

**OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU İÇİN
UYARLANABİLİR ÇEKİRDEK KESTİRİM YÖNTEMİ**

**THE ADAPTIVE KERNEL ESTIMATION METHOD FOR
PROBABILITY DENSITY FUNCTION**

AYBİKE VAR

Hacettepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI** 'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan (Danışman) :
Prof.Dr. Öniz Toktamış

Üye :
Doç. Dr. Tülay Saraçbaşı

Üye :
Yar. Doç.Dr. Serpil Gökçe Cula

ONAY

Bu tez/...../..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../...../.....

Prof.Dr. Ahmet R. Özdural
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONU İÇİN UYARLANABİLİR ÇEKİRDEK KESTİRİM YÖNTEMİ

Aybike Var

ÖZ

Bu çalışmada olasılık yoğunluk fonksiyonu için değişen bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemi ayrıntılı olarak incelenmiş ve sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemi ile karşılaştırılmıştır. Dağılımı bilinen kitlelerden seçilen farklı büyüklüklere sahip örneklem için, sabit bant genişlikli çekirdek kestirimleri ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri elde edilmiştir. Kestirimler toplanmış hata kareler ortalamalarına göre karşılaştırılmıştır.

Sabit çekirdek kestirim yöntemi ile uyarlanabilir çekirdek kestirim yöntemi karşılaştırıldığında, genellikle sabit çekirdek kestirim yönteminin, uyarlanabilir çekirdek kestirim yönteminden daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Ancak yaptığımız uygulamada, bir serbestlik dereceli ki-kare dağılımından alınan örneklem için uyarlanabilir çekirdek kestirim yönteminin daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Çekirdek (kernel) kestirimi, uyarlanabilir (adaptive) çekirdek kestirimi.

THE ADAPTIVE KERNEL ESTIMATION METHOD FOR PROBABILITY DENSITY FUNCTION

Aybike Var

ABSTRACT

In this study the kernel estimation with varying bandwidth for probability density function is reviewed in details and compared with the kernel estimation with fixed bandwidth. The kernel estimations with fixed bandwidth and the adaptive kernel estimations have been obtained for samples in different sizes taken from masses with known distribution. The estimations have been compared according to their integrated mean squared error.

In the comparison of the fixed kernel estimation and the adaptive kernel estimation, it has been observed that the fixed kernel estimation generally gives better results than the adaptive kernel estimation. However the adaptive kernel estimation in our application is giving better results for the samples taken from chi-square distribution with one degree of freedom.

Key Words: Kernel estimation, adaptive kernel estimation.

TEŞEKKÜR

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun uyarlanabilir çekirdek kestirim yönteminin incelenmesi amacıyla gerçekleştirilen bu çalışmada desteğini ve özverili yardımlarını esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Sayın Prof.Dr. Öviz Toktamış'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Ayrıca çalışma esnasında karşılaştığım zor anlarda manevi desteklerini esirgemedikleri ve her zaman yanımda oldukları için aileme ve Hasan Onur Yazıcı'ya teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. ÇEKİRDEK KESTİRİM YÖNTEMİ.....	2
2.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Çekirdek Kestirimi.....	2
2.1.1. Çekirdek Kestirim Yönteminin Geometrik Yorumu.....	2
2.1.2. Çekirdek Kestiricisine İlişkin Hata Kareler Ortalaması ve Toplanmış Hata Kareler Ortalaması.....	4
2.1.3. Asimtotik Gösterimler.....	7
2.1.4. Optimal Bant Genişliğinin Seçimi.....	8
2.1.4.1. En Küçük Kareler Çapraz Geçerlilik Yöntemi.....	9
2.1.5. Çekirdek Fonksiyonunun Seçimi.....	11
3. OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN DEĞİŞEN BANT GENİŞLİKLİ ÇEKİRDEK KESTİRİM YÖNTEMLERİ.....	14
3.1. Giriş.....	14
3.2. Balon Kestiricileri.....	15
3.3. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiricileri.....	16
3.3.1. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Geometrik Yorumu.....	17

	<u>Sayfa</u>
3.3.2. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Özellikleri.....	19
3.3.2.1. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Beklenen Değeri ve Yanı.....	19
3.3.2.2. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Varyansı.....	23
3.3.2.3. Uyarlanabilir Çekirdek Kestirimin Hata Kareler Ortalaması.....	24
3.3.3. Silverman Tarafından Verilen Algoritma.....	27
3.3.4. Bant Genişliğinin Otomatik Seçimi.....	29
4. UYGULAMA.....	31
4.1. Yöntem.....	31
4.2. Uygulama Sonuçları.....	36
5. KAYNAKLAR DİZİNİ.....	48
6. ÖZGEÇMİŞ.....	50

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestirimi.....	3
Şekil 3.1. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun uyarlanabilir çekirdek kestirimi.....	18
Şekil 4.1. Kikare (1) dağılımı $n=25$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri	38
Şekil 4.2. Beta (1 ; 4) dağılımı $n=25$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	39
Şekil 4.3. Weibull (1; 2) dağılımı $n=25$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	40
Şekil 4.4. Lognormal (0; 1.75) dağılım $n=25$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	41
Şekil 4.5. Üstel (3) dağılım $n=25$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri	42
Şekil 4.6. Kikare (1) dağılımı $n=100$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	43
Şekil 4.7. Beta (1 ; 4) dağılımı $n=100$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	44
Şekil 4.8. Weibull (1; 2) dağılımı $n=100$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	45
Şekil 4.9. Lognormal (0; 1.75) dağılım $n=100$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	46
Şekil 4.10. Üstel (3) dağılım $n=100$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri.....	47

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1. Çekirdek kestiriminde en çok kullanılan fonksiyonlar.....	11
Çizelge 2.2. Bazı çekirdek fonksiyonları ve bu fonksiyonların etkinlik oranları....	13
Çizelge 4.1: Kikare (1)'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar.....	32
Çizelge 4.2: Beta (1;4)'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar.....	33
Çizelge 4.3: Weibull (1;2) 'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar....	34
Çizelge 4.4: Lognormal (0;1,75) 'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar.....	35
Çizelge 4.5: Üstel (3) 'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar.....	36
Çizelge 4.6: Beş dağılımdan alınan örneklem için elde edilen kestirimlerin toplanmış hata kareler ortalamaları.....	37

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

HKO:	Hata Kareler Ortalaması
THKO:	Toplanmış Hata Kareler Ortalaması
AHKO:	Asimtotik Hata Kareler Ortalaması
ATHKO:	Asimtotik Toplanmış Hata Kareler Ortalaması
$\hat{f}_u(x)$:	Uyarlanabilir Çekirdek Kestirimi
h_{OPT} :	Bant Genişliğinin Optimal Değeri
ÇG:	Çapraz Geçerlilik

1. GİRİŞ

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestirimi istatistiğin temel konularından biridir. Veriler, dağılımı bilinen bir kitleden seçilmiş ise olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestirimi için parametrik kestirim yöntemleri; veriler, dağılımı bilinmeyen bir kitleden seçilmiş ise olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestirimi için parametrik olmayan kestirim yöntemleri kullanılır.

Çekirdek kestirim yöntemi; parametrik olmayan yöntemlerden biridir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun, regresyon fonksiyonunun, hazard fonksiyonunun kestiriminde ve diskriminant analizinde kullanılmaktadır.

İlk kez Rosenblatt (1956) tarafından önerilen çekirdek kestirim yöntemi sabit bant genişliği kullanılmaktadır. Sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemi uzun kuyruklu dağılımlarda ve çok tepeli dağılımlarda yetersiz kalmaktadır. Bu durumda bazı araştırmacılar değişen bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemleri kullanmayı önermişlerdir.

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun değişen bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemleri balon kestiricisi ve uyarlanabilir çekirdek kestiricisi olarak iki gruba ayrılır. Bu kestiriciler arasındaki fark bant genişliğinin seçilme şeklidir.

Bu çalışmanın amacı, 1977 yılında Breiman, Meisel ve Purcell tarafından ortaya konulan uyarlanabilir çekirdek kestirim yöntemini, tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestirimi için tanıtmak ve sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemi ile karşılaştırmaktır.

Bu çalışmanın birinci bölümünde çalışma hakkında genel bilgi verilmiş, ikinci bölümünde olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestirim yöntemi tanıtılmıştır. Üçüncü bölümünde olasılık yoğunluk fonksiyonunun değişen bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemlerine ilişkin genel bilgiler ayrıntılı olarak sunulmuş, dördüncü bölümünde ise simülasyon çalışması ile bir uygulama yapılmış ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

2. ÇEKİRDEK KESTİRİM YÖNTEMİ

Uygulamalı istatistikde olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestirimi güncelliğini koruyan konulardan biridir. Bu bölümde tek değişkenli olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestiricisi ve istatistiksel özellikleri tanıtılacaktır.

2.1. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Çekirdek Kestirimi

Dağılımını bilmediğimiz bir kitleden çekilen rasgele örneklem x_1, x_2, \dots, x_n olsun. Herhangi bir x noktasında olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestirimi;

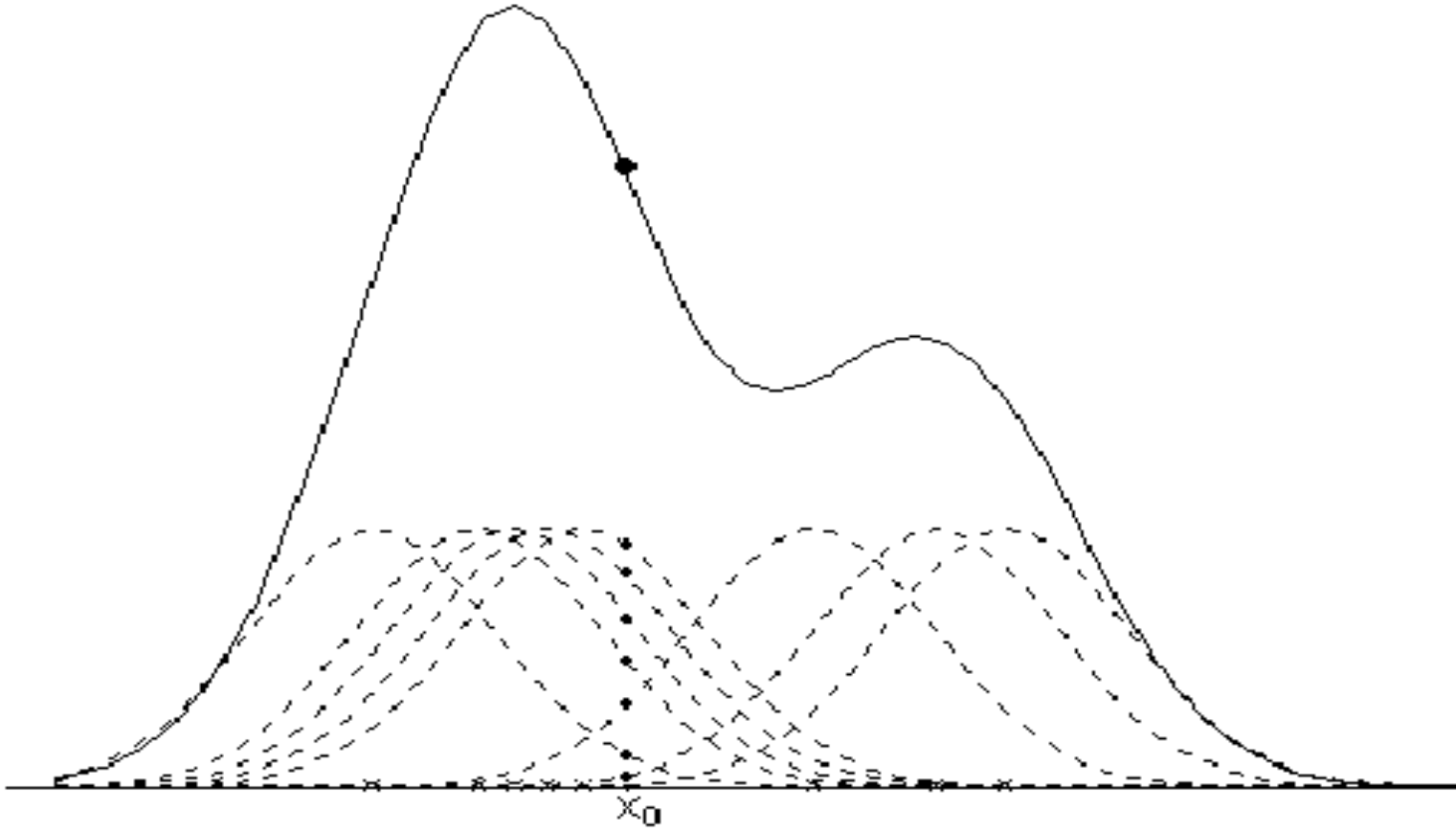
$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x-x_i) \quad (2.1)$$

biçiminde verilmektedir. . Burada $K_h(x) = \frac{1}{h} K\left(\frac{x}{h}\right)$ olup, K çekirdek fonksiyonu, genellikle $x=0$ civarında simetrik olan, pozitif değerli olasılık yoğunluk fonksiyonudur. h , pencere genişliği, bant genişliği adlarını da alan düzleştirme parametresidir. K ve h uygulayıcı tarafından seçilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun x noktasındaki çekirdek kestirimi; komşu gözlemleri belli ağırlıklarla hesaba katan ağırlıklı bir ortalamadır. Bu biçimdeki ilk kestirici, çekirdek fonksiyonunu tekbiçimli, $K = U(-1, 1)$, olarak Fix ve Hodges (1951) tarafından önerilmiştir. Bu kestiricinin genel biçimi Rosenblatt (1956) ve Parzen (1962) tarafından, çok değişkenli biçimi ise Cacoullos (1966) ve Epanechnikov (1969) tarafından ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2.1.1. Çekirdek Kestirim Yönteminin Geometrik Yorumu

Herhangi bir x_0 noktası için sabit bant genişliği alınarak çekirdek kestiriminin nasıl elde edildiğini açıklamak için Şekil 2.1'deki grafik verilmektedir. Şekil 2.1, \hat{f} 'nin özel olarak grafikte işaretli x_0 noktasında nasıl elde edildiğini göstermektedir. Sekiz veri noktası x_1, \dots, x_8 x ekseninde çarpı (\times) işaretleri ile gösterilmektedir. Noktalı eğriler her bir veri noktasında merkezlenmiş,

$h^{-1} K\left\{\frac{(x-x_i)}{h}\right\}$, $i=1, \dots, n$, bağımsız çekirdek eğrileridir. Burada çekirdek fonksiyonu, K , standart normal dağılım olarak alınmıştır.



Şekil 2.1: Olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestirimi

Bu fonksiyonların, işaretlenen x_0 noktasından, x eksenine çıkılan dik doğrunun çekirdek fonksiyonlarını kestiği noktalar küçük siyah noktalar ile ve bu noktaların x_0 'a uzaklıklarının toplamı, $n\hat{f}(x_0)$, yıldız ile gösterilmiştir. En üstteki eğri ise tüm kestirim noktaları için elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestiriminin n ile çarpımının grafiğidir. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun x_0 noktasındaki çekirdek kestirimi, her bir veri noktasında merkezlenmiş aynı bant genişliği değerine sahip noktalı eğriler ile gösterilen çekirdek fonksiyonlarının x_0 noktasındaki ağırlıklı ortalamalarını alarak elde edilir. Küçük siyah noktalar yıldız ile gösterilen toplama, çekirdek fonksiyonlarının sıfırdan farklı katkılarını göstermektedir.

2.1.2. Çekirdek Kestiricisine İlişkin Hata Kareler Ortalaması ve Toplanmış Hata Kareler Ortalaması

İstatistik kuramında, kestirimin performansını değerlendirmek, başka bir deyişle ne kadar iyi bir tahmin yapıldığını anlamak için bazı hata kriterleri kullanılır.

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestiricisinin performansını değerlendirmek için risk fonksiyonları kullanılır.

Genel risk fonksiyonu aşağıda verilmiştir.

$$R^p(\hat{f}, f) = E \int |\hat{f}(x) - f(x)|^p Q(x) dx \quad (2.2)$$

Burada $p > 1$ ve $Q(x)$ negatif olmayan ağırlık fonksiyonudur. Eşitlik (2.2.) ile verilen risk fonksiyonunda $p=2$ ve $Q(x)=1$ alınırsa,

$$R^2(\hat{f}, f) = E \int |\hat{f}(x) - f(x)|^2 dx \quad (2.3)$$

elde edilir. Bu fonksiyon toplanmış hata kareler ortalaması (THKO)' sıdır.

Noktasal kestirim için varyans ve yan teriminin karesinin toplamı olan Hata Kareler Ortalaması (HKO) kullanılır.

$$HKOf(x, h) = E [\hat{f}(x, h) - f(x)]^2$$

$$= Var(\hat{f}(x, h)) + [Yanf(\hat{f}(x, h))]^2 \quad (2.4)$$

Yaygın olarak kullanılan performans kriteri Rosenblatt(1956) tarafından önerilen Hata Kareler Ortalaması (HKO)'nın integrali olan Toplanmış Hata Kareler Ortalaması (THKO)'sıdır. THKO aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} THKO_{\hat{f}}(x, h) &= \int_{-\infty}^{\infty} E[\hat{f}(x, h) - f(x)]^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Var\hat{f}(x, h)dx + \int_{-\infty}^{\infty} [E\hat{f}(x, h) - f(x)]^2 dx \end{aligned} \quad (2.5)$$

Eşitlik (2.4) ve Eşitlik (2.5)'de kestirimin varyans ve yan ifadeleri mevcuttur. Dolayısıyla önce çekirdek kestiriminin beklenen değer, yan ve varyans ifadeleri verilecektir.

Çekirdek kestiricisinin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E\hat{f}(x, h) &= E\left[\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right] \\ &= \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n E\left\{K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right\} \end{aligned}$$

x_i değerleri aynı dağılıma sahip bağımsız örneklem değerleri olduğu için $E\left[K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right]$ terimleri bütün x değerleri için aynı olacaktır. Dolayısıyla beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} E\hat{f}(x, h) &= \frac{1}{nh} nE\left\{K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{h} E\left\{K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - y}{h}\right) f(y) dy \end{aligned}$$

Burada $\frac{x-y}{h} = u$ dönüşümü yapılırsa beklenen değer;

$$E\hat{f}(x, h) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u) f(x - hu) du$$

olarak elde edilir. Bu ifade de $f(x - hu)$ Taylor serisine açıldığında ve integral alındığında;

$$E\hat{f}(x, h) = f(x) + \frac{1}{2} h^2 f''(x) \mu_2(K) + o(h^2) \quad (2.6)$$

olarak bulunur.

Çekirdek kestiricisinin yan terimi aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned} Yanf\hat{(x, h)} &= E\hat{f}(x, h) - f(x) \\ &= \frac{h^2}{2} f''(x) \mu_2(K) + o(h^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Çekirdek kestiricisinin varyansı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} Varf\hat{(x, h)} &= E\left\{\hat{f}(x, h) - E\hat{f}(x, h)\right\}^2 \\ &= E\left\{\frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n \left[K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right]\right\}^2 \end{aligned}$$

$\left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^2 = \sum_{j=1}^n a_j^2 + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_i a_j$ olduğundan varyans terimi aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} Varf\hat{(x, h)} &= E\left\{\frac{1}{(nh)^2} \sum_{i=1}^n \left[K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{(nh)^2} \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \left[K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right] \left[K\left(\frac{x-x_j}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \right]\right\} \\ &= \frac{1}{(nh)^2} E \sum_{i=1}^n \left[K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right]^2 + \frac{1}{(nh)^2} E \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \left[K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right] \left[K\left(\frac{x-x_j}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_j}{h}\right) \right] \end{aligned}$$

x_i 'ler bağımsız örneklem değerleri olduklarından $Cov(x_i, x_j) = 0$ 'dır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitliğin sağ yanındaki ikinci terim sıfırdır.

$$\begin{aligned}
Var\hat{f}(x, h) &= \frac{1}{(nh)^2} nE \left[K\left(\frac{x-x_i}{h}\right) - EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right]^2 \\
&= \frac{1}{nh^2} \left\{ EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right)^2 - \left[EK\left(\frac{x-x_i}{h}\right) \right]^2 \right\} \\
&= \frac{1}{n} \left\{ \frac{1}{h^2} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{h}\right)^2 f(y) dy - \left[\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{x-y}{h}\right) f(y) dy \right]^2 \right\}
\end{aligned}$$

Burada $\frac{x-y}{h} = u$ dönüşümü yapılırsa;

$$Var\{\hat{f}(x, h)\} = \frac{1}{nh} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-uh) K(u)^2 du - \frac{1}{n} \{Ef(x, h)\}^2$$

$f(x-uh)$ ifadesi taylor serisine açıldığında olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestiricisine ilişkin varyans terimi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$Var\hat{f}(x, h) = \frac{1}{nh} f(x) \int_{-\infty}^{\infty} K(u)^2 du + O(n^{-1}) \quad (2.8)$$

Bu ifadelerden yararlanarak olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestiricisine ilişkin THKO terimi aşağıdaki gibi bulunur (Cula,1998).

$$THKO\{\hat{f}(x.h)\} = (nh)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K(u)^2 du + \frac{1}{4} h^4 \mu_2(K)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) dx + o\{(nh)^{-1} + h^4\} \quad (2.9)$$

2.1.3. Asimtotik Gösterimler

Asimtotik gösterimler, örneklem büyüklüğü $n \rightarrow \infty$ olduğunda kullanılır. O ve o gösterimleri çeşitli gerçel değerli fonksiyonlar için kullanılır. a_n ve b_n gerçel sayıların bir dizisi olduğunda $n \rightarrow \infty$ iken $b_n \neq 0$ olmak üzere $\left| \frac{a_n}{b_n} \right|$ oranı sınırlı

kalıyorsa $a_n = O(b_n)$ yazılır. $n \rightarrow \infty$ iken $b_n \neq 0$ olmak üzere $\left| \frac{a_n}{b_n} \right|$ oranı sifira gidiyorsa $a_n = o(b_n)$ yazılır.

Kestiricileri karşılaştırmak için kullanılan kavramlardan biri yakınsama hızı kavramıdır. Bir kestiricinin örneklem büyüklüğü artarken hedef değerine ne kadar hızla yaklaştığını gösteren bir kavramdır. $1 - \cos\left\{\frac{(3n^{1/2} + 1)}{(2n^2)}\right\} \approx \frac{9}{8}n^{-1}$ biçimindeki ifadelerde \approx simgesinin sağ tarafını Cr_n formunda ifade etmek alışılmış bir durumdur. Burada r_n , $n^{-\alpha}$ ya da $(\log n)^{-\alpha}$ formlarından biri biçiminde n 'nin basit bir fonksiyonudur. C , n 'den bağımsız bir değer olmak üzere; eğer a_n dizisi $a_n \approx Cr_n$ ifadesini sağlıyorsa, bu durumda çoğu kez r_n 'ye a_n 'nin yakınsama hızı denir.

Değişik olasılık yoğunluk fonksiyonu kestirim yöntemleri rasgele olmayan hata kriterlerinin sifira ulaşma hızlarına göre karşılaştırılır (Wand and Jones,1995; Cula,1998).

2.1.4. Optimal Bant Genişliğinin Seçimi

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestiriminde bant genişliği'nin seçimi çok önemlidir. Bant genişliği değerinde küçük bir değişim kestirimin değerinde büyük değişim ortaya çıkarmaktadır. Bant genişliği olduğundan küçük seçilirse yanıltıcı tepeler, bant genişliği olduğundan büyük seçilirse önemli tepelerin yok olduğu görülmektedir.

Bant genişliğinin optimal değerini bulmak için yaygın olarak kullanılan ölçüt 1956 yılında Rosenblatt tarafından önerilen toplanmış hata kareler ortalaması (THKO)'dır. THKO 'sını minimum yapan h değeri optimal bant genişliğidir. Eşitlik (2.9) ile verilen THKO'sından asimtotik toplanmış hata kareler ortalaması (ATHKO) aşağıdaki biçimde yazılır:

$$ATHKO\{\hat{f}(x,h)\} = (nh)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} K(u)^2 du + \frac{1}{4} h^4 \mu_2(K)^2 \int_{-\infty}^{\infty} f''(x) dx \quad (2.10)$$

ATHKO ve THKO kriterlerinden optimal h değeri aşağıda verildiği gibi elde edilmiştir:

$$h_{opt} \cong \mu_2(K)^{-2/5} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(u) du \right\}^{-1/5} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)^2 dx \right\}^{-1/5} n^{-1/5} \quad (2.11)$$

Ancak eşitlik (2.11.)'deki bant genişliği bilinmeyen olasılık yoğunluk fonksiyonunun ikinci mertebeden türevine bağlı olarak bulunmaktadır. Dolayısıyla buradan optimal bant genişliği değeri elde edilemez. Optimal bant genişliği değerini elde etmek için simülasyona dayanan çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bunlar; subjektif seçim, en küçük kareler çapraz geçerlilik yöntemi, yanlı çapraz geçerlilik yöntemi, plug-in yöntemi, düzleştirilmiş çapraz geçerlilik yöntemi ve bootstrap yöntemidir. Bu çalışmada, bant genişliği en küçük kareler çapraz geçerlilik yöntemine göre seçilecektir. Bu nedenle en küçük kareler çapraz geçerlilik yöntemi aşağıdaki alt bölümde verilmektedir.

2.1.4.1. En küçük Kareler Çapraz Geçerlilik Yöntemi

En küçük kareler çapraz geçerlilik yöntemi, bant genişliğinin seçimi için tamamen otomatik (veriye dayalı) bir yöntemdir. Bu yöntem ilk kez Rudemo (1982) ve Bowman (1984) tarafından önerilmiştir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu f 'nin, \hat{f} kestiricisine ilişkin THKO'sı aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} THKO_{\hat{f}}(x, h) &= \int_{-\infty}^{\infty} E \left[\hat{f}(x, h) - f(x) \right]^2 dx \\ &= E \int \hat{f}(x, h)^2 dx - 2E \int \hat{f}(x, h) f(x) dx + \int f(x)^2 dx \end{aligned} \quad (2.12)$$

Burada amaç THKO'sını minimum yapan bant genişliği, h 'yı, seçmektir. Eşitlik (2.12)'deki son terim \hat{f} 'ye bağlı değildir. Bu durumda THKO'sını minimum yapan h bant genişliği,

$$\begin{aligned} THKO_{\hat{f}}(x, h) - \int f(x)^2 dx &= E \int \hat{f}(x, h)^2 dx - 2E \int \hat{f}(x, h) f(x) dx \\ &= E \left\{ \int \hat{f}(x, h)^2 dx - 2 \int \hat{f}(x, h) f(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

ifadesini minimum yapan bant genişliğinin seçimine eşdeğerdir.

Eşitlik (2.13)'de verilen fonksiyonda ikinci terim f 'ye bağlıdır ve aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\int \hat{f}(x, h) f(x) dx = E \hat{f}(x, h)$$

ve bu integral yerine

$$\int \hat{f}(x, h) f(x) dx = n^{-1} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{-i}(x_i, h) \quad (2.14)$$

istatistiği kullanılabilir (Cula,1998). Burada \hat{f}_{-i} , x_i dışındaki tüm veri noktalarından elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestirimidir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\hat{f}_{-i}(x_i, h) = (n-1)^{-1} h^{-1} \sum_{j \neq i} K\{h^{-1}(x - X_j)\}$$

(Silverman,1986). Eşitlik (2.14)'deki ifade Eşitlik (2.13)'de yerine konulursa:

$$THKO - \int \hat{f}(x) dx = E \left\{ \int \hat{f}(x, h)^2 dx - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \hat{f}_{-i}(x_i, h) \right\}$$

elde edilir. Burada beklenen değer önündeki ifade çapraz geçerlilik fonksiyonu olarak tanımlanmakta ve,

$$M_0(h) = \int \hat{f}(x, h) - 2n^{-1} \sum_i \hat{f}_{-i}(x_i) \quad (2.15)$$

ile verilmektedir. $M_0(h)$, Eşitlik (2.13)'nin sağ tarafındaki ifadenin yansız bir kestirimini vermektedir. Bu durumda çapraz geçerlilik fonksiyonunu minimum yapan bant genişliği, aynı zamanda THKO'sını da minimum yapan bant genişliğidir. $M_0(h)$ fonksiyonu birden fazla yerel minimuma sahip olabilir. Yapılan çalışmalar bu durumda en büyük yerel minimuma sahip olan bant genişliğinin alınmasının uygun olduğunu ortaya koymuştur. Çünkü en büyük yerel minimumu veren h bant genişliği değeri, THKO'dan elde edilen optimal bant genişliğine yakındır (Gökmen, 2002; Wand and Jones, 1995).

2.1.5. Çekirdek Fonksiyonunun Seçimi

K, çekirdek fonksiyonu da uygulayıcı tarafından seçilmektedir. Çekirdek fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak seçildiğinde elde edilen kestirim de bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olur. K'nın süreklilik ve türevlenebilirlik özellikleri de kestirilen fonksiyona taşınır.

Çekirdek kestiriminde en çok kullanılan çekirdek fonksiyonları Çizelge 2.1.'de verilmektedir.

Çizelge 2.1: Çekirdek kestiriminde en çok kullanılan fonksiyonlar

	K(y)
Beta(4,4)	$\frac{\Gamma(8)}{\Gamma(4)\Gamma(4)}y^3(1-y^3), 0 < y < 1$ 0 , ö.d.
Cauchy	$\{\pi(1+y^2)\}^{-1}, -\infty < y < \infty$
Epanechnikov	$\frac{3}{4\sqrt{5}}(1-\frac{y^2}{5}), y \leq \sqrt{5}$ 0 , ö.d
Gamma(p)	$\Gamma(p)^{-1}y^{p-1}e^{-y}, y > 0$ 0 , ö.d
İki Ağırlıklı (Biweight)	$\frac{15}{16}(1-y^2)^2, y < 1$ 0 , ö.d
Pikard	$\frac{1}{2}e^{- y }, -\infty < y < \infty$
Standard Normal	$\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}e^{-y^2/2}, -\infty < y < \infty$
Tekbiçimli (Uniform)	$\frac{1}{2}, y \leq 1$ 0 , ö.d.

Eşitlik (2.11.) ile verilen optimal h bant genişliği, asimptotik toplanmış hata kareler ortalamasını veren Eşitlik (2.10.)'da yerine yazılırsa aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$ATHKO\{\hat{f}(x, h)\} \cong \frac{5}{4} C(K) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f''(x)^2 dx \right\}^{1/5} n^{-4/5} \quad (2.16)$$

Burada çekirdek fonksiyonu K'ya bağlı olan $C(K)$ terimi aşağıdaki gibidir:

$$C(K) = \mu_2(K)^{2/5} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} K(u)^2 du \right\}^{4/5} \quad (2.17)$$

Düzleştirme parametresi doğru olarak seçilebilirse teorik olarak hata kareler ortalamasının küçük bir değerini elde etmek mümkün olacağından, asimptotik toplanmış hata kareler ortalamasını veren Eşitlik (2.16)'da diğer her şey aynı alınırsa $C(K)$ 'yı küçük yapan K çekirdeğinin seçilmesi uygun olacaktır. 1956 yılında Hodges ve Lehmann, $\int K(u)du$ ve $\int u^2 K(u)$ terimlerini bir'e eşit olması kısıtı altında, $C(K)$ 'yı minimum yapan $K(u)$ 'yu farklı bir problemde aşağıdaki gibi seçerek çözmüşlerdir.

$$K_e(u) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{3}{4\sqrt{5}} \left(1 - \frac{1}{5}u^2\right), \quad -\sqrt{5} \leq u \leq \sqrt{5} \\ 0, \quad \text{ö.d} \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

$K_e(u)$ notasyonunun kullanılmasının nedeni, bu fonksiyonun ilk kez Epanechnikov (1969) tarafından çekirdek kestiriminde kullanılmasının önerilmesidir. Bu olasılık yoğunluk fonksiyonu Epanechnikov çekirdeği olarak bilinir.

Herhangi bir simetrik çekirdeği, Epanechnikov çekirdeği ile karşılaştıran K'nın etkinliği aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır:

$$Etkinlik(K) = \left\{ \frac{C(K_e)}{C(K)} \right\}^{5/4} \quad (2.19)$$

$$= \frac{3}{4\sqrt{5}} \left\{ \int u^2 K(u)du \right\}^{-1/2} \left\{ \int K(u)^2 du \right\}^{-1} \quad (2.20)$$

Bazı çekirdek fonksiyonları ve bu fonksiyonların etkinlikleri Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2: Bazı çekirdek fonksiyonları ve bu fonksiyonların etkinlik oranları

Çekirdek	K(u)	Etkinlik Oranı
Epanechnikov	$\frac{3}{4}(1-\frac{1}{5}u^2)/\sqrt{5}, u < \sqrt{5}$ 0 , ö.d	1
İki Ağırlıklı (Biweight)	$\frac{15}{16}(1-u^2)^2, u < 1$ 0 , ö.d	$\left(\frac{3087}{3125}\right)^{1/2} \approx 0,9939$
Üçgensel (Triangular)	$1- u , u < 1$ 0 , ö.d	$\left(\frac{243}{250}\right)^{1/2} \approx 0,9859$
Standart Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(1/2)u^2}$	$\left(\frac{36\pi}{125}\right)^{1/2} \approx 0,9512$

Çizelge 2.2'den görüldüğü gibi, çekirdek fonksiyonlarının etkinlik oranları bir'e yakın bulunmuştur. Buna göre farklı çekirdek fonksiyonlarının kullanılmasının kestiricinin performansı üzerinde, THKO kriterine göre önemli farklılıklar olmadığı anlaşılmaktadır. Bu nedenle çekirdek fonksiyonu, türevlenebilirlik özelliği ve hesaplama kolaylığı kriterlerine göre seçilmektedir.

Bu kriterlere göre elde edilen bant genişliği ve K çekirdek fonksiyonu, Eşitlik (2.1) ile verilen formülde yerine konularak elde edilen kestirim, çekirdek kestirimidir. Bu kestiriciyi daha sonraki bölümde verilen kestirici ile karıştırmamak için bu yöntemle elde edilen kestirim, sabit bant genişlikli çekirdek kestirimi olarak adlandırılacaktır.

3. OLASILIK YOĞUNLUK FONKSİYONUNUN DEĞİŞEN BANT GENİŞLİKLİ ÇEKİRDEK KESTİRİM YÖNTEMLERİ

Sabit bant genişlikli çekirdek kestiricileri uzun kuyruklu dağılımlarda, çok tepeli dağılımlarda ve çok değişkenli dağılımlarda yetersiz kalmaktadır. Bu durumda değişen bant genişlikli çekirdek kestiricileri kullanılmaktadır.

3.1. Giriş

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun değişken bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemleri iki kategoride gruplandırılmaktadır. Bunlar; uyarlanabilir çekirdek kestiricisi ve balon kestiricileridir. İkisi arasındaki fark bant genişliği değerinin nasıl seçildiğidir.

Literatürde bu iki yöntemin adlandırılmasını bir çok yazar farklı bir şekilde yapmaktadır. Her bir veri noktasında farklı bant genişliği kullanarak elde edilen çekirdek kestiricisine Silverman (1986) uyarlanabilir çekirdek kestiricisi (adaptive kernel density estimator), Terrell ve Scott (1992) örneklem düzleştirici kestirici (sample smoothing estimator), Sain (1994) örneklem noktası kestiricisi (sample point estimator), Jones(1990) değişen çekirdek kestiricisi (varying kernel density estimator) ; her bir kestirim noktasında aynı, farklı kestirim noktalarında farklı bant genişliği kullanan çekirdek kestiricisini Silverman (1986) k. en yakın komşu kestiricisi (k. nearest neighbour estimator), Terrell ve Scott (1992) ve Sain (1994) balon kestiricisi (ballon estimator), Jones (1990) yerel çekirdek kestiricisi (local kernel density estimator) olarak adlandırmaktadırlar. Bu çalışmada bant genişliği değerinin her bir veri noktasında değiştiği durum, uyarlanabilir çekirdek kestiricisi; bant genişliği değerinin her bir kestirim noktasında değiştiği durum, balon kestiricisi olarak adlandırılacaktır.

Bundan sonraki alt bölümde balon kestiricilerine kısaca değinilecek, daha sonraki alt bölümde uyarlanabilir çekirdek kestiricileri ayrıntılı olarak incelenecektir.

3.2. Balon Kestiricileri

Balon kestiricileri ilk olarak Loftsgaarden ve Quesenberry (1965) tarafından k . en yakın komşu kestiricilerinin genelleştirilmiş bir biçimi olarak tanıtılmıştır. Bu kestirici;

$$\hat{f}(x) = \frac{k}{nV_d h_k(x)^d} \quad (3.1)$$

biçimindedir.

$h_k(x)$, x 'den k . en yakın örneklem noktasına öklit uzaklığıdır ve V_d , \mathfrak{R}^d 'de birim kürenin hacmidir. Loftsgaarden ve Quesenberry (1965), k 'nin $n^{-1/2}$ ile orantılı seçilmesi sonucu bu kestiricinin tutarlı olduğunu göstermişlerdir.

Genelleştirilmiş k . en yakın komşu kestiricisi aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{h(x)^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-x_i}{h(x)}\right) \quad (3.2)$$

Balon kestiricisinde her bir kestirim noktası x için farklı bant genişliği kullanılır. Balon kestiricisi; komşu gözlemlere ilişkin ağırlıkların bulunmasında aynı bant genişliğini kullanmaktadır. f 'nin x noktasındaki kestirimi; her bir veri noktasında özdeş olarak ölçeklendirilmiş çekirdek fonksiyonuna bağlı olarak hesaplanan ağırlıklar kullanılarak elde edilen ağırlıklı bir ortalamadır. Örneklemin herhangi bir noktasındaki balon kestirimi sabit bant genişlikli kestirim gibi hesaplanır. Ancak başka bir noktadaki balon kestirimi hesaplanırken bant genişliği değişir. Ve bu kestirime balon kestirimi denilir.

Balon kestiricisinin en büyük dezavantajı integralinin her zaman bir olmamasıdır, yani her zaman bir olasılık yoğunluk fonksiyonu değildir. Ayrıca bu tipteki kestiriciler tek ve iki değişkenli durumda zayıf performans gösterirken, üç ve daha fazla değişkenli durumlarda daha iyi performans göstermektedirler. (Terrell and Scott, 1992)

3.3. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiricileri

Uyarlanabilir çekirdek kestiricisi ilk kez Breiman, Meisel ve Purcell (1977) tarafından tanıtılmış olup her bir veri noktası için farklı bir bant genişliği değeri kullanmaktadır. Her x noktasındaki olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestirimi; her bir veri noktasında merkezlenmiş farklı ölçeklendirilmiş çekirdek fonksiyonuna bağlı olarak hesaplanan ağırlıklar kullanılarak elde edilen ağırlıklı bir ortalamadır.

Bu kestirici;

$$\hat{f}_u(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h(x_i)^d} K\left(\frac{x - x_i}{h(x_i)}\right) \quad (3.3)$$

ile verilmektedir. Burada $h(x_i)$, değişen bant genişliği; d ise boyut sayısıdır. Breiman, Meisel ve Purcell (1977) değişen bant genişliğinin, $h(x_i)$ 'nin, x_i 'den k . en yakın örneklem noktasına öklit uzaklığı ile orantılı olarak seçilmesini (asimtotik olarak bu $h(x_i) \propto f(x_i)^{-1/d}$ seçilmesine eşdeğerdir), Abramson (1982) ise $f(x_i)^{-1/2}$ ile orantılı olarak seçilmesini, Silverman (1986) ise, g , $\hat{f}(x_i)$ 'lerin geometrik ortalaması olmak üzere, $\left[\frac{g}{f(x_i)}\right]^{1/2}$ ile orantılı olarak seçilmesini önermişlerdir.

Uyarlanabilir çekirdek kestirimindeki temel düşünce, farklı düzleştirme derecelerinin kullanılması olup, özellikle verilerin seyrek olduğu bölgelerde, yani dağılımın kuyruk kısımlarında, daha fazla düzleştirme; örneklemin ana kısmında ise daha az düzleştirme yapılmasıdır. Abramson(1982), tüm boyutlar için $h(x_i) \propto f(x_i)^{-1/2}$ alınmasını önermiştir. Bant genişliğinin bu şekilde seçilmesi literatürde Abramson'nun karekök kuralı olarak bilinmektedir. Sain(1994), $d=2$ olduğunda, Breiman, Meisel ve Purcell'in en yakın komşu kestiricisinin asimtotik olarak Abramson'un önerisine eşit olduğunu, ayrıca Breiman, Meisel ve Purcell'in genel bir kestirimle ilgilenmelerine rağmen Abramson'ın kendi çalışmasını noktasal kestirimle sınırladığını belirtmiştir. Ayrıca, Abramson (1982) önsel kestirim sıfır ya da sıfıra yakın değerler olduğu zaman bant genişliği sonsuza yöneldiği için önsel kestirime sıfırdan uzakta olma kısıtlaması getirmiş, ancak bu koşul bir çok teorik ve pratik çalışmada gözardı edilmiştir. Abramson'un önerisi uygulamada küçük örneklemlerde iyi sonuçlar vermektedir ve genel bir kestirici gibi kullanılmıştır. Hall

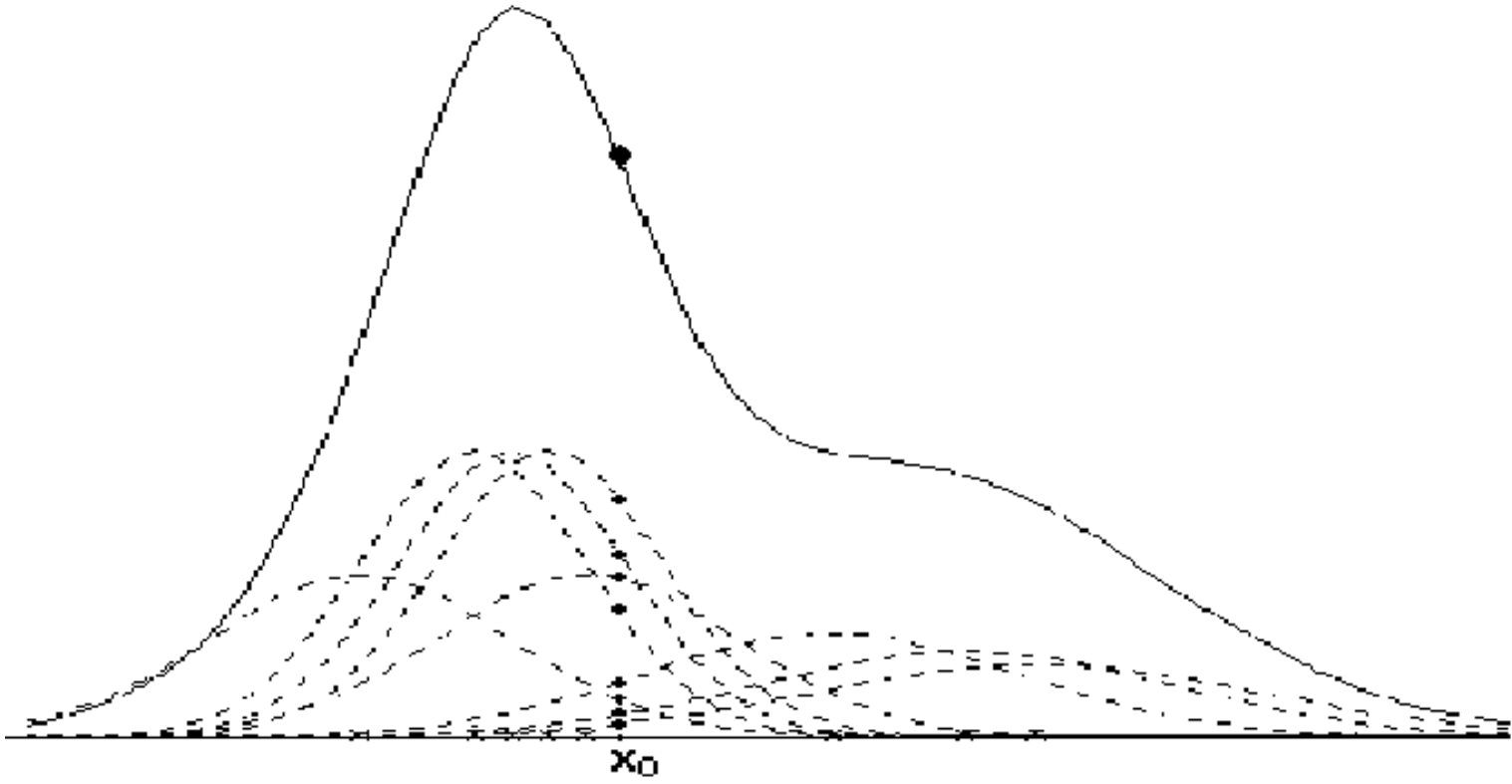
ve Marron (1988), Abramson tipindeki kestiricinin teorik özelliklerini, bilinmeyen olasılık yoğunluk fonksiyonu f 'nin, sıfırdan farklı olduğu durumda araştırmışlardır.

3.3.1. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Geometrik Yorumu

Herhangi bir x_0 noktası için farklı bant genişlikleri alınarak uyarlanabilir çekirdek kestiriminin nasıl elde edildiğini açıklamak için Şekil 3.1'deki grafik verilmektedir.

x ekseninde görülen sekiz veri noktası x_1, \dots, x_8 , sabit bant genişlikli çekirdek kestiriminde Şekil 2.1 'de kullanılan aynı x_i değerleridir ve x ekseninde çarpı (\times) işaretleri ile gösterilmektedir. Noktalı eğriler, her bir veri noktasında merkezlenmiş $h(x_i)^{-1} K\left\{\frac{(x-x_i)}{h(x_i)}\right\}$, $i=1, \dots, n$ ile verilen bağımsız çekirdek

eğrileridir. Burada çekirdek fonksiyonu, K , normal dağılım olarak alınmıştır. Bu fonksiyonların, işaretlenen x_0 noktasındaki, sıfırdan farklı değerleri küçük siyah noktalar ile ve bu noktaların toplamı olan, $n\hat{f}(x_0)$, yıldız ile gösterilmiştir. En üstteki eğri ise tüm kestirim noktaları için elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonunun uyarlanabilir çekirdek kestiriminin n ile çarpımıdır. Olasılık yoğunluk fonksiyonunun x_0 noktasındaki çekirdek kestirimi, her bir veri noktasında merkezlenmiş farklı bant genişliği değerine sahip noktalı eğriler ile gösterilen çekirdek fonksiyonlarının x_0 noktasındaki ağırlıklı ortalamalarını alarak elde edilir. Küçük siyah noktalar yıldız ile gösterilen toplama, çekirdek fonksiyonlarının sıfırdan farklı katkılarını göstermektedir.



Şekil 3.1: Olasılık yoğunluk fonksiyonunun uyarlanabilir çekirdek kestirimi

3.3.2. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Özellikleri

Uyarlanabilir çekirdek kestiricilerinin özellikleri aşağıdaki alt bölümlerde verilecektir.

3.3.2.1. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Beklenen Değeri ve Yanı

Boyut sayısı $d=1$ olmak üzere x_1, x_2, \dots, x_n , olasılık yoğunluk fonksiyonu f olan bir kitleden rasgele alınan bir örneklem olsun. Ayrıca K çekirdek fonksiyonu;

$$1 - \int K(x)dx = 1$$

$$2 - \int \|x\|^4 |K(x)|dx < \infty$$

$$3 - \sup |K| < \infty$$

koşullarını sağlayan simetrik bir fonksiyon olsun.

Değişen bant genişliği için Abramson (1982) tarafından verilen $h(x_i) = hf(x_i)^{-1/2}$ ifadesi Eşitlik (3.3)'de yerine konulursa, herhangi bir x noktasındaki uyarlanabilir çekirdek kestiricisi,

$$\hat{f}_u(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{hf(x_i)^{-1/2}} K\left(\frac{x - x_i}{hf(x_i)^{-1/2}}\right)$$

olarak elde edilir.

Uyarlanabilir çekirdek kestiriminin beklenen değeri Hall ve Marron (1988) tarafından aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.1: Olasılık yoğunluk fonksiyonunun dördüncü mertebeden sürekli türevlere sahip olduğu ve sifıra yakın olmayan sonlu bir fonksiyon olduğu varsayılınsın. Bu durumda uyarlanabilir çekirdek kestiriminin beklenen değeri,

$$E(\hat{f}_u(x)) = f(x) + O(h^4)$$

biçimindedir. Bu teoremin tanıtı kısaca aşağıdaki gibi yapılabilir.

Uyarlanabilir çekirdek kestiriminin beklenen değeri,

$$\begin{aligned}
 E(\hat{f}_u(x)) &= E\left\{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_i)^{1/2}}{h} K\left(\frac{x-x_i}{h} \cdot f(x_i)^{1/2}\right)\right\} \\
 &= \frac{1}{nh} \int \sum_{i=1}^n f(t)^{1/2} K\left\{\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)^{1/2}\right\} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{h} \int f(t)^{3/2} K\left[\left(\frac{x-t}{h}\right) f(t)^{1/2}\right] dt
 \end{aligned}$$

olur. Burada $v = \frac{x-t}{h}$ dönüşümü yapılırsa ; $t = x - hv$ ve $dt = -h.dv$ olup,

$$E(\hat{f}_u(x)) = \int f(x - hv)^{3/2} K(vf(x - hv)^{1/2}) dv$$

biçiminde elde edilir. Burada $v = \frac{z}{f(x)^{1/2}}$ dönüşüm denklemi ile tekrar bir dönüşüm uygulanarak z rasgele değişkenine geçilirse,

$$E(\hat{f}_u(x)) = \int f\left(x - \frac{h.z}{f(x)^{1/2}}\right)^{3/2} K\left(\frac{z}{f(x)^{1/2}} f\left(x - \frac{h.z}{f(x)^{1/2}}\right)^{1/2}\right) \frac{dz}{f(x)^{1/2}} \quad (3.4)$$

elde edilir. $\frac{h}{f(x)^{1/2}} = \eta$ yazılırsa ve $u(y) = \frac{f(x-y)^{1/2}}{f(x)^{1/2}}$ olarak tanımlanırsa

Eşitlik (3.4)'den ,

$$E(\hat{f}_u(x)) = f(x) \int u(\eta z)^3 K(zu(\eta z)) dz \quad (3.5)$$

bulunur. İntegralin içindeki ifade seriye açılarak yaklaşık bir değer elde edilebilir. Bunu yapmak için bir yol, $\varepsilon > 0$ olmak üzere $|y| \leq \varepsilon \eta^{-1}$ aralığında ters dönüşümü yapılabilen z 'den $y = z u(\eta z)$ 'ye bir dönüşüm yapmaktır.

Eşitlik (3.5) ,

$$E(\hat{f}_u(x)) = f(x) \int u(\eta z)^3 \frac{dz}{dy} K(y) dy$$

biçiminde yazılabilir. $u(\eta z)^3 \frac{dz}{dy}$, z 'nin, z 'de y 'nin fonksiyonu olduğu için

$$\varphi(\eta y) = u(\eta z)^3 \frac{dz}{dy} \quad \text{biçiminde tanımlanabilir. } \varphi(\eta y) \text{ fonksiyonu } |\eta y| < \varepsilon$$

aralığında $\eta y \rightarrow 0$ ($y \rightarrow 0$) iken ηy 'nin kuvvetlerine göre seriye açılabilir. Bu seri,

$$\varphi(\eta y) = \varphi(0) + \frac{\eta y}{1!} \varphi'(0) + \frac{(\eta y)^2}{2!} \varphi''(0) + \dots$$

biçimindedir. $y \rightarrow 0$ iken $z \rightarrow 0$ 'dır. Burada,

$$\varphi(0) = \varphi(\eta y) \Big|_{y=0} = (u(0))^3 \frac{dz}{dy} \Big|_{z=0} = 1$$

dir. $\varphi(\eta y)$ 'nin türevleri, $\varphi(\eta y)$ bir bileşik fonksiyon gibi düşünülüp, ona göre

alınır. Örneğin $\frac{d}{dy} \varphi(\eta y) = \frac{d}{dz} \left((u(\eta z))^3 \frac{dz}{dy} \right) \frac{dz}{dy}$ 'dir. Türevin mertebesi arttıkça

türevlerin bulunuşu daha karmaşık bir biçim alır. Uzun hesaplamalar ile türevler bulunup yerine konulduktan sonra integral alınır, uyarlanabilir çekirdek kestiriminin beklenen değeri,

$$E(\hat{f}_u(x)) \approx f(x) + \frac{h^4}{24 f(x)} A(x) \int y^4 K(y) dy + o(h^4) \quad (3.6)$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$A(x) = -\frac{f^{iv}(x)}{f(x)} + \frac{8f'''(x)f'(x)}{f(x)^2} + \frac{6f''(x)^2}{f(x)^2} - \frac{36f''(x)f'(x)^2}{f(x)^3} + \frac{24f'(x)^4}{f(x)^4} \quad (3.7)$$

dır (Hall ve Marron,1988 ve Silverman 1986).

Eşitlik (3.6)'dan uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin yan terimi;

$$E(\hat{f}_u(x)) - f(x) \approx \frac{h^4}{24f(x)} A(x) \int y^4 K(y) dy + o(h^4) \quad (3.8)$$

biçiminde bulunur. Burada $A(x)$ Eşitlik (3.7)'deki gibidir. Yan terimi ifadesi incelendiğinde, pozitif simetrik çekirdek kullanan uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin yan'ı $O(h^4)$ ' dır. Sabit bant genişlikli çekirdek kestirimleri için yan (Eşitlik (2.7)'den görüldüğü gibi) $O(h^2)$ 'dir. Sabit bant genişlikli çekirdek kestirimleri ancak $\int y^2 K(y) dy = 0$ olursa uyarlanabilir çekirdek kestirimleri ile aynı mertebeli yan'a sahip olur. Bu durumda Abramson tipi uyarlanabilir çekirdek kestirimlerinin yan'ı, sabit bant genişlikli çekirdek kestirimlerinin yan'ından daha küçük mertebelidir. Bundan dolayı Abramson'un karekök kuralının teorik olarak haklı çıkarılması, bu geliştirilmiş yan davranışlarının kestirimin uyarlanabilir yapısının, sabit çekirdek ve en yakın komşu kestiricilerinin ortasında olduğunu göstermektedir (Silverman,1986).

Terrell ve Scott (1992), uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin asimtotik yan terimi için aşağıdaki teoremi vermişlerdir.

Teorem 3.2 : Tüm x 'ler için $n \rightarrow \infty$ iken $h(x) \rightarrow 0$ ve $nh(x) \rightarrow \infty$ olduğu ve $(x_i - x)/h(x_i)$ 'nin monoton artan bir fonksiyon olduğu, f ve h 'nin p kez türevlenebilir olduğu varsayımı altında uyarlanabilir çekirdek kestirimi için ;

$$\left[\text{Asimtotik Yan}(y) \right]^2 = \left[\frac{1}{p!} (h(y)^p f(y))^{(p)} \right]^2$$

dır. İkinci mertebeden pozitif çekirdek kullanırsak (p=2), asimtotik yan aşağıdaki gibi elde edilir :

$$\frac{1}{2} [h^2 f(y)^{-1} f(y)]'' = 0$$

3.3.2.2. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Varyansı

Uyarlanabilir çekirdek kestiriminin varyansı, Alt Bölüm 3.3.2.1'de beklenen değer için verilen aynı gösterimler ile,

$$\text{var}(\hat{f}_u(x)) = \frac{1}{nh} \int f(x-hv)^2 K\{vf(x-hv)^{1/2}\}^2 dv - \frac{1}{n} (E(\hat{f}_u(x)))^2$$

biçiminde Hall ve Marron (1988) tarafından verilmiştir. $\varepsilon > 0$ ve f sürekli ve sıfıra yakın olmayan sonlu bir fonksiyon olmak üzere;

$$\text{var}(\hat{f}_u(x)) = \frac{1}{nh} f(x)^{3/2} \int K(y)^2 dy + o((nh)^{-1}) \quad (3.9)$$

olduğu gösterilebilir (Hall and Marron, 1988).

Terrell ve Scott (1992) tarafından uyarlanabilir çekirdek kestiriminin asimtotik varyansı aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 3.3 : Tüm x 'ler için $n \rightarrow \infty$ iken $h(x) \rightarrow 0$ ve $nh(x) \rightarrow \infty$ olduğu ve $\frac{(x_i - x)}{h(x_i)}$ 'nin monoton artan bir fonksiyon olduğu, f ve h 'nin p kez türevlenebilir olduğu varsayımı altında asimtotik varyans aşağıdaki gibidir:

$$\text{Asimtotik Varyans}(y) = \frac{f(h) \int K(y)^2 dy}{nh(y)}$$

Sabit bant genişlikli çekirdek kestiricisi ve balon kestiricisi ile karşılaştırıldığında asimtotik varyansların aynı olduğu görülmüştür (Terrell and Scott(1992)).

3.3.2.3. Uyarlanabilir Çekirdek Kestiriminin Hata Kareler Ortalaması

Hall ve Marron (1988) \hat{f} 'nin f 'nin yeteri kadar iyi kestirimi olması koşuluyla uyarlanabilir çekirdek kestiriminin hata kareler ortalamasını aşağıdaki biçimde vermiştir:

$$HKO(\hat{f}_u(x)) \approx \frac{1}{576} \delta_K^2 h^8 A^2 f(x) + (nh)^{-1} S(K) f^{3/2}(x) \quad (3.10)$$

Burada $Af(x)$, x noktasında hesaplanan $\frac{d^4}{dx^4} \left\{ \frac{1}{f(x)} \right\}$ 'dir.

$\delta_K = \int x^4 K(x) dx$ ve $S(K) = \frac{3}{2} \int K^2(x) dx + \frac{1}{4} \int x^2 K'(x)^2 dx$ 'dir (Jones,1990). Eşitlik

(3.10) ile verilen uyarlanabilir çekirdek kestiriminin HKO'sında yan teriminin karesi $O(h^8)$ 'dir. Sabit çekirdek kestiriminde yan teriminin karesi $O(h^4)$ 'dür. Bundan dolayı uyarlanabilir çekirdek kestirim yönteminin HKO'sı, sabit çekirdek kestiriminin HKO'sından daha hızlı bir orana sıfıra yaklaşmaktadır. Hall ve Marron(1988), $h \propto n^{-1/9}$ alınmasının $HKO = O(n^{-8/9})$ sonucuna ulaştıracağını söylemişlerdir. Bu gibi orana sahip benzer yan sonuçlarına ulaşmak için negatif olmama kısıtlamasını içeren yüksek mertebeli çekirdekler kullanılmaktadır. Jones(1990), bu oranının sabit bant genişlikli ya da balon kestirimi ile ulaşılan en iyi oran olan $O(n^{-4/5})$ 'den daha iyi olduğunu söylemektedir. Fakat genel kestirimler için, THKO 'nın asimtotik bir yaklaşımı bu iyi noktasal sonuçlardan hesaplanamaz.

Terrell ve Scott (1992) uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin asimtotik performansını araştırmak amacıyla yaptıkları çalışmalar sonucunda, uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin örneklem hacmi küçük olduğunda, sabit bant genişlikli çekirdek kestiricisine göre daha iyi sonuç verdiğini göstermişlerdir. Bu sonuç Silverman(1986) ve diğerleri tarafından elde edilen sonuçlar ile çelişkilidir. Terrell ve Scott(1992), AHKO'sı ifadesinin sabit bant genişlikli çekirdek kestirimlerindeki AHKO'nun elde edilmesine benzemediği için her zaman ulaşılabilir olmadığını, fakat $K \approx U(-1, 1)$ ve $f \approx \phi(0, 1)$ olarak seçildiği özel durumlarda elde edilebileceğini

söylemektedirler. Bu durumda Abramson tarafından önerilen bant genişliği kullanılarak elde edilen noktasal uyarlanabilir çekirdek kestiricisi aşağıdaki gibidir:

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{\phi(x_i)}}{h} K\left(\frac{(0-x_i)\sqrt{\phi(x_i)}}{h}\right) \quad (3.11)$$

$K(-x) = K(x)$ olduğu için beklenen değer,

$$E\hat{f}(0) = \int \frac{\sqrt{\phi(x)}}{h} K\left(\frac{x\sqrt{\phi(x)}}{h}\right) \phi(x) dx \quad (3.12)$$

biçimindedir. Yukarıdaki integral işleminde, $x=0$ noktasının sadece küçük bir komşuluğu kullanılır. Fakat gerçekte çekirdek fonksiyonu $(-1, 1)$ aralığında tanımlı ise bu komşuluk $(-h, h)$ olur. Fakat bunun Abramson kestiricisi için çok önemli olmadığını kontrol etmek kolaydır. İntegral çekirdek fonksiyonunun argumenti 1'i geçtiğinde sıfır olur. Bu nedenle aşağıda verilen eşitsizliği sağlayan noktalar için integral alınır:

$$\left| \frac{x\sqrt{\phi(x)}}{h} \right| \leq 1 \quad (3.13)$$

Böyle bir komşuluğu sağlayan üç bölge vardır: $(-\infty, -b)$, $(-a, a)$ ve (b, ∞) , burada $-\infty < -b < -a < a < b < \infty$ ayrıca a ve b Eşitlik (3.13)'ün pozitif çözümleridir. Terrell ve Scott (1992), $(-a, a)$ aralığındaki yan'ı $O(h^4)$ olarak bulmuşlardır. Ancak, $(-\infty, -b)$ ve (b, ∞) aralıklarından yan terimine gelen katkı,

$$\frac{h^2}{24[\log\{(2\pi)^{1/4}h\}]^2} \quad (3.14)$$

biçimindedir. Kuyruklardan gelen yan katkısı $(-a, a)$ aralığından gelen yan katkısını asimtotik olarak bastırmaktadır ve büyük örneklem simülasyonlarının davranışlarını açıklamaktadır. Simülasyon çalışmaları sonucunda bulunan yan

karakteristiklerine ve Silverman ve diğerleri tarafından söylenenlere göre daha küçük örneklerde kuyruklardan gelen yan katkısı, sonucu önemli ölçüde etkilememektedir. Gerçekte yan teriminin karesi asimtotik olarak $O([h/\log(h)]^4)$ 'dür.

Küçük örnekler için, kuyruklardan gelen katkı bir çok durum için görmezden gelinebilmektedir, bundan dolayı yan teriminin karesi $O(h^8)$ gibi görünmektedir. Bu kısmen uyarlanabilir kestiricilerinin iyi küçük örneklem sonuçlarını açıklamaktadır. Bu sonuçlar doğrultusunda $(-a, a)$ aralığı dışındaki noktaların etkisini elemek bir çözüm olarak önerilebilir. Fakat kestiricinin integrali artık bir olmaz. Böyle bir kestirici yüksek mertebeli negatif olmayan ve integrali bir olmayan listeye eklenebilir (Terrell ve Scott, 1992).

Abramson kestiricisinin THKO'sunun asimtotik olarak sabit çekirdek kestiriminin THKO'sundan büyük olmasının sebepleri şu biçimde açıklanabilir: Uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin yan'ı $O(h/\log(h))^2$, sabit çekirdek kestiricisinin yan'ı $O(h^2)$ 'den daha küçüktür, $hf(x_i)^{-1/2}$ 'de aynı h değerinin kestirim çizgisinin tümünde kullanılması, uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin THKO'sunun asimtotik olarak daha kötü olmasına sebep olmaktadır. Uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin iyi küçük örneklem sonuçlarının halen pratik önemi vardır. Bu gözlem üzerine Abramson kendi noktasal prosedürünü genel olarak sorgulamıştır. Abramson kendi noktasal kestiricisinde yan teriminin karesinin $O(h^8)$ olduğunu göstermiştir.

Hall (1992) , yoğunluk fonksiyonu aşırı derecede kuyruklu olmadıkça kuyruklardan gelen yan katkısının THKO 'sının büyümesine neden olacağını ve Abramson'un karekök kuralının genel bir uygulamasından her kazancın kaybedileceğini söylemektedir. Kuyruklardan yan terimine gelen katkı sorununu çözmek için, Hall (1992), THKO'sunun ağırlıklandırılmış bir biçimini kriter olarak kullanmayı önermiştir. Bu kriter kuyruklardan gelen yan katkısını önemsiz yapacaktır. Hall (1992), THKO'sunun ağırlıklandırılmış biçimini kullanarak, THKO'sunun asimtotik yaklaşımının hala $O(n^{-8/9})$ olduğunu göstermiştir ve bu oran sabit bant genişlikli ve balon kestiriminde elde edilen asimtotik orandan daha iyidir. Fakat teorik anlaşılabilirlik için kuyrukların etkilerini azaltmak, uygulamadaki etkilerini önemli

olarak azaltmaz. Hall, Hu ve Marron (1994) Abramson'un karekök kuralına aşağıdaki biçimde alternatif bir yaklaşım da önermektedir:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_i}(x - x_i) I_{(|(x-x_i)/h| < C)}$$

$h_i = hf(x_i)^{-1/2}$ ve C bir sabittir. Bu formülde kuyruklardaki noktaların etkisi azaltılmıştır. Bu yaklaşım orjinal olarak Terrell ve Scott (1992) tarafından önerilmiştir. C 'nin her yeterli geniş değeri yan teriminde kuyrukların etkisini azaltan istenen asimtotik sonucu verse de, bu kestiricinin eksikliği uygulamada integralinin bir olmamasıdır.

Abramson'un karekök kuralı iyi teorik sonuçlar vermektedir, ancak bu sonuçlar uygulamada gerçekleşmemektedir (Sain,1994).

3.3.3. Silverman Tarafından Verilen Algoritma

Silverman (1986), Abramson tipinde uyarlanabilir çekirdek kestiricisi adını verdiği kestiriciyi elde etmek için üç adımlı bir algoritma vermiştir.

1.adım: Tüm i 'ler için $\tilde{f}(x) > 0$ olacak biçimde önsel kestirim $\tilde{f}(x_i)$ bulunur.

2.adım: Yerel bant genişliği faktörü λ_i tanımlanır.

$$\lambda_i = \left[\frac{\tilde{f}(x_i)}{g} \right]^{-\alpha} \quad (3.15)$$

Burada, g ; $\tilde{f}(x_i)$ 'lerin geometrik ortalaması ve $\log g = \frac{1}{n} \sum_i \log \tilde{f}(x_i)$ olup,

α , $0 \leq \alpha \leq 1$ koşulunu sağlayan duyarlılık parametresidir.

3.adım: Bant genişliği $h_i = h\lambda_i$ olmak üzere, uyarlanabilir çekirdek kestiricisi;

$$\hat{f}_u(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(h\lambda_i)^d} K\left(\frac{x-x_i}{h\lambda_i}\right) \quad (3.16)$$

olarak elde edilir.

Birinci aşamada kullanılan önkestirim genellikle sabit bant genişlikli çekirdek kestirimidir. Silverman (1986), bu yöntem için önsel kestirimin hangi yöntemle elde edileceğinin önemli olmadığını, bu yüzden sabit bant genişlikli çekirdek kestirimi ya da k. en yakın komşu kestirimi gibi herhangi bir kestirim yönteminin kullanılabileceğini söylemektedir. İkinci aşamada, α 'ya bağlı olan yerel bant genişliklerinin kullanılması yöntemle esneklik sağlar. α ne kadar büyük olursa yöntem önsel kestirimdeki değişimlere o kadar duyarlı olur ve örneklemin değişik bölgelerinde kullanılan bant genişlikleri arasındaki fark da o kadar büyür. Yerel bant genişliği faktörünün bulunmasında geometrik ortalamanın kullanılmasının nedeni; o noktadaki yoğunluğun geometrik ortalamaya göre daha küçük olduğu durumda daha büyük bir h değeri seçmek; ve geometrik ortalamaya göre daha büyük olduğu durumda ise daha küçük bir h değeri seçilmesini sağlamasıdır. Kestirim, $\alpha=0$ olduğunda sabit bant genişlikli çekirdek kestirimine; $\alpha=1$ olduğunda en yakın komşu kestirimine eşit olur. K'nın simetrik ve pozitif olduğu varsayımı altında, sabit bant genişlikli çekirdek kestiricisinin HKO'sunu minimum yapan optimal bant genişliği aşağıda verilmektedir.

$$h(x) = C_1(K)n^{-1/5} |f''(x)|^{-2/5} f(x)^{1/5}$$

Bu ifade, Parzen(1962) tarafından elde edilmiştir. Burada $C_1(K)$ sadece çekirdek fonksiyonuna bağlı olan bir sabittir. Bu formül hem f , hem de f 'nin ikinci mertebeden türevine bağlıdır. Eğer biz ikinci mertebeden türevin değerlerinin, f 'nin değerleriyle orantılı olduğunu varsayarsak, yukarıdaki formül ideal bant genişliğinin $f^{-1/5}$ ile orantılı olacağını göstermektedir. Bu, α duyarlılık parametresinin 1'den küçük olmasının uygun olacağını göstermektedir (Silverman, 1986).

Abramson (1982) tarafından önerilen $\alpha=1/2$ alınması iyi sonuçlar vermektedir. Bu algoritmanın daha iyi sonuçlar verdiği görülmüştür, fakat bant genişliğinin her yeni

değeri için önsel kestirimin yeniden hesaplanması gibi dezavantajları vardır. Bir çok araştırmacı Abramson'un karekök yasasının, özellikle küçük hacimli örneklem için sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemine göre iyi sonuçlar verdiğini göstermişlerdir (Sain,1994). Silverman (1986) ve Worton (1989) yaptıkları çalışmalarda bir ve iki boyutlu örneklem için benzer sonuçlar elde etmişlerdir. Fakat Terrell ve Scott (1992) büyük hacimli örneklemle ($n>20000$) yaptıkları çalışmalar sonucunda Abramson'un karekök yasasının sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemine göre daha kötü sonuçlar verdiğini göstermişlerdir.

Uyarlanabilir çekirdek kestirimi, kestirimin her zaman bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olacağını ve aşırı uzun kuyruklardan etkilenmeyeceğini garanti eder. Ayrıca kestirici çekirdeğin tüm türevlenebilirlik özelliklerine sahip olacaktır (Silverman,1986).

Breiman, Meisel ve Purcell (1977) uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin özel bir durumunu incelemişlerdir; önsel kestirim olarak oldukça büyük bant genişliği kullanılarak elde edilen en yakın komşu kestiricisi ile çalışmışlar ve duyarlılık parametresi α 'yı $1/d$ olarak almışlardır. α 'nın bu şekilde seçilmesinin her zaman çok iyi bir seçim olmadığını Silverman (1986) göstermiştir. Fakat Breiman, Meisel ve Purcell (1977) çalışmalarında ilginç bir genel sonuç bulmuşlardır. Yaptıkları simülasyon çalışmalarında uyarlanabilir çekirdek kestiriminin, \tilde{f} önsel kestirimde bant genişliği değerine duyarsız olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca bant genişliği hem uyarlanabilir çekirdek kestiricisinde hem de önsel kestirimde optimal olarak seçilmişse, uyarlanabilir çekirdek kestirim yönteminin sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemine göre daha iyi performansla sahip olduğunu göstermişlerdir.

Breiman, Meisel ve Purcell tarafından duyarlılık parametresinin $\alpha=1/d$ olarak seçilmesi, ölçeklendirilmiş çekirdeklerin içine aldığı gözlem sayılarının, yoğunluğun tüm bölgelerinde yaklaşık olarak aynı olacağını garanti etmektedir (Silverman,1986).

3.3.4. Bant Genişliğinin Otomatik Seçimi

Silverman (1986), uyarlanabilir çekirdek kestiriminin önsel kestirimin yapısına duyarsız olması nedeniyle, λ_i sabit gibi göz önüne alınarak bant genişliğinin

seçiminin yapılabileceğini belirtmektedir. Bir çok uygulamada h 'nin subjektif bir seçimi yeterlidir. Sabit çekirdek kestirimi için standart yoğunluk kullanılarak bulunan otomatik seçim, buna mahsus olmak üzere aynı değer olacaktır. Bu yaklaşımın teorik temeli sabit çekirdek yöntemi kadar güçlü değildir.

En küçük kareler çapraz geçerlilik yönteminin prensibi, uyarlanabilir çekirdek kestirim yöntemi için uygulanabilir. Eşitlik (3.17) ile verilen çapraz geçerlilik fonksiyonunu minimum yapan h değeri yaklaşık olarak THKO'sını minimum yapan h 'nin bir değerini verir.

$$M_0(h) = \int \hat{f}^2 - 2n^{-1} \sum_i \hat{f}_{-i}(x_i) \quad (3.17)$$

\hat{f}_{-i} fonksiyonu x_i dışındaki tüm veri noktalarından elde edilmiş olasılık yoğunluk fonksiyonu kestirimidir ve Eşitlik (3.17)'deki ikinci terim aşağıdaki gibi bulunur.

$$2n^{-1} \sum_i \hat{f}_{-i}(x_i) = 2n^{-1}(n-1)^{-1} \sum_i \sum_{j \neq i} h^{-d} \lambda_j^{-d} K[h^{-1} \lambda_j^{-1}(x_i - x_j)] \quad (3.18)$$

$\int \hat{f}^2$ için hesaplanabilir bir değer bulmak bu durumda daha zordur ve $\int \hat{f}^2$ 'yi numerik integrasyon ile hesaplamak en iyi yoldur. Bazı analitik gelişmeler sağlamak için ; $h_1^{-d} K(h_1^{-1}t)$ 'nin ve $h_2^{-d} K(h_2^{-1}t)$ 'nin konvolusyonu $K^{(2)}(t; h_1, h_2)$:

$$K^{(2)}(t; h_1, h_2) = \int h_1^{-d} h_2^{-d} K[h^{-1}(t-s)K(h_2^{-1}s)] ds$$

biçimindedir. Eğer K standart normal olasılık yoğunluk fonksiyonu olarak seçilirse, K 'nin kendisi ile konvolusyonu, $K^{(2)}$, $(h_1^2 + h_2^2)$ varyans ile normal olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olacağından, $K^{(2)}$ daha kolay ifade edilebilir. Bu durumda :

$$\int \hat{f}^2 = n^{-2} \sum_i \sum_j K^{(2)}(x_i - x_j; \lambda_i h, \lambda_j h) \quad (3.19)$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (3.19), sadece çekirdek fonksiyonu normal olasılık yoğunluk fonksiyonu olması durumunda $\int \hat{f}^2$ için yararlı bir ifade vermektedir.

4. UYGULAMA

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun kestiriminde, parametrik olmayan kestirim yöntemlerinden sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemi ve uyarlanabilir çekirdek kestirim yöntemi kullanılabilir.

Bu çalışmada amaç, sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemi ile uyarlanabilir çekirdek kestirim yönteminin farklı dağılımlarda ve farklı örneklem büyüklüklerinde karşılaştırılmasıdır.

4.1. Yöntem

Olasılık yoğunluk fonksiyonunun çekirdek kestirimi parametrik olmayan bir yöntemdir ve örneklemin alındığı kitlenin dağılımı bilinmemektedir. Fakat bu çalışmada sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yöntemi ve uyarlanabilir çekirdek kestirim yöntemini karşılaştırmak ve bu kestirimlerin gerçek değerlere ne kadar yakın olduğunu araştırmak amacıyla dağılımı bilinen kitlelerden farklı büyüklükte örneklem seçilmiştir. Bu örneklemelere ilişkin sabit bant genişlikli çekirdek kestirimlerinin toplanmış hata kareler ortalaması ile uyarlanabilir çekirdek kestirimlerinin toplanmış hata kareler ortalaması karşılaştırılmıştır.

Örneklemelerin seçildiği dağılımlar Kikare (1), Beta (1;4), Weibull (1;2), Lognormal (0;1,75) ve Üstel (3)'dür. Bilgisayar programı kullanılarak, verilen dağılımlardan 25 ve 100 birimlik 250 örneklem seçilmiştir. Çekirdek fonksiyonu olarak Epanechnikov ve standart normal alınmıştır. Bilgisayar programında bant genişliği en küçük kareler çapraz geçerlilik yöntemi ile seçilmiş ve her iki yöntemle bulunan kestirimler elde edilmiştir. Duruma açıklık kazandırmak amacıyla Kikare (1), Beta (1;4), Weibull (1;2), Lognormal (0;1,75) ve Üstel (3) dağılımlarından alınan $n=25$ birimlik birer örneklem için Epanechnikov çekirdeği kullanılarak elde edilen sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri sırasıyla Çizelge 4.1, Çizelge 4.2, Çizelge 4.3, Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5'de verilmiştir.

Çizelge 4.1: Kikare (1)'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar

x_i	$f(x)$	$f^{\wedge}(x)$	$f^{\wedge}_u(x)$
0,00031	22,758	1,294787	1,196191831
0,00602	5,12683	1,354966	1,287548699
0,03234	2,18273	1,577715	1,811499928
0,05654	1,63101	1,737689	2,241577972
0,07528	1,40028	1,796761	2,424854519
0,08498	1,31156	1,805105	2,452441803
0,10596	1,16235	1,77131	2,30850668
0,11316	1,1207	1,743352	2,198713698
0,12592	1,05563	1,673278	2,035925831
0,1504	0,95417	1,465453	1,602482468
0,18926	0,83422	1,06967	0,862204488
0,54425	0,41193	0,1875	0,145506158
0,73056	0,32392	0,313197	0,36166409
0,85715	0,28071	0,444699	0,40201701
0,86477	0,27841	0,430148	0,396964298
1,12571	0,21417	0,253555	0,193786712
1,25447	0,19023	0,561747	0,596151379
1,31738	0,17988	0,54609	0,626634569
1,32633	0,17847	0,556896	0,617186871
1,47167	0,15756	0,233468	0,19707308
2,02386	0,10194	0,1875	0,101886627
2,53813	0,07039	0,1875	0,101886627
3,06138	0,04934	0,1875	0,101886627
3,79399	0,03073	0,352071	0,269763629
3,84995	0,02966	0,352071	0,269763629

Çizelge 4.2: Beta (1;4)'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar

x_i	$f(x)$	$f^{\wedge}(x)$	$f^{\wedge}_u(x)$
0,045248	3,481226	2,054306	2,071509
0,047585	3,455717	2,100697	2,124811
0,05157	3,412524	2,172969	2,210188
0,078022	3,134886	2,584685	2,713797
0,07923	3,12258	2,600101	2,72955
0,088336	3,030851	2,685315	2,87147
0,09778	2,937634	2,71588	2,936786
0,121842	2,70881	2,689603	2,793944
0,138874	2,554232	2,531659	2,532513
0,159584	2,374338	2,427778	2,218668
0,169509	2,29121	2,388801	2,165186
0,206292	2,000054	2,377771	2,24684
0,20828	1,985063	2,413359	2,291907
0,230344	1,823686	2,660646	2,718353
0,247566	1,703984	2,703429	2,848922
0,247993	1,701081	2,702991	2,84908
0,292948	1,413884	2,401902	2,551052
0,293805	1,408748	2,39043	2,532151
0,295885	1,396341	2,360582	2,483564
0,29745	1,387051	2,336234	2,449308
0,306622	1,333428	2,163014	2,313364
0,376866	0,96784	1,045085	0,876097
0,435374	0,720017	0,735332	0,552638
0,480825	0,559759	0,538025	0,490507
0,642143	0,18331	0,3	0,16206

Çizelge 4.3: Weibull (1;2) 'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar

x_i	$f(x)$	$f^{\wedge}(x)$	$f^{\wedge}_u(x)$
0,20029	0,45235	0,300908	0,256463189
0,21515	0,449	0,310052	0,267813109
0,37268	0,415	0,38448	0,446462578
0,48086	0,39314	0,414034	0,504169263
0,54604	0,38054	0,427297	0,522079936
0,57409	0,37524	0,429554	0,521958379
0,66096	0,35929	0,423368	0,506732296
0,66248	0,35902	0,423082	0,506090949
0,72017	0,34881	0,407736	0,470772008
0,95552	0,31008	0,359537	0,310889857
1,10777	0,28736	0,311175	0,243426367
1,36347	0,25287	0,284463	0,296386407
1,43839	0,24357	0,292768	0,298282976
1,44248	0,24307	0,292911	0,298810731
1,67148	0,21678	0,281202	0,298832043
1,81593	0,20167	0,256859	0,26287932
1,87433	0,19587	0,240908	0,238024947
2,17146	0,16883	0,165392	0,165152578
2,59749	0,13644	0,124157	0,120471483
2,76871	0,12524	0,123644	0,118035574
3,18225	0,10185	0,091795	0,097353048
3,73861	0,07712	0,0581	0,06130093
4,47738	0,0533	0,047619	0,047195923
5,50458	0,03189	0,047619	0,045011642
6,35408	0,02085	0,047619	0,035934104

Çizelge 4.4: Lognormal (0;1,75) 'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar

x_i	$f(x)$	$f^{\wedge}(x)$	$f^{\wedge}_u(x)$
0,01931	0,92766	0,450485	0,611174626
0,0323	1,03077	0,458006	0,630999635
0,12457	0,90124	0,496594	0,742316923
0,1481	0,84856	0,502272	0,754875323
0,15125	0,84181	0,502903	0,756004937
0,16269	0,81789	0,504943	0,759013439
0,16623	0,8107	0,505492	0,759595031
0,23884	0,68292	0,508324	0,754216226
0,2998	0,6	0,498262	0,696391432
0,42435	0,47648	0,446323	0,444716112
0,60085	0,36367	0,348631	0,224791605
1,00856	0,22603	0,177998	0,157270732
1,01636	0,22429	0,17605	0,155261042
1,11257	0,20452	0,160842	0,155090282
2,03111	0,1034	0,05	0,026865567
3,21887	0,05666	0,051154	0,044504012
3,81191	0,04464	0,093774	0,094427248
4,04241	0,04101	0,104265	0,108341307
4,56792	0,03424	0,100628	0,095937952
4,84954	0,03129	0,088985	0,069074227
9,26742	0,01095	0,05	0,026865567
10,6606	0,00857	0,05	0,042653402
11,3777	0,00763	0,05	0,042653402
47,1593	0,00043	0,05	0,026865567
48,6701	0,0004	0,05	0,026865567

Çizelge 4.5: Üstel (3) 'den alınan örneklem için elde edilen sonuçlar

x_i	$f(x)$	$f^{\wedge}(x)$	$f^{\wedge}_u(x)$
5,9E-05	0,33333	0,104375	0,080052662
0,03317	0,32967	0,10976	0,080058574
0,57334	0,27535	0,236559	0,274266637
0,68708	0,2651	0,26373	0,321309439
0,79773	0,2555	0,279171	0,345454208
0,83688	0,25219	0,279493	0,349495273
0,92965	0,24451	0,28271	0,337913691
1,10737	0,23045	0,243249	0,240021685
1,43747	0,20643	0,098956	0,072244126
2,40459	0,14955	0,230442	0,181795439
2,54412	0,14275	0,298804	0,334390544
2,72696	0,13431	0,328118	0,416801167
2,77288	0,13227	0,32474	0,412662794
2,79135	0,13146	0,322164	0,408184248
2,86047	0,12846	0,306337	0,378173642
2,89722	0,1269	0,293945	0,354258257
3,92589	0,09006	0,050847	0,027613842
4,78737	0,06758	0,106891	0,107756977
5,09677	0,06096	0,157283	0,153131988
5,25299	0,05787	0,156213	0,153170936
5,53893	0,05261	0,112041	0,102771728
7,08827	0,03139	0,092723	0,088271392
7,47253	0,02761	0,128601	0,112424007
7,60001	0,02646	0,111917	0,105556088
11,3551	0,00757	0,050847	0,027613842

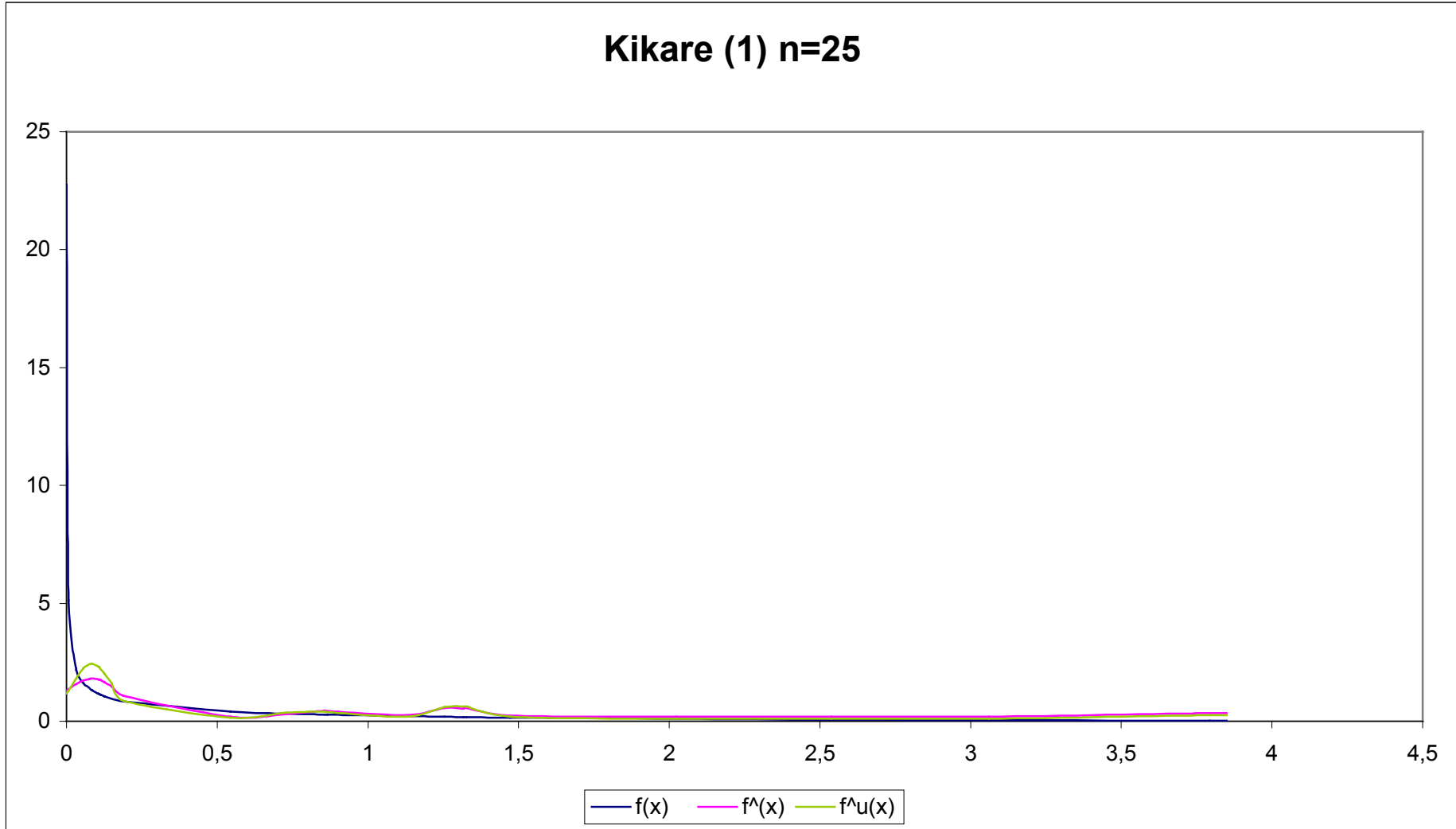
4.2. Uygulama Sonuçları

Alt Bölüm 4.1.'de seçilen 250 örneklem için olasılık yoğunluk fonksiyonunun Epanechnikov ve standart normal çekirdek kullanarak her iki yöntemle kestirimleri elde edilmiş her bir dağılım için hesaplanan toplanmış hata kareler ortalamaları aşağıdaki Çizelge 4.6'da verilmiştir.

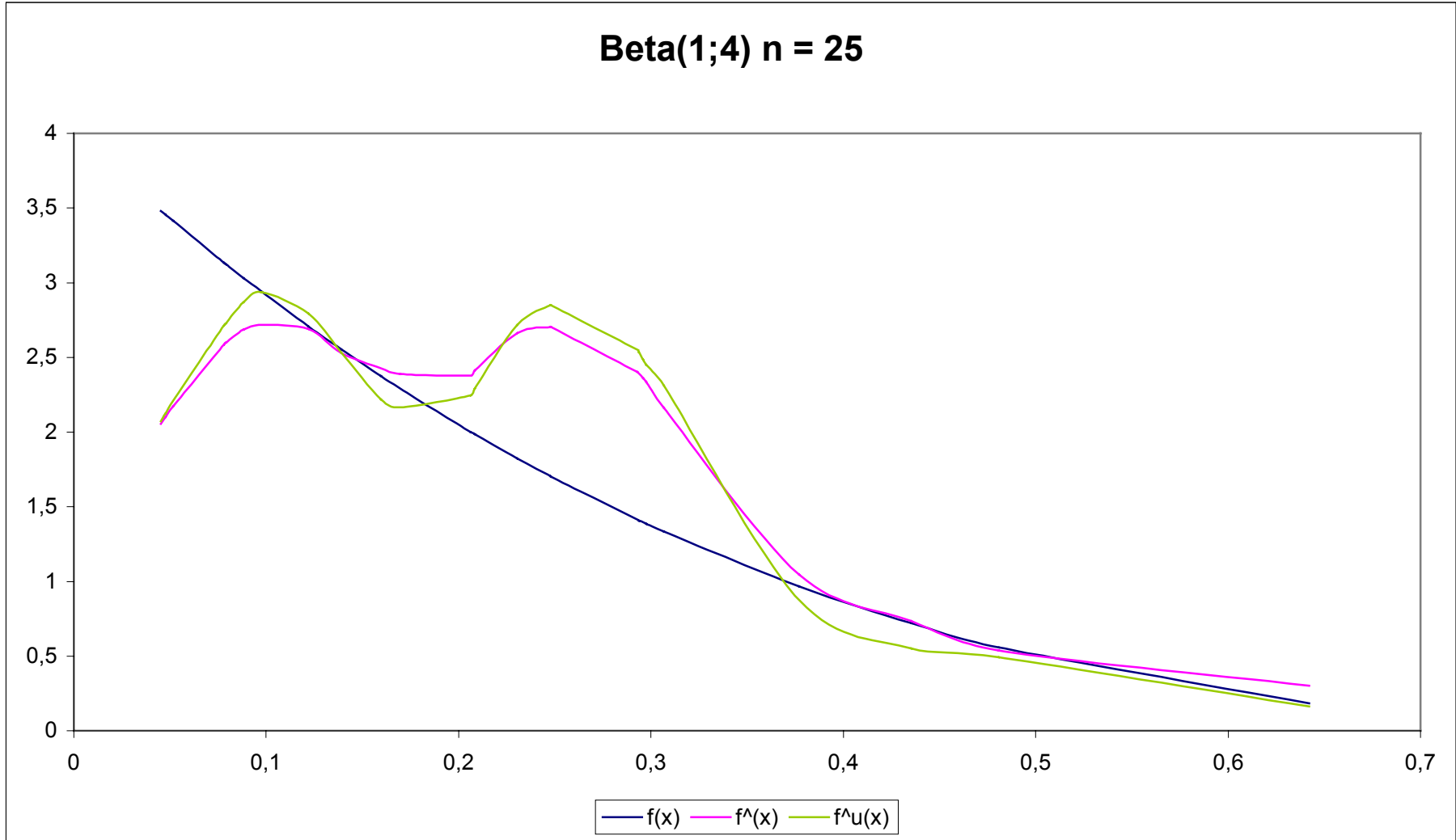
Çizelge 4.6: Beş dağılımdan alınan örneklem için elde edilen kestirimlerin toplanmış hata kareler ortalamaları

	Epanechnikov				Standart Normal			
	n=25		n=100		n=25		n=100	
	THKO sabit	THKO uyarlanabilir	THKO sabit	THKO uyarlanabilir	THKO sabit	THKO uyarlanabilir	THKO sabit	THKO uyarlanabilir
Lognormal (0 ; 1,75)	1,52	1,36	1,96	2,05	1,59	2,26	1,97	3,68
Weibull (1 ; 2)	0,34	0,52	0,65	0,76	0,36	0,58	1,26	1,85
Beta (1 ; 4)	19,26	28,27	47,80	58,42	19,65	27,35	56,64	94,23
Kikare (1)	3.472,43	3.441,32	3.946,14	3.746,28	2.469,29	2.438,55	4.239,86	4.149,64
Üstel (3)	0,18	0,26	0,38	0,52	0,23	0,32	0,42	0,66

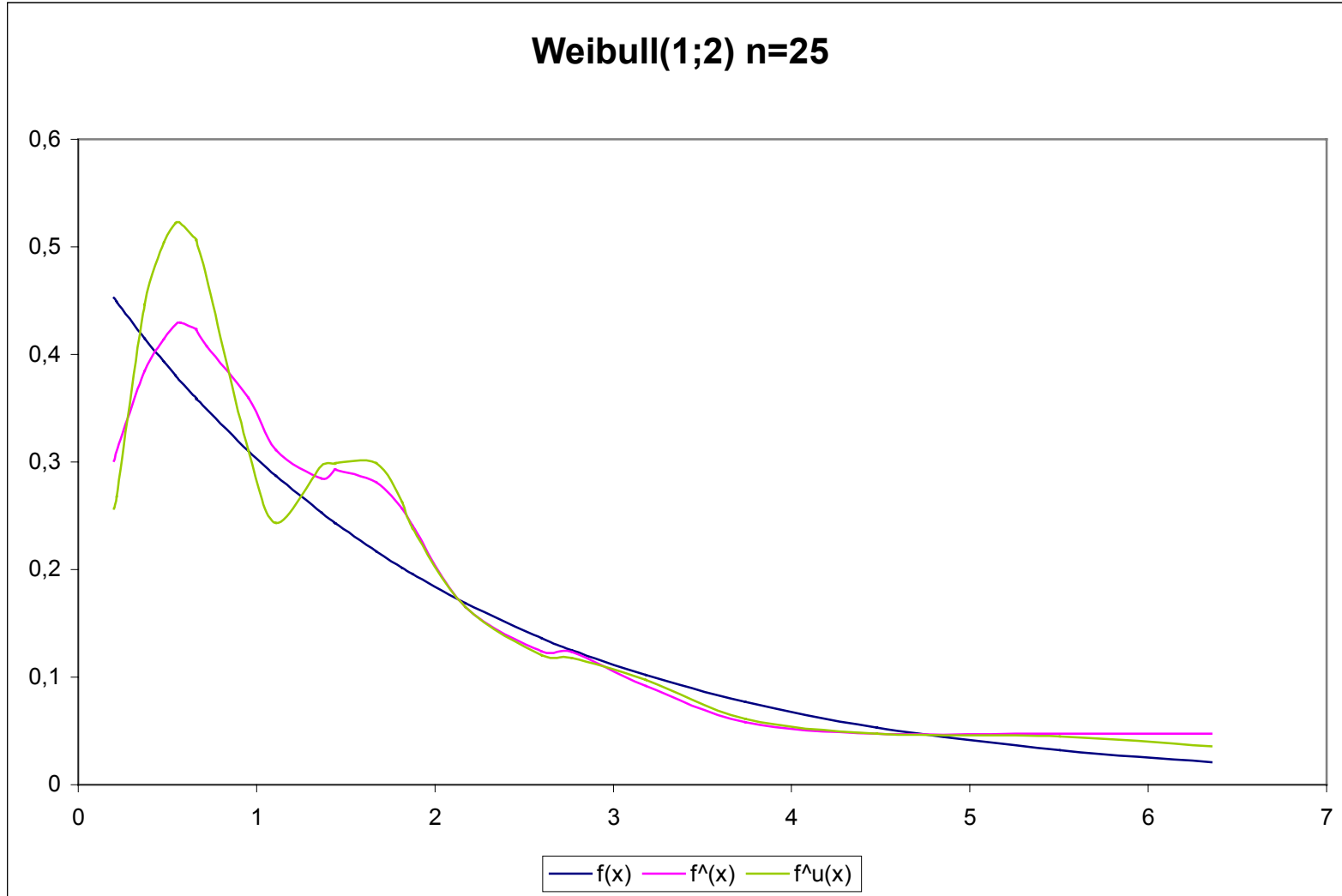
Örneklem için çoğunda sabit bant genişlikli çekirdek kestirim yönteminin daha iyi sonuç verdiği, ancak kikare (1) ve n=25 için lognormal (0 ;1,75) dağılımlarından alınan örneklem için uyarlanabilir çekirdek kestiricisinin daha iyi sonuç verdiği görülmüştür. Örneklem büyüklüğü küçük olduğunda ve çekirdek fonksiyonu Epanechnikov olduğu durumda toplanmış hata kareler ortalamasının küçüldüğü görülmektedir. Elde edilen kestirime ilişkin çizilen grafiklerde, $f(x)$ gerçek olasılık yoğunluk fonksiyonu değerini, $\hat{f}(x)$ sabit bant genişlikli yöntemden elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu değerini ve $\hat{f}_u(x)$ uyarlanabilir çekirdek kestirim yönteminden elde edilen olasılık yoğunluk fonksiyonu değerini göstermektedir.



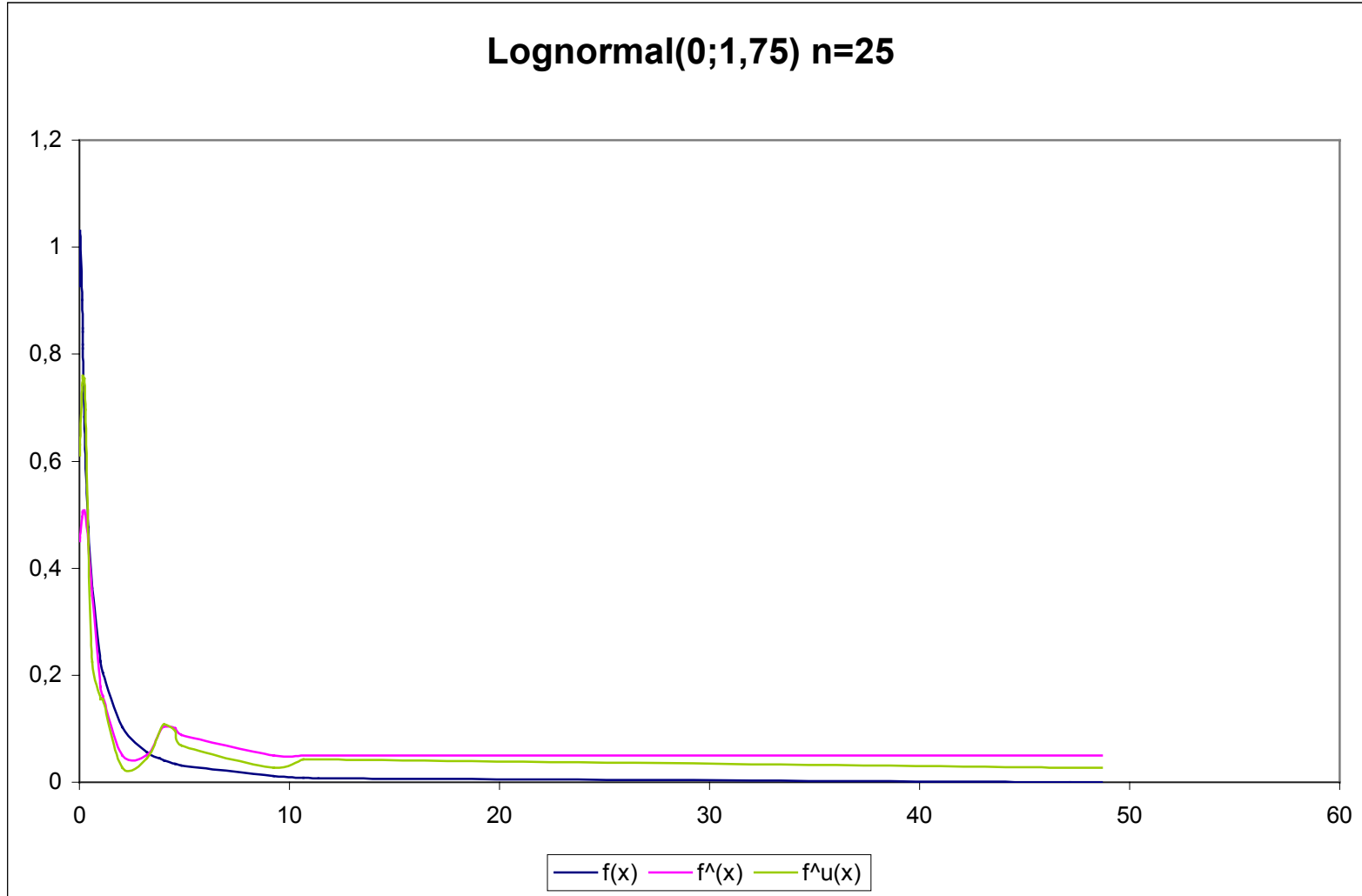
Şekil 4.1: Kikare (1) dağılımı $n=25$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



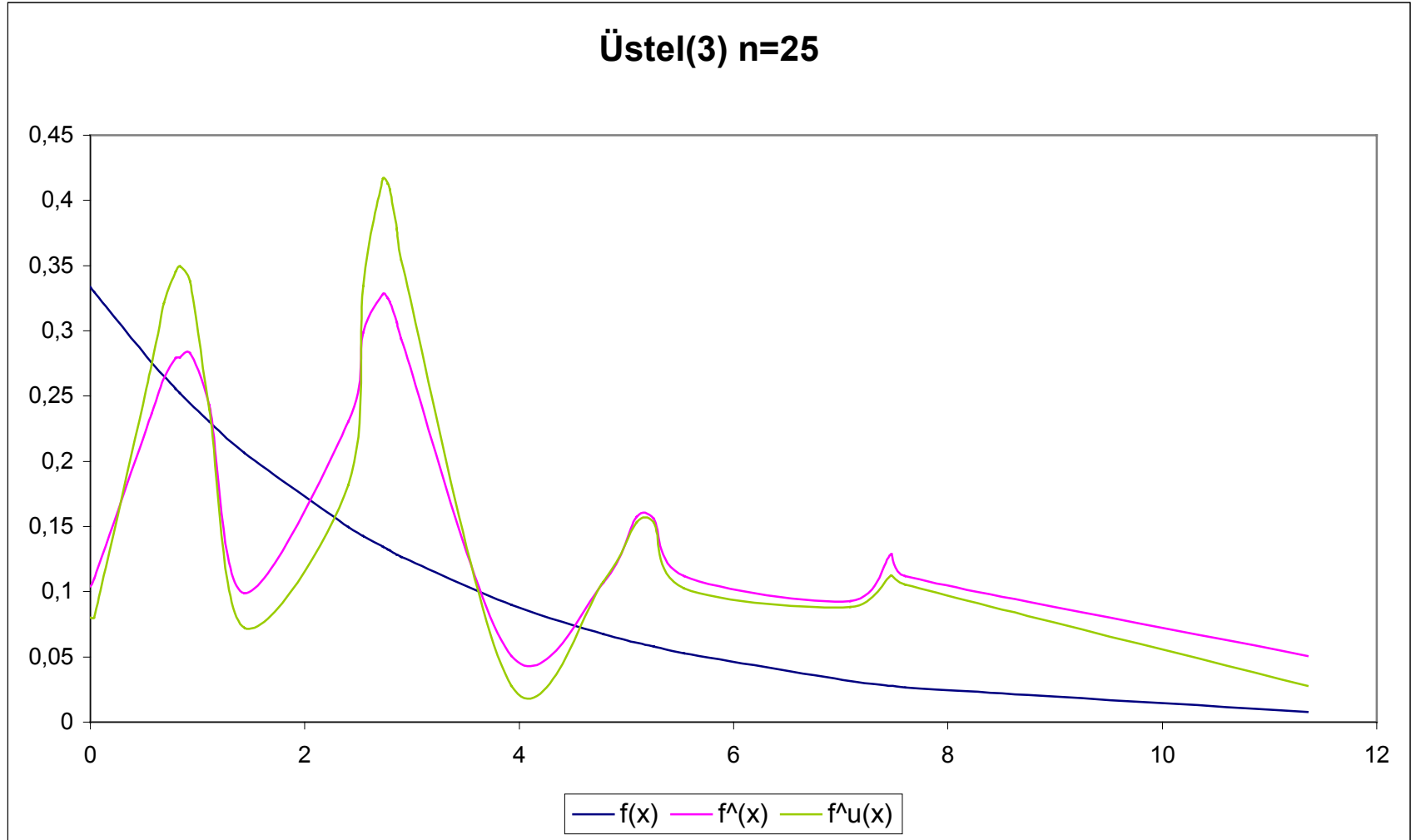
Şekil 4.2: Beta (1 ; 4) dağılımı n=25 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



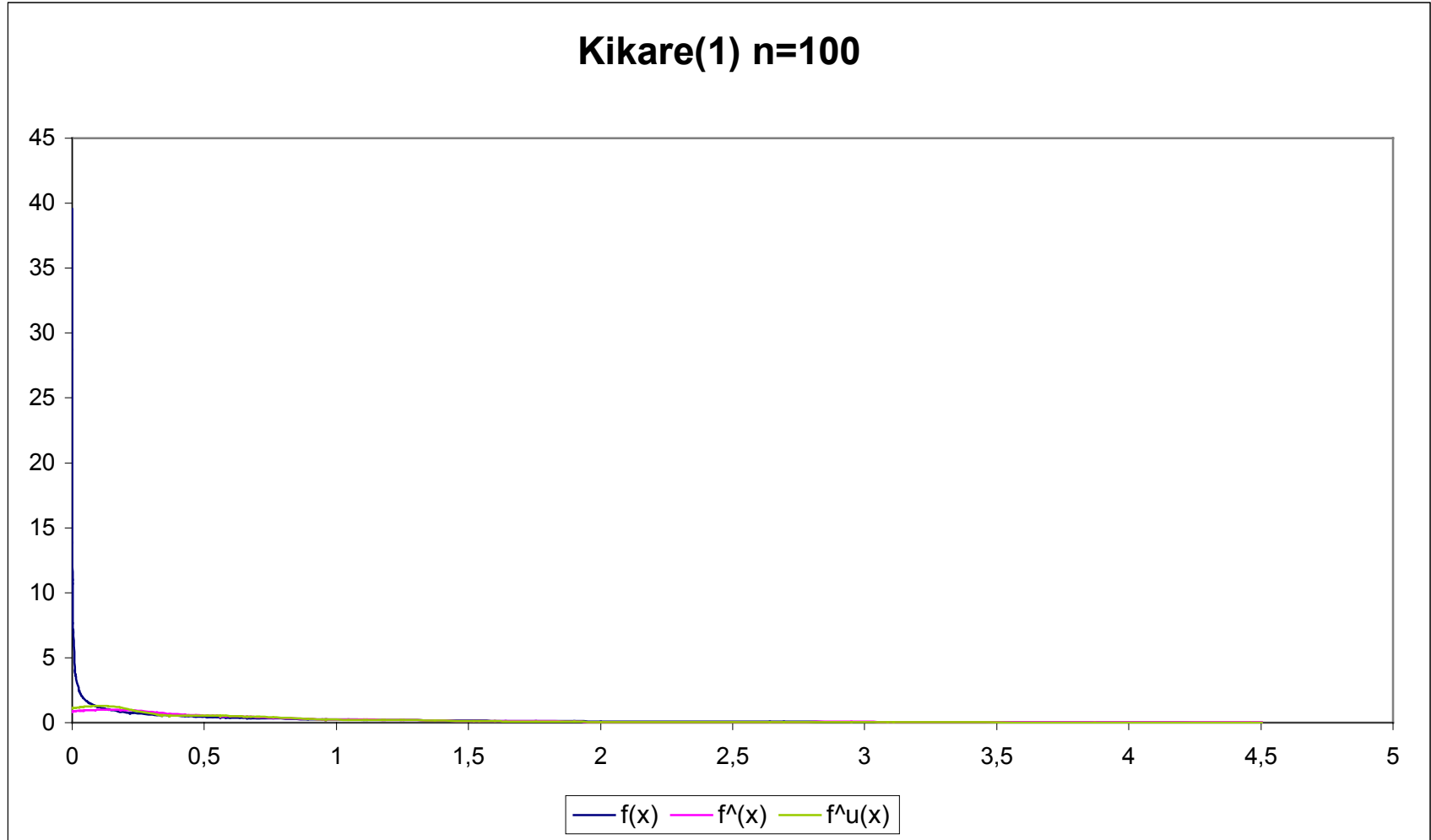
Şekil 4.3: Weibul (1 ; 2) dağılımı n=25 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



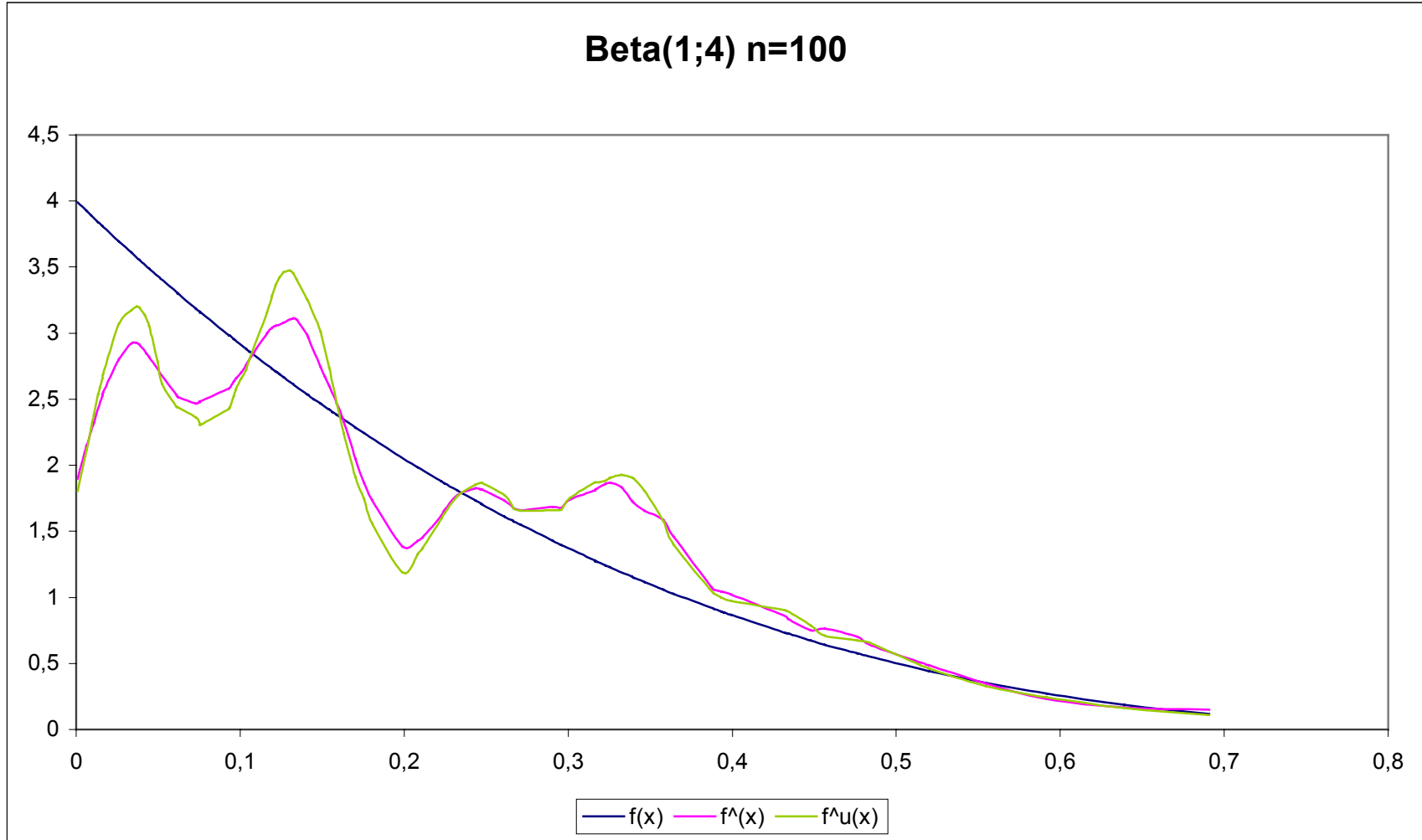
Şekil 4.4: Lognormal (0 ;1.,75) dağılım n=25 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



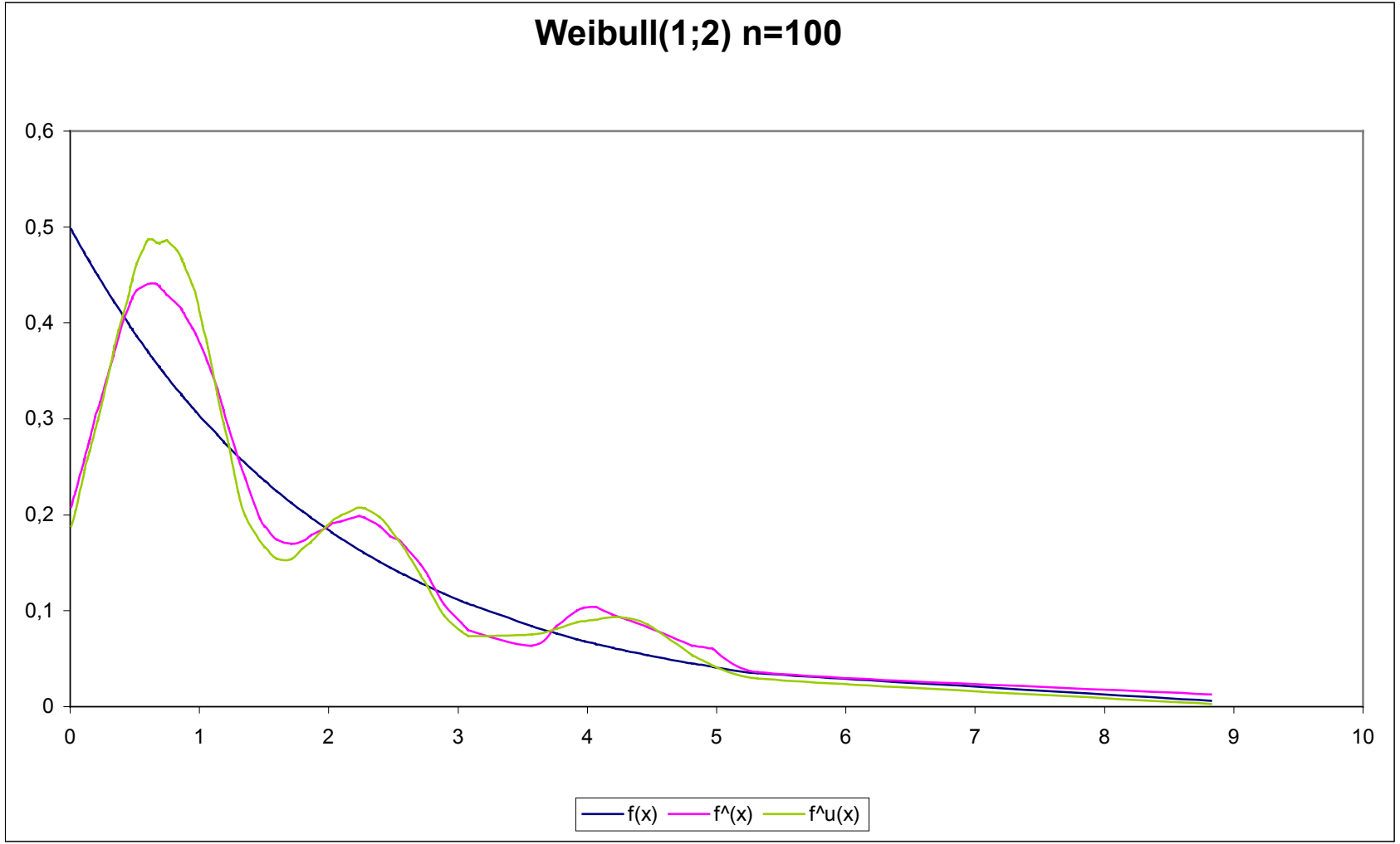
Şekil 4.5: Üstel (3) dağılım n=25 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



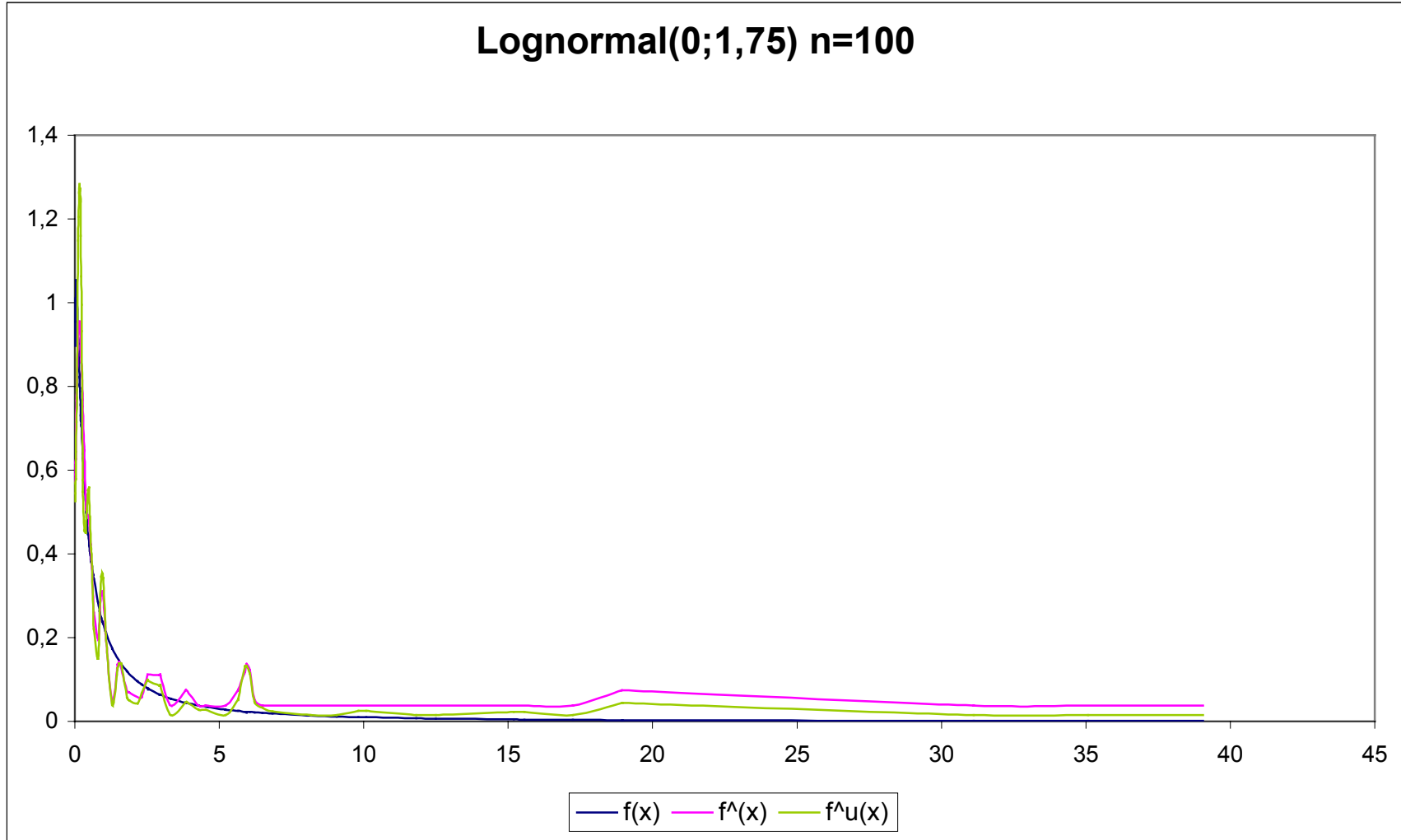
Şekil 4.6: Kikare (1) dağılımı $n=100$ için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



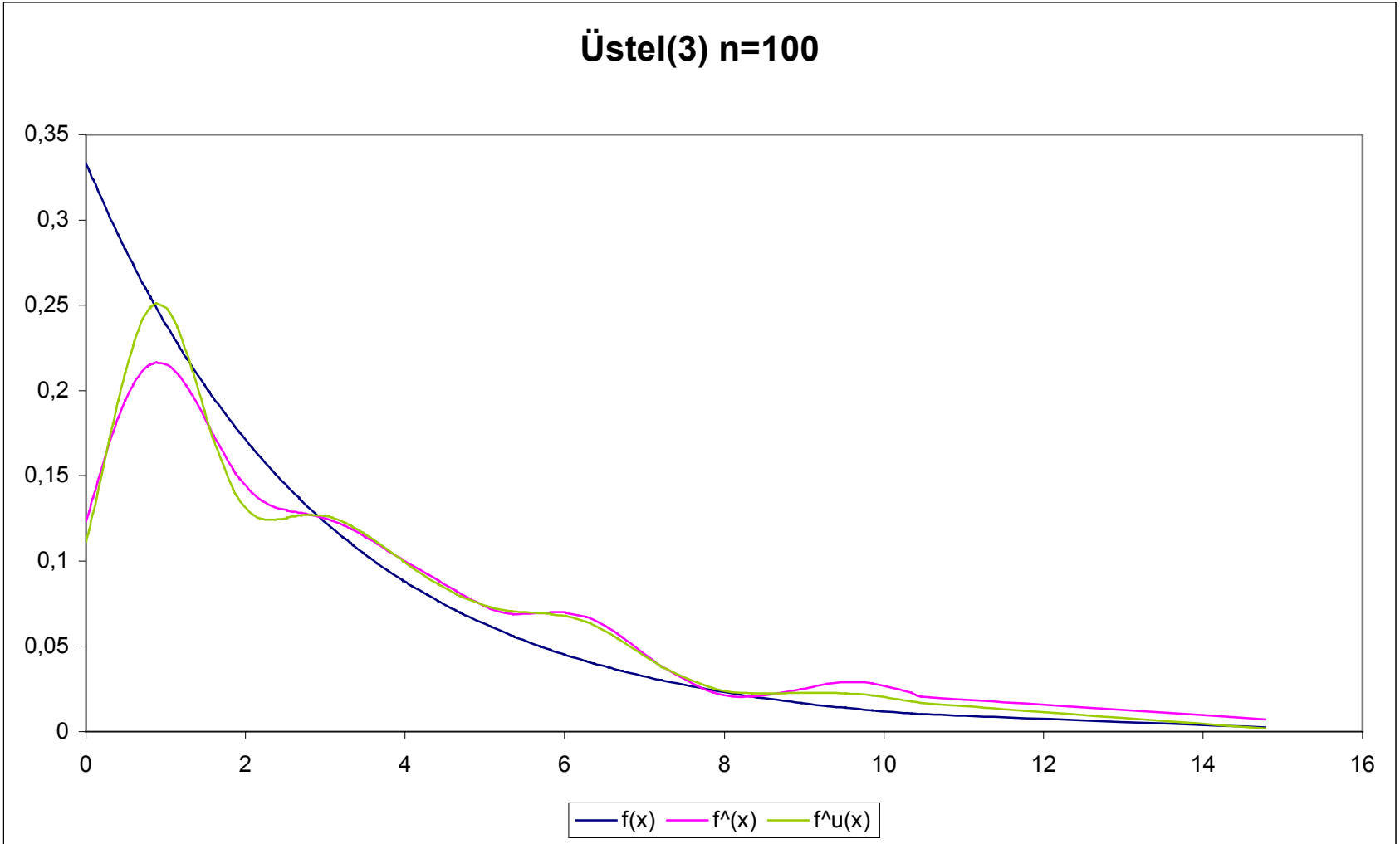
Şekil 4.7: Beta (1 ; 4) dağılımı n=100 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



Şekil 4.8: Weibull (1 ; 2) dağılımı n=100 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



Şekil 4.9: Lognormal (0;1.75) dağılım n=100 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri



Şekil 4.10: Üstel (3) dağılım n=100 için sabit ve uyarlanabilir çekirdek kestirimleri

KAYNAKLAR

Abramson, I., 1982a, On Bandwidth Variation in Kernel Estimates- A Square Root Law, The Annals of Statistics, 10, 1217-1223.

Breiman, L., Meisel, W., and Purcell, E., 1977, Variable Kernel Estimates of Multivariate Densities, Technometrics, 19, 135-144.

Bowman, A.W., 1984, An Alternative Method of Cross-Validation for the Smoothing of Density Estimates, Biometrika, 71, 353-360.

Cula, S.G., 1998, Çok Değişkenli Olasılık Yoğunluk Fonksiyonunun Çekirdek Fonksiyonlarıyla Kestirimi, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 125s.

Gökmen, D., 2002, Bant Genişliği Seçiminde Kullanılan Yöntemlerin Simetrik ve Simetrik Olmayan Dağılımlarda Karşılaştırılması, Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 100s.

Epanechnikov, V.K. (1969), Non-parametric Estimation of a Multivariate Probability Density, Theory of Probability and its Applications, 14, 153-158

Hall, P., 1992, On Global Properties of Variable Bandwidth Density Estimators, The Annals of Statistics, 20, 762-778.

Hall, P., Marron, J.S., 1988, On Variable Window Width Kernel Estimates of Probability Densities, Probability Theory Related Fields, 80, 37-49.

Hall, P., Hu, T.C., Marron, J.S., 1994, Improved Variable Window Kernel Estimates of Probability Densities, The Annals of Statistics, 23, 1-10.

Jones, M.C., 1990, Variable Kernel Density Estimates and Variable Kernel Density Estimates, Australian Journal of Statistics, 32, 361-371.

Loftsgaarden, D.o. and Quesenberry, C.P. (1965), A Nonparametric Estimate of a Multivariate Density Function, *Annals of Mathematical Statistics*, 36, 1049 – 1051

Rosenblatt, M., 1956, Remarks on some nonparametric estimates of a density function. *Annals Math. Statistics.* , 27 ,832-837.

Rudemo, M., 1982, Emprical Choice of Histograms and Kernel Density Estimators, *Scand. J. Statistics*, 9, 65-78.

Sain, S.R., 1994, Adaptive Kernel Density Estimation, Rice University, Ph.D Thesis.

Sain, S.R. , and Scott, D.W., 1996, On Locally Adaptive Density Estimation, *Journal of the American Statistical Association*, 91, 1525-1534.

Silverman, B.W., 1986, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, London: Chapman and Hall.

Simonoff, J.S., 1996, *Smoothing Methods in Statistics*, Verlag, Newyork.

Terrell, G.R. and Scott, D.W., 1992, Variable Kernel Density Estimation, *The Annals of Statistics*, 20, 1236-1265.

Wand, M.P. and Jones, M.C., 1995, *Kernel Smoothing*, Chapman and Hall, Newyork.

Worton, B.J., 1989, Optimal Smoothing Parameters for Multivariate Fixed and Adaptive Kernel Methods, *Journal of Statistical Computing and Simulation*, 32, 45-57.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aybike VAR

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1980

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1994-1997 : İncesu Lisesi

Lisans 1997-2002 : Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü

Yabancı Dil: İngilizce

İş Tecrübesi:

2003-2004 : Türkiye İş Bankası

2004-2005 : Türkiye İş Kurumu Genel Müdürlüğü