KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1 ve 2 BOYUTLU ÜNİTER UZAYLARDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hüsnü Anıl ÇOBAN

TEMMUZ 2008
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

1 ve 2 BOYUTLU ÜNİTER UZAYLARDA DÖNÜŞÜM GRUPLARI

Hüsnü Anıl ÇOBAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12.06.2008
Tezin Savunma Tarihi : 10.07.2008

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ziya YAPAR

Jüri Üyesi : Prof. Dr. Sami KARADENİZ

Enstitü Müdür V. : Doç. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2008

ÖNSÖZ

“1 ve 2 Boyutlu Üniter Uzaylarda Dönüşüm Grupları” adlı bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında “Yüksek Lisans Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Sayın Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV (Cevat HACİEV)’ e, çalışmalarımın gelişimi aşamasında sunularıma katılarak yardımlarını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Ömer PEKŞEN’ e, başım her sıkıştığında yardımını aldığım Sayın İdris ÖREN’ e, çalışmalarımın yön kazanmasında etkileri olan ve ihtiyacım olduğunda her zaman destek vermeye hazır olduklarını belirten Sayın Muhsin İNCESU’ ya, Sayın Meral CANSIZ AKTAŞ’ a, eşi Sayın Devrim Yaşar AKTAŞ’ a, Sayın Gülistan KAYA’ ya, Sayın Nurgül OKUR’ a, çevirilerimde yardımlarını esirgemeyen Sayın Ramazan ÇATAL’ a, yüksek lisans öğrenimime başlamamda önemli etkileri olan Sayın Hatice KAFALI’ ya, Sayın Tuncay KARAKAÇAN’ a, tükenmeyen ilgi ve destekleriyle yaşamıma güç katan aileme, en içten sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hüsnü Anıl ÇOBAN
Trabzon 2008

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Tezde 1 ve 2 boyutlu üniter uzaylarda aşağıdaki konular incelendi:

1. Kompleks vektör uzayında reel lineer dönüşüm kavramı verildi. Reel lineer dönüşümler ve kompleks lineer dönüşümler arasındaki bağlantı bulundu.

2. Reel üniter ve sanal üniter reel lineer dönüşümler tanımlandı. Bu kavramlarla üniter dönüşüm kavramı arasında bağlantı bulundu.

3. Üniter uzaydaki izometriler ve reel uzaydaki izometriler arasındaki bağlantılar incelendi.

4. Üniter dönüşümler grubu için $U(n) = O(2n) \cap Sp(2n)$, $n = 1, 2$ eşitliği ispat edildi. Burada, $O(2n)$, ortogonal dönüşümler ve $Sp(2n)$, simplektik dönüşümler gruplarıdır.

Anahtar Kelimeler: Lineer Dönüşüm, Üniter Grup, İzometri

SUMMARY

Transformation Groups in Unitary Spaces in 1 and 2 Dimensions

In this thesis, the following questions on unitary spaces of 1 and 2 dimensions are studied.

These are :

1. The concept of a real linear transformation in a complex vector space has been given. A correlation between a real linear transformation and a complex linear transformation has been found.

2. Concepts of real unitary and imaginary unitary real linear transformations are given. A connection between these concepts and unitary transformation is investigated.

3. Correlations between isometries in the unitary space $\mathbb{C}^n$ ($n=1,\ 2$) and isometries in the Euclidean space $\mathbb{R}^{2n}$ ($n=1,\ 2$) have been studied.

4. The equality $U(n)=O(2n)\cap Sp(2n)$, $n=1,\ 2$ has been proved for $n=1,\ 2$; where $U(n)$ is the group of all unitary transformations in $\mathbb{C}^n$, $O(2n)$ is the group of all $2n\times 2n$ -orthogonal transformations and $Sp(2n)$ is the group of all $2n\times 2n$ - symplectic transformations.

Key Words: Linear Transformation, Unitary Group, Isometry

SEMBOLLER DİZİNİ

$\left(a_{ij}\right);\ i,\ j=1,\ 2,\ ...,\ n;\ \ a_{ij}\in\mathbb{R}$	$n\times n$ tipinde reel katsayılı bir matris
$\mathscr{A}^T=\left(a_{ji}\right)$	$\mathscr{A}=\left(a_{ij}\right)$ matrisinin transpozesi
boy E	E reel vektör uzayının boyutu
boy $E^{'}$	$E^{'}$ kompleks vektör uzayının boyutu
$\mathbb{C}^n$	n boyutlu kompleks vektör uzayı
$\mathbb{C}-lineer$	Kompleks lineer
$\left[x \quad y\right]$	$=\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$
$GL(n,\ \mathbb{R})$	$n\times n$ tipideki determinantı sıfır olmayan tüm matrislerin oluşturduğu küme
$\mathrm{Im}\{.......\}$	Parantez içi işlemin sanal kısmı
$Iz(\mathbb{R}^n)$	Tüm reel izometriler kümesi
$Iz(\mathbb{C}^n)$	Tüm kompleks izometriler kümesi
$LIz(\mathbb{R}^n)$	Tüm lineer izometriler kümesi
$M_{F,e}$	$e=\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal sisteme göre F dönüşümünün matrisi
$M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$	Kompleks vektör uzayındaki tüm kompleks lineer operatörler kümesi
$M(\mathbb{C}^n,\mathbb{R})$	Kompleks vektör uzayındaki tüm reel lineer operatörler kümesi
$M(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$	$2n$ boyutlu reel vektör uzayındaki tüm reel lineer operatörler kümesi
$M(n\times n,\mathbb{C})$	$n\times n$ tipinde kompleks matrisler kümesi
$M(n\times n,\mathbb{R})$	$n\times n$ tipinde reel matrisler kümesi
$O(n)$	n boyutlu ortogonal dönüşümler grubu
$O_{-}(n)$	$=\{g\in O(n):\det g=-1\}$

$O_+(n)$	$=\{g\in O(n):\det g=1\}$, yani n boyutlu özel ortogonal dönüşümler grubu
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}-lineer$	Reel lineer
$\mathbb{R}-izomorfizma$	Reel izomorfizma
$\mathbb{R}-cebir$	Reel sayılar üzerinde cebir
$\mathrm{Re}\{.......\}$	Parantez içi işlemin reel kısmı
$Sp(2n)$	$2n$ boyutlu simplektik dönüşümler grubu
$SU(n)$	n boyutlu özel üniter dönüşümler grubu
$T(\mathbb{R}^n)$	$\mathbb{R}^n$' deki tüm reel ötelemeler kümesi
$T(\mathbb{C}^n)$	$\mathbb{C}^n$' deki tüm kompleks ötelemeler kümesi
$U(n)$	n boyutlu üniter dönüşümler grubu
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}}$	Kompleks vektör uzayında skaler (iç) çarpım
$\langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{R}}$	Reel vektör uzayında skaler (iç) çarpım
◆	İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Öklid (M.Ö.365 – M.Ö.300) matematik kültürünü matematiğin özlerini çıkarıp sistemli bir hale getiren matematikçilerden biridir. “Temel Öğeler” adlı yapıtıyla, son zamanlara kadar geçerliliğini koruyan matematiğin temellerini atmıştır. Öklid, kendinden önce gelenlerin eserleriyle kendi öz yapıtlarını da derleyerek bugün Öklid geometrisi adıyla bilinen geometriyi aksiyomlarına dayanarak geliştirmiştir.

Lineer cebir ise hızlı gelişimine Cauchy’ nin Analyse Algenukus (1815) eseriyle ve Jakobi’ nin determinantlar teorisindeki çalışmalarıyla başlamıştır. Jakobi’ nin çalışması ile aynı zamanda, Cayley’ in ilk defa olarak, determinantların bir kare şeması tarzında yazılışında kullanılan ve büyük önem taşıyan tezi yayınlanmıştır. Ardından 1850 ile 1880 yılları arasında İngiliz matematikçiler Cayley, Sylvester, Smith; Alman matematikçiler Kronecker, Frobenus ve Fransız matematikçilerden Hermit’ in çalışmaları ile lineer cebir, yani matrislerle hesap yapma, basit bölenler teorisi, kuadratik formların dönüşümleri gibi hesaplamalar belli bir seviyeye gelmiştir.

W. H. Cockcroft 1972’ de yayınladığı kitabında [1] bir boyutlu kompleks vektör uzayı ile iki boyutlu reel vektör uzayı arasındaki bağlantıları incelemiştir. Bununla birlikte bir boyutlu vektör uzayındaki çarpma ile iki boyutlu reel vektör uzayındaki dönme hareketini ilişkilendirmiştir.

R. Penrose ve W. Rinder’ in çalışmalarında [11, 12], fizikte 4-boyutlu reel Minkowski Uzay-Zaman yerine 2-boyutlu kompleks uzayı kullanarak fiziksel kavramları geliştirmeye çabalamışlardır.

Son yıllarda da kuantum teorisindeki problemlerin çözümlerinde, nükleer enerji konusundaki problemlerin çözümlerinde ve elektronik nesne tanıma programlarında ortaya çıkan problemlerin çözümlerinde kolaylık sağladıkları ve daha iyi sonuçlara ulaşılabildiği için özellikle üniter uzaylar ve üniter dönüşümler konusu önemini artırmış ve kullanım alanını genişletmiştir.

Bununla ilgili olarak V. Wessels, W. N. Polyzou ve Simon Davis kuantum teorisi problemleri ile ilgili makalelerinde [15, 2], E. Epelmbaum nükleer enerji konusu ile ilgili makalesinde [3] ve Young Gao, Yangshang Wang, Xinshan Zhu, Xuetus Feng, Xiaoxu Zbu yüz tanıma ile ilgili konferans sunularında [4] üniter yapıyı kullanmışlardır.

Bunların yanında Keh-Chiarng Huarn ve Chien Chung Yeh yayıladıkları makalede [7] radyasyon kaynağının varış açısı tahmini ile ilgili problemler için üniter dönüşümler üzerinde bir metod geliştirmişlerdir.

Tezde 1 ve 2 boyutlu üniter uzaylarda aşağıdaki konular incelendi:

1. Kompleks vektör uzayında reel lineer dönüşüm kavramı verildi. Reel lineer dönüşümler ve kompleks lineer dönüşümler arasındaki bağlantı bulundu.

2. Reel üniter ve sanal üniter reel lineer dönüşümler tanımlandı. Bu kavramlarla üniter dönüşüm kavramı arasında bağlantı bulundu.

3. Üniter uzaydaki izometriler ve reel uzaydaki izometriler arasındaki bağlantılar incelendi.

4. Üniter dönüşümler grubu için $U(n) = O(2n) \cap Sp(2n)$, $n = 1,\ 2$ eşitliği ispat edildi. Burada

$O(2n)$, ortogonal dönüşümler grubu

$Sp(2n)$, simplektik dönüşümler grubudur.

1.2. Bilineer Formlu Uzaylar

Tanım 1 : $\mathbb{R}$**,** reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g: V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşüm olmak üzere, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ için,

i) $g\left(av_1 + bv_2, w_1\right) = ag\left(v_1, w_1\right) + bg\left(v_2, w_1\right)$

ii) $g\left(v_1, aw_1 + bw_2\right) = ag\left(v_1, w_1\right) + bg\left(v_1, w_2\right)$

özelliklerini sağlayan g - dönüşümüne, bilineer form denir.

Örnek 1 : $V = \mathbb{R}^4 = \left\{x = \left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\right):\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3,4\right\}$ alalım.

$f: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \ \to\ \mathbb{R}$, $x = \left(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\right)$, $y = \left(y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4\right) \in \mathbb{R}^4$ olmak üzere,

$f\left(x, y\right) = 2x_1y_1 + 5x_2y_2 - 3x_1y_2 + 4x_3y_2 - x_4y_4$ dönüşümü tanımlayalım. f , bilineer formdur.

Örnek 2 : $V=\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n):\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,...,n\}$ alalım.

$h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}$, $x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$, $y=(y_1,\ y_2,...,\ y_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $h(x,y)=x_1^{\ 2}y_1$ dönüşümünü tanımlayalım. h - bilineer form değildir.

Tanım 2: $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bilineer dönüşüm olmak üzere, $\forall v,w\in V$ için $g(v,w)=g(w,v)$ ise, g 'ye simetrik denir.

Örnek 3 : $V=\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n):\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,...,n\}$ alalım.

$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}$, $x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$, $y=(y_1,\ y_2,...,\ y_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ dönüşümü tanımlayalım. f - simetriktir.

Örnek 4 : $V=\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n):\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,...,n\}$ alalım.

$h:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}$, $x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$, $y=(y_1,\ y_2,...,\ y_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $h(x,y)=x_1y_2$ dönüşümünü tanımlayalım. h - simetrik değildir.

Tanım 3: $\mathbb{R}$, reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde sonlu boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g:V\times V\to\mathbb{R}$ bilineer dönüşüm olmak üzere, $\forall w\in V$ için $g(v,w)=0$ olduğunda $v=0$ ise g 'ye bozulmamış denir.

Örnek 5 : $V=\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n):\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,\ 2,...,\ n\}$ alalım.

$f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\ \to\ \mathbb{R}$, $x=(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$, $y=(y_1,\ y_2,...,\ y_n)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$ dönüşümü tanımlayalım. f -bozulmamıştır. f ' nin bozulmamış olduğunu göstermek için $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için $f(x,y)=0$ olduğunda $y=0$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için özel olarak $x=y$ alınırsa, $f(y,y)=y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+...+y_n^{\ 2}=0$ elde edilir. $f(y,y)=y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}+...+y_n^{\ 2}=0$ olması için $y_i=0,\ i=1,2,...,n$ olmalıdır. Buradan $y=0$ ' dır. O halde f - bozulmamıştır.

Örnek 6: $\mathbb{R}^n = \left\{ x = \left(x_1,\ x_2, ...,\ x_n \right):\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1,\ 2, ...,\ n,\ n > 1 \right\}$ alalım.

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x = \left(x_1,\ x_2, ...,\ x_n \right)$, $y = \left(y_1,\ y_2, ...,\ y_n \right) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $f\left(x, y \right) = x_1 y_1$ dönüşümünü tanımlayalım. f - bozulmuştur.

Tanım 4: g, V lineer uzayında bir bilineer form olsun. Eğer $F : V \to V$ dönüşümü için $g(F(x), F(y)) = g(x, y),\ \forall x, y \in V$ ise F ’ ye g ’ yi saklayan dönüşüm denir.

Önerme 1: Bilineer formu saklayan dönüşümler bileşke işlemine göre yarı gruptur.

İspat: F_1, F_2 bilineer formu saklayan dönüşümler olsunlar. $\forall a, b \in V$ ve g, V lineer uzayda bir bilineer form olmak üzere,

$g(F_1(a), F_1(b)) = g(a,b)$ ve $g(F_2(a), F_2(b)) = g(a,b)$ ’ dir.

$g((F_1 \circ F_2)(a), (F_1 \circ F_2)(b)) = g(F_1(F_2(a)), F_1(F_2(b))) = g(F_2(a), F_2(b)) = g(a,b)$.

Dolayısı ile $F_1 \circ F_2$ bilineer formu saklayan dönüşümdür. Sonuç olarak bilineer formu saklayan dönüşümler bileşke işlemine göre yarı gruptur. ◆

Önerme 2: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü lineer ve birebir ise örtendir.

İspat: F lineer ve birebir olsun. $\mathbb{R}^n$ ’ de $\{e_1, ..., e_n\}$ tabanını alalım. $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ ’ nin de $\mathbb{R}^n$ ’ de bir taban olduğunu gösterelim. Bunun için $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ ’ nin lineer bağımsız olduğunu gösterelim.

Farz edelim $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ lineer bağımlı olsun. O halde en az biri sıfırdan faklı olan $\lambda_1,\ ...,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ vardır ve $\lambda_1 F(e_1) + ... + \lambda_n F(e_n) = 0$ ’ dır. F ’ nin lineer olduğunu kullanarak $F\left(\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n \right) = 0$ olur. Burada F birebir olduğundan $\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$ ’ dır. $\lambda_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ ’ lerden en az biri sıfırdan farklı olduğundan $\{e_1, ..., e_n\}$ lineer bağımlıdır. Bu ise seçimimizle çelişir. O halde $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ lineer bağımsızdır. $\mathbb{R}^n$ ’ nin boyutu n olduğundan $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ $\mathbb{R}^n$ ’ de bir tabandır. Şimdi $\mathbb{R}^n$ ’ de keyfi bir y elemanını alalım. $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$, $\mathbb{R}^n$ ’ de bir taban olduğundan dolayı $\mu_1,\ ...,\ \mu_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere, y elemanını $y = \mu_1 F(e_1) + ... + \mu_n F(e_n)$ şeklinde yazabiliriz. Bu şekilde yazılabilen keyfi $y \in \mathbb{R}^n$ için $\exists x = \mu_1 e_1 + ... + \mu_n e_n \in \mathbb{R}^n$ vardır:

$y = \mu_1 F(e_1) + ... + \mu_n F(e_n) = F\left(\mu_1 e_1 + ... + \mu_n e_n\right)$

$\Rightarrow y = F(x)$ olup, bu bize F ' nin örten olduğunu gösterir. ◆

Teorem 1[6]: V sonlu boyutlu vektör uzayı ve f , V ' de bozulmamış bilineer form olmak üzere, f ' yi koruyan V ' deki tüm lineer dönüşümlerin kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: $G = \{T : V \to V : f(\alpha,\beta) = f(T(\alpha),T(\beta)),\ \forall \alpha,\beta \in V\}$ olsun.

G ' nin bileşke işlemine göre bir grup olduğunu gösterelim.

i) $\forall S,T \in G$ için gösterelim ki $S \circ T \in G$ ' dir. $\forall \alpha,\beta \in V$;

$f((S\circ T)(\alpha),(S\circ T)(\beta)) = f(S(T(\alpha)),S(T(\beta)))$

$T \in G$ olduğundan,

$= f(S(\alpha),S(\beta))$

$S \in G$ olduğundan,

$= f(\alpha,\beta)$ elde edilir.Buna göre $S \circ T \in G$ ' dir.

ii) $I : V \to V$, birim dönüşüm olmak üzere,

$f(I(\alpha),I(\beta)) = f(\alpha,\beta)$ olduğundan $I \in G$ ' dir.

iii) $\forall T \in G; T^{-1} \in G$ olduğunu gösterelim.

$T \in G$ için $\alpha \in V$ olmak üzere, $T(\alpha) = 0$ olsun.Bu takdirde, $\forall \beta \in V$;

$f(\alpha,\beta) = f(T(\alpha),T(\beta)) = f(0,T(\beta)) = 0$ elde edilir.

Ancak f bozulmamış olduğundan, $\alpha = 0$ ' dır. Dolayısı ile T birebir lineer ve sonlu boyutlu olduğundan önerme 2' den T örtendir. Böylece T ' nin tersi mevcuttur.

$f(T^{-1}(\alpha),T^{-1}(\beta)) = f(T(T^{-1}(\alpha)),T(T^{-1}(\beta))) = f(\alpha,\beta)$ olduğundan $T^{-1} \in G$ ' dir.

(i), (ii), (iii)'den $(G,\circ)$ bir gruptur. ◆

1.3. Öklid Uzayı

Tanım 5[9]: E , $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

$\forall x,\ y,\ z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ için;

1) $\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z)$

2) $\varphi(\lambda x,\ y)=\lambda\varphi(x,\ y)$

3) $\varphi(x, y)=\varphi(y, x)$

4) $\varphi(x, x)\geq 0$

5) $\varphi(x, x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Bu şekilde tanımlanan φ dönüşümüne E ’ de skaler (iç) çarpım, (E,φ) ikilisine de iç çarpımlı vektör uzayı denir.

Tanım 6: Sonlu boyutlu iç çarpımlı vektör uzayına öklid uzayı denir.

Örnek 7: $E=\mathbb{R}$ alalım. $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x,\ y\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi(x,\ y)=xy$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R},\ \varphi)$ ’ nin öklid uzayı olduğunu gösterelim:

$\forall x,\ y,\ z,\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

1) $\varphi(x+y,\ z)=(x+y)z=xz+yz=\varphi(x,\ z)+\varphi(y,\ z)$

2) $\varphi(\lambda x,\ y)=(\lambda x)y=\lambda(xy)=\lambda\varphi(x,\ y)$

3) $\varphi(x,\ y)=xy=yx=\varphi(y,\ x)$

4) $\varphi(x,\ x)=xx=x^2\geq 0$

5) $\varphi(x,\ x)=0\Rightarrow xx=0\Rightarrow x^2=0\Rightarrow x=0$

$x=0\Rightarrow\varphi(x, x)=0$

olduğu açıktır.

Örnek 8: $E=\mathbb{R}^2$ alalım. $\varphi:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ olmak üzere $\varphi(x,\ y)=x_1y_1+x_2y_2$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{R}^2,\ \varphi)$ ’ nin öklid uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için;

1) $\varphi(x+y,z)=(x_1+y_1)z_1+(x_2+y_2)z_2=(x_1z_1)+(y_1z_1)+(x_2z_2)+(y_2z_2)$

$$=(x_1z_1+x_2z_2)+(y_1z_1+y_2z_2)=\varphi(x,z)+\varphi(y,z)$$

2) $\varphi(\lambda x,y)=\lambda x_1y_1+\lambda x_2y_2=\lambda(x_1y_1+x_2y_2)=\lambda\varphi(x,y)$

3) $\varphi(x,y)=x_1y_1+x_2y_2=y_1x_1+y_2x_2=\varphi(y,x)$

4) $\varphi(x,x)=x_1^2+x_2^2\geq 0$

5) $\varphi(x,x)=x_1^2+x_2^2=0 \Leftrightarrow x_1=0,\ x_2=0 \Leftrightarrow x=0$

olduğundan $\left(\mathbb{R}^2,\ \varphi\right)$ öklid uzayıdır.

Örnek 9: $E=\mathbb{R}^n$ alalım.

$\sigma:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x=\left(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n\right)$, $y=\left(y_1,\ y_2,\ ...,\ y_n\right)\in\mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$\sigma\left(x,\ y\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i y_i$ dönüşümünü tanımlayalım. $\left(\mathbb{R}^n,\ \sigma\right)$ öklid uzayıdır.

Örnek 10: $E=\mathbb{R}$ alalım. $\varphi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x,\ y\in\mathbb{R}$ olmak üzere $\varphi\left(x,\ y\right)=x^2y$ dönüşümünü tanımlayalım. $\left(\mathbb{R},\ \varphi\right)$ ’ nin öklid uzayı olmadığını gösterelim:

Gerçekten $\forall x,\ y,\ z\in\mathbb{R}$ olmak üzere;

$\varphi\left(x+y,\ z\right)=\left(x+y\right)^2 z=x^2z+y^2z+2xyz$

olur. Ama iç çarpım tanımına göre,

$\varphi\left(x+y,\ z\right)=x^2z+y^2z$

olmalıdır. Bunun için $2xyz=0$ olması gerekir. Buradan $x=0$ veya $y=0$ veya $z=0$ ’ dır.

Fakat bu şart tüm *x*, *y* ve *z*’ler için sağlanmadığından,

$\varphi\left(x+y,\ z\right)\neq x^2z+y^2z$

olup, φ iç çarpım değildir. Dolayısıyla $\left(\mathbb{R},\varphi\right)$ öklid uzayı değildir.

Tanım 7: $\left(E_1,\varphi_1\right)$ ve $\left(E_2,\varphi_2\right)$ öklid uzayları olmak üzere, $F:E_1\to E_2$ dönüşümü için;

i) F , birebir ve örten

ii) F , lineer

iii) $\varphi_2\left(F(x),\ F(y)\right)=\varphi_1\left(x,\ y\right)$

ise $\left(E_1,\varphi_1\right)$ ve $\left(E_2,\varphi_2\right)$ öklid uzaylarına izomorf denir.

Önerme 3: $\left(E_1,\varphi_1\right)$ ve $\left(E_2,\varphi_2\right)$ öklid uzaylarının izomorf olması için gerek ve yeter şart $boy\ E_1=boy\ E_2$ olmasıdır.

Sonuç 1: (E,φ) öklid uzayı ve $boy\ E=n$ olsun. O halde (E,φ) öklid uzayı, $(\mathbb{R}^n,\ \sigma)$ öklid uzayına izomorftur, burada $\sigma(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i$ (örnek 9).

Not 1: Bundan sonra $\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^n$, şeklinde alınacaktır.

Tanım 8: E^n öklid uzayında $x\in E^n$ için $\sqrt{\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}}}$ sayısına x vektörünün normu denir ve $\|x\|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 9: $\|x\|=1$ ise, x vektörüne birim vektör denir.

Tanım 10: E^n öklid uzayında $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}=0$ ise x ve y vektörlerine ortogonal denir ve $x\perp y$ şeklinde gösterilir.

Lemma 1: E^n' de tanımlanan norm aşağıdaki aksiyomları sağlar:

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$ için,

i) $\|x\|\geq 0$

ii) $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$

iii) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$

İspat:

i) $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}}}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}\geq 0$

ii) $\|x\|=0\ \Rightarrow\sqrt{\langle x,x\rangle_{\mathbb{R}}}=0\ \Rightarrow\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}=0\ \Rightarrow x=0$

$x=0\Rightarrow\|x\|=0$ olduğu açıktır.

iii) $\|\lambda x\|=\sqrt{\langle\lambda x,\ \lambda x\rangle_{\mathbb{R}}}=\sqrt{(\lambda x_1)^2+(\lambda x_2)^2+\ldots+(\lambda x_n)^2}$

$$=\sqrt{\lambda^2x_1^2+\lambda^2x_2^2+\ldots+\lambda^2x_n^2}=\sqrt{\lambda^2\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)}$$

$$=|\lambda|\sqrt{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}=|\lambda|\|x\|\ \blacklozenge$$

Tanım 11: $\langle x_i,\, x_j\rangle_{\mathbb{R}} = 0$ ve $i \neq j$ olmak üzere, $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_m\} \subset E^n$ sistemine ortogonal sistem denir.

Teorem 2: $\{x_1,\, x_2,\, ...,\, x_m\} \subset E^n$ ortogonal sistem olsun. Bu takdirde;

$\left\|\sum_{i=1}^{m} x_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m}\|x_i\|^2$ (Pisagor Teoremi)' dir.

İspat: $m = 2$ alalım.

$$\|x_1 + x_2\|^2 = \langle x_1 + x_2,\, x_1 + x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x_1,\, x_1\rangle_{\mathbb{R}} + 2\underbrace{\langle x_1,\, x_2\rangle_{\mathbb{R}}}_{0} + \langle x_2,\, x_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x_1,\, x_1\rangle_{\mathbb{R}} + \langle x_2,\, x_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$$

$m = k$ için;

$\|x_1 + x_2 + ... + x_k\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_k\|^2$ eşitliği doğru olsun.

$m = k + 1$ için de doğruluğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Şimdi bunu gösterelim:

$$\left\|\underbrace{x_1 + x_2 + ... + x_k}_{A} + x_{k+1}\right\|^2 = \|A + x_{k+1}\|^2 = \langle A + x_{k+1},\, A + x_{k+1}\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \langle A,\, A\rangle_{\mathbb{R}} + 2\underbrace{\langle A,\, x_{k+1}\rangle_{\mathbb{R}}}_{0} + \langle x_{k+1},\, x_{k+1}\rangle_{\mathbb{R}} = \|A\|^2 + \|x_{k+1}\|^2$$

$$= \|x_1 + x_2 + ... + x_k\|^2 + \|x_{k+1}\|^2$$

$$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + ... + \|x_k\|^2 + \|x_{k+1}\|^2$$

Burada, $A \perp x_{k+1}$

$\langle A, x_{k+1}\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x_1 + x_2 + ... + x_k, x_{k+1}\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x_1, x_k\rangle_{\mathbb{R}} + ... + \langle x_k, x_{k+1}\rangle_{\mathbb{R}} = 0$ ◆

Önerme 4: $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ ortogonal sistem ve $x_i \neq 0, i = 1, 2, ..., m$ ise $x_1, x_2, ..., x_m$ vektörleri lineer bağımsızdır.

İspat: Farz edelim, bazı $\lambda_1,\, \lambda_2,\, ...,\, \lambda_m \in \mathbb{R}$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m = 0$ olsun. $\langle x_i,\, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m\rangle_{\mathbb{R}} = \lambda_i \langle x_i,\, x_i\rangle_{\mathbb{R}}$ olur. Burada $x_i \neq 0,\;\; i = 1,\, 2,\, ...,\, m$ olduğundan $\langle x_i,\, x_i\rangle_{\mathbb{R}} \neq 0$' dır. O halde; $\lambda_i = 0,\;\; i = 1,\, 2,\, ...,\, m$ olur. Bu bize $x_1, x_2, ..., x_m$ vektörlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterir. ◆

Tanım 12: $\langle x_i,\ x_j\rangle_{\mathbb{R}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1, 2, ..., m$

ise $\{x_1, ..., x_m\}$ sistemine ortonormal sistem denir.

Örnek 11: $x, y \in \mathbb{R}^2$ alalım. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ seçelim. Bu takdirde,

$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = x_1 y_1 + x_2 y_2$ olduğundan $\langle x, x\rangle_{\mathbb{R}} = 1,\ \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = 0,\ \langle y, y\rangle_{\mathbb{R}} = 1$ olarak bulunur. Burada $\{x, y\}$ ortonormal bir sistem oluşturur.

Teorem 3: Keyfi öklid uzayında ortonormal taban vardır.

İspat: E keyfi bir öklid uzayı $boy\ E = m$ ve $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ bu uzayın bir tabanı olsun. $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri yardımıyla $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ortonormal sistemini elde edeceğiz.

1) $m = 1$ için teorem doğrudur. Çünkü x_1 lineer bağımsız olduğundan $x_1 \neq 0$ olup; $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ ortonormal tabanı vardır.

2) $m = 2$ alalım. $x_1 \neq 0$ olup; $e_1 = \dfrac{x_1}{\|x_1\|}$ birim vektördür. $y_2 = \beta_{21} e_1 + x_2$ seçelim ve $\langle e_1,\ y_2\rangle_{\mathbb{R}} = 0$ olacak şekilde β_{21}' i bulalım:

$$\langle e_1,\ y_2\rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_1,\ \beta_{21} e_1 + x_2\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \ \Rightarrow \beta_{21} \underbrace{\langle e_1,\ e_1\rangle_{\mathbb{R}}}_{1} + \langle e_1,\ x_2\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \ \Rightarrow \beta_{21} = -\langle e_1,\ x_2\rangle_{\mathbb{R}}$$

bulunur. $y_2 \neq 0$ olduğunu gösterelim. Bu durumda, $y_2 = 0$ ise e_1 ve x_2 vektörleri lineer bağımlı olur. Bu ise baştaki seçimimizle çelişir. O halde $y_2 \neq 0$ olup; $e_2 = \dfrac{y_2}{\|y_2\|}$ birim vektör ve $\{e_1,\ e_2\}$ ortonormal sistemdir.

3) $k < m$ alalım. $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ vektörlerinin ilk k tanesi yardımıyla bunların lineer ifadeleri şeklinde $e_1, e_2, ..., e_k$ gibi bir ortonormal sistem elde edildiğini kabul edelim. Yani; $\langle e_i,\ e_j\rangle_{\mathbb{R}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \quad 1 \leq i \leq k \\ 1, & i = j \quad 1 \leq j \leq k \end{cases}$, dir.

Şimdi bu ortonormal sistemle verilen $(k+1)$' inci vektör olan x_{k+1} yardımıyla $y_{k+1} = \beta_{(k+1)1}e_1 + ... + \beta_{(k+1)k}e_k + x_{k+1}$ vektörünü tanımlayalım ve buradan,

$\langle y_{k+1},\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ k$ olacak şekilde $\beta_{(k+1)i}$' yi bulalım:

$$\langle y_{k+1},\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \langle(\beta_{(k+1)1}e_1 + ... + \beta_{(k+1)k}e_k + x_{k+1}),\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

$$\Rightarrow \beta_{(k+1)i}\underbrace{\langle e_i,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}}_{1} + \langle x_{k+1},\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

$$\Rightarrow \beta_{(k+1)i} = -\langle x_{k+1},\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}.$$

$y_{k+1} = 0$ olamaz. Çünkü $y_{k+1} = 0$ ise buradan $x_{k+1} = -\beta_{(k+1)1}e_1 - ... - \beta_{(k+1)k}e_k$ olur. $e_1, e_2, ..., e_k, x_{k+1}$ ve dolayısıyla $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}$ vektörleri lineer bağımlı olurdu. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $y_{k+1} \neq 0$ ' dır. Böylece $e_{k+1} = \dfrac{y_{k+1}}{\|y_{k+1}\|}$ alınırsa; $e_1, e_2, ..., e_k, e_{k+1}$ vektörleri ortonormal bir sistemdir.

Bu şekilde devam edilerek $\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ vektörleri yardımıyla $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$ ortonormal sistemi elde edilir. ◆

Teorem 4: Sonlu boyutlu uzayda, keyfi ortonormal sistem ortonormal tabana kadar genişletilebilir.

İspat: E, sonlu boyutlu uzay ve $boyE = n$, $r < n$ olmak üzere, $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ E' de bir ortonormal sistem olsun. Amacımız $\{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_r,\ e_{r+1},\ ...,\ e_n\}$ ortonormal taban olacak şekilde $e_{r+1},\ e_{r+2},\ ...,\ e_n$ elemanları bulmak. $r < n$ olduğundan, $\exists x \neq 0$ için $e_1, e_2, ..., e_r, x$ vektörleri lineer bağımsızdır. $y = \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_r e_r + x$ vektörünü tanımlayalım.

$$\langle y,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ r$$

$$\langle \lambda_1 e_1 + ... + \lambda_r e_r + x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

$$\langle \lambda_1 e_1, e_i\rangle_{\mathbb{R}} + ... + \langle \lambda_r e_r, e_i\rangle_{\mathbb{R}} + \langle x, e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

$$\lambda_1\langle e_1, e_i\rangle_{\mathbb{R}} + ... + \lambda_{i-1}\langle e_{i-1}, e_i\rangle_{\mathbb{R}} + \lambda_i\underbrace{\langle e_i, e_i\rangle_{\mathbb{R}}}_{1} + \lambda_{i+1}\langle e_{i+1}, e_i\rangle_{\mathbb{R}} + ... + \lambda_r\langle e_r, e_i\rangle_{\mathbb{R}} + \langle x, e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

$$\lambda_i + \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \lambda_i = -\langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}},\ i = 1,\ 2,\ ...,\ r$$

elde edilir. $y \neq 0$' dır. Çünkü $y = 0$ ise $e_1, e_2, ..., e_r, x$ vektörleri lineer bağımlı olurdu.

Bu ise baştaki seçimimizle çelişir. Böylece $\{e_1, e_2, ..., e_r\}$ ortonormal sistemini $e_{r+1} = \dfrac{y}{\|y\|}$ ile $\{e_1, e_2, ..., e_r, e_{r+1}\}$ ortonormal sistemine genişlettik. Benzer şekilde devam edilerek $\{e_1,\ e_2,\ ...,\ e_n\}$ ortonormal tabanı elde edilir. ◆

Teorem 5: E bir öklid uzayı, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sistemi E' de bir ortonormal taban ve $x \in E$ olsun.

Bu takdirde; $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ öyle ki $\lambda_i = \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$' dir.

İspat: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, E' de bir taban olduğundan $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ için $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}$ iç çarpımını alalım.

$\langle x, e_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle_{\mathbb{R}}}_{1} = \lambda_i$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ olur.

Böylece, $\lambda_i = \langle x, e_i\rangle_{\mathbb{R}}$ olduğunu buluruz. ◆

Sonuç 2: E bir öklid uzayı, E' de bir ortonormal taban $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere keyfi $x, y \in E$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) $\langle x,\ e_1\rangle_{\mathbb{R}}^{\ 2} + \langle x,\ e_2\rangle_{\mathbb{R}}^{\ 2} + ... + \langle x,\ e_n\rangle_{\mathbb{R}}^{\ 2} = \|x\|^2$

ii) $x = 0 \Leftrightarrow \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$

iii) $x = y \Leftrightarrow \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}},\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$

İspat:

i) $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ ve $\lambda_i = \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$.

Pisagor teoremini kullanırsak;

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|\lambda_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \underbrace{\|e_i\|^2}_{1} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle_{\mathbb{R}}^{\ 2} \text{ olur.}$$

ii) $x = 0 \Rightarrow \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$

$\langle x, e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \lambda_i \underbrace{\langle e_i, e_i\rangle_{\mathbb{R}}}_{1} = 0$

$\Rightarrow \lambda_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n \Rightarrow x = 0$

iii) $x = y \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow \langle x - y,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \Rightarrow \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} = \langle y,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}$

$\langle x,\ e_i \rangle_{\mathbb{R}} = \langle y,\ e_i \rangle_{\mathbb{R}} \ \Rightarrow x = y$ olduğu açıktır. ◆

Sonuç 3: E bir öklid uzayı ve $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ E' de bir ortonormal sistem olmak üzere keyfi $x \in E$ için aşağıdaki ifade doğrudur:

$\langle x,\ e_1 \rangle_{\mathbb{R}}{}^2 + \langle x,\ e_2 \rangle_{\mathbb{R}}{}^2 + ... + \langle x,\ e_k \rangle_{\mathbb{R}}{}^2 \le \|x\|^2$ (Bessel Eşitsizliği)

İspat: $\langle x,\ e_i \rangle_{\mathbb{R}} = c_i$, $i = 1, 2, ..., k$ olarak alalım.

$$0 \le \langle x - \sum_{i=1}^{k} c_i e_i,\ x - \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} - 2\langle x, \sum_{i=1}^{k} c_i e_i \rangle_{\mathbb{R}} + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 = \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} - \sum_{i=1}^{k} 2c_i \underbrace{\langle x, e_i \rangle_{\mathbb{R}}}_{c_i} + \sum_{i=1}^{k} c_i^2$$

$$= \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} - \sum_{i=1}^{k} 2c_i^2 + \sum_{i=1}^{k} c_i^2 ;\ \ 0 \le \langle x, x \rangle_{\mathbb{R}} - \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \ \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} c_i^2 \le \|x\|^2$$ ◆

Teorem 6: Keyfi $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $|\langle x,\ y \rangle_{\mathbb{R}}| \le \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)' dir.

İspat: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$;

$$\|ax - by\|^2 = \langle ax - by, ax - by \rangle_{\mathbb{R}} = \langle ax, ax - by \rangle_{\mathbb{R}} - \langle by, ax - by \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \langle ax, ax \rangle_{\mathbb{R}} - \langle ax, by \rangle_{\mathbb{R}} - \langle by, ax \rangle_{\mathbb{R}} + \langle ax, by \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= a^2 \|x\|^2 - ab\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} - ab\langle y, x \rangle_{\mathbb{R}} + b^2 \|y\|^2$$

$$= a^2 \|x\|^2 - 2ab\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}} + b^2 \|y\|^2$$

Burada $a = \|y\|^2$ ve $b = \langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}$ alırsak,

$$= \|x\|^2 \|y\|^4 - 2[\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}]^2 \|y\|^2 + [\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}]^2 \|y\|^2$$

$$= \|y\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - [\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}]^2)$$

elde edilir. $\|ax - by\|^2 \ge 0$ olduğundan $\|y\| \ne 0$ ise $\|y\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - [\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}]^2) \ge 0$ ' dır. Dolayısı ile, $\|x\|^2 \|y\|^2 \ge [\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}]^2$' dir. Her iki tarafın karekökü alınarak $\|x\|\|y\| \ge |\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}|$ elde edilir. $\|y\| = 0$ yani $y = 0$ ise, $|\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}| = 0$ ve $\|x\|\|y\| = 0$ olduğundan, $\|x\|\|y\| = |\langle x, y \rangle_{\mathbb{R}}|$ ' dir. ◆

Teorem 7: Keyfi $x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Minkowski Eşitsizliği)' dir.

İspat: $\|x+y\|^2 = \langle x+y,\ x+y\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x,\ x\rangle_{\mathbb{R}} + 2\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}} + \langle y,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$

$$\le \langle x,\ x\rangle_{\mathbb{R}} + 2\left|\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}}\right| + \langle y,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\le \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

$\|x+y\|^2 \le \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \Rightarrow \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ ◆

1.4. İzometriler ve Ortogonal Dönüşümler

Tanım 13: X bir küme olmak üzere $d : X \times X \to \mathbb{R}$ dönüşümü verilsin. Eğer

i) $d(x,y) \ge 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

iii) $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

özellikleri sağlanıyorsa d ' ye X kümesi üzerinde bir metrik, $(X,\ d)$ ifadesine de metrik uzay denir.

Örnek 12: $X = \mathbb{R}$ alalım. $\forall x,\ y \in \mathbb{R}$ için $d(x,\ y) = |x-y|$ bir metriktir.

Örnek 13: $X = \mathbb{R}^2$ alalım. $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^2$ için $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $d(x,\ y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ bir metriktir.

Örnek 14: $X = \mathbb{R}^n$ alalım. $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ olmak üzere $d(x,\ y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ bir metriktir.

Sonuç 4: $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında, $\forall x,\, y\in \mathbb{R}^n$ için $d(x,y)=\|x-y\|$ olmak üzere, $(\mathbb{R}^n,\ d)$ bir metrik uzaydır.

İspat: $\forall x,y,z\in \mathbb{R}^n$;

i) $d(x,\ y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\geq 0$ ' dır.

$d(x,\ y)=0 \Leftrightarrow d(x,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=0$ olduğundan $x_i=y_i,\ i=1,...,n$ ' dir.

ii) $d(x,\ y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\|y-x\|=d(y,x)$

iii) $d(x,\ \mathrm{z})=\|x-y+y-z\|\leq\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z)$

Dolayısı ile, $(\mathbb{R}^n,\ d)$ bir metrik uzaydır.

Tanım 14: $x,\, y\in \mathbb{R}^n$ öklid uzayında iki vektör olmak üzere, $d(x,y)=\|x-y\|$ ifadesine x ve y vektörleri arasındaki uzaklık denir.

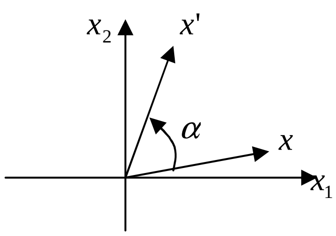
Tanım 15: $\mathbb{R}^n$ öklid uzayı olmak üzere, $\forall x,\, y\in \mathbb{R}^n$ için $d(F(x),F(y))=d(x,y)$ olan $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne izometri denir.

Örnek 15: $\mathbb{R}^n$ ' de öteleme dönüşümünü alalım. $\forall x,\, a\in \mathbb{R}^n$ için $F(x)=x+a$ dönüşümü için F bir izometridir. Gerçekten; $\forall x,y\in \mathbb{R}^n$ için,

$d(F(x),F(y))=d(x+a,\,y+a)=\|(x+a)-(y+a)\|=\|x+a-y-a\|=\|x-y\|=d(x,y)$

olur.

Örnek 16: $\mathbb{R}^2$ ' de F dönme hareketini alalım. F bir izometridir. Gerçekten $\forall\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ x'=\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ve $F(x)=x'$ olmak üzere,



$$\left.\begin{aligned}x_1' &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha\\ x_2' &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha\end{aligned}\right\}\Rightarrow \|F(x)\|=\|x\|$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}^2$ için,

$$\begin{aligned}\left\|F(x)-F(y)\right\|^2 &= \langle F(x)-F(y),\ F(x)-F(y)\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle (x_1-y_1)\cos\alpha-(x_2-y_2)\sin\alpha,\ (x_1-y_1)\sin\alpha+(x_2-y_2)\cos\alpha\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= (x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2=\langle x-y,\ x-y\rangle_{\mathbb{R}}=\left\|x-y\right\|^2\end{aligned}$$

$\left\|F(x)-F(y)\right\|=\left\|x-y\right\|$ olup, F izometridir.

Örnek 17: Birim dönüşüm izometridir.

Gerçekten; $\forall x, y\in \mathbb{R}^n$ için, $\left\|I(x)-I(y)\right\|=\left\|x-y\right\|$' dir.

Not 2: $\mathbb{R}^n$' nin tüm izometriler kümesini $Iz(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. $Iz(\mathbb{R}^n)\neq\varnothing$' dir. Çünkü, $I\in Iz(\mathbb{R}^n)$' dir.

Önerme 5: $F_1,\ F_2\in Iz(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $(F_1\circ F_2)\in Iz(\mathbb{R}^n)$' dir.

İspat: $\forall x, y\in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\begin{aligned} d\big((F_1\circ F_2)(x),(F_1\circ F_2)(y)\big) &= d\big(F_1(F_2(x)),F_1(F_2(y))\big) \quad F_1\text{' in izometri olduğu kullanılarak,} \\ &= d\big(F_2(x),F_2(y)\big) \text{ olur. } F_2 \text{ de izometri olduğundan,} \\ &= d(x,y) \text{ elde edilir. Bunun anlamı } (F_1\circ F_2)\in Iz(\mathbb{R}^n)\text{' dir. } \blacklozenge\end{aligned}$$

Sonuç 5: $(Iz(\mathbb{R}^n),\ \circ)$ birimli yarı gruptur yani monoiddir.

İspat: $\forall\ F_1,\ F_2,\ F_3\in Iz(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$\big(F_1\circ(F_2\circ F_3)(x)\big)=F_1\circ\big(F_2(F_3(x))\big)=F_1\big(F_2(F_3(x))\big)=(F_1\circ F_2)(F_3(x))=((F_1\circ F_2)\circ F_3)(x).$$

Birim dönüşüm izometri olduğundan, $I\in Iz(\mathbb{R}^n)$' dir. O halde, $(Iz(\mathbb{R}^n),\ \circ)$ monoiddir. ◆

Önerme 6: Keyfi izometri birebirdir.

İspat: Farz edelim, $\exists x, y\in\mathbb{R}^n$ için $F(x)=F(y)$ olsun. Bu takdirde;

F' nin izometri olduğu kullanılarak,

$$d\big(F(x),F(y)\big)=\Big\|\underbrace{F(x)-F(y)}_{0}\Big\|=\left\|x-y\right\|\Rightarrow\left\|x-y\right\|=0\Rightarrow x=y$$

bulunur. Bu ise bize F' nin birebir olduğunu verir. ◆

Tanım 16: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için;

i) $F(x+y) = F(x) + F(y)$

ii) $F(\lambda x) = \lambda F(x)$

ise F ’ ye lineer operatör denir

Örnek 18: I – Birim dönüşüm lineerdir.

$$\mathrm{I}(x+y) = x+y = \mathrm{I}(x) + \mathrm{I}(y)$$

$$\mathrm{I}(\lambda x) = \lambda x = \lambda \mathrm{I}(x)$$

Örnek 19: Dönme dönüşümü lineerdir.

$$D_\alpha(x) = \langle x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$\begin{aligned} D_\alpha(x+y) &= \langle (x_1+y_1)\cos\alpha - (x_2+y_2)\sin\alpha, (x_1+y_1)\sin\alpha + (x_2+y_2)\cos\alpha \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \rangle_{\mathbb{R}} \\ &\quad + \langle y_1 \cos\alpha - y_2 \sin\alpha, y_1 \sin\alpha + y_2 \cos\alpha \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= D_\alpha(x) + D_\alpha(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_\alpha(\lambda x) &= \langle (\lambda x_1)\cos\alpha - (\lambda x_2)\sin\alpha, (\lambda x_1)\sin\alpha + (\lambda x_2)\cos\alpha \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle \lambda(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha), \lambda(x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \lambda \langle x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \lambda D_\alpha(x) \end{aligned}$$

Örnek 20: $T_a -$ öteleme dönüşümü lineerdir $\Leftrightarrow$ $a = 0$ ’ dır.

$$T_a(x+y) = T_a(x) + T_a(y)$$

$$(x+y) + a = (x+a) + (y+a)$$

$$x + y + a = x + a + y + a$$

$$a = 2a \Leftrightarrow a = 0$$

Tanım 17: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü lineer ve izometri ise F dönüşümüne lineer izometri denir.

Not 3: $\mathbb{R}^n$ ’ nin tüm lineer izometriler kümesini $LIz(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim.

Örnek 21: $\mathbb{R}^2$ ’ deki dönmeler lineer izometridir.

Önerme 7: $F_1,\ F_2 \in LIz(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere, $\left(F_1 \circ F_2\right) \in LIz(\mathbb{R}^n)$ ’ dir.

İspat: $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ olsun.

i) $\left(F_1 \circ F_2\right)(x+y) = F_1\left(F_2(x+y)\right) = F_1\left(F_2(x) + F_2(y)\right) = \left(F_1 \circ F_2\right)(x) + \left(F_1 \circ F_2\right)(y)$

ii) $\left(F_1 \circ F_2\right)(\lambda x) = F_1\left(F_2(\lambda x)\right) = F_1\left(\lambda F_2(x)\right) = \lambda\left(F_1 \circ F_2\right)(x)$

olup, $\left(F_1 \circ F_2\right) \in LIz(\mathbb{R}^n)$ ’ dir. ◆

Sonuç 6: $\left(LIz(\mathbb{R}^n), \circ\right)$, $\left(Iz(\mathbb{R}^n), \circ\right)$ ’ nin bir alt monoididir.

Önerme 8: Keyfi lineer izometri F olmak üzere, F ’ nin ters dönüşümü F^{-1} vardır ve F^{-1} de lineer izometridir.

İspat: Önerme 6’ ya göre F birebirdir. Buna ve önerme 2’ ye göre F örtendir. Bundan dolayı F ’ nin ters dönüşümü F^{-1} vardır.

$\forall \mu, \eta \in \mathbb{R}^n$ alalım. F örten olduğundan $x, y \in \mathbb{R}^n$ vardır öyleki $F(x) = \mu$ ve $F(y) = \eta$ ’ dır. Buradan $x = F^{-1}(\mu)$ ve $y = F^{-1}(\eta)$ olur.

i) F lineer olduğundan $F\left(x+y\right) = F(x) + F(y)$

$F\left(F^{-1}(\mu) + F^{-1}(\eta)\right) = \mu + \eta$ ’ dir.

Buradan, $F^{-1}(\mu) + F^{-1}(\eta) = F^{-1}\left(\mu + \eta\right)$ olur.

ii) F lineer olduğundan $F\left(\lambda x\right) = \lambda F(x)$

$F\left(\lambda F^{-1}(\mu)\right) = \lambda \mu$ ’ dir.

Buradan,

$\lambda F^{-1}(\mu) = F^{-1}\left(\lambda \mu\right)$

olur. O halde, F^{-1} lineerdir. Şimdi de F^{-1} ’ in izometri olduğunu gösterelim: $\forall \mu,\ \eta \in \mathbb{R}^n$ alalım. F örten olduğundan $x, y \in \mathbb{R}^n$ vardır öyleki $F(x) = \mu$ ve $F(y) = \eta$ ’ dır. Buradan $x = F^{-1}(\mu)$ ve $y = F^{-1}(\eta)$ olur. F izometri olduğundan,

$$\|x-y\|=\|F(x)-F(y)\|\Rightarrow\|F^{-1}(\mu)-F^{-1}(\eta)\|=\|\mu-\eta\|$$

olur, bunun anlamı F^{-1} dönüşümünün izometri olduğudur. ◆

Sonuç 7: $\left(LIz(\mathbb{R}^n),\circ\right)$ bir gruptur.

İspat: Sonuç 6' dan $\left(LIz(\mathbb{R}^n),\circ\right)$ monoiddir. Keyfi elemanın tersi vardır ve o da lineer izometri olduğundan $\left(LIz(\mathbb{R}^n),\circ\right)$ bir gruptur. ◆

Not 4: $\mathbb{R}^n$ ' de tüm ötelemelerin oluşturduğu kümeyi $T(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. Yani $T(\mathbb{R}^n)=\left\{F:\mathbb{R}^n\rightarrow\mathbb{R}^n,\ F(x)=x+a,\ a\in\mathbb{R}^n\right\}$ ' dir.

Önerme 9: $(T(\mathbb{R}^n),\circ)$ bir gruptur.

İspat: $T_a(x)\circ T_b(x)=T_a\left(T_b(x)\right)=\left(x+b\right)+a=x+\left(a+b\right)=T_{a+b}(x)$ ' dir. Şimdi grup aksiyomlarını gösterelim: $\forall T_a,\ T_b,\ T_c\in T$ ve $a,\ b,\ c\in\mathbb{R}^n$ olsun.

1) $\left(T_a\circ\left(T_b\circ T_c\right)(x)\right)=T_a\circ\left(T_b\left(T_c(x)\right)\right)=T_a\left(T_b\left(T_c(x)\right)\right)$

$$=\left(T_a\circ T_b\right)\left(T_c(x)\right)=\left(\left(T_a\circ T_b\right)\circ T_c\right)(x)$$

2) $T_a(x)\circ T_0(x)=T_0(x)\circ T_a(x)=T_a(x)$ olup, $T_0(x)$ birim elemandır.

3) $T_a(x)\circ T_{-a}(x)=T_{-a}(x)\circ T_a(x)=T_0(x)$ olup, $T_{-a}(x)=T_a^{-1}(x)$, T_a ' nın tersidir.

Böylece $\left(T(\mathbb{R}^n),\circ\right)$ bir gruptur. ◆

Sonuç 7 ve önerme 9' dan iki grubumuz var. Şimdi bu iki grup arasındaki ilişkiyi inceleyelim:

Önerme 10: $LIz(\mathbb{R}^n)\cap T(\mathbb{R}^n)=\left\{I\right\}$ ' dır.

İspat: $F\in\left(LIz(\mathbb{R}^n)\cap T(\mathbb{R}^n)\right)$ olsun. Bunun anlamı F lineer dönüşüm ve aynı zamanda ötelemedir. $F=I$ olduğunu gösterelim: F öteleme olduğundan $\exists a\in\mathbb{R}^n$ için $F(x)=x+a$ ' dır. F lineer olduğundan $F\left(x+y\right)=F(x)+F(y)$ ' dir. $F\left(x+y\right)=\left(x+y\right)+a$ ve $F(x)+F(y)=\left(x+a\right)+\left(y+a\right)$ yazabiliriz. Burada F ' nin lineer olduğu kullanılarak sol tarafların eşitliğinden $(x+y)+a=(x+a)+(y+a)$ olup $a=2a$ elde edilir. Buradan $a=0$ ' dır. Yani $F(x)=x$ olup F birim dönüşümdür. ◆

Tanım 18: $\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ için $\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$ ise $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dönüşümüne ortogonal dönüşüm denir.

Teorem 8: $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ dönüşümü için aşağıdaki üç şart denktir:

i) F , ortogonal dönüşümdür.

ii) F , lineer izometridir.

iii) F , izometridir ve $F(0)=0$ ' dır.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): F , ortogonal dönüşüm olsun. $\mathbb{R}^n$ ' de $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal tabanını alalım. O halde,

$$\langle F(e_i),\ F(e_j)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle e_i,\ e_j\rangle_{\mathbb{R}}=\delta_{ij},\ i,j=1,2,,...,n$$

yazabiliriz. Buradan $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ $\mathbb{R}^n$ ' de ortonormal sistem olur. Keyfi ortonormal sistem lineer bağımsız olduğundan $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ $\mathbb{R}^n$ ' de bir taban oluşturur.

$\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ alalım.

$$x=\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i \text{ ve } y=\sum_{i=1}^{n}\mu_i e_i$$

şeklinde yazalım. $e_i,\ i=1,2,...,n$ ortonormal olduğundan,

$$\beta_i=\langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}} \text{ ve } \mu_i=\langle y,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}\quad i=1,2,...,n$$

yazabiliriz. $\{F(e_1),...,F(e_n)\}$ ortonormal taban olduğundan,

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\eta_i F(e_i) \text{ ve } F(y)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i F(e_i)$$

yazılabilir. Yukarıdakine benzer şekilde $\eta_i=(F(x),\ F(e_i))$ ve $\gamma_i=(F(y),\ F(e_i))$, $i=1,2,...,n$ eşitlikleri alınır. F ' nin ortogonal olduğu kullanılarak,

$$\beta_i=\langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}=\langle F(x),\ F(e_i)\rangle_{\mathbb{R}}=\eta_i,\ i=1,\ 2,...,n$$

$$\mu_i=\langle y,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}=\langle F(y),\ F(e_i)\rangle_{\mathbb{R}}=\gamma_i,\ i=1,\ 2,...,n \text{ olur.}$$

$F\left(x+y\right)=F\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i+\sum_{i=1}^{n}\mu_i e_i\right)=F\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i)e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\chi_i F(e_i)\ldots(1)$ olur. Burada,

$\chi_i=\langle F\left(\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i)e_i\right),\ F(e_i)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i)e_i,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}=\beta_i+\mu_i$ ' dır.

(1) ifadesinden devam edersek;

$$F\left(x+y\right)=\sum_{i=1}^{n}(\beta_i+\mu_i)F(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\langle x,e_i\rangle_{\mathbb{R}}+\langle y,e_i\rangle_{\mathbb{R}}\right)F(e_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\langle F(x),\ F(e_i)\rangle_{\mathbb{R}}F(e_i)+\langle F(y),\ F(e_i)\rangle_{\mathbb{R}}F(e_i)\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\eta_i F(e_i)}_{F(x)}+\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i F(e_i)}_{F(y)}=F(x)+F(y)\ldots(2)\text{' dır.}$$

$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ \forall\lambda\in\mathbb{R}$ alalım. Bu durumda

$F\left(\lambda x\right)=F\left(\lambda\sum_{i=1}^{n}\beta_i e_i\right)=F\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda\beta_i e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\kappa_i F(e_i)\ldots(3)$ olur.

Burada,

$\kappa_i=\langle F\left(\sum_{i=1}^{n}(\lambda\beta_i)e_i\right),\ F(e_i)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle\sum_{i=1}^{n}(\lambda\beta_i)e_i,\ e_i\rangle_{\mathbb{R}}=\lambda\beta_i$ ' dır.

(3) ifadesinden devam edersek;

$$F\left(\lambda x\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\beta_i F(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\langle x,e_i\rangle_{\mathbb{R}}F(e_i)\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\lambda\langle F(x),\ F(e_i)\rangle_{\mathbb{R}}F(e_i)\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda\eta_i F(e_i)=\lambda\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\eta_i F(e_i)}_{F(x)}=\lambda F(x)\ldots(4)\text{' dır.}$$

Böylece, (2) ve (4)' ten F lineerdir.

Şimdi de F ' nin izometri olduğunu gösterelim: $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için,

$\langle F(x),\ F(x)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,\ x\rangle_{\mathbb{R}}\Rightarrow\|F(x)\|^2=\|x\|^2\Rightarrow\|F(x)\|=\|x\|$ ' dir.

F lineer olduğundan, $\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ için,

$\|F(x)-F(y)\|=\|F(x-y)\|=\|x-y\|$ olup, F izometridir.

(ii)$\Rightarrow$(iii): F lineer izometri olduğundan F izometridir.

$F(0)=F(0+0)=F(0)+F(0)\Rightarrow F(0)=0$

(iii)$\Rightarrow$(i): F izometri ve $F(0)=0$ olduğundan, $\forall x\in\mathbb{R}^n$ için

$\|F(x)\|=\|F(x)-F(0)\|=\|x-0\|=\|x\|$ ’ dir. Buradan,

$\|F(x)\|=\|x\| \Rightarrow \|F(x)\|^2=\|x\|^2 \Rightarrow \langle F(x),\ F(x)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,\ x\rangle_{\mathbb{R}}$ olur.

$\forall x,\ y\in\mathbb{R}^n$ alalım. F izometri olduğundan,

$\|F(x)-F(y)\|=\|x-y\|$

$\|F(x)-F(y)\|^2=\|x-y\|^2$

$\langle F(x)-F(y),\ F(x)-F(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x-y,\ x-y\rangle_{\mathbb{R}}$

$\langle F(x),\ F(x)\rangle_{\mathbb{R}}-2\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}}+\langle F(y),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,\ x\rangle_{\mathbb{R}}-2\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}}+\langle y,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$

yazabiliriz. $\langle F(x),\ F(x)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,\ x\rangle_{\mathbb{R}}$ ve $\langle F(y),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle y,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$ olduğundan, $-2\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}}=-2\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$ elde edilir. Buradan da; $\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$ olup, F ortogonaldır. ◆

Teorem 9: F , keyfi izometrisi için tek türlü T_a ötelemesi ve H ortogonal dönüşümü vardır öyle ki $F=T_a\circ H$ ’ dir.

İspat: F , $\mathbb{R}^n$ ’ de keyfi izometri olsun. $F(0)=a$ diyelim. T_a ve T_{-a} ötelemelerini göz önüne alalım. $(T_{-a}\circ F)(0)=T_{-a}(F(0))=T_{-a}(a)=a+(-a)=0$ olup, buradan $T_{-a}\circ F$ bir izometridir ve $(T_{-a}\circ F)(0)=0$ ’ dır. Bunun anlamı teorem 8’ den $T_{-a}\circ F$ ortogonaldır. Bunu $H=T_{-a}\circ F$ ile gösterelim.

$T_a\circ H=T_a\circ(T_{-a}\circ F)=(T_a\circ T_{-a})\circ F=I\circ F=F\Rightarrow F=T_a\circ H$ olur. Şimdi tekliğini gösterelim:

Farz edelim, $F=T_a\circ H_1$ ve $F=T_b\circ H_2$ şeklinde iki türlü olsun. Buradan, $H_1=T_a^{-1}\circ F=T_a^{-1}\circ(T_b\circ H_2)=(T_a^{-1}\circ T_b)\circ H_2$ elde edilir. Ortogonal dönüşüm lineer olduğundan $H_1(0)=H_2(0)=0$ yazılabilir.

$0=H_1(0)=((T_{-a}\circ T_b)\circ H_2)(0)=(T_{-a}\circ T_b)(0)=T_{-a}(T_b(0))=T_{-a}(b+0)$

$=T_{-a}(b)=b+(-a)=0\Rightarrow b=a\Rightarrow T_a=T_b$ olup, T_a tektir.

$T_a=T_b\Rightarrow T_a\circ H_1=T_a\circ H_2\Rightarrow H_1=H_2$ olup, H de tektir. ◆

Sonuç 8: Keyfi F izometrisi için F^{-1} ters dönüşümü vardır ve F^{-1} de izometridir.

İspat: $F = T_a \circ H$ olduğundan $\left(H^{-1} \circ T_a^{-1}\right)$ ’ in, $\left(T_a \circ H\right)$ ’ nin tersi olduğunu gösterirsek F^{-1} ters dönüşümünün varlığını göstermiş oluruz. Teorem 8’ e göre H ortogonal dönüşüm olduğundan lineer izometridir. Önerme 8’ e göre, keyfi lineer izometrinin tersi mevcut olduğundan H^{-1} ortogonaldir.

Bunun için; $\left(T_a \circ H\right) \circ \left(H^{-1} \circ T_a^{-1}\right) = T_a\left(H \circ H^{-1}\right) \circ T_a^{-1} = T_a \circ T_a^{-1} = I$ olur. Şimdi de F^{-1} ’ in izometri olduğunu gösterelim: $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için F izometri olduğundan,

$\left\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\right\| = \left\|F\left(F^{-1}(x)\right) - F\left(F^{-1}(y)\right)\right\| = \|x - y\|$ olup, F^{-1} izometridir. ◆

Sonuç 9: $\left(Iz(\mathbb{R}^n),\ \circ\right)$ bir gruptur.

İspat: Sonuç 5’ den $\left(Iz(\mathbb{R}^n), \circ\right)$ monoid ve Sonuç 8’ den $\forall F \in Iz(\mathbb{R}^n)$ için $F^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^n)$ olduğundan, $\left(Iz(\mathbb{R}^n), \circ\right)$ bir gruptur. ◆

Not 5: $LIz(\mathbb{R}^n)$, tüm lineer izometriler kümesini buradan itibaren $O(n)$ ile işaretliyoruz.

Tanım 19: $O(n)$ grubuna ortogonal dönüşümler grubu yada lineer izometriler grubu denir.

Önerme 11: $\mathbb{R}^n$ öklid uzayı olmak üzere, $F \in O(n)$ ve $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal sistem ise $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ de ortonormal sistemdir.

İspat: F ortogonal dönüşüm olduğundan, $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ için $\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$ ’ dir. Buradan; $\langle F(e_i),\ F(e_j)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_i,\ e_j\rangle_{\mathbb{R}} = \delta_{ij}$, $i,\ j = 1, ..., n$ olur. ◆

Önerme 12: F , $\mathbb{R}^n$ ’ de lineer dönüşüm ve bir $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal sistemi için $\{F(e_1), ..., F(e_n)\}$ ortonormal sistem olsun. Bu takdirde F ortogonaldır.

İspat: $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $i,\ j = 1, ..., n$ olsun.

$$\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle F\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right),\ F\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i F(e_i),\ \sum_{j=1}^{n} y_j F(e_j)\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \sum_{i,\,j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\langle F(e_i), F(e_j)\rangle_{\mathbb{R}}}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} \text{ olup, } F \text{ ortogonaldır.} \blacklozenge$$

Tanım 20: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşüm, $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal sistem olsun.

$$\left.\begin{array}{l} F(e_1) = a_{11}e_1 + ... + a_{1n}e_n \\ \quad .... \\ F(e_n) = a_{n1}e_1 + ... + a_{nn}e_n \end{array}\right\} \Rightarrow F(\begin{pmatrix} e_1 \\ ... \\ e_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_1 \\ \cdots \\ e_n \end{pmatrix} \Rightarrow M_F = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

olmak üzere M_F matrisine, $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal sistemine göre F ' nin matrisi denir.

Önerme 13: $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşüm olsun. F ' nin ortogonal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart M_F ' nin ortogonal matris olmasıdır.

İspat: F ortogonal dönüşüm olsun.

$\langle F(e_i),\ F(e_j)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_i,\ e_j\rangle_{\mathbb{R}} = \delta_{ij},\ i, j = 1,...,n$ olduğundan,

$$\langle F(e_i),\ F(e_j)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_k,\ \sum_{m=1}^{n} a_{jm}e_m\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{k,\,m=1}^{n} a_{ik}a_{jm}\underbrace{\langle e_k,\ e_m\rangle_{\mathbb{R}}}_{\delta_{km}} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \quad \text{olur.}$$

$$M_F M_F^{\ T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k}a_{nk} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k}a_{nk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{1k} & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{2k} & \cdots & \sum_{k=1}^{n} a_{nk}a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I \qquad \text{olup,}$$

M_F ortogonaldir. Şimdi tersini gösterelim. Yani $M_F M_F^{\ T} = I$ olsun.

$F(x) = F\left(x_1e_1 + ... + x_ne_n\right) = x_1F(e_1) + ... + x_nF(e_n)$

$F(y) = F\left(y_1e_1 + ... + y_ne_n\right) = y_1F(e_1) + ... + y_nF(e_n)$ olmak üzere,

$$\langle F(x),\ F(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\sum_{i=1}^{n} x_i F(e_i),\ \sum_{j=1}^{n} y_j F(e_j)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle\sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k\right),\ \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{m=1}^{n} a_{jm} e_m\right)\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \langle\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i a_{ik} e_k,\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} y_j a_{jm} e_m\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} x_i y_j a_{ik} a_{jm} \underbrace{\langle e_k,\ e_m\rangle_{\mathbb{R}}}_{\delta_{km}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_i y_j a_{ik} a_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk}\right)}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x,\ y\rangle_{\mathbb{R}}$$

olup, F ortogonaldır. ◆

Önerme 14: $\mathbb{R}^n$ ' nin keyfi ortonormal sistemleri $\{e_1, ..., e_n\}$ ve $\{f_1, ..., f_n\}$ olmak üzere, $F(e_i) = f_i,\ i = 1, ..., n$ olan tek F ortogonal dönüşüm vardır.

İspat: $\{e_1, ..., e_n\}$ ortonormal sistem olduğundan, $\{e_1, ..., e_n\}$ $\mathbb{R}^n$ ' de bir tabandır. Bundan dolayı;

$$\left.\begin{array}{l} f_1 = a_{11}e_1 + ... + a_{1n}e_n \\ \quad .... \\ f_n = a_{n1}e_1 + ... + a_{nn}e_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{A} = \left(a_{ij}\right)$$ yazabiliriz. $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşümünü göz önüne alırsak;

$$F(x) = F\left(x_1e_1 + ... + x_ne_n\right) = x_1F(e_1) + ... + x_nF(e_n)$$

olduğundan $F(e_1),\ ...,\ F(e_n)$ ' ler belirlenirse F belirlenir. Şimdi $F(e_1),\ ...,\ F(e_n)$ ' leri aşağıdaki gibi alalım:

$$\left.\begin{array}{l} F(e_1) = a_{11}e_1 + ... + a_{1n}e_n \\ \quad .... \\ F(e_n) = a_{n1}e_1 + ... + a_{nn}e_n \end{array}\right\} \Rightarrow \mathscr{A} = \left(a_{ij}\right)$$ olup, $F(e_i) = f_i,\ i = 1, ..., n$ ' dir.

Önerme 12' de olduğu gibi F 'nin ortogonal olduğu benzer şekilde gösterilir. Şimdi tekliğine geçelim. Farz edelim; $F_1(e_i) = f_i$ ve $F_2(e_i) = f_i$, $i = 1, ..., n$ şeklinde iki türlü olsun.

Buradan;

$$F_1(x) = F_1\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=}^{n} x_i F_1(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \ ...\ (1)$$

$$F_2(x) = F_2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i F_2(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i \ ... \ (2)$$

(1) ve (2)' den $F_1 = F_2$ olup, F tek türlüdür. ◆

Önerme 15: $\mathscr{A}$ matrisi ortogonal matris olsun. Bu taktirde $\det \mathscr{A} = \pm 1$' dır.

İspat:

$\mathscr{A}^T \mathscr{A} = I$

$\det(\mathscr{A}^T \mathscr{A}) = \det I$

$\det(\mathscr{A}^T)\det(\mathscr{A}) = \det I$

$(\det \mathscr{A})^2 = 1 \Leftrightarrow \det \mathscr{A} = \pm 1$ olur.

Not 6: $O_-(n) = \{g \in O(n) : \ \det g = -1\}$ ve $O_+(n) = \{g \in O(n) : \ \det g = 1\}$ olacak şekilde $O(n) = O_-(n) \cup O_+(n)$, $O_+(n) \cap O_-(n) = \varnothing$.

Not 7: F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineer dönüşüm $\{e_1, e_2, ...e_n\}$, $\mathbb{R}^n$' de bir taban ve $M_{F,e}$ de, F' nin $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ tabanına göre matrisi olsun. $f_1, f_2, ...f_n$ tabanını alalım. $M_{F,e}$ ve $M_{F,f}$ arasındaki bağlantıyı bulalım. Bunun için, $f_1, f_2, ...f_n$' nin $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ tabanına göre ifadesini aldığımızda,

$$\begin{aligned} f_1 &= b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + ... + b_{1n}e_n \\ &.......................... \\ f_n &= b_{n1}e_1 + b_{n2}e_2 + ... + b_{nn}e_n \end{aligned} \qquad \text{olur.}$$

$\det \mathscr{B} \neq 0$ olmak üzere $\mathscr{B} = (b_{ij})$, $i, j = 1, 2, ...n$ matrisini alalım. Bunu kullanarak $M_{F,f} = \mathscr{B}^{-1} M_{F,e} \mathscr{B}$ olur.

$$\begin{aligned} \det(M_{F,f}) &= \det(\mathscr{B}^{-1} M_{F,e} \mathscr{B}) \\ &= \det(\mathscr{B}^{-1}) \det(M_{F,e}) \det \mathscr{B} \\ &= \frac{1}{\det \mathscr{B}} \det(M_{F,e}) \det \mathscr{B} \end{aligned}$$

$\det(M_{F,f}) = \det(M_{F,e})$ bulunur. Böylece aralarındaki bağıntı bulunmuş olur. Yani, $M_{F,f}$ matrisinin determinantı, tabana bağlı değildir. Sadece F' ye bağlıdır. Bundan dolayı, det($M_{F,f}$)' ye F' nin determinantı denir ve det F olarak gösterilir.

Önerme 16: $O_+(n)$, matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur.

İspat: $\forall g_1,\ g_2 \in O_+(n)$ olsun.

$\det(g_1g_2) = \underbrace{\det g_1}_{1}\underbrace{\det g_2}_{1} = 1$ olup, $g_1g_2 \in O_+(n)$ ' dir.

Şimdi grup aksiyomlarına geçelim:

1) $\forall g_1,\ g_2,\ g_3 \in O_+(n)$ olsun. $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$ olduğunu göstermek istiyoruz. Ancak $O_+(n) \subset O(n)$ olduğundan bu özellik özel olarak sağlanır.

2) $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ matrisini alalım. $I \in O(n)$ ve $\det I = 1$ olduğundan $I \in O_+(n)$ ' dir. $\forall g \in O_+(n)$ için $gI = Ig = g$ olup, $I \in O_+(n)$ birim elemandır.

3) $g \in O_+(n)$ alalım. $g \in O_+(n)$ olduğundan $\det g = 1$' dir. $\det g \neq 0$ olduğundan g matrisinin tersi vardır ve bunu g^{-1} ile işaretleyelim. $O(n)$ grup olduğundan, $g^{-1} \in O(n)$. Biz $g^{-1} \in O_+(n)$ olduğunu göstermek istiyoruz. $g \in O(n)$ olduğundan $g \cdot g^{-1} = I$ ' dır. Bu eşitliğin her iki yanının determinantını alalım.

$\det(gg^{-1}) = \underbrace{\det I}_{1} \Rightarrow \underbrace{\det g}_{1} \det g^{-1} = 1 \Rightarrow \det g^{-1} = 1$ olur. Bunun anlamı $g^{-1} \in O_+(n)$' dir.

Böylece $O_+(n)$ matrislerde çarpma işlemine göre bir gruptur. ◆

1.5. Ters Simetrik Bilineer Formlar

Tanım 21 : $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, V - $\mathbb{R}$ üzerinde $n \geq 1$ boyutlu keyfi reel vektör uzayı ve $g : V \times V \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşüm olmak üzere, $\forall v, w \in V$ için $g(v,w) = -g(w,v)$ ise, g ' ye ters-simetrik denir.

Örnek 22: $\mathbb{R}^2$ ’ de $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ve $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ için $f(x,y)=x_1y_2-x_2y_1$ şeklinde tanımlanan f ters simetrik bilineer formdur.

Örnek 23: $\mathbb{R}^2$ ’ de $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ve $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ için $f(x,y)=x_1y_2-x_2y_1$ şeklinde tanımlanan f ters simetrik bilineer formu,

$$f(x,y)=x_1y_2-x_2y_1=(x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=x^T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}y$$

şeklindedir. Bu da gösterir ki f ters simetrik bilineer formunun matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$’ dır. Bu matrisi $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\Im^{'}$ ile gösterelim.

Önerme 17: $\forall x,y\in\mathbb{R}^{2n}$ ’ de

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ \cdots \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix}$$ olmak üzere,

$\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}=\sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_iy_i)$ ifadesi ters simetrik bilineer formdur.

İspat: $\forall a,b\in\mathbb{R},\forall x,y,z\in\mathbb{R}^{2n}$ için

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ \cdots \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ \cdots \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix},\ z=\begin{pmatrix} z_1 \\ \gamma_1 \\ z_2 \\ \gamma_1 \\ \cdots \\ z_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$ alınırsa,

$$\langle ax+bz,y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n}((ax_i+bz_i)\tau_i-(a\xi_i+b\gamma_i)y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(ax_i)\tau_i+(bz_i)\tau_i-(a\xi_i)y_i-(b\gamma_i)y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(ax_i)\tau_i-(a\xi_i)y_i+(bz_i)\tau_i-(b\gamma_i)y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}ax_i\tau_i-a\xi_i y_i+bz_i\tau_i-b\gamma_i y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}a(x_i\tau_i-\xi_i y_i)+b(z_i\tau_i-\gamma_i y_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}a(x_i\tau_i-\xi_i\gamma_i)+\sum_{i=1}^{n}b(z_i\tau_i-\gamma_i y_i)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_i y_i)+b\sum_{i=1}^{n}(z_i\tau_i-\gamma_i y_i)=a\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}+b\langle z,y\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow \langle ax+bz,y\rangle_{\mathbb{R}} = a\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}+b\langle z,y\rangle_{\mathbb{R}}$ ... $(*)$ elde edilir.

$$\langle x,ay+bz\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n}(x_i(a\tau_i+b\gamma_i)-\xi_i(ay_i+bz_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i a\tau_i)+(x_i b\gamma_i)-(\xi_i ay_i)-(\xi_i bz_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i a\tau_i)-(\xi_i ay_i)+\sum_{i=1}^{n}(x_i b\gamma_i)-(\xi_i bz_i)$$

$$= a\sum_{i=1}^{n}x_i\tau_i-\xi_i y_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i\gamma_i-\xi_i z_i = a\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}+b\langle x,z\rangle_{\mathbb{R}}$$

$\langle x,ay+bz\rangle_{\mathbb{R}} = a\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}+b\langle x,z\rangle_{\mathbb{R}}$ ... $(**)$ elde edilir.

$\langle y,x\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n}(y_i\xi_i-\tau_i x_i)=-(\sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_i y_i))=-\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$ ... $(***)$

$(*)$, $(**)$, $(***)$ 'den $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_i y_i)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}^{2n}$, ifadesi ters simetrik bilineer formdur. ◆

Önerme 18: $\forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}$' de

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ \ldots \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix} \text{ ve } \Im' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i\tau_i - \xi_i y_i)$ ters simetrik bilineer formunun matrisi,

$$\begin{pmatrix} \Im' & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Im' & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Im' \end{pmatrix}\text{' dır.}$$

İspat: $\forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}$' de,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ \ldots \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n} (x_i\tau_i - \xi_i y_i) = (x_1, \xi_1, \ldots, x_n, \xi_n) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ \ldots \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix}\text{' dir.}$$

Burada, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \Im'$ için tekrar yazılırsa,

$$\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}=\sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_i y_i)=(x_1,\xi_1,...,x_n,\xi_n)\begin{pmatrix}\Im' & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \Im' & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots\\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Im'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \tau_1\\ y_2\\ \tau_2\\ ...\\ y_n\\ \tau_n\end{pmatrix}$$ elde edilir. ◆

1.6. Simplektik Grup

Tanım 22: $\forall x,y\in\mathbb{R}^{2n}$ için $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}=\sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_i y_i)$ ifadesi ters simetrik form olmak üzere, eğer $A:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü $\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$ ise A dönüşümüne simplektik dönüşüm denir.

Örnek 24: $A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\to A(\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\ a,b,c,d\in\mathbb{R}$$

ve $ad-bc=1$ olsun.

$\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}=\sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_i y_i)$ ters simetrik formu için $\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$ ’ dir. Dolayısı ile A dönüşümü simplektiktir.

Önerme 19: $\forall x,y\in\mathbb{R}^{2n}$ için $\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}=\sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i-\xi_i y_i)$ ifadesi ters simetrik form olmak üzere, eğer $F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ simplektik dönüşüm ise $\det F\neq 0$ ’ dır.

İspat: $F:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ simplektik dönüşüm olduğundan,

$\forall x,y\in\mathbb{R}^{2n}$ için $\langle F(x),F(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}}$ ’ dir.

$\Im'=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ olmak üzere, önerme 18’ den,

$$\langle x,y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i - \xi_i y_i) = (x_1,\xi_1,x_2,\xi_2,...,x_n,\xi_n)\begin{pmatrix} \Im^{'} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Im^{'} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Im^{'} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ ... \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ ... \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix}^T \underbrace{\begin{pmatrix} \Im^{'} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \Im^{'} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \Im^{'} \end{pmatrix}}_{\mathscr{A}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ ... \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix} \text{' dir.}$$

$$\langle F(x),F(y)\rangle_{\mathbb{R}} = F(\begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ ... \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix})^T \mathscr{A} F(\begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ ... \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix})$$

$F:\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümüne karşılık gelen matris $\mathscr{F}$ olmak üzere,

$$= (\mathscr{F}\begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ ... \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix})^T \mathscr{A}\mathscr{F}\begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ ... \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \xi_1 \\ x_2 \\ \xi_2 \\ ... \\ x_n \\ \xi_n \end{pmatrix}^T \mathscr{F}^T\mathscr{A}\mathscr{F}\begin{pmatrix} y_1 \\ \tau_1 \\ y_2 \\ \tau_2 \\ ... \\ y_n \\ \tau_n \end{pmatrix}$$

Buradan $\mathscr{A} = \mathscr{F}^T\mathscr{A}\mathscr{F}$ ' dir.

$\det\mathscr{A} = (\det\Im)^n = 1$ ' dir.

Buradan $\det\mathscr{F}^T\mathscr{A}\mathscr{F} = 1$ ' dir.

$\det \mathcal{F}^T \mathcal{A} \mathcal{F} = \det \mathcal{F}^T \det \mathcal{A} \det \mathcal{F} = (\det \mathcal{F})^2 \det \mathcal{A}$

$\det \mathcal{A} = 1$ olduğundan,

$(\det \mathcal{F})^2 = 1$ elde edilir. Bu da bize $\det \mathcal{F} \neq 0$ ' ı verir. ◆

Önerme 20: $\forall x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ için $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i - \xi_i y_i)$ ifadesi ters simetrik form olmak üzere $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ simplektik dönüşümü bileşke işlemine göre bir gruptur.

İspat: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^{2n}$ için $\langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n}(x_i\tau_i - \xi_i y_i)$ ifadesi ters simetrik form ve A_1, A_2 dönüşümleri simplektik olsun. $\langle (A_1 \circ A_2)(x), (A_1 \circ A_2)(y)\rangle_{\mathbb{R}} \overset{?}{=} \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$.

$\langle (A_1 \circ A_2)(x), (A_1 \circ A_2)(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle A_1(A_2(x)), A_1(A_2(y))\rangle_{\mathbb{R}}$

A_1 simplektik olduğundan,

$$= \langle A_2(x), A_2(y)\rangle_{\mathbb{R}}$$

A_2 simplektik olduğundan,

$$= \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}} .$$

Dolayısı ile, $\langle (A_1 \circ A_2)(x), (A_1 \circ A_2)(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$ 'dir.

$\forall A_1, A_2, A_3$ simplektik dönüşümleri için,

$$\begin{aligned}\langle (A_1 \circ (A_2 \circ A_3))(x), (A_1 \circ (A_2 \circ A_3))(y)\rangle_{\mathbb{R}} &= \langle A_1((A_2 \circ A_3)(x)), A_1((A_2 \circ A_3)(y))\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle A_1(A_2(A_3(x)), A_1(A_2(A_3(y)))\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle (A_1 \circ A_2)(A_3(x)), (A_1 \circ A_2)(A_3(y))\rangle_{\mathbb{R}} \\ &= \langle ((A_1 \circ A_2) \circ A_3)(x), ((A_1 \circ A_2) \circ A_3)(y)\rangle_{\mathbb{R}} \text{ 'dir.}\end{aligned}$$

$\langle I(x), I(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$ olduğundan I birim dönüşümü simplektiktir.

Önerme 19' dan $\det A_1 \neq 0$ olduğundan A_1^{-1} vardır. $A_1^{-1} \circ A_1 = A_1 \circ A_1^{-1} = I$ ' dir. Buna göre A_1^{-1} dönüşümü simplektik midir?

$\langle I(x), I(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$,

$\langle (A_1 \circ A_1^{-1})(x), (A_1 \circ A_1^{-1})(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle A_1(A_1^{-1}(x)), A_1(A_1^{-1}(y))\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$

A_1 simplektik olduğundan, $\langle A_1^{-1}(x), A_1^{-1}(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}}$ ' dir. Böylelikle A_1^{-1} simplektiktir.

$\Rightarrow$ $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ simplektik dönüşümü bileşke işlemine göre bir gruptur. ◆

1.7. Üniter Uzay

Tanım 23[13]: $E^{'}$, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere, $\varphi^{'} : E^{'} \times E^{'} \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlasın:

$\forall x,\ y,\ z \in E^{'},\ \forall \lambda \in \mathbb{C}$ için;

1) $\varphi^{'}\left(x+y,\ z\right) = \varphi^{'}\left(x,\ z\right) + \varphi^{'}\left(y,\ z\right)$

2) $\varphi^{'}\left(\lambda x,\ y\right) = \lambda \varphi^{'}\left(x,\ y\right)$

3) $\varphi^{'}\left(x,\ y\right) = \overline{\varphi^{'}\left(y,\ x\right)}$

4) $\varphi^{'}(x, x) \geq 0$

5) $\varphi^{'}\left(x,\ x\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bu şekilde tanımlanan $\varphi^{'}$ dönüşümüne $E^{'}$ kompleks vektör uzayında skaler (iç) çarpım denir. $\left(E^{'},\ \varphi^{'}\right)$ ikilisine de iç çarpımlı kompleks vektör uzayı denir.

Tanım 24: Sonlu boyutlu kompleks iç çarpımlı vektör uzayına üniter uzay denir.

Örnek 25: $E^{'} = \mathbb{C}$ alalım. $\varphi^{'} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $x,\ y \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\varphi^{'}\left(x,\ y\right) = x\overline{y}$ dönüşümünü tanımlayalım. $\left(\mathbb{C},\ \varphi^{'}\right)$' nin üniter uzay olduğunu gösterelim:

$\forall x,\ y,\ z, \lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere;

1) $\varphi^{'}\left(x+y,\ z\right) = \left(x+y\right)\overline{z} = x\overline{z} + y\overline{z} = \varphi^{'}\left(x,\ z\right) + \varphi^{'}\left(y,\ z\right)$

2) $\varphi^{'}\left(\lambda x,\ y\right) = \left(\lambda x\right)\overline{y} = \lambda\left(x\overline{y}\right) = \lambda \varphi^{'}\left(x,\ y\right)$

3) $\varphi^{'}\left(x,\ y\right) = x\overline{y} = \overline{y\overline{x}} = \overline{\varphi^{'}\left(y,\ x\right)}$

4) $\varphi^{'}\left(x,\ x\right) = x\overline{x} = \left|x\right|^{2} \geq 0$

5) $\varphi^{'}\left(x,\ x\right) = 0 \ \Rightarrow x\overline{x} = 0 \ \Rightarrow \left|x\right|^{2} = 0 \ \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \ \Rightarrow \varphi^{'}\left(x,\ x\right) = 0$ olduğu açıktır.

Örnek 26: $E^{'}=\mathbb{C}^2$ alalım. $\varphi^{'}:\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ olmak üzere $\varphi^{'}(x,\ y)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{C}^2,\ \varphi^{'})$ ' nin üniter uzay olduğunu gösterelim. Bunun için;

1) $\varphi^{'}(x+y,z)=(x_1+y_1)\overline{z_1}+(x_2+y_2)\overline{z_2}=x_1\overline{z_2}+y_1\overline{z_2}+x_2\overline{z_2}+y_2\overline{z_2}$

$$=(x_1\overline{z_2}+x_2\overline{z_2})+(y_1\overline{z_2}+y_2\overline{z_2})=\varphi^{'}(x,z)+\varphi^{'}(y,z)$$

2) $\varphi^{'}(\lambda x,y)=\lambda x_1\overline{y_1}+\lambda x_2\overline{y_2}=\lambda(x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2})=\lambda\varphi^{'}(x,y)$

3) $\varphi^{'}(x,y)=x_1\overline{y_1}+x_2\overline{y_2}=\overline{y_1\overline{x_1}}+\overline{y_2\overline{x_2}}=\overline{\varphi^{'}(y,x)}$

4) $\varphi^{'}(x,x)=|x_1|^2+|x_2|^2\geq 0$

5) $\varphi^{'}(x,x)=|x_1|^2+|x_2|^2=0\Leftrightarrow x_1=0,x_2=0\Leftrightarrow x=0$

olduğundan $(\mathbb{C}^2,\ \varphi^{'})$ üniter uzaydır.

Örnek 27: $E^{'}=\mathbb{C}^n$ alalım. $\varphi^{'}:\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$, $x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}$, $y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\cdots\\y_n\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^n$ olmak üzere $\varphi^{'}(x,\ y)=\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{C}^n,\ \varphi^{'})$ üniter uzaydır.

Örnek 28: $E^{'}=\mathbb{C}$ alalım. $\varphi^{'}:\mathbb{C}\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $x,\ y\in\mathbb{C}$ olmak üzere $\varphi'(x,\ y)=x^2\overline{y}$ dönüşümünü tanımlayalım. $(\mathbb{C},\ \varphi^{'})$' nin üniter uzay olmadığını gösterelim:

Gerçekten $\forall x,\ y,\ z\in\mathbb{C}$ olmak üzere;

$\varphi^{'}(x+y,\ z)=(x+y)^2\overline{z}=x^2\overline{z}+y^2\overline{z}+2xy\overline{z}$ olur. Ama iç çarpım tanımına göre $\varphi^{'}(x+y,\ z)=x^2\overline{z}+y^2\overline{z}$ olmalıdır. Bunun için $2xy\overline{z}=0$ olması gerekir. Buradan $x=0$ veya $y=0$ veya $z=0$ ' dır. Fakat bu şart tüm x,y,z ' ler için sağlanmadığından, $\varphi^{'}(x+y,\ z)\neq x^2\overline{z}+y^2\overline{z}$ olup, $\varphi^{'}$ iç çarpım değildir. Dolayısıyla $(\mathbb{C},\ \varphi^{'})$ üniter uzay değildir.

Tanım 25: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümüne lineer operatör denir.

i) $F(z_1 + z_2) = F(z_1) + F(z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$

ii) $F(\lambda z) = \lambda F(z),\ \lambda \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C}^n$

Not 8: Başka lineerlik kavramları da kullanıldığından bu durumdaki operatöre $\mathbb{C}-lineer$ diyeceğiz.

Tanım 26: $\left(E_1^{'},\ \varphi_1^{'}\right)$ ve $\left(E_2^{'},\ \varphi_2^{'}\right)$ üniter uzaylar olmak üzere, $F:E_1^{'} \to E_2^{'}$ dönüşümü için;

i) F , birebir ve örten

ii) F , lineer

iii) $\varphi_2^{'}\left(F(x),\ F(y)\right) = \varphi_1^{'}\left(x,\ y\right)$

ise $\left(E_1^{'},\ \varphi_1^{'}\right)$ ve $\left(E_2^{'},\ \varphi_2^{'}\right)$ üniter uzaylarına izomorf denir.

Önerme 21[10]: $\left(E_1^{'},\ \varphi_1^{'}\right)$ ve $\left(E_2^{'},\ \varphi_2^{'}\right)$ üniter uzaylarının izomorf olması için gerek ve yeter şart $boy\ E_1^{'} = boy\ E_2^{'}$ olmasıdır.

İspat: $E_1^{'}, E_2^{'}$ uzayları, n boyutlu iki üniter uzay olsun. $E_1^{'}$ uzayında $l_1,...,l_n$ temel sistemini, $E_2^{'}$ uzayında ise $l_1^{'},...,l_n^{'}$ temel sistemini göz önüne alınsın. Her bir

$x = c_1 l_1 + ... + c_n l_n$ vektörüne,

$x^{'} = c_1 l_1^{'} + ... + c_n l_n^{'}$ vektörü karşı düşürsün....(*)

$E_1^{'}$ uzayı ile $E_2^{'}$ uzayı arasında oluşturulan bu tür karşı düşürmelere, birebir karşı düşürme adı verilir. Gerçekten, $l_1,...,l_n$ temel sistemi $E_1^{'}$ uzayında lineer bağımsız olduğu için, her bir x vektörünün açılımı tektir. Benzer şekilde, $l_1^{'},...,l_n^{'}$ temel sistemi $E_2^{'}$ uzayında lineer bağımsız olduğu için , $x^{'} = c_1 l_1^{'} + ... + c_n l_n^{'}$ açılımı da vardır ve tektir. Dolayısı ile aynı $c_1,...,c_n$ katsayılarını kullandıkları için, her bir $x \in E_1^{'}$ elemanına bir ve yalnız bir tek $x^{'} \in E_2^{'}$ elemanı karşılık düşer.

Öte yandan, her bir $y \in E_1^{'}$ vektörü, bir $y = d_1 l_1 + ... + d_n l_n$ açılımına sahip olduğu için $(*)$ ' dan

$x + y = (c_1 + d_1) l_1 + ... + (c_n + d_n) l_n$ eşitliği elde edilir. Bu durumda bir $y^{'} \in E_2^{'}$ vektörünün $y^{'} = d_1 l_1^{'} + ... + d_n l_n^{'}$ açılımından,

$x^{'} + y^{'} = (c_1 + d_1) l_1^{'} + ... + (c_n + d_n) l_n^{'}$ eşitliği elde edilir. Diğer bir deyişle $x + y \leftrightarrow x^{'} + y^{'}$ bağıntısı sağlanır.

Her bir α sayısı için,

$\alpha x = \alpha c_1 l_1 + ... + \alpha c_n l_n$,

$\alpha x^{'} = \alpha c_1 l_1^{'} + ... + \alpha c_n l_n^{'}$, eşitliklerinden $\alpha \cdot x \leftrightarrow \alpha \cdot x^{'}$ bağıntısı elde edilir.

$$\varphi^{'}(x, y) = (c_1 l_1 + ... + c_n l_n)\overline{(d_1 l_1 + ... + d_n l_n)} = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{d_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{d_i}$$

$$\varphi^{'}(x^{'}, y^{'}) = (c_1 l_1^{'} + ... + c_n l_n^{'})\overline{(d_1 l_1^{'} + ... + d_n l_n^{'})} = \sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{d_j} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_i \overline{d_i}$$

eşitliklerinden $\varphi^{'}(x, y) \leftrightarrow \varphi^{'}(x^{'}, y^{'})$ bağıntısı elde edilir.

Böylece $E_1^{'} \leftrightarrow E_2^{'}$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç 10: $\left(E^{'},\ \varphi^{'}\right)$ üniter uzay ve *boy* $E^{'} = n$ olsun. O halde $\left(E^{'},\ \varphi^{'}\right)$ üniter uzayı, $\left(\mathbb{C}^n,\ \sigma^{'}\right)$ üniter uzayına izomorftur. Burada $\sigma^{'}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ ' dir.

Not 9: Bundan sonra $\sigma^{'}(x, y) = \langle x, y \rangle_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ şeklinde alınacaktır.

Tanım 27: $\mathbb{C}^n$ üniter uzayında $x \in \mathbb{C}^n$ için $\sqrt{\left\langle x,\ x \right\rangle_{\mathbb{C}}}$ sayısına x vektörünün normu denir ve $\|x\|$ şeklinde gösterilir.

Tanım 28: $\|x\| = 1$ ise, x vektörüne birim vektör denir.

Lemma 2: $\mathbb{C}^n$'de tanımlanan norm aşağıdaki aksiyomları sağlar:
$\forall x\in \mathbb{C}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için,

i) $\|x\| \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

İspat:

i) $\|x\| = \sqrt{\langle x,\ x\rangle_{\mathbb{C}}} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2} \geq 0$

ii) $\|x\| = 0 \Rightarrow \sqrt{\langle x,\ x\rangle_{\mathbb{C}}} = 0 \Rightarrow \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2} = 0 \Rightarrow x = 0$

$x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$ olduğu açıktır.

iii) $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x,\ \lambda x\rangle_{\mathbb{C}}} = \sqrt{|\lambda x_1|^2 + |\lambda x_2|^2 + ... + |\lambda x_n|^2}$

$$= \sqrt{|\lambda|^2 |x_1|^2 + |\lambda|^2 |x_2|^2 + ... + |\lambda|^2 |x_n|^2} = \sqrt{|\lambda|^2 \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2\right)}$$

$$= |\lambda| \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2} = |\lambda|\|x\| \ \blacklozenge$$

Tanım 29: $\langle x_i,\ x_j\rangle_{\mathbb{C}} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$, $i,\ j = 1, 2, ..., m$ ise sisteme ortonormal sistem denir.

Örnek 29: $x, y \in \mathbb{C}^2$ alalım. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ seçelim. Bu takdirde, $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2}$ olduğundan $\langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} = 1$, $\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = 0$, $\langle y, y\rangle_{\mathbb{C}} = 1$ olarak bulunur. Burada $\{x, y\}$ ortonormal bir sistem oluşturur.

Teorem 10: E bir üniter uzay, $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sistemi E' de bir ortonormal taban ve $x \in E$ olsun. Bu takdirde; $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ öyle ki $\lambda_i = \langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{C}}$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$' dir.

İspat: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, E' de bir taban olduğundan $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n$ için $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$ vardır. $\langle x,\ e_i\rangle_{\mathbb{C}}$ iç çarpımını alalım.

$$\left\langle x,\ e_i \right\rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_n e_n,\ e_i \right\rangle_{\mathbb{C}} = \lambda_i \underbrace{\left\langle e_i,\ e_i \right\rangle_{\mathbb{C}}}_{1} = \lambda_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n \text{ olur.}$$

Böylece, $\lambda_i = \left\langle x,\ e_i \right\rangle_{\mathbb{C}}$ olduğunu buluruz.◆

Teorem 11: $\forall x,\ y \in \mathbb{C}^n$ için $\left|\left\langle x,\ y \right\rangle_{\mathbb{C}}\right| \le \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği)'dir.

İspat: $\forall a, b \in \mathbb{C}$ ve $\forall x,\ y \in \mathbb{C}^n$;

$$\|ax - by\|^2 = \langle ax - by, ax - by\rangle_{\mathbb{C}} = \langle ax, ax - by\rangle_{\mathbb{C}} - \langle by, ax - by\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \langle ax, ax\rangle_{\mathbb{C}} - \langle ax, by\rangle_{\mathbb{C}} - \langle by, ax\rangle_{\mathbb{C}} + \langle ax, by\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= |a|^2 \|x\|^2 - a\bar{b}\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} - \bar{a}b\langle y, x\rangle_{\mathbb{C}} + |b|^2 \|y\|^2$$

$$= |a|^2 \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{a\bar{b}\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right\} + |b|^2 \|y\|^2$$

Burada $a = \|y\|^2$ ve $b = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ alırsak,

$$= \|x\|^2 \|y\|^4 - 2\left|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right|^2 \|y\|^2 + \left|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right|^2 \|y\|^2$$

$$= \|y\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - \left|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right|^2) \text{ elde edilir.}$$

$\|ax - by\|^2 \ge 0$ olduğundan, $\|y\|^2 (\|x\|^2 \|y\|^2 - \left|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right|^2) \ge 0$ ' dır. Dolayısı ile, $\|y\| \ne 0$ ise $\|x\|^2 \|y\|^2 \ge \left|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right|^2$ ' dir. Her iki tarafın karekökü alınarak $\|x\|\|y\| \ge \left|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right|$ elde edilir. $\|y\| = 0$ yani $y = 0$ ise, $\left|\left\langle x,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}}\right| = 0$ ve $\|x\|\|y\| = 0$ olduğundan, $\left|\left\langle x,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}}\right| = \|x\|\|y\|$ ' dir. ◆

Teorem 12: Keyfi $x,\ y \in \mathbb{C}^n$ için $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ (Minkowski Eşitsizliği)' dir.

İspat:

$$\|x + y\|^2 = \left\langle x + y,\ x + y\right\rangle_{\mathbb{C}} = \left\langle x,\ x\right\rangle_{\mathbb{C}} + \left\langle x,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, x\rangle_{\mathbb{C}} + \left\langle y,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \left\langle x,\ x\right\rangle_{\mathbb{C}} + \left\langle x,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}} + \left\langle y,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$\le \left\langle x,\ x\right\rangle_{\mathbb{C}} + \left|\left\langle x,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}}\right| + \left|\left\langle x,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}}\right| + \left\langle y,\ y\right\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \|x\|^2 + 2\left|\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right| + \|y\|^2$$

$$\le \|x\|^2 + 2 \cdot \|x\|\|y\| + \|y\|^2 = \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

$$\|x + y\|^2 \le \left(\|x\| + \|y\|\right)^2 \Rightarrow \|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \ ◆$$

1.8. Üniter Dönüşümler, Üniter matrisler ve U(n), SU(n) Grupları

Teorem 13[5]: Bir $n-boyutlu$ kompleks iç çarpım uzayı V olsun. Bir $A\in Hom(V,V)$ ve $\forall x\in V$; $\langle A(x),x\rangle_{\mathbb{C}}=0 \Rightarrow A=0$ ' dır.

İspat: $\forall x,y\in V$; $x+y,\ x-y\in V$ ' dir. Hipotez gereğince,

$\langle A(x+y),x+y\rangle_{\mathbb{C}}=0$

$\langle A(x-y),x-y\rangle_{\mathbb{C}}=0$ ' dır.

$$\langle A(x+y),x+y\rangle_{\mathbb{C}}=\langle A(x)+A(y),x+y\rangle_{\mathbb{C}}$$
$$=\langle A(x),x\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(x),y\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),x\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),y\rangle_{\mathbb{C}}=0$$
$$\langle A(x-y),x-y\rangle_{\mathbb{C}}=\langle A(x)-A(y),x-y\rangle_{\mathbb{C}}$$
$$=\langle A(x),x\rangle_{\mathbb{C}}-\langle A(x),y\rangle_{\mathbb{C}}-\langle A(y),x\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),y\rangle_{\mathbb{C}}=0$$

Bu iki eşitliği taraf tarafa çıkarırsak,

$\langle A(x),y\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),x\rangle_{\mathbb{C}}=0 ...(*)$ elde edilir. Bu eşitlik $\forall y\in V$ için doğru olduğundan ve y yerine iy alındığı zaman da doğru kalacağından,

$-i\langle A(x),y\rangle_{\mathbb{C}}+i\langle A(y),x\rangle_{\mathbb{C}}=0 ...(**)$ elde edilir. $(*)$ "i" ile çarpılır $(**)$ ile taraf tarafa toplanırsa $\forall x,y\in V$ için $\langle A(y),x\rangle_{\mathbb{C}}=0$ bulunur.

Belli bir y ' ye karşılık bütün $x\in V$ ' ler için bu eşitlik doğru olacağından $x=A(y)$ için de doğrudur. O halde $\langle A(y),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}=0$ olur. İç çarpımın pozitif tanımlı olmasından $\forall y\in V$ için $A(y)=0$ olur ki bu da $A=0$ olmasını gerektirir. ◆

Önerme 22: $\{e_1,...,e_n\}$, V kompleks iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı olsun. Herhangi $u\in V$;

$u=\langle u,e_1\rangle_{\mathbb{C}}e_1+...+\langle u,e_n\rangle_{\mathbb{C}}e_n$ ' dir.

İspat: $\forall u\in V$; $u=a_1e_1+...+a_ne_n$, $a_1,...,a_n\in\mathbb{C}$ ' dir.

$\langle u,e_1\rangle_{\mathbb{C}}=\langle a_1e_1+...+a_ne_n,e_1\rangle_{\mathbb{C}}=a_1\langle e_1,e_1\rangle_{\mathbb{C}}+...+a_n\langle e_n,e_n\rangle_{\mathbb{C}}$

$\{e_1,...,e_n\}$, V kompleks iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı olduğundan,

$=a_1 1+...+a_n 0=a_1$ bulunur.

$i=1,...,n$ için benzer şekilde,

$\langle u,e_i\rangle_{\mathbb{C}} = \langle a_1e_1+...+a_ie_i+...+a_ne_n,e_i\rangle_{\mathbb{C}} = a_1\langle e_1,e_i\rangle_{\mathbb{C}}+...+a_i\langle e_i,e_i\rangle_{\mathbb{C}}+...+a_n\langle e_n,e_i\rangle_{\mathbb{C}}$

$= a_1 0+...+a_i 1+...+a_n 0 = a_i$ bulunur.

Dolayısı ile, $i=1,...,n$ için a_i ’ ler yerine $\langle u,e_i\rangle_{\mathbb{C}}$ ’ ler konulduğunda,

$u=\langle u,e_1\rangle_{\mathbb{C}}e_1+...+\langle u,e_n\rangle_{\mathbb{C}}e_n$ elde edilir.

Tanım 30[9]: V , $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Bir $\Omega : V \to \mathbb{C}$ dönüşümü, $\forall u,v \in V$ ve $a,b\in\mathbb{C}$ için $\Omega(au+bv)=a\Omega(u)+b\Omega(v)$ olarak yazılabiliyorsa Ω ’ ye bir lineer fonksiyonel veya lineer form denir.

Örnek 30: V , $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Bir $\Upsilon : V \to \mathbb{C}$ dönüşümünü $\forall v\in V$ için $\Upsilon(v)=\langle v,u\rangle_{\mathbb{C}}$ ile tanımlayalım. $\Upsilon : V \to \mathbb{C}$ dönüşümü bir lineer fonksiyoneldir.

Çözüm: $\forall v_1,v_2\in V$ ve $a,b\in\mathbb{C}$ için,

$\Upsilon(av_1+bv_2)=\langle av_1+bv_2,u\rangle_{\mathbb{C}} = a\langle v_1,u\rangle_{\mathbb{C}}+b\langle v_2,u\rangle_{\mathbb{C}} = a\Upsilon(v_1)+b\Upsilon(v_2)$ ’ dir.

Dolayısı ile Υ dönüşümü bir lineer fonksiyoneldir.

Teorem 14[9]: Sonlu boyutlu bir V kompleks iç çarpım uzayında bir lineer fonksiyonel Ω olsun. Bu durumda, $\forall v\in V$ için $\Omega(v)=\langle v,u\rangle_{\mathbb{C}}$ olacak şekilde tek bir $u\in V$ vektörü vardır.

İspat: Sonlu boyutlu V iç çarpım uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun.

$u=\overline{\Omega(e_1)}e_1+...+\overline{\Omega(e_n)}e_n$ eşitliğini alalım.

Υ , V üzerinde $\forall v\in V$ için $\Upsilon(v)=\langle v,u\rangle_{\mathbb{C}}$ ile tanımlanan bir lineer fonksiyonel olsun. Bu durumda, $i=1,...,n$ için,

$\Upsilon(e_i)=\langle e_i,u\rangle_{\mathbb{C}} = \langle e_i,\overline{\Omega(e_1)}e_1+...+\overline{\Omega(e_n)}e_n\rangle_{\mathbb{C}} = \Omega(e_i)$ olur.

Ω ve Υ baz vektörleri aynı olduğundan $\Omega=\Upsilon$ elde edilir.

Şimdi kabul edelim ki, u' , V ’ de $\forall v\in V$ için $\Omega(v)=\langle v,u'\rangle_{\mathbb{C}}$ olacak şekilde bir başka vektör olsun. Bu durumda, $\langle v,u\rangle_{\mathbb{C}}=\langle v,u'\rangle_{\mathbb{C}}$ veya $\langle v,u-u'\rangle_{\mathbb{C}}=0$ ’ dır. Özel olarak, bu $v=u-u'$ için de doğrudur. Böylece $\langle u-u',u-u'\rangle_{\mathbb{C}}=0$ ’ dır. Bu ise $u-u'=0$ yani $u=u'$ olmasını gerektirir. O halde bir u vektörü, iddia edildiği gibi, tektir.

Tanım 31: V ve W , $\mathbb{C}$ kompleks sayılar cismi üzerinde birer vektör uzayı olsunlar. Bir $L:V\to W$ dönüşümü, $\forall v,u\in V$ ve $a,b\in\mathbb{C}$ için, $L(au+bv)=aL(u)+bL(v)$ olarak yazılabiliyorsa bir lineer operatör form denir.

Teorem 15: Sonlu boyuttaki bir V kompleks iç çarpım uzayında bir lineer operatör A olsun. Bu durumda $\forall v,u\in V$ için, $\langle A(u),v\rangle_{\mathbb{C}}=\langle u,A^*(v)\rangle_{\mathbb{C}}$ olacak şekilde bir A^* lineer operatörü mevcuttur.

Eğer $\mathscr{A}$, V ' nin bir ortonormal $\{e_1,...,e_n\}$ bazına göre A ' nin bir matrisi ise $\mathscr{A}$ ' nın eşlenik transpozesi $\mathscr{A}^*$ da A^* ' ın $\{e_1,...,e_n\}$ bazındaki matrisidir.

İspat: Sonlu boyutlu, bir V kompleks iç çarpım uzayında bir lineer operatör A olsun. İlk önce A^* ' ı tanımlayalım. v , V ' nin keyfi fakat sabit elemanı olsun. $u\to\langle A(u),v\rangle_{\mathbb{C}}$, V ' de bir lineer fonksiyoneldir. Böylece teorem 14' ten bir tek $v^{'}\in V$ vardır, öyle ki $\forall u\in V$ için $\langle A(u),v\rangle_{\mathbb{C}}=\langle u,v^{'}\rangle_{\mathbb{C}}$ ' dür.

$A^*:V\to V$ dönüşümünü $A^*(v)=v^{'}$ ile tanımlayalım.

Bu durumda, $\forall v,u\in V$ için $\langle A(u),v\rangle_{\mathbb{C}}=\langle u,A^*(v)\rangle_{\mathbb{C}}$ ' dir.

Herhangi $u,v\in V$ ve $a,b\in\mathbb{C}$ için,

$$\langle u,A^*(av_1+bv_2)\rangle_{\mathbb{C}}=\langle A(u),av_1+bv_2\rangle_{\mathbb{C}}=\overline{a}\langle A(u),v_1\rangle_{\mathbb{C}}+\overline{b}\langle A(u),v_2\rangle_{\mathbb{C}}$$

$$=\overline{a}\langle u,A^*(v_1)\rangle_{\mathbb{C}}+\overline{b}\langle u,A^*(v_2)\rangle_{\mathbb{C}}=\langle u,aA^*(v_1)\rangle_{\mathbb{C}}+\langle u,bA^*(v_2)\rangle_{\mathbb{C}}\text{ ' dir.}$$

Fakat bu $\forall u\in V$ için doğru olduğundan,

$A^*(av_1+bv_2)=aA^*(v_1)+bA^*(v_2)$ ' dir. O halde A^* lineerdir.

$\{e_1,...,e_n\}$ bazında A ve A^*, temsil eden matrisleri, sırası ile $\mathscr{A}=(a_{ij})$ ve $\mathscr{B}=(b_{ij})$ ise, $a_{ij}=\langle A(e_j),e_i\rangle_{\mathbb{C}}$ ve $b_{ij}=\langle A^*(e_j),e_i\rangle_{\mathbb{C}}$ şeklinde verilir. Böylece,

$$b_{ij}=\langle A^*(e_j),e_i\rangle_{\mathbb{C}}=\overline{\langle e_i,A^*(e_j)\rangle_{\mathbb{C}}}=\overline{\langle A(e_i),e_j\rangle_{\mathbb{C}}}=\overline{a_{ji}}\text{ olur.}$$

O halde iddia edildiği gibi $\mathscr{B}=\mathscr{A}^*$ ' dır.

Tanım 32: Bir V kompleks iç çarpım uzayında tanımlı bir A lineer operatörü, $\forall v,u\in V$ için $\langle A(u),v\rangle_{\mathbb{C}}=\langle u,A^*(v)\rangle_{\mathbb{C}}$ özelliğine sahip bir A^* operatörüne sahipse, A^* operatörüne A ' nin ekidir (ek operatörüdür) denir.

Örnek 31: $\mathbb{C}^3$ içindeki A lineer operatör şöyle tanımlansın:

$$A(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x+iy \\ y-5iz \\ x+(1-i)y+3z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ 0 & 1 & 5i \\ 1 & 1-i & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Buna göre,

$$\langle A(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}), \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}} = \begin{pmatrix} 2x+iy \\ y-5iz \\ x+(1-i)y+3z \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}$$

$$= \overline{a}(2x+iy) + \overline{b}(y-5iz) + \overline{c}(x+(1-i)y+3z)$$

$$= x(2\overline{a}+\overline{c}) + y(\overline{a}i+\overline{b}+(1-i)\overline{c}) + z(5i\overline{b}+3)$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} 2a+c \\ -ai+b+(1+i)c \\ -5ib+3 \end{pmatrix}} = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2a+c \\ -ai+b+(1+i)c \\ -5ib+3 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

Böylelikle, $A^*(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2a+c \\ -ai+b+(1+i)c \\ -5ib+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -i & 1 & 1+i \\ 0 & -5i & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ elde edilir.

Tanım 33: V sonlu boyutlu bir kompleks iç çarpım uzayı olsun. Bir $A \in Hom(V,V)$ dönüşümü ve $\forall x, y \in V$;

$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ ise A dönüşümüne üniterdir denir.

Örnek 32: $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4}x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_1 + \frac{3-i}{4}x_2 \end{pmatrix}$$

dönüşümü üniterdir.

Çözüm: $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$;

$$\langle A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4}x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_1 + \frac{3-i}{4}x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4}y_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4}y_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4}y_1 + \frac{3-i}{4}y_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4}x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_1 + \frac{3-i}{4}x_2 \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} \frac{3+i}{4}y_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4}y_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4}y_1 + \frac{3-i}{4}y_2 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4}x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_1 + \frac{3-i}{4}x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{3-i}{4}\overline{y_1} - \frac{2+i\sqrt{2}}{4}\overline{y_2} \\ \frac{2+i\sqrt{2}}{4}\overline{y_1} + \frac{3+i}{4}\overline{y_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \overline{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}} = \langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{C}}$$

$\Rightarrow$ A dönüşümü üniterdir.

Teorem 16[5]: V kompleks iç çarpım uzayı olsun. Bir $A \in Hom(V,V)$ dönüşümü üniterdir $\Leftrightarrow$ $A^* \circ A = I$ ’ dır.

İspat: $(\Rightarrow)$: A lineer dönüşümü üniter olsun. $\forall x, y \in V$;

$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$

$\langle x, A^*(A(y))\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$

$\langle x, (A^* \circ A)(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ olur.

$\langle x, \left[(A^* \circ A - I)\right](y)\rangle_{\mathbb{C}} = 0$

$\forall y \in V$ için doğru olan bu ifade $y = x$ için de doğrudur.

Teorem 13’ den $A^* \circ A - I = 0$ veya $A^* \circ A = I$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$: $A^* \circ A = I$ olsun.

$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, I(y)\rangle_{\mathbb{C}}$

$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, (A^* \circ A)(y)\rangle_{\mathbb{C}}$

$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, A^*(A(y))\rangle_{\mathbb{C}}$

$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}$ sonucu elde edilir. Dolayısı ile A üniterdir. ◆

Not 10: $Hom(V,V) \to M(n\times n,\mathbb{C})$ izomorfizminde $A\in Hom(V,V)$ lineer dönüşümüne karşılık gelen matris $\mathscr{A}$ ise A^*' a karşılık gelen matris $\mathscr{A}^*$ olur. Böylece ,

$\langle \mathscr{A}x, \mathscr{A}y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$

$\mathscr{A}\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^*\mathscr{A} = I_n$

$\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^{-1}$ ifadeleri yazılabilir.

Tanım 34: A dönüşümü üniter ise $\mathscr{A}$ matrisine de üniter matris denir.

Örnek 33: $A:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \to A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \frac{3+i}{4}x_1 - \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_2 \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4}x_1 + \frac{3-i}{4}x_2 \end{pmatrix}$$

üniter dönüşümünün matrisi,

$$A(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3+i}{4} & -\frac{2-i\sqrt{2}}{4} \\ \frac{2-i\sqrt{2}}{4} & \frac{3-i}{4} \end{pmatrix}}_{\mathscr{A}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ elde edilir. $\mathscr{A}$ matrisi üniterdir.

Teorem 17[5]: V sonlu boyutlu bir kompleks iç çarpım uzayı olsun. $A\in Hom(V,V)$ ise aşağıdaki önermeler karşılıklı olarak eşdeğerdir:

(i) A üniterdir.

(ii) V ' deki normları A korur,yani, $\forall x\in V$ için $\|A(x)\| = \|x\|$.

(iii) $\forall x\in V$ birim vektörü için $A(x)$ de birim vektördür.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\forall y\in V$ için doğru olan $\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ ifadesi $y = x$ için de doğru olacağından $\langle A(x), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}$ elde edilir. Bu da $\forall x\in V$ için $\|A(x)\|^2 = \|x\|^2$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): $\forall x\in V$ için $\|A(x)\| = \|x\|$ olduğu kabul edilirse normun tanımından, $\langle A(x), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}$ elde edilir. Buradan $\langle x, (A^*\circ A)(x)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}$ veya $A^*\circ A = I$ elde edilir. Bu da A'nın üniter olduğunu gösterir.

(i) $\Rightarrow$ (iii): A üniter ise $A^* \circ A = I$ alınabilir. $x \in V$ birim vektör ise

$\langle x, x \rangle_{\mathbb{C}} = 1$

$\langle x, I(x) \rangle_{\mathbb{C}} = 1$

$\langle x, (A^* \circ A)(x) \rangle_{\mathbb{C}} = 1, I = A^* \circ A$

$\langle A(x), A(x) \rangle_{\mathbb{C}} = 1$

$\|A(x)\| = 1$ elde edilir ki bu da x ’ in resminin de birim olduğunu gösterir.

(iii) $\Rightarrow$ (i): $\|x\| = 1$ için, $\|A(x)\| = 1$ olduğu kabul edilirse

$\langle A(x), A(x) \rangle_{\mathbb{C}} = 1$

$\langle A(x), A(x) \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x \rangle_{\mathbb{C}}$ yazılabilir.Buradan sol taraf

şeklinde yazılabilir ve $\forall x \in V$ için,

$\langle x, (A^* \circ A - I)(x) \rangle_{\mathbb{C}} = 0$ elde edilir ki bu da teorem 13’ den $A^* \circ A - I = 0$ veya $A^* \circ A = I$ sonucunu verir. ◆

Teorem 18[5]: V bir kompleks iç çarpım uzayı ve $A \in Hom(V,V)$ bir üniter dönüşüm olsun.

1. A ’ nın her bir karakteristik değerinin modülü 1’ dir.
2. A ’ nın determinantının modülü +1’ dir.
3. V ’ nin bütün üniter dönüşümlerinin cümlesi çarpma işlemine göre bir gruptur.
4. V ’ nin determinantı 1 olan bütün üniter dönüşümlerinin cümlesi bir altgruptur.

İspat:

1. $x \in V$ ve $x \neq 0$ olmak üzere $A(x) = \lambda x$ olsun. A üniter olduğundan

$\|x\| = \|A(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ yazılabilir. Bu da $|\lambda| = 1$ olmasını gerektirir.

2. A ’ ya karşılık gelen matris $\mathscr{A}$ ise $|\det \mathscr{A}| = 1$ olduğunu göstermek yeter. A üniter dönüşüm olduğundan,

$\mathscr{A}\mathscr{A}^* = I_n$ ’ dir. Buradan,

$\det(\mathscr{A}\mathscr{A}^*) = \det(I_n)$

$\det(\mathscr{A}\mathscr{A}^*) = 1$

$\det \mathscr{A} \det \mathscr{A}^* = 1$ ’ dir.

$\mathscr{A}^* = \overline{\mathscr{A}}^T$ olduğundan $\det \mathscr{A}^* = \det \overline{\mathscr{A}}^T = \det \overline{\mathscr{A}} = \overline{\det \mathscr{A}}$ olur. O halde,

$1 = \det \mathscr{A} \overline{\det \mathscr{A}}$

$1 = \left|\det \mathscr{A}\right|^2 \quad \Rightarrow \left|\det \mathscr{A}\right| = +1$ olur.

3. A bir üniter dönüşüm ise $A^* \circ A = I$ ' dir. Buna göre A ' nın A^{-1} inversi vardır ve $A^{-1} = A^*$ ' dir.

A^{-1} de üniterdir:

A üniter olduğundan $\forall x, y \in V$ için

$\langle A^{-1}(x), A^{-1}(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle A(A^{-1}(x), A(A^{-1}(y))\rangle_{\mathbb{C}} = \langle (A \circ A^{-1})(x), (A \circ A^{-1})(y)\rangle_{\mathbb{C}}$

$= \langle I(x), I(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ elde edilir.

A ve B üniter iseler $A \circ B$ de üniterdir:

$\langle (A \circ B)(x), (A \circ B)(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle A(B(x)), A(B(y))\rangle_{\mathbb{C}} = \langle B(x), B(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ olur.

$A, B, C \in Hom(V, V)$ üç üniter dönüşüm iseler bütün dönüşümler için var olan birleşme özelliği özel olarak üniter olan dönüşümler için de vardır:

$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C$ ' dir.

$I \circ A = A \circ I = A$ olacak şekilde bir birim dönüşüm (etkisiz dönüşüm) vardır ve I da üniterdir. Gerçekten $\forall x, y \in V$ için,

$\langle I(x), I(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$ ' dir.

4. $\det A = \pm 1$ olduğundan $\det A = 1$ olan üniter dönüşümler bütün üniter dönüşümler cümlesinin bir alt cümlesidir. M ve N determinantları 1' er olan iki üniter dönüşüm iseler $\det(M \circ N) = \det M \det N = 1 \cdot 1 = 1$ olur.

$\det I = 1$ olduğundan $I \circ M = M \circ I = I$ olacak şekilde etkisiz dönüşüm de bu alt cümleye dahildir. O halde bu alt cümle de çarpma (bileşke) işlemine göre bir gruptur.

Tanım 35[5]:

(i) Bütün $\mathscr{A} \in M(n \times n, \mathbb{C})$ üniter matrislerin cümlesinin çarpma işlemine göre oluşturduğu gruba üniter grup denir ve $U(n)$ ile gösterilir.

(ii) Determinantı 1 olan bütün üniter matrislerin oluşturduğu alt gruba özel üniter grup denir ve $SU(n)$ ile gösterilir.

Örnek 34: $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in SU(2)$ ' dir.

1.9. Cebirler

Tanım 36[5]: C, cebir olmak üzere

i) $(C,\ +,\ \cdot)$ halka,

ii) $(C,\ +,\ \lambda\cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı,

iii) $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$, $\forall x,\ y \in C$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

ise $\{C,\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ sistemine $\mathbb{R}$-*cebir* denir.

Örnek 35: $\{\mathbb{R},\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ' dir.

Örnek 36: Katsayıları $\mathbb{R}$ ' den olan tüm polinomlar kümesini $\mathbb{R}[x]$ ile gösterelim. $\{\mathbb{R}[x],\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ' dir.

Örnek 37: Tüm rasyonel fonksiyonlar kümesini $\mathbb{R}(x)$ ile gösterelim. $\{\mathbb{R}(x),\ +,\ \cdot,\ \lambda\cdot,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}$-*cebir* ' dir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1.Kompleks Vektör Uzaylarında R-lineer Operatörler

Tanım 37: Aşağıdaki özellikleri sağlayan $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümüne $\mathbb{R}-lineer$ operatör denir.

i) $F(z_1+z_2)=F(z_1)+F(z_2),\ z_1,z_2\in\mathbb{C}^n$

ii) $F(\lambda z)=\lambda F(z),\ \lambda\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}^n$

Önerme 23: Keyfi $\mathbb{C}-lineer$ operatör $\mathbb{R}-lineerdir$.

İspat: F keyfi $\mathbb{C}-lineer$ operatör olsun.

i) $F(z_1+z_2)=F(z_1)+F(z_2),\ \forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$

ii) $F(\lambda z)=\lambda F(z),\ \forall\lambda\in\mathbb{C},\ \forall z\in\mathbb{C}$

$\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için geçerli olduğundan $\lambda=a+i0,\ a\in\mathbb{R}$ için de geçerlidir.

$\Rightarrow F(\lambda z)=F(az)=aF(z),\ a\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F,\mathbb{R}-lineerdir.$◆

Örnek 38: $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$

$$z\to F(z)=\overline{z}$$

dönüşümü verilsin. $F,\mathbb{C}-lineer$ değildir, $\mathbb{R}-lineerdir$.

Çözüm: $\forall z_1,z_2\in\mathbb{C}$;

i) $F(z_1+z_2)=\overline{(z_1+z_2)}=(\overline{z_1}+\overline{z_2})=F(z_1)+F(z_2)$

ii) $F(\lambda z)=\overline{\lambda z}=\overline{\lambda}\,\overline{z}=\overline{\lambda}F(z),\ \forall\lambda\in\mathbb{C},\ \forall z\in\mathbb{C}$

F' nin $\mathbb{C}-lineer$ olması için $F(\lambda z)=\lambda F(z),\ \lambda\in\mathbb{C},\ z\in\mathbb{C}$ olmalıdır. Buradan $F(z)=\overline{z}\neq 0$ ise $\overline{\lambda}=\lambda$ ' dır.

Bu durumda $\lambda\in\mathbb{R}$ ' dir.

$\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için geçerli olması gerektiğinden $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü $\mathbb{C}-lineer$ değildir.

Fakat, $F(\lambda z)=\lambda F(z),\ \lambda\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C}$ ' dir.

Önerme 24: $\mathbb{C}$**,** kompleks vektör uzayında keyfi $\mathbb{R}-lineer$ operatörün genel ifadesi şöyledir: $\Im(z)=\bar{z}$ olmak üzere $\forall F\in M(\mathbb{C},\mathbb{R})$; $\exists A_1, A_2\in M(\mathbb{C},\mathbb{C})$ öyle ki $F=A_1+A_2\circ\Im$ ' dir.

İspat: $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ **,** $z=x+iy$ için

$$z\to F(z)$$

$$F(x+iy)=F(x)+F(iy)=F(1x)+F(iy)$$

$$=xF(1)+yF(i),\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ F(1),F(i)\in\mathbb{C}$$

$F(1)=\lambda, F(i)=\mu$ alınırsa,

$$=x\lambda+y\mu$$

$$=\frac{z+\bar{z}}{2}\lambda+\frac{z-\bar{z}}{2i}\mu$$

$$=(\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2i})z+(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2i})\bar{z}$$

$(\frac{\lambda}{2}+\frac{\mu}{2i})z=A_1(z)\in\mathbb{C}$ ve $(\frac{\lambda}{2}-\frac{\mu}{2i})z=A_2(z)\in\mathbb{C}$ alınırsa,

$$=A_1(z)+A_2(\bar{z})$$

$$=A_1(z)+A_2(\Im(z))$$

$$=(A_1+A_2\circ\Im)(z)$$

$\Rightarrow F(z)=(A_1+A_2\circ\Im)(z)$ ◆

Önerme 25: $\mathbb{C}^2$, kompleks vektör uzayında keyfi $\mathbb{R}-lineer$ operatörün genel ifadesi şöyledir: $\Im(\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix})\to\overline{\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}}$ olmak üzere, $\forall F\in M(\mathbb{C}^2,\mathbb{R})$; $\exists A_1, A_2\in M(\mathbb{C}^2,\mathbb{C})$ öyle ki $F=A_1+A_2\circ\Im$ ' dir.

İspat: $F:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ **,** $\mathbb{R}-lineer$ dönüşüm olsun.

$$\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix}\to F(\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix})$$

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$ seçilsin.

$$F(\begin{pmatrix} z_1\\ z_2\end{pmatrix})=F(\begin{pmatrix} x_1+iy_1\\ x_2+iy_2\end{pmatrix})=F(\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} iy_1\\ iy_2\end{pmatrix})$$

$$= F(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} iy_1 \\ 0 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} 0 \\ iy_2 \end{pmatrix})$$

$$= x_1 F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + x_2 F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) + y_1 F(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}) + y_2 F(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix})$$

$F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \alpha_{11}$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \alpha_{12}$, $F(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}) = \alpha_{21}$, $F(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}) = \alpha_{22}$ seçilsin.

Burada $\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{21},\ \alpha_{22} \in \mathbb{C}^2$ ’ dir.

$$F(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) = x_1\alpha_{11} + x_2\alpha_{12} + y_1\alpha_{21} + y_2\alpha_{22}$$

$$= \frac{z_1 + \overline{z_1}}{2}\alpha_{11} + \frac{z_2 + \overline{z_2}}{2}\alpha_{12} + \frac{z_1 - \overline{z_1}}{2i}\alpha_{21} \frac{z_2 - \overline{z_2}}{2i}\alpha_{22}$$

$$= (\frac{\alpha_{11}}{2} + \frac{\alpha_{21}}{2i})z_1 + (\frac{\alpha_{12}}{2} + \frac{\alpha_{22}}{2i})z_2 + (\frac{\alpha_{11}}{2} - \frac{\alpha_{21}}{2i})\overline{z_1} + (\frac{\alpha_{12}}{2} - \frac{\alpha_{22}}{2i})\overline{z_2}$$

Eğer ,

$\frac{\alpha_{11}}{2} + \frac{\alpha_{21}}{2i} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\frac{\alpha_{12}}{2} + \frac{\alpha_{22}}{2i} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$, $\frac{\alpha_{11}}{2} - \frac{\alpha_{21}}{2i} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\frac{\alpha_{12}}{2} - \frac{\alpha_{22}}{2i} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ ile gösterilirse,

$$= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} z_1 + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} z_2 + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \overline{z_1} + \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \overline{z_2}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 z_1 \\ u_2 z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 z_2 \\ t_2 z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \overline{z_1} \\ v_2 \overline{z_1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 \overline{z_2} \\ k_2 \overline{z_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 z_1 + t_1 z_2 \\ u_2 z_1 + t_2 z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \overline{z_1} + k_1 \overline{z_2} \\ v_2 \overline{z_1} + k_2 \overline{z_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_1 & t_1 \\ u_2 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 & k_1 \\ v_2 & k_2 \end{pmatrix} \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}$$

$\begin{pmatrix} u_1 & t_1 \\ u_2 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_1(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) \in M(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$ ve $\begin{pmatrix} v_1 & k_1 \\ v_2 & k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = A_2(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) \in M(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$

$$= A_1(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) + A_2(\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}}) = A_1(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) + A_2(\Im(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}))$$

$$= (A_1 + A_2 \circ \Im)(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) . \blacklozenge$$

Önerme 26: $\mathbb{C}^n$, kompleks vektör uzayında keyfi $\mathbb{R}-lineer$ operatörün genel ifadesi şöyledir: $\Im(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) \to \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}}$ olmak üzere, $\forall F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$; $\exists A_1, A_2 \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ öyle ki $F = A_1 + A_2 \circ \Im$' dir.

İspat: $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşüm olsun. $z_j = x_j + iy_j$, $1 \le j \le n$,

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix} \to F(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix})$$

$$F(\begin{pmatrix} z_1 \\ ... \\ z_n \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ .... \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy_1 \\ ... \\ iy_n \end{pmatrix})$$

$$= F(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iy_1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ iy_2 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix} + ... + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ iy_n \end{pmatrix})$$

$$= F(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + ... + F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix})$$

$$+F(\begin{pmatrix} iy_1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} 0 \\ iy_2 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + ... + F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ iy_n \end{pmatrix})$$

$$= x_1 F(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + x_2 F(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + ... + x_n F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$+y_1 F(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + y_2 F(\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}) + ... + y_n F(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ i \end{pmatrix})$$

Burada,

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}=\alpha_{11},\ F\begin{pmatrix}0\\1\\\ldots\\0\end{pmatrix}=\alpha_{12},\ldots,\ F\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\1\end{pmatrix}=\alpha_{1n},\ F\begin{pmatrix}i\\0\\\ldots\\0\end{pmatrix}=\alpha_{21},\ F\begin{pmatrix}0\\i\\\ldots\\0\end{pmatrix}=\alpha_{22},\ldots,\ F\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\i\end{pmatrix}=\alpha_{2n}$$

ile gösterilirse,

$$=x_1\alpha_{11}+x_2\alpha_{12}+\ldots+x_n\alpha_{1n}+y_1\alpha_{21}+y_2\alpha_{22}+\ldots+y_n\alpha_{2n}$$

$$=\frac{z_1+\overline{z_1}}{2}\alpha_{11}+\frac{z_2+\overline{z_2}}{2}\alpha_{12}+\ldots+\frac{z_n+\overline{z_n}}{2}\alpha_{1n}$$

$$+\frac{z_1-\overline{z_1}}{2}\alpha_{21}+\frac{z_2-\overline{z_2}}{2}\alpha_{22}+\ldots+\frac{z_n-\overline{z_n}}{2}\alpha_{2n}$$

$$=(\frac{\alpha_{11}}{2}+\frac{\alpha_{21}}{2i})z_1+(\frac{\alpha_{12}}{2}+\frac{\alpha_{22}}{2i})z_2+\ldots+(\frac{\alpha_{1n}}{2}+\frac{\alpha_{2n}}{2i})z_n$$

$$+(\frac{\alpha_{11}}{2}-\frac{\alpha_{21}}{2i})\overline{z_1}+(\frac{\alpha_{12}}{2}-\frac{\alpha_{22}}{2i})\overline{z_2}+\ldots+(\frac{\alpha_{1n}}{2}-\frac{\alpha_{2n}}{2i})\overline{z_n}$$

$$\frac{\alpha_{11}}{2}+\frac{\alpha_{21}}{2i}=\begin{pmatrix}a_{11}\\\ldots\\a_{n1}\end{pmatrix},\ \frac{\alpha_{12}}{2}+\frac{\alpha_{22}}{2i}=\begin{pmatrix}a_{12}\\\ldots\\a_{n2}\end{pmatrix},\ldots,\ \frac{\alpha_{1n}}{2}+\frac{\alpha_{2n}}{2i}=\begin{pmatrix}a_{1n}\\\ldots\\a_{nn}\end{pmatrix},$$

$$\frac{\alpha_{11}}{2}-\frac{\alpha_{21}}{2i}=\begin{pmatrix}b_{11}\\\ldots\\b_{n1}\end{pmatrix},\ \frac{\alpha_{12}}{2}-\frac{\alpha_{22}}{2i}=\begin{pmatrix}b_{12}\\\ldots\\b_{n2}\end{pmatrix},\ldots,\ \frac{\alpha_{1n}}{2}-\frac{\alpha_{2n}}{2i}=\begin{pmatrix}b_{1n}\\\ldots\\b_{nn}\end{pmatrix}$$ alınırsa,

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\\\ldots\\a_{n1}\end{pmatrix}z_1+\begin{pmatrix}a_{12}\\\ldots\\a_{n2}\end{pmatrix}z_2+\ldots+\begin{pmatrix}a_{1n}\\\ldots\\a_{nn}\end{pmatrix}z_n+\begin{pmatrix}b_{11}\\\ldots\\b_{n1}\end{pmatrix}\overline{z_1}+\begin{pmatrix}b_{12}\\\ldots\\b_{n2}\end{pmatrix}\overline{z_2}+\ldots+\begin{pmatrix}b_{1n}\\\ldots\\b_{nn}\end{pmatrix}\overline{z_n}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}&\ldots&a_{1n}\\\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\\ldots\\z_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_{11}&\ldots&b_{1n}\\\ldots&\ldots&\ldots\\b_{n1}&\ldots&b_{nn}\end{pmatrix}\overline{\begin{pmatrix}z_1\\\ldots\\z_n\end{pmatrix}}$$

Bu ifadede,

$$\begin{pmatrix}a_{11}&\ldots&a_{1n}\\\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\\ldots\\z_n\end{pmatrix}=A_1\begin{pmatrix}z_1\\\ldots\\z_n\end{pmatrix}\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}),\ \begin{pmatrix}b_{11}&\ldots&b_{1n}\\\ldots&\ldots&\ldots\\b_{n1}&\ldots&b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\\ldots\\z_n\end{pmatrix}=A_2\begin{pmatrix}z_1\\\ldots\\z_n\end{pmatrix}\in M(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$$

şeklinde gösterilirse,

$$= A_1(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}) + A_2(\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}}) = A_1(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}) + A_2(\Im(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix})) = (A_1 + A_2 \circ \Im)(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}) . \blacklozenge$$

Önerme 27: $\mathbb{C}^n$ uzayındaki tüm $\mathbb{R}-lineer$ operatörlerin kümesi $+,\cdot,r_{\cdot}$ işlemlerine göre $\mathbb{R}-cebir$ oluşturur. Yani, $\left(M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right),+,\cdot,r_{\cdot}\right)$ bir $\mathbb{R}-cebirdir$.

İspat: $\forall F_1, F_2, F_3 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right)$ olsun.

$F_1 = A_1 + A_2 \circ \Im,\ A_1, A_2 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}\right)$

$F_2 = B_1 + B_2 \circ \Im,\ B_1, B_2 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}\right)$

$F_3 = C_1 + C_2 \circ \Im,\ C_1, C_2 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}\right)$

$F_1 + F_2 = A_1 + A_2 \circ \Im + B_1 + B_2 \circ \Im = A_1 + B_1 + A_2 \circ \Im + B_2 \circ \Im = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) \circ \Im$

$A_1 + B_1, A_2 + B_2 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}\right) \ \Rightarrow F_1 + F_2 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right)$

$\left(F_1 + F_2\right) + F_3 \overset{?}{=} F_1 + \left(F_2 + F_3\right)$

$$\begin{aligned}
\left(F_1 + F_2\right) + F_3 &= \left(A_1 + A_2 \circ \Im + B_1 + B_2 \circ \Im\right) + \left(C_1 + C_2 \circ \Im\right) \\
&= (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) \circ \Im + \left(C_1 + C_2 \circ \Im\right) \\
&= (A_1 + B_1) + C_1 + ((A_2 + B_2) + C_2) \circ \Im \\
&= A_1 + (B_1 + C_1) + (A_2 + (B_2 + C_2)) \circ \Im \\
&= A_1 + (B_1 + C_1) + A_2 \circ \Im + (B_2 + C_2) \circ \Im \\
&= (A_1 + A_2 \circ \Im) + (B_1 + B_2 \circ \Im + C_1 + C_2 \circ \Im) \\
&= F_1 + \left(F_2 + F_3\right)
\end{aligned}$$

$$0_{n\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{C}\right)$$

$0_{n\times n} = 0_{n\times n} + 0_{n\times n}\Im \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right)$

$F_1 + 0_{n\times n} = 0_{n\times n} + F_1 = F_1$

$F_1 + (-F_1) = 0_{n\times n}$ olacak şekilde $-F_1 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right)$ vardır.

$$-F_1 = -A_1 - A_2 \circ \Im, -A_1, -A_2 \in M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}\right)$$

$$F_1 + F_2 \overset{?}{=} F_2 + F_1$$

$$F_1 + F_2 = A_1 + A_2 \circ \Im + B_1 + B_2 \circ \Im = (A_1 + B_1) + (A_2 + B_2) \circ \Im$$

$$= (B_1 + A_1) + (B_2 + A_2) \circ \Im = B_1 + B_2 \circ \Im + A_1 + A_2 \circ \Im = F_2 + F_1$$

$(M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}\right), +)$ değişmeli gruptur.

$$F_1 \circ F_2 = (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 + B_2 \circ \Im) = A_1 \circ B_1 + A_1 \circ B_2 \circ \Im + A_2 \circ \Im \circ B_1 + A_2 \circ \Im \circ B_2 \circ \Im$$

$$\Im \circ B_1\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \Im\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}\right) = \Im\left(\begin{pmatrix} b_{11}z_1 + \dots + b_{1n}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}z_1 + \dots + b_{nn}z_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} b_{11}z_1 + \dots + b_{1n}z_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}z_1 + \dots + b_{nn}z_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}}\,\overline{z_1} + \dots + \overline{b_{1n}}\,\overline{z_n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \overline{b_{n1}}\,\overline{z_1} + \dots + \overline{b_{nn}}\,\overline{z_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{b_{11}} & \dots & \overline{b_{1n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \overline{b_{n1}} & \dots & \overline{b_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{z_1} \\ \dots \\ \overline{z_n} \end{pmatrix}$$

$$= \overline{\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}}\,\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}} = \overline{B_1}\left(\Im\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}\right)\right)$$

$$= A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} \circ \Im \circ \Im + A_1 \circ B_2 \circ \Im + A_2 \circ \overline{B_1} \circ \Im$$

$$\Im\left(\Im\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}\right)\right) = \Im\left(\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}}\right) = \overline{\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow \Im \circ \Im = I$$

$$= A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \Im$$

$$\Rightarrow F_1 \circ F_2 \in M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}\right)$$

$$(F_1 \circ F_2) \circ F_3 \overset{?}{=} F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$$

$$(F_1 \circ F_2) \circ F_3 = ((A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 + B_2 \circ \Im)) \circ (C_1 + C_2 \circ \Im)$$

$$= (A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \Im) \circ (C_1 + C_2 \circ \Im)$$

$$= (A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2}) \circ C_1 + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \Im \circ C_1$$

$$+ (A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2}) \circ C_2 \circ \Im + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \Im \circ C_2 \circ \Im$$

$$= (A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2}) \circ C_1 + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \overline{C_2}$$

$$+(A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2}) \circ C_2 \circ \Im + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \overline{C_1} \circ \Im$$

$$= (A_1 \circ B_1 \circ C_1 + A_2 \circ \overline{B_2} \circ C_1 + A_1 \circ B_2 \circ \overline{C_2} + A_2 \circ \overline{B_1} \circ \overline{C_2}$$

$$+A_1 \circ B_1 \circ C_2 \circ \Im + A_2 \circ \overline{B_2} \circ C_2 \circ \Im + A_1 \circ B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im + A_2 \circ \overline{B_1} \circ \overline{C_1} \circ \Im$$

$$= A_1 \circ (B_1 \circ C_1 + B_2 \circ \overline{C_2}) + A_2 \circ (\overline{B_2} \circ C_1 + \overline{B_1} \circ \overline{C_2})$$

$$+A_1 \circ (B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im) + A_2 \circ (\overline{B_2} \circ C_2 \circ \Im + \overline{B_1} \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$= A_1 \circ (B_1 \circ C_1 + B_2 \circ \overline{C_2} + B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$+A_2 \circ (\overline{B_2} \circ C_1 + \overline{B_1} \circ \overline{C_2} + \overline{B_2} \circ C_2 \circ \Im + \overline{B_1} \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$= A_1 \circ (B_1 \circ C_1 + B_2 \circ \overline{C_2} + B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$+A_2 \circ (\overline{B_2} \circ C_1 \circ \Im \circ \Im + \overline{B_1} \circ \overline{C_2} \circ \Im \circ \Im + \overline{B_2} \circ C_2 \circ \Im + \overline{B_1} \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$= A_1 \circ (B_1 \circ C_1 + B_2 \circ \overline{C_2} + B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$+A_2 \circ (\Im \circ B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im + \Im \circ B_1 \circ C_2 \circ \Im + \Im \circ B_2 \circ \overline{C_2} + \Im \circ B_1 \circ C_1)$$

$$= A_1 \circ (B_1 \circ C_1 + B_2 \circ \overline{C_2} + B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$+A_2 \circ \Im \circ (B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im + B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{C_2} + B_1 \circ C_1)$$

$$= (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 \circ C_1 + B_2 \circ \overline{C_2} + B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$= (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 \circ C_1 + B_2 \circ \Im \circ C_2 \circ \Im + B_1 \circ C_2 \circ \Im + B_2 \circ \Im \circ C_1)$$

$$= (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ ((B_1 + B_2 \circ \Im) \circ C_1 + (B_1 + B_2 \circ \Im) \circ C_2 \circ \Im)$$

$$= (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ ((B_1 + B_2 \circ \Im) \circ (C_1 + C_2 \circ \Im))$$

$$= F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$$

$$F_1 \circ (F_2 + F_3) \stackrel{?}{=} F_1 \circ F_2 + F_1 \circ F_3$$

$$F_1 \circ (F_2 + F_3) = (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ ((B_1 + B_2 \circ \Im) + (C_1 + C_2 \circ \Im))$$

$$= (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 + B_2 \circ \Im + C_1 + C_2 \circ \Im)$$

$$= A_1 \circ B_1 + A_1 \circ C_1 + A_2 \circ \overline{B_2} + A_2 \circ \overline{C_2} + A_1 \circ B_2 \circ \Im$$

$$+A_1 \circ C_2 \circ \Im + A_2 \circ \overline{B_1} \circ \Im + A_2 \overline{C_1} \circ \Im$$

$$= (A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} + A_1 \circ B_2 \circ \Im + A_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im)$$

$$+(A_1 \circ C_1 + A_2 \circ \overline{C_2} + A_1 \circ C_2 \circ \Im + A_2 \circ \overline{C_1} \circ \Im$$

$$= (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 + B_2 \circ \Im) + (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (C_1 + C_2 \circ \Im)$$

$$= F_1 \circ F_2 + F_1 \circ F_3$$

$$(F_2 + F_3) \circ F_1 \overset{?}{=} F_2 \circ F_1 + F_3 \circ F_1$$

$$(F_2 + F_3) \circ F_1 = (B_1 + B_2 \circ \Im + C_1 + C_2 \circ \Im) \circ (A_1 + A_2 \circ \Im)$$

$$= ((B_1 + C_1) + (B_2 + C_2) \circ \Im) \circ (A_1 + A_2 \circ \Im)$$

$$= (B_1 + C_1) \circ A_1 + (B_2 + C_2) \circ \overline{A_2} + (B_1 + C_1) \circ A_2 \circ \Im + (B_2 + C_2) \circ \overline{A_1} \circ \Im$$

$$= B_1 \circ A_1 + C_1 \circ A_1 + B_2 \circ \overline{A_2} + C_2 \circ \overline{A_2} + B_1 \circ A_2 \circ \Im$$

$$+ C_1 \circ A_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{A_1} \circ \Im + C_2 \circ \overline{A_1} \circ \Im$$

$$= (B_1 \circ A_1 + B_2 \circ \overline{A_2} + B_1 \circ A_2 \circ \Im + B_2 \circ \overline{A_1} \circ \Im) + (C_1 \circ A_1 + C_2 \circ \overline{A_2}$$

$$+ C_1 \circ A_2 \circ \Im + C_2 \circ \overline{A_1} \circ \Im)$$

$$= (B_1 + B_2 \circ \Im) \circ (A_1 + A_2 \circ \Im) + (C_1 + C_2 \circ \Im) \circ (A_1 + A_2 \circ \Im)$$

$$= F_2 \circ F_1 + F_3 \circ F_1$$

$\forall c \in \mathbb{R}$ ve $\forall z \in \mathbb{C}^n$,

$$((cF_1) \circ F_2)(z) = (cF_1)(F_2(z)) = c(F_1(F_2(z))) = c((F_1 \circ F_2)(z))$$

$$(F_1(cF_2))(z) = F_1((cF_2)(z)) = F_1(c(F_2(z))) = c(F_1(F_2(z))) = c((F_1 \circ F_2)(z))$$

$$\Rightarrow (cF_1) \circ F_2 = F_1(cF_2) = c(F_1 \circ F_2)$$

$$I_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} + 0\Im \in M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}\right)$$

$$(F_1 \circ I_{n\times n})(z) = F_1(I_{n\times n}(z)) = F_1(z)$$

$$(I_{n\times n} \circ F_1)(z) = I_{n\times n}(F_1(z)) = F_1(z)$$

$$\Rightarrow F_1 \circ I_{n\times n} = I_{n\times n} \circ F_1 = F_1$$

$\Rightarrow \left(M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}\right), +, \cdot, r_{\cdot}\right)$ bir $\mathbb{R} - cebirdir$.◆

Önerme 28: $H_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$

$$(a + ib) \to \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan H_1 dönüşümü $\mathbb{R} - izomorfizmadır$.

İspat: $\forall a+ib,\ c+id \in \mathbb{C}$;

$$H_1(a+ib) = H_1(c+id) \ \Rightarrow a+ib \overset{?}{=} c+id$$

$$H_1(a+ib) = H_1(c+id)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow a = c$ ve $b = d$ ' dir.

$\Rightarrow a+ib = c+id$

$\Rightarrow H_1 - birebirdir.$

$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2;\ H_1(a+ib) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ olacak şekilde $a+ib \in \mathbb{C}$ vardır.

$\Rightarrow H_1 - \ddot{o}rtendir.$

$$H_1((a+ib)+(c+id)) = H_1((a+c)+i(b+d)) = \begin{pmatrix} a+c \\ b+d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = H_1(a+ib) + H_1(c+id)$$

$\Rightarrow H_1((a+ib)+(c+id)) = H_1(a+ib) + H_1(c+id)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

$$H_1(\lambda(a+ib)) = H_1(\lambda a + i\lambda b) = \begin{pmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda H_1(a+ib)$$

$\Rightarrow H_1(\lambda(a+ib)) = \lambda H_1(a+ib)$

$\Rightarrow H_1,\ \mathbb{R} - lineerdir.$

$\Rightarrow H_1,\ \mathbb{R} - izomorfizmad\imath r.$ ◆

Önerme 29: $H_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a \\ c \\ b \\ d \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanan H_2 dönüşümü $\mathbb{R} - izomorfizmad\imath r.$

İspat: $\forall \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2;$

$$H_2(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix}) = H_2(\begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}) \text{ ise } \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}$$

$$H_2(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix}) = H_2(\begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 = a_2,\ c_1 = c_2,\ b_1 = b_2,\ d_1 = d_2$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_2 - birebirdir.$

$\forall \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4;\ H_2(\begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} a + ib \\ c + id \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ vardır.

$\Rightarrow H_2 - \ddot{o}rtendir.$

$$H_2(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}) = H_2(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 \\ c_1 + id_1 + c_2 + id_2 \end{pmatrix}) = H_2(\begin{pmatrix} (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ (c_1 + c_2) + i(d_1 + d_2) \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ c_1 + c_2 \\ b_1 + b_2 \\ d_1 + d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \\ b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$$= H_2(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix}) + H_2(\begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix})$$

$$\Rightarrow H_2(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}) = H_2(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix}) + H_2(\begin{pmatrix} a_2 + ib_2 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix})$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R};$

$$H_2(\lambda \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix}) = H_2(\begin{pmatrix} \lambda(a_1 + ib_1) \\ \lambda(c_1 + id_1) \end{pmatrix}) = H_2(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + i\lambda b_1 \\ \lambda c_1 + i\lambda d_1 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda c_1 \\ \lambda b_1 \\ \lambda d_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \\ b_1 \\ d_{1\partial} \end{pmatrix} = \lambda H_2 (\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix})$$

$$\Rightarrow H_2 (\lambda \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix}) = \lambda H_2 (\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ c_1 + id_1 \end{pmatrix})$$

$H_2,\ \mathbb{R} - lineerdir.$

$H_2,\ \mathbb{R} - izomorfizmadır.$ ◆

Önerme 30: $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ .... \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \\ b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$$

dönüşümü $\mathbb{R} - izomorfizmadır.$

İspat: $\forall \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ .... \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ .... \\ c_n + id_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n;$

$$H_n (\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ .... \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}) = H_n (\begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ .... \\ c_n + id_n \end{pmatrix}) \text{ ise } \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ .... \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ .... \\ c_n + id_n \end{pmatrix}$$

$$H_n (\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ .... \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}) = H_n (\begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ .... \\ c_n + id_n \end{pmatrix}) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ ... \\ a_n \\ b_1 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ ... \\ c_n \\ d_1 \\ ... \\ d_n \end{pmatrix}, \text{ dir.}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ .... \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ .... \\ c_n + id_n \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow H_n - birebirdir.$

$$\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n};\ H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ olacak şekilde } \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \text{ vardır.}$$

$\Rightarrow H_n - örtendir.$

$$H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_n + id_n \end{pmatrix}) = H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 + c_1 + id_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n + c_n + id_n \end{pmatrix})$$

$$= H_n(\begin{pmatrix} (a_1 + c_1) + i(b_1 + d_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_n + c_n) + i(b_n + d_n) \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 \\ \dots \\ a_n + c_n \\ b_1 + d_1 \\ \dots \\ b_n + d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$$= H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}) + H_n(\begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ \dots\dots\dots \\ c_n + id_n \end{pmatrix})$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R};$

$$H_n(\lambda \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}) = H_n(\begin{pmatrix} \lambda(a_1 + ib_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda(a_n + ib_n) \end{pmatrix})$$

$$= H_n(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + i\lambda b_1) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda a_n + i\lambda b_n) \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \\ \lambda b_1 \\ \dots \\ \lambda b_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$= \lambda H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix})$$

H_n, $\mathbb{R}-lineerdir.$

H_n, $\mathbb{R}-izomorfizmadır.$ ◆

Önerme 31: $H_n^{-1}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}^n$

$$\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} a_1+ib_1\\ \dots\dots\dots\\ a_n+ib_n \end{pmatrix}$$

dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizmadır.$

İspat: Önerme 30' dan $H_n:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü birebir, örten olduğundan $H_n^{-1}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{C}^n$ dönüşümü vardır.

$$\forall\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} c_1\\ \dots\\ c_n\\ d_1\\ \dots\\ d_n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2n};$$

$$H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n \end{pmatrix})=H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1\\ \dots\\ c_n\\ d_1\\ \dots\\ d_n \end{pmatrix})\ \text{ise}\ \begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n \end{pmatrix}\stackrel{?}{=}\begin{pmatrix} c_1\\ \dots\\ c_n\\ d_1\\ \dots\\ d_n \end{pmatrix}$$

$$H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n \end{pmatrix})=H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1\\ \dots\\ c_n\\ d_1\\ \dots\\ d_n \end{pmatrix})$$ eşitliğine H_n ile soldan bileşke işlemi uygularsak,

$$H_n(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) = H_n(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})) \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}$$

$H_n^{-1} - birebirdir.$

$\forall \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n;\ H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}$ olacak şekilde $\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ var mıdır?

$H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}$ eşitliğine soldan H_n ile bileşke işlemi uygularsak,

$$H_n(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) = H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix})$$

$\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix})$ elde edilir.

H_n örten olduğundan $\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$' dir.

$\Rightarrow H_n^{-1} - \textit{örtendir}.$

$$H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}) = H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 + c_1 \\ \dots \\ a_n + c_n \\ b_1 + d_1 \\ \dots \\ b_n + d_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_1 + c_1 + i(b_1 + d_1) \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + c_n + i(b_n + d_n) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 + c_1 + id_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n + c_n + id_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ \dots\dots \\ c_n + id_n \end{pmatrix}$$

$$= H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) + H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R};$

$$H_n^{-1}(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) = H_n^{-1}(\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \\ \lambda b_1 \\ \dots \\ \lambda b_n \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + i\lambda b_1 \\ \dots\dots\dots \\ \lambda a_n + i\lambda b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a_1 + ib_1) \\ \dots\dots\dots \\ \lambda(a_n + ib_n) \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} = \lambda H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})$$

$H_n^{-1}, \ \mathbb{R}-lineerdir.$

$H_n^{-1}, \ \mathbb{R}-izomorfizmadır.$ ◆

Önerme 32: $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$

$$\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

dönüşümünü alalım. Buna göre,

$F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, \ \mathbb{R}-lineerdir \ \Leftrightarrow \ H_n \circ F \circ H_n^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}, \ \mathbb{R}-lineerdir.$

İspat:

$(\Rightarrow)$: $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü $\mathbb{R}-lineer$ olsun.

$$\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n};$$

$$(H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}) \stackrel{?}{=} (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) + (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})$$

$$(H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}) = (H_n \circ F)(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}))$$

Önerme 31’ den H_n^{-1}, $\mathbb{R}-lineer$ olduğundan,

$$= (H_n \circ F)(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) + H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})) = H_n(F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) + H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})))$$

F, $\mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$= H_n(F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) + F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})))$$

Önerme 30’ dan H_n, $\mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$= H_n(F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}))) + H_n(F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})))$$

$$= (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) + (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})$$ ’ dir.

$$\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n},\ \forall \lambda \in \mathbb{R};\ (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) \overset{?}{=} \lambda (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})$$

$$(H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) = (H_n \circ F)(H_n^{-1}(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}))$$

Önerme 31' den H_n^{-1}, $\mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$= (H_n \circ F)(\lambda H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) = H_n(F(\lambda H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})))$$

F, $\mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$= H_n(\lambda F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})))$$

Önerme 30' dan H_n, $\mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$= \lambda H_n(F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}))) = \lambda (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})\text{' dir.}$$

$\Rightarrow H_n \circ F \circ H_n^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n},\ \mathbb{R}-lineerdir.$

$(\Leftarrow)$:

$H_n \circ F \circ H_n^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n},\ \mathbb{R}-lineer$ olsun.

$$\forall \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n};$$

$$(H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}) = (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) + (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})\text{' dir.}$$

Yukarıdaki eşitliğe soldan H_n^{-1} uygulandığında;

$$H_n^{-1}((H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})) = H_n^{-1}((H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) + (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}))$$

$$H_n^{-1}(H_n((F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}))) = H_n^{-1}(H_n((F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) + H_n((F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})))$$

Önerme 31' den $H_n^{-1},\ \mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$(F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}) = H_n^{-1}(H_n((F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}))) + H_n^{-1}(H_n((F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})))$$

$$F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix})) = F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) + F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}))$$

$$F(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_n + id_n \end{pmatrix}) = F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) + F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \\ d_1 \\ \dots \\ d_n \end{pmatrix}))$$

$$F(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_n + id_n \end{pmatrix}) = F(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}) + F(\begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_n + id_n \end{pmatrix}) \ \dots \ (*) \text{ elde edilir.}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

$$(H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) = \lambda (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}) \text{ ' dir.}$$

Yukarıdaki eşitliğe soldan H_n^{-1} uygularsak;

$$H_n^{-1}((H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix})) = H_n^{-1}(\lambda (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \\ b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}))$$

Önerme 31' den H_n^{-1}, $\mathbb{R} - lineer$ olduğundan;

$$H_n^{-1}(H_n((F\circ H_n^{-1})(\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}))) = \lambda(H_n^{-1}(H_n((F\circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}))))$$

$$(F\circ H_n^{-1})(\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}) = \lambda((F\circ H_n^{-1})(\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}))\ \text{ ve }\ F(H_n^{-1}(\lambda\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix})) = \lambda(F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix})))$$

Önerme 31' den H_n^{-1}, $\mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$F(\lambda H_n^{-1}(\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix})) = \lambda(F(H_n^{-1}(\begin{pmatrix}a_1\\ \dots\\ a_n\\ b_1\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}))) \quad \Rightarrow F(\lambda\begin{pmatrix}a_1+ib_1\\ \dots\\ a_n+ib_n\end{pmatrix}) = \lambda\cdot F(\begin{pmatrix}a_1+ib_1\\ \dots\\ a_n+ib_n\end{pmatrix}) \ \dots \ (**) \ \text{ elde}$$

edilir. $(*)$ ve $(**)$' dan $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü $\mathbb{R}-lineerdir$. ◆

Teorem 19: $W: M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right) \to M\left(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R}\right)$

$$F \to W\left(F\right) = H_n\circ F\circ H_n^{-1}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre W dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizmadır$.

İspat: $\forall F_1,\ F_2 \in M\left(\mathbb{C}^n,\mathbb{R}\right)$;

$$W\left(F_1\right) = W\left(F_2\right) \Rightarrow F_1 \overset{?}{=} F_2$$

$$W\left(F_1\right) = W\left(F_2\right) \Rightarrow H_n\circ F_1\circ H_n^{-1} = H_n\circ F_2\circ H_n^{-1}$$

Eşitliğin soldan H_n^{-1}, sağdan H_n ile bileşkesini alırsak,

$$H_n^{-1}\circ(H_n\circ F_1\circ H_n^{-1})\circ H_n = H_n^{-1}\circ(H_n\circ F_2\circ H_n^{-1})\circ H_n$$

$$(H_n^{-1}\circ H_n)\circ F_1\circ(H_n^{-1}\circ H_n) = (H_n^{-1}\circ H_n)\circ F_2\circ(H_n^{-1}\circ H_n)$$

$$F_1 = F_2$$

$\Rightarrow W - birebirdir.$

$W(F) \in M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$ olacak şekilde $\exists F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ var mıdır?

$W(F) = H_n \circ F \circ H_n^{-1}$ ifadesinde eşitliğin soldan H_n^{-1}, sağdan H_n ile bileşkesini alırsak,

$H_n^{-1} \circ W(F) \circ H_n = H_n^{-1} \circ (H_n \circ F \circ H_n^{-1}) \circ H_n$

$H_n^{-1} \circ W(F) \circ H_n = (H_n^{-1} \circ H_n) \circ F \circ (H_n^{-1} \circ H_n)$

$H_n^{-1} \circ W(F) \circ H_n = F$ elde edilir.

$F \overset{?}{\in} M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$

$\forall \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n;$

$$(H_n^{-1} \circ W(F) \circ H_n)(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}) = (H_n^{-1} \circ W(F))(H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix})), H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + i \cdot b_n \end{pmatrix}) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$$= H_n^{-1}(W(F)(H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix})))$$

$$, W(F)(H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix})) \in \mathbb{R}^{2n}$$

$\Rightarrow H_n^{-1}(W(F)(H_n(\begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_n + ib_n \end{pmatrix}))) \in \mathbb{C}^n$ ’ dir.

Buradan, $H_n^{-1} \circ W(F) \circ H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ olduğu görülür.

$\Rightarrow F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ ’ dir.

$\Rightarrow W - örtendir.$

$\Rightarrow W - birebir$ ve $örtendir$.

$W(F_1 + F_2) \overset{?}{=} W(F_1) + W(F_2)$

$W(F_1 + F_2) = H_n \circ (F_1 + F_2) \circ H_n^{-1} = (H_n(F_1) + H_n(F_2)) \circ H_n^{-1}$

$$= H_n \circ (F_1) \circ H_n^{-1} + H_n \circ (F_2) \circ H_n^{-1} = W(F_1) + W(F_2)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

$W(\lambda F_1) \overset{?}{=} \lambda W(F_1)$

$W(\lambda F_1) = H_n \circ (\lambda F_1) \circ H_n^{-1}$

Önerme 31' den $H_n^{-1}, \mathbb{R}-lineer$ ve önerme 30' dan $H_n, \mathbb{R}-lineer$ olduğundan;

$$= \lambda(H_n \circ F_1 \circ H_n^{-1}) = \lambda W(F_1) \text{' dir.}$$

$W,\ \mathbb{R}-lineerdir.$

$W,\ \mathbb{R}-izomorfizmadır.$ ◆

Teorem 20: $W : M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}) \to M(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R})$

$$F \to W(F) = H_n \circ F \circ H_n^{-1}$$

dönüşümü $\mathbb{R}-$cebir izomorfizmadır.

İspat: Teorem 19' dan $W,\ \mathbb{R}-lineerdir.$

$\forall F_1, F_2 \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

i) $W(F_1 + F_2) = W(F_1) + W(F_2)$

ii) $W(\lambda F_1) = \lambda W(F_1)$' dir.

$W(F_1 \circ F_2) \overset{?}{=} W(F_1) \circ W(F_2)$

$W(F_1 \circ F_2) = H_n \circ F_1 \circ F_2 \circ H_n^{-1} = H_n \circ F_1 \circ H_n^{-1} \circ H_n \circ F_2 \circ H_n^{-1}$

$\Rightarrow W(F_1 \circ F_2) = W(F_1) \circ W(F_2)$

$\Rightarrow W$ dönüşümü $\mathbb{R}-$cebir izomorfizmadır. ◆

Önerme 33: $H_1 \circ M(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \circ H_1^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$' dir.

İspat: $A_1 \in M(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ alalım.

$A_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$z \to A_1(z)$

$A_1, \mathbb{C}-lineer$ olduğundan $A_1(z) = zA_1(1),\ A_1(1) \in \mathbb{C}$' dir.

$z = x + iy$ ve $A_1(1) = a + ib$ alalım.

$A_1(x + iy) = (a + ib)(x + iy) = (ax - by) + i(bx + ay)$

Önerme 28' den $H_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R} - izomorfizmasını$ kullanarak,

$$H_1(A_1(x + iy)) = \begin{pmatrix} ax - by \\ bx + ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$H_1(A_1((H^{-1} \circ H_1)(x + iy)) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$H_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$ olduğundan,

$$x + iy \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$(H_1 \circ A_1 \circ H_1^{-1})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ elde edilir.

$\Rightarrow H_1 \circ M\left(\mathbb{C}, \mathbb{C}\right) \circ H_1^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}\right\}$ elde edilir. ◆

Önerme 34: $H_2 \circ M\left(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}\right) \circ H_2^{-1} = \left\{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in M\left(2 \times 2, \mathbb{R}\right)\right\}$ ' dir.

İspat: $A_2 \in M\left(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}\right)$ alalım.

$A_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to A_2(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix})$$

$A_2, \mathbb{C} - lineer$ olduğundan,

$$A_2(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}) = A_2(\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix}) = A_2(\begin{pmatrix} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}) + A_2(\begin{pmatrix} 0 \\ z_2 \end{pmatrix})$$

$= z_1 A_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) + z_2 A_2(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$, $A_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}), A_2(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \in \mathbb{C}^2$ ' dir.

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $A_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} \\ a_{21} + ib_{21} \end{pmatrix}$, $A_2(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a_{12} + ib_{12} \\ a_{22} + ib_{22} \end{pmatrix}$ ile gösterirsek,

$$= (x_1 + iy_1)\begin{pmatrix} a_{11} + ib_{11} \\ a_{21} + ib_{21} \end{pmatrix} + (x_2 + iy_2)\begin{pmatrix} a_{12} + ib_{12} \\ a_{22} + ib_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(a_{11}+ib_{11})(x_1+iy_1)\\(a_{21}+ib_{21})(x_1+iy_1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}(a_{12}+ib_{12})(x_2+iy_2)\\(a_{22}+ib_{22})(x_2+iy_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(a_{11}x_1-b_{11}y_1+i(b_{11}x_1+a_{11}y_1)\\(a_{21}x_1-b_{21}y_1+i(b_{21}x_1+a_{21}y_1)\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}(a_{12}x_2-b_{12}y_2+i(b_{12}x_2+a_{12}y_2)\\(a_2x_2-b_{22}y_2+i(b_{22}x_2+a_{22}y_2)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(a_{11}x_1-b_{11}y_1+a_{12}x_2-b_{12}y_2+i(b_{11}x_1+a_{11}y_1+b_{12}x_2+a_{12}y_2)\\(a_{21}x_1-b_{21}y_1+a_2x_2-b_{22}y_2+i(b_{21}x_1+a_{21}y_1+b_{22}x_2+a_{22}y_2)\end{pmatrix}$$ elde edilir.

Önerme 29' dan $H_2:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-$*izomorfizması* kullanılarak,

$$H_2(A_2(\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}))=\begin{pmatrix}a_{11}x_1-b_{11}y_1+a_{12}x_2-b_{12}y_2\\a_{21}x_1-b_{21}y_1+a_2x_2-b_{22}y_2\\b_{11}x_1+a_{11}y_1+b_{12}x_2+a_{12}y_2\\b_{21}x_1+a_{21}y_1+b_{22}x_2+a_{22}y_2\end{pmatrix}$$

$H_2:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}^4$ dönüşümünü kullanarak,

$$\begin{pmatrix}x_1+iy_1\\x_2+iy_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$H_2(A_2((H_2^{-1}\circ H_2)(\begin{pmatrix}x_1+iy_1\\x_2+iy_2\end{pmatrix})))=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&-b_{11}&-b_{12}\\a_{21}&a_{22}&-b_{21}&-b_{22}\\b_{11}&b_{12}&a_{11}&a_{12}\\b_{21}&b_{22}&a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

$$(H_2\circ A_2\circ H_2^{-1})(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&-b_{11}&-b_{12}\\a_{21}&a_{22}&-b_{21}&-b_{22}\\b_{11}&b_{12}&a_{11}&a_{12}\\b_{21}&b_{22}&a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}$$

Burada,

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&{}_{22}\end{pmatrix}=a\in M\left(2\times 2,\mathbb{R}\right),\ \begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=b\in M\left(2\times 2,\mathbb{R}\right),\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x\in\mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

ile gösterilirse,

$$(H_2\circ A_2\circ H_2^{-1})(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a&-b\\b&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$ elde edilir.

$$\Rightarrow H_2 \circ M\left(\mathbb{C}^2,\mathbb{C}\right) \circ H_2^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a,b \in M\left(2\times 2,\mathbb{R}\right) \right\}\text{’ dir.}$$

$\Im^{'}$ ile $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisini gösterelim.

Teorem 21: $\forall F^{'} \in M\left(2\times 2,\mathbb{R}\right)$ için $F^{'} = A_1^{'} + A_2^{'} \circ \Im^{'}$ olacak şekilde $A_1^{'}, A_2^{'} \in H_1 \circ M\left(\mathbb{C},\mathbb{C}\right) \circ H_1^{-1}$’ ler mevcut ve tek türlüdür.

İspat: $\forall F^{'} \in M\left(2\times 2,\mathbb{R}\right)$ ’ yi alalım. Teorem 19’ dan $F = H_1^{-1} \circ F^{'} \circ H_1$ olacak şekilde $F \in M\left(\mathbb{C},\mathbb{R}\right)$ var ve tektir.

Önerme 24’ den $F \in M\left(\mathbb{C},\mathbb{R}\right)$ olacak şekilde bir tek $A_1, A_2 \in M\left(\mathbb{C},\mathbb{C}\right)$ vardır. Buradan,

$F^{'} = H_1 \circ F \circ H_1^{-1} = H_1 \circ (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ H_1^{-1}$ yazılabilir.

Önerme 28’ den H_1 dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan,

$= (H_1 \circ A_1 + H_1 \circ A_2 \circ \Im) \circ H_1^{-1}$

Önerme 31’ de $n=1$ için H_1^{-1} dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan,

$= H_1 \circ A_1 \circ H_1^{-1} + H_1 \circ A_2 \circ \Im \circ H_1^{-1} = H_1 \circ A_1 \circ H_1^{-1} + H_1 \circ A_2 \circ H_1^{-1} \circ H_1 \circ \Im \circ H_1^{-1}$

elde edilir.

$H_1 \circ A_1 \circ H_1^{-1} = A_1^{'}$, $H_1 \circ A_2 \circ H_1^{-1} = A_2^{'}$, $H_1 \circ \Im \circ H_1^{-1} = \Im^{'}$ ile gösterilirse,

$F^{'} = A_1^{'} + A_2^{'} \circ \Im^{'}$ tek türlüdür. ◆

Sonuç 11: $\forall F \in M\left(\mathbb{C},\mathbb{C}\right)$ ve $F^{'} \in H_1 \circ M\left(\mathbb{C},\mathbb{C}\right) \circ H_1^{-1}$ için ,

i) $\left|\det F\right|^2 = \det F^{'}$

ii) $\det F^{'} \geq 0$ ’ dir.

İspat: (i) $\forall F \in M\left(\mathbb{C},\mathbb{C}\right)$ alalım. $F:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \to F(z)$$

$F, \mathbb{C}-lineer$ olduğundan , $F(z) = F(1)z$, $F(1) \in \mathbb{C}$ ’ dir. $F(1) = a+ib$ ile gösterirsek,

$\det F = \det(a+ib) = a+ib$

$\left|\det F\right|^2 = (a+ib)\overline{(a+ib)} = a^2 + b^2$ ... $(*)$ elde edilir.

$F^{'} \in H_1 \circ M(\mathbb{C},\mathbb{C}) \circ H_1^{-1}$ için önerme 33' den $F^{'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$' dır.

$\det F^{'} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 ...(**)$

$(*)$ ve $(**)$' dan $|\det F|^2 = \det F^{'}$ elde edilir.

(ii) $\det F^{'} = |\det F|^2$ olduğundan $\det F^{'} \geq 0$' dır. ◆

Önerme 35: $\forall F^{'} \in H_1 \circ M(\mathbb{C},\mathbb{R}) \circ H_1^{-1}$;

$F^{'} = A_1^{'} + A_2^{'} \circ \Im^{'}$, $A_1^{'}, A_2^{'} \in H_1 \circ M(\mathbb{C},\mathbb{C}) \circ H_1^{-1}$ olsun.

Bu takdirde,

$\det F^{'} = \det A_1^{'} - \det A_2^{'}$' dir.

İspat: Teorem 19' dan $F^{'} = H_1 \circ F \circ H_1^{'}$ olacak şekilde bir tek $F \in M(\mathbb{C},\mathbb{R})$ vardır.

Önerme 33' e göre $A_1^{'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, $A_2^{'} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$' dir.

$\Rightarrow F^{'} = A_1^{'} + A_2^{'} \circ \Im^{'} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & d-b \\ d+b & a-c \end{pmatrix}$

Buradan, $\det F^{'} = \begin{vmatrix} a+c & d-b \\ d+b & a-c \end{vmatrix} = a^2 - c^2 - d^2 + b^2 = a^2 + b^2 - (c^2 + d^2)$

$\det A_1^{'} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2$, $\det A_2^{'} = \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix} = c^2 + d^2$

Sonuç olarak $\det F^{'} = \det A_1^{'} - \det A_2^{'}$ elde edilir. ◆

Teorem 22: $\forall F \in M(\mathbb{C},\mathbb{R})$; $F = B_1 + B_2 \circ \Im$, $B_1, B_2 \in M(\mathbb{C},\mathbb{C})$ olsun. Bu durumda F' nin tersi mevcuttur $\Leftrightarrow$ $|B_1|^2 - |B_2|^2 \neq 0$' dır.

İspat:

$(\Rightarrow)$:Farz edelim F^{-1} mevcut olsun.

F^{-1} mevcut olduğu için tek türlüdür. $F = B_1 + B_2 \circ \Im$, $B_1, B_2 \in M(\mathbb{C},\mathbb{C})$ olsun.

$F^{-1} = A_1 + A_2 \circ \Im$ olacak şekilde $A_1, A_2 \in M(\mathbb{C},\mathbb{C})$ vardır.

$F \circ F^{-1} = F^{-1} \circ F = 1 + 0\Im$

$F^{-1} \circ F = (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 + B_2 \circ \Im) = A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \Im = 1 + 0\Im$

$\begin{matrix} A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} = 1 \\ A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1} = 0 \end{matrix}$ denklem sisteminin A_1, A_2 bilinmeyenlerine göre,

$\begin{vmatrix} B_1 & \overline{B_2} \\ B_2 & \overline{B_1} \end{vmatrix} = |B_1|^2 - |B_2|^2$ ' dir.

$|B_1|^2 - |B_2|^2 = 0$ olsun.

$|B_1|^2 - |B_2|^2 = 0$ olduğundan $rank\begin{pmatrix} B_1 & \overline{B_2} \\ B_2 & \overline{B_1} \end{pmatrix} = 1$ ' dir.

$rank\begin{pmatrix} B_1 & \overline{B_2} \\ B_2 & \overline{B_1} \end{pmatrix} = 1$ ve iki bilinmeyen olduğundan sonsuz çözüm vardır.

Dolayısı ile sonsuz çözüm olması, F^{-1} ' in tekliği ile çelişir. Çelişki $|B_1|^2 - |B_2|^2 = 0$ kabulünden kaynaklandı.

Sonuç olarak $|B_1|^2 - |B_2|^2 \neq 0$ ' dır.

$(\Leftarrow)$: $|B_1|^2 - |B_2|^2 \neq 0$ olsun.

$F^{-1} = A_1 + A_2 \circ \Im$ ve $F^{-1} \circ F = 1 + 0\Im$ için,

$F^{-1} \circ F = (A_1 + A_2 \circ \Im) \circ (B_1 + B_2 \circ \Im) = A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} + (A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1}) \circ \Im = 1 + 0\Im$

$\begin{matrix} A_1 \circ B_1 + A_2 \circ \overline{B_2} = 1 \\ A_1 \circ B_2 + A_2 \circ \overline{B_1} = 0 \end{matrix}$ elde edilir.Denklem sisteminin A_1, A_2 bilinmeyenlerine göre,

$\begin{vmatrix} B_1 & \overline{B_2} \\ B_2 & \overline{B_1} \end{vmatrix} = |B_1|^2 - |B_2|^2$ elde edilir.

$|B_1|^2 - |B_2|^2 \neq 0$ olduğundan ,

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \overline{B_2} \\ 0 & \overline{B_1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & \overline{B_2} \\ B_2 & \overline{B_1} \end{vmatrix}} = \frac{\overline{B_1}}{|B_1|^2 - |B_2|^2}, \quad A_2 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & 1 \\ B_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} B_1 & \overline{B_2} \\ B_2 & \overline{B_1} \end{vmatrix}} = \frac{-B_2}{|B_1|^2 - |B_2|^2}$$

$$F^{-1} = \frac{\overline{B_1}}{|B_1|^2 - |B_2|^2} + \frac{-B_2}{|B_1|^2 - |B_2|^2} \circ \Im$$

$$F \circ F^{-1} = (B_1 + B_2 \circ \Im) \circ \left(\frac{\overline{B_1}}{|B_1|^2 - |B_2|^2} + \frac{-B_2}{|B_1|^2 - |B_2|^2} \circ \Im \right)$$

$$= \frac{B_1 \circ \overline{B_1}}{|B_1|^2 - |B_2|^2} + \frac{-B_2 \circ \overline{B_2}}{|B_1|^2 - |B_2|^2} + \frac{-B_1 \circ B_2}{|B_1|^2 - |B_2|^2} \circ \Im + \frac{B_1 \circ B_2}{|B_1|^2 - |B_2|^2} \circ \Im$$

$$= \frac{|B_1|^2}{|B_1|^2 - |B_2|^2} + \frac{-|B_2|^2}{|B_1|^2 - |B_2|^2} = \frac{|B_1|^2 - |B_2|^2}{|B_1|^2 - |B_2|^2} = 1$$

Dolayısı ile F^{-1} vardır. ◆

2.2. Reel ve Sanal Üniter Operatörler

Tanım 38: $A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü için öyle ki $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\operatorname{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ eşitliği sağlanıyorsa A dönüşümüne gerçel (reel) üniter dönüşüm denir.

Örnek 39: $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$z \to A(z) = \overline{z}$$

dönüşümü gerçel (reel) üniterdir.

Çözüm: $\forall x, y \in \mathbb{C}$;

$$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \overline{x}, \overline{y}\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{x}\,\overline{\overline{y}} = \overline{x}y$$

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = x\overline{y}$$

$x = a + ib,\ y = c + id$ olsun.

$$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \overline{(a+ib)}(c+id) = (a-ib)(c+id)$$

$$= (ac+bd) + i(ad-bc)$$

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = (a+ib)\overline{(c+id)} = (a+ib)(c-id)$$

$$= (ac+bd) + i(bc-ad)$$

$$\operatorname{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = ac + bd$$

$$\operatorname{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\} = ac + bd$$

$\operatorname{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ elde edilir.

$\Rightarrow A$ dönüşümü gerçel (reel) üniterdir.

Tanım 39: $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü için öyle ki $\forall x,y \in \mathbb{C}^n$ olmak üzere $\operatorname{Im}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ eşitliği sağlanıyorsa A dönüşümüne sanal (imajiner) üniter dönüşüm denir.

Örnek 40: $A:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$(a+ib) \to (2a+3b)+i(a+2b)$$

dönüşümü sanal üniterdir.

Çözüm: $a+ib,\ c+id \in \mathbb{C}$;

$$\begin{aligned}\langle A(a+ib),A(c+id)\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle (2a+3b)+i(a+2b),(2c+3d)+i(c+2d)\rangle_{\mathbb{C}}\\ &= (2a+3b)(2c+3d)+(a+2b)(c+2d)\\ &\quad +i(a+2b)(2c+3d)-i(2a+3b)(c+2d)\end{aligned}$$

$$\langle a+ib,c+id\rangle_{\mathbb{C}} = (a+ib)(c+id) = (ac+bd)+i(bc-ad)$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}\{\langle A(a+ib),A(c+id)\rangle_{\mathbb{C}}\} &= 2ac+3ad+4bc+6bd\\ &\quad -2ac-4ad-3bc-6bd = bc-ad\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im}\{\langle a+ib,c+id\rangle_{\mathbb{C}}\} = bc-ad$$

$\operatorname{Im}\{\langle A(a+ib),A(c+id)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Im}\{\langle a+ib,c+id\rangle_{\mathbb{C}}\}$ elde edilir.

$\Rightarrow A$ dönüşümü sanal üniterdir.

Önerme 36: $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü üniterdir $\Leftrightarrow$ A dönüşümü gerçel üniter ve sanal üniterdir.

İspat: $\forall x,y \in \mathbb{C}^n$;

$(\Rightarrow)$: A dönüşümü üniterdir. Yani, $\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}$ ’ dir.

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} + i\operatorname{Im}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\} + i\operatorname{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$

$\Leftrightarrow \operatorname{Re}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ *ve* $\operatorname{Im}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ’ dir. ◆

Teorem 23: $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ gerçel üniterdir $\Leftrightarrow$ $H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü için $H_1\circ A\circ H_1^{-1}$ dönüşümü ortogonaldir.

İspat:

$(\Rightarrow)$: $H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümünü alalım. $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü gerçel üniter olsun. Dolayısı ile $\forall x,y\in\mathbb{C}$;

$\mathrm{Re}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ' dir.

$x=a+ib,\ y=c+id$ olarak alalım.

$$\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}=x\overline{y}=(a+ib)(c-id)=(ac+bd)+i(bc-ad)$$

$$\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}=ac+bd$$

$$H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$$

$$a+ib\to\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=H_1(x)$$

$$c+id\to\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=H_1(y)$$

$$\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}$$

Böylelikle, $\mathrm{Re}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\langle H_1(A(x)),H_1(A(y))\rangle_{\mathbb{R}}$ elde edilir.

$\mathrm{Re}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ olduğundan $\langle H_1(A(x)),H_1(A(y))\rangle_{\mathbb{R}}=\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ ' dir.

Önerme 31' den $H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümünü kullanarak,

$\langle(H_1\circ A\circ H_1^{-1})(H_1(x)),(H_1\circ A\circ H_1^{-1})(H_1(y))\rangle_{\mathbb{R}}=\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ elde edilir.

$\Rightarrow$ $H_1\circ A\circ H_1^{-1}$ ortogonal dönüşümdür.

$(\Leftarrow)$: $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümünü alalım. $H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ için $H_1\circ A\circ H_1^{-1}$ dönüşümü ortogonal olsun.

$\forall x,y\in\mathbb{C}$;

$\langle(H_1\circ A\circ H_1^{-1})(H_1(x)),(H_1\circ A\circ H_1^{-1})(H_1(y))\rangle_{\mathbb{R}}=\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ ' dir. Dolayısı ile,

$$\langle H_1(A(x)),H_1(A(y))\rangle_{\mathbb{R}}=\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}$$

$x=a+ib,\ y=c+id$ olarak alalım.

$H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$

$a+ib\to\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=H_1(x)$

$c+id\to\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=H_1(y)$

$\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=ac+bd$ elde edilir.

$\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}=ac+bd$ olduğundan $\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}=\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ' dir.

Bu durumda, $\langle H_1(A(x)),H_1(A(y))\rangle_{\mathbb{R}}=\mathrm{Re}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ' dir.

Buradan, $\langle H_1(A(x)),H_1(A(y))\rangle_{\mathbb{R}}=\langle H_1(x),H_1(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ olduğundan,

$\mathrm{Re}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ' dir.

Sonuç olarak A dönüşümü gerçel üniterdir. ◆

Teorem 24: $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümü sanal üniterdir $\Leftrightarrow$ $H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü ve $A'=H_1\circ A\circ H_1^{-1}$ dönüşümü için $\det A'=1$ ' dir.

İspat: $(\Rightarrow)$: $H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümünü alalım. $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümü sanal üniter olsun. $\forall x,y\in\mathbb{C}$; $\mathrm{Im}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\mathrm{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ' dir.

$x=a+ib,\ y=c+id$ olarak alalım.

$\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}=x\overline{y}=(a+ib)(c-id)=(ac+bd)+i(bc-ad)$

$\mathrm{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}=bc-ad$

$H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$

$a+ib\to\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=H_1(x)$

$c+id\to\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=H_1(y)$

$\mathrm{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}=-\begin{vmatrix}a&c\\b&d\end{vmatrix}=-\begin{bmatrix}H_1(x)&H_1(y)\end{bmatrix}$

Buradan, $\mathrm{Im}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=-\begin{bmatrix}H_1(A(x))&H_1(A(y))\end{bmatrix}$ elde edilir.

$\forall x, y \in \mathbb{C};\ \operatorname{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \operatorname{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ olduğundan,

$-[H_1(A(x)) \quad H_1(A(y))] = -[H_1(x) \quad H_1(y)]$ ' dir. Buradan,

$[H_1(A(x)) \quad H_1(A(y))] = [H_1(x) \quad H_1(y)]$ ' dir.

$H_1 \circ A \circ H_1^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ A' = H_1 \circ A \circ H_1^{-1}$ alırsak,

$\left[A'(H_1(x)) \quad A'(H_1(y))\right] = [H_1(x) \quad H_1(y)]$ elde edilir.

$H_1(x) = \eta,\ H_1(y) = \mu$ ile gösterirsek,

$\left[A'(\eta) \quad A'(\mu)\right] = [\eta \quad \mu]$

$\det A' [\eta \quad \mu] = [\eta \quad \mu]$ ' dir.

$\forall \eta, \mu \in \mathbb{R}^2;\ [\eta \quad \mu] \neq 0$ olduğundan $\det A' = 1$ ' dir.

$(\Leftarrow)$: $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \mathbb{R}-lineer$ dönüşümünü alalım. $H_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}-izomorfizma$ ve $A' = H_1 \circ A \circ H_1^{-1}$ dönüşümü için $\det A' = 1$ olsun.

$\forall x, y \in \mathbb{C};$

$$\operatorname{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} \stackrel{?}{=} \operatorname{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

$x = a + ib,\ y = c + id$ olarak alalım.

$H_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$

$$a + ib \to \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = H_1(x)$$

$$c + id \to \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = H_1(y)$$

$\operatorname{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\} = bc - ad = -\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = -[H_1(x) \quad H_1(y)]$ ' dir.

Dolayısı ile $\operatorname{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = -[H_1(A(x)) \quad H_1(A(y))]$ elde edilir.

$$-[H_1(A(x)) \quad H_1(A(y))] = -\left[H_1(A((H_1^{-1} \circ H_1)(x)) \quad H_1(A((H_1^{-1} \circ H_1)(y))\right]$$

$$= -\left[(H_1 \circ A \circ H_1^{-1})(H_1(x)) \quad (H_1 \circ A \circ H_1^{-1})(H_1(y))\right]$$

$H_1 \circ A \circ H_1^{-1} = A'$ için $\det A' = 1$ olduğundan ;

$$= -\left[A'(H_1(x)) \quad A'(H_1(y))\right]$$

$$= -\det A^{'}\left[H_1(x) \quad H_1(y)\right] = -\left[H_1(x) \quad H_1(y)\right] \text{ bulunur.}$$

$\Rightarrow -\left[H_1(A(x)) \quad H_1(A(y))\right] = -\left[H_1(x) \quad H_1(y)\right]$' dir.

$\Rightarrow \mathrm{Im}\left\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\right\} = \mathrm{Im}\left\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right\}$ elde edilir.

Bu ise A dönüşümünün sanal üniter olduğunu gösterir. ◆

Sonuç 12: $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü üniterdir $\Leftrightarrow$ $H_1:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-$*izomorfizma* dönüşümü ve $A^{'} = H_1 \circ A \circ H_1^{-1}$ dönüşümü için $A^{'}-$*ortogonal* ve $\det A^{'} = 1$' dir.

Sonuç 13:

$U(1)$, 1 - boyutlu üniter dönüşümler grubu,

$O(2)$, 2 - boyutlu ortogonal dönüşümler grubu,

$Sp(2)$, 2 - boyutlu simplektik dönüşümler grubu olmak üzere,

$H_1 \circ U(1) \circ H_1^{-1} = O(2) \cap Sp(2)$' dir.

Teorem 25: $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ dönüşümü gerçel üniterdir $\Leftrightarrow$ $H_2:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-$*izomorfizma* dönüşümü için $H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ dönüşümü ortogonaldir.

İspat: $(\Rightarrow)$: $H_2:\mathbb{C}^2\to\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-$*izomorfizma* dönüşümünü alalım. $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ dönüşümü gerçel üniter olsun. Dolayısı ile, $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$;

$\mathrm{Re}\left\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\right\}$' dir.

$$x = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix};$$

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = x\overline{y} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 - id_1 \\ c_2 - id_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix})^T (\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 + i(b_1c_1 + b_2c_2 - a_1d_1 - a_2d_2)$$

$\text{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\} = a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2$ elde edilir.

$H_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $x = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ olmak üzere,

$H_2(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $H_2(y) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ olarak tanımlayalım.

$$\text{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\} = a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} = \langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}}$$

Böylelikle, $\text{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \langle H_2(A(x)), H_2(A(y))\rangle_{\mathbb{R}}$ elde edilir.

$\text{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \text{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ olduğundan

$\langle H_2(A(x)), H_2(A(y))\rangle_{\mathbb{R}} = \langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ ’ dir.

Önerme 31’ den $H_2^{-1} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümünü kullanarak,

$\langle (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(x)), (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(y))\rangle_{\mathbb{R}} = \langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ elde edilir.

$\Rightarrow$ $H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ ortogonal dönüşümdür.

$(\Leftarrow)$: $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2, \mathbb{R}-lineer$ dönüşümünü alalım. $H_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ için $H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ dönüşümü ortogonal olsun. $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$;

$\langle (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(x)), (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(y))\rangle_{\mathbb{R}} = \langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ ’ dir. Dolayısı ile,

$\langle H_2(A(x)), H_2(A(y))\rangle_{\mathbb{R}} = \langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}}$

$x = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}$ olarak alalım.

$H_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $x = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ olmak üzere,

$H_2(x) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $H_2(y) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ olarak tanımlayalım.

$$\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\} = a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ olduğundan,

$\langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ elde edilir.

Bu durumda, $\langle H_2(A(x)), H_2(A(y))\rangle_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ’ dir.

$\langle H_2(A(x)), H_2(A(y))\rangle_{\mathbb{R}} = \langle H_2(x), H_2(y)\rangle_{\mathbb{R}}$ olduğundan

$\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ’ dir.

Sonuç olarak A dönüşümü gerçel üniterdir. ◆

Teorem 26: $A:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümü sanal üniterdir $\Leftrightarrow$ $H_2:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü ve $A' = H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ dönüşümü için $A'-simplektik$ dönüşümdür.

İspat: $(\Rightarrow)$: $H_2:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümünü alalım. $A:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümü sanal üniter olsun.

$\forall x, y \in \mathbb{C}^2$;

$\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ’ dir.

$x = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}$ olarak alalım.

$$\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}} = x\bar{y} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 - id_1 \\ c_2 - id_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix})^T (\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 + i(b_1c_1 + b_2c_2 - a_1d_1 - a_2d_2)$$

$\mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\} = b_1c_1 + b_2c_2 - a_1d_1 - a_2d_2$ ’ dir.

$\mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\} = -\psi(H_2(x), H_2(y))$ olacak şekilde $\psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümünü tanımlayalım.

$$\langle y, x\rangle_{\mathbb{C}} = y\overline{x} = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 - ib_1 \\ a_2 - ib_2 \end{pmatrix}$$

$$= (\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix})^T (\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 - i(b_1c_1 + b_2c_2 - a_1d_1 - a_2d_2)$$

$\mathrm{Im}\{\langle y, x\rangle_{\mathbb{C}}\} = -(b_1c_1 + b_2c_2 - a_1d_1 - a_2d_2)$

$\Rightarrow \psi(H_2(y), H_2(x)) = -\psi(H_2(x), H_2(y))$ olduğundan ψ ters simetrik bilineer dönüşümdür.

Aynı zamanda $\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle\} = -\psi(H_2(A(x)), H_2(A(y)))$ ’ dir.

$\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle\} = \mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle\}$ olduğundan $-\psi(H_2(A(x)), H_2(A(y))) = -\psi(H_2(x), H_2(y))$ elde edilir. Dolayısı ile,

$\psi(H_2(A(x)), H_2(A(y))) = \psi(H_2(x), H_2(y))$ ’ dir. Buradan,

$\psi((H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(x)), (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(y))) = \psi(H_2(x), H_2(y))$ elde edilir.

$\psi((H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(x)), (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(y))) = \psi(H_2(x), H_2(y))$ ve ψ ters simetrik bilineer dönüşüm olduğundan $A' - simplektik$ dönüşümdür.

$(\Leftarrow)$: $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{R} - lineer$ dönüşüm, $H_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R} - izomorf$ dönüşümü ve $A' = H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ dönüşümü için $A' - simplektik$ dönüşüm olsun.

$\forall x, y \in \mathbb{C}^2$; $\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} \overset{?}{=} \mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$

$x = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} c_1 + id_1 \\ c_2 + id_2 \end{pmatrix}$ olarak alalım.

$$\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} = x\overline{y} = \begin{pmatrix} a_1 + ib_1 \\ a_2 + ib_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 - id_1 \\ c_2 - id_2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}\right)^T \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= a_1c_1 + a_2c_2 + b_1d_1 + b_2d_2 + i(b_1c_1 + b_2c_2 - a_1d_1 - a_2d_2)$$

$\mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\} = b_1c_1 + b_2c_2 - a_1d_1 - a_2d_2$ ’ dir.

$\mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\} = -\psi(H_2(x), H_2(y))$ olacak şekilde $\psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ bilineer dönüşümünü tanımlayalım. Dolayısı ile,

$\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = -\psi(H_2(A(x)), H_2(A(y)))$ şeklindedir. Buradan,

$-\psi(H_2(A(x)), H_2(A(y))) = -\psi((H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(x)), (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(y)))$

olduğundan ve $A' = H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ dönüşümü simplektik olduğundan,

$-\psi((H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(x)), (H_2 \circ A \circ H_2^{-1})(H_2(y))) = -\psi(H_2(x), H_2(y))$ elde edilir.

$\mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\} = -\psi(H_2(x), H_2(y))$ ve $\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = -\psi(H_2(A(x)), H_2(A(y)))$ olduğundan,

$$\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$$

bulunur.

Bu da bize $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümünün sanal üniter olduğunu gösterir. ◆

Sonuç 14: $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dönüşümü üniterdir $\Leftrightarrow$ $H_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü ve $A' = H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ dönüşümü için $A' - ortogonal$ ve $A' - simplektiktir$.

Sonuç 15:

$U(2)$, 2 - boyutlu üniter dönüşümler grubu,

$O(4)$, 4 - boyutlu ortogonal dönüşümler grubu,

$Sp(4)$, 4 - boyutlu simplektik dönüşümler grubu olmak üzere,

$H_2 \circ U(2) \circ H_2^{-1} = O(4) \cap Sp(4)$ ’ dir.

Teorem 27: $A:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dönüşümü için aşağıdaki önermeler karşılıklı olarak eşdeğerdir.

i) $\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$

ii) $\|A(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{C}^2$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$.

iii) $\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$ ve A ,$\mathbb{C}-lineerdir$.

iv) $\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$ ve A ,$\mathbb{C}-lineerdir$.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii): $\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$ olsun. $\mathbb{C}^2$ ’ de ortonormal taban olarak e_1, e_2 ’ yi alalım.

$\forall x, y \in \mathbb{C}^2$;

$x = a_1e_1 + a_2e_2$, $a_1 = \langle x, e_1\rangle_{\mathbb{C}}$, $a_2 = \langle x, e_2\rangle_{\mathbb{C}}$

$y = b_1e_1 + b_2e_2$, $b_1 = \langle y, e_1\rangle_{\mathbb{C}}$, $b_2 = \langle y, e_2\rangle_{\mathbb{C}}$

A üniter dönüşüm olduğundan ;

$\langle A(e_i), A(e_j)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle e_i, e_j\rangle_{\mathbb{C}} = \delta_{ij}$, $1 \le i, j \le 2$ ’ dir.

$\Rightarrow A(e_i),\ A(e_j)$ de ortonormaldir.

$$A(x) = a_1^{'}A(e_1) + a_2^{'}A(e_2),\ a_1^{'} = \langle A(x), A(e_1)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, e_1\rangle_{\mathbb{C}} = a_1$$

$$a_2^{'} = \langle A(x), A(e_2)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, e_2\rangle_{\mathbb{C}} = a_2$$

$$A(y) = b_1^{'}A(e_1) + b_2^{'}A(e_2),\ b_1^{'} = \langle A(y), A(e_1)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y, e_1\rangle_{\mathbb{C}} = b_1$$

$$b_2^{'} = \langle A(y), A(e_2)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y, e_2\rangle_{\mathbb{C}} = b_2$$

Dolayısı ile ,

$A(x) = a_1A(e_1) + a_2A(e_2)$

$A(y) = b_1A(e_1) + b_2A(e_2)$ ’ dir.

$$A(x+y) = (a_1 + b_1)A(e_1) + (a_2 + b_2)A(e_2)$$

$$= (a_1A(e_1) + a_2A(e_2)) + (b_1A(e_1) + b_2A(e_2)) = A(x) + A(y)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$;

$$\lambda x = \lambda(a_1e_1 + a_2e_2) = \lambda a_1e_1 + \lambda a_2e_2$$

$$A(\lambda x) = A(\lambda a_1e_1 + \lambda a_2e_2) = \lambda a_1A(e_1) + \lambda a_2A(e_2)$$

$$= \lambda(a_1A(e_1) + a_2A(e_2)) = \lambda A(x)$$

$\Rightarrow A, \mathbb{C}-lineerdir.$ ... $(*)$

$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$, $\forall x, y \in V$ olduğundan $y = x$ için de doğrudur. Dolayısı ile,

$\langle A(x), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}$ ’ dir. Bu da

$\|A(x)\|^2 = \|x\|^2$ ’ yi verir.

$\Rightarrow \|A(x)\| = \|x\|$ elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : $\|A(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{C}^2$ ve A, $\mathbb{C}-lineer$ olsun.

$\forall x, y \in \mathbb{C}^2$;

$\|A(x+y)\| = \|x+y\|$ ’ dir. Buradan,

$\|A(x+y)\|^2 = \|x+y\|^2$ ’ dir. Dolayısı ile ,

$\langle A(x+y), A(x+y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x+y, x+y\rangle_{\mathbb{C}}$ elde edilir. A, $\mathbb{C}-lineer$ olduğundan,

$\langle A(x)+A(y), A(x)+A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x+y, x+y\rangle_{\mathbb{C}}$ ’ dir.

$\langle A(x), A(x)+A(y)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle A(y), A(x)+A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x+y\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, x+y\rangle_{\mathbb{C}}$

$$\langle A(x), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle A(y), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle A(y), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} + \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, x\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, y\rangle_{\mathbb{C}}$$

$\langle A(x), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, x\rangle_{\mathbb{C}}$ ve $\langle A(y), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle y, y\rangle_{\mathbb{C}}$ olduğundan,

$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle A(y), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, x\rangle_{\mathbb{C}}$ ’ dır. İç çarpım tanımından

$\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}}$ yazılabilir. Bu ise bize

$2\,\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = 2\,\mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ ’ yi verir. Yani,

$\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$ elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : $\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^2$ ve A , $\mathbb{C}-lineer$ olsun.

$\mathrm{Re}\{\langle A(\gamma), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle \gamma, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $\forall \gamma, y \in \mathbb{C}^2$ için,

$\langle A(\gamma), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle A(\gamma), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}} = \langle \gamma, y\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle \gamma, y\rangle_{\mathbb{C}}}$ ’ dir. Buradan,

$\dfrac{\langle A(\gamma), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle A(\gamma), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}}}{2} = \dfrac{\langle \gamma, y\rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle \gamma, y\rangle_{\mathbb{C}}}}{2}$ yazılabilir.

Her iki tarafı “i” ile genişletirsek,

$\dfrac{i\langle A(\gamma), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} + i\overline{\langle A(\gamma), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}}}{2i} = \dfrac{i\langle \gamma, y\rangle_{\mathbb{C}} + i\overline{\langle \gamma, y\rangle_{\mathbb{C}}}}{2i}$ elde edilir. İç çarpım tanımından,

$\dfrac{i\langle A(\gamma),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}+i\langle A(y),A(\gamma)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\dfrac{i\langle \gamma,y\rangle_{\mathbb{C}}+i\langle y,\gamma\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$ yazılabilir. Buradan da,

$\dfrac{i\langle A(\gamma),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}+i\langle A(y),A(\gamma)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\dfrac{i\langle \gamma,y\rangle_{\mathbb{C}}+i\langle y,\gamma\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$ elde edilir.

$\dfrac{\langle iA(\gamma),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),-iA(\gamma)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\dfrac{\langle i\gamma,y\rangle_{\mathbb{C}}+\langle y,-i\gamma\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$ şeklinde ifade edilebilir. Buradan,

$A,\ \mathbb{C}-lineer$ olduğundan $\dfrac{\langle A(i\gamma),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),-A(i\gamma)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\dfrac{\langle i\gamma,y\rangle_{\mathbb{C}}+\langle y,-i\gamma\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$ ve

$\dfrac{\langle A(i\gamma),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}-\langle A(y),A(i\gamma)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\dfrac{\langle i\gamma,y\rangle_{\mathbb{C}}-\langle y,i\gamma\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$ bulunur. Bu ifade $\forall\gamma,y\in\mathbb{C}^2$ için geçerli olduğundan $\gamma=\dfrac{x}{i}$ için de geçerlidir. Dolayısı ile,

$\dfrac{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}-\langle A(y),A(x)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\dfrac{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}-\langle y,x\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$ yazılabilir. Buradan,

$\operatorname{Im}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\operatorname{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\},\ \forall x,y\in\mathbb{C}^2$ elde edilir.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) : $\operatorname{Im}\{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\operatorname{Im}\{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\},\ \forall x,y\in\mathbb{C}^2$ ve A $,\mathbb{C}-lineer$ olsun.

$\operatorname{Im}\{\langle A(\tau),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\}=\operatorname{Im}\{\langle \tau,y\rangle_{\mathbb{C}}\},\ \forall\tau,y\in\mathbb{C}^2$

$$\frac{\langle A(\tau),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}-\langle A(y),A(\tau)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\frac{\langle \tau,y\rangle_{\mathbb{C}}-\langle y,\tau\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$$

$\forall\tau,y\in\mathbb{C}^2$ için doğru olduğundan $\tau=ix$ için de doğrudur.

$$\frac{\langle A(ix),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}-\langle A(y),A(ix)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\frac{\langle ix,y\rangle_{\mathbb{C}}-\langle y,ix\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$$

A $,\mathbb{C}-lineer$ olduğundan,

$$\frac{\langle iA(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}-\langle A(y),iA(x)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\frac{i\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}-(-i)\langle y,x\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$$

$$\frac{i\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}-(-i)\langle A(y),A(x)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\frac{i\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}-(-i)\langle y,x\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$$

$$\frac{i\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}+i\langle A(y),A(x)\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}=\frac{i\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}+i\langle y,x\rangle_{\mathbb{C}}}{2i}$$

$$\frac{i(\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),A(x)\rangle_{\mathbb{C}})}{2i}=\frac{i(\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}+\langle y,x\rangle_{\mathbb{C}})}{2i}$$

$\dfrac{\langle A(x),A(y)\rangle_{\mathbb{C}}+\langle A(y),A(x)\rangle_{\mathbb{C}}}{2}=\dfrac{\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}+\langle y,x\rangle_{\mathbb{C}}}{2}$ elde edilir. Bu ifade bize

$\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\},\ \forall x, y \in \mathbb{C}^2$ ' yi verir.

(iii)$\Rightarrow$ (i) : $\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\},\ \forall x, y \in \mathbb{C}^2$ ve A , $\mathbb{C}-$*lineer* olsun. (iii) $\Rightarrow$ (iv) olduğundan $\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\},\ \forall x, y \in \mathbb{C}^2$ ' dir.

Sonuç olarak önerme 36' dan $\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}},\ \forall x, y \in \mathbb{C}^2$ ' dir. ◆

Not 11: Teorem 27, $A:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü için de aynı şekilde ispatlanır.

Not 12: [5] lineer cebir kitabından alınmış olan teorem 17, $\mathbb{C}^2$ ' deki keyfi $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ dönüşümün $\mathbb{C}-$*lineer* olmasından yola çıkılarak ispatlandı. Fakat teorem 27, $\mathbb{C}-$*lineerlik* şartı ortadan kaldırılarak düzenlendi ve özellikle $\mathbb{C}^2$ ' deki keyfi $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ üniter dönüşümün $\mathbb{C}-$*lineer* olduğu ispat edildi. Ayrıca teorem 27 ile $\mathbb{C}^2$ ' deki $A:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ keyfi dönüşümün tanım 38 ve tanım 39 ile tanımlanan gerçel üniter ve sanal üniter parçaların her birine $\mathbb{C}-$*lineerlik* şartı eklenilerek dönüşümün üniter olduğu sonucuna ulaşılabileceği gösterildi.

Şimdi $\mathbb{C}^n$ uzayındaki metrikleri ve izometrileri inceleyelim.

Örnek 41: $\forall x,\ y\in\mathbb{C}$ için $d(x,\ y) = |x-y|$ bir metriktir.

Örnek 42: $\forall x,\ y\in\mathbb{C}^2$ için $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ve $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$d(x,\ y)=\sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}$ bir metriktir.

Örnek 43: $\forall x,\ y\in\mathbb{C}^n$ için $x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ ve $y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$d(x,\ y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}$ bir metriktir.

Tanım 40: $x, y \in \mathbb{C}^n$ üniter uzayında iki vektör olmak üzere, $d(x, y) = \|x - y\|$ ifadesine x ve y vektörleri arasındaki uzaklık denir.

Tanım 41: $\mathbb{C}^n$ üniter uzay olmak üzere, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için $d(F(x), F(y)) = d(x, y)$ olan $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümüne izometri denir.

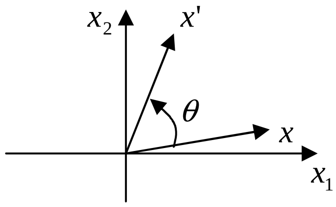
Örnek 44: $\mathbb{C}^n$ ' de öteleme dönüşümünü alalım. $\forall x, a \in \mathbb{C}^n$ için $F(x) = x + a$ dönüşümü için F bir izometridir. Gerçekten; $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için,

$$d(F(x), F(y)) = d(x+a, y+a) = \|(x+a)-(y+a)\| = \|x+a-y-a\| = \|x-y\| = d(x, y)$$

olur.

Örnek 45: $\mathbb{C}$ 'de F dönme hareketini alalım. F bir izometridir. Gerçekten $\forall\ x = x_1 + ix_2,\ x' = x_1' + ix_2' \in \mathbb{C}$ ve $F(x_1 + ix_2) = x_1' + ix_2' = e^{i\theta}(x_1 + ix_2)$ olmak üzere,

$\forall x, y \in \mathbb{C}$ için,



$$\begin{aligned}
\|F(x) - F(y)\|^2 &= \langle F(x) - F(y),\ F(x) - F(y) \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \left\langle (x_1 - y_1)e^{i\theta} + i(x_2 - y_2)e^{i\theta},\ (x_1 - y_1)e^{i\theta} + i(x_2 - y_2)e^{i\theta} \right\rangle_{\mathbb{C}} \\
&= (x_1 - y_1)^2 e^{i\theta}e^{-i\theta} + (x_2 - y_2)^2\, e^{i\theta}e^{-i\theta} \\
&\quad -i(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)e^{i\theta}e^{-i\theta} + i(x_2 - y_2)(x_1 - y_1)e^{i\theta}e^{-i\theta} \\
&= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = \|x - y\|^2
\end{aligned}$$

$\|F(x) - F(y)\| = \|x - y\|$ olup, F izometridir.

Örnek 46: Birim dönüşüm izometridir.

Gerçekten; $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ için, $\|I(x) - I(y)\| = \|x - y\|$ ' dir.

Not 13: $\mathbb{C}^n$ ' nin tüm izometriler kümesini $Iz(\mathbb{C}^n)$ ile gösterelim. $Iz(\mathbb{C}^n) \neq \varnothing$ ' dir. Çünkü, $I \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ' dir.

Önerme 37: $F_1,\ F_2 \in Iz(\mathbb{C}^n)$ olmak üzere $\left(F_1 \circ F_2\right) \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ’ dir.

İspat: $\forall x,\ y \in \mathbb{C}^n$ olsun.

$d\left((F_1 \circ F_2)(x), (F_1 \circ F_2)(y)\right) = d\left(F_1(F_2(x)), F_1(F_2(y))\right)$ F_1 ’ in izometri olduğu kullanılarak,

$= d\left(F_2(x), F_2(y)\right)$ olur. F_2 de izometri olduğundan,

$= d(x, y)$ elde edilir. Bunun anlamı $\left(F_1 \circ F_2\right) \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ’ dir. ◆

Sonuç 16: $\left(Iz(\mathbb{C}^n),\ \circ\right)$ birimli yarı gruptur yani monoiddir.

İspat: $\forall\ F_1,\ F_2,\ F_3 \in Iz(\mathbb{C}^n)$ olsun.

$\left(F_1 \circ (F_2 \circ F_3)(x)\right) = F_1 \circ \left(F_2(F_3(x))\right) = F_1\left(F_2(F_3(x))\right) = (F_1 \circ F_2)(F_3(x)) = ((F_1 \circ F_2) \circ F_3)(x)$.

Birim dönüşüm izometri olduğundan, $I \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ’ dir. O halde, $\left(Iz(\mathbb{C}^n),\ \circ\right)$ monoiddir. ◆

Önerme 38: Keyfi izometri birebirdir.

İspat: Farz edelim, $\exists x,\ y \in \mathbb{C}^n$ için $F(x) = F(y)$ olsun. Bu takdirde;

F ’ nin izometri olduğu kullanılarak,

$$d\left(F(x),\ F(y)\right) = \left\| \underbrace{F(x) - F(y)}_{0} \right\| = \|x - y\| \ \Rightarrow \|x - y\| = 0 \ \Rightarrow x = y$$

bulunur. Bu ise bize F ’ nin birebir olduğunu verir. ◆

Önerme 39: $\forall A \in U(n)$ dönüşümü için $A \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ’ dir.

İspat: A keyfi üniter dönüşüm olsun.

$\exists x,\ y \in \mathbb{C}^n;\ \|A(x) - A(y)\| \stackrel{?}{=} \|x - y\|$

$\|A(x) - A(y)\|^2 = \langle A(x) - A(y), A(x) - A(y)\rangle_{\mathbb{C}}$

$= \langle A(x), A(x)\rangle_{\mathbb{C}} + \langle A(y), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} - \langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} - \langle A(y), A(x)\rangle_{\mathbb{C}}$

A üniter olduğundan,

$= \langle x, x\rangle_{\mathbb{C}} + \langle y, y\rangle_{\mathbb{C}} - \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}} - \langle y, x\rangle_{\mathbb{C}} = \|x - y\|^2$

$\|A(x) - A(y)\|^2 = \|x - y\|^2$, yani $\|A(x) - A(y)\| = \|x - y\|$ ’ dir.

$\Rightarrow A \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ’ dir. ◆

Not 14: $\mathbb{C}^n$' deki tüm ötelemelerin oluşturduğu kümeyi $T(\mathbb{C}^n)$ ile gösterelim.

Önerme 40: $\forall B \in T(\mathbb{C}^n)$ dönüşümü için $B \in Iz(\mathbb{C}^n)$' dir.

İspat: B, keyfi öteleme dönüşümü olsun.

$x, b \in \mathbb{C}^n;\ B(x) = x + b$' dir.

$\exists x,\ y \in \mathbb{C}^n;\ \|B(x) - B(y)\| \overset{?}{=} \|x - y\|$

$\|B(x) - B(y)\| = \|x + b - y - b\| = \|x - y\|$ elde edilir.

$\Rightarrow B \in Iz(\mathbb{C}^n)$' dir. ◆

Sonuç 17: Üniter dönüşüm ve ötelemelerin bileşkesi de izometridir.

İspat: Önerme 37' den iki izometrinin bileşkesi de bir izometri olduğundan üniter dönüşüm ve ötelemelerin bileşkesi de izometridir. ◆

Önerme 41: $\Gamma(2) = \left\{B \circ A :\ \forall A \in U(2),\ \forall B \in T(\mathbb{C}^2)\right\}$ olarak tanımlansın. O halde, $(\Gamma(2), \circ) - gruptur$.

İspat: $\forall F_1, F_2 \in \Gamma(2)$;

$\exists A_1, A_2 \in U\left(2\right)$ ve $\exists B_1, B_2 \in T(\mathbb{C}^2)$ için,

$F_1 = B_1 \circ A_1$ ve $F_2 = B_2 \circ A_2$' dir.

$\forall x, b_1 \in \mathbb{C}^2;\ F_1(x) = (B_1 \circ A_1)(x) = B_1(A_1(x)) = A_1(x) + b_1$,

$\forall x, b_2 \in \mathbb{C}^2;\ F_2(x) = (B_2 \circ A_2)(x) = B_2(A_2(x)) = A_2(x) + b_2$' dir.

$F_1 \circ F_2 \overset{?}{\in} \Gamma(2)$

$\forall x \in \mathbb{C}^2;$

$(F_1 \circ F_2)(x) = F_1(F_2(x)) = F_1(A_2(x) + b_2) = A_1(A_2(x) + b_2) + b_1$

Teorem 27 gereğince A_1, $\mathbb{C} - lineer$ olduğundan,

$= A_1(A_2(x)) + A_1(b_2) + b_1$ elde edilir. Burada $A_1(b_2) + b_1 \in \mathbb{C}^2$ ve teorem 18' den $A_1 \circ A_2 \in U(2)$' dir.

$A_1 \circ A_2 = A$ ve $A_1(b_2) + b_1 = b$ ile gösterilirse,

$(F_1 \circ F_2)(x) = A(x) + b$ ' dir. Bu da $F_1 \circ F_2 \in \Gamma(2)$ olduğunu gösterir.

$\forall F_1, F_2, F_3 \in \Gamma(2);$

$(F_1 \circ F_2) \circ F_3 \stackrel{?}{=} F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$

$F_1, F_2, F_3 \in \Gamma(2)$ olduğundan $\exists A_1, A_2, A_3 \in U(2)$ ve $\exists B_1, B_2, B_3 \in T(\mathbb{C}^2)$.

$\forall x, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{C}^2;$

$F_1(x) = A_1(x) + b_1,\ F_2(x) = A_2(x) + b_2,\ F_3(x) = A_3(x) + b_3$ ' dür.

$$((F_1 \circ F_2) \circ F_3)(x) = (F_1 \circ F_2)(F_3(x)) = (F_1 \circ F_2)(A_3(x) + b_3) = F_1(F_2(A_3(x) + b_3))$$

$$= F_1(A_2(A_3(x) + b_3) + b_2) = A_1(A_2(A_3(x) + b_3) + b_2) + b_1$$

$$(F_1 \circ (F_2 \circ F_3))(x) = F_1((F_2 \circ F_3)(x)) = A_1((F_2 \circ F_3)(x)) + b_1 = A_1(F_2(F_3(x)) + b_1$$

$$= A_1(F_2(A_3(x) + b_3) + b_1 = A_1(A_2(A_3(x) + b_3)) + b_2) + b_1$$

$\Rightarrow (F_1 \circ F_2) \circ F_3 = F_1 \circ (F_2 \circ F_3)$ ' dir.

I , birim eleman için $I(x) = I(x) + 0$ olduğundan $I \in \Gamma(2)$ ' dir.

$\forall F \in \Gamma(2);\ \exists F^{-1} \stackrel{?}{\in} \Gamma(2)$

$\forall x \in \mathbb{C}^2;$

$F(x) = A(x) + b,\ b \in \mathbb{C}^2$ ' dir.

Teorem 18' den keyfi üniter dönüşümünün tersi var ve tersi de üniter dönüşümdür. O halde A üniter dönüşümünün tersi A^{-1} ile gösterilirse, $F(x) = A(x) + b$ eşitliğinin her iki tarafına A^{-1} ile soldan bileşke işlemi uygulandığında,

$A^{-1}(F(x)) = A^{-1}(A(x) + b)$ elde edilir. A^{-1} üniter olduğundan,

$= A^{-1}(A(x)) + A^{-1}(b) = I(x) + A^{-1}(b)$ elde edilir. $I(x) = A^{-1}(F(x)) - A^{-1}(b)$ ' dir.

Sonuç olarak $F^{-1}(x) = A^{-1}(x) - A^{-1}(b)$ alınırsa,

$I(x) = F^{-1}(F(x))$ yazılabilir.

$$F(F^{-1}(x)) = F(A^{-1}(x) - A^{-1}(b)) = A(A^{-1}(x) - A^{-1}(b)) + b = A(A^{-1}(x)) - b + b = I(x)$$

$\Rightarrow (F^{-1} \circ F)(x) = (F \circ F^{-1})(x) = I(x)$ elde edilir.

$F^{-1}(x) = A^{-1}(x) - A^{-1}(b)$ olduğundan $F^{-1} \in \Gamma(2)$ ' dir.

$\Rightarrow (\Gamma(2), \circ)$ gruptur. ◆

Teorem 28: $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ’ dir $\Leftrightarrow$ $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $H_n \circ F \circ H_n^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ ’ dir.

İspat: $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ olsun.

$\forall x,\ y \in \mathbb{C}^n;\ \|F(x)-F(y)\| = \|x-y\|$ ’ dir.

$H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorf$ olduğundan,

$\Leftrightarrow\ \|H_n(F(x)) - H_n(F(y))\| = \|H_n(x) - H_n(y)\|$

$\Leftrightarrow\ \|H_n(F((H_n^{-1} \circ H_n)(x)) - H_n(F((H_n^{-1} \circ H_n)(y))\| = \|H_n(x) - H_n(y)\|$

$\Leftrightarrow\ \|(H_n \circ F \circ H_n^{-1})(H_n(x)) - (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(H_n(y))\| = \|H_n(x) - H_n(y)\|$

$\Leftrightarrow\ H_n \circ F \circ H_n^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ ’ dir. ◆

Önerme 42: $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü ötelemedir $\Leftrightarrow$ $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $H_n \circ F \circ H_n^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü ötelemedir.

İspat:

$(\Rightarrow)$: $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü öteleme olsun.

$x, b \in \mathbb{C}^n;\ F(x) = x + b$ ’ dir. $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan,

$H_n(F(x)) = H_n(x+b) = H_n(x) + H_n(b)$ ’ dir.

$\Rightarrow H_n(F((H_n^{-1} \circ H_n)(x))) = H_n(x) + H_n(b)$

$\Rightarrow (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(H_n(x)) = H_n(x) + H_n(b)$ ’ dir.

Burada $H_n(x) = x^{'}$ ve $H_n(b) = b^{'}$ ile gösterilirse,

$(H_n \circ F \circ H_n^{-1})(x^{'}) = x^{'} + b^{'}$ elde edilir.

$\Rightarrow H_n \circ F \circ H_n^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü ötelemedir.

$(\Leftarrow)$: $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere $H_n \circ F \circ H_n^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümü öteleme olsun.

$x^{'}, b^{'} \in \mathbb{R}^{2n};\ (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(x^{'}) = x^{'} + b^{'}$ ’ dür.

$H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan $x^{'} = H_n(x)$ ve $b^{'} = H_n(b)$ olacak şekilde bir tek $x, b \in \mathbb{C}^n$ vardır.

$\Rightarrow (H_n \circ F \circ H_n^{-1})(H_n(x)) = H_n(x) + H_n(b)$

$\Rightarrow H_n(F((H_n^{-1} \circ H_n)(x))) = H_n(x) + H_n(b)$

$\Rightarrow H_n(F(x)) = H_n(x) + H_n(b) = H_n(x+b)$

$\Rightarrow F(x) = x + b\,,\ x, b \in \mathbb{C}^n$

$\Rightarrow F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü ötelemedir. ◆

Teorem 29: Keyfi $F : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ izometri, gerçel üniter ve ötelemelerin bileşkesi şeklinde tek türlü yazılabilir.

İspat: Teorem 19' dan $W : M\left(\mathbb{C}^2, \mathbb{R}\right) \to M\left(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}\right)$ dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan $W\left(F\right) = F^{'} = H_2 \circ F \circ H_2^{-1}$ olacak şekilde $F^{'} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dönüşümü var ve tektir.

Teorem 9' dan $F^{'}$ izometrisi için tek türlü $B^{'}$ ötelemesi ve $A^{'}$ ortogonal dönüşümü vardır öyle ki $F^{'} = B^{'} \circ A^{'}$ ' dür. Eşitliğin her iki tarafına soldan H_2^{-1}, sağdan H_2 ile bileşke işlemi uygulanırsa,

$H_2^{-1} \circ F^{'} \circ H_2 = H_2^{-1} \circ (B^{'} \circ A^{'}) \circ H_2$

$\Rightarrow H_2^{-1} \circ (H_2 \circ F \circ H_2^{-1}) \circ H_2 = H_2^{-1} \circ (B^{'} \circ A^{'}) \circ H_2$

$\Rightarrow F = H_2^{-1} \circ B^{'} \circ (H_2 \circ H_2^{-1}) \circ A^{'} \circ H_2$

$\Rightarrow F = (H_2^{-1} \circ B^{'} \circ H_2) \circ (H_2^{-1} \circ A^{'} \circ H_2)$ elde edilir.

Önerme 42' den $B^{'} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ötelemesi için $H_2^{-1} \circ B^{'} \circ H_2 : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü ötelemedir ve $H_2^{-1} \circ B^{'} \circ H_2$ tek türlüdür. $H_2^{-1} \circ B^{'} \circ H_2 = B$ ile gösterelim.

Teorem 25' ten $A^{'} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ ortogonal dönüşümü için $H_2^{-1} \circ A^{'} \circ H_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ olacak şekilde gerçel üniter dönüşümü vardır ve tektir. $H_2^{-1} \circ A^{'} \circ H_2 = A$ ile gösterelim.

$\Rightarrow F = B \circ A$ şeklindedir ve tek türlüdür.

Yani keyfi $F \in Iz(\mathbb{C}^2)$, gerçel (reel) üniter ve öteleme dönüşümlerinin bileşkesi şeklinde tek türlüdür. ◆

Sonuç 18: $\mathbb{C}^n$' de her izometri örtendir.

İspat: Teorem 28' den $\mathbb{C}^n$' deki her izometri $\mathbb{R}^{2n}$' de de izometridir. $\mathbb{R}^{2n}$' de izometriler örten olduğundan ve teorem 19' dan $H_n \circ F \circ H_n^{-1}$ dönüşümü $\mathbb{R}-izomorfizma$ olduğundan $\mathbb{C}^n$' deki her izometri de örtendir. ◆

Sonuç 19: Tüm gerçel üniter dönüşümlerin kümesini $\mathrm{Re}U(n)$ ile gösterelim.

$T(\mathbb{C}^2) \circ U(2) \subset Iz(\mathbb{C}^2)$ olmasına rağmen $\forall F \in Iz(\mathbb{C}^2)$ için $F = B \circ A$, $B \in T(\mathbb{C}^2)$, $A \in \mathrm{Re}U(2)$ tek türlü yazılır.

Not 15: Burada $\mathbb{C}^2$' deki keyfi izometrinin, reel uzaylardaki gibi üniter dönüşüm ve ötelemelerin bileşkesi şeklinde yazılabileceği bekleniyordu. Fakat aldığımız sonuçlar gösteriyor ki reel uzaydaki her şeyin benzeri kompleks uzayda doğru değildir. Dolayısı ile kompleks uzaydaki cebir ve geometri, reel uzaydaki cebir ve geometriden farklıdır.

3. BULGULAR VE SONUÇLAR

Tezde elde edilen bulguları aşağıdaki şekilde sıralayabiliriz.

1. $\mathbb{C}^n$, kompleks vektör uzayında keyfi $\mathbb{R}-lineer$ operatörün genel ifadesi, $\Im(\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}) \to \overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_n \end{pmatrix}}$ olmak üzere, $\forall F \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{R})$; $\exists A_1, A_2 \in M(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ öyle ki $F = A_1 + A_2 \circ \Im$ şeklinde olduğu Önerme 26' da gösterilmiştir.

2. $\mathbb{C}^n$ ' deki $\left(M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}\right), +, \cdot, r\right)$ üçlüsünün bir $\mathbb{R}-cebir$ olduğu Önerme 27' de gösterilmiştir.

3. $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$ ve $H_n^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{C}^n$ dönüşümlerinin $\mathbb{R}-izomorfizma$ oldukları Önerme 30 ve Önerme 31' de gösterilmiştir.

4. $W : M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}\right) \to M\left(\mathbb{R}^{2n}, \mathbb{R}\right)$ dönüşümünün $\mathbb{R}-cebir$ *izomorfizma* olduğu Teorem 20' de gösterilmiştir.

5. $n = 1, 2$ olmak üzere $H_n \circ M\left(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}\right) \circ H_n^{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in M(n \times n, \mathbb{R}) \right\}$ olduğu Önerme 33 ve Önerme 34' de gösterilmiştir.

6. Keyfi $F^{'} \in M\left(2 \times 2, \mathbb{R}\right)$ için $F^{'} = A_1^{'} + A_2^{'} \circ \Im^{'}$ olacak şekilde $A_1^{'}, A_2^{'} \in H_1 \circ M\left(\mathbb{C}, \mathbb{C}\right) \circ H_1^{-1}$ ' lerin mevcut ve tek türlü olduğu Teorem 21' de gösterilmiştir. Burada $\Im^{'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ' dir.

7. Keyfi $F^{'} \in H_1 \circ M\left(\mathbb{C}, \mathbb{R}\right) \circ H_1^{-1}$; $F^{'} = A_1^{'} + A_2^{'} \circ \Im^{'}$, $A_1^{'}, A_2^{'} \in H_1 \circ M\left(\mathbb{C}, \mathbb{C}\right) \circ H_1^{-1}$ olmak üzere $\det F^{'} = \det A_1^{'} - \det A_2^{'}$ olduğu Önerme 35' de gösterilmiştir.

8. Keyfi $F \in M\left(\mathbb{C}, \mathbb{R}\right)$; $F = B_1 + B_2 \circ \Im$, $B_1, B_2 \in M\left(\mathbb{C}, \mathbb{C}\right)$ olmak üzere F ' nin tersi mevcutluğunun $\Leftrightarrow$ $\left|B_1\right|^2 - \left|B_2\right|^2 \neq 0$ olması ile sağlandığı Teorem 22' de gösterilmiştir.

9. Gerçel üniter ve sanal üniter dönüşümleri Tanım 38 ve Tanım 39' da tanımlanmıştır.

10. $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümünün üniter olma şartı Önerme 36’ da verilmiştir.

11. $n=1,\ 2$ ve $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümünün gerçel üniter olması için, $H_n:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü kullanılarak elde edilen $H_n \circ A \circ H_n^{-1}$ dönüşümünün ortogonal olmasının gerekli ve yeterli şart olduğu Teorem 23 ve Teorem 25’ de gösterilmiştir.

12. $A:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümünün sanal üniter olması için, $H_1:\mathbb{C} \to \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü kullanılarak elde edilen $A^{'} = H_1 \circ A \circ H_1^{-1}$ dönüşümüne karşılık gelen matrisin determinantı 1 olmasının gerekli ve yeterli şart olduğu Teorem 24’ de gösterilmiştir.

13. $A:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, $\mathbb{R}-lineer$ dönüşümünün sanal üniter olması için $H_2:\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümü kullanılarak elde edilen $H_2 \circ A \circ H_2^{-1}$ dönüşümünün simplektik olmasının gerekli ve yeterli şart olduğu Teorem 26’ da gösterilmiştir.

14. $n=1,\ 2$ ve $A:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü için,

i) $\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$

ii) $\|A(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{C}^n$ ve A, $\mathbb{C}-lineerdir$

iii) $\mathrm{Re}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Re}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ ve $\mathrm{A}, \mathbb{C}-lineerdir$

iv) $\mathrm{Im}\{\langle A(x), A(y)\rangle_{\mathbb{C}}\} = \mathrm{Im}\{\langle x, y\rangle_{\mathbb{C}}\}$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$ ve $\mathrm{A}, \mathbb{C}-lineerdir$, önermelerinin denk olduğu Teorem 27’ de gösterilmiştir.

15. $\mathbb{C}^n$’ de keyfi iki izometrinin bileşkelerinin de izometri olduğu Önerme 37’ de gösterilmiştir.

16. $\mathbb{C}^n$’ de keyfi izometrinin birebir olduğu Önerme 38’ de gösterilmiştir.

17. $\mathbb{C}^n$’ de keyfi üniter dönüşümün izometri olduğu Önerme 39’ da gösterilmiştir.

18. $\mathbb{C}^n$’ de keyfi ötelemenin izometri olduğu Önerme 40’ da gösterilmiştir.

19. Üniter dönüşümlerle ötelemelerin bileşkesinin bileşke işlemine göre grup olduğu Önerme 41’ de gösterilmiştir.

20. $F \in Iz(\mathbb{C}^n)$ ’ dir $\Leftrightarrow$ $H_n:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ olmak üzere, $H_n \circ F \circ H_n^{-1} \in Iz(\mathbb{R}^{2n})$ olduğu Teorem 28’ de gösterilmiştir.

21. $F:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ dönüşümü öteleme olması için $H_n:\mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşümünü kullanılarak elde edilen $H_n \circ F \circ H_n^{-1}:\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dönüşümünün öteleme olmasının gerekli ve yeterli şart olduğu Önerme 42' de gösterilmiştir.

22. $n=1,\ 2$ için $\mathbb{C}^n$' de keyfi izometrinin gerçel üniter dönüşümler ve ötelemelerin bileşkesi şeklinde tek türlü yazılabileceği Teorem 29' da gösterilmiştir.

4. İRDELEME

W. H. Cockroft 1972' de yayınladığı kitabında [1], 1-boyutlu uzayda kompleks değerleri reel ve sanal bölümlerine ayırıp incelemiştir. Kompleks sayının modülü ile aynı sayının reel ve sanal bölümlerinden oluşan reel iki boyutlu ifadenin normunun aynı olduğunu belirtmiştir. Buradan orijine uzaklık yaklaşımıyla bir kompleks vektör ile bu sayının reel ve sanal bölümlerinden oluşan iki boyutlu reel vektör arasındaki ilişkiyi ortaya koymuştur. Daha sonra iki kompleks sayının çarpımından yola çıkarak iki boyutlu reel uzaydaki dönme hareketi ile ilişki kurmuştur. Tezde ise bu ilişkiler daha genel olarak ve $n=1,\ 2$ için $\mathbb{C}^n$ ile $\mathbb{R}^{2n}$ arasında incelendi.

A. I. Mal'cev, 1956' da Rusça, 1963' de İngilizce olarak yayınlanan kitabında [10] üniter dönüşümler teorisini vermiştir. Tezde ise reel üniter dönüşüm ve sanal üniter dönüşüm kavramları verildi ve $n=1,\ 2$ boyutları için $H_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}-izomorfizma$ dönüşüm yardımıyla $\mathbb{R}^{2n}$ uzayına dönüştürülerek tam olarak incelendi.

H. H. Hacısalihoğlu' nun 1985' de yayınlanan, kitabının 3. baskısında [5] yer alan, tezin de genel bilgiler bölümünde teorem 17 olarak verilen teorem, $n=1,\ 2$ boyutları için kompleks lineerlik şartı ortadan kaldırılarak yeniden düzenlendi. Keyfi üniter dönüşümün kompleks lineer olduğu ispat edildi. Ayrıca aynı teoremle, tezde gerçel (reel) üniter ve sanal üniter olarak tanımlanan parçaların her birine kompleks lineerlik şartı eklenerek dönüşümün üniter olduğu sonucuna ulaşıldı.

V. Wessels ve W. N. Polyzou kuantum teorisi ile ilgili makalelerinde [15] kompleks Lorentz Grubu' nun ve kompleks O(4) grubunun aynı olduğundan bahsetmiş ve $SL(2,\mathbb{C})\times SL(2,\mathbb{C})$ ' nin oluşturduğu grubun her ikisini de kapsadığından yola çıkmıştır. Bazı dönüşümleri kullanarak 4–boyutlu her vektörün Öklid ve Minkowski kısımlarına sahip olduğunu ortaya koymuştur. Tezde ise buna benzer bir yöntemle inceleme yapılarak 1 ve 2 boyutta üniter dönüşüm grubunun simplektik ve ortogonal dönüşüm gruplarının kesişimi olduğu sonucuna varıldı.

S. Davis kuantum teorisi ile ilgili makalesinde [2] bir kompleks hermit matristen bir reel matrise bir benzerlik dönüşümü yardımıyla geçişin mevcut olduğunu belirtmiştir. Tezde ise bu geçiş 1 ve 2 boyutta ayrıntıları ile incelenmiştir.

Young Gao, Yangshang Wang, Xinshan Zhu, Xuetus Feng, Xiaoxu Zbu yüz tanıma ile ilgili konferans sunularında [4] üniter uzayda tanımladıkları bir dönüşümü reel ve sanal kısımlarına ayırmışlar ve trigonometrik özelliğini kullanmışlardır. Ayrıca üzerinde durdukları Gabor kompleks özellikleri için makalede belirttikleri PCA ve LDA' ları Öklid Uzaydan Üniter uzaya genelleştirme ihtiyacı duymuşlardır.

Keh-Chiarng Huarng ve Chien-Chung Yeh ise radyasyon kaynağının varış açısının tahmini problemini çözerken [7] kompleks kullanımı reel kullanıma kısıtlamak için bir üniter dönüşüm metodu geliştirmişlerdir. Tezde ise buna benzer olarak 1 ve 2 boyutta reel üniter dönüşümler ile sırasıyla 2 ve 4 boyuttaki ortogonal dönüşümler arasında ilişki tespit edildi.

R. Penrose ve W. Rinder ise çalışmalarında [11, 12] 4 boyutlu reel Minkovski Uzay–Zaman yerine 2 boyutlu kompleks uzayı kullanarak fiziksel kavramlar üzerinde durmuşlardır.

Kuantum teorisi, nükleer enerji ve elektronik nesne tanıma programlarındaki gibi güncel fizik problemlerinin çözümlerinde üniter dönüşümlerin ve bu dönüşümlerin reel uzaydaki dönüşümlerle ilişkisinin kullanılması bu tez çalışmasının önemini gösterir.

Ek olarak tezde Üniter uzaydaki izometriler ve reel uzaydaki izometriler arasındaki bağlantılar incelendi.

5. ÖNERİLER

Kuantum teorisi, nükleer enerji ve elektronik nesne tanıma programları gibi güncel fizik alanlarındaki problemlerin çözümlerinde kullanılması, bunların yanında 4 boyutlu reel Minkowski Uzay-Zaman yerine 2 boyutlu kompleks uzayı kullanarak fiziksel kavramların geliştirilmeye çalışıldığı iki kitabın yayınlanması, üniter uzaylar, üniter dönüşümler ve bu dönüşümlerin reel uzaydaki dönüşümlerle ilişkilerinin incelenmesi konusunun ne kadar önemli olduğunu göstermektedir.

Buradan yola çıkılarak;

1. $n=1$ ve 2 boyutlarında bulunan sonuçların keyfi n boyut için elde edilmesi çok önemlidir.

2. n boyutlu üniter uzay geometrisinin geliştirilmesi, yani n boyutlu kompleks vektör uzayında $U(n)$ ve $\Gamma(n)=\left\{B\circ A:\ \forall A\in U(n),\ \forall B\in T(\mathbb{C}^n)\right\}$ grupları için invaryant teorisinin geliştirilmesi çok önemlidir.

6. KAYNAKLAR

1. Cockcroft, W. H., Complex Number, Chapmen and Hall, London, 1972.

2. Davis, S., Quantum Theory and the Category of Complex Numbers, International Journal of Theoretical Physics, 45, 10 (2006) 1935-1949.

3. Epelbaum, E., Four-nucleon Force Using the Method of Unitary Transformation, The Eurepean Physical Journal, 34 (2007) 197-214.

4. Gao, Y., Yangsheng, Zhu, X., Feng, X. ve Zhou, X., Weighted Gabor Features in Unitary Space for Face Recognition, Proceedings of the 7th International Conference on Automatic Face and Gesture Recognition, Southampton, 2006.

5. Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir, 3. Baskı, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 1985.

6. Hoffman, K. ve Kunze, R., Linear Algebra, Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall, 1971.

7. Huarn, K. ve Yeh C., A Unitary Transformation Method for Angle-of-Arrival Estimation, IEEE Transactions on Signal Processing, 39, 4 (1991) 975-977.

8. Kaya, G., N-boyutlu Öklid ve Ortogonal Geometrilerde Noktalar Sistemlerinin Denklik Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

9. Lipschutz, S., Lineer Cebir Teori ve Problemleri, 3. Baskı, Mc Graw Hill Inc., New York, 1990.

10. Mal’cev, A., I., Foundation of Linear Algebra, W. H. Freeman and Company, San Fransisco and London, 1963.

11. Penrose, R. ve Rindler, W., Spinors and Space-time, Cambridge University Press 1, 1984.

12. Penrose, R. ve Rindler, W., Spinors and Space-time, Cambridge University Press 2, 1986.

13. Sabuncuoğlu, A., Lineer Cebir, Nobel Yayınları, Ankara, 2004.

14. Şahmurov, V. ve Uzgören, G., Lineer Cebir Uygulamaları, Papatya Yayıncılık, İstanbul, 1999.

15. Wessels, V. ve Polyzou, W. N., Stability of Covaryant Relativistic Quantum Theory, Few-Body Systems, 35 (2004) 51-76.

ÖZGEÇMİŞ

Hüsnü Anıl ÇOBAN, 21.06.1978 tarihinde Kastamonu’ nun Taşköprü ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini Bekirli Köyü İlkokulunda ve Muzafferettin Gazi İlköğretim Okulunda, ortaokulu Atatürk İlköğretim Okulunda, ortaöğrenimini Göl Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 1996 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Samsun Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümünü kazandı. 2000 yılında bu bölümden mezun oldu. 2001 yılında Milli Eğitim Bakanlığına bağlı Bursa Gemlik Abdullah Fehmi İlköğretim Okulunda matematik öğretmeni olarak göreve başladı. 2003 yılı Nisan ayında askerlik hizmetini tamamladı. 2005 yılında zorunlu hizmet görevini yerine getirmek için Van Başkale Albayrak İlköğretim Okuluna tayin edildi. Aynı yılın Eylül ayında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde tezli yüksek lisans programına kaydoldu. 2006 yılında öğrenim özrü mazeretinden yararlanarak Trabzon Yomra Özdil Çok Programlı Lisesine atandı. Halen aynı okulda matematik öğretmeni olarak görevine devam etmektedir. Yabancı dili İngilizce’ dir.