir. Ayrıca, (A, τ_A) topolojik uzayına da (X, τ) nun bir altuzayı denir (Yıldız 2005).

Tanım 2.29 (Komşuluk): (X, τ) bir topolojik uzay ve $M, U \subset X$ olsun. Eğer $M \subset G \subset U$ olacak şekilde bir $G \in \tau$ açık kümesi varsa, U kümesine bu uzayda M kümesinin bir komşuluğu denir (Koçak 2011).

Tanım 2.30 (Süreklilik): (X, τ) ve (Y, τ') iki topolojik uzay, $x_0 \in X$ ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. $f(x_0)$ ı içeren her bir U açık kümesi için x_0 noktasını içeren bir V açık kümesi $f(V) \subseteq U$ olacak şekilde bulunabiliyorsa f ye x_0 noktasında süreklidir denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.31 (Homeomorfizm): (X, τ) ve (Y, τ') herhangi iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu sürekli ve tersi f^{-1} var ve f^{-1} de sürekli ise, f ye bir homeomorfizm veya topolojik dönüşüm denir.

Eğer X ile Y uzayları arasında bir homeomorfizma varsa, X ile Y topolojik uzaylarına homeomorf (topolojik denk) uzaylar denir (Mucuk 2009).

Teorem 2.32: (X, τ) ve (Y, τ') herhangi iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) f, X topolojik uzayında sürekli,

(ii) Y topolojik uzayındaki her açık alt kümenin f altındaki ters görüntüsü X de açıktır, yani her $V \in \tau'$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ dır (Mucuk 2009).

Tanım 2.33 (Metrik Uzay): X boştan farklı bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli bir

$$d: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonuna bir metrik, (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

(M1) $x = y$ dir $\Leftrightarrow$ $d(x, y) = 0$ dır

(M2) Her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ dir.

(M3) Her $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ dir.

Burada (M1) pozitif tanımlılık, (M2) simetri ve (M3) de üçgen eşitsizliği olarak bilinir.

Genelde $d(x, y)$ değeri *x* ile *y* arasındaki uzaklık olarak bilinir (Mucuk 2009).

Tanım 2.34 (pseudo metrik): Eğer metrik uzay şartlarından (M1) şartını $x = y \Longrightarrow d(x, y) = 0$ şeklinde değiştirirsek bu taktirde d fonksiyonuna X üzerinde bir pseudo metrik adı verilir (Mucuk 2009).

Uyarı 2.35: Her metrik aynı zamanda pseudo metriktir fakat tersi her zaman doğru olmayabilir. Örneğin; $X = \mathbb{R}$ olsun. $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ için $d(x, y) = |x_2 - y_2|$ şeklinde tanımlı $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde pseudo metriktir, fakat metrik değildir.

Tanım 2.36 (quasi-pseudo metrik): Eğer pseudo metrik uzay şartlarının üzerine bir de simetri şartı olan (M2) şartını yani her $x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$ şartını kaldırırsak bu taktirde d fonksiyonuna X üzerinde bir quasi-pseudo metrik adı verilir (Mucuk 2009).

Uyarı 2.37: Her pseudo metrik de aynı zamanda quasi pseudo metriktir.

Örnek 2.38: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$d(x, y) = |x - y|$$

ile tanımlanan d bir metriktir. Bu metriğe $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği adı verilir.

Örnek 2.39: X boştan farklı bir küme olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe diskre ya da ayrık metrik adı verilir.

Tanım 2.40 (Açık Yuvar): (X, d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$D(a, r) = \{x \in X | d(x, a) < r\}$$

kümesine *a* merkezli *r* yarıçaplı bir açık yuvar (disk) denir (Mucuk 2009).

Tanım 2.41 (Kapalı Yuvar): (X, d) bir metrik uzay, $a \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun.

$$D[a, r] = \{x \in X | d(x, a) \leq r\}$$

kümesine a merkezli r yarıçaplı bir kapalı yuvar (disk) denir (Mucuk 2009).

Örnek 2.42: $\mathbb{R}$**,** reel sayılar kümesi alışılmış metriği ile göz önüne alınsın. Buna göre $D(a,r)$ açık diski $(a-r,a+r)$ açık aralığıdır.

Örnek 2.43: Bir X kümesi her $x,y\in X$ için

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y\\1, & x\neq y\end{cases}$$

ile tanımlanan diskre metriği ile göz önüne alınsın. Bir $a\in X$ için

$$D(a,r)=\begin{cases}\{a\}, & r\leq 1\\X\ , & r>1\end{cases}$$

dir.

Teorem 2.44: Bir (X,d) metrik uzayındaki tüm açık disklerin sınıfı, X üzerindeki bir topoloji için bir bazdır (Mucuk 2009).

Tanım 2.45 (Metrik Topolojisi): Bir (X,d) metrik uzayındaki tüm açık disklerin sınıfını baz kabul eden topoloji metrik topolojisi olarak adlandırılır (Mucuk 2009).

Örnek 2.46: Bir X kümesi aşikar metriği ile göz önüne alınsın. Bir $a\in X$ için

$$D(a,r)=\begin{cases}X\ , & r>1\\\{a\}, & r\leq 1\end{cases}$$

olduğundan X de her tek nokta kümesi açıktır. O halde diskre metrik tarafından doğurulan topoloji X in diskre topolojisidir.

Önerme 2.47: (X,d) bir metrik uzay ve $A\subseteq X$ olsun. Bu taktirde $d\colon X\times X\longrightarrow\mathbb{R}$

metriğinin A ya kısıtlaması olan $d_A: A \times A \longrightarrow \mathbb{R}$ de A üzerinde bir metriktir (Mucuk 2009).

Tanım 2.48 (Alt Metrik Uzayı): Önerme 2.47 de belirtilen metriğe A üzerinde d metriğinden elde edilen alt metrik, (A, d_A) ikilisine de alt metrik uzayı adı verilir (Mucuk 2009).

Önerme 2.49: (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i)Bir $G \subseteq X$ alt kümesi açıktır.
(ii)G kümesi açık disklerin birleşimi olarak yazılır.
(iii)Her bir $x \in G$ için $x \in D(a, r) \subseteq G$ olacak şekilde bir $D(a, r)$ açık diski vardır.
(iv)Her bir $x \in G$ için $D(x, \varepsilon_x) \subseteq G$ olacak şekilde bir $\varepsilon_x > 0$ vardır (Mucuk 2009).

Tanım 2.50 (Metriklenebilme): Bir (X, τ) topolojik uzayı verilsin. Eğer metrik topolojisi τ olacak şekilde X üzerinde bir metrik varsa bu τ topolojisine metriklenebilir denir (Mucuk 2009).

Örnek 2.51: Bir X kümesi üzerindeki $\tau = \mathcal{P}(X)$ ayrık topolojisi

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ile tanımlanan metrik tarafından doğrulan topoloji olduğundan metriklenebilirdir.

Not: (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. X üzerinde d metriği tarafından elde edilen metrik topolojisi τ ve A üzerinde d_A alt metriğinden elde edilen metrik topolojisi τ_{A_d} olmak üzere $\tau_{A_d} = \tau_A$ dır (Mucuk 2009).

Örnek 2.52: $\mathbb{R}$ üzerindeki metrik alışılmış metrik olmak üzere $\mathbb{Z}$ üzerindeki alt metriğe göre elde edilen metrik topolojisi diskre topolojidir.

Tanım 2.53 (Açık Küme): (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $a \in A$ için $D(a, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa A kümesine açık küme denir (Koçak 2011).

Teorem 2.54: Bir (X, d) metrik uzayında her $D(a, r)$ açık yuvarı açık kümedir (Koçak 2011).

Tanım 2.55 (Kapalı Küme): (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A^c açık ise A ya kapalı küme denir (Mucuk 2009).

Teorem 2.56: Bir (X, d) metrik uzayında her $D[a, r]$ kapalı yuvarı kapalı kümedir (Koçak 2011).

Önerme 2.57: Bir (X, d) metrik uzayı için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i)X ve $\emptyset$ kapalıdır.
(ii)X deki kapalıların sonlu birleşimleri kapalıdır.
(iii)X deki kapalı kümelerin keyfi kesişimleri kapalıdır (Mucuk 2009).

Önerme 2.58: Bir (X, d) metrik uzayında her tek nokta kümesi kapalıdır (Mucuk 2009).

Sonuç 2.59: Bir (X, d) metrik uzayında sonlu bir küme kapalıdır (Mucuk 2009).

Sonuç 2.60: Bir topolojik uzayda kapalı olmayan tek nokta kümeleri varsa bu topoloji metriklenemez (Mucuk 2009).

Örnek 2.61 : $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b, c, d\}, \{a, b\}, \{a\}\}$

topolojisini göz önüne alalım. Bu topolojide her tek nokta kümesi kapalı olmadığından bu topoloji metriklenemez.

Örnek 2.62: Bir X kümesi üzerindeki diskre topoloji diskre metrik tarafından elde edildiğinden metriklenebilirdir. Fakat indiskre topoloji metriklenemez. Çünkü bu topolojide her tek nokta kümesi kapalı değildir.

Tanım 2.63 (Denk Metrikler): Bir X kümesi üzerinde d ve e metrikleri verilsin. Eğer bu metrikler tarafından elde edilen topolojiler aynı ise yani d-açık bir küme e-açık ve de e-açık olan bir küme d-açık ise bu metriklere denk metrikler denir (Mucuk 2009).

Örnek 2.64: $\alpha \neq \emptyset$ olmak üzere bir X kümesi üzerinde tanımlanan

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

ve

$$e(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ \alpha, & x \neq y \end{cases}$$

metrikleri denktir. Çünkü her iki metrik tarafından elde edilen metrik topolojisi de X in ayrık(diskre) topolojisidir.

Önerme 2.65: Bir X kümesi üzerinde d ve e metrikleri verilsin. Bu metriklerden elde edilen metrik topolojileri sırasıyla τ_d ve τ_e olsun. Bu durumda $\tau_d \subseteq \tau_e$ dir ancak ve ancak d metriğine göre her x merkezli $D_d(x)$ açık diski için $D_e(x) \subseteq D_d(x)$ olacak şekilde e metriğine göre x merkezli bir $D_e(x)$ açık diski vardır (Mucuk 2009).

Sonuç 2.66: Bir X kümesi üzerinde verilen d ve e metrikleri denktir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanır.

(i)Her bir x merkezli $D_d(x)$ d-açık diski için $D_e(x) \subseteq D_d(x)$ olacak şekilde x merkezli bir $D_e(x)$ e-açık diski vardır.

(ii)Her bir x merkezli $D_e(x)$ e-açık diski için $D_d(x) \subseteq D_e(x)$ olacak şekilde x merkezli bir $D_d(x)$ d-açık diski vardır (Mucuk 2009).

Tanım 2.67 (Metrik Uzaylarda Süreklilik): $(X,d),(Y,e)$ metrik uzaylar, $f:(X,d) \longrightarrow (Y,e)$ bir fonksiyon olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere her $D(f(x_0),\varepsilon)$ için

$$f\big(D(x_0,\delta)\big) \subseteq D(f(x_0),\varepsilon)$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonuna $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer $f: X \longrightarrow Y$ fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye sürekli fonksiyon denir (Koçak 2011).

Not: Eğer burada $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanan $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metriği alınırsa $\mathbb{R}$ de bilinen süreklilik kavramı elde edilir.

Örnek 2.68: $\mathbb{R}$ de $d(x,y) = |x-y|$ alışılmış metriği için

$$f(\mathbb{R},d) \longrightarrow (\mathbb{R},d)$$

$$f(x) = x^2$$

fonksiyonu süreklidir.

Teorem 2.69: $(X,d),(Y,e)$ metrik uzayları için $f:(X,d) \longrightarrow (Y,e)$ fonksiyonu süreklidir $\Leftrightarrow$ Y deki her V açık kümenin $f^{-1}(V)$ ters görüntüsü X de açıktır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Doku Uzayları

Tanım 3.1.1 (Doku Uzayı): S bir küme olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ sınıfına S kümesinin bir dokulanması, $(S, \mathcal{S})$ ikilisine de bir doku uzayı veya sadece doku adı verilir.

(i)$(\mathcal{S}, \subseteq)$ çifti S ve $\emptyset$ kümeyi içeren bir tam örgüdür.
(ii)$(\mathcal{S}, \subseteq)$ çifti üzerindeki infimum ve supremum işlemleri $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ üzerindeki kesişim ve birleşim işlemleri ile aşağıda gösterildiği şekilde aynı anlama gelmektedir:

$\forall$ *J* indeks kümesi için $j \in J, A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcap_{j \in J} A_j = \bigwedge_{j \in J} A_j$$

ve her sonlu *J* indeks kümesi için $j \in J, A_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere,

$$\bigcup_{j \in J} A_j = \bigvee_{j \in J} A_j$$

dir.

(iii)$\mathcal{S}$ örgüsü tamamen dağılımlı bir örgüdür.
(iv)$\mathcal{S}$ örgüsü S kümesinin noktalarını ayırır. Yani, $s_1, s_2 \in S$ ve $s_1 \neq s_2$ olmak üzere $s_1 \in A, s_2 \notin A$ veya $s_2 \in A, s_1 \notin A$ olacak şekilde bir $A \in \mathcal{S}$ vardır (Brown 1993a).

Tanım 3.1.2 (p-küme): $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $\forall\, s \in S$ için

$$P_s = \bigcap \{A \in \mathcal{S} : s \in A\}$$

olsun. Bu taktirde bu P_s kümesine p-küme adı verilir.

$\{P_s: s \in S\}$ kümesi $\mathcal{S}$ dokusunun moleküllerinin kümesidir ve

$$A = \bigvee_{s \in A} P_s = \bigcup_{s \in A} P_s$$

dir. Burada şuna dikkat etmek gerekir:

Eğer bir doku, keyfi birleşimler altında kapalı ise bu dokuda keyfi supremumlarla birleşimler aynı anlama gelmektedir. Eğer doku keyfi birleşimler altında kapalı değil ise bu ifade doğru değildir (Brown 1993a).

Tanım 3.1.3 (q-küme): $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $\forall\, s \in S$ için

$$Q_s = \bigvee \{A \in \mathcal{S}: s \notin A\} = \bigvee \{P_u: u \in S, P_s \nsubseteq P_u\}$$

olsun. Bu taktirde bu Q_s kümesine q-küme adı verilir (Brown 1993a).

Örnek 3.1.4: $H = (0,1]$ ve $\mathcal{H} = \{\, (0, r]: r \in [0,1]\}$ olmak üzere $(\mathcal{H}, \subseteq)$ hem tam örgü, hem de tamamen dağılımlı örgüdür. Burada infimum ve kesişim işlemleri aynı olmasına rağmen supremum ve birleşim işlemleri her zaman aynı olmayabilir. Mesela,

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} (0, 1 - \frac{1}{n}] = (0,1) \neq (0,1] = \bigvee_{n \in \mathbb{N}^+} (0, 1 - \frac{1}{n}]$$

olur. Ancak $(0, r_1], (0, r_2], \dots, (0, r_n] \in \mathcal{H}$ için

$$\bigcup_{i=1}^{n}(0, r_i] = (0, max_{i=1}^{n} r_i] \in \mathcal{H}$$

olduğundan doku uzayı şartlarının ilk ikisi sağlanır. Şimdi $s, t \in H$ olmak üzere $s \neq t$ olsun. Bu durumda, $s < t$ veya $t < s$ olur. İlk durumdan, $t \notin (0, s] \in \mathcal{H}$ ve ikinci durumdan $s \notin (0, t] \in \mathcal{H}$ olup $\mathcal{H}$ noktaları ayırır. Böylece $(H, \mathcal{H})$ bir doku olur.

Örnek 3.1.5: $\mathbb{I} = [0,1]$ ve $\mathcal{J} = \{[0, t]: t \in [0,1]\} \cup \{[0, t): t \in [0,1]\}$ olmak üzere $(\mathcal{J}, \subseteq)$ hem tam örgü, hem de tamamen dağılımlı bir örgüdür. Hatta $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ ikilisi supremum ve birleşim işlemlerinin aynı olduğu bir dokudur.

Tamamen dağılımlı örgüler p-kümeler ve q-kümeler cinsinden aşağıdaki teoremde verildiği gibi yazılabilir:

Teorem 3.1.6: $(S, \subseteq)$ bir tam örgü olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.

(i)$(S, \mathcal{S})$ tamamen dağılımlıdır.
(ii)Her $A \in \mathcal{S}$ için $A^b = \{s \in S | A \not\subseteq Q_s\}$ dir.
(iii)Her $A \in \mathcal{S}$ için A, $\mathcal{S}$'nin A^b'yi içeren en küçük elemanıdır.
(iv)$A, B \in \mathcal{S}$ için eğer $A \not\subseteq B$ ise, $A \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq B$ olacak şekilde bir $s \in S$ vardır.
(v)$\forall A \in \mathcal{S}, A = \bigvee\{P_s | A \not\subseteq Q_s\}$
(vi)$\forall A \in \mathcal{S}, A = \bigcap\{Q_s | P_s \not\subseteq A\}$.

bu teoremdeki (iv) koşulu dokulara ilişkin pek çok temel sonucun ispatlanmasında önemli bir rol oynar (Demirci 2007).

Tanım 3.1.7 (Basit Doku): Bir $\mathcal{S}$ dokusundaki her molekül $s \in S$ elemanı için P_s şeklinde yazılabiliyorsa bu taktirde $(S, \mathcal{S})$ dokusuna basit doku adı verilir (Brown 1993a).

Tanım 3.1.8 (Sade Doku): Bir $\mathcal{S}$ dokusunda $\forall\, s \in S$ için $P_s \nsubseteq Q_s$ oluyorsa bu dokuya sade doku adı verilir (Brown *et al.* 2004a).

Örnek 3.1.9: Örnek 3.1.4 de verilen $(H, \mathcal{H})$ dokusu her $r \in H$ için $P_r = Q_r = (0, r]$ olduğu için basit dokudur ama sade doku değildir.

Örnek 3.1.10: Örnek 3.1.5 de verilen $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu her $t \in \mathbb{I}$ için $P_t = [0, t]$ ve $Q_t = [0, t)$ olduğu için sade dokudur ama basit doku değildir.

Örnek 3.1.11: $\mathcal{R} = \{(-\infty, r) : r \in \mathbb{R}\} \cup \{\, (-\infty, r] : r \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ bir doku uzayıdır. $\forall\, r \in \mathbb{R}$ için $P_r = \ (-\infty, r]$ ve $Q_r = \ (-\infty, r)$ dir. $\forall\, r \in \mathbb{R}$ için Q_r kümesi de bir molekül ve $Q_r \notin \{P_r : r \in \mathbb{R}\}$ olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{R})$ dokusu basit doku değildir. Üstelik bu uzayda supremum ve birleşim ifadeleri aynı anlama gelmektedir.

Teorem 3.1.12: Bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu için aşağıdakiler denktir.

(i)$(S, \mathcal{S})$ sade dokudur.
(ii)Her $A \subseteq \mathcal{S}$ için $\bigcup A = \bigvee A$ dir.
(iii)$\mathcal{S}$, birleşim işlemi altında kapalıdır.
(iv)Her $s \in S$ için $P_s \nsubseteq Q_s$ dir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.13 (Tümleyenli Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $\sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ de bir dönüşüm olmak üzere eğer σ dönüşümü

(i)Her $A \in \mathcal{S}$ için $\sigma^2(A) = A$
(ii)Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq B \Longrightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$

şartlarını sağlıyorsa, $\sigma : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ dönüşümüne $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir tümleyen ve $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üçlüsü ile gösterilen uzaya da tümleyenli doku uzayı adı verilir.

Burada dikkat edecek olursak $A, B \in \mathcal{S}$ için $\sigma(A \cap B) = \sigma(A) \cup \sigma(B)$ ve dolayısıyla da $\sigma(A \cup B) = \sigma(A) \cap \sigma(B)$ olur. Diğer taraftan ise $\sigma(\emptyset) \subseteq S \Longrightarrow \sigma(S) \subseteq \emptyset \Longrightarrow \sigma(S) = \emptyset$ ve buradan da $\sigma(\emptyset) = S$ elde edilir (Brown 1993a).

Örnek 3.1.14: X herhangi bir küme olmak üzere $Y \subseteq X$ için $\pi(Y) = X \setminus Y$ şeklinde tanımlanan $(X, \mathcal{P}(X), \pi)$ uzayı tümleyenli doku uzayıdır. Ayrıca $\forall\, x \in X$ için $P_x = \{x\}$ ve $Q_x = X \setminus \{x\}$ dir. Bu taktirde ayrık doku olarak adlandırılan $\big(X, \mathcal{P}(X)\big)$ dokusu hem basit doku, hem de sade doku olur. (Brown and Ertürk 2000a)

Önerme 3.1.15 : $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyenli doku uzayı verilsin. Her $A, B \in \mathcal{S}$ için,

(i)$A = \bigvee\{\sigma(Q_s) | A \nsubseteq \sigma(P_s)\} = \bigcap\{\sigma(P_s) | \sigma(Q_s) \nsubseteq A\}$,
(ii)$A \nsubseteq B \Longrightarrow A \nsubseteq \sigma(P_s)$ ve $\sigma(Q_s) \nsubseteq B$

olacak biçimde bir $s \in S$ vardır (Brown *et al.* 2004b**).**

Örnek 3.1.16: Örnek 3.1.4 de verilen $(H, \mathcal{H})$ dokusu $r \in (0,1]$ için $\lambda((,r]) = (0,1 - r]$ tümleyen işlemi ile birlikte bir tümleyenli doku uzayıdır. $(H, \mathcal{H}, \lambda)$ ile gösterilir. Burada ifade edilen λ dönüşümüne doğal tümleyen adı verilir (Brown and Ertürk 2000a).

Örnek 3.1.17: Örnek 3.1.5 de verilen $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu $t \in [0,1]$ için $\iota([0,t]) = [0,1 - t), \iota([0,t)) = [0,1 - t]$ tümleyen işlemi ile birlikte bir tümleyenli doku uzayıdır. $(\mathbb{I}, \mathcal{J}, \iota)$ ile gösterilir ve bu dokuya da birim aralık dokusu adı verilir (Brown and Ertürk 2000a).

Doku uzayları üzerinde p-kümeler ile q-kümeler arasındaki temel ilişkileri betimlemek için $A \in \mathcal{S}$ kümesinin çekirdeği olarak adlandırılan yardımcı kavramı tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.18 (Çekirdek): $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$A^{\flat} = \bigcap\left\{\bigcup\{A_j|j \in J\}|\{A_j|j \in J\} \subseteq \mathcal{S}, A = \bigvee\{A_j|j \in J\}\right\}$$

ile ifade edilen $A^{\flat}$ kümesine, A kümesinin çekirdeği adı verilir. $A^{\flat}$ ifadesi bazı kaynaklarda $core(A)$ ile de gösterilmektedir.

Doku uzaylarında $A^b \subseteq A$ olduğu açıktır ve genellikle $A^b \notin \mathcal{S}$ dir. Yani, bir kümenin çekirdeğinin dokuya ait olması gerekmez.

Eğer sade doku uzaylarda çalışılıyor ise bu taktirde $A^{\flat} = A$ olur (Brown *et al.* 2004a).

Örnek 3.1.19: Örnek 3.1.4 de verilen $(H, \mathcal{H})$ doku uzayını göz önüne alalım. $r \in H$ olmak üzere $(0, r] \in \mathcal{H}$ nin çekirdeği $(0, r]^b = (0, r)$ olur. Burada dikkat edilirse $(0, r) \notin \mathcal{H}$ dir.

Teorem 3.1.20:

(i) Her $s \in S, A \in \mathcal{S}$ için $s \notin A \Longrightarrow A \subseteq Q_s \Longrightarrow s \notin A^{\flat}$

(ii) Her $A \in \mathcal{S}$ için $A^{\flat} = \{s|A \nsubseteq Q_s\}$

(iii) $A_j \in \mathcal{S}, j \in J$ için $\left(\bigvee_{j\in J} A_j\right)^{\flat} = \bigcup_{j\in J} A_j^{\flat}$ elde edilir.

(iv) Her $A \in \mathcal{S}$ için $A^{\flat}$ yi içeren $\mathcal{S}$ nin en küçük elemanı A dır.

(v) $A, B \in \mathcal{S}$ için eğer $A \nsubseteq B$ ise o halde öyle bir $s \in S$ vardır ki $A \nsubseteq Q_s$ ve $P_s \nsubseteq B$.

(vi) Her $A \in \mathcal{S}$ için $A = \bigcap\{Q_s|P_s \nsubseteq A\}$.

(vii) Her $A \in \mathcal{S}$ için $\bigvee\{P_s|A \nsubseteq Q_s\}$ (Brown *et* al. 2004a).

Tanım 3.1.21 (Alt Doku): $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı, $V \in \mathcal{S}$ ve $\mathcal{S}_V = \{A \cap V : A \in \mathcal{S}\}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{V} = \mathcal{S}_V$ ailesine V üzerinde indirgenmiş doku ve $(\mathcal{V}, \mathrm{V})$ ikilisine de $(S, \mathcal{S})$ dokusunun bir temel alt dokusudur denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.22 (Çarpım Dokusu): $\{(S_j, \mathcal{S}_j)|j \in J\}$ dokuların bir sınıfı ve $S = \prod_{j\in J} S_j$

kümesi, $(S_j)_{j\in J}$ kümelerinin bir kartezyen çarpımı olsun. $k\in J$ ve $A\subseteq S_k$ için

$$Y_j=\begin{cases}A, j=k\\ S_j, j\neq k\end{cases}$$

olmak üzere, $E(k,A)=\prod_{j\in J}Y_j$ olsun. Ayrıca

$$\varepsilon=\left\{\bigcup_{k\in K}E(k,L_k)\middle| K\subseteq J, L_k\in\mathcal{S}_k\right\}$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{S}, \varepsilon$ kümesinin elemanlarının herhangi kesişiminden oluşsun. $\mathcal{S}$ sınıfı, S kümesi üzerinde bir doku tanımlar. Bu tanımlanan $(S,\mathcal{S})$ dokusuna $\{(S_j,\mathcal{S}_j)|j\in J\}$ sınıfının çarpım dokusu adı verilir ve $\mathcal{S}=\otimes_{j\in J}\mathcal{S}_j$ şekline ifade edilir (Brown, Ertürk 2000a).

Tanım 3.1.23 (Bağıntı): $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ doku uzayları ve $\mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{T}$ ifadesi $(S,\mathcal{P}(S))$ ve $(T,\mathcal{T})$ dokularının çarpımı olsun. $s\in S$ ve $t\in T$ için

$$\bar{P}_{s\times t}=\{s\}\times P_t \text{ ve } \bar{Q}_{s\times t}=(S\backslash\{s\}\times T)\cup(S\times Q_t)$$

biçiminde tanımlanmak üzere,

(i)$r\nsubseteq\bar{Q}_{(s,t)}, P_{s'}\nsubseteq Q_s \;\Rightarrow r\nsubseteq\bar{Q}_{(s',t)}$,
(ii)$r\nsubseteq\bar{Q}_{(s,t)}, P_s\nsubseteq Q_{s'} \;\Rightarrow r\nsubseteq\bar{Q}_{(s',t)}$ olacak şekilde bir $s'\in S$ vardır.

şartlarını sağlayan $r\in\mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{T}$ kümesine $(S,\mathcal{S})$ dokusundan $(T,\mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir bağıntı denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.24 (Kobağıntı): $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ doku uzayları ve $\mathcal{P}(S)\otimes\mathcal{T}$ ifadesi $(S,\mathcal{P}(S))$ ve $(T,\mathcal{T})$ dokularının çarpımı olsun. $s\in S$ ve $t\in T$ için

$$\bar{P}_{s\times t} = \{s\} \times P_t \text{ ve } \bar{Q}_{s\times t} = (S\backslash\{s\} \times T) \cup (S \times Q_t)$$

biçiminde tanımlanmak üzere,

(i)$\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, P_s \not\subseteq Q_{s'} \implies \bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$,
(ii)$\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R, P_{s'} \not\subseteq Q_s \implies \bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$ olacak şekilde bir $s' \in S$ vardır.

şartlarını sağlayan $R \in \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ kümesine $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir kobağıntı denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.25 (Dibağıntı): r, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir bağıntı ve R, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir kobağıntı ise (r, R) ikilisine $(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna tanımlı bir dibağıntı denir. Dibağıntılar $(r, R)\colon (S, \mathcal{S}) \longrightarrow (T, \mathcal{T})$ veya $(S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(r,R)} (T, \mathcal{T})$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.26 (Birim Dibağıntı): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

$$i_{(S,\mathcal{S})} = \bigvee\{\bar{P}_{(s,s)} | s \in S\}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde birim bağıntı,

$$I_{(S,\mathcal{S})} = \bigcap\{\bar{Q}_{(s,s)} | s \in S\}$$

biçiminde tanımlanan kobağıntıya $(S, \mathcal{S})$ üzerinde birim kobağıntı ve $\left(i_{(S,\mathcal{S})}, I_{(S,\mathcal{S})}\right)$ dibağıntısına da $(S, \mathcal{S})$ üzerinde birim dibağıntı denir. $\left(i_{(S,\mathcal{S})}, I_{(S,\mathcal{S})}\right)$ dibağıntısı, (i_S, I_S) biçiminde veya (i, I) biçiminde de gösterilebilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.27 (Bağıntının Tersi): $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları olsun. r, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir bağıntı olmak üzere

$$r^{\leftarrow} = \bigcap \{\bar{Q}_{(t,s)} | r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}\}$$

biçiminde tanımlanan kobağıntıya r bağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.28 (Kobağıntının Tersi): $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları olsun. R, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir kobağıntı olmak üzere

$$R^{\leftarrow} = \bigvee \{\bar{P}_{(t,s)} | \bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R\}$$

biçiminde tanımlanan bağıntıya R kobağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.29 (Dibağıntının Tersi): $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları olsun. (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olmak üzere $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ biçiminde tanımlı olan dibağıntıya, (r, R) dibağıntısının tersi denir (Brown *et al.* 2004a).

Önerme 3.1.30: (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır:

(i)Her $s \in S, t \in T$ için $r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Leftrightarrow \bar{P}_{(t,s)} \not\subseteq r^{\leftarrow}$ ve $\bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Leftrightarrow R^{\leftarrow} \not\subseteq \bar{Q}_{(t,s)}$ olur.
(ii)$(r^{\leftarrow})^{\leftarrow} = r$ ve $(R^{\leftarrow})^{\leftarrow} = R$ olur.
(iii)(m, M): $(S, \mathcal{S}) \longrightarrow (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı olmak üzere $r \subseteq m \Leftrightarrow m^{\leftarrow} \subseteq r^{\leftarrow}$ ve $R \subseteq M \Leftrightarrow M^{\leftarrow} \subseteq R^{\leftarrow}$ olur (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.31 (Bağıntının Kesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$r^{\rightarrow}A = \bigcap \{Q_t | \forall s, r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Rightarrow A \subseteq Q_s\} \in \mathcal{T}$$

biçiminde tanımlanan $r^{\rightarrow}A$ kümesine r bağıntısının A-kesiti denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.32 (Kobağıntının Kesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $A \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$R^{\rightarrow}A = \bigvee \{P_t | \forall s, \bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Rightarrow P_s \subseteq A\} \in \mathcal{T}$$

biçiminde tanımlanan $R^{\rightarrow}A$ kümesine R kobağıntısının A-kesiti denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.33 (Bağıntının Önkesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $B \in \mathcal{T}$ olmak üzere

$$(r^{\leftarrow})^{\rightarrow}B = \bigvee \{P_s | \forall s\ r \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)} \Rightarrow P_t \subseteq B\} \in \mathcal{S}$$

biçiminde tanımlanan $r^{\leftarrow}$ kobağıntısının B-kesitine, r bağıntısının B-önkesiti denir ve $r^{\leftarrow}B$ ile gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.34 (Kobağıntının Önkesiti): (r, R), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun. $B \in \mathcal{T}$ olmak üzere

$$(R^{\leftarrow})^{\rightarrow}B = \bigcap \{Q_s | \forall s, \bar{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Rightarrow B \subseteq Q_t\} \in \mathcal{S}$$

biçiminde tanımlanan $R^{\leftarrow}$ bağıntısının B-kesitine, R kobağıntısının B-önkesiti denir ve $R^{\leftarrow}B$ ile gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

(i)

Tanım 3.1.35 (Di-Bağıntılarda Tümleyen) : $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ve $(T, \mathcal{T}, \theta)$ tümleyenli doku uzayları ve (r, R),$(S, \mathcal{S})$ dokusundan $(T, \mathcal{T})$ dokusuna bir di-bağıntı olsun. Bu durumda,

(i)$r' = \bigcap\{\bar{Q}_{(s,t)} | \exists u, v \in T, r \not\subseteq \bar{Q}_{(u,v)}, \sigma(Q_s) \not\subseteq Q_u$ ve $P_v \not\subseteq \theta(P_t)\}$ kümesi, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$'dan $(T, \mathcal{T}, \theta)$'ya bir ko-bağıntıdır. r' ko- bağıntısına, r bağıntısının tümleyeni denir.

(ii)$R' = \bigvee\{\bar{P}_{(s,t)} | \exists u, v \in T, \bar{P}_{(u,v)} \not\subseteq R, P_u \not\subseteq \sigma(P_s)$ ve $\theta(Q_t) \not\subseteq Q_v\}$ kümesi, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$'dan $(T, \mathcal{T}, \theta)$'ya bir bağıntıdır. R' bağıntısına, R ko-bağıntısının tümleyeni denir.

(iii)$(r, R)' = (R', r')$ di-bağıntısına, (r, R) *di-bağıntısının* tümleyeni denir. Eğer $(r, R)' = (r, R)$ ise, (r, R) di-bağıntısına tümleyenli di-bağıntı denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.36 (Difonksiyon): (f, F), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına bir dibağıntı olsun.

DF1 $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ olacak şekilde bir $t \in T$ vardır.

DF2 $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s,t')} \not\subseteq F$ ise $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ dir.

şartlarını sağlayan, (f, F) dibağıntısına difonksiyon denir. (f, F) difonksiyonu, $(f, F): (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ veya $(S, \mathcal{S}) \xrightarrow{(f,F)} (T, \mathcal{T})$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.37 (Birim Difonksiyon): $(S, \mathcal{S})$ üzerinde tanımlı (i_S, I_S) birim dibağıntısına birim difonksiyon denir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.38 (Örten): $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Eğer $t,t'\in T$ ve $\exists s\in S$ için $P_t \nsubseteq Q_{t'} \Longrightarrow f \nsubseteq \bar{Q}_{(s,t')}$ ve $\overline{P}_{(s,t)} \nsubseteq F$ şartını sağlayan (f,F) difonksiyonuna örten denir (Brown, *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.39 (Birebir): $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Eğer $s,s'\in S$ ve $t\in T$ için $f\nsubseteq \bar{Q}_{(s,t)}$ ve $\bar{P}_{(s',t)}\nsubseteq F \Longrightarrow P_s \nsubseteq Q_{s'}$ şartını sağlayan (f,F) difonksiyonuna birebir denir (Brown, *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.40 (Birebir Örten): Hem birebir, hem de örten olan $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ difonksiyonuna birebir örten denir (Brown, *et al.* 2004a).

Teorem 3.1.41 : $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun.

(1) (f,F) difonksiyonunun birebir olması için gerek ve yeter şart $(f,F)^{\leftarrow}$ bağıntısının DF1 şartını sağlamasıdır.
(2) (f,F) difonksiyonunun örten olması için gerek ve yeter şart $(f,F)^{\leftarrow}$ bağıntısının DF2 şartını sağlamasıdır.
(3) (f,F) difonksiyonunun bijektif olması için gerek ve yeter şart $(f,F)^{\leftarrow}:(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir di fonksiyon olmasıdır. Bu durumda, $(f,F)^{\leftarrow}$ difonksiyonu da bijektiftir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.42 (Görüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $A\in\mathcal{S}$ ve $B\in\mathcal{T}$ olsun. f bağıntısının A-kesitine, A kümesinin (f,F) altındaki görüntüsü denir ve $f^{\rightarrow}A$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.43 (Kogörüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $A\in\mathcal{S}$ ve $B\in\mathcal{T}$ olsun. F kobağıntısının A-kesitine, A kümesinin (f,F) altındaki kogörüntüsü denir ve $F^{\rightarrow}A$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.44 (Ters Görüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{T}$ olsun. f bağıntısının B-önkesitine, B kümesinin (f,F) altındaki ters görüntüsü denir ve $f^{\leftarrow}B$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.45 (Ters Kogörüntü): (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olmak üzere $A \in \mathcal{S}$ ve $B \in \mathcal{T}$ olsun. F kobağıntısının B-önkesitine, B kümesinin (f,F) altındaki ters kogörüntüsü denir ve $F^{\leftarrow}B$ biçiminde gösterilir (Brown *et al.* 2004a).

Teorem 3.1.46: (f,F), $(S,\mathcal{S})$ doku uzayından $(T,\mathcal{T})$ doku uzayına bir difonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

(i) Her $A \in \mathcal{S}$ için $f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}A) \subseteq A \subseteq F^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A)$ dir.
(ii) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\rightarrow}(F^{\leftarrow}B) \subseteq B \subseteq F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}B)$ dir.
(iii) Her $B \in \mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}B = F^{\leftarrow}B$ dir (Brown *et al.* 2004a).

Tanım 3.1.47 (Ditopolojik Doku Uzayı): $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

(1) $\tau \subseteq \mathcal{S}$ olmak üzere
(a) $S, \emptyset \in \tau$,
(b) $G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$,
(c) $G_j \in \tau, j \in J \Longrightarrow \bigvee_{j\in J} G_j \in \tau$.

şartlarını sağlayan τ ailesine $(S,\mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir topoloji ve τ nun elemanlarına da topolojinin açık kümeleri denir.

(2) $\kappa \subseteq \mathcal{S}$ olmak üzere
(a) $S, \emptyset \in \kappa$,
(b) $K_1, K_2 \in \kappa \Longrightarrow K_1 \cup K_2 \in \kappa$,

(c) $K_j \in \kappa, j \in J \Longrightarrow \bigcap_{j \in J} K_j \in \kappa.$

şartlarını sağlayan κ ailesine $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir kotopoloji ve κ nın elemanlarına da kotopolojinin kapalı kümeleri denir.

(3) τ, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir topoloji ve κ, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir kotopoloji olmak üzere (τ, κ) çiftine $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji ve $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ya ise bir ditopolojik doku uzayı denir (Brown, Diker 1998a).

Örnek 3.1.48: Örnek 3.1.5 de verilen $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusunu göz önüne alalım. Burada, $\tau = \{[0, r) | \ 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\mathbb{I}\}$ ve $\kappa = \{[0, r] | \ 0 \leq r \leq 1\} \cup \{\emptyset\}$ biçiminde tanımlanan (τ, κ) çifti $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu üzerinde bir ditopolojidir ve özel olarak bu ditopolojiye doğal ditopoloji denir (Brown *et al.* 2004b).

Örnek 3.1.49: $(S, \mathcal{S})$ herhangi bir doku olsun. Açıkça $\tau = P(S)$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir topoloji ve $\kappa = P(S)$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir ko-topolojidir. Ayrıca $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki herhangi bir (τ, κ) ditopolojisi için; $\tau = \kappa = \mathcal{S}$ ditopolojisine ko-ayrık, $\tau = \kappa = P(S)$ ise (τ, κ) ditopolojisine ikili-ayrık ditopoloji denir (Brown *et al.* 2004b).

Örnek 3.1.50: $(S, \mathcal{S})$ herhangi bir doku olsun. Açıkça $\tau = \{\emptyset, S\}$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir topoloji ve $\kappa = \{\emptyset, S\}$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir ko-topolojidir. Ayrıca $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki herhangi bir (τ, κ) ditopolojisi için; $\tau = \{\emptyset, S\}$ ise (τ, κ) ditopolojisine ayrık olmayan, $\kappa = \{\emptyset, S\}$ ise (τ, κ) ditopolojisine ko-ayrık olmayan, $\tau = \kappa = \{\emptyset, S\}$ ise (τ, κ) ditopolojisine de ikili-ayrık olmayan ditopoloji denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.51 (Tümleyenli Ditopoloji): $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve σ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen olsun. $\kappa = \sigma[\tau]$ şartını sağlayan (τ, κ) ditopolojisine $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde tümleyenli ditopoloji denir (Brown and Diker 1998a).

Örnek 3.1.52: $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyenli ditopolojisini ele alalım. Bu durumda τ, X üzerinde bilinen anlamda topoloji ve $\kappa = \pi(\tau) = \{F \subseteq X : \pi(F) = X \backslash F \epsilon \tau\}$ ise τ topolojisi bilinen anlamda kapalı kümelerden oluşur. Sonuç olarak $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyenli ditopolojisi, kesinlikle bir noktasal topolojiye karşılık gelir. Ayrıca (X, τ) bir noktasal topolojik uzay ise $\kappa = \{F \subseteq X : \pi_X(K) = X \backslash K \epsilon \tau\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \tau, \kappa)$ bir tümleyenli ditopolojik uzaydır.

Uyarı 3.1.53: Doku uzayları genelde tümleyen işlemi altında kapalı olmadığı için ditopolojik kavramları belirtirken topolojik uzaylarda düşündüğümüz gibi açık kümeleri kapalı kümelerin tümleyeni şeklinde düşünemeyiz. Zaten ditopoloji kavramı bu şekilde hareket edilmeden dolayı ortaya çıkmıştır.

Tanım 3.1.54 (Komşuluk): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji olsun. $s \in S^b$ için $P_s \subseteq G \subseteq N \nsubseteq Q_s$ şartını sağlayan bir $G \in \tau$ varsa $N \in \mathcal{S}$ kümesine, s nin komşuluğu denir (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.55 (Kokomşuluk): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji olsun. $s \in S^b$ için $P_s \nsubseteq M \subseteq K \subseteq Q_s$ şartını sağlayan bir $K \in \kappa$ varsa $M \in \mathcal{S}$ kümesine, s nin kokomşuluğu denir (Brown *et al.* 2006).

Bir noktanın ko-komşuluğu her $s \in S$ için tanımlanmasına rağmen sadece S^b deki noktaların ko-komşuluklarını göz önüne almamız yeterli olabilir. Komşuluk ve ko-komşuluk kavramları arasındaki dualite, tanımlarından açıkça görülmektedir. s noktasının komşuluklarının kümesi $\eta(s)$ ile ko-komşuluklarının kümesi $\mu(s)$ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.56 : (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) Her $s \in S^b$ için s'nin komşulukları ailesi $\eta(s) \neq \emptyset$ dir ve bu aile aşağıdaki şartları sağlar.

(i) $N \in \eta(s) \Longrightarrow N \nsubseteq Q_s$ dir.

(ii) $N \in \eta(s), N \subseteq N' \in \mathcal{S} \Longrightarrow N' \in \eta(s)$ dir.

(iii) $N_1, N_2 \in \eta(s), N_1 \cap N_2 \nsubseteq Q_s \Longrightarrow N_1 \cap N_2 \in \eta(s)$ dir.

(iv) $N \in \eta(s)$ ise $\forall t \in S^b, N^* \nsubseteq Q_t \Longrightarrow N^* \in \eta(t)$ olmak üzere $P_s \subseteq N^* \subseteq N$ olacak şekilde $N^* \in \mathcal{S}$ vardır.

(v) $N \in \mathcal{S}$ ve $N \nsubseteq Q_s$ için, $\forall t \in S^b, N^* \nsubseteq Q_t \Longrightarrow N^* \in \eta(t)$ şartını sağlayan $P_s \subseteq N^* \subseteq N$ olacak şekilde $N^* \in \mathcal{S}$ varsa $N \in \eta(s)$ dir.

Ayrıca, τ'daki G kümeler, $G \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde her s için $G \in \eta(s)$ şartıyla karekterize edilir.

(2) Her $s \in S^b$ için s'nin ko-komşulukları ailesi $\mu(s) \neq \emptyset$ dir ve bu aile aşağıdaki şartları sağlar.

(i) $M \in \mu(s) \Longrightarrow P_s \nsubseteq M$ dir.

(ii) $M \in \mu(s), M \supseteq M' \in \mathcal{S} \Longrightarrow M' \in \mu(s)$ dir.

(iii) $M_1, M_2 \in \mu(s) \Longrightarrow M_1 \cup M_2 \in \mu(s)$ dir.

(iv) $M \in \mu(s)$ ise $\forall t \in S, P_t \nsubseteq M^* \Longrightarrow M^* \in \mu(t)$ olmak üzere $M \subseteq M^* \subseteq Q_s$ olacak şekilde $M^* \in \mathcal{S}$ vardır.

(v) $M \in \mathcal{S}$ ve $P_s \nsubseteq M$ için, $\forall t \in S, P_t \nsubseteq M^* \Longrightarrow M^* \in \mu(t)$ şartını sağlayan $M \subseteq M^* \subseteq Q_s$ olacak şekilde $M^* \in \mathcal{S}$ varsa $M \in \mu(t)$ dir.

Ayrıca, κ daki K kümeler, $P_s \nsubseteq K$ olacak şekilde her s için $K \in \mu(s)$ şartıyla karekterize edilir.

Tersine her $s \in S^b$ için (1)'deki şartları sağlayan $\mathcal{S}$ nin boştan farklı bir $\eta(s)$ alt ailesi ve her $s \in S$ için (2)'deki şartları sağlayan $\mathcal{S}$ nin boştan farklı bir $\mu(s)$ alt ailesi var ise, her $s \in S^b$ için $\eta(s)$ komşuluklar ailesi ve her $s \in S$ için $\mu(s)$ ko-komşuluklar ailesi olacak şekilde $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir (τ, κ) ditopolojisi vardır (Brown *et al.* 2006).

Tanım 3.1.57 (Kapanış, İç ve Dış): (τ,κ), $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji ve $A\in\mathcal{S}$ olsun.

$$[A]=\bigcap\{K\in\kappa: A\subseteq K\}$$

kümesine A nın kapanışı ve,

$$]A[=\bigvee\{G\in\tau: G\subseteq A\}$$

kümesine A nın içidir ve,

$$ext(A)=\bigvee\{G: G\in\tau \ ve\ G\cap A=\emptyset\}$$

kümesine A nın dışıdır denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.58 (Ditopolojik Alt Doku Uzayı): $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayı ve $(V,\mathcal{S}_V)$, $V\in\mathcal{S}$ için $(S,\mathcal{S})$ nin esas bir dokusu olsun. O zaman $(V,\mathcal{S}_V,\tau_V,\kappa_V)$, $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayıdır denir ve $\tau_V=\{V\cap G : G\in\tau\}$ ve $\kappa_V=\{V\cap F: F\in\kappa\}$ dir. Eğer $V\in\tau$ ise , V bir açık alt uzaydır ve $V\in\kappa$ ise, V kapalı bir alt uzaydır denir (Tantawy *et al.*2014).

Teorem 3.1.59: $(V,\mathcal{S}_V,\tau_V,\kappa_V)$, $(S,\mathcal{S},\tau,\kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun ve $A\subseteq V$;

(1) A, τ_V-açıkdır ancak ve ancak herhangi bir τ-açık G kümesi için,

$$A=V\cap G$$

dir.

(2) A, κ_V-kapalıdır ancak ve ancak herhangi bir κ -kapalı F kümesi için

$$A = V \cap F$$

dir ((Tantawy *et al.*2014).

Teorem 3.1.60: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun.

(1) Her τ_V açık kümesi τ açık kümedir ancak ve ancak $V \in \tau$ dur.
(2) Her κ_V kapalı kümesi κ-kapalı kümedir ancak ve ancak $V \in \kappa$ dur (Tantawy *et al.*2014).

Sonuç 3.1.61: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun ve $A \subseteq V$. A, τ_V açık kümesidir ancak ve ancak A τ açık kümedir (Tantawy *et al.*2014).

Sonuç 3.1.62: $(V, \mathcal{S}_V, \tau_V, \kappa_V)$, $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayının bir alt uzayı olsun ve $A \subseteq V$. A, κ_V kapalı kümesidir ancak ve ancak A κ-kapalı kümedir (Tantawy *et al.*2014).

Tanım 3.1.63 (Süreklilik): $k = 1, 2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer, her $G \in \tau_2$ için $F^{\leftarrow}G \in \tau_1$ oluyor ise, (f, F) difonksiyonuna sürekli denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.64 (Ko-Süreklilik): $k = 1, 2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik uzaylar ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer her $K \in \kappa_2$ için $f^{\leftarrow}K \in \kappa_1$ oluyor ise, (f, F) difonksiyonuna ko-süreklidir denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.65 (Di-Süreklilik):Eğer (f, F) difonksiyonu hem sürekli hem de ko-sürekli ise, (f, F)'e di-sürekli adı verilir (Brown *et al.* 2004b).

(f, F) difonksiyonu için, ters görüntü ve ters ko-görüntü çakışık olduğundan dolayı süreklilik tanımında $F^{\leftarrow}G$ yerine $f^{\leftarrow}G$ veya ko-süreklilik tanımında $f^{\leftarrow}K$ yerine $F^{\leftarrow}K$ kullanılabilir. Burada süreklilik için $F^{\leftarrow}G$, ko-süreklilik için $f^{\leftarrow}K$ kullanılmasının sebebi topoloji ve ko-topoloji arasındaki dualiteyi vurgulamaktır.

Tanım 3.1.66 (Dihomeomorfizm): $k = 1,2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. (f, F) difonksiyonu birebir, örten, ikili sürekli ve tersi ikili sürekli ise, (f, F) difonksiyonuna bir dihomeomorfizm denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.67 (Açık, Koaçık Difonksiyon): $k = 1,2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer her $G \in \tau_1$ için $f^{\rightarrow}G \in \tau_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna açık difonksiyon ve benzer şekilde her $G \in \tau_1$ için $F^{\rightarrow}G \in \tau_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna koaçık difonksiyon denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.68 (Kapalı, Kokapalı Difonksiyon): $k = 1,2$ için $(S_k, \mathcal{S}_k, \tau_k, \kappa_k)$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Eğer her $K \in \kappa_1$ için $F^{\rightarrow}K \in \kappa_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna kapalı ve benzer şekilde her $K \in \kappa_1$ için $f^{\rightarrow}K \in \kappa_2$ oluyor ise (f, F) difonksiyonuna kokapalı denir (Brown *et al.* 2004b).

Tanım 3.1.69 (Taban, Kotaban, Alttaban, Koalttaban): (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere τ daki her küme, β daki kümelerin supremumu olarak yazılabiliyorsa, β ya (τ, κ) ditopolojisinin tabanı denir.
(2) $\beta \subseteq \kappa$ olmak üzere κ daki her küme, β daki kümelerin keyfi arakesiti olarak yazılabiliyorsa, β ya (τ, κ) ditopolojisinin kotabanı denir.
(3) $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere, β daki kümelerin sonlu arakesitlerinin kümesi, τ için bir taban

oluyorsa, β ya (τ, κ) ditopolojisinin alttabanı denir.

(4) $\beta \subseteq \kappa$ olmak üzere, β daki kümelerin sonlu birleşimlerinin kümesi, κ için bir taban oluyorsa β ya (τ, κ) ditopolojisinin koalttabanı denir (Brown *et al.* 2004b).

Tümleyenli ditopolojide tümleyen dönüşümü, τ için bir tabanı (alttabanı), κ için bir tabana (alttabana) taşır.

Teorem 3.1.70 : (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ doku uzayı üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) $\beta \subseteq \tau$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(i) β, τ topolojisinin bir tabanıdır.

(ii) $G \in \tau, G \nsubseteq Q_s \Longrightarrow B \nsubseteq Q_s$ ve $B \subseteq G$ olacak şekilde $\exists B \in \beta$ vardır.

(iii) $G \in \tau, G \nsubseteq Q_s \Longrightarrow P_s \subseteq B \subseteq G$ olacak şekilde $\exists B \in \beta$ vardır.

(2) $\beta \subseteq \kappa$ olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(i) β, κ ko-topolojisinin bir tabanıdır.

(ii) $K \in \kappa, P_s \nsubseteq K \Longrightarrow B \nsubseteq Q_s$ ve $K \subseteq B$ olacak şekilde $\exists B \in \beta$ vardır.

(iii) $K \in \kappa, P_s \nsubseteq K \Longrightarrow K \subseteq B \subseteq Q_s$ olacak şekilde $\exists B \in \beta$ vardır (Brown *et al.* 2004b).

Bu teorem bize açıkça gösterir ki, p-kümeler ve q-kümelerine göre τ ve κ'nın tabanları arasında bir doğal dualite vardır. Genellikle, dual kavramlar ko öneki ile ifade edilir.

Aşağıdaki teoremde $\mathcal{S}$ nin bir alt kümesinin $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir ditopolojinin taban (ko-taban) olması için gerek ve yeter şartları verilmiştir.

Teorem 3.1.71 : $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $\beta \subseteq \mathcal{S}$ olsun.

(1) β nın $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir ditopolojini tabanı olması için gerek ve yeter şart,

(i) $\bigvee \beta = S$, ve

(ii) $B_1 \cap B_2 \nsubseteq Q_s$ olmak üzere $B_1, B_2 \in \mathcal{S}, s \in S$ için $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ ve $B_3 \nsubseteq Q_s$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır.

(2) β nın $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir ditopolojini tabanı olması için gerek ve yeter şart,

(i) $\bigvee \beta = S$, ve

(ii) $B_1 \cap B_2 \nsubseteq Q_s$ olmak üzere $B_1, B_2 \in \mathcal{S}, s \in S$ için $P_s \subseteq B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır.

(3) β nın $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir ditopolojini ko-tabanı olması için gerek ve yeter şart,

(i) $\bigcap \beta = \emptyset$, ve

(ii) $P_s \nsubseteq B_1 \cup B_2$ olmak üzere $B_1, B_2 \in \mathcal{S}, s \in S$ için $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3$ ve $P_s \nsubseteq B_3$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır.

(4) β'nın $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki bir ditopolojini ko-tabanı olması için gerek ve yeter şart,

(i) $\bigcap \beta = \emptyset$, ve

(ii) $P_s \nsubseteq B_1 \cup B_2$ olmak üzere $B_1, B_2 \in \mathcal{S}, s \in S$ için $B_1 \cup B_2 \subseteq B_3 \subseteq Q_s$ olacak şekilde bir $B_3 \in \beta$ vardır (Brown *et al* 2004b).

Önerme 3.1.72 : $(f, F): (S_1, \mathcal{S}_1, \tau_1, \kappa_1) \longrightarrow (S_2, \mathcal{S}_2, \tau_2, \kappa_2)$ bir difonksiyon olmak üzere β, (τ_2, κ_2) ditopolojisinin bir alttabanı ve γ, (τ_2, κ_2) ditopolojisinin bir ko-alttabanı olsun.

(i) (f, F) süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $G \in \beta$ için $F^{\leftarrow} G \in \tau_1$ dir.

(ii) (f, F) ko-süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $K \in \gamma$ için $f^{\leftarrow} K \in \kappa_1$ dir (Brown *et al.* 2004b).

4. ARAŞTIRMA ve BULGULAR

4.1. Ditopolojik Doku Uzaylarında Dimetrikler

Tanım 4.1.1 (pseudo dimetrik): $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı, $\bar{\rho},\underline{\rho}: S \times S \longrightarrow [0,\infty)$ iki noktasal fonksiyon olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\rho = \left(\bar{\rho},\underline{\rho}\right)$ ikilisine $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir pseudo dimetriktir denir:

(M1) $\bar{\rho}(s,t) \leq \bar{\rho}(s,u) + \bar{\rho}(u,t)\ \forall\ s,u,t \in S$
(M2) $P_s \nsubseteq Q_t \Rightarrow \bar{\rho}(s,t) = 0\ \forall\ s,t \in S$
(DM) $\bar{\rho}(s,t) = \underline{\rho}(t,s)\ \forall\ s,t \in S$
(CM1) $\underline{\rho}(s,t) \leq \underline{\rho}(s,u) + \underline{\rho}(u,t)\ \forall\ s,u,t \in S$
(CM2) $P_t \nsubseteq Q_s \Rightarrow \underline{\rho}(s,t) = 0\ \forall\ s,t \in S$

Bu durumda $\bar{\rho}$, pseudo metrik ve $\underline{\rho}$, pseudo kometrik olarak adlandırılır (Özçağ and Brown 2003).

Tanım 4.1.2 (dimetrik): Eğer yukarıda bahsedilen ρ aşağıdaki şartları sağlayan bir pseudo dimetrik ise bu taktirde ρ ya dimetrik adı verilir.

(M3) $P_s \nsubseteq Q_u, \bar{\rho}(u,v) = 0, P_v \nsubseteq Q_t \Rightarrow P_s \nsubseteq Q_t\ \forall\ s,t,u,v \in S$
(CM3) $P_u \nsubseteq Q_s$, $\underline{\rho}(u,v) = 0, P_t \nsubseteq Q_v \Rightarrow P_t \nsubseteq Q_s\ \forall\ s,t,u,v \in S$

Eğer $\rho = \left(\bar{\rho},\underline{\rho}\right)$ $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir (pseudo) dimetrik ise bu taktirde $(S,\mathcal{S},\rho)$ üçlüsüne (pseudo) dimetrik doku uzayı adı verilir (Özçağ and Brown 2003).

(DM) simetri şartı $\underline{\rho}$ kometriğini tanımlamak için kullanılabileceğinden dolayı örneklerde sadece $\bar{\rho}$ nin metrik şartlarını sağladığını göstermemiz yeterli olacaktır.

Tanım 4.1.3 (Quasi-Pseudo Dimetrikler): Eğer pseudo dimetrik tanımındaki (DM) simetri şartını yani (DM) $\bar{\rho}(s,t) = \underline{\rho}(t,s)\ \forall\, s,t \in S$ şartını ortadan kaldırırsak bu taktirde $\rho = \left(\bar{\rho}, \underline{\rho}\right)$ uzayına quasi-pseudo dimetrik doku uzayı adı verilir (Uğur ve Elmalı 2017).

Önerme 4.1.4: ρ, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir pseudo dimetrik ve $s \in S^\flat, \varepsilon > 0$ için

$$N_\varepsilon^\rho(s) = \bigvee \{P_t | \exists u \in S \text{ öyle ki } P_s \not\subseteq Q_u, \bar{\rho}(u,t) < \varepsilon\},$$

$$M_\varepsilon^\rho(s) = \bigcap \left\{Q_t | \exists u \in S \text{ öyle ki } P_u \not\subseteq Q_s, \underline{\rho}(u,t) < \varepsilon\right\},$$

tanımları yapılsın. Bu durumda , $(S,\mathcal{S})$ üzerinde $\left(\tau(\bar{\rho}), \kappa\left(\underline{\rho}\right)\right)$ ditopolojisi için

$$\beta_\rho = \left\{N_\varepsilon^\rho(s) | s \in S^\flat, \varepsilon > 0\right\}$$

bir taban ve

$$\gamma_\rho = \left\{M_\varepsilon^\rho(s) | s \in S^\flat, \varepsilon > 0\right\}$$

ise bir kotabandır.

Bu taktirde $\left(S, \mathcal{S}, \tau_\rho, \kappa_\rho\right)$ ye (pseudo) dimetrik ditopolojik doku uzayı adı verilir (Özçağ and Brown 2003).

İspat 4.1.5: (M2) şartından dolayı $\forall\, s \in S^\flat$ için $P_s \subseteq N_\varepsilon^\rho(s)$ olur ve buradan da $\bigvee \beta_\rho = S$ diyebiliriz. Şimdi $s_1, s_2, s \in S^\flat$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ olmak üzere $N_{\varepsilon_1}^\rho(s_1) \cap N_{\varepsilon_2}^\rho(s_2) \not\subseteq Q_s$ olsun. Bir $t \in S$ seçersek $N_{\varepsilon_1}^\rho(s_1) \cap N_{\varepsilon_2}^\rho(s_2) \not\subseteq Q_t, P_t \not\subseteq Q_s$ yazabiliriz ve hatta $k = 1,2$ için $t_k \in S$ alırsak $P_{t_k} \not\subseteq Q_t$ olur ve buradan bazı $P_{s_k} \not\subseteq Q_{s'_k}, s'_k \in S$ için $\bar{\rho}(s'_k, t_k) < \varepsilon_k$ olur. $\bar{\rho}(t_k, t) = 0$ (M2 den dolayı) yazılabildiği için $k = 1,2$ için

$\bar{\rho}(t_k, t) < \varepsilon_k$ sonucu M1 şartından dolayı yazılır. Dolayısıyla öyle bir $\varepsilon \in \mathbb{R}$ seçebiliriz ki $0 < \varepsilon < min\big(\varepsilon_1 - \bar{\rho}(s'_1, t), \varepsilon_2 - \bar{\rho}(s'_2, t)\big)$ olur. Bununla birlikte basit bir şekilde görülür ki

$$N_\varepsilon^\rho(i) \subseteq N_{\varepsilon_1}^\rho(s_1) \cap N_{\varepsilon_2}^\rho(s_2), N_\varepsilon^\rho(t) \subseteq Q_s$$

olur ve buradan de $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki bazı $\tau_\rho$topolojileri için β_ρ bir baz olur. Benzer şekilde γ_ρ nunda bazı κ_ρ ko-topolojileri için bir baz olduğu gösterilebilir.

Uyarı 4.1.6: Bu önermeden şu sonuçları çıkarabiliriz: $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki dimetrik, diskre ve kodiskre ditopolojisi doğurur. Benzer şekilde $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu üzerindeki alışılmış dimetrik aynı doku üzerinde alışılmış ditopolojiyi doğurur ve $S = (0,1]$ kümesi ve $\mathcal{S} = \{(0, r] | 0 \leq r \leq 1\}$ dokusu için alışılmış dimetrik diskre ve kodiskre ditopolojisini doğurur (Özçağ and Brown 2003).

Örnek 4.1.7: $(S, \mathcal{S})$ bir doku $\bar{\rho}$ pseudo metriği

$$\bar{\rho}(s, t) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } P_s \nsubseteq Q_t, \\ 1 & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu taktirde $\bar{\rho}$ pseudo metriği bir dimetrik tanımlar ve buna $(S, \mathcal{S})$ üzerinde diskre dimetrik adı verilir.

Örnek 4.1.8: Eğer d metrik uzaylardan bildiğimiz (pseudo) metrik ise bu taktirde $\rho = (d, d)$ $\big(X, P(X)\big)$ dokusu üzerinde bir (pseudo) dimetriktir.

Örnek 4.1.9: $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusunu $\overline{\rho}(s, t) = (t - s) \vee 0$ kümesini düşünürsek buradaki $\overline{\rho}$, $(\mathbb{I}, \mathcal{J})$ dokusu üzerinde bir ρ dimetriğini tanımlar ve buna alışılmış dimetrik adı verilir.

Örnek 4.1.10: $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $S = (0,1]$, $\mathcal{S} = \{(0, r] | 0 \leq r \leq 1\}$ olsun. Bir önceki örnekte verilen $\overline{\rho}(s,t) = (t-s) \vee 0$ kümesi bir dimetriktir ve bu dimetrik de $(S,\mathcal{S})$ üzerinde alışılmış dimetrik olur.

Tanım 4.1.11 (Açık Küme): $(S,\mathcal{S},\rho)$ (pseudo) dimetrik doku uzayı, $s \in S$ ve $G \in \mathcal{S}$ olmak üzere bu taktirde eğer $\forall\ G \nsubseteq Q_s$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki $N_\varepsilon^\rho(s) \subseteq G$ oluyorsa bu G kümesine açık küme adı verilir (Dost 2017).

Tanım 4.1.12 (Kapalı Küme): $(S,\mathcal{S},\rho)$ (pseudo) dimetrik doku uzayı, $s \in S$ ve $K \in \mathcal{S}$ olmak üzere bu taktirde eğer $\forall\ P_s \nsubseteq K$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki $K \subseteq M_\varepsilon^\rho(s)$ oluyorsa K kümesine kapalı küme adı verilir (Dost 2017).

Not: Açık kümelerin sınıfı $\eta_\rho = \{G \in \mathcal{S} | G, (S,\mathcal{S},\rho)$ de açık küme$\}$ ve kapalı kümelerin sınıfı $\mu_\rho = \{K \in \mathcal{S} | K, (S,\mathcal{S},\rho)$ da kapalı küme$\}$ ile gösterilir (Dost 2017).

Önerme 4.1.13: $(S,\mathcal{S},\rho)$ (pseudo) dimetrik doku uzayı olsun. Her $s \in S$ ve $\varepsilon > 0$ için ,

i. $N_\varepsilon^\rho(s)$, $(S,\mathcal{S},\rho)$ de açık bir kümedir.
ii. $M_\varepsilon^\rho(s)$, $(S,\mathcal{S},\rho)$ de kapalı bir kümedir (Dost 2017).

İspat 4.1.14: (i) şartını ispatlayalım. Benzer şekilde (ii) şartı da ispatlanabilir. Bazı $v \in S$ elemanları için $N_\varepsilon^\rho(s) \nsubseteq Q_v$ olsun. $N_\varepsilon^\rho(s)$ nin tanımından, öyle $y, z \in S$ elemanları vardır ki $P_y \nsubseteq Q_v$ ve $P_s \nsubseteq Q_z$ ve $\bar{\rho}(z,y) < \varepsilon$ olur. $\delta = \varepsilon - \bar{\rho}(z,y)$ olmak üzere $N_\delta^\rho(v) \subseteq N_\varepsilon^\rho(s)$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $N_\delta^\rho(v) \nsubseteq N_\varepsilon^\rho(s)$ olsun. O halde bazı $r \in S$ elemanları için $N_\delta^\rho(v) \nsubseteq Q_r$ ve $P_r \nsubseteq N_\varepsilon^\rho(s)$ olur. İlk kapsama ile $m, n \in S$ vardır öyle ki $P_m \nsubseteq Q_r$, $P_v \nsubseteq Q_n$ ve $\bar{\rho}(n,m) < \delta$ olur. Buradan ortaya $\bar{\rho}(z,y) + \bar{\rho}(n,m) < \varepsilon$ ve $\bar{\rho}(z,r) \leq \bar{\rho}(z,y) + \bar{\rho}(y,v) + \bar{\rho}(v,n) + \bar{\rho}(n,m) \leq \varepsilon$ sonuçları çıkar. $P_u \nsubseteq Q_z$ ve $\bar{\rho}(z,r) \leq \varepsilon$ olduğu için $P_r \subseteq N_\varepsilon^\rho(s)$ çelişkisi elde edilir.

Örnek 4.1.15: $(S,\mathcal{S})$ bir doku olsun. Bu doku üzerinde tanımlanan $\rho = \left(\overline{\rho}, \underline{\rho}\right)$ pseudo dimetriği,

$$\overline{\rho}(s,t)=\begin{cases}0, & P_s \nsubseteq Q_t\\ 1, & \text{aksi durumda}\end{cases}$$

ve

$$\underline{\rho}(s,t)=\begin{cases}0, & P_t \nsubseteq Q_s\\ 1, & \text{aksi durumda}\end{cases}$$

şeklinde ifade edilsin.

$S=\{1,2,3\}$ ve $\mathcal{S}=\mathcal{P}(S)$ olsun. Burada ε nu birden fazla seçerek inceleme yapacağız.

$\varepsilon=1$ için $s=1$ noktasının ε-komşuluğu

$$N_1^{\rho}(1)=\bigvee\{P_t:\exists u\in S, P_1\nsubseteq Q_u, \overline{\rho}(u,t)<1\}$$

$P_1\nsubseteq Q_u \Rightarrow \{1\}\nsubseteq\{2,3\}\Rightarrow u=1$

ve bu yüzden

$$N_1^{\rho}(1)=\bigvee\{P_t:\exists u\in S, P_1\nsubseteq Q_1, \overline{\rho}(1,t)<1\}$$

dolayısıyla, $\overline{\rho}(1,t)<1\Rightarrow\overline{\rho}(1,t)=0\Rightarrow P_1\nsubseteq Q_1$ ve $t=1\Rightarrow P_t=P_1=\{1\}$ kümesi olur.

Benzer şekilde;

$\varepsilon=1$ için $s=2$ noktasının ε-komşuluğu $\{2\}$ kümesi ve
$\varepsilon=1$ için $s=3$ noktasının ε-komşuluğu da $\{3\}$ kümesi olur.

$\varepsilon \neq 1$ seçersek de (mesela $\varepsilon = 2$);

$s = 1$ noktasının ε-komşuluğu $\{2,3\}$ ve $\{1\}$ kümeleri yani S kümesi,

$s = 2$ noktasının ε-komşuluğu $\{1,3\}$ ve $\{2\}$ kümeleri yani S kümesi ve

$s = 3$ noktasının ε-komşuluğu $\{1,2\}$ ve $\{3\}$ kümeleri yani S kümesi olur.

Böylece ditopoloji için bazımız $\beta = \{S, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ olur.

Diğer yandan kapalılar için ise komşuluklar şu şekilde tanımlıdır:

Aynı şekilde $\varepsilon = 1$ ve $\varepsilon \neq 1$ için inceleme yapacağız.

$\varepsilon = 1$ için $s = 1$ noktasının ε-komşuluğu

$$M_1^{\rho}(1) = \bigcap \left\{Q_t : \exists u \in S, P_u \not\subseteq Q_1, \underline{\rho}(u,t) < 1\right\} = \{2,3\}$$

olur.

Benzer şekilde;

$\varepsilon = 1$ için $s = 2$ noktasının ε-komşuluğu $\{1,3\}$ kümesi ve

$\varepsilon = 1$ için $s = 3$ noktasının ε-komşuluğu $\{1,2\}$ kümesi

$\varepsilon = 2$ için $s = 1$ noktasının ε-komşuluğu $\emptyset$ küme

$\varepsilon = 2$ için $s = 2$ noktasının ε-komşuluğu $\emptyset$ küme ve

$\varepsilon = 2$ için $s = 3$ noktasının ε-komşuluğu yine $\emptyset$ küme olacaktır.

Böylece ditopoloji için kobazımız $\gamma = \{S, \emptyset, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2\}\}$ olur.

Dolayısıyla pseudo dimetrik yardımıyla elde ettiğimiz ditopoloji

$$\tau_\rho = \{S, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

ve

$$\kappa_\rho = \{S, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

olarak ifade edilir.

Önerme 4.1.16: ρ, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir (pseudo) dimetrik ve $s \in S^\flat$ olmak üzere bu taktirde S kümesi açıktır.

İspat 4.1.17: Her $S \not\subseteq Q_s$ için öyle bir $s \in S$ ve $\varepsilon > 0$ vardır ki $N_\varepsilon^\rho(s) \subseteq S$ dir. Dolayısıyla S kümesi $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki ρ pseudo dimetriğine göre açık bir kümedir.

Önerme 4.1.18: ρ, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir (pseudo) dimetrik ve $s \in S^\flat$ olmak üzere bu taktirde S kümesi kapalıdır.

İspat 4.1.19: Her $P_s \not\subseteq S$ için öyle bir $s \in S$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı vardır ki $S \subseteq M_\varepsilon^\rho(s)$ dir. Dolayısıyla S kümesi $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki ρ pseudo dimetriğine göre kapalı bir kümedir.

Önerme 4.1.20: ρ, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir pseudo dimetrik, $G \in \mathcal{S}$, $s \in S^\flat$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere bu taktirde her $G_i \not\subseteq Q_s$ için öyle bir $\varepsilon > 0$ vardır ki $N_\varepsilon^\rho(s_i) \subseteq G_i$ $(i = 1,2, \dots, n)$ dir. Dolayısıyla $\bigcap_{i=1}^n G_i$ ifadesi, yani G_i lerin sonlu sayıda kesişimleri, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki ρ pseudo dimetriğine göre açıktır.

İspat 4.1.21: $s, s_1, s_2 \in S^b$ olsun. Bu taktirde;

$$\forall\ G_1 \not\subseteq Q_{s_1} \text{ için vardır bir ve } \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } N_{\varepsilon_1}^\rho(s_1) \subseteq G_1 \ \dots(1)$$

ve

$$\forall\, G_2 \nsubseteq Q_{s_2} \text{ için vardır bir ve } \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } N_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2) \subseteq G_2 \ldots(2)$$

ifadelerini tanımdan yazabiliriz.

Bir $u \in S$ seçelim. (Özçağ ve Brown 2003 önerme 6.3 gereğince) $N_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \cap N_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2) \nsubseteq Q_u$, $P_u \nsubseteq Q_u$ ve $0 < \varepsilon = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olduğundan dolayı $N_{\varepsilon}^{\rho}(u) \subseteq N_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \cap N_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2)$ diyebiliriz.

Yukarıda belirttiğimiz (1) ve (2) den dolayı;

$$\left.\begin{matrix} N_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \subseteq G_1 \nsubseteq Q_{s_1} \\ N_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2) \subseteq G_2 \nsubseteq Q_{s_2} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow N_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \cap N_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2) \subseteq G_1 \cap G_2 \nsubseteq Q_{s_1} \cap Q_{s_2}$$

olur.

$G_1 \cap G_2 \nsubseteq Q_{s_1} \cap Q_{s_2}$ için vardır bir $\varepsilon > 0$ öyle ki $N_{\varepsilon}^{\rho}(u) \subseteq G_1 \cap G_2$ dir. Böylece $G_1 \cap G_2$ açıktır.

Benzer şekilde sonlu sayıda G_i kümesinin de kesişiminin $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki ρ pseudo dimetriğine göre açık olduğunu gösterebiliriz.

Önerme 4.1.22: ρ, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir pseudo dimetrik, $K \in \mathcal{S}$, $s \in S^{b}$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere bu taktirde her $P_s \nsubseteq K_i$ için vardır bir $\varepsilon > 0$ öyle ki $K_i \subseteq M_{\varepsilon}^{\rho}(s_i)$ $(i \in \mathbb{I})$ dir. Dolayısıyla $\bigcup_{i \in \mathbb{I}} K_i$ ifadesi, yani K_i lerin sonlu sayıda birleşimleri, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki ρ pseudo dimetriğine göre kapalıdır.

İspat 4.1.23: $s, s_1, s_2 \in S^b$ olsun. Bu taktirde;

$$\forall\, P_{s_1} \nsubseteq K_1 \text{ için öyle bir ve } \varepsilon > 0 \text{ vardır ki } K_1 \subseteq M_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \;\ldots(1)$$

ve

$$\forall\, P_{s_2} \nsubseteq K_2 \text{ için vardır bir ve } \varepsilon > 0 \text{ öyle ki } K_2 \subseteq M_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2) \;\ldots(2)$$

ifadelerini tanımdan yazabiliriz.

Bir $u \in S$ seçelim. (Özçağ ve Brown 2003 önerme 6.3 gereğince) $P_u \nsubseteq M_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \cup M_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2)$, $Q_u \nsubseteq P_u$ ve $0 < \varepsilon = max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ olduğundan dolayı $M_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \cup M_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2) \subseteq M_{\varepsilon}^{\rho}(u)$ diyebiliriz.

Yukarıda belirttiğimiz (1) ve (2) den dolayı;

$$\left.\begin{array}{l} P_{s_1} \nsubseteq K_1 \subseteq M_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \\ P_{s_2} \nsubseteq K_2 \subseteq M_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2) \end{array}\right\} \Longrightarrow Q_{s_1} \cap Q_{s_2} \nsubseteq K_1 \cup K_2 \subseteq M_{\varepsilon_1}^{\rho}(s_1) \cup M_{\varepsilon_2}^{\rho}(s_2)$$

olur.

$Q_{s_1} \cup Q_{s_2} \nsubseteq K_1 \cup K_2$ için vardır bir $\varepsilon > 0$ öyle ki $K_1 \cup K_2 \subseteq M_{\varepsilon}^{\rho}(u)$ dir. Böylece $G_1 \cup G_2$ açıktır.

Benzer şekilde sonlu sayıda K_i kümesinin de birleşiminin $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerindeki ρ pseudo dimetriğine göre kapalı olduğunu gösterebiliriz.

Doku uzaylarında açık kümeler ile kapalı kümeler birbirinden bağımsız olarak tanımlandığı için her yerde ayrıca tümleyen kavramı tanımlanmıştır. Dimetrik doku uzaylarında ise bu kavram henüz tanımlanmamıştır. Bu tezde ise bu kavram ilk defa olarak tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.24 (Tümleyenli Dimetrik Doku Uzayı): $(S, \mathcal{S}, \rho)$ bir (pseudo) dimetrik doku uzayı olsun. σ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen olmak üzere η_ρ daki her G elemanı için $\sigma(G) \in \mu_\rho$ oluyorsa yani $\sigma(\eta_\rho) = \mu_\rho$ ise bu taktirde $(S, \mathcal{S}, \rho)$ ya tümleyenli (pseudo) dimetrik doku uzayı adı verilir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalışmada daha önceki topolojik uzaylarda tanımlanmış olan metrik uzayların doku uzaylardaki karşılığı olan dimetrik doku uzayı kavramlarına yer verilmiştir ve dimetriklerle ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 1: $(S,\mathcal{S})$ doku uzayındaki S kümesi hem açık hem de kapalı bir kümedir.

Sonuç 2: ρ, $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir (pseudo) dimetrik, $K \in \mathcal{S}$, $s \in S^{b}$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere bu taktirde her $P_s \nsubseteq K_i$ için K_i lerin sonlu sayıda birleşimleri, $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerindeki ρ pseudo dimetriğine göre kapalıdır.

Sonuç 3: ρ, $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir (pseudo) dimetrik, $G \in \mathcal{S}$, $s \in S^{b}$, $\varepsilon > 0$ olmak üzere bu taktirde her $G_i \subseteq Q_s$ için G_i lerin sonlu sayıda kesişimleri, $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerndeki ρ pseudo dimetriğine göre açıktır.

Ayrıca ilk defa olarak tümleyenli dimetrik kavramı tanımlanmıştır.

Sonuç 4: $(S,\mathcal{S},\rho)$ bir (pseudo) dimetrik doku uzayı olsun. σ, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen olmak üzere η_ρ daki her G elemanı için $\sigma(G) \in \mu_\rho$ oluyorsa yani $\sigma(\eta_\rho) = \mu_\rho$ ise bu taktirde $(S,\mathcal{S},\rho)$ ya tümleyenli (pseudo) dimetrik doku uzayı adı verilir.

KAYNAKLAR

Birkhoff, G., 1967. Lattice Theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, 418p, USA.

Bizim, O., 2013. Genel Topoloji, Dora Yayıncılık, 564p, Bursa.

Brown, L. M. and Diker, M., 1998a. Ditopological texture spaces and intuitionistic sets. Fuzzy Sets and Systems, 98, 217-224.

Brown, L. M. and Ertürk, R., 2000a. Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems. Fuzzy Sets and Systems, 110, 227-236.

Brown, L. M. and Ertürk, R., 2000b. Fuzzy sets as texture spaces, II. Subtextures and quotient textures. Fuzzy Sets and Systems 110, 237-245.

Brown, L. M., 1993a. Ditopological fuzzy structures I. Fuzzy Systems a A. I M, 3(1).

Brown, L. M., 1993b. Ditopological fuzzy structures II. Fuzzy Systems a A. I M, 3(2).

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004a. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, I. Basic concepts. Fuzzy Sets and Systems, 147, 171-199.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2004b. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, II. Topological Consideration. Fuzzy Sets and Systems, 147, 201-231.

Brown, L. M., Ertürk, R. and Dost S., 2006. Ditopological texture spaces and fuzzy topology, III.Seperation axioms. Fuzzy Sets and Systems, 157, 1886-1912.

Brown, L. M., Ertürk, R., 2000a. Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems, Fuzzy Sets and Systems, 110 (2), 227-236.

Bülbül, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları, 312p, Trabzon.

Cohn, P. M., 2002. Basic Algebra: Groups, Rings and Fields. Springer-Verlag, 480p, London.

Davey, B. A. and Priestley, H. A., 2002. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press, 298p, Cambridge.

Demirci M., 2007, 'Textures and C-Spaces', Fuzzy Sets and Systems, vol.158, pp. 1237-1245.

Dost, S., 2017, Metric spaces and textures, Applied General Topology, 18, No:1, 203-217

Ergun, N., 2005. Kümeler Teorisine Giriş. Nobel Yayınları, 630p, Ankara

Gohar, M.M., 2002. Compactness in Ditopological Texture Spaces. PhD Thesis, Hacettepe University, Ankara.

Karaçay, T., 2009. Genel Topoloji, TDK Bilim, 246p, İstanbul.

Koçak, M., 2011, Genel Topolojiye Giriş ve Çözümlü Alıştırmalar, Kampüs Yayıncılık 3. Baskı, Eskişehir.

Mucuk, O., 2009. Topoloji, Nobel Yayın Dağıtım, 358, Ankara.

Özçağ, S. 2000. The Consept of Quasi-Uniformity in Texture Space and Its Rpresentation, Quaestiones Mathematicae, 457-476.

Özçağ, S., Brown, L. M., 2003, Di-uniform Texture Spaces, Appl. General Topology, 4(1), 157-192.

Tantawy, O. A. E., S. A. El-Sheikh, M. Yakout, A. M. Abd El-latif , 2014, On connectedness in ditopological texture spaces, Ann. Fuzzy Math. Inform. 7 , No. 2, 343-354

Uğur T., Elmalı C.S., 2017. The Graph Concept on Texture Spaces, ICAAM 2017.
Yıldız, C., 2005. Genel Topoloji, Gazi Üniversitesi Basımevi, 490p, Konya.
Yüksel, Ş., 2002. Genel Topoloji. Selçuk Üniversitesi Basımevi, 490p, Konya

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Ankara'da doğdu. Öğreniminin ilk, orta ve lise eğitimini Ankara'da tamamladı. 2004 yılında lise eğitimin tamamlayarak aynı yıl Erciyes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 2009 yılında lisans eğitimini tamamladı. 2012 yılında Bingöl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başlamıştır. 2015 yılında ise Atatürk Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans öğrenimine başladı. Halen lisansüstü eğitimi devam etmektedir.