KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

[0,1] BİRİM ARALIĞI ÜZERİNDEKİ ÜÇGENSEL NORMLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rümeysa AYYILDIZ

HAZİRAN 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

[0,1] BİRİM ARALIĞI ÜZERİNDEKİ ÜÇGENSEL NORMLAR

Rümeysa AYYILDIZ

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01.06.2009
Tezin Savunma Tarihi : 26.06.2009

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Funda KARAÇAL
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ

Enstitü Müdürü : Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

[0,1] birim aralığı üzerindeki üçgensel normlar adlı çalışma Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında hazırlanan Yüksek Lisans tez çalışmalarımın her aşamasında benden ilgi, alaka ve engin bilgisini esirgemeyen, bana her konuda yardımcı olan değerli hocam, Sayın Doç. Dr. Funda KARAÇAL' a teşekkürlerimi sunarım.

Öğrenim süresi boyunca benden yardımlarını esirgemeyen tüm hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Ayrıca öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi, yüksek lisans tezi çalışmam sırasında da benden her türlü maddi manevi desteklerini esirgemeyen hep yanımda olan annem ile babama ve yüksek lisans tezimi yazarken bana olan katkıları ve sabrından dolayı değerli eşim Dündar AYYILDIZ'a teşekkürü bir borç bilirim.

Rümeysa AYYILDIZ
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖZET

Bu tezin orijinal kısmı iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ şeklinde tanımlanan bir fonksiyonun üçgensel norm olabilmesi için gereken şartlar, bu fonksiyonun sürekliliği, sol sürekliliği, kesin monotonluğu, Arşimedyanlığı tanımlanıp incelenmiştir.

İkinci bölümde, kesin monotonluğu sağlayıp sürekliliği sağlamayan bir üçgensel normun ailesi hakkında bilgi verilmiş, tanımlanan özel bir t-normun özellikleri incelenmiş ve üçgensel normlarla ilgili bir problem ile çözümüne yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Üçgensel norm, Süreklilik, Sol süreklilik, Kesin Monotonluk, Arşimedyanlık

SUMMARY

The Triangular Norms on The Unit İnterval [0,1]

The original part of this thesis consists of two chapters.

In the first section, a function defined as $T: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ to be triangular norm necessary conditions, continuity, left continuity, strict monotony and archimedenity of this function are defined and investigated.

In the second section, it is given information about a triangular norm family obtain strict monotony don't obtain continuity, defined on a peculiar t-norm properties are investigated and a problem related to triangular norm and its solution are considered.

Keywords: Triangular Norms, Continuous, Left Continuous, Strictly Monotone, Archimedean

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$A \cup B$	A ve B kümesinin birleşimi
$A \setminus B$	$= \{x \in A : x \notin B\}$
$A \subseteq B$	A kümesi B kümesinin alt kümesidir
$A \times B$	$= \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$
$\mathbb{N}$	$= \{1,2,3, \dots, n, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$[a, b]$	Kapalı aralık
$]a, b[$	Açık aralık
$[a, b[\ ;]a, b]$	Yarı açık aralık
$[0,1]^{\mathbb{N}}$	[0,1]’ deki dizilerin ailesi
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$	a_n elemanlarının dizisi
$t - norm$	Üçgensel norm
min	Minimum
max	Maksimum
T_M	Minimum t-norm
T_P	Çarpım t-norm
T_L	Lukasievwicz t-norm
$F(x_0,\cdot)$	Düşey kesim
$F(\cdot, y_0)$	Yatay kesim

sup	Supremum
inf	İnfimum
$a \wedge b$	a ve b elemanlarının infimumu
$a \vee b$	a ve b elemanlarının supremumu
$\blacksquare$	İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Üçgensel normların tarihi Menger tarafından 1942' de yapılan "İstatistiksel Metrikler" adlı çalışmasıyla başlamıştır. Karl Menger, iki eleman arasındaki uzaklığın rakamlar yerine daha genel bir ifadenin kullanılabileceği metrik uzaylar inşa etti. Üçgensel normlar, klasik üçgen eşitsizliğinin daha genel yapılara genelleştirilmesi için oluşturulmuştur. Üçgensel normlar için orijinal aksiyomlar kümesi çok dardı ve bu aksiyomlar diğer fonksiyonların özellikleri içerisine dahildi.

Üçgensel normlar, olasılık metrik uzaylar teorisinde önemli bir rol oynar. Berthold Schweizer ve Abe Sklar, 1958, 1960, 1961 yıllarındaki çalışmalarında üçgensel normların bugünkü kullanıldığı aksiyomlarını vermişlerdir.

Matematiksel anlamda üçgensel normlar teorisi iki bağımsız alana sahiptir. Bunlar, (özel) fonksiyonel denklemler alanı ve (özel topolojik) yarı gruplar teorisi olarak adlandırılır.

Fonksiyonel denklemler ile ilgili olarak, üçgensel normlar birleşmelilik denklemiyle yakından ilgilidir (en genel durumda henüz çözülemedi). Bu alanda ilk çalışma 1826 yılında Abel tarafından yapılmıştır. Daha sonraki çalışmalar 1909 da Brouwer, 1930 yılında Cartan, 1949 ve 1961 yıllarında Aczel ve 1954 yılında Hosszu tarafından yapılmıştır. Özellikle Janos Aczel' in monografisi (hem almanca hem İngilizce versiyonu) üçgensel normların gelişiminde çok önemli bir etkiye sahiptir.

Araştırmaların bir diğer yönü, bazı doğal fonksiyonel denklemelerin çözümü olarak üçgensel normların parametrelendirilmiş ailelerinin belirlenmesidir. Bu alandaki belki de en popüler sonuç, Frank fonksiyonel denklemi olarak adlandırılan denklemin tek çözümü olan Frank üçgensel norm ve konormların ailesinin ispatlandığı 1979 yılındaki çalışmasıdır.

Topolojik yarı gruplarla bağlantılı olarak, nilpotent elemanın mevcut olmadığı, sınır noktalarının (aynı zamanda annihilatör ve neutral elemanın) sadece idempotent elemanlar olduğu bazı yarı grupların karakterizesi 1955' te Faucett tarafından yapılmıştır. Üçgensel normların dilinde, bu çalışma kesin üçgensel normların tam bir tasvirini sağlamıştır.

Özetle, T_M minimum, T_P çarpım ve T_L Lukasiewich diye adlandırılan sadece üç üçgensel norm ile başlayan üçgensel normlar için izomorf dönüşümler ve sıralı çarpımlar anlamında bütün sürekli üçgensel normları inşa etmek mümkündür.

1.2. Kısmen Sıralı Kümeler ve Fonksiyonlar

Tanım 1[5]: G boş olmayan bir küme ve $\star$, G' de bir ikili işlem olsun. $(G,\star)$ cebirsel yapısı aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa bir bu yapıya bir grup denir.

$(\boldsymbol{G_1})$ $\star$ işleminin G' de birleşme özelliği vardır. Yani;

$\forall a, b, c \in G$ için $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$' dir.

$(\boldsymbol{G_2})$ $\star$ işleminin G' de birim elemanı vardır. Yani;

$\forall a \in G$ için $a \star e = e \star a = a$ olacak şekilde $e \in G$ vardır.

$(\boldsymbol{G_3})$ $\star$ işlemine göre G' de her elemanın bir tersi vardır. Yani;

$\forall a \in G$ için $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ bulunabilir.

Tanım 2[5]: $(G,\star)$ bir grup ve

$\forall a, b \in G$ için $a \star b = b \star a$

değişme özelliği sağlanıyorsa bu ifadeye değişmeli grup veya abel grup denir.

Tanım 3[5]: G bir grup ve H, G' nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer H, G'deki işleme göre kendi başına bir grup ise H' ye G' nin bir alt grubu denir.

Tanım 4[5]: $G \neq \emptyset$ bir küme ve $\star$, G üzerinde bir ikili işlem ($\star: G \times G \to G$ bir fonksiyon) olsun.

Eğer her $a, b, c \in G$ için $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ (birleşme özelliği)

sağlanırsa $(G,\star)$' a bir yarıgrup denir.

Tanım 5[1]: Bir kısmen sıralı küme, $x \leq y$ ikili bağıntısının tanımlı olduğu ve aşağıdaki şartları sağlayan bir X kümedir.

$(\boldsymbol{P_1})$ $\forall x \in X$ için $x \leq x$ (yansıma özelliği)

$(\boldsymbol{P_2})$ $x \leq y \wedge y \leq x$ olan her $x, y \in X$ için $x = y$' dir. (ters simetri özelliği)

$(\boldsymbol{P_3})$$x, y, z \in X$ olmak üzere $x \leq y \wedge y \leq z \Longrightarrow x \leq z$' dir. (geçişme özelliği)

Örnek 1: I bir küme ve $P(\mathrm{I})$ I' nın tüm alt kümelerinin ailesi olsun.

$$X \leq Y : \Leftrightarrow X \subseteq Y$$

ile tanımlanan $\subseteq$ bağıntısına göre $(P(\mathrm{I}), \subseteq)$ kısmen sıralı kümedir.

Örnek 2: $\mathbb{Z}^+$ pozitif tam sayılar kümesi

$$x \leq y : \Leftrightarrow x \,/\, y$$

ile tanımlanan $\leq$ bağıntısına göre $(\mathbb{Z}^+, \leq)$ kısmen sıralı kümedir.

Tanım 6[1]: Aşağıdaki özelliği sağlayan bir kısmen sıralı kümeye tam sıralı veya zincir denir.

Verilen x ve y için x$\leq y$ veya y$\leq x$' dir.

Örnek 3: $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $x \leq y$ reel sayılarda doğal sıralama olsun. Bu takdirde $\mathbb{R}$ kısmen sıralı kümesi bir zincirdir.

Örnek 4: $\{1,2,3,4, \dots, n\}$ kümesi doğal sıralamaya göre bir zincirdir**.**

Tanım 7[1]: P ve Q iki kısmen sıralı küme olsun. Aşağıdaki şartı sağlayan $\theta: P \to Q$ fonksiyonuna sırakorur veya izoton denir.

$$\forall x, y \in P \text{ için } x \leq y \Longrightarrow \theta(x) \leq \theta(y)$$

Tanım 8[1]: $\varphi: L \to M$, L kafesinden M kafesine bir fonksiyon olsun.

$(\mathbf{1})$ $\forall x, y \in L$ için $\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y)$ ise φ' ye sup-morfisi denir.

$(\mathbf{1'})$ $\forall x, y \in L$ için $\varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$ ise φ' ye inf-morfisi denir.

(1) ve $(1')$' nin her ikisi de gerçekleşiyorsa**,** φ' ye morfi (veya kafes morfisi) denir.

i. Birebir ise monomorfi,
ii. Örten ise epimorfi,
iii. Birebir ve örten ise yani bir bijeksiyon ise izomorfi denir.

Tanım 9[4]: $f\colon A \to B$ bir fonksiyon ve f altında A' nın görüntüler kümesi

$$f(A) = \{f(a) : a \in A\} = B$$

ise f' ye bir örten fonksiyon denir.

Tanım 10[4]: $f\colon A \to B$ bir fonksiyon olsun. $\forall a, b \in A$ için

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$$

ise f' ye bir birebir (1-1) fonksiyon denir.

Tanım 11[5]: $(G,\star)$ ve $(H,\circ)$ iki yarıgrup ve $f\colon G \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\forall a, b \in G \text{ için } f(a \star b) = f(a) \circ f(b)$$

ise f' ye $\star$ ve $\circ$ işlemlerine göre G' den H' ye bir homomorfizma denir.

Tanım 12: A ile B kısmen sıralanmış herhangi iki küme olsun. $A \times B$ kartezyen çarpımı üzerinde $(a, b) \in A \times B$ ve $(c, d) \in A \times B$ kısmen sıralama bağıntısı verilmiş olsun. Eğer A üzerindeki sıralamaya göre $a < c$ veya $a = c$ ve B üzerindeki sıralamaya göre $b \leq d$ ise

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a < c) \vee (a = c \wedge b \leq d)$$

sağlanıyorsa $A \times B$' ye sözlük sıralı denir.

1.3. Üçgensel Normlar

Tanım 13[10]: $[0,1]$ birim aralığı üzerinde bir üçgensel norm(t-norm) aşağıdaki dört özelliği sağlayan bir $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonudur.

$(\boldsymbol{T_1})$ $T(x,y) = T(y,x)$ (değişme özelliği)

$(\boldsymbol{T_2})$ $T\big(x,T(y,z)\big) = T(T(x,y),z)$ (birleşme özelliği)

$(\boldsymbol{T_3})$ $y \le z \Longrightarrow T(x,y) = T(x,z)$ (monotonluk özelliği)

$(\boldsymbol{T_4})$ $T(x,1) = x$ (sınır özelliği)

Şimdi t-norm örnekleri verelim.

Örnek 5: $T_M(x,y) = min(x,y)$ fonksiyonu t-normdur.

$T_M(x,y) = min(x,y)$ fonksiyonunun t-norm olduğunu gösterelim.

$(\boldsymbol{T_1})$ $T_M(x,y) = min(x,y) = min(y,x) = T_M(y,x)$

$T_M(x,y) = T_M(y,x)$ olduğu için değişme özelliğini sağlar.

$(\boldsymbol{T_2})$ $T_M\big(x,T_M(y,z)\big) = T_M\big(x,min(y,z)\big)$

$$= min\big(x,min(y,z)\big)$$

$$= min(min(x,y),z) = T_M(T_M(x,y),z)$$

$T_M\big(x,T_M(y,z)\big) = T_M(T_M(x,y),z)$ olduğu için birleşme özelliğini sağlar.

$(\boldsymbol{T_3})$ $y \le z \Longrightarrow min(x,y) \le min(x,z)$

$$\Longrightarrow T_M(x,y) \le T_M(x,z)$$

olduğu için monotonluk şartını sağlar.

$(\boldsymbol{T_4})$ $T_M(x,1) = min(x,1) = x$ olduğu için sınır şartını sağlar

(T_1), (T_2), (T_3) ve (T_4) şartlarını sağladığı için T_M fonksiyonu t-normdur.

Örnek 6: $T_P(x,y) = xy$ fonksiyonu t-normdur.

$T_P(x,y) = xy$ fonksiyonunun t-norm olduğunu gösterelim.

$(\mathbf{T_1})$ $T_P(x,y) = xy = yx = T_P(y,x)$

$$T_P(x,y) = T_P(y,x)$$

olduğu için değişme özelliğini sağlar.

$(\mathbf{T_2})$ $T_P\big(x, T_P(y,z)\big) = T_P(x,yz) = x(yz) = (xy)z = T_P(xy,z) = T_P(T_P(x,y),z)$

$$T_P\big(x, T_P(y,z)\big) = T_P(T_P(x,y),z)$$

olduğu için T_P birleşme şartını sağlar.

$(\boldsymbol{T_3})$ $y \le z \Longrightarrow xy \le xz$

$$\Longrightarrow T_P(x,y) \le T_P(x,z)$$

olduğu için T_P monotonluk özelliğini sağlar.

$(\boldsymbol{T_4})$ $T_P(x,1) = x \cdot 1 = x$

olduğu için T_P sınır şartını sağlar.

$(\mathrm{T_1})$, $(\mathrm{T_2})$, $(\mathrm{T_3})$ ve $(\mathrm{T_4})$ şartlarını sağladığı için T_P fonksiyonu t-normdur.

Uyarı 1[10]:

i. *Tanım 13* ile her t-norm T için ve her $x \in [0,1]$ için aşağıdaki sınır şartları sağlanır.

$$T(1,x) = x$$

$$T(0,x) = T(x,0) = 0$$

Bundan dolayı tüm t-normlar $[0,1]^2$ birim karenin sınırı üzerinde çakışırlar yani eşittirler.

ii. Bir T t-normu (T_3) ile tanımlanan ikinci bileşenine göre monotonluğu (T_1) değişmelilik ile birlikte her iki bileşene göre monotonluğa eşdeğerdir yani aşağıdaki şarta eşdeğerdir.

$$x_1 \le x_2 \text{ ve } y_1 \le y_2 \Longrightarrow T(x_1,y_1) \le T(x_2,y_2)$$

Tanım 14[10]: Eğer iki T_1 ve T_2 t-norm ve her $x, y \in [0,1]^2$ için $T_1(x,y) \leq T_2(x,y)$ sağlanıyorsa T_1, T_2' den zayıf veya T_2, T_1' den güçlü denir ve $T_1 \leq T_2$ şeklinde gösterilir.

Uyarı 2[10]:

i. *Uyarı 1*' in bir sonucu olarak her bir T t-norm ve her $x, y \in [0,1]^2$ için;

$$T(x,y) \leq T(1,y) = y \Longrightarrow T(x,y) \leq min(x,y) = T_M(x,y)$$

ve her $x, y \in]0,1[^2$ için $T(x,y) \geq 0 = T_D(x,y)$' dir.

$$T_D \leq T \leq T_M$$

ii. İlk önce $T_L \leq T_P$ olduğunu gösterelim. Bu durumda;

$T_P(x,y) = xy$

$T_L(x,y) = max(x + y - 1,0)$

$x + y \geq 1$ olsun.

$x + y - 1,\ xy \in [0,1]$ ve $[0,1]$ tam sıralı olduğundan,

$x + y - 1 < xy$ veya $x + y - 1 > xy$ olur.

Varsayalım $x + y - 1 > xy$ olsun.

$$x - 1 > xy - y$$

$$x - 1 > y(x - 1) \qquad x < 1 \text{ için}$$

$$y > 1$$

çelişkisi elde edilir. Bu durumda $T_L(x,y) = x + y - 1 \leq xy \leq T_P(x,y)$' dir.

Eğer $x + y < 1$ ise $T_L(x,y) = 0 \leq T_P(x,y)$' dir. O halde $T_L \leq T_P$' dir

$x = 0.5\ \ y = 0.3$ için

$$T_L(0.5,0.3) = max(0.5 + 0.3 - 1) = 0 < T_P(0.5,0.3) = \frac{5}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{15}{100}$$

olduğundan $T_L < T_P$ elde edilir.

Böylece *Uyarı 2,i*)' yi kullanarak ve $\frac{1}{6} = T_P\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) < T_M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ olduğundan

$T_D < T_L < T_P < T_M$ olur. Böylece $T_D \leq T_L < T_P \leq T_M$ elde edilir.

Önerme 1[10]: A, $]0,1[\subseteq A \subseteq [0,1]$ olacak şekilde bir küme ve $\star: A^2 \to A$, A üzerinde her $x, y, z \in A$ için $(\mathrm{T}_1) - (\mathrm{T}_3)$ şartlarını sağlayacak ve

$$x \star y \leq min(x, y)$$

olacak şekilde bir ikili işlem olsun. Bu takdirde;

$$T(x,y) = \begin{cases} x \star y & (x,y) \in (A \setminus \{1\})^2 \\ min(x,y) & Aksi\ Takdirde \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur.

İspat: T' nin tanımından;

$(\mathbf{T_1})$ $T(x,y) = T(y,x)$

$(\boldsymbol{T_4})$ $T(x,1) = min(x,1) = x$

sağlanır. T' nin tekliği *Uyarı 1,i)* ile elde edilir.

$(\mathbf{T_2})$ Birleşme özelliği ile ilgili olarak $x, y, z \in A \setminus \{0,1\}$ olmak üzere $\star$' ın birleşmeliliğinin bir sonucu olarak;

$$T(T(x,y),z) = (x \star y) \star z = x \star (y \star z) = T\big(x, T(y,z)\big)$$

$$T(T(x,y),z) = T\big(x, T(y,z)\big)$$

Eğer $0 \in \{x,y,z\}$ ise $T(T(x,y),z) = 0 = T\big(x, T(y,z)\big)$

Eğer $1 \in \{x,y,z\}$ ise (T_4)' den $T(T(x,y),z) = T\big(x, T(y,z)\big)$

olduğu için birleşme özelliğini sağlar.

$(\boldsymbol{T_3})$ Monotonluk şartı için $y \leq z$ olsun. *Önerme 1* ile

$x, y, z \in A \setminus \{1\}$ veya $x \in \{0,1\}$ veya $y = 0$ durumlarında $\star$ ve min' un monotonluğundan

$$T(x,y) \leq T(x,z)$$

bulunur. Tek açık olmayan durum $x, y \in A \setminus \{1\}$ ve $z = 1$ olduğu durumdur. Burada ise *Önerme 1'* deki $(*)$' den dolayı $T(x,y) \leq T(x,z)$ bulunur. Böylece T' nin monotonluğu elde edilmiş olur.

(T_1), (T_2), (T_3) ve (T_4) şartlarını sağladığı için T fonksiyonu t-normdur.

Önerme 2[10]:

i. $\forall x \in [0,1]$ için $T(x,x) = x$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_M minimumdur.

ii. $\forall x \in [0,1[$ için $T(x,y) = 0$ eşitliğini sağlayan tek t-norm T_D drastik çarpımdır.

İspat:

i.Her T t-norm için $T(x,y) \leq T_M(x,y) = min(x,y)$ $\quad$ $\mathbf{(1)}$

$\forall x,y \in [0,1]$ için $T\big(min(x,y), min(x,y)\big) = min(x,y) = T_M(x,y) \leq T(x,y)$ $\quad$ $\mathbf{(2)}$

(1) ve (2)' den her $(x,y) \in [0,1]^2$ için $T(x,y) = T_M(x,y)$ olduğu için $T = T_M$' dir.

ii. Her $x \in [0,1[$ için $T(x,x) = 0$ olduğunu kabul edelim.

Bu takdirde $x \leq y$ veya $y \leq x$' dir.

$y \leq x \Longrightarrow 0 \leq T(x,y) \leq T(x,x) = 0$ olur. Yani $T = T_D$' dir.

Uyarı 3[10]:

i. (T_2) birleşme kuralı ile her t-norm bir tek şekilde indiksiyon kullanarak aşağıdaki gibi bir n-li işleme genişletilebilir.

$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in [0,1]^n$ n sıralısı için;

$$\overset{n-1}{\underset{i=1}{T}} x_i = T\left(\overset{n}{\underset{i=1}{T}} x_i, x_n\right) = T\left(x_1, x_2 \ldots, x_n\right)$$

olarak tanımlanır. Uygunluk açısından $x_T^{(0)} = 1$ ve $x_T^{(1)} = x$ koyarız.

ii. Her bir T t-normun T_M' den zayıf olması onu (sayılabilir) sonsuz işleme genişletme olanağı verir.

$[0,1]$' in elemanlarının her $(x_i)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yani her $(x_i)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için;

$$\overset{\infty}{\underset{i=1}{T}} x_i = \lim_{n\to\infty} \overset{n}{\underset{i=1}{T}} x_i$$

$\left(\overset{n}{\underset{i=1}{T}} x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi artmayan ve alttan sınırlı olduğunda sağdan limit daima mevcuttur ama soldan mevcut olmayabilir.

iii. Keyfi bir I indis kümesi ve her $(x_i)_{i\in I} \in [0,1]^I$ ailesi için aşağıdaki ifade iyi tanımlıdır ve (ii)' deki ifadenin genelleştirilmiştir.

$$\underset{i\in I}{T}\, x_i = inf\left\{ \overset{k}{\underset{j=1}{T}}\, x_{ij} \;:\; (x_{i1},\dots,x_{ik}),\, (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ nın bir sonlu alt ailesi} \right\}$$

Örnek 7: T_L t-normunun genelleştirilmesi aşağıdaki gibidir.

$$T_L(x_1, x_2 \dots, x_n) = max\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - (n-1), 0\right)$$

Örnek 8: T_D t-normunun genişletilmişi aşağıdaki gibidir.

$$T_D(x_1, x_2 \dots, x_n) = \begin{cases} x_i & her\ j \neq 0\ için\ x_j = 1\ ise \\ 0 & Aksi\ Takdirde \end{cases}$$

Şimdi *Tanım 13*' deki aksiyomların birbirinden bağımsız oğlunu gösteren örnek çözelim.

Örnek 9: $i = 1,2,3$ için $F_i: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonlarını aşağıdaki gibi sırasıyla tanımlayalım.

$$F_1(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \times [0,1[\\ min(x,y) & Aksi\ Takdirde \end{cases}$$

$$F_2(x,y) = x \cdot y \cdot max(x,y)$$

$$F_3(x,y) = \begin{cases} 0.5 & (x,y) \in \,]0,1[^2 \\ min(x,y) & Aksi\ Takdirde \end{cases}$$

F_1 fonksiyonu incelenecek olursa (T_1) şartının sağlanmadığı (T_2), (T_3) ve (T_4) şartlarının sağlandığı görülür.

F_2 fonksiyonu incelendiğinde (T_2) şartının sağlanmadığı (T_1), (T_3) ve (T_4) şartlarının sağlandığı görülür.

F_3 fonksiyonuna bakılacak olursa (T_3) şartının sağlanmadığı (T_1), (T_2) ve (T_4) şartlarının sağlandığı görülür.

Tanım 15[10]: Bir $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu verilsin. Her yakınsak $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için

$$F(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n, y_n)$$

özelliği sağlanıyorsa bir F fonksiyonuna süreklidir denir.

Örnek 10: $T_M(x,y) = min(x,y)$ t-normu süreklidir.

$T_M(x,y) = min(x,y) = \frac{1}{2}\big((x+y) - |x-y|\big)$ toplam ve mutlak değer fonksiyonları sürekli olduğu için T_M fonksiyonu süreklidir.

Örnek 11: $T_L(x,y) = max(x+y-1,0)$ fonksiyonu süreklidir.

$T_L(x,y) = max(x+y-1,0) = \frac{1}{2}(x+y-1+|x+y-1|)$ olduğu için T_L süreklidir.

Örnek 12: $T_D(x,y) = \begin{cases} y & x = 1 \\ x & y = 1 \\ 0 & Aksi\ Takdirde \end{cases}$

t-normu süreksizdir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$x_n = 1 - \frac{1}{n}$ ve $y_n = 1 - \frac{1}{n}$ dizilerini alalım.

$$(x_n, y_n) = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \Longrightarrow (1,1) = (x_0, y_0)$$

Göstermemiz gereken $\lim_{n\to\infty} T_D(x_n, y_n) = T_D(x_0, y_0)$ olup olmadığıdır.

$$\lim_{n\to\infty} T_D\left(1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ \text{ ve } T_D(x_0, y_0) = T_D(1,1) = 1$$

$0 \neq 1$ olduğu için

$$\lim_{n\to\infty} T_D(x_n, y_n) \neq T_D(x_0, y_0)$$

ve bundan dolayı T_D süreksizdir.

Önerme 3[10]: Azalan olmayan yani $(*)$' ı sağlayan bir $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak F her bileşene göre süreklidir; yani her $x_0, y_0 \in [0,1]$

$$F(x_0, \cdot): [0,1] \to [0,1] \text{ düşey kesimi}$$

ve

$$F(\cdot, y_0): [0,1] \to [0,1] \text{ yatay kesimi}$$

tek değişkenli fonksiyonlardır.

İspat: Eğer $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu sürekli ise F' nin her bir bileşenine göre sürekli olduğu açıktır. Tersine olarak F her bir bileşene göre sürekli olsun.

$\varepsilon > 0, (x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ve $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to x_0$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \to y_0$ olacak şekilde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]$ iki dizi olsun.

$\big(F(x_n, y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \to F(x_0, y_0)$ olduğunu gösterelim

Buradan aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde dört dizi inşa edelim.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için;

$$a_n \le x_n \le b_n \text{ ve } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow x_0 \,,\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow x_0$$

$$c_n \le y_n \le d_n \text{ ve } (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \nearrow y_0 \,,\, (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \searrow y_0$$

olsun. İkinci bileşene göre F' in sürekliliğinden $F(x_0,\cdot)$ düşey kesiminin sürekliliği elde edilir. Bu şu anlama gelir;

F' in monotonluğunu da kullanarak bir $N \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyleki her $n \ge N$ için

$$F(x_0, y_0) - \varepsilon < F(x_0, c_N) \le F(x_0, y_n) \le F(x_0, d_N) < F(x_0, y_0) + \varepsilon$$

F birinci bileşene göre sürekli olduğundan $F(\cdot, c_N)$ ve $F(\cdot, d_N)$ süreklidir ve sonuç olarak bir $m \in \mathbb{N}$ sayısı her $m \ge M$ ve $n \ge N$ için (F' nin monotonluğu kullanılarak)

$$F(x_0, c_N) - \varepsilon < F(a_M, c_N) \le F(x_m, y_n) \le F(b_M, d_N) < F(x_0, d_N) + \varepsilon$$

$K = \max(M, N)$ olarak $\forall k \ge K$ için

$F(x_0, y_0) - 2\varepsilon < F(x_k, y_k) < F(x_0, y_0) + 2\varepsilon$' dir. Gerçekten

$$F(x_k, y_k) < F(x_0, d_N) + \varepsilon < F(x_0, y_0) + \varepsilon + \varepsilon$$

$$F(x_k, y_k) < F(x_0, y_0) + 2\varepsilon$$

Benzer şekilde $F(x_0, y_0) - 2\varepsilon < F(x_k, y_k)$ bulunur.

$$|F(x_k, y_k) - F(x_0, y_0)| < 2\varepsilon$$

Bu da $\left(F(x_n, y_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \to F(x_0, y_0)$ olduğunu gösterir.

Tanım 16[10]: Her $(x_0, y_0) \in [0,1]^2$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı aşağıdaki özelliği sağlayacak şekilde mevcutsa bir $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonuna alt yarı (üst yarı) süreklidir denir.

$(x, y) \in]x_0 - \delta, x_0] \times]y_0 - \delta, y_0]$ olduğunda $F(x, y) > F(x_0, y_0) - \varepsilon$

$(x, y) \in]x_0, x_0 + \delta] \times]y_0, y_0 + \delta]$ olduğunda $F(x, y) < F(x_0, y_0) + \varepsilon$

Önerme 4[10]: Bir $F: [0,1]^2 \to [0,1]$ azalmayan fonksiyonu alt yarı süreklidir ancak ve ancak F her bir bileşene göre sol süreklidir; yani her $(x_0, y_0) \in [0,1]$ ve her $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizileri için;

$$sup\{F(x_n, y_0) : n \in \mathbb{N}\} = F(sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}, y_0)$$

$$sup\{F(x_0, y_n) : n \in \mathbb{N}\} = F(x_0, sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\})$$

İspat: *Önerme 3'* ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Tanım 17[10]: Her $y_0 \in [0,1]$ ve her artan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi için

$$sup\{T(x_n, y_0): n \in \mathbb{N}\} = T(sup\{x_n: n \in \mathbb{N}\}, y_0)$$

şartını sağlayan T t-normuna sol süreklidir denir.

Tanım 18[10]: $T(a, a) = a$ olacak şekilde bir $a \in [0,1]$ elemanına T t-normunun bir idempotent elemanı denir.

Örnek 13: Her $a \in [0,1]$ T_M t-normunun bir idempotent elemanıdır.(Gerçekten T_M *Önerme 2*' nin bir sonucu olarak idempotent elemanlarının kümesi $[0,1]$ eşit olan tek t-normdur.)

Tanım 19[10]: Her t-norm T' nin idempotentleri olan 0 ve 1 sayılarına T' nin trivial idempotent elemanları denir. $]0,1[$' deki her idempotent elemana T' nin trivialden farklı idempotentleri denir.

Tanım 20[10]: T bir t-norm olsun. $T(a, b) = 0$ olacak şekilde bir $b \in]0,1[$ mevcut ise $a \in]0,1[$ elemanına T' nin bir sıfır böleni denir.

Örnek 14: T_L t-normu sıfır bölenlidir.

$$T_L(x,y) = max(x + y - 1{,}0)$$

$a \in]0{,}1[$ keyfi alalım. $a < 1$ olduğundan $1 - a > 0$'dır.

Her $r \in \mathbb{R}^+$ için $\exists\, n \in \mathbb{N}$ öyleki $\frac{1}{n} \leq r$ Arşimet özelliğinden $n \in \mathbb{N}^\star$ öyleki $1 - a > \frac{1}{n}$'dir.

$$n - na > 1$$

$$n - 1 > na$$

$$T_L\left(a, a_{T_L}^{n-1}\right) = T_L(a, \dots, a) = max(na - (n-1), 0) = 0$$

olduğundan a sıfır bölendir. Böylece T_L' nin sıfır bölenlerinin kümesi $]0{,}1['$ dir.

Önerme 5[10]:

i. Bir $a \in [0{,}1]$ elemanı bir t-norm T' nin idempotent elemanıdır ancak ve ancak her $x \in [0{,}1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$' dir.

ii. Eğer T bir sürekli t-norm ise bu takdirde $a \in [0{,}1]$ T' nin bir idempotent elemanıdır ancak ve ancak $x \in [0{,}1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$' dir.

İspat:

i. $\Leftarrow$: Eğer her $x \in [a,1]$ için $T(a,x) = min(a,x)$ ise $T(a,a) = min(a,a) = a$ olduğu için a bir idempotent elemandır.

$\Longrightarrow$: $a \in [0{,}1]$ idempotent eleman olsun. $x \in [a,1]$ keyfi alalım.

$$T(a,x) \leq min(a,x) \tag{1}$$

$$a \leq x \Longrightarrow a = T(a,a) \leq T(a,x) \leq min(a,x) = a \tag{2}$$

(1) ve (2)' den dolayı $T(a,x) = min(a,x)$' dir.

ii. i şıkkından dolayı bir $a \in [0{,}1]$ idempotent elemanı için ve $\forall x \in [0,a]$ için $T(a,x) = x$ olduğunu göstermek yeterlidir.

T sürekli olduğundan $T(a,\cdot) : [0,a] \to [0,a]$ süreklidir.

$T(a,0) = 0$ ve $T(a,a) = a$ idempotent olduğundan ve T' nin sürekliliğinden

$\exists\, z \in [0,a]$ öyleki $T(a,z) = x$' dir.

Ortalama değer teoremini uygularsak;

$$T(a,x) = T\big(a, T(a,z)\big) = T(T(a,a),z) = T(a,z) = x = min(a,x)$$

$$T(a,x) = min(a,x)\text{' dir.}$$

Uyarı 4[10]: Eğer $a \in [0,1]$ bir t-norm T' nin idempotent elemanı ise bu takdirde indiksiyon ile $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_T^{(n)} = a$' dır.

Teorem 1[10]: $\{0,1\} \subseteq \mathrm{I} \subseteq [0,1]$ olacak şekilde her I kümesi için aşağıdakiler denktir.

i. I kümesi T' nin idempotent elemanlarının kümesi ile çakışacak şekilde bir t-norm T mevcuttur.

ii. Bir sonlu veya sayılabilir sonsuz A indeks kümesi ve $[0,1]$' in ikişer tarzda ayrık açık alt aralıklarının $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha\in A}$ kümesi

$$\bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha[\subseteq [0,1] \setminus \mathrm{I} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha]$$

olacak şekilde mevcuttur.

İspat:

$(\boldsymbol{i}) \Longrightarrow (\boldsymbol{ii})$ T bir t-norm ve I , T' nin idempotent elemanlarının kümesi olsun.

$x_0 \in [0,1] \setminus$ I olsun. Bu takdirde $T(x_0, x_0) < x_0$' dır.(x_0 idempotent olmayan eleman)

$$a_{x_0} = sup\{x \in [0, x_0[\, : T(x,x) = x\}$$

$$b_{x_0} = inf\{x \in]x_0, 1] : T(x,x) = x\}$$

$$T\big(a_{x_0}, a_{x_0}\big) \geq sup\{T(x,x) : \ x \in [0, x_0[\, : T(x,x) = x\}$$

$$= sup\{x \in [0, x_0[\, : T(x,x) = x\} = a_{x_0}$$

$T\big(a_{x_0}, a_{x_0}\big) \geq a_{x_0}$ ve bunun sonucu olarak $T\big(a_{x_0}, a_{x_0}\big) = a_{x_0}$

olduğundan a_{x_0} T' nin idempotent elemanıdır.

$$\{x_0\} \subseteq \big]a_{x_0}, x_0\big] \subseteq \big]a_{x_0}, b_{x_0}\big[\cup \{x_0\} \subseteq [0,1] \setminus \mathrm{I}$$

Gerçekten $x_0 \in \big]a_{x_0}, x_0\big]$ olduğundan dolayı $\{x_0\} \subseteq \big]a_{x_0}, x_0\big]$ olduğu açıktır.

Şimdi göstermemiz gereken $\big]a_{x_0}, x_0\big] \subseteq \big]a_{x_0}, b_{x_0}\big[\cup \{x_0\}$ olduğudur.

$y \in \left]a_{x_0}, x_0\right]$ alalım. $a_{x_0} < y < x_0$ veya $y = x_0$' dır.

$y = x_0$ ise ispat doğrulanır. $a_{x_0} < y < x_0$ durumuna bakalım.

$a_{x_0} < y < x_0 \Longrightarrow x_0 < x < y \quad \left(b_{x_0}\ \text{tanımındaki } x'\text{ler için}\right)$

$a_{x_0} < y < x_0 < x \Longrightarrow a_{x_0} < y < x_0 \leq inf\{x \in]x_0, 1] : T(x,x) = x\}$

$a_{x_0} < y < b_{x_0} \Longrightarrow y \in \left]a_{x_0}, b_{x_0}\right] \Longrightarrow y \in \left]a_{x_0}, b_{x_0}\right] \cup \{x_0\}$

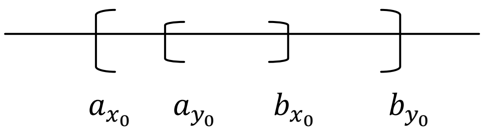
Şimdi $\left]a_{x_0}, b_{x_0}\right[\ \cup \{x_0\} \subseteq [0,1] \setminus$ I olduğunu gösterelim.

$y \in \left]a_{x_0}, b_{x_0}\right] \Longrightarrow a_{x_0} < y < b_{x_0}$

$y \in$ I ve $y < x_0$ olduğunu kabul edelim. $y \in$ I olduğu için $T(y,y) = y \Longrightarrow y \leq a_{x_0}$' dir. Buda bir çelişkidir.

$y \in$ I ve $y > x_0$ alalım. $y \in$ I olduğu için $T(y,y) = y \Longrightarrow b_{x_0} \leq y$' dir, yine bir çelişki elde edilir. Dolayısıyla $y \notin$ I ve $y \in [0,1] \setminus$ I' dır.

Her $x_0, y_0 \in [0,1] \setminus$ I ve $x_0 \neq y_0$ için $\left]a_{x_0}, b_{x_0}\right[$ ve $\left]a_{y_0}, b_{y_0}\right[$ aralıları ya ayrık ya da eşittir. Yani;



durumu mümkün olamaz. Aksi takdirde a_{x_0} ile a_{y_0} idempotent olduğundan ve x_0 idempotent olmadığından sıralamada eşitlik olamaz.

$a_{x_0} < x_0 < a_{y_0}$ olursa a_{y_0} idempotent olduğundan b_{x_0}' ın tanımından $b_{x_0} < a_{y_0}$ çelişkisi elde edilir.

$a_{y_0} < x_0$ olursa a_{y_0} idempotent olduğundan $a_{x_0} > a_{y_0}$ çelişkisi elde edilir.

Bu çelişkiler aralıkları ayrık ve eşit kabul etmediğimizden kaynaklandı.

Bu aralıkların her biri boştan farklıdır ve bundan dolayı bir rasyonel sayı içerirler. Bu rasyonel sayı bir aralığı indekslemek için kullanılabilir. Sonuçta elde edilen bir A indeks kümesinin kardinalitesi $[0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıların kardinalitesine genişletilemez. Yani A sonlu veya

$$\bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha[\subseteq [0,1] \setminus \mathrm{I} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha[$$

şartını sağlayan $[0,1] \setminus$ I' nın sayılabilir sonsuz bir alt kümesidir.

$(\boldsymbol{ii}) \Longrightarrow (\boldsymbol{i})$ Eğer I, $[0,1]$' nın

$$\bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha[\subseteq [0,1] \setminus \mathrm{I} \subseteq \bigcup_{\alpha\in A}]a_\alpha, b_\alpha[$$

şartını sağlayan bir alt kümesi ise (burada A sonlu veya sayılabilir sonsuz bir indeks kümesi ise ve $(]a_\alpha, b_\alpha[)_{\alpha\in A}$ $[0,1]$' nın ikişer tarzda ayrık ayrık alt aralıklarının bir ailesi ise) bu $[0,1] \setminus$ I' nın ikişer tarzda ayrık $(J_\alpha)_{\alpha\in A}$ sonlu veya sayılabilir sonsuz ailesinin bir birleşimi olarak temsil edilmesi anlamına gelir. Burada her $\alpha \in A$ için ya $J_\alpha =]u_\alpha, v_\alpha[$ veya $J_\alpha =]u_\alpha, v_\alpha]$ (uygun $u_\alpha, v_\alpha \in [0,1]$ için) $J_\alpha \cup J_\beta$ $(\alpha \neq \beta)$ için bir aralık değildir.

$$T(x,y) = \begin{cases} u_\alpha & (x,y) \in J_\alpha \times J_\alpha \\ min(x,y) & Aksi\ Takdirde \end{cases}$$

ile tanımlanan $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ fonksiyonu bir t-normdur. T' nin idempotent elemanları, tanımından I ile çakışır.

Sonuç[10]: T her $a \in [0,1[$ için $\lim_{x\searrow a} T(x,x) = a$ olduğunda $T(a,a) = a$ olacak şekilde bir t-norm olsun. Bu takdirde T' nin idempotent elemanlarının kümesi $[0,1]$ aralığının bir kapalı alt kümesidir.

İspat: *Teorem 1*' in ispatının bir sonucu olarak T' nin idempotent elemanlarının azalmayan yakınsak her dizisi için bu dizinin limiti T' nin bir idempotent elemanıdır. Gerçekten $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ T' nin idempotent elemanlarının bir artmayan yakınsak dizisi ise *Teorem 1*' in ispatından;

$$T(a,a) \geq \lim_{n\to\infty} T(b_n, b_n) = \lim_{n\to\infty} b_n = a \Longrightarrow T(a,a) = a$$

dır. Eğer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ T' nin idempotent elemanlarının $a \in [0,1[$' e yakınsayan bir artmayan dizisi ise;

$$\lim_{x_n \searrow a} T(x_n, x_n) = a$$

olduğundan hipotezle $T(a,a) = a$ ve bundan dolayı a idempotenttir.

Tanım 21[10]: Keyfi bir t-norm T için aşağıdaki özellikleri göz önüne alalım;

i. $x > 0$ ve $y < z \Longrightarrow T(x,y) < T(x,z)$ özelliğini sağlayan T t-normuna kesin monoton denir.

ii. $T(x,y) = T(x,z) \Longleftrightarrow x = 0$ veya $y = z$ özelliğini sağlayan T t-normuna kısaltmalı denir.

iii. $T(x,y) = T(x,z) > 0 \Longrightarrow y = z$ özelliğini sağlayan T t-normuna şartlı kısaltma özellikli denir.

iv. Her $x \in]0,1[$ için $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0$ özelliğini sağlayan T t-normuna limit özelliğine sahip denir.

v. Her $(x,y) \in]0,1[^2$ için bir $n \in \mathbb{N}$ için $x_T^{(n)} < y$ olacak şekilde bir n var ise T üçgensel normuna Arşimedyan denir.

Şimdi tanımdaki şartları sağlayan veya sağlamayan t-normlara örnek verelim.

Örnek 15: T_M t-normu bu özelliklerden hiçbirini sağlamaz.

$\forall x \in [0,1]$ elemanı T_M' un bir idempotent elemanı olduğunu hatırlayalım.

Kesin Monotonluk;

$$x = \frac{1}{3} \text{ için } \frac{2}{3} < \frac{3}{4} \text{ olup } T_M\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = min\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \leq min\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right) = T_M\left(\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right)$$

olduğu için kesin monotonluk sağlanmaz.

Kesin monotonluk sağlanmadığı için kısaltma kuralı ve kesin monotonluk için verdiğimiz aynı örnekten şartlı kısaltma şartını da sağlamaz.

Arşimedyanlık;

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3} \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } x_T^{(n)} = \frac{2}{3} \nless y = \frac{1}{3}$$

olduğu için Arşimedyanlık özelliğini sağlamaz.

Limit Özelliği;

$x = \frac{1}{4}$ için $\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = \frac{1}{4} \neq 0$

olduğu için limit şartını sağlamaz.

Örnek 16: T_P t-normu bu özelliklerin hepsini sağlar.

T_P t-normunun kesin monotonluk, şartlı kısaltma, kısaltma özelliklerini sağladığı açıktır.

Arşimedyanlık ve limit özelliklerini sağladığını gösterelim.

Arşimedyanlık;

$x, y \in]0,1[$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_{T_P}^{(n)} = x^n \geq y$ olsa $0 = \lim_{n\to\infty} x^n \geq y \Longrightarrow y = 0$

çelişkisi elde edilir. O halde $\exists m \in \mathbb{N}$ öyleki $x_{T_P}^{(n)} < y$'dir. Bundan dolayı T_P Arşimedyandır.

Limit Özelliği;

x, 0 ile 1 arasındaysa $\lim_{n\to\infty} \dots . = 0$ olduğu için $\lim_{n\to\infty} x_{T_P}^{(n)} = 0$' dır. Bundan dolayı T_P limit şartını sağlar.

Uyarı 5[10]: Eğer bir t-norm T kısaltma özelliğini sağlarsa açık olarak şartlı kısaltma özelliğini de sağlar. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 17: T_L t-normu şartlı kısaltma özelliğini sağlarken kısaltma özelliğini sağlamaz.

Önerme 6[10]: T bir t-norm olsun. Bu takdirde;

i. T kesin monotondur ancak ve ancak T kısaltma özelliğini sağlar.
ii. T kesin monoton ise T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir.
iii. T kesin monoton ise T sıfır bölene sahip değildir.

İspat:

i. T kesin monoton olsun.

$x > 0$ ve $y < z \Longrightarrow T(x, y) < T(x, z)$'dir.

$T(x, y) = T(x, z)$ olsun.

$x = 0$ ise kural doğrulanır. $x \neq 0$ olsun.

$x > 0$ ise $y < z$ veya $y > z$' dir.

$y < z$ ise $T(x, y) < T(x, z)$ çelişkisi, $y > z$ ise $T(x, y) < T(x, z)$ çelişkisi elde edilir.

Bu takdirde $y = z$ elde edilir.

Tersine olarak T kısaltma özelliğini sağlasın.

$T(x, y) = T(x, z) \Leftrightarrow x = 0$ veya $y = z$' dir.

$x > 0$ ve $y < z$ olduğunda $T(x, y) < T(x, z)$ olduğunu göstermemiz gerekir

$T(x, y) \leq T(x, z)$ olduğunu biliyoruz.

$T(x, y) = T(x, z)$ eşitliğinden $x = 0$ veya $y = z$ çelişkileri elde edilir.

Bu takdirde $T(x, y) \neq T(x, z)$' dir. Dolayısıyla $T(x, y) < T(x, z)$' dir.

ii. $\forall x \in]0,1[$ için $T(x, x) < T(x, 1) = x$ olduğundan sadece trivial idempotentleri vardır.

iii. $a \in]0,1[$ bir sıfır bölen olsa yani;

bir $b \in]0,1[$ için $T(a, b) = 0$ olduğunda $T\left(a, \frac{b}{2}\right) = 0 = T(a, b)$

çelişkisi elde edilir. Bu T' nin kesin monotonluğu ile çelişir.■

Teorem 2[10]: Bir t-norm T için aşağıdaki maddeler denktir.

i. T Arşimedyandır**.**

ii. T limit özelliğini sağlar.

iii. T sadece trivial idempotent elemanlara sahiptir ve bir $x_o \in]0,1[$ için $\lim_{x \searrow x_0} T(x, x) = x_0 \Longrightarrow T(y_0, y_0) = x_0$ olacak şekilde bir $y_0 \in]x_o, 1[$ elemanı mevcuttur.

İspat:

$(\boldsymbol{i}) \Longrightarrow (\boldsymbol{iii})$ T Arşimedyan olsun.

Bir $a \in]0,1[$' in T t-normunun idempotent elemanı olduğunu varsayalım.

Bu takdirde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_T^{(n)} = a\, , \frac{a}{2} \in]0,1[$' dır. T arşimedyan olduğu için $\exists\, m \in \mathbb{N}$ öyleki $a_T^{(m)} < \frac{a}{2}$' dir. Bu bir çelişkidir. o halde T sadece trivial idempotentlere sahiptir.

$x_0 \in]0,1[$ için $\lim_{x \searrow x_0} T(x,x) = x_0$ olsun.

Her $y \in]x_0, 1[$ için $T(y,y) \geq x_0$ ise indiksiyon ile her $y \in]x_0, 1[$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $y_T^{(n)} > x_0$' dır. Bu ise Arşimedyan özelliğiyle çelişir.

Eğer bir $y \in]x_0, 1[$ için $T(y,y) = x_0$ ise $T(x,x) \leq T(y,y) \leq x_0$'dır.

$x_0 = \lim_{x \searrow x_0} T(x,x) \leq T(y,y) \leq x_0$ ise $T(y,y) = x_0$' dır.

$(\boldsymbol{iii}) \Longrightarrow (\boldsymbol{ii})$ T (iii) şıkkını sağlasın.

Keyfi fakat sabit $x \in]0,1[$ alalım. $x_0 = \lim_{n \to \infty} x_T^{(n)}$ olsun.(T_3) monotonluk özelliği ile $\lim_{y \searrow x_0} T(y,y) = x_0$ olur.

Eğer $x_0 > 0$ ise $T(y_0, y_0) = x_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x_T^{(n)} < y_0$ olacak şekilde bir $y_0 \in]x_0, 1[$ mevcuttur. O halde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ öyleki $x_T^{(n_0)} < y_0$' dır.

Buradan yeteri kadar büyük bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_T^{(2n_0)} = x_0$ olmalıdır. Çünkü

$$T(x_0, x_0) < T\left(x_T^{(n_0)}, x_T^{(n_0)}\right) < T(y_0, y_0) = x_0$$

$$2n + 2 \geq n_0 \text{ için } x_T^{(2n+2)} \leq x_T^{(2n_0)} \leq x_0$$

$$x_0 = \lim_{n \to \infty} x_T^{(2n+2)} \leq x_T^{(2n_0)} \leq x_0$$

$$\exists n_o \in \mathbb{N} \text{ öyleki } x_T^{(2n_0)} = x_0$$

$T(x_0, x_0) = T\left(x_T^{(n_0)}, x_T^{(n_0)}\right) = x_T^{(4n_0)} = x_0$ ise $x \in]0,1[$ idempotent elemandır. Bu bir çelişkidir. O halde $x_0 = 0$ olduğu için limit özelliğini sağlar.

$(\boldsymbol{ii}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$ $x, y \in \,]0,1[$ seçelim.

$\lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0$ olduğundan $\exists n \in \mathbb{N}$ öyleki $x_T^{(n)} < y$' dir. Çünkü her $n \in \mathbb{N}$ için $x_T^{(n)} \geq y$ olsa $0 = \lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} \geq y$ için $y = 0$ çelişkisi elde edilir.

Önerme 7[10]: Her Arşimedyan t-norm T için aşağıdakiler denktir;

i. T sol süreklidir.
ii. T süreklidir.

İspat:

$(\boldsymbol{ii}) \Rightarrow (\boldsymbol{i})$ trivialdir.

Tersini göstermek için T sol sürekli ve Arşimedyan olsun. Fakat bir $(x_0, y_0) \in \,]0,1[^2$ noktasında sağ sürekli olmasın. $[0,1]$' de keyfi kesin artan $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisini $\lim_{n\to\infty} z_n = 1$ olacak şekilde sabit alalım. T Arşimedyan olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $k_n, \ell_n \in \mathbb{N}$ sayıları (k_n, ℓ_n bu eşitsizliği sağlayan en küçük tam sayı) ve tam sıralılıktan

$$(z_n)_T^{(k_n)} \leq x_0 \leq (z_n)_T^{(k_n-1)}$$

$$(z_n)_T^{(\ell_n)} \leq y_0 \leq (z_n)_T^{(\ell_n-1)}$$

olacak şekilde mevcuttur. Bu ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(z_n)_T^{(k_n+\ell_n)} \leq T(x_0, y_0) < T(x_0^+, y_0^+) \leq (z_n)_T^{(k_n+\ell_n-2)}$$

dir. T' nin sürekliliğinden $\lim_{n\to\infty}(z_n)_T^{(2)} = 1$ ve sonuç olarak

$$\lim_{n\to\infty} T\left(T(x_0^+, y_0^+), (z_n)_T^{(2)}\right) = T(x_0^+, y_0^+)$$

dir. Fakat bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
(z_n)_T^{(k_n+\ell_n)} &\leq T(x_0, y_0) \\
&< T\left(T(x_0^+, y_0^+), (z_n)_T^{(2)}\right) \\
&\leq T\left((z_n)_T^{(k_n+\ell_n-2)}, (z_n)_T^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

$$= (z_n)_T^{(k_n+\ell_n)}$$

çelişkisi elde edilir.

Örnek 18: T_L t-normu bir Arşimedyan t-normun kesin monoton olmasını gerektirmediği gibi limit özelliğini ve kısaltma özelliğini de gerektirmediğini gösterir.

Örnek 19: T_M sürekli t-norm bu özelliklerin hiçbirini sağlamaz.

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2} & (x,y) \in [0,1[^2 \\ min(x,y) & Aksi\ Taktide \end{cases}$$

t-normu sürekli olmayan bir kesin monoton ve bir kısaltma özelliğini sağlayan t-normdur.

Böylece bu örnekler gösterir ki *Tanım 21*' de tanımlanan özellikler süreklilikten bağımsızdır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE İRDELEME

2.1. Kesin ve Süreksiz Üçgensel Normların Bir Ailesi

Bu kısmın büyük bir bölümünde Mirko BUDINCEVIC ve Milos KURILIC tarafından hazırlanan Kesin ve Süreksiz Üçgensel Normların Bir Ailesi adlı makaleden yararlanılmıştır.[7]

Bu bölümde [11,12]' de verilen ve Pap tarafından ortaya konulan aşağıdaki problemleri cevaplayacağız:

Problem 1: Bir $T_a\colon [0,1]^2 \to [0,1]$, $(x, y) \in (0,1)^2$ noktasında süreksiz olan bir kesin t-norm mevcut mudur?

$$T_a(x,y) = \begin{cases} axy & (x,y) \in [0,1[^2 \\ xy & Aksi\ Taktirde \end{cases}$$

(burada a$\in (0,1)$ alınır) ile tanımlanan T_a t-normu kesin t-normdur ve $x \in \,]0,1]$ olmak üzere $(x, 1)$ veya $(1, x)$ şeklindeki tüm noktalarda süreksizdir.

Problem 2: Bir k$\in (0,1)$ ve her $x, y \in [0,1[$ için

T(kx, y)= T(x, ky)

eşitliğini sağlayan T_a 'dan ($a \in \,]0,1[$ olmak üzere) farklı bir kesin t-norm T var mıdır?

Tanım 22: Bir $(S, *, <)$ üçlüsüne kesin tam sıralı değişmeli bir yarıgrup denir:⇔ $<$ sırası, S üzerinde tam sıradır, (S, $*$) da bir değişmeli yarıgruptur ve

$$\forall\, x, y, z \in S \text{ için } x < y \Rightarrow x * z < y * z \qquad \mathbf{(2,1)}$$

özelliğini sağlar.

ℕ ile pozitif tam sayılar kümesini ve (n_i: i$\in$ ℕ)veya kısaca (n_i) ile ℕ de bir diziyi gösterelim.

S, ℕ de tüm kesin artan dizilerin kümesi ve $\prec$, S'de sözlük sırası olsun. Yani;

$i_0 = \delta_n^m = \min\{i \in \square : m_i \neq n_i\}$ olmak üzere

$$(m_i) \prec (n_i) :\Leftrightarrow (m_i) \neq (n_i) \text{ ve } m_{i_0} < n_{i_0} \text{ ‘dır.}$$

$\forall\, x \in (0,1]$ elemanının $x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$ şeklinde gösterimini kullanacağız, burada $x_j \in \{0,1\}$ ikili rakamlar ve sonsuz çoklukta j∈ ℕ için $x_j \neq 0\ 'dır.$

Diğer bir deyişle;

$$x = \sum_{i\in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n_i}} \text{ olacak şekilde } (n_i) \in S \text{ vardır.}$$

Teorem 3: $(\mathbb{N}, *, <)$,(ℕ’ nin $<$ doğal sıralamasına göre, yani 1<2<3<4<…) bir kesin, tam sıralı, değişmeli yarıgrup olsun ve

$$\circ : S^2 \to S$$

$$(m_i) \circ (n_i) = (m_i \star n_i)$$

$$\otimes : (0,1]^2 \to (0,1]$$

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{m_i}}\right) \otimes \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n_i}}\right) = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{m_i * n_i}}\right)$$

işlemleri verilsin.

$$T : (0,1]^2 \to (0,1]$$

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \; veya \; y = 0 \\ x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ x \otimes y & (x,y) \in (0,1) \end{cases}$$

ile verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler gerçeklenir

a) $\forall$ m,n ∈ ℕ için $m \star n \geq m + n - 1$

b) $(S, \circ, \prec)$ bir kesin, tam sıralı, değişmeli yarıgruptur.

c) Eğer $S_1 = S \setminus \{(1,2,3,\ldots)\}$ ise bu takdirde $(S_1, \circ, \prec)$ tam sıralı değişmeli yarıgruptur.

d) $F(\langle n_i \rangle) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n_i}}$ ile verilen $F : S \to]0,1]$ dönüşümü $(S, \circ, \prec)$ ve $(]0,1], \otimes, >)$ yapılarının bir izomorfizmidir.

e) $(]0,1], \otimes, >)$ bir kesin, tam sıralı, değişmeli yarıgruptur.

f) $\forall x, y \in]0,1]$ için $x \otimes y < x$' dir.

g) T kesin t-normdur.

h) Eğer J, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}}$ sonlu toplamı olarak gösterilebilen $]0,1[$' deki sayıların kümesi ise T dönüşümü $(J \times]0,1[) \cup (]0,1[\times J)$ kümesinin her noktasında süreksizdir.

İspat:

a) $m, n \in \mathbb{N}$ için $m \star n < m + n - 1$ olduğunu kabul edelim.

$m_0 := min\{m \in \mathbb{N} \ : \ \exists n \in \ \mathbb{N} : (m \star n < m + n - 1)\}$ ve

$n_0 := min\{n \in \ \mathbb{N} : m \star n < m + n - 1 \}$ olsun.

Bu takdirde $m_0 \star n_0 < m_0 + n_0 - 1$ ve açık olarak $m_0 > 1$ veya $n_0 > 1$ ‘ dir.

Eğer $m_0 > 1$ ise;

$$m_0 \star n_0 > (m_0 - 1) \star n_0 \geq m_0 - 1 + n_0 - 1 = m_0 + n_0 - 2$$

çelişkisi elde edilir.

Eğer $n_0 > 1$ ise;

$$m_0 \star n_0 > m_0 \star (n_0 - 1) \geq m_0 + (n_0 - 1) - 1 = m_0 + n_0 - 2$$

ikinci çelişkisi elde edilir.

O halde kabul yanlıştır.

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ için $m \star n \geq m + n - 1$’dir.

b) Sadece $(\mathbf{2.1})$ özelliğini göstereceğiz.

$(m_i) \prec (n_i)$ ve $(p_i) \in S$ olsun.

O halde $i < i_0 \ (= \delta_n^m)$ için $m_i = n_i$ gerçeklenir.

Böylece $m_i \star p_i = n_i \star p_i$ ve $m_{i_0} < n_{i_0}$ olduğundan $\star$ için $(\mathbf{2.1})$ ile

$m_{i_0} < n_{i_0} \Rightarrow m_{i_0} \star p_{i_0} < n_{i_0} \star p_{i_0}$' dır.

Bundan dolayı $(m_i) \circ (p_i) \prec (n_i) \circ (p_i)$ elde edilir.

c) $(m_i), (n_i) \in S_1$ ise $m_2, n_2 > 1'$ dir.

Böylece $m_2 \star n_2 > m_2 \star 1 > 1 \star 1 \geq 1$ ve bundan dolayı $m_2 \star n_2 \geq 3$' tür.

Dolayısıyla $(m_i) \circ (n_i) \neq (1,2,3, \ldots)$ olduğundan S_1, S'nin altyapısıdır.

d) F'nin örten olduğu açıktır.

$(m_i) \prec (n_i)$ ve $\delta_n^m = k$ olsun. Bu takdirde;

$$F(\langle n_i \rangle) \leq \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \frac{1}{2^{m_3}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_k - 1}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{m_k + j}} = \frac{1}{2^{m_1}} + \frac{1}{2^{m_2}} + \ldots + \frac{1}{2^{m_k - 1}} + \frac{1}{2^{m_k}} < F(\langle m_i \rangle)$$

olduğundan F birebirdir.

$$F(\langle m_i \rangle \circ \langle n_i \rangle) = F(\langle m_i * n_i \rangle) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{m_i * n_i}} = F(\langle m_i \rangle) \otimes F(\langle n_i \rangle)$$

olduğundan F homomorfidir.

Sonuç olarak F birebir, örten, homomorfi olduğundan izomorfidir.

e) $F(\langle 1,2,3, \ldots . \rangle) = 1$ olduğundan
$F(S \setminus \{1,2, \ldots\}) =]0,1] \setminus \{1\}$ yani

$F(S_1) =]0,1[$ elde ederiz.

(c) ile S_1, S' nin tam sıralı, değişmeli, alt yarıgrubu olduğundan, (d) ile S ve $]0,1]$ izomorf olduğundan $F(S_1) = (0,1)$' de $]0,1]$' in tam sıralı değişmeli alt grubudur.

f) $x, y \in]0,1]$ ve

$$x = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{n_i}} \quad , \quad y = \sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{m_i}}$$ olsun.

i> 1 için $n_i \geq i > 1$ gerçeklenir. Bundan dolayı;

$(n_i > 1)$

$m_i + n_i > m_i + 1$

$m_i + n_i - 1 > m_i + 1 - 1 = m_i$ ve (a) ile

$m_i \star n_i \geq m_i + n_i - 1$ ile

$$x \otimes y = \left(\sum_{i\in} \frac{1}{2^{n_i}}\right) \otimes \left(\sum_{i\in} \frac{1}{2^{m_i}}\right)$$

$$= \sum_{i\in} \frac{1}{2^{m_i * n_i}} \leq \sum_{i\in} \frac{1}{2^{m_i + n_i - 1}} < \sum_{i\in} \frac{1}{2^{m_i}} = x$$ olduğundan

$x \otimes y < x$ ' dir.

g) Açık olarak 1 $([0,1], T)$' nin sınır elemandır.

Değişmelilik: $x, y \in [0,1]$

Eğer $xy = 0 \Longrightarrow T(x,y) = T(y,x) = 0$' dır.

Eğer $x = 1 \Longrightarrow T(x,y) = T(1,y) = y = T(y,1) = T(y,x)$

Eğer $y = 1 \Longrightarrow T(x,y) = T(x,1) = x = T(1,x) = T(y,x)$ ve $x, y \in]0,1[$ ise $\otimes$ işleminin değişmeliliğinden istenilen elde edilir.

Birleşmelilik: $x, y, z \in [0,1]$ olsun.

Eğer $x, y, z = 0 \Longrightarrow T\big(x, T(y,z)\big) = T(T(x,y), z)$

Eğer $x = 1$ ise;

$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(1, T(y,z)\big) = T(y,z) = T(T(1,y), z) = T(T(x,y), z)$

Eğer $y = 1$ ise;

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T(1,z)\big) = T(x,z) = T(T(x,1), z) = T(T(x,y), z)$$

Eğer $z = 1$ ise;

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T\big(x, T(y,1)\big) = T(x,y) = T(T(x,y), 1) = T(T(x,y), z)$$

ve $x, y, z \in]0,1[$ $için$ $\otimes$ işleminin birleşmeliliğinden istenen elde edilir.

Monotonluk ve Kesinlik:

$x, y \in [0,1]$, $z \in]0,1]$ ve $x < y$ olsun.

$z = 1 \Longrightarrow T(x,z) = x < y = T(y,z)$

$z < 1$ ve $x < t < y$ olsun.

$T(x,z) < T(t,z) < T(y,z)$ olduğunu göstereceğiz.

Eğer $x = 0 \Longrightarrow T(x,z) = 0 < t \otimes z = T(t,z)$

Eğer $x > 0 \Longrightarrow T(x,z) = x \otimes z < t \otimes z = T(t,z)$ olduğundan

$$T(x,z) < T(t,z) \qquad (\star)$$

$y = 1 \Longrightarrow T(t,z) = t \otimes z < y \otimes z < z = T(y,z)$

$y < 1 \Longrightarrow T(t,z) = t \otimes z < y \otimes z = T(y,z)$ olduğundan

$$T(t,z) < T(y,z) \qquad (\star\star)$$

$(\star)$ ve $(\star\star)$ ile $T(x,z) < T(t,z) < T(y,z)'$dir ve bundan dolayı T kesin monoton üçgensel normdur.

h) $J = \left\{ x = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} : \mathrm{n_i} \in \mathbb{N} \right\}$ olmak üzere T, $(J \times]0,1[) \cup (]0,1[\times J)$ kümesi üzerinde süreksizdir. Bunu göstermek için $x \in J$ ve $y \in]0,1[$ alalım.

$$x = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2^{n_i}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_k + j}} \quad \text{ve} \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell_i}} \text{ ’ dir.}$$

Bu takdirde;

$$x \otimes y = \sum_{i=1} \frac{1}{2^{n_i * \ell_i}} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{(n_k + j + 1) * l_{k+j}}}$$

elde edilir ve $\forall m \in \mathbb{N}$ için x_m’ i

$$x_m = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}} + \sum_{j = n_k + m} \frac{1}{2^j}$$

ile tanımlarız. Açık olarak;

$$\lim_{m \to \infty} x_m = x \text{ ve}$$

$$x_m \otimes y = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i * \ell_i}} + \frac{1}{2^{(n_k + m) * \ell_{k+1}}} + \frac{1}{2^{(n_k + m + 1) * \ell_{k+2}}} + \ldots \text{ ’dir.}$$

Böylece;

$$\lim_{m \to \infty} \left(x_m \otimes y \right) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i * \ell_i}} \quad \text{ve}$$

$$\lim_{m\to\infty}(x_m \otimes y) - x \otimes y = \frac{1}{2^{n_i * \ell_i}} - \left(\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{2^{n_i * \ell_i}} + \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(n_k + j+1)*\ell_{k+j}}}\right)$$

buluruz. $\star$'ın monotonluğundan indiksiyon ile

$$j \geq 0 \text{ için } (n_k + j + 1) \star \ell_{k+j} \geq (n_k \star \ell_k) + 2j + 1$$

ve

$$\lim_{m\to\infty}(x_m \otimes y) = x \otimes y \geq \frac{1}{2^{n_k * \ell_k}}\left(1 - \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2j+1}}\right) = \frac{1}{3 \cdot 2^{n_k * \ell_k}}$$

elde edilir ve bu yüzden T, (x, y) noktasında süreksizdir. ■

Teorem 4:

a) $x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$ ve $y = 0, y_1y_2y_3 \ldots$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$\forall i \leq n \quad \left(x_i = y_i \Rightarrow |x - y| < \frac{1}{2^{n-1}}\right)$

b) $\forall x \in (0,1) \setminus J, \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists r \in \mathbb{N}, \forall z \in (0,1)$ için

$\left(|x - z| < \frac{1}{2^r} \Rightarrow \forall i \leq n \ x_i = z_i\right)$

c) $\otimes$ fonksiyonu $\left((0,1) \setminus J\right)^2$'nin her noktasında süreklidir. Aynı iddia t-norm T için sağlanır.

İspat :

a) $x \neq y$ ise $x < y$ veya $x > y$'dir.

Eğer $x < y$ ise

$x = 0, x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots$ ve $u = 0, x_1x_2x_3 \ldots x_n$ olsun.

$$u \leq x$$

$y = 0, y_1y_2y_3 \ldots y_n \ldots$ ve $v = 0, x_1x_2x_3 \ldots x_n1111 \ldots$ olsun.

$$y \leq v$$

$$|x - y| \leq v - u = \sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{\mathrm{n}}}$$

dir.

b) $x \in]0,1[\setminus J$ keyfi alalım ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

$x \notin J$ olduğundan $\exists\ s \coloneqq min\{i > n :\ x_i = 0\}$ ve $x < u = 0, x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots x_{s-1}1$

$\frac{1}{2^{r_1}} \leq u - x$ olacak şekilde $r_1 \in \mathbb{N}$ seçelim.

Şimdi $z \in \left(x, x + \frac{1}{2^{r_1}}\right)$ için $x < z < u$ elde ederiz ve açık olarak $\forall\ i \leq n$ için $z_i = x_i$'dir. $t \coloneqq min\{i > n :\ x_i = 1\}$ olsun. Bu takdirde $x > w = 0, x_1x_2x_3 \ldots x_n \ldots x_{t-1}$ ve $r_2 \in \mathbb{N}$ seçelim öyleki $x - w \geq \frac{1}{2^{r_2}}$ olsun. $z \in \left(x - \frac{1}{2^{r_2}}, x\right)$ için $w < z < x$'dir.

$\forall i \leq n$ için $z_i = x_i$ idi. Sonuç olarak $r \coloneqq max\{r_1, r_2\}$ olmak üzere $|x - z| \leq \frac{1}{2^r}$' dir.

c) $x, y \in]0,1[\setminus J$ ve $\lim\limits_{m \to \infty} x_m = x$ ve $\lim\limits_{m\to\infty} y^m = y$ olsun.

Verilen $\varepsilon > 0$ keyfi için $\exists\ n \in \mathbb{N}$ öyleki $\frac{1}{2^{n-1}} < \varepsilon$ ve $r_x, r_y \in \mathbb{N}$, $\forall z \in]0,1[$ için (b) için

$$|x - z| < \frac{1}{2^{r_x}} \Longrightarrow \forall i \leq n\,, z_i = x_i$$

ve

$$|\mathrm{y} - \mathrm{z}| < \frac{1}{2^{\mathrm{r_x}}} \Longrightarrow \forall i \leq n\,, z_i = y_i \qquad \mathbf{(2.2)}$$

olacak şekilde seçelim.

$r = max\{r_x, r_y\}$ alalım. x^m' in x'e, y^m'in y'ye yakınsamasından dolayı $\exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ öyleki

$$\forall m \geq m_1\ için\ |x - x^m| < \frac{1}{2^r}$$

$$\forall m \geq m_2\ için\ |y - y^m| < \frac{1}{2^r}$$

dir. $(\mathbf{2.2})$' ye göre $m_0 = max\{m_1, m_2\}$ alınırsa $\forall m \geq m_0$ için

$$\forall i \leq n\ \ (x_i^m = x_i\ \wedge y_i^m = y_i) \qquad \mathbf{(2.3)}$$

gerçeklenir. $\otimes$ tanımı ile $x \otimes y$'nin p. bileşeni 1 $\Leftrightarrow \exists i_x, i_y \leq p$ öyle ki

$$x_{i_x} = y_{i_y} = 1 \wedge i_x \star i_y = p \wedge \left|\{\{i < i_x :\ x_i = 1\}\}\right| = \left\{\{i < i_y :\ y_i = 1\}\right\}$$

Böylece $(\mathbf{2.3})$ ile $x^k \otimes y^k$'nın ilk n. bileşeni ve $x \otimes y$' nin ilk n. bileşeni eşittir. Bu sebeple (a) ile

$$\forall m > m_0 \; için \; |x^m \otimes y^m - x \otimes y| < \frac{1}{2^{n-1}} < E$$

elde edilir ve sonuç olarak $\otimes$ süreklidir. ■

Şimdi yukarıdaki teoremin uygulaması olarak bazı örnekler verelim.

Örnek 20: $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi ve $\star : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$ olsun. Aşağıdaki fonksiyonları alalım.

$$m \star_1 n = m + n$$

$$m \star_2 n = m + n - 1$$

$$m \star_3 n = m \cdot n$$

Teorem 3 ile $\star_1, \star_2, \star_3$'e karşılık gelen t-normları oluşturabiliriz. *Teorem 3* (a*)* ile $m \star n = m + n - 1$ işlemiyle inşa edilen t-norm en büyük t-normdur.

Eğer $m \star_1 n = m + n$ alırsak $\forall p \in \mathbb{N}$ için

$$T\left(\frac{1}{2^p}\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^{n_i}}, \sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^{m_i}}\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^{n_i+m_i+p}} = \mathrm{T}\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^{n_i}}, \frac{1}{2^{p}}\sum_{i\in\mathbb{N}}\frac{1}{2^{m_i}}\right)$$

dır. Dolayısıyla *Teorem 3* ile $\star_1$ için tanımlanan t-norm T

$$T(kx, y) = T(x, ky) \;, \quad \forall x, y \in \,]0,1]$$

eşitliğini sağlar. (***Problem 2***)

Bu sebeple *Problem 2*'deki T_a'dan farklı t-norm $T(kx, y) = T(x, ky)$, $\forall x, y \in \,]0,1]$ sağlayacak şekilde mevcuttur. Sonuç olarak bu probleme cevap bulunmuş olur.

2.2 Bir Özel T-Norm

2.2.1 Özel T-normun Özellikleri

Bu bölümün büyük bir kısmında Dana SMUTNA tarafından hazırlanan Özel Bir Üçgensel Norm adlı çalışmadan yararlanılmıştır.[14]

Teorem 3,(d) ile her $x \in \,]0,1]$ sayısı ve doğal sayıların kesin artan dizisi $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ arasında birebir bir karşılık olduğunu gösterdik. Dolayısıyla $x \in \,]0,1]$ için x'in sonsuz diyadik açılımını

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i}}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumu $x \approx (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ile gösterelim.

Uyarı 6: $x \approx (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ve $y \approx (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olsun. Bu takdirde;

$$x < y \Leftrightarrow k \in \mathbb{N}\ \text{ö}yleki\ \forall i \in \mathbb{N}, i < k\ i\text{ç}in\ x_i = y_i\ ve\ x_k > y_k\text{'dır.}$$

Örnek 21: $(x, y) \in \,]0,1]^2$ için x ve y'nin tek diyadik gösterimi;

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i}} \quad , \quad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{y_i}} \text{ olsun.}$$

Bu takdirde $T_1: [0,1]^2 \to [0,1]$ t-normu

$$T_1(x,y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i + y_i}} & (x,y) \in \,]0,1[^2 \\ min(x,y) & Aksi\ Taktirde \end{cases}$$

ve

$$T_2: [0,1]^2 \to [0,1]$$

$$T_2(x,y) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i \cdot y_i}} & (x,y) \in \,]0,1[^2 \\ min(x,y) & Aksi\ Taktirde \end{cases}$$

ile verilsin.

T_1 ve T_2 t-normları sağ ve sol sürekli olmayan, Arşimedyan ve kesin monoton üçgensel normlardır.

Önerme 8: $(x, y) \in]0,1]^2$ x ve y'nin tek diyadik gösterimi;

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i}} , \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{y_i}}$$

ve

$$x \approx (x_i)_{i \in \mathbb{N}} , \qquad y \approx (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

olsun.

$$T_\star : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

$$T_\star(x, y) = \begin{cases} 0 & \min(x, y) = 0 \\ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i + y_i - 1}} & Aksi\ Taktirde \end{cases}$$

ile verilsin. Bu takdirde $T_\star$ bir kesin monoton t-normdur.

İspat: Doğal sayıların kesin monoton dizisindeki $\star$ işlemini $z_n = x_n + y_n - n$ olmak üzere $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \star (y_i)_{i \in \mathbb{N}} = (z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ile tanımlayalım.

$$x, y > 0 \text{ için } T_\star(x, y) \approx (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \star (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

olduğu açıktır.

$T_\star$'ın değişmeliliğini gösterelim.

$$T_\star(x, y) \approx (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \star (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$T_\star(x, y) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \star (y_i)_{i \in \mathbb{N}} = (x_i + y_i - i)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$=(y_i + x_i - i)_{i \in \mathbb{N}} = (y_i)_{i \in \mathbb{N}} \star (x_i)_{i \in \mathbb{N}} = T_\star(y, x)$$

olduğundan $T_\star$ değişmelilik şartını sağlar.

$T_\star$'ın birleşmeliliğini gösterelim.

$x, y, z \in]0,1]$ $için\ x \approx (x_i)_{i \in \mathbb{N}}, y \approx (y_i)_{i \in \mathbb{N}}\ ve\ z \approx (z_i)_{i \in \mathbb{N}}$ olsun.

$T_\star\big(x, T_\star(y,z)\big) = [(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \star (y_i)_{i\in\mathbb{N}}] \star (z_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$= (x_i + y_i - i)_{i\in\mathbb{N}} \star (z_i)_{i\in\mathbb{N}}$

$= (x_i + y_i - i + z_i - i)_{i\in\mathbb{N}}$

$= (x_i + y_i + z_i - i - i)_{i\in\mathbb{N}}$

$= (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \star (y_i + z_i - i)_{i\in\mathbb{N}}$

$= (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \star [(y_i)_{i\in\mathbb{N}} \star (z_i)_{i\in\mathbb{N}}] = T_\star(T_\star(x,y),z)$

Eğer $0 \in \{x,y,z\}$ ise $T_\star\big(x, T_\star(y,z)\big) = 0 = T_\star(T_\star(x,y),z)$ olduğu açıktır.

$T_\star\big(x, T_\star(y,z)\big) = T_\star(T_\star(x,y),z)$ şartı her iki durum içinde geçerli olduğundan $T_\star$ birleşmelilik şartını sağlar.

Sınır şartına bakacak olursak, $x \in]0,1]$' de

$1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ ' nin genel anlatım $T(x,1) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i+i-i}} = x$

dir ve açık olarak $T_\star(0,1) = 0$' dır. $T_\star$ sınır şartını sağlar.

Şimdi $T_\star$' ın monotonluğunu gösterelim.

$y<z$ olsun. Bu takdirde $k \in \mathbb{N}$ öylek her $i \in \mathbb{N}$ için $i < k$ durumunda $y_i = z_i$ ve $y_k > z_k$ elde edilir. Bu sebeple;

$i \in \mathbb{N}$ için $x_i + y_i - i = x_i + z_i - i,$

$i < k$ ve $x_k + y_k - k > x_k + z_k - k$

dir. Bunun anlamı;

$(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \star (y_i)_{i\in\mathbb{N}} < (x_i)_{i\in\mathbb{N}} \star (z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olduğundan $y<z$ ise $T(x,y) < T(x,z)$

elde edilir. Sonuç olarak $T_\star$ monotonluk şartını sağlar.

$T_\star(x,y) = T_\star(x,z) \Leftrightarrow x = 0 \; veya \; y = z$ kısaltma özelliğinden yararlanılarak $T_\star$'ın kesin monotonluğunu göstermek kolaydır. ■

Her $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $T_{\star}$’ın aşağıdaki özelliklere sahip olduğu sonucuna varabiliriz.

i. $T_{\star}\left(x, \frac{1}{2^m}\right) = x \cdot \frac{1}{2^m}; m \in \mathbb{N}$

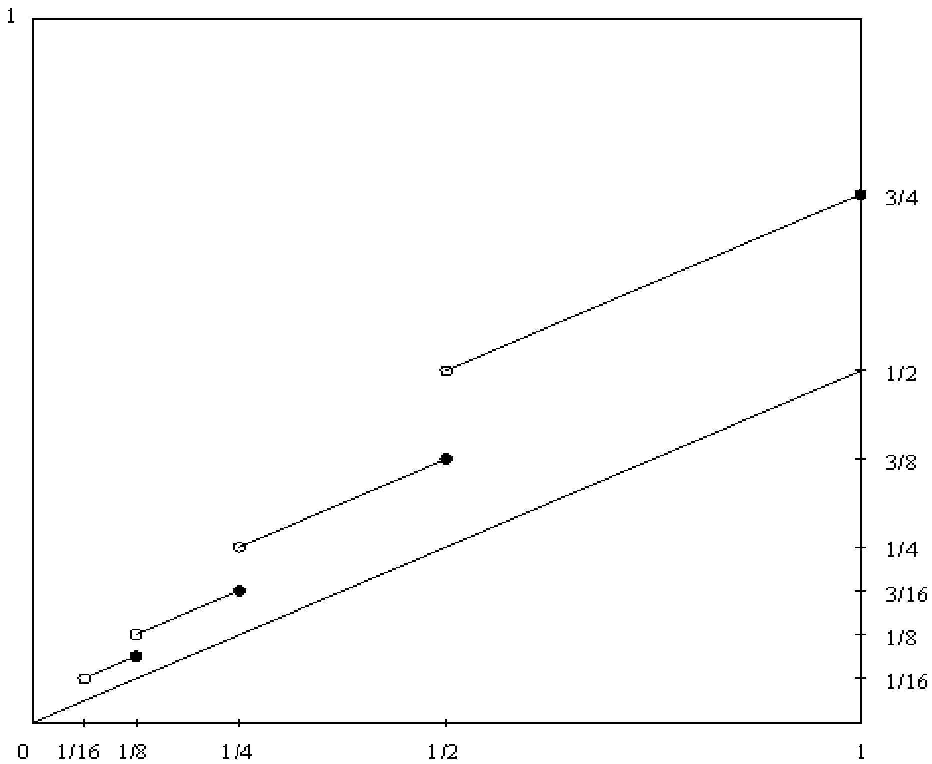
$T_{\star}\left(x, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot x$

ii. $m, n \in \mathbb{N}\ ve\ m < n$ için

$T_{\star}\left(x, \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \cdot x + \frac{2}{2^{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^n}\right)$

Özel olarak;

$T_{\star}\left(x, \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{x_1}}$

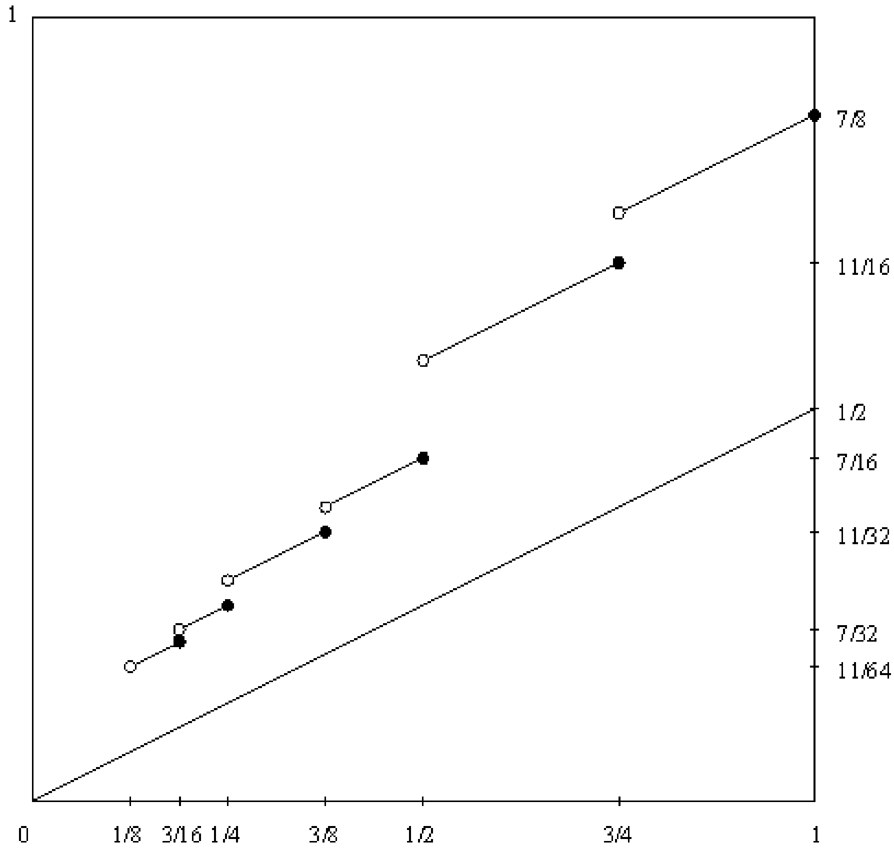


Şekil 1. $T_{\star}\left(x, \frac{1}{2}\right)$ ve $T_{\star}\left(\frac{3}{4}, x\right)$’ in düşey kesim

iii. Her $m, n, k \in \mathbb{N}$ ve $m < n < k$ için

$$T_\star\left(x, \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^{k-2}} \cdot x + \frac{1}{2^{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{2^{m-1}} - \frac{1}{2^{k-2}}\right) + \frac{1}{2^{x_2}} \cdot \left(\frac{1}{2^{n-2}} - \frac{1}{2^{k-2}}\right)$$

$$T_\star\left(x, \frac{7}{8}\right) = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2^{x_1}} + \frac{1}{2^{x_2}}\right)$$



Şekil 2. $T_\star\left(\frac{1}{2}, x\right)$ ve $T_\star\left(\frac{7}{8}, x\right)$' in düşey kesimi

Aşağıdaki önerme ile sol sürekli t-normların iyi bilinen karakterizasyonunu verelim.

Önerme 9: Bir t-norm T sol süreklidir ancak ve ancak T ilk bileşene göre sol süreklidir. Yani; her $y \in [0,1]$ ve her azalmayan $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} T\left(x_n, y\right) = T\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n, y\right)$$

Şimdi $T_\star$' ın sol sürekliliğini gösterelim.

Önerme 10: $T_\star$ sol süreklidir.

İspat: Eğer $y = 0$ veya $\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n = 0$ ise, her t-norm T için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} T\left(x_n, y\right) = T\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x_n, y\right) = 0$$

elde ederiz.

$u \in]0,1]$ için $u \approx (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ve $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $]0,1]'$deki reellerin bir azalmayan dizisi olsun öyleki

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} = u \quad \text{ve} \quad x^{(n)} \approx \left(x_i^{(n)}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

sağlansın. Açıkça $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x^{(n)} < u$'dur. Bu takdirde

$\exists k_n \in \mathbb{N}$ öyleki $\forall i \in \mathbb{N}$ için $i < k_n$, $x_i^{(n)} = u_i$ ve $x_{k_n}^{(n)} > u_{k_n}$'dir.

$$\lim_{n\to\infty} x^{(n)} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} k_n = \infty$$

dur. Şimdi $y \in]0,1]$ için $y \approx (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ olsun. Bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < T_\star(u,y) - T_\star\left(x^{(n)},y\right) = \frac{1}{2^{y_{k_n}-k_n}} \cdot \left(\frac{1}{2^{u_{k_n}}} - \frac{1}{2^{x_{k_n}^{(n)}}}\right) + \sum_{i=k_n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{u_i+y_i-i}} - \frac{1}{2^{x_i^{(n)}+y_i-i}}\right)$$

ve böylece

$$0 < T_\star(u,y) - T_\star\left(x^{(n)},y\right) < \frac{1}{2^{u_{k_n}+y_{k_n}-k_n-1}} \leq \frac{1}{2^{k_n-1}}$$

Bu takdirde;

$$\lim_{n\to\infty}\left(T_*(u,y)-T_*\left(x^{(n)},y\right)\right)=0$$

ve

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} T_*\left(x^{(n)},y\right)=T_*(u,y)=T_*\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)},y\right)$$

ve *Önerme 9* ile $T_\star$ sol süreklidir.■

Önerme 11: En az bir koordinatı bir sonlu diyadik gösterime sahip her $(x,y)\in\,]0,1[^2$ noktası bir süreksizlik noktasıdır.

İspat:

$$u=\frac{1}{2^{m_1}}+\frac{1}{2^{m_2}}+\frac{1}{2^{m_3}}+\cdots+\frac{1}{2^{m_k}}$$

$]0,1]'$deki sonlu bir diyadik sayı olsun. Bu takdirde;

$$u\approx(m_1,m_2,m_3,\dots,m_{k-1},m_k+1,m_k+2,m_k+3,\dots)$$

dır. $\left(x^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ kesin azalan dizisini alalım öyleki

$$x^{(n)}\in\,]0,1]\ \text{ ve } n\in\mathbb{N} \text{ için } \lim_{n\to\infty}x^{(n)}=u$$

olsun. Keyfi $y\in\,]0,1[\ \ (y\approx(y_i)_{i\in\mathbb{N}})$ alalım.

$$T_\star(u,y)<\frac{1}{2^{m_1+y_1-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m_{k-1}+y_{k-1}-k+1}}+\frac{1}{2^{m_k+y_k-k}}$$

ve

$$T_\star\left(x^{(n)},y\right)\geq\frac{1}{2^{m_i+y_i-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m_{k-1}+y_{k-1}-k+1}}+\frac{1}{2^{m_k+y_k-k}}$$

Bu takdirde;

$T_\star\left(\inf_{n\in\mathbb{N}} x^{(n)},y\right)=T_\star(u,y)<\inf_{n\in\mathbb{N}} T_\star\left(x^{(n)},y\right)$’ dir.

Böylece $T_{\star}$' ın (u, y) noktasında süreksizliği ispatlanmış olur.■

Önerme 12: Bir t-norm T Arşimedyandır ancak ve ancak $\forall x \in]0,1[$' de

$$\lim_{n\to\infty} T\left(\underbrace{x,\ldots,x}_{n-\tan e}\right) = 0$$

Şimdi Arşimedyan olmayan bir kesin monoton t-norm örneği olan $T_{\star}$' ın üzerinde duralım. Gerçekten;

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ ve } x \in \left]1-\tfrac{1}{2^n}, 1-\tfrac{1}{2^{n+1}}\right] \text{ için}$$

$$\lim_{n\to\infty} T_{*}\left(\underbrace{x,\ldots,x}_{m-\tan e}\right) = 1-\frac{1}{2^n} \text{' dir.}$$

Böylece $T_{\star}$ Arşimedyan özelliğini sağlamaz.■

2.2.2 Benzer t-normlar

$T_{\star}$' a benzer özelliklere sahip olan ile başka bir t-norm olan $T_{\star\star}$

$$T_{\star\star} = \begin{cases} 0 & \min(x,y) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(x_i-i+1)(y_i-i)+1+i-1}} & Aksi\ Taktirde \end{cases}$$

ile tanımlanır. Sonuç olarak benzer özellikler ile $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ t-normlarının ailesi

$$T_k(x,y) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{x_i+y_i-1}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(x_i-i+1)(y_i-i)+1+i-1}}$$

ile verilebilir.

Uyarı 7: $T_{\star}$ ve $T_{\star\star}$ t-normlarının $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ailesinin limit elemanları olduğu anlaşılabilir.

$$T_{\star} = T_{\infty} \text{ ve } T_{\star\star} = T_0$$

2.3 Üçgensel Normlarla İlgili Bir Problem ve Çözümü

Bu bölümün büyük bir kısmında Funda KARAÇAL tarafından hazırlanan Üçgensel normların bir açık probleminin çözümü adlı çalışmasından faydalanılmıştır.[10]

Aşağıdaki problem Pap[12] tarafından ortaya konuldu.

Problem 3: $T: [0,1]^2 \to [0,1]$, (1,1) noktasında sürekli olan bir kısaltmalı t-norm olsun. T' nin sürekliliği gerekli midir?

Problem 3' ün cevabı *Bölüm 2.1*' de verilmiştir.

Kesin ve süreksiz t-normların bir ailesi adlı çalışmada bu probleme olumsuz bir cevap verilmiştir. Şubat 2003' de 24. Linz Semineri sırasında Çok değerli mantıkta üçgensel normlar ve ilgili operatörler adlı bir seminer düzenlendi. [11]' da bu seminerde üçgensel normlar ve ilgili operatörler üzerine çeşitli açık problemler toplandı. Bu problemden biri de şudur:

Problem 4: $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ şartlı kısaltma özellikli t-normu (1, 1) noktasında sürekli ve sıfır bölenli olsun. T' nin sürekliliği gerekli midir?

Şimdi *Problem 4*' ün cevabını verelim.

Aşağıdaki *Önerme 13* ve *Önerme 14*, bize bir süreksiz ve şartlı kısaltma özelliğini sağlayan fakat $(1,1)$ noktasında sürekli ve sıfır bölenli bir t-norm örneği verir.

Önerme 13: $T: [0,1]^2 \to [0,1]$ t-normu

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \leq \frac{1}{2} \ ve \ x,y \neq 1 \ ise \\ xy & Aksi \ Taktirde \end{cases}$$

ile verilmiş olsun. Bu takdirde T sıfır bölenli ve şartlı kısaltma özellikli t-normdur.

İspat: T' nin değişme özelliğini sağladığını göstermek kolaydır.

$\forall x \in [0,1]$ için $T(x,1) = x \cdot 1 = x$ şartından dolayı 1' in sınır eleman olduğunu elde ederiz.

Şimdi T' nin birleşme özelliğini sağladığını gösterelim.

$$\forall x, y, z \in [0,1] \text{ için } T(T(x,y),z) = T\big(x, T(y,z)\big) \qquad (\star)$$

eşitliğini sağlıyorsa T fonksiyonu birleşmelidir.

İddia x, y, z' den birinin 1 olması durumunda iddia gerçeklenir. Bundan dolayı

$x, y, z \in [0,1[$ durumunu inceleyelim.

$xy \leq \frac{1}{2}$ olsun. Bu takdirde $T(T(x,y),z) = T(0,z) = 0$' dır.

$(\boldsymbol{A_1})$ Eğer $yz \leq \frac{1}{2}$ ise $T\big(x, T(y,z)\big) = T(x,0) = 0$

$(\boldsymbol{A_2})$ Eğer $yz > \frac{1}{2}$ ise $T(y,z) = yz$ ve bu yüzden $T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, yz)$' dir.

$xy \leq \frac{1}{2}$ ile $x(yz) = (xy)z \leq \frac{1}{2}z < \frac{1}{2}$ elde ederiz.

Bu takdirde $T\big(x, T(y,z)\big) = 0$ sonucuna ulaşılır ve böylece $(\star)$ şartı sağlanır.

$xy > \frac{1}{2}$ olsun. Bu durumda $T(T(x,y),z) = T(xy,z)$' dir.

$(\boldsymbol{B_1})$ Eğer $(xy)z \leq \frac{1}{2}$ ise $T(T(x,y),z) = 0$

Eğer $yz \leq \frac{1}{2}$ ise $T\big(x, T(y,z)\big) = T(x,0) = 0$

$yz > \frac{1}{2}$ olsun. Bu takdirde $T(y,z) = yz$ ve böylece $T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, yz)$

$(xy)z = x(yz) \leq \frac{1}{2}$ ile $T\big(x, T(y,z)\big) = 0$ buluruz.

$(\boldsymbol{B_2})$ $(xy)z > \frac{1}{2}$ olsun. $xy > \frac{1}{2}$ ile $T(T(x,y),z) = (xy)z$ elde ederiz.

$x(yz) > \frac{1}{2}$ ile $yz > \frac{1}{2}$ ve $T(y,z) = yz$' dir.. Bu yüzden;

$$T\big(x, T(y,z)\big) = T(x, yz) = x(yz) \text{ elde ederiz.}$$

Sonuç olarak T, birleşme özelliğini sağlar.

T, monotonluk şartını sağlar;

$y \leq z$ olsun. Eğer $xy \leq \frac{1}{2}$, $x \neq 1$ ve $y \neq 1$ ise $T(x,y) = 0 \leq T(x,z)$' dir.

$xy > \frac{1}{2}$ ve $xz \geq xy > \frac{1}{2}$ ile $T(x,y) = xy \leq xz = T(x,z)$ elde ederiz.

$x = 1$ olsun. Bu takdirde $T(x,y) = y \leq z = T(x,z)$' dir.

Benzer şekilde $y = 1$ durumu incelenir. Sonuç olarak T, monotonluk şartını sağlar.

T, bütün bu özellikleri sağladığı için t-normdur.

$T(x,y) = T(x,z) > 0$ olduğun için $xy = xz > 0$' a sahibiz ve bu yüzden $y = z$ elde ederiz. Bunun sonucu olarak da T' nin şartlı kısaltma özelliğini sağladığını görmüş oluruz. T t-normunun sıfır bölene sahip olduğu açıktır. $T\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = 0$' dır. $\frac{1}{2}$ bir sıfır bölendir

Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 14: T, $z \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$ için her $(z,1)$ veya $(1,z)$ noktalarında süreksizdir, fakat $(1,1)$ noktasında süreklidir.

İspat: *Önerme 14*'ün ispatını elde etmek basittir.

$T(x,\dots,x)$ için $x^{(n)T}$ notasyonu geçerlidir. Bundan dolayı $x^{(1)T} = x$' i elde ederiz.

Önerme 15: T Arşimedyandır.

İspat: $T_p(x,y) = xy$ t-normu Arşimedyan olduğundan bir $n \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyleki keyfi $(x,y) \in (0,1)^2$ için $x^{(n)T_p} < y$' dir.

Eğer $x^{(n)T_p} = x^n \leq \frac{1}{2}$ ise $x^{(n)T} = 0 \leq y$' dir.

$x^{(n)T_p} = x^n > \frac{1}{2}$ durumunda ise $x^{(n)T} = x^{(n)T_p} = x^n < y$' dir. Sonuç olarak T t-normu Arşimedyandır.

Sonuç: Sıfır bölene sahip, şartlı kısaltma özelliğini sağlayan, Arşimedyan t-normun sürekliliği (1,1) noktasındaki sürekliliğine denk değildir.

Uyarı 9: Bir kısaltma özellikli Arşimedyan t-normun sürekliliği (1,1) noktasındaki sürekliliğine denktir.

3. BULGULAR VE SONUÇLAR

Bu tezde elde elden bulgu ve sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir.

1. $(\mathbb{N}, *, <)$,($\mathbb{N}$' nin $<$ doğal sıralamasına göre, yani 1<2<3<4<…) bir kesin tam sıralı değişmeli yarıgrup olsun ve $\circ: S^2 \to S$ ile $(m_i) \circ (n_i) = (m_i \star n_i)$ ve $\otimes: (0,1]^2 \to (0,1]$ ile

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{m_i}}\right) \otimes \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n_i}}\right) = \left(\sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{m_i * n_i}}\right)$$

işlemleri verilsin.

$$T:]0,1]^2 \to]0,1]$$

$$\mathrm{T}(x,y) = \begin{cases} 0 & x = 0 \; veya \; y = 0 \\ x & y = 1 \\ y & x = 1 \\ x \otimes \mathrm{y} & (\mathrm{x},\mathrm{y}) \in]0,1[\end{cases}$$

ile verilsin. Bu takdirde aşağıdaki ifadelerin gerçeklendiği *Teorem3*' de ispatlanmıştır.

a) $\forall$ m,n $\in \mathbb{N}$ için $m \star n \geq m + n - 1$

b) $(S, \circ, \prec)$ bir kesin, tam sıralı, değişmeli yarıgruptur.

c) Eğer $S_1 = S \setminus \{(1,2,3, \ldots)\}$ ise bu takdirde $(S_1, \circ, \prec)$ tam sıralı değişmeli yarıgruptur.

d) $F(\langle n_i \rangle) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n_i}}$ ile verilen $F: S \to]0,1]$ dönüşümü $(S, \circ, \prec)$ ve $(]0,1], \otimes, >)$ yapılarının bir izomorfizmidir.

e) $(]0,1], \otimes, >)$ bir kesin, tam sıralı, değişmeli yarıgruptur.

f) $\forall x, y \in]0,1]$ için$x \otimes y < x$' dir.

g) T kesin t-normdur.

h) Eğer J, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{2^{n_i}}$ sonlu toplamı olarak gösterilebilen $]0,1[$' deki sayıların kümesi ise T dönüşümü $(J \times]0,1[) \cup (]0,1[\times J)$ kümesinin her noktasında süreksizdir.

2. $x = 0, x_1x_2x_3 \ldots$ ve $y = 0, y_1y_2y_3 \ldots$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\forall i \leq n \quad \left(x_i = y_i \Longrightarrow |x - y| < \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

olduğu *Teorem 4*' de ispatlanmıştır.

3. $\forall x \in]0,1[\setminus J, \forall n \in \mathbb{N}, \ \exists r \in \mathbb{N}, \forall z \in]0,1[$ için

$$\left(|x - z| < \frac{1}{2^r} \Longrightarrow \forall i \leq n \ \ x_i = z_i\right)$$

olduğu *Teorem 4*' de ispatlanmıştır.

4. $\otimes$ fonksiyonu $(]0,1[\setminus J)^2$'nin her noktasında süreklidir. Aynı iddia t-norm T için sağlanır ifadesi *Teorem 4*' de ispatlanmıştır.

5. $(x, y) \in]0,1]^2$ *x* ve y'nin tek diyadik gösterimi;

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i}}, \qquad y = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{y_i}}$$

ve

$$x \approx (x_i)_{i\in\mathbb{N}}, \qquad y \approx (y_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

olsun.

$$T_\star : [0,1]^2 \to [0,1]$$

$$T_\star(x, y) = \begin{cases} 0 & \min(x, y) = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{x_i + y_i - 1}} & Aksi\ Taktirde \end{cases}$$

ile verilsin. Bu takdirde $T_\star$ bir kesin monoton t-norm olduğu *Önerme 8*' de ispatlanmıştır.

6. $T_\star$ sol sürekli olduğu *Önerme 10*' da ispatlanmıştır.

7. En az bir koordinatı bir sonlu diyadik gösterime sahip her $(x, y) \in]0,1[^2$ noktası bir süreksizlik noktası olduğu *Önerme 11*' de ispatlanmıştır.

8. Bir t-norm T Arşimedyandır ancak ve ancak $\forall x \in]0,1['$ de

$$\lim_{n \to \infty} T\left(\underbrace{x, \ldots, x}_{n-tane}\right) = 0$$

olduğu *Önerme 12*' de verilmiştir.

9. $T:[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ t-normu

$$T(x,y) = \begin{cases} 0 & xy \leq \frac{1}{2}\ ve\ x,y \neq 1\ ise \\ xy & Aksi\ Taktirde \end{cases}$$

ile verilmiş olsun. Bu takdirde T sıfır bölenli ve şartlı kısaltma özellikli t-norm olduğu *Önerme 13*' de ispatlanmıştır.

10. T, $z \in \left]0,\frac{1}{2}\right]$ için her $(z,1)$ veya $(1,z)$ noktalarında süreksizdir, fakat $(1,1)$ noktasında sürekli olduğu *Önerme 14*' de verildi.

11. T' nin Arşimedyanlığı *Bölüm 2.3 Önerme 15*' de ispatlanmıştır.

4. ÖNERİLER

Bu tezde $[0,1]$ birim aralığı üzerinde tanımlı olan üçgensel normlar, üçgensel normların temel özellikleri (sürekliliği, sol sürekliliği, alt yarı sürekliliği, Arşimedyanlığı, sıfır bölen elemanlar, idempotent elemanlar, kısaltma özelliği, kesinlik, şartlı kısaltma özelliği gibi) ve bu üçgensel normlar üzerinde çeşitli problemler ve bu problemlerin çözümlerini derledik. Bu tezde ayrıca bu problemlerin çözümleri verilirken, yeni üçgensel normlar inşa edilmiştir. Bu inşa metotları yardımıyla üçgensel normların temel özellikleri daha ayrıntılı bir şekilde incelenebilir. *Önerme 13* deki xy çarpım üçgensel normunu diğer üçgensel normlarla değiştirerek elde edilecek olan t-normların özellikleri incelenebilir. Diyadik gösterimler yardımıyla bazı üçgensel normlar tanımlanıp, bazı açık problemlerin çözümleri verilmiştir. Bu gösterimler yardımıyla yeni üçgensel norm aileleri inşa edilip, özelliklerinin incelenmesi, üçgensel normlar teorisinin gelişiminde yararlı olabilir.

Burada verilen bilgiler, $[0,1]$ birim aralığı üzerinde t-normlarla ilgili çalışma yapacaklar için temel tanım ve özellikleri de içeren bir Türkçe kaynak şeklinde kullanılabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Birkhoff G., Lattice Theory, American Mathematical Society, Island, 1967
2. Budincevic M., Kurilic M. S., A Family of Strict and Discontinious Triangular, Fuzzy Sets and Systems 95(1998) 381-384
3. Çallıalp F., Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul, 2001
4. Hungerford T. W., Algebra, Sprenger-verlog, New York· Heidelberg· Berlin, 1987
5. Karaçal F., An answer to an open problem on triangular norms, Fuzzy Sets and Systems 155(2005)459-463
6. Klement E.P., Mesiar R., Triangular norms: a tutorial, Tatra Mountains Math. Publ. 13(1997)169-193
7. Klement E.P., Mesiar R., Pap E., Problems on triangular norms and related operators, Fuzzy Sets and Systems 145(2004)
8. Klement E.P., Mesiar R., Pap E.,Triangular norms to appear
9. Kolesarova A., A note on Archimedean triangular norms, Busefal 80(1999) 57-60
10. Mesiar R., Klement E. P., Pap E., Triangular Norms, Kluwer Academic Puplishers, Dordrecht·Boston·London, 2000
11. Mesiar R.,Novak V., Open problems from the 2nd international conference on Fuzzy Sets theory and Its Aplications, Tatra Mount. Math. Publ.(1995) 195-204
12. Mesiar R., Triangular norms, Submitted
13. Open Problems, Busefal 61(1995)12-22
14. Schweizer R. ve Sklar A., Probabilistic Metric Spaces, North-Holland·Amsterdam, 1983
15. Smutna D., On a peculiar t-norm, Busefal 75(1998) 60-67

ÖZGEÇMİŞ

Rümeysa AYYILDIZ 1981 yılında Trabzon’ da doğdu. İlköğrenimini Araklı Merkez İlkokulunda tamamladı. Orta öğrenimini Samsun Terme Ortaokulunda tamamladıktan sonra lise öğrenimini 1997 yılında Manisa Akhisar Lisesi’ ni bitirdi. 2002-2003 öğretim yılında Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümünden mezun oldu. 2003 yılında girdiği sınavı kazanarak Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında yüksek lisansa başladı. İyi derecede İngilizce bilen AYYILDIZ halen Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir ilköğretim okulunda öğretmen olarak görev yapmaktadır.