KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

L – FUZZY SOFT GRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yıldıray ÇELİK

HAZİRAN 2009
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

L - FUZZY SOFT GRUPLAR

Yıldıray ÇELİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"Yüksek Lisans (Matematik)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 01.06.2009
Tezin Savunma Tarihi : 26.06.2009

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Sultan YAMAK
Jüri Üyesi : Doç. Dr. Osman KAZANCI
Jüri Üyesi : Prof. Dr. Ekrem YANMAZ

Enstitü Müdürü: Prof. Dr. Salih TERZİOĞLU

Trabzon 2009

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, L-fuzzy soft küme ve L-fuzzy soft grup kavramları ele alınarak bunlara ait cebirsel özellikler verilmiştir.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine kadar yardımlarını esirgemeyen, öğrenim hayatımın her aşamasında değerli bilgilerini özveriyle paylaşan Sayın hocalarım Yrd. Doç. Dr. Sultan YAMAK ve Doç. Dr. Osman KAZANCI' ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca bana sağlamış oldukları imkanlardan ötürü Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dekanı Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR' a ve Matematik Bölüm Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. Selahattin MADEN' e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca KTÜ Matematik Bölümü'nün tüm hocalarına, yardımlarından dolayı başta Arş. Gör. Erdal ÜNLÜYOL ve Arş. Gör. Canan EKİZ olmak üzere tüm Araştırma Görevlisi arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Yıldıray ÇELİK
Trabzon 2009

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezin amacı L-fuzzy soft küme kavramını tanıtarak L-fuzzy soft grupların yapısını incelemektir. Ayrıca gruplar teorisinde ve L-fuzzy alt gruplarda mevcut olan tanım ve teoremlerin yapısını L-fuzzy soft gruplara aktararak, L-fuzzy soft grupların, mevcut yapıların bir genişlemesi olduğunu göstermektir.

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ön bilgiler ile bu alanda yapılan çalışmalarla ilgili bazı önemli tanım ve teoremler sunulmaktadır. İkinci bölüm ise tezin özgün çalışmalarını kapsamaktadır.

Anahtar Kelimeler: L-Fuzzy Alt Küme, L-Fuzzy Alt Grup, L-Fuzzy Soft Küme, L-Fuzzy Soft Grup, L-Fuzzy Soft Alt Grup, L-Fuzzy Normal Soft Alt Grup, L-Fuzzy Soft Homomorfi, L-Fuzzy Soft İzomorfi.

SUMMARY

L-Fuzzy Soft Groups

The aim of this work is to introduce concept of L-fuzzy soft set and to examine the structure of L-fuzzy soft groups. Also, it is carried the structure of existent definition and theorems for theory of groups and L-fuzzy subgroups to L-fuzzy soft groups. So it is proved that L-fuzzy soft groups are an extension of existent structures.

This work consists of two parts. In first part, it is presented basic information and some important definition and theorems related to studies having been done in the area. Second part involve original studies of the work.

Key Words: L-Fuzzy Subset, L-Fuzzy Subgroup, L-Fuzzy Soft Set, L-Fuzzy Soft Group, L-Fuzzy Soft Subgroup, L-Fuzzy Normal Soft Subgroup, L-Fuzzy Soft Homomorphism, L-Fuzzy Soft İsomorphism.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi,
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi,
L	Kafes,
L^X	X'in bütün L-fuzzy alt kümeleri,
χ_A	A'nın karakteristik fonksiyonu,
$\mu \leq \nu$	ν μ'yü kapsar,
μ_α	μ L-fuzzy kümesinin α-seviye alt kümesi,
$P(\mathrm{U})$	U'nun güç kümesi,
Φ_A	Boş soft küme,
Ω_A	Tam soft küme,
$(\mathrm{F}_\mu, \mathrm{L})$	μ'nün seviye soft kümesi,
$(F,A) \subseteq (G,B)$	(F,A), (G,B)'nin soft alt kümesidir,
$(F,A) \sqsubseteq (G,B)$	(F,A), (G,B)'nin zayıf soft alt kümesi,
$(F,A) \cap (G,B)$	(F,A) ve (G,B) soft kümelerin daraltılmış arakesiti,
$(F,A) \sqcap (G,B)$	(F,A) ve (G,B) soft kümelerin genişletilmiş arakesiti,
$(F,A) \cup (G,B)$	(F,A) ve (G,B) soft kümelerin birleşimi,
$(F,A) \vee (G,B)$	(F,A) ve (G,B) soft kümelerinin $\vee$-birleşimi,
$(F,A) \wedge (G,B)$	(F,A) ve (G,B) soft kümelerinin $\wedge$-arakesiti,
$(F,A) \times (G,B)$	(F,A) ve (G,B) soft kümelerinin kartezyen çarpımı,
$(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$	(F,A) soft kümesinin görüntüsü,
$\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{H}_i, \mathrm{X}_i)$	$(\mathrm{H}_i, \mathrm{X}_i)$ soft kümeler ailesinin arakesiti,
$\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{H}_i, \mathrm{X}_i)$	$(\mathrm{H}_i, \mathrm{X}_i)$ soft kümeler ailesinin birleşimi,
$H<G$	H, G'nin alt grubu,
FL(G)	G'nin bütün L-fuzzy alt gruplarının ailesi,
FNL(G)	G'nin bütün L-fuzzy normal alt gruplarının ailesi,
$\mu \bullet \nu$	μ ile ν'nün çarpımı,

μ^{-1}	μ'nün tersi,
$(F,A)\tilde{<}(G,B)$	(F,A), (G,B)'nin soft alt grubu,
$(F,A)\sim(G,B)$	(F,A), (G,B)'ye soft homomorfik,
$(F,A)\simeq(G,B)$	(F,A), (G,B)'ye soft izomorfik,
$(F,A)\tilde{\lhd}(G,B)$	(F,A), (G,B)'nin soft normal alt grup,
$(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(G,B)$	(F,A), (G,B)'nin L-fuzzy soft alt kümesi,
$\tilde{\Phi}_A$	Boş L-fuzzy soft küme,
$\tilde{\Omega}_A$	Tam L-fuzzy soft küme,
$(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerin arakesiti,
$(F,A)\tilde{\cup}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin birleşimi,
$(F,A)\tilde{\vee}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin $\vee$-birleşimi,
$(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin $\wedge$-arakesiti,
$(F,A)\tilde{\times}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin kartezyen çarpımı,
$(F,A)\tilde{\bullet}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin çarpımı,
$(F,A)^{-1}$	(F,A) L-fuzzy soft kümesinin tersi,
$(F,A)\cong(G,B)$	(F,A), (G,B)'ye denktir,
$(F,A)\tilde{\bullet}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin çarpımı,
$(F,A)\tilde{\bullet}_{\cap}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin arakesit çarpımı,
$(F,A)\tilde{\bullet}_{\cup}(G,B)$	(F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin birleşim çarpımı,
$\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$	(F_i,A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin birleşimi,
$\tilde{\bigcap}_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$	(F_i,A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin arakesiti,
$\tilde{\bigvee}_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$	(F_i,A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin $\vee$-birleşimi,
$\tilde{\bigwedge}_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$	(F_i,A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin $\wedge$-arakesiti,
$(F,A)\tilde{\prec}(G,B)$	(F,A), (G,B)'nin L-fuzzy soft alt grubudur,
$(F,A)\xrightarrow{(f,g)}(G,B)$	(F,A), (G,B)'ye L-fuzzy soft homomorfik,
$(F,A)\approxeq(G,B)$	(F,A), (G,B)'ye L-fuzzy soft izomorfik,
$(F,A)\tilde{\unlhd}(G,B)$	(F,A), (G,B)'nin L-fuzzy normal soft alt grubu,

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Fuzzy küme teorisi 1965 yılında Azeri kökenli Lütfü A. Zadeh [1] (Lotfi Zadeh) tarafından ortaya atılmıştır. "Fuzzy" sözcüğü dilimizde "bulanık" veya "belirsiz" sözcüğü olarak kullanılmaktadır. 1965 yılına kadar matematikte incelenen konuların önceden belirlenen kurallara kesin olarak uyup uymadığı araştırılmış, bu incelemelerde her zaman bir kesinlik aranmıştır. Bir önerme için belirlenen kurallara uyuyorsa doğru, uymuyorsa yanlış denilmiştir. Yaşadığımız dünyada bir çok olay vardır ki bunlarla ilgili önermelerin doğru ya da yanlış olduğunu ifade etmek bizi zor durumda bırakabilir. Karar veren kişinin ne hakkında karar vereceğini bilmesi çoğu zaman doğru karar için yeterli değildir. Karar vereceği ortamda kendisine doğru karar vermede yardımcı olacak ne gibi verilerin olduğunu bilmesi de gerekir. Fuzzy kümesi bu karmaşıklığı azaltmak için eleman olanları eleman olmayanlardan ayıran kesinliği ortadan kaldırır. Bu anlamda Zadeh [1] ilk çalışmasında değer kümesini [0,1] olarak almıştır. 0 ile 1 arasına da sınırdaki elemanların ait olma derecelerini ifade etmiştir. Olası bir elemanın üyelik derecesinin 1'e daha yakın olması kümeye daha fazla ait olması anlamına gelir. 1971 yılında Rosenfield [2] tarafından bir grubun fuzzy alt grubu tanımlanmıştır. Das [3] sonlu devirli bir grubun tüm fuzzy alt grupların bir karakterizasyonunu seviye alt gruplarının yardımı ile vermiştir. Daha sonra birçok bilim adamı tarafından fuzzy kavramı geliştirilmiştir. Sidky ve Mishref [4] fuzzy normal alt grupları tanımlamışlardır. Bu teori son çeyrek yüzyılda büyük ilgi görmüştür ve halen birçok bilim adamı bu konuda çalışmalar yapmaktadır. Matematik fuzzy mantığı ile yeniden yazılmaktadır. Eksik tanım ve teoremler zaman içinde yapılmaya devam etmektedir.

Ekonomi, mühendislik, çevre, sosyal bilim, tıp bilimi ve diğer birçok alandaki birçok karmaşık problemler kesin olmayan bilgiler içerir. Günlük yaşamda sürekli karşı karşıya geldiğimiz bu problemler klasik matematik metotları kullanılarak çözülemez. Klasik matematik de, bir objenin matematiksel modeli tasarlanır ve bu modelin tam çözümünün ifadesi kararlaştırılır. Bu yüzden klasik matematiksel model çok karmaşıktır ve kesin çözüm bulunamaz. Belirsizlikleri tanımlamak için birkaç tane iyi bilinen teoriler vardır.

Örneğin, Fuzzy Küme Teorisi [1], Rough Küme Teorisi [5] ve diğer matematiksel araçlar. Fakat bütün bu teorilerin kendi içerisinde birtakım zorluklara sahip olduğu Molodtsov [6] tarafından işaret edildi. Molodtsov belirsizliklerle başa çıkabilmek için mevcut metotların sahip olduğu zorluklardan uzak yeni bir matematiksel araç olarak Soft Küme kavramını ortaya koydu.

Soft Küme Teorisi birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan bazısı Molodtsov [6] tarafından kendi öncü çalışmasında gösterilmiştir. Son zamanlarda Soft Küme Teorisi üzerindeki çalışmalar hızlı bir şekilde ilerleme göstermiştir. Maji, Biswas ve Roy [7] Soft Küme Teorisinin uygulamalarını tanımladılar ve Soft Küme Teorisi üzerinde birçok işlemle çalıştılar. Chen, Tsang, Yeung ve Wang [8] soft kümelerin parametre dönüşümleriyle ilgili yeni tanımlar ortaya koydular ve bu tanımların Rough Küme Teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Pei ve Miao [9] soft kümelerle bilgi sistemleri arasındaki ilişkiyi tartıştılar. Maji, Biswas ve Roy [10] tarafından soft kümeler fuzzy alt kümelere taşınarak fuzzy soft kümeler tanımlandı. Bu şekilde soft kümeler için daha önceden bilinen tanım ve teoremler fuzzy yapısına uyarlanmış oldu.

Soft kümlerin cebirsel yapısı bazı bilim adamları tarafından incelendi. Örneğin, Aktaş ve Çağman [11] soft grupların yapısını inceleyerek, soft grupların fuzzy alt kümeler ve rough kümelerle olan ilişkisini değerlendirdiler. Ayrıca Molodsov [6]'un soft kümelerle ilgili tanımını kullanarak soft grupların bazı özelliklerini ortaya koydular. Jun [12] Soft BCK-BCI cebirlerini tanımladı ve bununla ilgili çalışmalar yaptı. Feng, Jun ve Zhao [13] soft yarı halka kavramını ifade ettiler ve soft kümeler için mevcut olan özellikleri yarı halka yapısına uyarladılar. Ali, Feng, Liu, Min ve Shabir [14] soft kümeler için bilinen $\cap$, $\cup$ gibi cebirsel yapıları yeniden düzenleyerek soft kümelerde yeni ifadeleri oluşturdular.

Bu tezin ana amaçlarından bir tanesi daha önce L=[0,1] kafesi üzerinde Maji, Biswas ve Roy [10] tarafından tanımlanmış olan fuzzy soft küme kavramını herhangi bir L kafesine genişleterek bu yapıyı incelemektir.

Bu tezin amaçlarından bir diğeri ise soft grup yapısını L-fuzzy soft gruplara genişleterek, soft grupların L-fuzzy alt gruplarla ilişkisini değerlendirmek ve bu anlamda yeni tanım ve teoremleri elde edebilmektir. Bunun için gerekli tanım ve teoremler genel bilgiler kısmında özetlendi.

1.2. Kafesler

Bu bölümdeki kafeslerle ilgili tanım ve teoremler Birkhoff [15]'dan derlenmiştir.

Tanım 1. L boştan farklı bir küme " $\leq$ " L'de bir bağıntı olsun. L'ye bir sıralı küme denir. $\Leftrightarrow$

1) $\forall\ a \in$ L için $a \leq a$

2) $\forall a, b \in$ L için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

3) $\forall a, b, c \in$ L için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

L sıralı kümesi (L, $\leq$) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2. (L, $\leq$) bir sıralı küme, B$\subseteq$L olmak üzere

1) $\forall\ b \in$ B için $a \leq b$ ise $a \in$ L elemanına B'nin alt sınırı denir.

2) $\forall\ b \in$ B için $b \leq d$ ise $d \in$ L elemanına B'nin üst sınırı denir.

Tanım 3. (L, $\leq$) bir sıralı küme, B$\subseteq$L, $a_0 \in$ B olmak üzere,

1) $\forall\ b \in$ B için $a_0 \leq b$ ise a_0 elemanına B'nin en küçük elemanı denir.

2) $\forall\ b \in$ B için $b \leq a_0$ ise a_0 elemanına B'nin en büyük elemanı denir.

Tanım 4. $\overline{B}$, B'nin tüm üst sınırlarından; $\underline{B}$, B'nin tüm alt sınırlarından oluşan küme olsun.

1) $\underline{B} \neq \emptyset$ ve $\underline{B}$'nin en büyük elemanı varsa buna B'nin en büyük alt sınırı denir ve İnfB= $\wedge$B= $\bigwedge\limits_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

2) $\overline{B} \neq \emptyset$ ve $\overline{B}$'nin en küçük elemanı varsa buna B'nin en küçük alt sınırı denir ve SupB= $\vee$B= $\bigvee\limits_{b \in B} b$ notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 5. (L, $\leq$) bir sıralı küme olsun.

(i) L'ye bir kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ a, b \in$ L için $Sup\{a,b\} = a \vee b$ ve $Inf\{a,b\} = a \wedge b$ mevcuttur.

(ii) L'ye bir zincir denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ a, b \in$ L için $a \leq b$ veya $b \leq a$.

(iii) L'ye bir tam kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall$T $\subseteq$ L için SupT ve İnfT mevcuttur.

(iv) L'ye bir modular kafes denir. $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a,b,c \in \mathrm{L}$, $a \leq b$ için $a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$.

(v) L'ye bir dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a,b,c \in \mathrm{L}$ için $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ve $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Tanım 6. $(\mathrm{L},\leq)$ bir kafes ve $\varnothing \neq \mathrm{T} \subseteq \mathrm{L}$ olsun. T'ye bir alt kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in \mathrm{T}$ için $a \vee b, a \wedge b \in \mathrm{T}$ 'dir.

Tanım 7. L bir kafes, $0 \in \mathrm{L}$ ve $\forall x \in \mathrm{L}$ için $0 \leq x$ ise L'ye alttan sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L},\leq,0)$ ile gösterilir. $1 \in \mathrm{L}$ ve $\forall x \in \mathrm{L}$ için $x \leq 1$ ise L'ye üstten sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L},\leq,1)$ ile gösterilir.

L kafesi üstten ve alttan sınırlı ise L'ye bir sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L},\leq,0,1)$ ile gösterilir. Aksi söylenmedikçe bütün kafesleri sınırlı kafes olarak ele alacağız.

Tanım 8. $(\mathrm{L}_1,\leq)$, $(\mathrm{L}_2,\leq)$ kafesler ve $f:\mathrm{L}_1 \rightarrow \mathrm{L}_2$ bir fonksiyon olsun.

(i) f **'**ye sıra korur(artan) denir. $\Leftrightarrow \forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{L}_1$ için $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ ise $f(\mathrm{a}) \leq f(\mathrm{b})$ 'dir.

(ii) f 'ye bir kafes homomorfisi denir.

$\Leftrightarrow \forall \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{L}_1$ için $f(\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}) = f(\mathrm{a}) \wedge f(\mathrm{b})$ ve $f(\mathrm{a} \vee \mathrm{b}) = f(\mathrm{a}) \vee f(\mathrm{b})$ 'dır.

(iii) f 'ye bir kafes monomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ f bire-bir kafes homomorfisidir.

Tanım 9. $(\mathrm{L},\vee,\wedge)$ bir tam kafes olsun. L'ye bir sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$

$\forall \mathrm{a},\mathrm{b}_\mathrm{i} \in \mathrm{L}, \mathrm{i} \in \Lambda$ için $\mathrm{a} \wedge (\bigvee_{\mathrm{i}\in\Lambda} \mathrm{b}_\mathrm{i}) = \bigvee_{\mathrm{i}\in\Lambda} (\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}_\mathrm{i})$.

1.3. L-Fuzzy Alt Kümeler

Bu bölüm boyunca aksi söylenmedikçe L bir tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 10. [16] X bir küme olmak üzere $\mu:\mathrm{X} \rightarrow \mathrm{L}$ fonksiyonuna X'in L- fuzzy alt kümesi denir. X'in bütün L- fuzzy alt kümeleri L^X ile gösterilir.

$\mathrm{L}=[0,1]$ ise L-fuzzy alt kümelere X'in fuzzy alt kümeleri denir. $\mu \in \mathrm{L}^\mathrm{X}$ için,

$$\text{Res}\,\mu = \{\mu(x) : x \in X\} \text{ ve } \mu^* = \{x \in X : 0 < \mu(x)\}$$

kümelerine sırasıyla μ 'nün görüntüsü ve desteği denir.

Eğer $1 \in \mu(x)$ ise μ 'ye X'in normal veya üniter L-fuzzy alt kümesi denir. μ^* sonlu küme ise μ 'ye sonlu L-fuzzy alt küme denir.

Tanım 11. [16] $Y \subseteq X$ ve $a \in L\text{-}\{0\}$ için $a_Y \in L^X$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a_Y(x) = \begin{cases} a, & x \in Y \\ 0, & x \notin Y \end{cases}$$

Özel olarak a=1 alınırsa 1_Y L- fuzzy alt kümesine Y'nin karakteristik fonksiyonu denir. Bu durum χ_Y notasyonu ile gösterilir.

Tanım 12. [16] $\mu, \nu \in L^X$ olmak üzere $\forall x \in X$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν 'ye μ 'yü kapsar denir ve $\mu \leq \nu$ ile gösterilir.

Tanım 13. [16] $\mu, \nu \in L^X$ ve $x \in X$ olsun.

$$(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$$

$$(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$$

ile tanımlanan L-fuzzy alt kümelere sırasıyla μ ile ν 'nün birleşimi ve kesişimi(arakesiti) denir.

Tanım 14. [1] $\mu \in L^X$, $\nu \in L^Y$ olsun. $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$ için

$$\mu \times \nu(x, y) = \mu(x) \wedge \nu(y)$$

ile tanımlanan L-fuzzy alt kümesine μ ve ν L-fuzzy alt kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 15. [16] $\{\mu_i : i \in I\} \subseteq L^X$ ve $x \in X$ olsun.

$$(\bigvee_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigvee_{i \in I} \mu_i(x)$$

$$(\bigwedge_{i \in I} \mu_i)(x) = \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x)$$

ile tanımlanan L-fuzzy alt kümelerine sırasıyla $\{\mu_i : i \in I\}$ L-fuzzy alt kümeler ailesinin birleşimi ve kesişimi denir. I={1,2,….,n} ise $\bigvee_{i\in I} \mu_i$, $\bigwedge_{i\in I} \mu_i$ L-fuzzy alt kümeleri sırasıyla

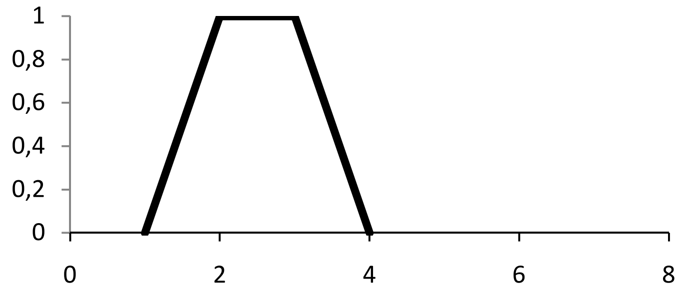
$\bigvee_{i\in I} \mu_i = \mu_1 \vee \mu_2 \vee \mu_3 \ldots \vee \mu_n$ ve $\bigwedge_{i\in I} \mu_i = \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 \ldots \wedge \mu_n$ notasyonları ile gösterilir.

Tanım 16. [16] $\mu \in L^X$ ve $a \in L$ ise $\{x \in X : a \leq \mu(x)\}$ kümesine μ 'nün a-seviye alt kümesi denir ve μ_a ile gösterilir.

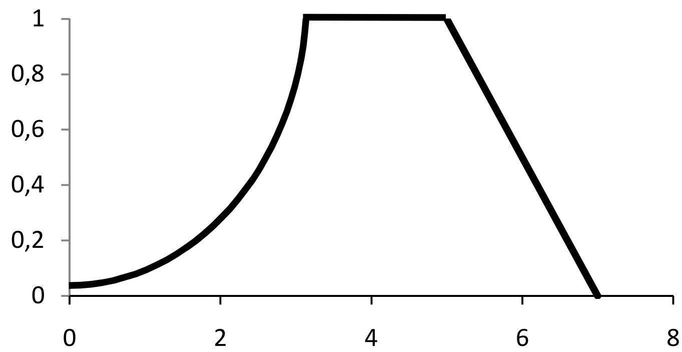
Örnek 1. $\mu, \nu : \mathbb{R} \to [0,1]$

$$\mu(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ x-1, & 1 \le x < 2 \\ 1, & 2 \le x < 3 \\ 4-x, & 3 \le x \le 4 \\ 0, & 4 < x \end{cases} \qquad \nu(x) = \begin{cases} e^{x-3}, & 0 \le x < 3 \\ 1, & 3 \le x < 5 \\ 1 - \dfrac{x-5}{2}, & 5 \le x \le 7 \\ 0, & 7 < x \end{cases}$$

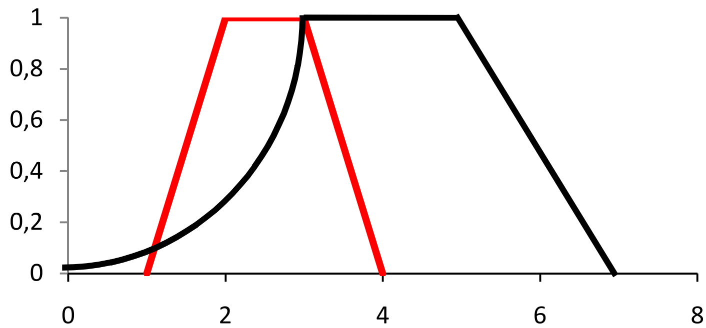
ise μ , ν , $\mu \vee \nu$, $\mu \wedge \nu$ fuzzy alt kümelerinin grafikleri aşağıdaki şekildedir.



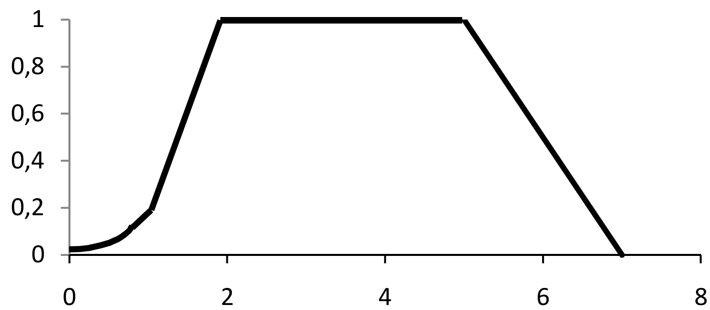
Şekil 1. Örnek 1. deki μ fuzzy alt kümesinin grafiği



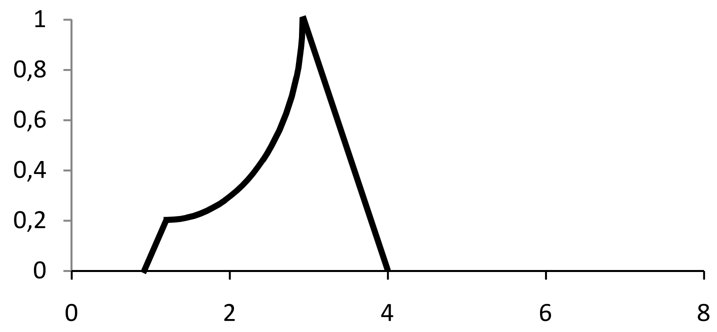
Şekil 2. Örnek 1.deki ν fuzzy alt kümesinin grafiği



Şekil 3. Örnek 1.deki μ ve ν fuzzy alt kümelerinin grafikleri



Şekil 4. Örnek 1.deki $\mu \vee \nu$ fuzzy alt kümesinin grafiği



Şekil 5. Örnek 1.deki $\mu \wedge \nu$ fuzzy alt kümesinin grafiği

Teorem 1. [17] μ, $\nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{X}}$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(1) $\mu \leq \nu$ ve $\mathrm{a} \in \mathrm{L}$ ise $\mu_{\mathrm{a}} \subseteq \nu_{\mathrm{a}}$.

(2) $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ ve a, $\mathrm{b} \in \mathrm{L}$ ise $\mu_{\mathrm{b}} \subseteq \mu_{\mathrm{a}}$.

(3) $\mu = \nu \Leftrightarrow \forall \mathrm{a} \in \mathrm{L}$ için $\mu_{\mathrm{a}} = \nu_{\mathrm{a}}$.

(4) $\mu_{\mathrm{a}} \cup \nu_{\mathrm{a}} \subseteq (\mu \vee \nu)_{\mathrm{a}}$.

(5) L bir zincir ise $\mu_{\mathrm{a}} \cup \nu_{\mathrm{a}} = (\mu \vee \nu)_{\mathrm{a}}$.

Tanım 17. [17] $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ bir dönüşüm ve $\mu \in \mathrm{L}^{\mathrm{X}}, \nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{Y}}$ olsun.

$\forall y \in \mathrm{Y}$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \bigvee \{\mu(x) \mid x \in \mathrm{X}, f(x) = y\}, & f^{-1}(y) \neq \varnothing \\ 0, & f^{-1}(y) = \varnothing \end{cases}$$

ve $\forall x \in \mathrm{X}$ için

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x))$$

şeklinde tanımlanan $f(\mu)$ ve $f^{-1}(\nu)$ L-fuzzy alt kümelerine sırasıyla μ'nün f altındaki resmi(görüntüsü) ve ν'nün f altındaki ters resmi(ters görüntüsü) denir.

Teorem 2. [17] $f:\mathrm{X}\rightarrow\mathrm{Y}$ bir dönüşüm olsun.

(1) $\forall\mu_i\in\mathrm{L}^{\mathrm{X}}, i\in I$ için $f(\bigvee_{i\in I}\mu_i)=\bigvee_{i\in I}f(\mu_i)$ ve

$\mu_1,\mu_2\in\mathrm{L}^{\mathrm{X}}$ için $\mu_1\leq\mu_2$ ise $f(\mu_1)\leq f(\mu_2)$ 'dir.

(2) $\forall\nu_j\in\mathrm{L}^{\mathrm{Y}}, j\in J$ için (burada J boştan farklı bir indeks kümesidir)

$$f^{-1}(\bigvee_{j\in J}\nu_j)=\bigvee_{j\in J}f^{-1}(\nu_j), \quad \text{ve} \quad f^{-1}(\bigwedge_{j\in J}\nu_j)=\bigwedge_{j\in J}f^{-1}(\nu_j)$$

$\nu_1,\nu_2\in\mathrm{L}^{\mathrm{Y}}$ için $\nu_1\leq\nu_2$ ise $f^{-1}(\nu_1)\leq f^{-1}(\nu_2)$ 'dir.

Teorem 3. [15] L bir sıralı küme ve X bir küme olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) L^{X} bir sıralı kümedir.

(ii) L bir kafes ise L^{X} bir kafestir.

(iii) L bir tam kafes ise L^{X} bir tam kafestir.

(iv) L bir dağılımlı kafes ise L^{X} bir dağılımlı kafestir.

(v) L bir v- dağılımlı kafes ise L^{X} bir v- dağılımlı kafestir.

1.4. Soft Kümeler

Bu bölümde U ve E kümeler, $P(\mathrm{U})$ U 'nun güç kümesi ve A$\subset$E olarak alınacaktır.

Tanım 18. [7] F: A$\rightarrow$ $P(\mathrm{U})$ bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde bir soft küme denir.

Başka bir ifadeyle, U üzerinde bir soft küme U kümesinin alt kümelerinin bir parametreler ailesidir. $\varepsilon\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(\varepsilon)$, (F,A) soft kümesinin ε -elemanlarının bir kümesi yada ε -yaklaşımlı elemanlarının bir kümesi olarak adlandırılır.

Soft küme kavramı ile ilgili aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2. [7] Örneğin bir ev satın almak istiyoruz. (F,E) satın alırken göz önünde bulunduracağımız evlerin özelliklerini tanımlayan soft küme, U={ h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6 } belirli şartlar altında 6 adet ev, E={e_1, e_2, e_3, e_4, e_5} parametreler ailesi, e_i (i=1,2,3,4,5) “pahalı”, “güzel”, “ağaçtan”, “ucuz”, “yeşil bahçeli” parametrelerini göstersin. F:E $\rightarrow P$(U) dönüşümü için, $\mathrm{F}(e_1)=\{h_2,h_4\},\mathrm{F}(e_2)=\{h_1,h_3\},\mathrm{F}(e_3)=\varnothing,\mathrm{F}(e_4)=\{h_1,h_3,h_5\},\mathrm{F}(e_5)=\{h_1\}$ olsun. Bu takdirde,

(F,E)={(pahalı evler, $\{h_2,h_4\}$), (güzel evler, $\{h_1,h_3\}$), (ağaçtan evler, $\varnothing$), (ucuz evler, $\{h_1,h_3,h_5\}$), (yeşil bahçeli evler, $\{h_1\}$) şeklinde tanımlanır.

Örnekten de anlaşılacağı üzere bir kesin ve bir yaklaşık değerli küme olmak üzere her yaklaşım iki kısımdan oluşur.

Örnek 3. F:A $\rightarrow P$(U) bir dönüşüm olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)=\varnothing$ şeklinde tanımlanan (F,A) ikilisi bir soft kümedir.

Örnek 4. $f:\mathrm{A}\rightarrow \mathrm{U}$ bir fonksiyon ve F:A $\rightarrow P$(U) bir dönüşüm olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)=\{f(x)\}$ şeklinde tanımlanan (F,A) ikilisi U üzerinde bir soft kümedir.

Örnek 5. (G,•) grup olsun.

H:G $\rightarrow P$(G) bir dönüşüm olmak üzere $\forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$ için H(g)=<g>=$\{\mathrm{g}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{n} \in \mathbb{Z}\}$ şeklinde tanımlanan (H,G) ikilisi G üzerinde bir soft kümedir.

Örnek 6. L bir kafes, μ :X $\rightarrow$ L X‘in bir L-fuzzy alt kümesi ve μ_α μ ’nün α -seviye alt kümesi olsun.

H:L $\rightarrow P$(X) bir dönüşüm olmak üzere H(α)=$\mu_\alpha=\{x\in \mathrm{X} \mid \mu(x)\geq \alpha\}$ şeklinde tanımlanan (H,L) ikilisi X üzerinde bir soft kümedir.

Örnek 6. ile L-fuzzy alt kümelerin soft kümelerle eşleştirilebileceği görülüyor.

Tanım 19. [7] (F,A) U üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in \mathrm{A}$ için F(ε)=$\varnothing$ ise (F,A)’ya boş soft küme denir. Bu durum Φ_{A} notasyonu ile gösterilir.

Tanım 20. [7] **(**F,A) U üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in \mathrm{A}$ için F(ε)=U ise

(F,A)'ya tam soft küme denir. Bu durum Ω_A notasyonu ile gösterilir.

Tanım 21. L bir kafes, $\mu \in L^X$ ve μ_α μ'nün α-seviye alt kümesi olsun. $F_\mu : L \to P(X)$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall \alpha \in L$ için $F_\mu(\alpha)=\mu_\alpha$ şeklinde tanımlanan (F_μ, L) soft kümesine μ'nün seviye soft kümesi denir.

Tanım 22. [7] (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki soft küme olmak üzere (F,A)'ya (G,B)'nin soft alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

(i) $A \subseteq B$

(ii) $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = G(\varepsilon)$

Bu durum $(F,A) \subseteq (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 23. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki soft küme olmak üzere (F,A)'ya (G,B)'nin zayıf soft alt kümesi denir $\Leftrightarrow$

(i) $A \subseteq B$

(ii) $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$

Bu durum $(F,A) \sqsubseteq (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 24. (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki soft küme olmak üzere (F,A) ve (G,B) kümelerine soft eşittir denir $\Leftrightarrow$

(i) $(F,A) \sqsubseteq (G,B)$

(ii) $(G,B) \sqsubseteq (F,A)$

Tanım 25. [14] (F,A) ve (G,B) U üzerinde soft kümeler olsun. $C=A \cup B$ ve $\forall \varepsilon \in C$ için

$$H(\varepsilon) = \begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon \in A - B \text{ ise} \\ G(\varepsilon), & \varepsilon \in B - A \text{ ise} \\ F(\varepsilon) \cap G(\varepsilon), & \varepsilon \in A \cap B \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $(F,A) \sqcap (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

İki soft kümenin arakesiti aşağıdaki şekilde de tanımlanabilir.

Tanım 26. [14] (F,A) ve (G,B) U üzerinde soft kümeler olsun. C=A$\cap$B ve $\forall\varepsilon\in$C için $H(\varepsilon)=F(\varepsilon)\cap G(\varepsilon)$ şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin daraltılmış arakesiti denir. Bu durum (F,A)$\sqcap$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 27. [7] (F,A) ve (G,B) U üzerinde soft kümeler olsun. C=A$\cup$B ve $\forall\varepsilon\in$C için

$$H(\varepsilon)=\begin{cases} F(\varepsilon), & \varepsilon\in A-B \text{ ise} \\ G(\varepsilon), & \varepsilon\in B-A \text{ ise} \\ F(\varepsilon)\cup G(\varepsilon), & \varepsilon\in A\cap B \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin birleşimi denir. Bu durum $(F,A)\sqcup(G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 1. [7] (F,A) U üzerinde bir soft küme olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $(F,A)\sqcup(F,A)$=(F,A)

(ii) $(F,A)\sqcap(F,A)$=(F,A)

(iii) $(F,A)\sqcup\Phi_A=\Phi_A$

(iv) $(F,A)\sqcap\Phi_A=\Phi_A$

(v) $(F,A)\sqcup\Omega_A=\Omega_A$

(vi) $(F,A)\sqcap\Omega_A=$ (F,A)

Örnek 6.'da her L-fuzzy alt kümelerin soft kümelerle eşleştirilebileceği gösterilmişti. Aşağıdaki teoremde bu eşleşmenin L-fuzzy alt kümelerdeki "$\leq$", "$\vee$", "$\wedge$" yapılarının soft kümelerdeki "$\sqsubseteq$", "$\sqcup$", "$\sqcap$" yapıları ile karşılaştırılması ifade edilecektir.

Teorem 4. L bir tam kafes, X bir küme, $\mu,\ \nu:X\to L$ X'in L-fuzzy alt kümeleri ve (F_μ,L), (F_ν,L) X üzerinde tanımlı seviye soft kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\mu\leq\nu$ ise $(F_\mu,L)\sqsubseteq(F_\nu,L)$

(ii) $(F_\mu,L)\sqcup(F_\nu,L)\sqsubseteq(F_{\mu\vee\nu},L)$

(iii) $(F_\mu,L)\sqcap(F_\nu,L)$=$(F_{\mu\wedge\nu},L)$

(iv) L bir zincir ise $(F_\mu,L)\sqcup(F_\nu,L)$=$(F_{\mu\vee\nu},L)$

İspat:

(i) $\mu \leq \nu$ ise Teorem 1.(i) ile $\forall \alpha \in \mathrm{L}$ için $\mu_\alpha \subseteq \nu_\alpha$ 'dır. Tanım 21. ile $\mathrm{F}_\mu(\alpha) \subseteq \mathrm{F}_\nu(\alpha)$'dır. Buradan $\forall \alpha \in \mathrm{L}$ için $(\mathrm{F}_\mu, \mathrm{L}) \sqsubseteq (\mathrm{F}_\nu, \mathrm{L})$'dır.

(ii) Açık olarak $\mu_\alpha \cup \nu_\alpha \subseteq (\mu \vee \nu)_\alpha$'dır. Tanım 21. ile $\mathrm{F}_\mu(\alpha) \cup \mathrm{F}_\nu(\alpha) \subseteq \mathrm{F}_{\mu \vee \nu}(\alpha)$'dır. Buradan $(\mathrm{F}_\mu, \mathrm{L}) \bigcup (\mathrm{F}_\nu, \mathrm{L}) \sqsubseteq (\mathrm{F}_{\mu \vee \nu}, \mathrm{L})$'dır.

(iii) $\mathrm{F}_{\mu \wedge \nu} : \mathrm{L} \to P(\mathrm{X})$ olmak üzere $\forall \alpha \in \mathrm{L}$ için

$\mathrm{F}_{\mu \wedge \nu}(\alpha) = (\mu \wedge \nu)_\alpha = \{x \in \mathrm{X} | \alpha \leq (\mu \wedge \nu)(x)\} = \{x \in \mathrm{X} | \alpha \leq \mu(x) \wedge \nu(x)\} = \mu_\alpha \cap \nu_\alpha$
şeklindedir.

Yani $\forall \alpha \in \mathrm{L}$ için $\mathrm{F}_{\mu \wedge \nu}(\alpha)=\mathrm{F}_\mu(\alpha) \cap \mathrm{F}_\nu(\alpha)$'dır. Buradan $(\mathrm{F}_\mu, \mathrm{L}) \bigcap (\mathrm{F}_\nu, \mathrm{L})=(\mathrm{F}_{\mu \wedge \nu}, \mathrm{L})$ eşitliği doğrulanır.

(iv) (ii)'ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 28. [7] (F,A) ve (G,B) U üzerinde soft kümeler olsun. $\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ve $\forall (\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ için $\mathrm{H}(\alpha, \beta) = \mathrm{F}(\alpha) \cap \mathrm{G}(\beta)$ şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum (F,A) $\wedge$ (G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 29. [7] (F,A) ve (G,B) U üzerinde soft kümeler olsun. $\mathrm{C} = \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ ve $\forall (\alpha, \beta) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ için $\mathrm{H}(\alpha, \beta) = \mathrm{F}(\alpha) \cup \mathrm{G}(\beta)$ şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ve (G,B) soft kümelerinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $(\mathrm{F}, \mathrm{A}) \vee (\mathrm{G}, \mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 30. [11] (F,A) ve (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde iki soft küme olsun. C=A$\times$B ve $\forall (x, y) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ için $\mathrm{U}(x, y) = \mathrm{F}(x) \times \mathrm{H}(y)$ şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine (F,A) ve (H,B) soft kümelerinin kartezyen çarpımı denir. Bu durum $(\mathrm{F,A}) \times (\mathrm{H,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 31. $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ bir fonksiyon, (F,A) U üzerinde soft küme olsun. $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{G}(x) := f(\mathrm{F}(x))$ şeklinde tanımlanan (G,A) soft kümesine (F,A) soft kümesinin f altındaki görüntüsü(remi) denir. Bu durum (GA)=$(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 32. [13] $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$, $i\in\Lambda$, U üzerindeki soft kümelerin bir ailesi olsun. $\mathrm{K}=\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{X}_i$ ve $\forall x\in\mathrm{K}$ için $\mathrm{E}(x)=\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{H}_i(x)$ şeklinde tanımlanan (E,K) soft kümesine $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ soft kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 33. $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$, $i\in\Lambda$, U üzerindeki soft kümelerin bir ailesi olsun. $\mathrm{C}=\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{X}_i$ ve $\forall x\in\mathrm{C}$ için, $\Lambda_x=\{i\in\Lambda : x\in\mathrm{X}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{H}(x)=\bigcap_{i\in\Lambda_x}\mathrm{H}_i(x)$ şeklinde tanımlanan (H,C) soft kümesine $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ soft kümeler ailesinin daraltılmış arakesiti denir. Bu durum $\sqcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 34. [13] $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$, $i\in\Lambda$, U üzerindeki soft kümelerin bir ailesi olsun. $\mathrm{T}=\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{X}_i$ ve $\forall x\in\mathrm{T}$ için, $\Lambda_x=\{i\in\Lambda : x\in\mathrm{X}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{B}(x)=\bigcup_{i\in\Lambda_x}\mathrm{H}_i(x)$ şeklinde tanımlanan (B,T) soft kümesine $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ soft kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 35. [13] $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$, $i\in\Lambda$, U üzerindeki soft kümelerin ailesi olsun. C=$\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{X}_i$ ve $\forall(a_i)_{i\in\Lambda}\in\mathrm{C}$ için $\mathrm{Q}((a_i))=\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{H}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (Q,C) soft kümesine $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ soft kümeler ailesinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 36. [13] $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$, $i\in\Lambda$, U üzerindeki soft kümelerin ailesi olsun. C=$\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{X}_i$ ve $\forall(a_i)_{i\in\Lambda}\in\mathrm{C}$ için $\mathrm{W}((a_i))=\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{H}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (W,C) soft kümesine $(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ soft kümeler ailesinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $\bigvee_{i\in\Lambda}(\mathrm{H}_i,\mathrm{X}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 2. $\widetilde{\mathrm{U}}$**,** U kümesi üzerindeki soft kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $(\widetilde{\mathrm{U}},\sqsubseteq)$ bir sıralı kümedir.

(ii) $(\widetilde{U}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup)$ bir kafestir.

(iii) $(\widetilde{U}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup)$ bir tam kafestir.

(iv) $(\widetilde{U}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup)$ bir dağılımlı kafestir.

İspat:

(i) $(H_1, X_1), (H_2, X_2), (H_3, X_3) \in \widetilde{U}$ olmak üzere,

• $(H_1, X_1) \sqsubseteq (H_1, X_1)$ olduğu açıktır.

• $(H_1, X_1) \sqsubseteq (H_2, X_2)$ ve $(H_2, X_2) \sqsubseteq (H_1, X_1)$ olsun. Bu takdirde Tanım 23. ile $X_1 \subseteq X_2$ ve $\forall x \in X_1$ için $H_1(x) \subseteq H_2(x)$'dir. Benzer şekilde $X_2 \subseteq X_1$ ve $\forall x \in X_2$ için $H_2(x) \subseteq H_1(x)$'dir. Dolayısıyla $X_1 = X_2$ ve $H_1(x) = H_2(x)$ olur. Buradan $(H_1, X_1) = (H_2, X_2)$'dir.

• $(H_1, X_1) \sqsubseteq (H_2, X_2)$ ve $(H_2, X_2) \sqsubseteq (H_3, X_3)$ olsun. Tanım 23. ile $X_1 \subseteq X_2$ ve $\forall x \in X_1$ için $H_1(x) \subseteq H_2(x)$ 'dir. Benzer şekilde $X_2 \subseteq X_3$ ve $\forall x \in X_2$ için $H_2(x) \subseteq H_3(x)$ 'dir. Dolayısıyla $X_1 \subseteq X_3$ ve $H_1(x) \subseteq H_3(x)$ olur. Buradan $(H_1, X_1) \sqsubseteq (H_3, X_3)$ 'dir.

Sonuç olarak $(\widetilde{U}, \sqsubseteq)$ bir sıralı kümedir.

(ii), **(iii)**'nin ispatları Tanım 5., 32. ve 34. ile açıktır.

(iv) (F,A), (H,B), (K,C) $\in \widetilde{U}$ olmak üzere
(F,A) $\sqcup$ [(H,B) $\sqcap$ (K,C)] =(P,D) ve [(F,A) $\sqcup$ (H,B)] $\sqcap$ [(F,A) $\sqcup$ (K,C)]=(Q,E) eşitlikleri göz önüne alınırsa Tanım 26. ve 27. ile $D = A \cup (B \cap C)$ ve $E = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur. Dolayısıyla D=E ve $\forall x \in D$ için $P(x) = Q(x)$ olduğu görülür.
Buradan $(F,A) \sqcup [(H,B) \sqcap (K,C)] = [(F,A) \sqcup (H,B)] \sqcap [(F,A) \sqcup (K,C)]$ eşitliği elde edilir.
Benzer şekilde $(F,A) \sqcap [(H,B) \sqcup (K,C)] = [(F,A) \sqcap (H,B)] \sqcup [(F,A) \sqcap (K,C)]$ 'dir.

$(\widetilde{U}, \sqsubseteq, \sqcap, \sqcup)$ bir dağılımlı kafestir.

1.5. Gruplar

Tanım 37. $\varnothing \neq G$ bir küme ve '$\bullet$' G üzerinde bir ikili işlem olsun. G'ye bir grup denir. $\Leftrightarrow$

1) $\forall$ x,y,z $\in$ G için x.(y.z) = (x.y).z

2) $\exists$ e$\in$G öyleki $\forall$ x$\in$G için e.x=x=x.e

3) $\forall$ x$\in$G için $\exists$ y$\in$G y.x=x.y=e

e elemanına G'nin birim elemanı denir.

y.x=x.y=e eşitliğini sağlayan y elemanına x'in tersi denir ve y=x^{-1} veya y=-x ile gösterilir. G bir grup ise $(G,\bullet)$ ile gösterilir.

Tanım 38. $(G,\bullet)$ bir grup olsun. G'ye abel (değişmeli) grup denir $\Leftrightarrow$ $\forall$x,y$\in$G için x.y=y.x'dir.

Tanım 39. $(G,\bullet)$ bir grup, $H\subseteq G$, $K\subseteq G$ ve $x\in G$ olsun.

Bu takdirde Hx, xH, H.K, xHx^{-1} ve H^{-1} kümeleri

Hx= {h.x: h$\in$H}, xH= {x.h: h$\in$H}, H.K= {h.k: h$\in$H, k$\in$K}, xHx^{-1}= { xhx^{-1}: h$\in$H} olarak tanımlanacaktır.

Teorem 5. [18] (G, **.**) bir grup olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikler doğrulanır.

1) $\forall$ x$\in$G için $(x^{-1})^{-1} = x$,

2) $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n \in G$ için

$(x_1.x_2.x_3 \ldots x_n)^{-1} = x_n^{-1} \ldots x_2^{-1} . x_1^{-1}$

Tanım 40. $(G, \bullet)$ bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ olsun. H'ye G'nin bir alt grubu denir $\Leftrightarrow$

$\forall$ a, b $\in$H için $a . b^{-1} \in$ H'tır. Bu durum H<G notasyonu ile gösterilir.

G grubunun bütün alt gruplarının kümesi S(G) ile gösterilecektir.

Tanım 41. H, G'nin bir alt grubu olsun. H alt grubuna G'nin bir normal alt grubu denir $\Leftrightarrow$ $\forall$x$\in$G için $x^{-1}Hx\subseteq H$. Bu durum $H\trianglelefteq G$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 42. $(G,\bullet)$, $(G',\circ)$ iki grup ve $f: G\rightarrow G'$ bir fonksiyon olsun. f'ye bir grup homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall$x,y$\in$G için $f(x\bullet y)=f(x)\circ f(y)$ 'dir.

Tanım 43. f:G $\rightarrow$ G' bir örten grup homomorfisi ise f'ye bir epimorfi denir.

Tanım 44. $f:\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{'}$ bir grup homomorfisi birebir ve örten ise f ’ye bir izomorfi denir.

Önerme 3. [18] $f:\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{'}$ bir grup izomorfisi ise $f^{-1}:\mathrm{G}^{'} \to \mathrm{G}$ bir grup izomorfisidir.

Tanım 45. Eğer $f:\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{'}$ bir grup izomorfisi mevcut ise G ile $\mathrm{G}^{'}$ grubuna izomorftur denir ve $\mathrm{G} \cong \mathrm{G}^{'}$ ile gösterilir.

Tanım 46. $f:\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{'}$ bir grup homomorfisi olmak üzere;
$f(\mathrm{G})=\{ f(g) \mid g \in \mathrm{G} \}$ ve $f^{-1}(\{\mathrm{e}\})=\{g \in \mathrm{G} \mid f(g) = \mathrm{e}_{\mathrm{G}^{'}} \}$ kümelerine sırasıyla f ’nin görüntüsü ve çekirdeği denir. Bu durum sırasıyla Res f ve Çek f ile gösterilir.

Teorem 6. [18] $f:\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{'}$ bir grup homomorfisi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $f(e) = e^{'}$

2) $\forall \alpha \in \mathrm{G}$ için $f(\alpha^{-1}) = [f(\alpha)]^{-1}$

3) $f(\mathrm{G}) = \{ f(\mathrm{g}) : \mathrm{g} \in \mathrm{G}\}$ kümesi $\mathrm{G}^{'}$nün bir alt grubudur.

4) $\mathrm{K} = \{ \mathrm{g} \in \mathrm{G} : f(\mathrm{g}) = e^{'} \}$ kümesi G’nin bir normal alt grubudur.

Teorem 7. [18] $f:\mathrm{G} \to \mathrm{G}^{'}$ bir grup homomorfisi olsun. Bu takdirde;

(i) $\mathrm{H} \le \mathrm{G}$ ise $f(\mathrm{H}) \le \mathrm{G}^{'}$ 'dır.

(ii) $\mathrm{H}^{'} \le \mathrm{G}^{'}$ ise $f^{-1}(\mathrm{H}^{'}) \le \mathrm{G}$ 'dır.

(iii) $\mathrm{H} \trianglelefteq \mathrm{G}$ ve f örten ise $f(\mathrm{H}) \trianglelefteq \mathrm{G}^{'}$ 'dır.

(iv) $\mathrm{H}^{'} \trianglelefteq \mathrm{G}^{'}$ ise $f^{-1}(\mathrm{H}^{'}) \trianglelefteq \mathrm{G}$ 'dır.

1.5. L-Fuzzy Alt Gruplar ve L-Fuzzy Normal Alt Gruplar

Bu bölüm boyunca $(\mathrm{G}, \bullet)$ bir grup ve $e \in \mathrm{G}$, G grubunun birim elemanı olarak ele alınacaktır.

Tanım 47. [17] $\mu, \nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olmak üzere $\forall x \in \mathrm{G}$ için

$$(\mu \bullet \nu)(x) = \bigvee \{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in \mathrm{G}, y.z = x\}$$

$$\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$$

şeklinde tanımlanan $\mu \bullet \nu$, μ^{-1} L-fuzzy alt kümelerine sırasıyla μ ile ν ’nün çarpımı ve μ ’nün tersi denir.

Tanım 48. [17] $\mu \in \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olsun. μ ’ye G’nin bir L-fuzzy alt grubu denir. $\Leftrightarrow$

(G_1) $\forall x, y \in \mathrm{G}$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

(G_2) $\forall x \in \mathrm{G}$ için $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$

Eğer L=[0,1] ise L-fuzzy alt grup, fuzzy alt grup olarak adlandırılır.

G nin bütün L-fuzzy alt gruplarının ailesi FL(G) ile gösterilir.

Teorem 8. [17] $\mu \in \mathrm{FL(G)}$ ve $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ bir grup homomorfisi ise $f(\mu) \in \mathrm{FL(H)}$ ‘tır.

Teorem 9. [17] $\nu \in \mathrm{FL(H)}$ olmak üzere $f : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ bir grup homomorfisi ise $f^{-1}(\nu) \in \mathrm{FL(G)}$ ’dir.

Teorem 10. [17] $\{\mu_i \mid i \in I\} \subseteq \mathrm{FL(G)}$ olsun. Bu takdirde, $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in \mathrm{FL(G)}$ ’dir.

Tanım 49. [17] $\mu \in \mathrm{FL(G)}$ olmak üzere μ ’ye G’nin bir L-fuzzy normal alt grubu denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathrm{G}$ için $\mu(x) \leq \mu(y.x.y^{-1})$.

Eğer L=[0,1] ise L-fuzzy normal alt grup, fuzzy normal alt grup olarak adlandırılır.

G nin bütün L-fuzzy normal alt gruplarının ailesi FNL(G) ile gösterilir.

Teorem 11. [3] L bir tam kafes, $(\mathrm{G}, \bullet)$ bir grup, $\varnothing \neq \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ ve $\mu \in \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in \mathrm{G}$ ve $\forall\, \mathrm{t} \in \mathrm{L}$ için $\mu(x) = \begin{cases} \mathrm{t}, & x \in \mathrm{H} \\ 0, & x \notin \mathrm{H} \end{cases}$ L-fuzzy alt gruptur $\Leftrightarrow$ H<G ’dir.

Teorem 12. [3] $(G,\bullet)$ bir grup μ ve ν G'nin L-fuzzy alt grupları olmak üzere $\mu\bullet\nu$ G'nin bir L-fuzzy alt grubudur. $\Leftrightarrow$ $\mu\bullet\nu=\nu\bullet\mu$'dır.

1.6. Soft Gruplar

Soft grup kavramı ilk kez Aktaş [11] tarafından ortaya konulmuştur. Aktaş yaptığı çalışmada soft grup tanımını vererek soft küme kavramını gruplar için vermiştir. Soft grupların cebirsel yapıları ve belli başlı özellikleri yine Aktaş [11] tarafından incelenmiştir. Bu tezin hazırlanış sürecinde yapılan araştırma ve çalışmalarda kaynak teşkil eden soft grup yapısının temel cebirsel ifadeleri ve özelliklerine bu bölümde yer verilmiştir.

Bu bölüm boyunca, G bir grup X boş kümeden farklı bir küme olarak ele alınacaktır.

R, X'den G'ye bir bağıntı olarak ele alırsak $F(x)=\{y\in G: (x,y)\in R\}$ olarak tanımlanan (F,X) ikilisi G üzerinde bir soft kümedir. Tersine olarak (F,X) soft kümesi için de X'den G'ye $R=\{(x,y)\in X\times G: y\in F(x)\}$ şeklinde bir R bağıntısı tanımlanır. (X,G,R) üçlüsüne bir yaklaşım kümesi denir.

Tanım 50. [11] $(G,\bullet)$ bir grup, (H,A) G üzerinde bir soft küme olsun. (H,A) ikilisine G üzerinde bir soft grup denir $\Leftrightarrow$ $\forall a\in A$ için $H(a)<G$'dır.

Örnek 7. $(G,\bullet)$ bir grup, K<G olsun. $H_K: A\to G$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall x\in A$ için $H_K(x)=K$ ile tanımlanan (H_K,A) ikilisi G üzerinde bir soft gruptur.

Örnek 8. $f: K\to H$ bir grup homomorfisi ve (F,K) H üzerinde bir soft küme olsun. $\forall k\in K$ için $F(k)=\langle f(k)\rangle$ şeklinde tanımlanan (F,K) ikilisi H üzerinde bir soft gruptur.

Örnek 9. $(G,\bullet)$ bir grup ve (H,G) G üzerinde bir soft küme olsun. $\forall x\in G$ için $H(x)=\langle x\rangle$ şeklinde tanımlanan (H,G) ikilisi G üzerinde bir soft gruptur.

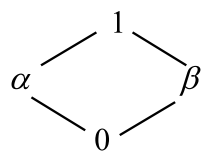
Teorem 13. $(G,\bullet)$ bir grup $\mu: G\to L$ L-fuzzy alt grubu ve $\mu(e)=1$ olsun. (H,L) G üzerinde bir soft küme olmak üzere $\forall\alpha\in L$ için $H(\alpha)=\mu_\alpha$ şeklinde tanımlanan (H,L) soft kümesi G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 13. ile L-fuzzy alt grupların soft gruplarla eşleştirilebileceği görülüyor.

Dolayısıyla biz herhangi bir L-fuzzy alt grup yardımıyla bir soft grup tanımlayabiliriz.

Gerçekte G üzerinde tanımlı bir (H,L) soft kümesi için $\mu_{\mathrm{H}}(x) = \bigvee_{x\in \mathrm{H}(\alpha)} \alpha$ L-fuzzy alt kümesi elde etmek mümkündür [11]. Ancak burada (H,L) G üzerinde soft grup olduğu zaman μ_{H} 'ın G'nin L-fuzzy alt grubu olması gerekmez.

Örnek 10. L=$\{0,\alpha,\beta,1\}$ bir kafes, (G,$\bullet$) bir grup olmak üzere L kafesinde sıralama bağıntısı ve (G,$\bullet$) grubunda "$\bullet$" işlemi aşağıdaki gibi verilsin.



$\bullet$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

$$\mathrm{H}(0)=\{1\},\ \mathrm{H}(\alpha)=\{1,2\},\ \mathrm{H}(\beta)=\{1,2,3\},\ \mathrm{H}(1)=\{1\}$$

şeklinde tanımlanan $\mathrm{H}:\mathrm{L}\to P(\mathrm{G})$ dönüşümü G üzerinde bir soft gruptur.

Fakat $\forall x\in \mathrm{G}$ için $\mu(x) = \bigvee_{x\in \mathrm{H}(\alpha)} \alpha$ şeklinde tanımlanan $\mu:\mathrm{G}\to \mathrm{L}$ dönüşümü G üzerinde bir L-fuzzy alt grup değildir.

Çözüm: $\mu:\mathrm{G}\to\mathrm{L}$ olmak üzere $\mu(1)=1$, $\mu(2)=1$, $\mu(3)=\beta$ 'dır.

Buradan $1=\mu(2) \not\leq \mu(2^{-1})=\mu(3)=\beta$ eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\mu:\mathrm{G}\to\mathrm{L}$ dönüşümü G üzerinde L-fuzzy alt grup değildir.

Teorem 14. G bir grup, L bir tam kafes ve $\alpha\in \mathrm{L}$ olsun.

(i) S(G) G grubunun bütün alt gruplarının kümesi olsun.

$\gamma:\mathrm{S(G)}\to \mathrm{FL(G)}$ için $\gamma(\mathrm{H})=\chi_{\mathrm{H}}$ şeklinde tanımlanan γ dönüşümü bir kafes monomorfisidir.

(ii) $\widetilde{\mathcal{U}}$ L parametreli, G üzerindeki soft grupların ailesi olsun.

$\gamma : \mathrm{L}^{\mathrm{G}} \to \widetilde{\mathcal{U}}$ için $\gamma(\mu) = (\mathrm{F}_{\mu}, \mathrm{L})$ şeklinde tanımlanan γ dönüşümü bire-bir ve artan bir fonksiyondur. Eğer L zincir ise γ kafes homomorfisidir.

İspat:

(i) $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2 \in \mathrm{S(G)}$ olmak üzere $\gamma(\mathrm{H}_1)=\gamma(\mathrm{H}_2)$ olsun. $\forall x \in \mathrm{G}$ için $x \in \mathrm{H}_1$ ise $1=\chi_{\mathrm{H}_1}(x)=\chi_{\mathrm{H}_2}(x)$ olduğundan $x \in \mathrm{H}_2$'dir. Buradan $\mathrm{H}_1 \subseteq \mathrm{H}_2$ olur. Benzer şekilde $\mathrm{H}_2 \subseteq \mathrm{H}_1$'dir. Yani $\mathrm{H}_2 = \mathrm{H}_1$ elde edilir.

$\gamma(\mathrm{H}_1 \cap \mathrm{H}_2) = \gamma(\mathrm{H}_1) \wedge (\mathrm{H}_2)$ ve $\gamma(\mathrm{H}_1 \cup \mathrm{H}_2) = \gamma(\mathrm{H}_1) \vee \gamma(\mathrm{H}_2)$'nin ispatları Tanım 11. ile mümkündür. Buradan γ dönüşümü bir kafes monomorfisidir.

(ii) Tanım 21. ile $\alpha \in \mathrm{L}$ için $\mathrm{F}_{\mu}(\alpha)=\mu_{\alpha}$ şeklindedir. Teorem 1.'in (1) ve (2) şıkları ile γ dönüşümünün bire-birliği ve artanlığı açıktır. Eğer L kafesi bir zincir ise Teorem 4. yardımıyla γ kafes homomorfisidir.

Teorem 15. [11] (F,A) ve (H,B) G üzerinde soft gruplar ise $(\mathrm{F,A}) \bigcap (\mathrm{H,B})$ G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 16. [11] (F,A) ve (H,B) G üzerinde soft gruplar olsun. Eğer $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \varnothing$ ise $(\mathrm{F, A}) \bigcup (\mathrm{H, B})$ G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 17. [11] (F,A) ve (H,B) G üzerinde soft gruplar ise $(\mathrm{F,A}) \bigwedge (\mathrm{H,B})$ G üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 18. [11] (F,A) G üzerinde (H,B) K üzerinde iki soft grup olsun. Bu takdirde, $(\mathrm{F,A}) \times (\mathrm{H,B})$ $\mathrm{G} \times \mathrm{K}$ üzerinde bir soft gruptur.

Teorem 19. [11] $(\mathrm{G}, \bullet)$ bir grup, (F,A) G üzerinde bir soft küme ve e, G'nin birim elemanı olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(1) Eğer $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = \{e\}$ ise (F,A) G üzerinde bir soft gruptur.

(2) Eğer $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = \mathrm{G}$ ise (F,A) G üzerinde bir soft gruptur.

Tanım 51. Teorem 19.(1)'de verilen soft gruba birim soft grup ve (2)'de verilen soft grubada tam soft grup denir.

Teorem 20. [11]

(1) $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ bir grup homomorfisi ve (F,A) G üzerinde bir soft grup olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = \text{Çek}f$ ise $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$ K üzerinde birim soft gruptur.

(2) $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ bir grup epimorfisi ve (F,A) G üzerinde bir tam soft grup ise $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$ K üzerinde tam soft gruptur.

Tanım 52. [11] (F,A) ve (H,K) G üzerinde iki soft grup olsun. (H,K)'ya (F,A)'nın bir soft alt grubu denir $\Leftrightarrow$

(1) $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{A}$

(2) $\forall x \in \mathrm{K}$ için $\mathrm{H}(x) < \mathrm{K}(x)$

Bu durum $(\mathrm{H,K}) \tilde{<} (\mathrm{F,A})$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 11. [11] $\mathrm{G{=}S_3}$, $\mathrm{A{=}S_3}$ ve $\mathrm{K{=}A_3}$ olsun. Eğer $\mathrm{F}(x) = \{y \in \mathrm{S_3} : y = x^{\mathrm{n}},\ \mathrm{n} \in \mathbb{N}\}$ ve $\mathrm{H}(x) = \{y \in \mathrm{A_3} : y \in \langle x \rangle\}$ ise $(\mathrm{H,K}) \tilde{<} (\mathrm{F,A})$ olduğu görülür.

Çünkü $\mathrm{A_3} < \mathrm{S_3}$ ve $\forall x \in \mathrm{A_3}$ için $\mathrm{H}(x) < \mathrm{F}(x)$ dir.

Gruplar teorisinde mevcut olan bazı teoremlerin soft alt gruplar için geçerli olduğunu aşağıdaki teoremlerle ifade edebiliriz.

Teorem 21. [11] (F,A) ve (H,A) G üzerinde iki soft grup olsun.

(1) Eğer $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) \subseteq \mathrm{H}(x)$ ise (F,A), (H,A)'nın bir soft alt grubudur.

(2) Eğer (U,E), (F,G) G üzerinde soft gruplar ve $\mathrm{E} = \{e\}$ için $\mathrm{U}(e) \subseteq \mathrm{F}(e)$ ise (U,E), (F,G)'nin bir soft alt grubudur.

Teorem 22. [11] (F,A) G üzerinde bir soft grup ve $\{(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i) : i \in I\}$ (F,A)'nın soft alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(1) $\bigcap_{i\in I}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$, (F,A) 'nın bir soft alt grubudur.

(2) $\bigwedge_{i\in I}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$, (F,A) 'nın bir soft alt grubudur.

(3) Eğer $\forall i,j\in I$ için $\mathrm{K}_i\bigcap \mathrm{K}_j=\varnothing$ ise $\bigvee_{i\in I}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$, (F,A) 'nın bir soft alt grubudur.

Teorem 23. [11] (F,A), (H,B) G üzerinde iki soft grup ve (F,A), (H,B) 'nin bir soft alt grubu olsun. Eğer $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir grup homomorfisi ise $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$, $(f(\mathrm{H}),\mathrm{B})$ K üzerinde soft alt gruplardır ve $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$, $(f(\mathrm{H}),\mathrm{B})$ 'nin bir soft alt grubudur.

Tanım 53. [11] (F,A) G üzerinde (H,B) K üzerinde iki soft grup, $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ ve $g:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ iki fonksiyon olsun. Bu takdirde (f,g) 'ye soft homomorfi, (F,A) **'**ya da (H,B) 'ye soft homomorftur denir. $\Leftrightarrow$

(1) f, G 'den K 'ya grup homomorfisi,

(2) g, A 'dan B 'ye bir dönüşüm,

(3) $\forall x\in\mathrm{A}$ için $f(\mathrm{F}(x))=\mathrm{H}(g(x))$.

Bu durum $(\mathrm{F,A})\sim(\mathrm{H,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Bu tanımda; eğer $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ izomorfi ve $g:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ bire-bir, örten bir dönüşüm ise (f,g) 'ye soft izomorfi ve (F,A) **'**ya da (H,B) 'ye soft izomorftur denir.

Bu durum $(\mathrm{F,A})\simeq(\mathrm{H,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 12. [11] $(\mathbb{Z},+)$ ve $(\mathbb{Z}_m,\oplus)$ gruplarını göz önüne alalım.

$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_m$ homomorfisini $\forall k\in\mathbb{Z}$ için $f(k)=\overline{k}$ şeklinde, bir $g:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}_m$ dönüşümünü $\forall k\in\mathbb{Z}^+$ için $g(k)=\overline{k}$ olarak tanımlayalım. $F:\mathbb{Z}^+\to P(\mathbb{Z})$ ve $F(x)=\{y\in\mathbb{Z}:y=5kx,\ k\in\mathbb{Z}\}$; $H:\mathbb{Z}_m\to P(\mathbb{Z}_m)$ ve $H(u)=\{\overline{y}\in\mathbb{Z}_m:y=uk,\ k\in 5\mathbb{Z}\}$ olsun. Buradan $F(x)=5x\mathbb{Z}$ ve $H(u)=\{\overline{ku}:k\in5\mathbb{Z}\}$ olarak elde ederiz. Açık olarak görülülür ki $(F,\mathbb{Z}^+)$ $\mathbb{Z}$ üzerinde, $(H,\mathbb{Z}_m)$ $\mathbb{Z}_m$ üzerinde soft gruplardır.

$f(F(x))=\{\overline{5xk}:k\in\mathbb{Z}\}$ ve $H(g(x))=\{\overline{xs}:s\in5\mathbb{Z}\}$ olduğu için $f(F(x))=H(g(x))$ sonucu elde edilir. Buradan (f,g) soft homomorfi ve $(F,\mathbb{Z}^+)$, $(H,\mathbb{Z}_m)$ 'ye soft homomorftur.

Örnek 13. (F,G), (H,G) sırasıyla G ve K üzerinde soft gruplar, $f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ ' ya bir grup homomorfisi ve $g = \mathrm{I_G} := \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ bir idantik dönüşüm olsun.

Bu takdirde $\forall g \in \mathrm{G}$ için F(g)=<g> ve H(g)=< f (g)> şeklinde tanımlanan (F,K) ve (H,K) soft grupları için (F,K) ~ (H,K)'dır.

Çözüm: $\forall k \in \mathrm{G}$ için $f(\mathrm{F}(k))$=$f(< k >) =< f(k) >= \mathrm{H}(k) = \mathrm{H}(g(k))$ elde edilir. Buradan (F,G) ~ (H,G) olur.

Önerme 4. " $\simeq$ " bağıntısı soft gruplar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

(i) (F,A) $\simeq$ (F,A) olduğu açıktır.

(ii) (F,A) $\simeq$ (H,B) olsun. Bu takdirde $\exists f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$ 'ya izomorfi ve $\exists g : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ 'ye bire-bir, örten bir dönüşümü öyleki $f(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{H}(g(x))$ 'dir. Buradan $f^{-1} : \mathrm{K} \to \mathrm{G}$ izomorfi, $g^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ dönüşümü ve $\forall y \in \mathrm{B}$ için $f^{-1}(\mathrm{H}(y)) = \mathrm{F}(g^{-1}(y))$ 'dir.

Böylece (H,B) $\simeq$ (F,A) olur.

(iii) (F,A) $\simeq$ (H,B) $\simeq$ (P,C) olsun. Bu takdirde $\exists f : \mathrm{G} \to \mathrm{K}$, φ :K $\to$ T izomorfileri, $\exists g : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $h : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ 'ye bire-bir, örten dönüşümleri öyleki $\forall x \in \mathrm{A}, y \in \mathrm{B}$ için $f(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{H}(g(x))$ ve φ(H(y))=P($h(y)$) 'dir. Buradan,

$\varphi(\mathrm{H}(g(x))) = \varphi(f(\mathrm{F}(x))) = \mathrm{P}(h(g(x)))$ olur. Yani $\varphi \circ f(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{P}(h \circ g(x))$ 'dir. Tanım 53. ile (F,A) $\simeq$ (P,C) elde edilir.

Tanım 54. [11] (F,A) G üzerinde bir soft grup ve (H,B), (F,A)'nin bir soft alt grubu olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{B}$ için $\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{F}(x)$'in normal alt grubu ise (H,B)'ye (F,A)'nın bir normal soft alt grubu denir. Bu durum $(\mathrm{H,B})\tilde{\lhd}(\mathrm{F,A})$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 24. [11] (F,A), G üzerinde bir soft grup ve $\{(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) : i \in I\}$ (F,A) 'nın normal soft alt gruplarının bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(1) $\bigcap_{i\in I}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$, (F,A) ’nın bir normal soft alt grubudur.

(2) $\bigwedge_{i\in I}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$, (F,A) ’nın bir normal soft alt grubudur.

(3) Eğer $\forall i, j \in I$ için $\mathrm{K}_i \cap \mathrm{K}_j = \varnothing$ ise $\bigvee_{i\in I}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$, (F,A) ’nın bir normal soft alt grubudur.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR, BULGULAR VE İRDELEME

2.1. L-Fuzzy Soft Kümeler

Soft kümelerle fuzzy alt kümeler arasındaki ilişki ve soft kümeler için yapılan çalışmaların fuzzy alt kümelere uygulanabileceği Maji, Biswas ve Roy [10] tarafından daha önce gözlemlendi.

Fuzzy soft küme teorisi ilk olarak Maji, Biswas ve Roy [10] tarafından ortaya konuldu. L=[0,1] kafesi üzerinde yapılmış olan bu çalışma göz önüne alınarak bu bölümde bir L tam kafesi üzerinde yeni bir kavram olarak L-fuzzy soft küme tanımı verilerek bazı temel özellikler ve sonuçlar arasındaki ilişkiler değerlendirildi. Bu şekilde L-fuzzy soft kümelerin mevcut yapısı herhangi bir L kafesi üzerinde incelenmiş oldu. Ayrıca yapılan araştırmalar sonucunda daha önce soft kümeler için belirtilen $\bigcup$, $\bigcap$, $\sqcap$, $\vee$, $\wedge$ yapılarının L-fuzzy soft kümeler ailesi için de gerçeklendiği gözlemlendi. Bu şekilde soft kümeler için yapılmış olan çalışmalar daha da genelleştirilmiş oldu.

Bu bölüm boyunca, U bir küme, E parametreler kümesi, $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$ ve L bir tam kafes olarak ele alınacaktır.

Tanım 55. $\mathrm{F}:\mathrm{A}\to\mathrm{L}^{\mathrm{U}}$ bir dönüşüm olmak üzere $(\mathrm{F,A})$ ikilisine U üzerinde L-fuzzy soft küme denir.

Eğer L=[0,1] alınırsa L-fuzzy soft küme yerine fuzzy soft küme denir.

Örnek 14. L=[0,1] ve $\mathrm{F}:\mathbb{Z}\to\mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ olmak üzere $\forall n,\ x\in\mathbb{Z}$ için $\mathrm{F}(n):\mathbb{Z}\to\mathrm{L}$ dönüşümü

$$\mathrm{F}(n)(x):=\begin{cases}1, & 3\mid n-x\\ \frac{1}{2}, & 3\mid n-x+1\\ 0, & 3\mid n-x+2\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$ $\mathbb{Z}$ kümesi üzerinde L-fuzzy soft kümedir.

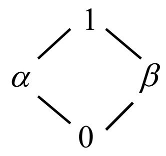
Tanım 56. $(\mathrm{F,A})$ ve $(\mathrm{G,B})$ U üzerinde iki L-fuzzy soft küme olsun. $(\mathrm{F,A})$ 'ya $(\mathrm{G,B})$ 'nin L-fuzzy soft alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$

(i) $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$

(ii) $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{G}(x)$

Bu durum $(\mathrm{F,A}) \widetilde{\sqsubseteq} (\mathrm{G,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 15. $\mathrm{L}=\{0,\alpha,\beta,1\}$ kafesinde sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



$\mathrm{F}:\mathbb{N} \to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{G}:\mathbb{Z} \to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $\mathrm{F}(n):\mathbb{Z} \to \mathrm{L}$, $\mathrm{G}(n):\mathbb{Z} \to \mathrm{L}$ dönüşümleri

$$\mathrm{F}(n)(x)=\begin{cases} 0, & x<n \\ \alpha, & x \geq n \end{cases} \qquad \mathrm{G}(n)(x)=\begin{cases} \beta, & x<n \\ 1, & x \geq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış olsun. Bu takdirde $(\mathrm{F},\mathbb{N}) \widetilde{\sqsubseteq} (\mathrm{G},\mathbb{N})$ 'dir.

Örnek 16. $\mathrm{L}=[0,1]$ bir kafes ve $\mathrm{F}, \mathrm{G}:\mathbb{R} \to \mathrm{L}^{\mathbb{R}}$ bir dönüşüm olmak üzere $\forall n,\ x \in \mathbb{R}$ için

$$\mathrm{F}(n)(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}, & n \leq x \\ 0, & x<n \end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{G}(n)(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}, & n \leq x \\ 1, & x<n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\mathrm{F}(n):\mathbb{R} \to \mathrm{L}$ ve $\mathrm{G}(n):\mathbb{R} \to \mathrm{L}$ dönüşümleri göz önüne alınırsa $(\mathrm{F},\mathbb{R}) \widetilde{\sqsubseteq} (\mathrm{G},\mathbb{R})$ 'dir.

Tanım 57. $(\mathrm{F,A})$ ve $(\mathrm{G,B})$ U üzerinde iki L-fuzzy soft küme olsun. $(\mathrm{F,A})$ ve $(\mathrm{G,B})$ 'ye eşittir denir. $\Leftrightarrow$

(1) $(\mathrm{F,A}) \widetilde{\sqsubseteq} (\mathrm{G,B})$

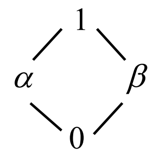
(2) $(\mathrm{G,B}) \widetilde{\sqsubseteq} (\mathrm{F,A})$

Tanım 58. $(\mathrm{F,A})$ U üzerinde bir L-fuzzy soft küme olmak üzere $(\mathrm{F,A})$ **'**ya boş L-fuzzy soft küme denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = 0_{\mathrm{U}}$. Bu durum $\widetilde{\Phi}_{\mathrm{A}}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 59. (F,A) U üzerinde bir L-fuzzy soft küme olmak üzere (F,A)'ya tam L-fuzzy soft küme denir. $\Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = 1_{\mathrm{U}}$. Bu durum $\widetilde{\Omega}_{\mathrm{A}}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 60. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. C=A$\cap$B ve $\forall x \in \mathrm{C}$ için $\mathrm{H}(x) = \mathrm{F}(x) \wedge \mathrm{G}(x)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-fuzzy soft kümesine (F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin arakesiti denir. Bu durum (F,A)$\widetilde{\cap}$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Örnek 17. G herhangi bir küme olmak üzere L=$\{0,\alpha,\beta,1\}$ kafesinde sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



F:$\mathbb{N} \to \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olmak üzere $\forall \mathrm{a} \in \mathbb{N}, x \in \mathrm{G}$ için $\mathrm{F}(\mathrm{a}): \mathrm{G} \to \mathrm{L}$ dönüşümü $\mathrm{F}(\mathrm{a})(x) = \begin{cases} 1, & x = \mathrm{a} \\ \beta, & x \neq \mathrm{a} \end{cases}$

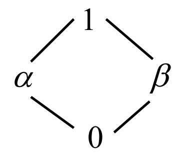
H:$\mathbb{Z} \to \mathrm{L}^{\mathrm{G}}$ olmak üzere $\forall \mathrm{b} \in \mathbb{Z}, x \in \mathrm{G}$ için $\mathrm{H}(\mathrm{b}): \mathrm{G} \to \mathrm{L}$ dönüşümü $\mathrm{H}(\mathrm{b})(x) = \begin{cases} \alpha, & x = \mathrm{b} \\ 0, & x \neq \mathrm{b} \end{cases}$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (F,$\mathbb{N}$) ve (H,$\mathbb{Z}$) L-fuzzy soft kümeler olup bu kümelerinin arakesiti (F,$\mathbb{N}$)$\widetilde{\cap}$(H,$\mathbb{Z}$) =(K,$\mathbb{N}$) ise $\forall \mathrm{a} \in \mathbb{N}, x \in \mathrm{G}$ için

$$\mathrm{K}(\mathrm{a})(x) = \begin{cases} \alpha, & x\text{=a} \\ 0, & x \neq \mathrm{a} \end{cases}$$

şeklindedir.

Örnek 18. L=$\{0,\alpha,\beta,1\}$ kafesinde sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



$\mathrm{F}: \mathbb{Z} \to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ ve $\mathrm{G}: \mathbb{Z} \to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ dönüşümleri, $\forall n, x \in \mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{F}(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 2\mid n-x\\ \beta, & 2\nmid n-x\end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \mathrm{G}(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 4\mid n-x\\ \beta, & 4\mid n-x+1\\ 1, & 4\mid n-x+2\\ 0, & 4\mid n-x+3\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$ ve $(\mathrm{G},\mathbb{Z})$ L-fuzzy soft kümeler olup bu kümelerin arakesiti $(\mathrm{F},\mathbb{Z})\tilde{\cap}(\mathrm{G},\mathbb{Z})=(\mathrm{H},\mathbb{Z})$ ise $\forall n,x\in\mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{H}(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 4\mid n-x \text{ ve } 4\mid n-x+2\\ \beta, & 4\mid n-x+1\\ 0, & 4\mid n-x+3\end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 61. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. C=A$\cup$B ve $\forall x\in$C için,

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x), & x\in\mathrm{A\text{-}B} \text{ ise}\\ \mathrm{G}(x), & x\in\mathrm{B\text{-}A} \text{ ise}\\ \mathrm{F}(x)\vee\mathrm{G}(x), & x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B} \text{ ise}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) L-fuzzy soft kümesine (F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin birleşimi denir. Bu durum $(\mathrm{F},\mathrm{A})\tilde{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 19. L=$\{0,\alpha,\beta,1\}$ kafesindeki sıralama bağıntısı ve $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$, $(\mathrm{G},\mathbb{Z})$ L-fuzzy soft kümeleri Örnek 18.'deki gibi tanımlanmış olsun. Bu takdirde $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$, $(\mathrm{G},\mathbb{Z})$ L-fuzzy soft kümelerinin birleşimi $(\mathrm{F},\mathbb{Z})\tilde{\cup}(\mathrm{G},\mathbb{Z})=(\mathrm{H},\mathbb{Z})$ ise $\forall n,x\in\mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{H}(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 4\mid n-x\\ \beta, & 4\mid n-x+1 \text{ ve } 4\mid n-x+3\\ 1, & 4\mid n-x+2\end{cases}$$

şeklindedir.

Önerme 5. (F,A) U üzerinde L-fuzzy soft küme olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\tilde{\cup}(\mathrm{F},\mathrm{A})$=(F,A)

(ii) $(F, A)\tilde{\cap}(F, A)=(F,A)$

(iii) $(F, A)\tilde{\cup}\tilde{\Phi}_A = (F,A)$

(iv) $(F, A)\tilde{\cap}\tilde{\Phi}_A = \tilde{\Phi}_A$

(v) $(F, A)\tilde{\cup}\tilde{\Omega}_A = \tilde{\Omega}_A$

(vi) $(F, A)\tilde{\cap}\tilde{\Omega}_A = (F,A)$

İspat:

(i) $(F, A)\tilde{\cup}(F, A)=(H,C)$ olsun. Tanım 61. ile $C=A\cup A=A$ olmak üzere $\forall x\in C$ için $H(x)=F(x)\vee F(x)=F(x)$ 'dir. Buradan $(F, A)\tilde{\cup}(F, A)=(F,A)$'dır.

(ii) $(F, A)\tilde{\cap}(F, A)=(H,C)$ olsun. Tanım 60. ile $C=A\cap A=A$ olmak üzere $\forall x\in C$ için $H(x)=F(x)\wedge F(x)=F(x)$ 'dir. Buradan $(F, A)\tilde{\cap}(F, A)=(F,A)$'dır.

(iii) $\tilde{\Phi}_A$ boş L-fuzzy soft küme olduğundan dolayı $\forall x\in A$ için $F(x)=0_U$ 'dır. $(F, A)\tilde{\cup}\tilde{\Phi}_A=(H,C)$ olsun. Tanım 61. ile $C=A\cup A=A$ olmak üzere $\forall x\in C$ için $H(x)=F(x)\vee 0_U(x)=F(x)\vee 0=F(x)$ olur. Buradan $(F, A)\tilde{\cup}\tilde{\Phi}_A=(F, A)$ 'dır.

(iv), **(v)** ve **(vi)** 'nın ispatları (i), (ii), (iii)'ye benzer şekilde yapılır.

Önerme 6. (F,A), (H,B), (K,C) U üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(i) $(F,A)\tilde{\bigcup}(H,B)=(H,B)\tilde{\bigcup}(F,A)$

(ii) $(F,A)\tilde{\bigcap}(H,B)=(H,B)\tilde{\bigcap}(F,A)$

(iii) $(F,A)\tilde{\bigcup}((H,B)\tilde{\bigcup}(K,C))=((F,A)\tilde{\bigcup}(H,B))\tilde{\bigcup}(K,C)$

(iv) $(F,A)\tilde{\bigcap}((H,B)\tilde{\bigcap}(K,C))=((F,A)\tilde{\bigcap}(H,B))\tilde{\bigcap}(K,C)$

(v) $(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(H,B)\Rightarrow (F,A)\tilde{\bigcup}(K,C)\tilde{\sqsubseteq}(H,B)\tilde{\bigcup}(K,C)$

(vi) $(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(H,B)\Rightarrow (F,A)\tilde{\bigcap}(K,C)\tilde{\sqsubseteq}(H,B)\tilde{\bigcap}(K,C)$

(vii) $(F,A)\tilde{\bigcup}((H,B)\tilde{\bigcap}(K,C))=((F,A)\tilde{\bigcup}(H,B))\tilde{\bigcap}((F,A)\tilde{\bigcup}(K,C))$

(viii) $(F,A)\tilde{\bigcap}((H,B)\tilde{\bigcup}(K,C))=((F,A)\tilde{\bigcap}(H,B))\tilde{\bigcup}((F,A)\tilde{\bigcap}(K,C))$

İspat:

(i), (ii), (iii) ve **(iv)**’in ispatları Tanım 60. ve Tanım 61. ile açıktır.

(v) (F,A)$\tilde{\sqsubseteq}$(H,B) olduğundan Tanım 56. ile $A \subseteq B$ ve $\forall x \in A$ için $F(x) \leq H(x)$’dir. Tanım 60. ile (F,A)$\tilde{\sqcap}$(K,C)=(G, $A \cap C$) ve (H,B)$\tilde{\sqcap}$(K,C)=(P, $B \cap C$) olmak üzere $\forall x \in A \cap C$ ve $\forall x \in B \cap C$ için $G(x)=F(x)\wedge K(x)$, $P(x)=H(x)\wedge K(x)$ şeklindedir. Buradan $A \cap C \subseteq B \cap C$ ve $\forall x \in A$ için $G(x) \leq P(x)$ olur. Yani (F,A)$\tilde{\sqcap}$(K,C)$\tilde{\sqsubseteq}$(H,B)$\tilde{\sqcap}$(K,C)’dir.

(vi) (v)’ye benzer şekilde yapılır.

(vii) (F,A) $\tilde{\sqcup}$ [(H,B) $\tilde{\sqcap}$ (K,C)] =(P,D) ve [(F,A) $\tilde{\sqcup}$ (H,B)] $\tilde{\sqcap}$ [(F,A) $\tilde{\sqcup}$ (K,C)]=(Q,E) eşitlikleri göz önüne alınırsa Tanım 60.-61. ile $D=A \cup (B \cap C)$ ve $E=(A \cup B) \cap (A \cup C)$ olur. Dolayısıyla D=E ve $\forall x \in D$ için $P(x)=Q(x)$’dır.

Buradan (F,A)$\tilde{\sqcup}$((H,B)$\tilde{\sqcap}$(K,C))=((F,A)$\tilde{\sqcup}$(H,B))$\tilde{\sqcap}$((F,A)$\tilde{\sqcup}$(K,C)) eşitliği elde edilir.

(viii) (vii)’ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 62. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. $C = A \times B$ ve $\forall (x, y) \in A \times B$ için $H(x, y) = F(x) \wedge G(y)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-fuzzy soft kümesine (F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum (F,A)$\tilde{\wedge}$ (G,B) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 63. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. $C = A \times B$ ve $\forall (x, y) \in A \times B$ için $H(x, y) = F(x) \vee G(y)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-fuzzy soft kümesine (F,A) ve (G,B) L-fuzzy soft kümelerinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $(F, A) \tilde{\vee} (G, B)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 64. (F,A) G_1 üzerinde (H,B) G_2 üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. $C = A \times B$ ve $\forall (x, y) \in A \times B$ için $G(x, y) = F(x) \times H(y)$ şeklinde tanımlanan (G,C) L-fuzzy soft kümesine (F,A) ve (H,B) L-fuzzy soft kümelerinin kartezyen çarpımı denir. Bu durum $(F,A) \tilde{\times} (H,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 20. L=[0,1] kafesinde $\mathrm{F}:\mathbb{Z}\to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ ve $\mathrm{H}:\mathbb{Z}\to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ iki dönüşüm olmak üzere $\forall x,y,a,b\in\mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{F}(x)(a)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\mid x-a\\ \frac{1}{2}, & 2\nmid x-a\end{cases}\qquad \mathrm{H}(y)(b)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 4\mid y-b\\ \frac{1}{2}, & 4\mid y-b+1\\ 1, & 4\mid y-b+2\\ 0, & 4\mid y-b+3\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$ ve $(\mathrm{H},\mathbb{Z})$ L-fuzzy soft kümeler olup bu kümelerinin kartezyen çarpımı $(\mathrm{G},\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=(\mathrm{F},\mathbb{Z})\tilde{\times}(\mathrm{H},\mathbb{Z})$ ise $\forall(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ için

$$\mathrm{G}(x,y)(a,b)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\mid x-a,\ 4\mid y-b,\ 4\mid y-b+1,\ 4\mid y-b+2 \text{ veya } 2\nmid x-a, 4\mid y-b\\ \frac{1}{2}, & 2\nmid x-a,\ 4\mid y-b+1,\ 4\mid y-b+2\\ 0, & 2\mid x-a,\ 4\mid y-b+3 \text{ veya } 2\nmid x-a,\ 4\mid y-b+3\end{cases}$$

şeklindedir.

Tanım 65. (G,•) bir grup, (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. $\mathrm{C}=\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ ve $\forall(x,y)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ için $\mathrm{K}(x,y)=\mathrm{F}(x)\bullet\mathrm{H}(y)$ şeklinde tanımlanan (K,C) L-fuzzy soft kümesine (F,A) ve (H,B) L-fuzzy soft kümelerinin çarpımı denir. Bu durum $(\mathrm{F},\mathrm{A})\tilde{\bullet}(\mathrm{H},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 66. (G,•) bir grup, (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft küme olsun. $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{E}(x)=\mathrm{F}(x)^{-1}$ şeklinde tanımlanan (E,A) L-fuzzy soft kümesine (F,A) L-fuzzy soft kümesinin tersi denir. Bu durum $(\mathrm{F},\mathrm{A})^{-1}$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 67. (F,A) ve (H,B) U üzerinde iki L-fuzzy soft küme olmak üzere (F,A) (G,B) 'ye denktir denir. $\Leftrightarrow$ $\exists f:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ bire-bir, örten bir dönüşüm öyleki $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)=\mathrm{H}(f(x))$ 'dir. Bu durum $(\mathrm{F},\mathrm{A})\cong(\mathrm{H},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 7. “ $\cong$ ” bağıntısı L-fuzzy soft kümeler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

(i) (F,A) $\cong$ (F,A) olduğu açıktır.

(ii) (F,A) $\cong$ (H,B) olsun.

Bu takdirde $\exists f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bire-bir, örten bir dönüşüm öyleki $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = \mathrm{H}(f(x))$ 'dir.

Buradan $f^{-1} : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ dönüşümü bire-bir ve örten olduğundan $\forall y \in \mathrm{B}$ için

$\mathrm{F}(f^{-1}(y)) = \mathrm{H}(f(f^{-1}(y))) = \mathrm{H}(y)$ 'dır. Yani (H,B) $\cong$ (F,A) denkliği elde edilir.

(iii) (F,A) $\cong$ (H,B) $\cong$ (G,C) olsun.

Bu takdirde $\exists f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $\exists g : \mathrm{B} \to \mathrm{C}$ bire-bir, örten dönüşümleri öyleki $\forall x \in \mathrm{A},\ y \in \mathrm{B}$ için

$\mathrm{F}(x) = \mathrm{H}(f(x))$ ve $\mathrm{H}(y) = \mathrm{G}(g(y))$ 'dir. Buradan

$\mathrm{F}(x) = \mathrm{H}(f(x)) = \mathrm{G}(g(f(x))) = \mathrm{G}(g \circ f(x))$ 'dir. $g \circ f : \mathrm{A} \to \mathrm{C}$ bire-bir, örten bir dönüşüm olduğundan (F,A) $\cong$ (G,C) denkliği elde edilmiş olur.

Tanım 68. (G,•) bir grup, (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ ve $\forall x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ için $\mathrm{K}(x) = \mathrm{F}(x) \bullet \mathrm{H}(x)$ şeklinde tanımlanan (K,C) L- fuzzy soft kümesine (F,A) ve (H,B) L-fuzzy soft kümelerinin arakesit çarpımı denir. Bu durum $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \,\tilde{\bullet}_{\cap}\, (\mathrm{H},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 69. (G,•) bir grup, (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ ve $\forall x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ için

$$\mathrm{K}(x) = \begin{cases} \mathrm{F}(x), & x \in \text{A-B} \\ \mathrm{H}(x), & x \in \text{B-A} \\ \mathrm{F}(x) \bullet \mathrm{H}(x), & x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (K,C) L-fuzzy soft kümesine (F,A) ve (H,B) L-fuzzy soft kümelerinin birleşim çarpımı denir. Bu durum $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \,\tilde{\bullet}_{\cup}\, (\mathrm{H},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 8. L sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes, (G,•) bir grup ve (F,A), (H,B), (K,C) G üzerinde L-fuzzy soft kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

(1) $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \,\tilde{\bullet}\, [(\mathrm{H},\mathrm{B}) \,\tilde{\bullet}\, (\mathrm{K},\mathrm{C})] \cong [(\mathrm{F},\mathrm{A}) \,\tilde{\bullet}\, (\mathrm{H},\mathrm{B})] \,\tilde{\bullet}\, (\mathrm{K},\mathrm{C})$

(2) $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \,\tilde{\bullet}_{\cap}\, [(\mathrm{H},\mathrm{B}) \,\tilde{\bullet}_{\cap}\, (\mathrm{K},\mathrm{C})] = [(\mathrm{F},\mathrm{A}) \,\tilde{\bullet}_{\cap}\, (\mathrm{H},\mathrm{B})] \,\tilde{\bullet}_{\cap}\, (\mathrm{K},\mathrm{C})$

(3) $(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cup}\,[(H,B)\,\tilde{\bullet}_{\cup}\,(K,C)] = [(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cup}\,(H,B)]\,\tilde{\bullet}_{\cup}(K,C)$

(4) $(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cup}\,[(H,B)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,(K,C)] = [(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cup}\,(H,B)]\,\tilde{\bullet}_{\cap}[(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cup}(K,C)]$

(5) $(F,A)\,\tilde{\sqsubseteq}\,(H,B) \Rightarrow (F,A)\,\tilde{\bullet}\,(K,C)\,\tilde{\sqsubseteq}\,(H,B)\,\tilde{\bullet}\,(K,C)$

(6) $(F,A)\,\tilde{\sqsubseteq}\,(H,B) \Rightarrow (F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,(K,C)\,\tilde{\sqsubseteq}\,(H,B)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,(K,C)$

İspat:

(1) $(F,A)\,\tilde{\bullet}\,[(H,B)\,\tilde{\bullet}\,(K,C)]=(P,D)$ ve $[(F,A)\,\tilde{\bullet}\,(H,B)]\,\tilde{\bullet}\,(K,C)=(Q,E)$ eşitlikleri göz önüne alınırsa $D=A\times(B\times C)$ ve $E=(A\times B)\times C$ olmak üzere $\forall a\in A,\, b\in B$ ve $c\in C$ için $f(a,(b,c))=((a,b),c)$ ile tanımlanan $f:D\to E$ bire-bir, örten dönüşümdür. Tanım 65. ile $P(a,(b,c))=F(a)\bullet[H(b)\bullet K(c)]$ şeklindedir. $\forall x\in U$ için

$$[F(a)\bullet(H(b)\bullet K(c))](x)=\bigvee_{x=y\bullet z}\{F(a)(y)\wedge(H(b)\bullet K(c))(z) \mid y,z\in U\}$$

$$=\bigvee_{x=y\bullet k\bullet t}\{F(a)(y)\wedge H(b)(k)\wedge K(c)(t) \mid y,k,t\in U\}$$

$$=\bigvee_{x=m\bullet t}\{(F(a)\bullet H(b))(m)\wedge K(c)(t) \mid m,t\in U\}$$

$$=[(F(a)\bullet H(b))\bullet K(c)](x)$$

eşitliği elde edilir.

Buradan $P(a,(b,c))=Q(f(a,(b,c))$ olur. Tanım 67. ile $(P,D)\cong(Q,E)$ ‘dır.

(2) Tanım 68. ile $(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,[(H,B)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,(K,C)]=(P,D)$ ve $D=A\cap(B\cap C)$ olmak üzere $\forall a\in A\cap(B\cap C)$ için $P(a)=F(a)\bullet[H(a)\bullet K(a)]$ şeklindedir. $\forall x\in U$ için,

$$[F(a)\bullet(H(a)\bullet K(a))](x)=\bigvee_{x=y\bullet z}\{F(a)(y)\wedge(H(a)\bullet K(a))(z) \mid y,z\in U\}$$

$$=\bigvee_{x=y\bullet k\bullet t}\{F(a)(y)\wedge H(a)(k)\wedge K(a)(t) \mid y,k,t\in U\}$$

$$=\bigvee_{x=m\bullet t}\{(F(a)\bullet H(a))(m)\wedge K(a)(t) \mid m,t\in U\}$$

$$=[(F(a)\bullet H(a))\bullet K(a)](x)$$

eşitliği elde edilir. Buradan $(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,[(H,B)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,(K,C)] = [(F,A)\,\tilde{\bullet}_{\cap}\,(H,B)]\,\tilde{\bullet}_{\cap}(K,C)$ ’dır.

(3) (2)’ ye benzer şekilde yapılır.

(4) (F,A) $\tilde{\bullet}_{\cup}$ [(H,B) $\tilde{\bullet}_{\cap}$ (K,C)] =(P,D) ve [(F,A) $\tilde{\bullet}_{\cup}$ (H,B)] $\tilde{\bullet}_{\cap}$[(F,A) $\tilde{\bullet}_{\cup}$(K,C)]=(Q,E) eşitlikleri göz önüne alınırsa Tanım 68.-69. ile D=A$\cup$(B$\cap$C) ve E=(A$\cup$B)$\cap$(A$\cup$C) 'dir. Dolayısıyla D=E ve $\forall x \in \mathrm{D}$ için P(x)=Q(x) olur.

Buradan (F,A) $\tilde{\bullet}_{\cup}$ [(H,B) $\tilde{\bullet}_{\cap}$ (K,C)] = [(F,A) $\tilde{\bullet}_{\cup}$ (H,B)] $\tilde{\bullet}_{\cap}$[(F,A) $\tilde{\bullet}_{\cup}$(K,C)] 'dır.

(5) Tanım 65. ile (F,A)$\tilde{\bullet}$(K,C)=($\mathrm{G}_1, \mathrm{A}\times\mathrm{C}$) ve (H,B)$\tilde{\bullet}$(K,C)=($\mathrm{G}_2, \mathrm{B}\times\mathrm{C}$) olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A},\ y \in \mathrm{B}, z \in \mathrm{C}$ için $\mathrm{G}_1(x,z) = \mathrm{F}(x)\bullet\mathrm{K}(z)$ ve $\mathrm{G}_2(y,z) = \mathrm{H}(y)\bullet\mathrm{K}(z)$ şeklindedir. (F,A)$\tilde{\sqsubseteq}$(H,B) olduğundan $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ ve $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) \leq \mathrm{H}(x)$'dir. Dolayısıyla $\mathrm{A}\times\mathrm{C} \subseteq \mathrm{B}\times\mathrm{C}$ ve $\mathrm{G}_1(x,z) \leq \mathrm{G}_2(y,z)$ olur. Buradan (F,A)$\tilde{\bullet}$(K,C)$\tilde{\sqsubseteq}$(H,B)$\tilde{\bullet}$(K,C)'dır.

(6) (5)'e benzer şekilde yapılır.

Tanım 70. $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ bir grup homomorfisi, (F,A) U üzerinde L-fuzzy soft küme olsun. $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{G}(x) := f(\mathrm{F}(x))$ şeklinde tanımlanan (G,A) L-fuzzy soft kümesine (F,A) L-fuzzy soft kümesinin f altındaki görüntüsü(remi) denir. Bu durum (GA)=(f(F),A) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 71. $f : \mathrm{U} \to \mathrm{U}'$ bir grup homomorfisi, (F,A) U' üzerinde L-fuzzy soft küme olsun. $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{G}(x) := f^{-1}(\mathrm{F}(x))$ şeklinde tanımlanan (G,A) L-fuzzy soft kümesine (F,A) L-fuzzy soft kümesinin f altındaki ters görüntüsü(ters remi) denir. Bu durum (GA)= (f^{-1}(F),A) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 72. $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$, $i \in \Lambda$, U üzerinde L-fuzzy soft kümelerin bir ailesi olsun.

(1) $\mathrm{A} = \bigcup_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ ve $\forall a \in \mathrm{A}$ için, $\Lambda(a) = \{i \mid a \in \mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a) = \bigvee_{i\in\Lambda(a)} \mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-fuzzy soft kümesine $(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ L-fuzzy soft kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum $\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(2) $\mathrm{A} = \bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i$ ve $\forall a \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a) = \bigwedge_{i\in\Lambda} \mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-fuzzy soft kümesine (F_i, A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum $\widetilde{\bigcap\limits_{i\in\Lambda}}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(3) $A = \bigcup\limits_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için, $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $F(a) = \bigwedge\limits_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-fuzzy soft kümesine (F_i, A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin daraltılmış arakesiti denir. Bu durum $\widetilde{\bigsqcap\limits_{i\in\Lambda}}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(4) $A = \prod\limits_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i)_{i\in\Lambda} \in A$ için $F(a_i) = \bigvee\limits_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-fuzzy soft kümesine (F_i, A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $\widetilde{\bigvee\limits_{i\in\Lambda}}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(5) $A = \prod\limits_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i)_{i\in\Lambda} \in A$ için $F(a_i) = \bigvee\limits_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-fuzzy soft kümesine (F_i, A_i) L-fuzzy soft kümeler ailesinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $\widetilde{\bigwedge\limits_{i\in\Lambda}}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 9. L bir sonsuz v-dağılımlı kafes, $\widetilde{\widetilde{\mathrm{U}}}$, U kümesi üzerinde L-fuzzy soft kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdakiler gerçeklenir.

(i) $(\widetilde{\widetilde{\mathrm{U}}}, \widetilde{\sqsubseteq}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ bir tam kafestir.

(ii) $(\widetilde{\widetilde{\mathrm{U}}}, \widetilde{\sqcap}, \widetilde{\sqcup})$ bir sonsuz v-dağılımlı kafestir.

İspat:

(i) Tanım 72.'nin (1) ve (2) şıkları ile ispatı açıktır.

(ii) (F,A), $(F_i, A_i) \in \widetilde{\widetilde{\mathrm{U}}}$ olsun. Tanım 72. ile (F,A) $\widetilde{\sqcap}$ $(\widetilde{\bigsqcup\limits_{i\in\Lambda}}(F_i, A_i))$=(K,A $\cap$ $(\bigcup\limits_{i\in\Lambda} A_i)$) olmak üzere $\forall \alpha \in A \cap (\bigcup\limits_{i\in\Lambda} A_i)$ ve $\Lambda(\alpha) = \{i \mid \alpha \in A_i\}$ için $K(\alpha)=F(\alpha)\wedge(\bigvee\limits_{i\in\Lambda(\alpha)} F_i(\alpha))$ şeklindedir. L sonsuz v-dağılımlı olduğundan $F(\alpha)\wedge(\bigvee\limits_{i\in\Lambda(\alpha)} F_i(\alpha)) = \bigvee\limits_{i\in\Lambda(\alpha)}(F(\alpha)\wedge F_i(\alpha))$ 'dır. Buradan (F,A) $\widetilde{\sqcap}$ $(\widetilde{\bigsqcup\limits_{i\in\Lambda}}(F_i, A_i))$=$\widetilde{\bigsqcup\limits_{i\in\Lambda}}$((F,A) $\widetilde{\sqcap}$ $(F_i, A_i))$ 'dır.

2.2. L-Fuzzy Soft Gruplar

Aktaş [11] tarafından soft gruplar için yapılmış olan mevcut çalışma göz önüne alındığında soft grupların, fuzzy alt gruplarla ilişkilendirilebileceği gözlemlendi. Bu bölümde soft gruplar için yapılmış olan çalışma göz önüne alınarak ve L-fuzzy soft kümeler yardımıyla yeni bir kavram olarak L-fuzzy soft grup, L-fuzzy soft alt grup, L-fuzzy soft homomorfi, L-fuzzy soft izomorfi, L-fuzzy soft normal alt grup tanımları verilerek L-fuzzy soft grupların yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir.

Tanım 73. G bir grup, (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft küme ve L bir tam kafes olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)$ G'nin L-fuzzy alt grubu ise (F,A)'ya G üzerinde bir L-fuzzy soft grup denir.

Eğer $\mathrm{L} = [0,1]$ ise (F,A)'ya G üzerinde fuzzy soft grup denir.

Teorem 25. $(\mathrm{L}, \leq)$ bir tam kafes ,$(\mathrm{G}, \bullet)$ bir grup, $\varnothing \neq \mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ ve $\mathrm{t} \in \mathrm{L}$ olsun. (F,A) L-fuzzy soft kümesi $\forall x \in \mathrm{G}$ ve $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F(a)}(x) = \begin{cases} \mathrm{t}, & x \in \mathrm{H} \\ 0, & x \notin \mathrm{H} \end{cases}$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruptur $\Leftrightarrow$ H<G

İspat:

"$\Rightarrow$" (F,A) kümesi G üzerinde L-fuzzy soft grup olduğundan $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{G}$ için F(a) G'nin L-fuzzy alt grubudur. Teorem 11. ile H<G'dir.

"$\Leftarrow$" H<G ve Teorem 11. ile $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$ için F(a) G'nin L-fuzzy alt grubudur. Buradan (F,A) kümesi G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Örnek 21. $(\mathrm{L}, \leq)$ bir tam kafes, $(\mathrm{G}, \bullet)$ bir grup ve $\mathrm{e} \in \mathrm{G}$, G'nin birim elemanı olsun.

$\mathrm{F:G} \to \mathrm{L^G}$, $\mathrm{F(g):G} \to \mathrm{L}$ olmak üzere $\alpha \in \mathrm{L}$ ve $\forall x \in \mathrm{G}$ için $\mathrm{F(g)}(x) = \begin{cases} 1, & x = \mathrm{e} \\ \alpha, & x \neq \mathrm{e} \end{cases}$

şeklinde tanımlanan (F,G) kümesi G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Çözüm: (F,G) kümesinin G üzerinde L-fuzzy soft grup olduğunu göstermek için $\forall g \in G$ için $F(g)$ 'nin G 'nin L-fuzzy alt grubu olduğunu göstermemiz gerekir. $\forall x, y \in G$ için

$F(g)(x^{-1}) = F(g)(x)$ olduğu açıktır.

$F(g)(x) \wedge F(g)(y) \leq F(g)(x \bullet y)$ olduğunu gösterelim.

1) x=e veya y=e ise eşitsizlik doğrudur.
2) $x \neq e$ ve $y \neq e$ ise $F(g)(x) \wedge F(g)(y) = \alpha \wedge \alpha \leq \alpha \leq F(g)(x \bullet y)$ olur.

Yani $\forall g \in G$ için $F(g)$ G'nin L-fuzzy alt grubudur ve buradan (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Örnek 22. L=$\{0, \alpha, \beta, 1\}$ kafesinde $0 < \alpha < \beta < 1$ sıralaması verilsin. $F: A \to L^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$ olmak üzere $\forall$ $a \in A$ için

$$F(a)(\bar{0}, \bar{0}) = 1,\ F(a)(\bar{1}, \bar{0}) = F(a)(\bar{0}, \bar{1}) = \alpha,\ F(a)(\bar{1}, \bar{1}) = \beta$$

şeklinde tanımlanan (F,A) L-fuzzy soft kümesi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 26. G bir grup, (F,A) G üzerinde bir soft grup olsun. $\overline{F}: A \to L^G$ olmak üzere $\forall a \in A$ için $\overline{F}(a) = \chi_{F(a)}$ şeklinde tanımlanan $(\overline{F}, A)$ ikilisi G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: (F,A) G üzerinde bir soft grup olduğundan dolayı $\forall a \in A$ için $F(a) < G$ 'dır. Teorem 25. ile $(\overline{F}, A)$ ikilisi G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 26. ile soft grupların L-fuzzy soft gruplarla eşleştirilebileceği görülüyor. Dolayısıyla L-fuzzy soft gruplar soft gruplardan daha genel bir kavram olmasının yanında, soft grupların sahip olduğu cebirsel özellikleri de taşımaktadır.

Teorem 27. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar ise $(F,A) \tilde{\cap} (H,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar olduğundan $\forall x \in A \cap B$ için $F(x)$, $H(x)$ G'nin L-fuzzy alt grubudur. Teorem 10. ile $\forall x \in A \cap B$ için $F(x) \wedge H(x)$ G'nin

L-fuzzy alt grubudur. Buradan $(F,A)\widetilde{\cap}(H,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 28. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar olsun. Eğer $A\cap B=\varnothing$ ise $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: Tanım 61. ile $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)=(K,C)$ olmak üzere $A\cap B=\varnothing$ ise $\forall x\in C$ için $x\in$ A-B veya $x\in$ B-A şeklindedir. Eğer $x\in$ A-B ise K(x)=F(x) G'nin L-fuzzy alt gubudur. Eğer $x\in$ B-A ise K(x)=H(x) G'nin L-fuzzy alt gurubudur. Buradan $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 29. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar olsun. Eğer $\forall x\in A\cap B$ için $F(x)\le H(x)$ veya $H(x)\le F(x)$ ise $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: Tanım 61. ile $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)$=(K,C) ve C=$A\cup B$ olmak üzere $\forall x\in C$ için

$$K(x)=\begin{cases}F(x), & x\in A\text{-}B\\ H(x), & x\in B\text{-}A\\ F(x)\vee H(x), & x\in A\cap B\end{cases}$$

şeklindedir. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar olduğundan dolayı $\forall x\in C$ için $F(x)$ ve $H(x)$ G'nin L-fuzzy alt gruplarıdır.

Eğer $F(x)\le H(x)$ veya $H(x)\le F(x)$ olursa $F(x)\vee H(x)$'in G'nin L-fuzzy alt grubu olduğu açıktır. Dolayısıyla $\forall x\in C$ için $K(x)$ G'nin L-fuzzy alt grubudur. Buradan $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 28. ve Teorem 29.'da özel şartlar altında iki L-fuzzy soft grubun birleşiminin L-fuzzy soft grup olduğu görüldü. Fakat bu şartlar kaldırıldığında iki L-fuzzy soft grubun birleşimi L-fuzzy soft grup olmayabilir. Yani (F,A) ve (H,B) G üzerinde herhangi iki L-fuzzy soft gruplar ise $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)$ G üzerinde her zaman L-fuzzy soft grup olmayabilir. Bu durumu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek 23. G=$\{1,2,3,4\}$ grubu

$\bullet$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	4	3
3	3	4	1	2
4	4	3	2	1

ikili işlemi ile dikkate alınıyor.

(F,A), (H,A) L-fuzzy soft grupları $\forall x \in A$ için

$$F(x)(1)=\frac{3}{4},\ F(x)(2)=\frac{5}{8},\ F(x)(3)=F(x)(4)=\frac{3}{8}$$

$$H(x)(1)=\frac{7}{8},\ H(x)(2)=\frac{1}{4},\ H(x)(3)=\frac{5}{8},\ H(x)(4)=\frac{1}{4}$$

şeklinde tanımlanırsa $(F,A)\tilde{\cup}(H,A)$ G üzerinde L-fuzzy soft grup değildir.

Çözüm: $\forall x \in A$ için $F(x)$ ve $H(x)$ L-fuzzy alt kümeleri G'nin L-fuzzy alt gruplarıdır. Buradan (F,A) ve (H,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruplardır. Fakat $F(x) \vee H(x)$ L-fuzzy alt kümesini göz önüne alırsak, $4 \in G$ için

$$(F(x)\vee H(x))(4)=\frac{3}{8} \leq (F(x)\vee H(x))(2)\wedge(F(x)\vee H(x))(3)=\frac{5}{8}$$

elde edilir. Buradan $F(x) \vee H(x)$ 'in G'nin L-fuzzy alt grubu olmadığı görülür. Tanım 61. ile $(F,A)\tilde{\cup}(H,A)$ G üzerinde L-fuzzy soft grup değildir.

Teorem 30. (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar ise $(F,A)\tilde{\wedge}(H,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: (F,A) ve (H,B) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar olduğundan $\forall x \in A$ ve $\forall y \in B$ için $F(x)$ ve $H(y)$ G'nin L-fuzzy alt gruplarıdır. Teorem 10. ile $F(x)\wedge H(y)$ G nin L-fuzzy alt grubudur. Tanım 62. ile $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 31. (F,A), (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde L-fuzzy soft gruplar ise $(F,A)\tilde{\times}(H,B)$

$G \times K$ üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: Tanım 64. ve Tanım 14.'den açıktır.

Teorem 32. (G,•) grup, L bir tam kafes ve μ :G $\to$ L L-fuzzy alt grup ve μ(e)=1 olsun. Bu takdirde $\forall \alpha \in$ L için $H(\alpha) = \chi_{\mu_\alpha}$ şeklinde tanımlanan (H,L) soft kümesi G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: Teorem 13. ile $\mu_\alpha < G$'dir. Teorem 25. ile χ_{μ_α} G üzerinde L-fuzzy alt gruptur. Buradan (H,L) soft kümesi G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

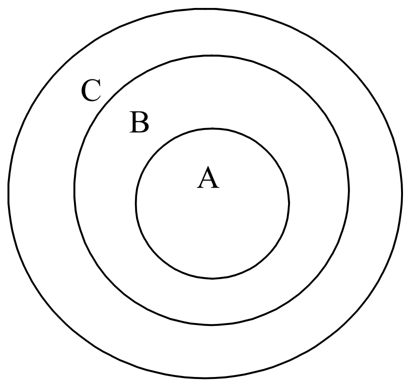
Teorem 33. $\widetilde{\mathcal{U}}$ ve $\widetilde{\widetilde{\mathcal{U}}}$ sırasıyla, L parametreli, G üzerindeki soft grupların ve L-fuzzy soft grupların bir ailesi olsun.

$\gamma : \widetilde{\mathcal{U}} \to \widetilde{\widetilde{\mathcal{U}}}$ olmak üzere $\forall (F,L) \in \widetilde{\mathcal{U}},\ \alpha \in L$ için γ(F,L)=($\overline{F}$,L)=$\chi_{F(\alpha)}$ dönüşümü bire-bir kafes homomorfisidir.

İspat: Teorem 14. (i) ile ispatı açıktır.

Teorem 14. (i) ile bir G grubunun alt grupları G'nin L-fuzzy alt grupları içine genişletilebilir. Teorem 14. (ii) ile G 'nin L-fuzzy alt kafesi eğer L zincir ise L parametreli soft grup olarak alınabilir. Teorem 33. ile bir soft grup L-fuzzy soft grupların içine gömülebilir.

Bu ilişki aşağıdaki şekilde sembolize edilir.



C: L-fuzzy soft grupların kümesi

B: Soft grupların kümesi

A: L-fuzzy alt grupların kümesi

Sonuç olarak L-fuzzy soft gruplar, L-fuzzy alt gruplardan ve soft gruplardan daha genel bir kavramdır.

Teorem 34. (F,A) ve (H,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar olsun. Bu takdirde,

$(F,A)\tilde{\bullet}(H,A)$ G üzerinde bir L-fuzzy soft gruptur $\Leftrightarrow (F,A)\tilde{\bullet}(H,A) = (H,A)\tilde{\bullet}(F,A)$

İspat:

"$\Longrightarrow$" (F,A) ve (H,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar olduğundan $\forall x \in A$ için $F(x)$ ve $H(x)$ G'nin L-fuzzy alt gruplarıdır. Teorem 12. ile $F(x) \bullet H(x)$ G'nin L-fuzzy alt grubu ise $F(x)\bullet H(x) = H(x)\bullet F(x)$ 'dir. Tanım 65. ile $(F,A)\tilde{\bullet}(H,A) = (H,A)\tilde{\bullet}(F,A)$ olur.

"$\Longleftarrow$" Teorem 12. ile $\forall x \in A$ için $F(x)\bullet H(x) = H(x)\bullet F(x)$ ise $F(x) \bullet H(x)$ G'nin L-fuzzy alt grubudur. Tanım 65. ile (F,A) $\tilde{\bullet}$ (H,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 35. L bir sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes, $(G,\bullet)$ bir grup ve (F,A) G üzerinde tanımlı L-fuzzy soft küme olsun. Bu takdirde (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruptur. $\Leftrightarrow$

(i) $(F,A)\tilde{\bullet}_{\cap}(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(F,A)$

(i) $(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(F,A)^{-1}$

İspat:

"$\Longrightarrow$"(F,A) G üzerinde L-fuzzy soft grup olduğundan $\forall a \in A$ için F(a) G'nin L-fuzzy alt grubudur. Dolayısıyla $\forall x \in G$ için $(F(a) \bullet F(a))(x) \leq F(a)(x)$'dir.

Buradan $(F,A)\tilde{\bullet}_{\cap}(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(F,A)$'dır. Diğer yandan $\forall x \in G$ için

$F(a)^{-1}(x) = F(a)(x^{-1}) \geq F(a)(x)$ olduğundan $(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(F,A)^{-1}$ elde edilir.

"$\Longleftarrow$" $\forall x, y, z \in G$ için $z = x\bullet y$ olsun.

$(F,A)\tilde{\bullet}_{\cap}(F,A)\tilde{\sqsubseteq}(F,A)$ olduğundan $\forall a \in A$ için $F(a){:}G \to L$ dönüşümü

$F(a)(z) \geq (F(a)\bullet F(a))(z) = \bigvee_{x=y\bullet z}\{F(a)(x) \wedge F(a)(y) \mid x,y \in U\}$

$\geq F(a)(x) \wedge F(a)(y)$ şeklindedir.

Buradan $F(a)(z) \geq F(a)(x) \wedge F(a)(y)$ olur.

Diğer taraftan $(\mathrm{F,A})\tilde{\sqsubseteq}(\mathrm{F,A})^{-1}$ olduğundan $\forall x \in \mathrm{G}$ için, $\mathrm{F(a)}(x) \leq \mathrm{F(a)}^{-1}(x) = \mathrm{F(a)}(x^{-1})$ 'dir. Dolayısıyla $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F(a)}$ G'nin L-fuzzy alt grubudur. Buradan (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft grup olur.

Teorem 36. L bir sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes, $(\mathrm{G},\bullet)$ bir grup ve (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft küme olsun. Bu takdirde, (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruptur. $\Leftrightarrow$
$(\mathrm{F,A})\ \tilde{\bullet}_{\cap}\ (\mathrm{F,A})^{-1}\tilde{\sqsubseteq}(\mathrm{F,A})$

İspat: Teorem 35.'e benzer şekilde yapılır.

Tanım 74. $(\mathrm{G},\bullet)$ bir grup, A bir küme ve $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x) = 1_{\{e\}}$ ise (F,A) L-fuzzy soft kümesine G üzerinde birim L-fuzzy soft küme denir.

Teorem 37. $(\mathrm{G},\bullet)$ bir grup ve (F,A) G üzerinde birim L-fuzzy soft küme ise (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: Örnek 21.'e benzer şekilde yapılır.

Teorem 38.

(1) (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft grup, $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir grup homomorfisi olsun. Bu takdirde $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$ K üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

(2) (H,B) K üzerinde L-fuzzy soft grup, $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir grup homomorfisi olsun. Bu takdirde $(f^{-1}(\mathrm{H}),\mathrm{B})$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat:

(1) (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft grup olduğundan $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)$ G'nin L-fuzzy alt grubudur. $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir grup homomorfisi olduğundan dolayı Teorem 8. ile $\forall x \in \mathrm{A}$ için $(f(\mathrm{F}))(x) = f(\mathrm{F}(x))$ K'nın L-fuzzy alt grubu olur. Buradan $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$ K üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

(2) (H,B) K üzerinde L-fuzzy soft grup olduğundan $\forall x \in \mathrm{B}$ için $\mathrm{H}(x)$ K'nın L-fuzzy alt grubudur. $f:\mathrm{G} \to \mathrm{K}$ bir grup homomorfisi olduğundan Teorem 9. ile $\forall x \in \mathrm{B}$ için $(f^{-1}(\mathrm{H}))(x) = f^{-1}(\mathrm{H}(x))$ G'nin L-fuzzy alt grubudur. Buradan $(f^{-1}(\mathrm{H}),\mathrm{B})$ G üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Teorem 39. (F,B) G üzerinde L-fuzzy soft grup $f:\mathrm{G} \to \mathrm{H}$ bir grup homomorfisi ve $g:\mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bir fonksiyon olmak üzere, $\forall a \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{K}(a) = f(\mathrm{F}(g(a)))$ şeklinde H üzerinde tanımlanan (K,A) L-fuzzy soft kümesi H üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: $\forall a \in \mathrm{A}$ için $g(a) \in \mathrm{B}$'dir. (F,B) G üzerinde L-fuzzy soft grup olduğundan $\forall g(a) \in \mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(g(a))$ G üzerinde L-fuzzy alt gruptur. Teorem 8. ile $\forall a \in \mathrm{A}$ için $f(\mathrm{F}(g(a)))$ H'nin L-fuzzy alt grubudur. Buradan $\mathrm{K}(a) = f(\mathrm{F}(g(a)))$ şeklinde tanımlanan (K,A) kümesi H üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Tanım 75. (F,A) ve (H,K) G üzerinde L-fuzzy soft gruplar ve $(\mathrm{H,K}) \tilde{\sqsubseteq} (\mathrm{F,A})$ ise (H,K)'ya (F,A)'nın L-fuzzy soft alt grubu denir. Bu durum $(\mathrm{H,K}) \tilde{\prec} (\mathrm{F,A})$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 24. G bir grup ve $e \in \mathrm{G}$ olmak üzere $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)=0_{\mathrm{G}}$, $\mathrm{H}(x) = \mathcal{X}_{\{e\}}$ şeklinde tanımlanan (F,A) ve (H,A) L-fuzzy soft kümeleri için $(\mathrm{F,A}) \tilde{\prec} (\mathrm{H,A})$'dır.

Çözüm: $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)$ ve $\mathrm{H}(x)$ G' nin L-fuzzy alt grubudur. Dolayısıyla (F,A) ve (H,A) L-fuzzy soft kümeleri G üzerinde L-fuzzy soft gruplardır. Üstelik $\forall a \in \mathrm{G}$ için $\mathrm{F}(x)(a) \leq \mathrm{H}(x)(a)$'dır. Buradan $(\mathrm{F,A}) \tilde{\prec} (\mathrm{H,A})$ olur.

Teorem 40. (F,A) G üzerinde bir L-fuzzy soft grup, $\{(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i) \mid i \in I\}$ (F,A)'nın L-fuzzy soft alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde $\tilde{\bigcap}_{i \in I}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$ (F,A)'nın L-fuzzy soft alt grubudur.

İspat: Açık olarak $\bigcap_{i \in I} \mathrm{K}_i \subset \mathrm{A}$'dır. $\forall i \in I$ için $(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i) \tilde{\prec} (\mathrm{F,A})$ olduğundan dolayı

$\widetilde{\bigcap\limits_{i\in I}}(\mathrm{H}_i,\mathrm{K}_i)$ (F,A) 'nın L-fuzzy soft alt grubudur.

Teorem 41. (F,A) ve (H,B) G üzerinde iki L-fuzzy soft grup, (F,A) (H,B)'nin L- fuzzy soft alt grubu olsun. Eğer $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir grup homomorfisi ise $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})$ $(f(\mathrm{H}),\mathrm{B})$'nin L-fuzzy soft alt grubudur.

İspat: Eğer (F,A) (H,B)'nin L-fuzzy soft alt grubu ise $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{H}(x)$ G'nin L-fuzzy alt grupları ve $\mathrm{F}(x)\le\mathrm{H}(x)$ dir. $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir grup homomorfisi olduğundan dolayı $f(\mathrm{F(x)})$, $f(\mathrm{H}(x))$ G'nin L-fuzzy alt grupları ve $f(\mathrm{F}(x))\le f(\mathrm{H}(x))$'dir. Tanım 75. ile $(f(\mathrm{F}),\mathrm{A})\,\tilde{\prec}\,(f(\mathrm{H}),\mathrm{B})$'dır.

Tanım 76. (F,A) ve (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde L-fuzzy soft gruplar olsun. $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ ve $g:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ iki fonksiyon olmak üzere (f,g) 'ye L-fuzzy soft homomorfi (F,A)'ya da (H,B)'ye L-fuzzy soft homomorfiktir denir. $\Leftrightarrow$

(1) f, G'den K'ya grup homomorfisi

(2) g, A'dan B'ye bir dönüşüm

(3) $\forall x\in\mathrm{A}$ için $f(\mathrm{F}(x))=\mathrm{H}(g(x))$

Bu durum (F,A) $\xrightarrow{(f,g)}$ (H,B) notasyonu ile gösterilir.

Bu tanımda eğer $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir izomorfi ve $g:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ bire-bir, örten bir dönüşüm ise (f,g)'ye L-fuzzy soft izomorfi ve (F,A)'ya da (H,B)'ye L-fuzzy soft izomorftur denir. Bu durum (F,A)$\approxeq$(H,B) notasyonu ile gösterilir.

Örnek 25. (F,K), (H,K) keyfi L-fuzzy soft gruplar, $f:\mathrm{G}\to\mathrm{K}$ bir grup homomorfisi ve (H,K) L-fuzzy soft grubu $\forall x\in\mathrm{K}$ için H(x)=f(F(x)) şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $(f,\mathrm{I_K})$ L-fuzzy soft homomorfidir.

Çözüm: $\mu=\mathrm{F}(x)$ olmak üzere $f(\mathrm{F}(k))=f(\mu)$ ve $\mathrm{H}(g(k))=\mathrm{H}(\mathrm{I_K}(k))=\mathrm{H}(k)=f(\mu)$'dır.

Buradan $f(\mathrm{F}(k)) = \mathrm{H}(\mathrm{I_K}(k))$ elde edilir. Dolayısıyla (F,K) $\overset{(f,\mathrm{I_K})}{\rightarrow}$ (H,K)’dır.

Teorem 42. (F,A) ve (H,B) sırasıyla G ve K üzerinde L-fuzzy soft kümeler, (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft grup olsun. Eğer (F,A), (H,B)’ye L-fuzzy soft izomorf ise (H,B)’de K üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

İspat: (F,A), (H,B)’ye L-fuzzy soft izomorf olduğundan Tanım 75. ile $\exists f : \mathrm{G} \rightarrow \mathrm{K}$ grup izomorfisi ve $\exists g : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$’ye bire-bir, örten bir dönüşüm öyleki $\forall x \in \mathrm{A}$ için $f(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{H}(g(x))$’dir. $g : \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$ bire-bir, örten bir dönüşüm olduğundan $\forall y \in \mathrm{B}$ için $f(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{H}(g(x)) = \mathrm{H}(y)$’dir. Teorem 8. ile $f(\mathrm{F}(x))$ K’nın L-fuzzy alt grubudur ve bundan dolayı $\mathrm{H}(y)$ K’nın L-fuzzy alt grubudur. Buradan (H,B) K üzerinde L-fuzzy soft gruptur.

Tanım 77. (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft grup ve (H,B), (F,A)’nın L-fuzzy soft alt kümesi olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{B}$ için $\mathrm{H}(x)$, G’nin L-fuzzy normal alt grubu yani ise (H,B)’ye (F,A)’nın L-fuzzy normal soft alt grubu denir. Bu durum $(\mathrm{H,B})\widetilde{\trianglelefteq}(\mathrm{F,A})$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 43. (F,A) G üzerinde L-fuzzy soft grup, $\{(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i) \mid i \in I\}$ (F,A)’nın L-fuzzy normal soft alt gruplarının boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde $\widetilde{\bigcap\limits_{i \in I}}(\mathrm{H}_i, \mathrm{K}_i)$ (F,A)’nın L-fuzzy normal soft alt grubudur.

İspat: Tanım 77. ve Teorem 40.’dan ispatı açıktır.

3. SONUÇLAR

Zadeh [1] tarafından 1965 yılında ortaya çıkan fuzzy kavramı günümüze kadar bir çok uygulama alanı bulmuştur. Uzun yıllardan beri matematikteki küme kavramı bu alana taşınmaya çalışılmaktadır. Son yıllarda özellikle soft kümeler üzerine yapılan çalışmalar göz önüne alındığında, fuzzy mantığının soft küme yapısına uyarlanmasının mümkün olduğu gözlemlendi. Bu tezde ilk kez L-fuzzy soft grup tanımı verilerek soft gruplar için bilinen önemli tanım ve teoremler bu alana taşınmaya çalışılmıştır. Literatürde mevcut çalışmaların bu tanımlarla yeniden yapılandırılabilmesi bakımından katkılar sağlıyacağı düşünülmektedir.

4.ÖNERİLER

Son yıllarda soft kümeler üzerinde yapılan çalışmalar giderek artmış ve bu kapsamda soft kümelerin yapısı, temel cebirsel özellikleri birçok kişi tarafından ele alınmıştır. Bu tezde yer alan çalışmada ise L-fuzzy soft kümelerin özellikleri bir grup yapısı üzerinde değerlendirilmiştir.

Bu çalışmayı daha da genişletmek mümkündür. L-fuzzy soft kümelerin özellikleri halkalar, modüller gibi diğer cebirsel yapılar üzerinde yeniden değerlendirilip, bu yapılara uyarlanması mümkün olabilir. Bu şekilde bir çok matematiksel yapı gerek soft kümeler gerekse L-fuzzy soft kümeler üzerinde yeniden ele alınabilir.

5. KAYNAKLAR

1. Zadeh L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

2. Rosenfield A., fuzzy groups, Journal of Mathematical Analysis and Application, 35 (1971) 512-517.

3. Das P., Fuzzy vector spaces under triangular norms, Fuzzy Sets and Systems, 25 (1988) 73-85.

4. Sidky F.I. and Mishref A.M., Fuzzy cosets and cyclic and abelian fuzzy Subgroups, Fuzzy Sets and Systems, 43 (1991) 243-250.

5. Pawlak Z., Rough sets, Int. J. Inform. Comput. Sci., 11 (1982) 341-356.

6. Molodtsov D., Soft set theory-first results, Comput. Math. Appl., 37 (1999) 19-31.

7. Maji P.K., Biswas R. and Roy A.R., Soft set theory, Comput. Math. Appl., 45 (2003) 555-562.

8. Chen D., Tsang E.C.C., Yeung D.S. and Wang X, The parameterization reduction of soft sets and its applications, Comput. Math. Appl., 49 (2005) 757-763.

9. Pei D. and Miao D., From Soft Sets to Information Systems, IEEE International Conferance on Granular Computing, 2 (2005) 617-621.

10. Maji P.K., Biswas R. and Roy A.R., Fuzzy Soft Sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 9 (2001) 589-602.

11. Aktaş H. and Çağman N., soft sets and soft groups, Information Science, 177 (2007) 2726-2735.

12. Jun Y.B., Soft BCK/BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008) 1408-1413.

13. Feng F., Jun Y.B. and Zhao X, Soft semirings, Computers and Mathematics with Applications, 56 (2008) 2621-2628.

14. Ali M.I., Feng F., Liu X., Min W.K. and Shabir M., On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 57 (2009) 1547-1553.

15. Birkhoff G., Lattice Theory, American Mathematical society, Providence, Rhode Island 1967.

16. Kaufmann A., Introduction to the Theory Of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London, 1975.

17. Mordeson, J.N. and Malik, D.S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998.

18. Bhattacharya P.B. and Jain S.K., First Course in Group Theory, New Delhi, 1972.

ÖZGEÇMİŞ

Yıldıray ÇELİK 29.08.1982 yılında Rize'nin Pazar ilçesinde doğdu. İlköğrenimini Arhavi Fatih Sultan Mehmet İlköğretim Okulunda ve Arhavi Atatürk Ortaokulunda, orta öğrenimini Arhavi Lisesinde tamamladı. 2000 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2004 yılında bitirdi. 2006 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2008 yılında Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesine araştırma görevlisi olarak atandı. Halen bu görevini sürdürmektedir. İyi derecede İngilizce bilmektedir.