KONİK VE KONVEKS METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Faruk DEVELİ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı
Doç. Dr. İsa YILDIRIM
2018

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KONİK VE KONVEKS METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Faruk DEVELİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2018

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

KONİK VE KONVEKS METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Doç. Dr. İsa YILDIRIM danışmanlığında, Faruk DEVELİ tarafından hazırlanan bu çalışma, 25/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği** / ~~**oy çokluğu (…/…)**~~ ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Sezgin AKBULUT İmza :

Üye : Doç. Dr. İsa YILDIRIM İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Birol GÜNDÜZ İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 28.06/2018 tarih ve ..26…./…23….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KONİK VE KONVEKS METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ ÜZERİNE

Faruk DEVELİ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İsa YILDIRIM

Bu tezde, öncelikle Karapınar'ın 2009 yılındaki makalesinde yer alan Teorem 2.4 ve 2.5 in sadece birim dönüşümler için geçerli olduğu ispatlanmıştır. Bu çalışmada geçen $2 \leq q < 4$ ve $2 \leq r < 5$ gibi kısıtlayıcı şartlar kaldırılarak farklı bir daraltanlık koşulu altında bu teoremler genişletilmiştir. Daha sonra Φ_p operatörü yardımı ile benzer daraltanlık koşulunu sağlayan ve görüntü kümesi Banach cebiri olan konik metrik uzayda tanımlanan dönüşümün en az bir sabit noktaya sahip olduğu gösterilmiştir. Son olarak, konik Banach uzaylarda yapılan bu çalışmalar konveks metrik uzaylara taşınıp dönüşümlerin sabit nokta ve çakışık noktaların varlığı ile ilgili teoremler incelenmiştir.

2018, 42 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sabit nokta, Konik metrik uzay, Konveks metrik uzay

ABSTRACT

MS Thesis

ON FIXED POINT THEOREMS IN CONE AND CONVEX METRIC SPACES

Faruk DEVELİ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Analysis and Function Theory

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsa YILDIRIM

In this thesis, it is first proved that Theorems 2.4 and 2.6 in Karapınar's article in 2009 are only valid for identity functions. In this work, by removing restriction conditions $2 \le q < 4$ and $2 \le r < 5$ at the article, these theorems have been generalized under a different contraction condition. Then, using Φ_p operator, for similar contraction condition, it has been shown to have at least one fixed point of the mapping defined in cone metric space which has a image set of Banach algebra. Finally, these studies on cone Banach spaces have been carried to convex metric spaces and the theorems about the existence fixed and coincident points of mappings have been examined.

2018, 42 pages

Anahtar Kelimeler: Fixed point, Cone metric space, Convex metric space

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde bana destek olan, bilgi ve tecrübeleriyle katkıda bulunan değerli tez danışmanım Sayın Doç. Dr. İsa YILDIRIM'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım ayrıca her türlü kolaylığı sağlayan benden yardımlarını esirgemeyen Matematik Bölümünün değerli öğretim üyelerine teşekkürü bir borç bilirim.

Tüm hayatım boyunca maddi manevi desteklerini hep yanımda hissettiğim değerli annem, babam ve kardeşlerime en içten duygularımla teşekkür ederim.

Faruk DEVELİ
Haziran, 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	n-boyutlu reel uzay
F	Cisim
$B(x,r)$	x merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$B[x,r]$	x merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
θ	Sıfır vektör
P	Konik
$\operatorname{int} P$	P nin içi
$x \leq y$	$y - x \in P$
$x < y$	$x \leq y$ ve $x \neq y$
$x \ll y$	$y - x \in \operatorname{int} P$
$\\| \; \\|$	Norm
$\\| \; \\|_C$	Konik norm
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
(X,d,W)	Konveks metrik uzay

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisinin temelleri Brouwer'ın çalışmaları ile atılmıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ deki kapalı birim yuvardan kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının olduğunu kanıtlamıştır. Brouwer'ın teoremi, ekonomi biliminde Nobel ödülü alan John Nash'ın makalelerine temel bir matematiksel malzeme olmuştur. Ayrıca 1922 yılında Banach tarafından ifade edilen ve "Daraltan Dönüşüm Teoremi" olarak da bilinen Banach sabit nokta teoremi, diferansiyel ve integral denklemlerin çözümünün varlığını ve tekliğini göstermede temel bir unsurdur. Bu iki örnekten de anlaşılacağı üzere sabit nokta teorisi matematiğin bir çok dalında ve diğer bilimlerde de uygulama sahasına sahiptir. Bunlardan birkaçı diferansiyel denklemler, fonksiyonel analiz, yaklaşım teorisi, istatistik, ekonomi olmakla birlikte daha bir çok alanda da sabit nokta teorisi kullanılmaktadır.

Metrik uzaylarda sabit nokta teorisi ile ilgili yapılan çalışmalar pek çok yazar tarafından farklı uzaylar üzerinde de ele alınmıştır. Takahashi 1970 yılındaki makalesinde, metrik uzaylardaki konvekslik yapısını tanıtıp genişlemeyen dönüşümler için bazı sabit nokta teoremleri üzerine çalışmıştır ve her normlu uzayın konveks metrik uzay olduğunu belirtmiştir. Konveks metrik uzay, normlu uzayın bir genişletilmiş hali olmasından dolayı Banach uzaylarda yapılan bazı çalışmalar konveks metrik uzaylara taşınmıştır. Shimizu and Takahashi (1996), Beg *et al.* (2006), Gündüz and Akbulut (2013), Yıldırım *et al.* (2013) ve daha birçok yazar konveks metrik uzaylarda çalışmışlardır.

2007 yılında Huang ve Zhang metrik uzayların genişlemesi olan konik metrik uzay kavramını verdiler. Bu uzayda x ve y nin arasındaki uzaklık olan $d(x, y)$, metrik uzaylardan farklı olarak sıralı bir Banach uzayında vektör olarak tanımlanmıştır. Ardından bu iki yazar başta Banach sabit nokta teoremi olmak üzere literatürdeki bazı teoremlerin konik metrik uzaylardaki karşılıklarını ispatlamışlardır. Daha sonra Rezapour and Halmbarani (2008), Huang and Zhang (2007) ın çalışmalarında kullandığı normallik şartının kaldırılabilir olduğunu göstermişlerdir.

Bu çalışmada, Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak Takahashi'nin 1970 yılında ortaya koyduğu konveks yapı kavramı ve özellikleri verilmiştir. Ayrıca normlu uzaylarda tanımlı olan düzgün konveks normlu uzay ve kesin konveks uzay gibi kavramların konveks yapı ile birlikte yeniden düzenlenmiş olan formları tanıtılmıştır. Daha sonra konik metrik uzay ve özellikleri verilmiş akabinde bu uzayda bazı sabit nokta teoremleri ifade edilmiştir.

Dördüncü bölümde öncelikle Karapınar'ın 2009 yılındaki makalesinde konik metrik uzaylar için ortaya koyduğu daraltanlık koşulunu sadece birim dönüşümlerin sağladığı gösterilmiş ve daha sonra bu daraltanlık koşulu genelleştirilerek bazı sabit nokta teoremleri ispatlanmıştır. Son olarak, konveks metrik uzaylarda ve görüntü kümesi Banach cebiri olan konik metrik uzaylarda benzer daraltanlık koşulları için bazı teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Beşinci bölümde ise çalışmamızda elde ettiğimiz bazı sonuçlar verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1.1 (Metrik Uzay): X boş olmayan bir küme ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

M1. $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M2. $d(x, y) = d(y, x)$

M3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, d ile birlikte X e metrik uzay denir ve $X = (X, d)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.2: $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir metriktir.

Tanım 2.1.3 (Yakınsak Dizi): $X = (X, d)$ bir metrik uzay, $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda

$$d(x_n, x) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0 = n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsıyor denir.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ veya } x_n \to x, (n \to \infty)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.4 (Cauchy Dizisi): $X=(X,d)$ bir metrik uzay ve $\{x_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon>0$ için $n,m>n_0$ olduğunda

$$d(x_n,x_m)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0=n_0(\varepsilon)$ sayısı varsa, $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.5 (Tam Metrik Uzay): $X=(X,d)$ bir metrik uzay olsun. X deki her $\{x_n\}$ Cauchy dizisi yakınsak ise, (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

Tanım 2.1.6: (X,d) metrik uzay ve $x_0\in X, r>0$ olsun. x_0 merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar ve açık yuvar sırası ile

1) $B[x_0,r]=\{x\in X : d(x_0,x)\le r\}$,
2) $B(x_0,r)=\{x\in X : d(x_0,x)<r\}$,

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.7 (Vektör Uzay): V boş olmayan bir küme ve F cismi $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olsun.

$$+ : V\times V\to V, (x,y)\to x+y,$$
$$. : F\times V\to V, (a,x)\to a.x,$$

dönüşümleri ile toplama çarpma işlemlerini tanımlayalım. Eğer her $x,y,z\in V$ ve $a,b\in F$ için;

1) $x+(y+z)=(x+y)+z$
2) $x+y=y+x$
3) $x+\theta=\theta+x=x$ olacak şekilde bir $\theta\in V$ elemanı vardır.
4) $x+(-x)=(-x)+x=\theta$ olacak şekilde $-x\in V$ elemanı ($-x$ toplamada ters elemandır) vardır.
5) $(ab)x=a(bx)$
6) $a(x+y)=ax+ay$

7) $(a+b)x = ax+by$

8) $1.x = x$ (1 çarpmada birim ya da etkisiz elemandır).

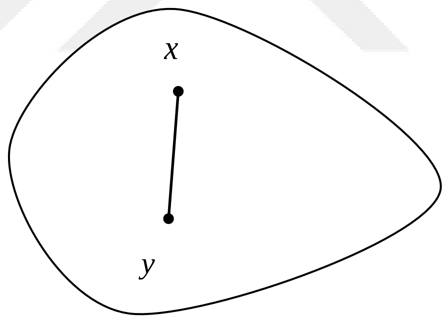
şartları sağlanıyorsa V ye F üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay) denir. $F=\mathbb{R}$ alınırsa V ye reel vektör uzayı ve $F=\mathbb{C}$ alınırsa V ye kompleks vektör uzayı adı verilir.

Tanım 2.1.8 (Konveks Küme): V bir lineer uzay ve $A \subseteq V$ olsun. Her $x, y \in A$ için

$$B = \{z \in V : z = ax + (1-a)y, 0 \le a \le 1\} \subseteq A$$

ise, A kümesine konvekstir denir.

Bir başka ifadeyle, A kümesinden alınan herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine A kümesinde kalıyor ise A kümesi konvekstir.



Şekil 2.1. Konveks küme

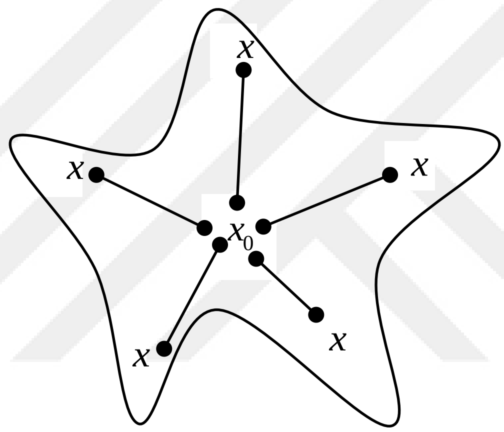
Tanım 2.1.9 (Starshaped Küme): S, V reel lineer uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Her $x \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $x_0 \in S$ olmak üzere

$$\lambda x + (1-\lambda)x_0 \in S$$

oluyorsa S ye x_0 a göre bir yıldızıl (starshaped) küme denir.

Geometrik olarak; eğer $x_0 \in S$ noktası, her $x \in S$ için x_0 ile x noktalarını birleştiren doğru parçaları S nin içinde kalacak şekilde mevcut ise o zaman S kümesi x_0 noktasına göre yıldızıl kümedir.

Aşağıda verilen şekilde görüldüğü gibi yıldızıl kümenin öyle bir x_0 noktası vardır ki, bu x_0 noktasını kümenin tüm noktalarına birleştiren $|xx_0|$ doğru parçalarının tamamı kümenin içinde yer almaktadır.



Şekil 2.2. Yıldızıl (Starshaped) küme

Reel lineer uzayın boş olmayan her konveks alt kümesi, elemanlarının her birine göre yıldızıldır. Fakat tersine, elemanlarının her birine göre yıldızıl olan reel lineer uzayın boş olmayan her alt kümesi konveks bir küme olmayabilir.

Tanım 2.1.10 (Normlu Uzay): N, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\| \ \| : N \to \mathbb{R}$ fonksiyonun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

N1. $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|, (\alpha \in F)$

N3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|$ fonksiyonuna N de bir norm ve $(N, \| \ \|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.11 (Banach Uzay): N normlu bir lineer uzay olsun. N, $d(x,y) = \|x-y\|$ metriğine göre tam ise N ye Banach uzay denir.

Tanım 2.1.12 (Kesin Konveks Banach Uzay): X bir Banach uzay olsun. Eğer her $x, y \in S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, $x \neq y$ ve her $\lambda \in (0,1)$ için

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\| < 1$$

şartı sağlanıyorsa, X Banach uzayına kesin (strictly) konveks uzay denir.

Tanım 2.1.13 (Düzgün Konveks Banach Uzay): X bir Banach uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ ve $\|x-y\| \geq \varepsilon$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için

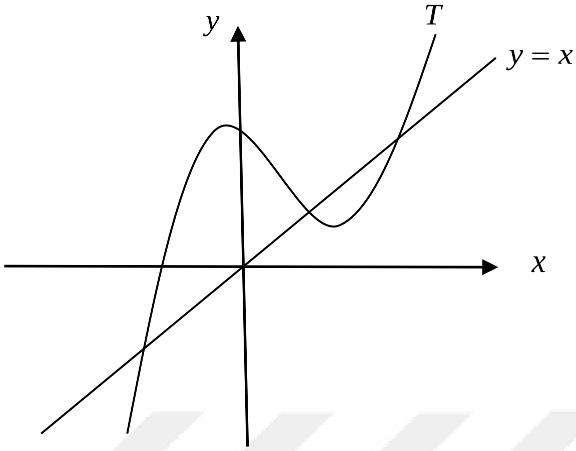
$$\frac{1}{2}\|x+y\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, X Banach uzayına düzgün (uniformly) konveks uzay adı verlir.

Not 2.1.14: Her düzgün konveks Banach uzayı, kesin konveks Banach uzaydır.

2.2. Sabit Nokta Kavramı

Tanım 2.2.1 (Sabit Nokta): X boş olmayan bir küme ve $T : X \to X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T nin sabit noktası denir. Sabit nokta geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm ise bu durumda T nin sabit noktaları, T nin grafiği ile $y = x$ doğrusunun kesiştiği noktalardır.



Şekil 2.3. Üç sabit noktaya sahip bir T dönüşümü

Yukardaki şekle bakılırsa bir dönüşümün birden fazla sabit noktası olabilir. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ veya $Fix(T)$ ile gösterilir. Örneğin, $X=\mathbb{R}$ olmak üzere $T:X\to X$, $Tx=x\cos x$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi $F(T)=\{2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\cup\{0\}$ dır.

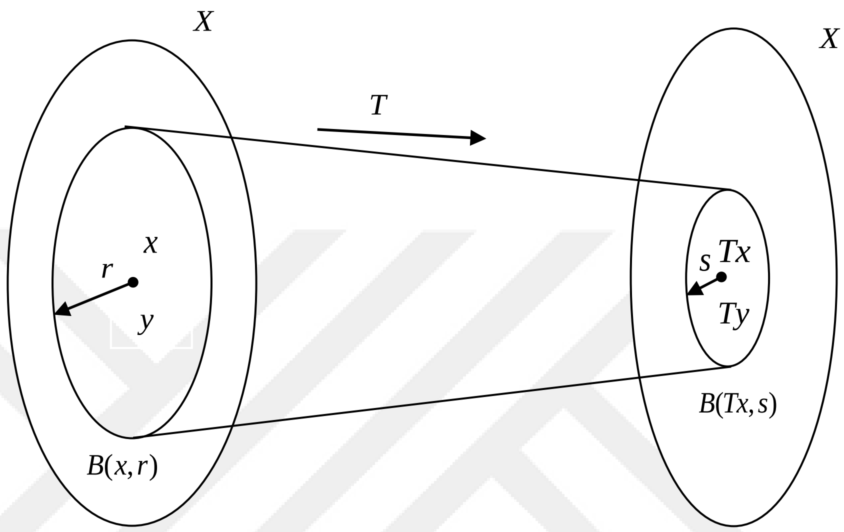
X boş olmayan bir küme ve $T,S:X\to X$ herhangi iki dönüşüm olsun. Eğer $Tx=Sx$ olacak şekilde bir $x\in X$ varsa, bu x noktasına T ve S dönüşümlerinin çakışık noktası denir. Örneğin; Eğer $X=\mathbb{R}$, $Tx=x+4$ ve $Sx=x^2+3x+1$ ise -1, 3 noktaları T ve S nin çakışık noktalarıdır.

Tanım 2.2.2 (Daraltan Dönüşüm): (X,d) bir metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\le kd(x,y)$$

olacak şekilde bir $0\le k<1$ sabit sayısı varsa, T ye daraltan dönüşüm denir.

Bu tanım geometrik olarak şu şekilde yorumlanabilir: Herhangi iki x ve y noktası arasındaki mesafe, bu noktaların görüntüleri olan Tx ve Ty noktaları arasındaki mesafeden daha büyüktür. Farklı bir açıdan bakılacak olursa; $0 < s < r$ olmak üzere, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi $B(x,r)$ yuvarındaki her y elemanının görüntüsü, $B(Tx,s)$ yuvarının içine düşer.



Şekil 2.4. T bir daraltan dönüşüm

Örnek 2.2.3: $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$ olmak üzere $T : X \to X$, $Tx = \frac{1}{2}\sin x$ dönüşümünü ele alalım. T dönüşümü $\mathbb{R}$ üzerinde türevlenebilir olduğundan Ortalama Değer Teoremi kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(Tx,Ty) &= |Tx - Ty| = |T^{'}(c)(x-y)| \\ &= \frac{1}{2}|\cos c||x-y| \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y| = \frac{1}{2}d(x,y) \end{aligned}$$

eşitsizliği, T nin bir daraltan dönüşüm olduğunu gösterir.

Aşağıdaki teorem, verilen bir dönüşümün sabit noktasının varlığını ve tekliğini garanti eden önemli teoremlerden ilkidir.

Teorem 2.2.4 (Banach Daralma İlkesi): (X,d) tam metrik uzay ve $T:X\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $x,y\in X$ için,

$$d(Tx,Ty)\le kd(x,y)$$

olacak şekilde bir $0\le k<1$ sabit sayısı varsa, bu durumda T bir tek sabit noktaya sahiptir.

İspat: x_0 , X de keyfi bir nokta ve

$$x_1=Tx_0, x_2=Tx_1=T^2x_0,\dots,x_{n+1}=Tx_n=T^{n+1}x_0$$

olsun. İlk olarak $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ve daha sonra bu dizinin limit noktasının $Tx=x$ denkleminin bir tek çözümü olduğunu göstereceğiz. $n\ge 0$ için

$$d(x_{n+1},x_n)=d(Tx_n,Tx_{n-1})\le kd(x_n,x_{n-1})\le\dots\le k^n d(x_1,x_0)$$

olur. $m>n$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &\le d(x_n,x_{n+1})+d(x_{n+1},x_{n+2})+\dots+d(x_{m-1},x_m)\\ &\le k^n d(x_0,x_1)+\dots+k^{m-1}d(x_0,x_1)\\ &\le k^n d(x_0,x_1)\left[1+k+k^2+\dots\right]\\ &=\frac{k^n}{1-k}d(x_0,x_1),(n\to\infty)\end{aligned}$$

olur. Yani,

$$d(x_n,x_m)=\frac{k^n}{1-k}d(x_0,x_1)$$

dir. $0\le k<1$ olduğundan $n\to\infty$ için limit alınırsa, $d(x_n,x_m)\to 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X metrik uzayı tam olduğundan $x_n\to x$ ve dolayısıyla $x_{n+1}\to x$ dir. T dönüşümü sürekli olduğundan dizisel süreklidir, yani $Tx_n\to Tx$ dir. $x_{n+1}=Tx_n$ de $n\to\infty$ için limit alınırsa $Tx=x$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y , T nin başka bir sabit noktası yani, $Ty = y$ olsun. Bu durumda

$$d(x, y) = d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

olur. Bu durum $d(x, y) = 0$ olmasını gerektirir. Bu da $x = y$ demektir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Konveks Metrik Uzay

Bu kısımda ilk olarak 1970 yılında Takahashi tarafından ifade edilen konveks metrik uzay kavramı verilecek ve daha sonra bu yapı ile ilgili bazı örneklere, özelliklere ve yapılan çalışmalara değinilecektir.

Tanım 3.1.1: (X,d) metrik uzay ve $I=[0,1]$ olmak üzere $W: X\times X\times I\to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer her $(x,y,\lambda)\in X\times X\times I$ ve $u\in X$ için

$$d(u,W(x,y,\lambda))\leq \lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, W dönüşümüne X üzerinde konveks yapı ve W konveks yapısı ile birlikte (X,d) metrik uzayına konveks metrik uzay denir. Bu uzayı göstermek için (X,d,W) notasyonu kullanılır (Takahashi 1970).

Örnek 3.1.2: $(X,\|\ \|)$ bir normlu uzay olsun. Her $x,y\in X$, $\lambda\in I$ için $W(x,y,\lambda)=\lambda x+(1-\lambda)y$ olarak tanımlanan dönüşüm X üzerinde bir konveks yapıdır (Takahashi 1970).

Yukarıdaki örnekten anlaşılacağı üzere her normlu uzay konveks metrik uzaydır. Aşağıdaki örnek bu ifadenin tersinin doğru olmadığını gösterir.

Örnek 3.1.3: $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : x_1>0, x_2>0\}$ olmak üzere $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)$ ve $\lambda\in I$ için $d: X\times X\to[0,\infty)$ metriğini ve $W: X\times X\times I\to X$ dönüşümü sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın

$$d(x,y)=|x_1-y_1|+|x_1x_2-y_1y_2|,$$

$$W(x,y,\lambda)=[\lambda x_1+(1-\lambda)y_1,\frac{\lambda x_1 x_2+(1-\lambda)y_1 y_2}{\lambda x_1+(1-\lambda)y_1}].$$

Yukarıda oluşturulan (X,d,W) üçlüsü bir konveks metrik uzaydır ancak bir normlu uzay değildir (Beg *et al.* 2006).

Çözüm: Burada $d(x,y)$ nin metrik olduğu açıktır. Şimdi her $(x,y,\lambda)\in X\times X\times I$ ve $u\in X$ için $d(u,W(x,y,\lambda))\le \lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y)$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} d(u,W(x,y,\lambda)) &= |u_1-(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1)|+|u_1u_2-(\lambda x_1x_2+(1-\lambda)y_1y_2)| \\ &= |\lambda(u_1-x_1)-(1-\lambda)(u_1-y_1)|+|\lambda(u_1u_2-x_1x_2)-(1-\lambda)(u_1u_2-y_1y_2)| \\ &\le \lambda|u_1-x_1|+(1-\lambda)|u_1-y_1|+\lambda|u_1u_2-x_1x_2|+(1-\lambda)|u_1u_2-y_1y_2| \\ &= \lambda d(u,x)+(1-\lambda)d(u,y) \end{aligned}$$

olup (X,d,W) nin konveks metrik uzay olduğu görülür. Ancak $d(x,y)=\|x-y\|$ ile tanımlanan $\|\ \|:X\to[0,\infty)$ dönüşümü $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|ax-ay\|=|a||x_1-y_1|+a^2|x_1x_2-y_1y_2|\ne|a|(|x_1-y_1|+|x_1x_2-y_1y_2|)=|a|\|x-y\|$$

ve

$$\|ax-ay\|\ne|a|\|x-y\|$$

olduğundan normun özelliğini sağlamaz.

Tanım 3.1.4: (X,d,W) bir konveks metrik uzay ve $C\subseteq X$ olsun. Eğer her $(x,y,\lambda)\in C\times C\times I$ için $W(x,y,\lambda)\in C$ oluyorsa C ye konveks küme denir (Takahashi 1970).

Tanım 3.1.5: (X,d,W) bir konveks metrik uzay ve $C\subseteq X$ olsun. Eğer her $(x,x_0,\lambda)\in C\times C\times I$ için $W(x,x_0,\lambda)\in C$ olacak şekilde $x_0\in C$ elemanı varsa, C ye yıldızıl küme denir (Lei and Xie 1992).

Takahashi 1970 yılında $B(x,r)$ ve $B[x,r]$ yuvarlarının konveks kümeye birer örnek olduğunu göstermiştir.

Önerme 3.1.6: (X,d,W) konveks metrik uzay ise aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) $d(x,y)=d(x,W(x,y,\lambda))+d(y,W(x,y,\lambda))$

ii) $d(x,W(x,y,\lambda))=(1-\lambda)d(x,y)$

iii) $d(y,W(x,y,\lambda))=\lambda d(x,y)$ (Asadi 2014).

İspat: i) Konveks metrik uzay tanımından $d(x,W(x,y,\lambda))\le(1-\lambda)d(x,y)$ ve $d(y,W(x,y,\lambda))\le\lambda d(x,y)$ eşitsizlikleri yazılır. Ayrıca metrik uzayın M3 özelliği ve üsteki eşitsizlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x,y) &\le d(x,W(x,y,\lambda))+d(W(x,y,\lambda),y) \\ &\le (1-\lambda)d(x,y)+\lambda d(x,y)=d(x,y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$d(x,y)=d(x,W(x,y,\lambda))+d(y,W(x,y,\lambda))$$

yazılır. Böylece ispat tamamlamış olur.

ii) Konveks yapı tanımından ve i) den yararlanarak

$$\begin{aligned} d(x,W(x,y,\lambda)) &\le (1-\lambda)d(x,y)=d(x,y)-\lambda d(x,y) \\ &=[d(x,W(x,y,\lambda))+d(y,W(x,y,\lambda))]-\lambda d(x,y) \end{aligned}$$

ve $d(y,W(x,y,\lambda))\le\lambda d(x,y)$ eşitsizliğini kullanarak $d(x,W(x,y,\lambda))=(1-\lambda)d(x,y)$ eşitliği gösterilir.

iii) i) ve ii) den kolaylıkla elde edilir.

Literatürde normlu uzaylar için mevcut olan düzgün (uniformly) uzay ve kesin (strictly) uzay gibi kavramlar, konveks metrik uzaylarda aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1.7: X bir konveks metrik uzay olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $r > 0$, $d(z,x) \le r$, $d(z,y) \le r$ ve $d(x,y) \ge r\varepsilon$ şartını sağlayan her $x,y,z \in X$ için

$$d(z,W(x,y,\frac{1}{2})) \le r(1-\alpha(\varepsilon)) < r$$

olacak sekilde $\alpha(\varepsilon)$ sayısı varsa, X e düzgün (uniformly) konveks uzay adı verilir (Beg *et al.* 2006).

Not 3.1.8: Düzgün konveks Banach uzay, düzgün konveks metrik uzaydır. 1972 yılında Goebel ve Kirk, düzgün konveks bir Banach uzayın kapalı, sınırlı ve konveks alt kümesi üzerinde tanımlı bir asimptotik genişlemeyen dönüşümün sabit noktaya sahip olduğunu ispatlamışlardır. Daha sonra Beg (2001) aynı teoremi düzgün konveks metrik uzayda ispatlamıştır.

Tanım 3.1.9: X bir konveks metrik uzay olsun. $d(z,x) \le r$, $d(z,y) \le r$ şartını sağlayan her $x,y,z \in X$ için

$$d(z,W(x,y,\frac{1}{2})) < r$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, X e kesin (strictly) konveks uzay adı verilir (Beg *et al.* 2006).

Tanım 3.1.10: (X,d) bir metrik uzay ve $I=[0,1]$ olmak üzere $W : X^3 \times I^3 \to X$ dönüşümü tanımlansın. Eğer $a_n + b_n + c_n = 1$ olacak şekilde her $(x,y,z,a_n,b_n,c_n) \in X^3 \times I^3$ ve $u \in X$ için

$$d(W(x,y,z,a_n,b_n,c_n),u) \le a_n d(x,u) + b_n d(y,u) + c_n d(z,u)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, W dönüşümü ile birlikte (X,d) metrik uzayına, genişletilmiş konveks metrik uzay denir (Wang and Liu 2009).

Not 3.1.11: Her düzgün konveks uzay, kesin konveks uzaydır. Ayrıca Tanım 3.1.10 daki konvekslik yapısı üzerinde, z yi sabit tutup ve $c_n = 0$ alarak her genişletilmiş konveks metrik uzayın bir konveks metrik uzay oluğu rahatlıkla görülür.

3.2. Konik Metrik Uzay

Bu bölümde kısaca konik metrik kavramından bahsedip daha sonra literatürde geçen konik Banach uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini vereceğiz. Konik metriği, bilinen metrik kavramının değer kümesi negatif olmayan reel sayılar yerine, sıralı bir Banach uzay alınarak tanımlanır. Buradaki konik kavramı, sıralı Banach uzay elde etmek için kullanılan bir kavram olup ilk olarak bu kavramı vererek başlayacağız.

Tanım 3.2.1: E bir reel Banach uzay ve P, E nin bir altkümesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan P kümesine konik denir.

P1. P boş olmayan kapalı bir küme ve $P \neq \{\theta\}$;

P2. $a,b \in \mathbb{R},\ a,b \geq 0,\ x,y \in P \Rightarrow ax+by \in P$;

P3. $x \in P$ ve $-x \in P \Rightarrow x = \theta$ (Huang and Zhang 2007).

Örnek 3.2.2: $E = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x,y \geq 0\}$, E de koniktir.

E reel Banach uzayında $P \subseteq E$ koniği verilsin. E de P ye göre bir "$\leq$" kısmi sıralama $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$ şeklinde tanımlanır. Eğer $x \leq y$ ve $x \neq y$ ise bu durum "$x < y$" ile, $y - x \in \operatorname{int} P$ ise $x \ll y$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.3: E bir reel Banach uzay ve P, E nin bir altkümesi olsun. Her $x,y \in E$ ve $\theta \leq x \leq y$ için

$$\|x\| \leq K\|y\|$$

olacak şekilde $K > 0$ sayısı varsa P koniğine normal konik denir. Yukardaki koşulu sağlayan en küçük pozitif K tamsayısına P nin normal sabiti denir (Huang and Zhang 2007).

Önerme 3.2.4: $K < 1$ normal sabitine sahip konik yoktur (Rezapour and Hamlbarani 2008).

İspat : P, $K < 1$ normal sabitine sahip konik ve x, P nin sıfırdan farklı elemanı olsun. O halde $K < 1 - \varepsilon$ olacak şekilde bir $0 < \varepsilon < 1$ değeri vardır. $(1-\varepsilon)x \le x$ olup normallik şartından $(1-\varepsilon)\|x\| \le K\|x\|$ olur. Ancak $K < 1-\varepsilon$ olduğundan $K\|x\| < 1-\varepsilon\|x\|$ eşitsizliği gerçeklenir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $1 \le K$ olmalıdır.

Önerme 3.2.5: E bir reel Banach uzay ve $P \subseteq E$ bir konik olsun. $a \in P$ olsun. Eğer $a \le \lambda a$ ve $0 < \lambda < 1$ ise $a = \theta$ dır (Radenoviç and Rhoades 2009).

Tanım 3.2.6: X boş olmayan bir küme ve E bir reel Banach olsun. Eğer $d : X \times X \to E$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y, z \in X$ için,

M1. $d(x, y) \ge \theta$ ve $d(x, y) = \theta \Leftrightarrow x = y$

M2. $d(x, y) = d(y, x)$

M3. $d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$

şartları sağlanıyorsa d ye X üzerinde bir konik metrik, d ile birlikte X e konik metrik uzay denir ve (X, d) ile gösterilir (Huang and Zhang 2007).

Not 3.2.7: Eğer $E = \mathbb{R}$ ve $P = [0, \infty)$ alırsak, d nin bir metrik olduğunu görürüz. O halde her metriğin bir konik metrik olduğunu söyleyebiliriz.

Örnek 3.2.8: $E = \mathbb{R}^2$ de $P = \{(x, y) \in E \mid x, y \ge 0\}$ konik kümesi verilsin. $X = \mathbb{R}$ ve $d : X \times X \to E$ olmak üzere

$$d(x,y)=(|x-y|,\alpha|x-y|),\alpha\geq 0$$

biçiminde tanımlansın. O zaman (X,d) bir konik metrik uzaydır (Huang and Zhang 2007).

Tanım 3.2.9: (X,d) konik metrik uzay, $\{x_n\}$ X içinde bir dizi ve $x\in X$ olsun.

(i) Her $c\in E$ ve $\theta\ll c$ için $\exists N\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n\geq N$ için $d(x_n,x)\ll c$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsak dizi denir ve $n\to\infty$ için $x_n\to x$ ya da $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ ile gösterilir.

(ii) Her $c\in E$ ve $\theta\ll c$ için $\exists N\in\mathbb{N}$ öyle ki $\forall n,m\geq N$ için $d(x_n,x_m)\ll c$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(iii) Her Cauchy dizisi yakınsak ise (X,d) ikilisine tam konik metrik uzay denir (Huang and Zhang 2007).

Teorem 3.2.10: (X,d) konik normlu uzay, P normal sabiti K olan normal konik ve $\{x_n\}$, X de bir dizi ve $x\in X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $x_n\to x\Leftrightarrow d(x_n,x)\to\theta,\ n\to\infty,$

ii) $\{x_n\}$, X de yakınsak bir dizi $\Rightarrow$ $\{x_n\}$ in limiti tektir,

iii) $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi $\Leftrightarrow d(x_n,x_m)\to\theta,\ n,m\to\infty$,

iv) $x_n\to x$ ve $y_n\to y\Rightarrow d(x_n,y_n)\to d(x,y),\ n\to\infty$(Huang and Zhang 2007).

Önerme 3.2.11: (X,d) konik normlu uzay, P normal sabiti K olan normal konik, $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$, X içinde iki dizi ve $n\to\infty$ için $x_n\to x$, $y_n\to y$ olsun. Eğer her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\leq y_n$ ise $x\leq y$ olur (Abuloha 2009).

Huang ve Zhang (2007) Banach, Kannan ve Chatterjea sabit nokta teoremlerini, P yi normal konik alarak, konik metrik uzaylara aşağıdaki gibi genişletmiştir.

Teorem 3.2.12: (X,d) tam konik metrik uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. Eğer $T:X\to X$ dönüşümü $k\in[0,1)$ olmak üzere her $x,y\in X$ için

$$d(Tx,Ty)\leq kd(x,y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sahiptir. Herhangi bir $x\in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Huang and Zhang 2007).

İspat : x_0, X de keyfi bir nokta ve

$$x_1=Tx_0, x_2=Tx_1=T^2x_0,...,x_{n+1}=Tx_n=T^{n+1}x_0,...$$

şeklinde bir $\{x_n\}$ dizisi olsun. Buradan

$$\begin{aligned} d(x_{n+1},x_n) &= d(Tx_n,Tx_{n-1})\leq kd(x_n,x_{n-1}) \\ &\leq k^2 d(x_{n-1},x_{n-2})\leq ...\leq k^n d(x_1,x_0) \end{aligned}$$

elde edilir. $n>m$ için

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &= d(x_n,x_{n-1})+d(x_{n-1},x_{n-2})+...+d(x_{m+1},x_m) \\ &\leq (k^{n-1}+k^{n-2}+...+k^m)d(x_1,x_0) \\ &\leq \frac{k^m}{1-k}d(x_1,x_0) \end{aligned}$$

olur. P normal sabiti K olan normal konik olduğundan

$$\|d(x_n,x_m)\|\leq \frac{k^m}{1-k}K\|d(x_1,x_0)\|$$

elde edilir. $n,m\to\infty$ için limit alınırsa, $d(x_n,x_m)\to\theta$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizi Cauchy dizisi olduğunu gösterir. X tam olduğundan $x^*\in X$ vardır; öyleki $x_n\to x^*(n\to\infty)$ dir. O halde

$$\begin{aligned} d(Tx^*,x^*) &= d(Tx_n,Tx^*)+d(Tx_n,x^*) \\ &\leq kd(x_n,x^*)+d(x_{n+1},x^*) \end{aligned}$$

ve

$$\|d(Tx^*,x^*)\|\leq K(k\|d(x_n,x^*)\|+\|d(x_n,x^*)\|)$$

olup yukarıdaki eşitsizlik $n \to \infty$ için limit alınırsa $\|d(Tx^*, x^*)\| = 0$ olur. Bu eşitlikten $Tx^* = x^*$ elde edilir. Şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. y^*, T nin başka bir sabit noktası olsun yani, $Ty^* = y^*$ olsun. Bu durumda

$$d(x^*, y^*) = d(Tx^*, Ty^*) \le kd(x^*, y^*)$$

olur. Önerme 3.2.5 den $d(x^*, y^*) = \theta$ olup $x^* = y^*$ elde edilir. O halde T dönüşümünün sabit noktası tektir.

Teorem 3.2.13: (X,d) tam konik metrik uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. Eğer $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \le k[d(Tx, x) + d(Ty, y)]$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sahiptir. Herhangi bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Huang and Zhang 2007).

Teorem 3.2.14: (X,d) tam konik metrik uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. Eğer $T: X \to X$ dönüşümü $k \in [0, \frac{1}{2})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$d(Tx, Ty) \le k[d(Tx, y) + d(Ty, x)]$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, T dönüşümü X de bir tek sabit noktaya sahiptir. Herhangi bir $x \in X$ için $\{T^n x\}$ dizisi bu sabit noktaya yakınsar (Huang and Zhang 2007).

Not 3.2.15: Rezapour ve Hamlbarani (2008) de 3.2.12, 3.2.13, 3.2.14 teoremlerinde geçen P konisinin normallik şartını kaldırarak, herhangi bir konik üzerinde de bu teoremlerin geçerli olduğunu göstermişlerdir.

Konik metrik uzaylar, metrik uzayların oluşturduğu topolojiye benzer bir topoloji oluşturur. Bunun için öncelikle gerekli önermeyi verelim.

Önerme 3.2.16: (X,d) bir konik metrik uzay olsun. Her $c_1 \gg \theta$ ve $c_2 \gg \theta$, $c_1, c_2 \in E$ için $c \ll c_1$ ve $c \ll c_2$ olacak şekilde $c \gg \theta,\ c \in E$ vardır (Turkoğlu and Abuloha 2010).

Teorem 3.2.17: Her (X,d) konik metrik uzayı bir topolojik uzaydır (Turkoğlu and Abuloha 2010).

İspat: $c \gg \theta,\ c \in E$ için $B(x,c) = \{y \in X : d(x,y) \ll c\}$ ve $\beta = \{B(x,c) : x \in X, c \gg \theta\}$ olmak üzere $\tau_c = \{U \subset X : \forall x \in X, \exists B \in \beta, x \in B \subset U\}$ kümesi topolojinin özelliklerini sağladığını gösterelim.

$\tau_1)$ $\emptyset, X \in \tau_c$

$\tau_2)$ $U,V \in \tau_c$ ise $U \cap V \in \tau_c$ olduğunu gösterlim. $x \in U \cap V$ ise $x \in U$ ve $x \in V$ dir. Böylece $x \in B(x,c_1) \subset U$ ve $x \in B(x,c_2) \subset V$ olacak şekilde $c_1 \gg \theta, c_2 \gg \theta$ vardır. Önerme 3.2.16 dan $c \ll c_1$ ve $c \ll c_2$ olacak şekilde $c \gg \theta$ bulabiliriz. Ayrıca $x \in B(x,c) \subset B(x,c_1) \cap B(x,c_2) \subset U \cap V$ olduğundan $U \cap V \in \tau_c$ dir.

$\tau_3)$ Her $\alpha \in \Delta$ için $U_\alpha \in \tau_c$ olsun. $x \in \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ ise $x \in U_{\alpha_0}$ olacak şekilde $\alpha_0 \in \Delta$ bulabiliriz. $U_{\alpha_0} \in \tau_c$ olduğundan $x \in B(x,c) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha$ olacak şekilde $c \gg \theta$ vardır. Bu ise $\bigcup_{\alpha\in\Delta} U_\alpha \in \tau_c$ olduğunu gösterir.

Konik metrik uzay tanımından sonra konik normlu uzayı aşağıdaki gibi tanımlamak oldukça doğaldır.

Tanım 3.2.18: X , $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzay olsun. $\| \ \|_C : X \to E$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|_C$ ile gösterelim. Bu fonksiyon için,

N1. $\|x\|_C \geq \theta$ ve $\|x\|_C = \theta \Leftrightarrow x = \theta$

N2. $\|x+y\|_C \leq \|x\|_C + \|y\|_C$

N3. $\|kx\|_C = |k|\|x\|_C$, $(k \in \mathbb{R})$

şartları sağlanıyorsa $\| \ \|_C$ fonksiyonuna X de bir konik norm ve $(X, \| \ \|_C)$ ikilisine de konik normlu uzay denir (Karapınar 2009).

Tanım 3.2.19: $(X, \| \ \|_C)$ konik normlu uzay, $\{x_n\}$ X de bir dizi ve $x \in X$ olsun.

(i) Her $c \in E$ ve $\theta \ll c$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n \geq N$ için $\|x_n - x\|_C \ll c$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsak dizi denir ve $n \to \infty$ için $x_n \to x$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ile gösterilir.

(ii) Her $c \in E$ ve $\theta \ll c$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $\forall n, m \geq N$ için $\|x_n - x_m\|_C \ll c$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine Cauchy dizisi denir.

(iii) Her Cauchy dizisi yakınsak ise $(X, \| \ \|_C)$ ikilisine tam konik normlu uzay denir (Karapınar 2009).

Teorem 3.2.20: $(X, \| \ \|_C)$ konik normlu uzay, P normal sabiti K olan normal konik, ve $\{x_n\}$ X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i) $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n - x\|_C \to \theta,\ n \to \infty$;

ii) $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi $\Leftrightarrow \|x_n - x_m\|_C \to \theta,\ n, m \to \infty$;

iii) $x_n \to x$ ve $y_n \to y \Rightarrow \|x_n - y_n\|_C \to \|x - y\|_C,\ n \to \infty$ (Karapınar 2009).

Tam konik normlu uzaya konik Banach uzay denir. Aşağıda Karapınar (2009) tarafından konik Banach uzaylarında ispatlanan bazı teoremler verilecektir.

Teorem 3.2.21: X, $\|x\|_C = d(x, \theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt küme ve $T : C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d(x,Tx)+d(y,Ty)\le qd(x,y) \tag{3.1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $2\le q<4$ sayısı varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır (Karapınar 2009).

İspat : x_0**,** C de keyfi nokta ve $\{x_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi

$$x_{n+1}=\frac{x_n+Tx_n}{2},\ \ n=0,1,2,...$$

tanımlansın. İlk olarak

$$x_n-Tx_n=2[x_n-(\frac{x_n+Tx_n}{2})]=2(x_n-x_{n+1}) \tag{3.2}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} d(x_n,Tx_n) &= \|x_n-Tx_n\|_C \\ &= 2\|x_n-x_{n+1}\|_C = 2d(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.1) deki daraltanlık koşulu ile yukarıdaki eşitlikten

$$2d(x_{n-1},x_n)+2d(x_n,x_{n+1})\le qd(x_{n-1},x_n)$$

elde edilir. Böylece $d(x_{n+1},x_n)\le kd(x_n,x_{n-1}), k=(q-2)/2<1$ eşitsizliği görülür. Buradan $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olup bir $z\in C$ için $\{x_n\}$, z ye yakınsar. Üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(z,Tx_n) &\le d(z,x_n)+d(x_n,Tx_n) \\ &= d(z,x_n)+2d(x_n,x_{n+1}) \end{aligned}$$

ifadesi ve Teorem 3.2.20 (iii) den $Tx_n\to z$ olduğu görülür. (3.2) eşitliği düşünerek ve (3.1) deki koşulda x yerine z, y yerine x_{n+1} alarak aşağıdaki ifadeye ulaşılır.

$$d(z,Tz)+2d(x_n,x_{n+1})\le qd(z,x_n).$$

Böylece $n\to\infty$ iken limit alırsak $d(z,Tz)\le\theta$ elde edilir ve buradan $Tz=z$ dir.

Teorem 3.2.22: X , $\|x\|_C = d(x,\theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt küme ve $T : C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d(Tx,Ty) + d(x,Tx) + d(y,Ty) \le rd(x,y)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $2 \le r < 5$ sayısı varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır (Karapınar 2009).

Daha sonra ki yıllarda Moosaei ve Asadi yukardaki teoremin daraltanlık koşulunu genişletip konveks metrik uzaylarda bir ve iki dönüşüm için aşağıdaki gibi vermişlerdir.

Teorem 3.2.23: (X,d,W) tam konveks metrik uzay olsun. $C \subseteq X$ boş kümeden farklı, kapalı, konveks bir alt küme olmak üzere $f : C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$ad(x, f(x)) + bd(y, f(y)) + cd(f(x), f(y)) \le kd(x, y)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $2b - |c| \le k < 2(a+b+c) - |c|$ sayısı varsa, f nin en az bir sabit noktası vardır (Moosaei 2012).

Teorem 3.2.24: (X,d,W) konveks metrik uzay olsun. $C \subseteq X$ boş kümeden farklı bir alt küme ve $S,T : C \to C$ aşağıdaki koşulları sağlayan dönüşümler olsun:

i) $T(C) \subseteq S(C)$,

ii) $S(C)$ konveks ve tam alt uzay.

Eğer her $x, y \in C$ için

$$\alpha d(Tx,Ty) + \beta(d(Sx,Tx) + d(Sy,Ty)) + \gamma(d(Sx,Ty) + d(Sy,Tx)) \le kd(Sx,Sy)$$

olacak şekilde $2\beta + \gamma - |\gamma| - \alpha \le k < \alpha + 4\beta + 3\gamma - |\gamma|$ ve $\beta + \gamma \le 0$ olacak şekilde reel sayıları varsa, S ve T nin en az bir çakışık noktası vardır (Moosaei 2014).

Teorem 3.2.25: (X,d,W) tam konveks metrik uzay olsun. $C \subseteq X$ boş kümeden farklı, kapalı, konveks bir alt küme olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(Tx,Ty)+ed(x,Ty)+fd(y,Tx) \le kd(x,y)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde

$$\frac{b+e-|f|(1-\lambda)-|c|\lambda}{1-\lambda} \le k < \frac{a+b+c+e+f-|c|\lambda-|f|(1-\lambda)}{1-\lambda}$$

reel sayıları varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır (Asadi 2014).

Ayrıca Mutlu ve Yolcu (2013) yaptıkları çalışmada, Karapınar (2009) ve Moosaei (2012) nin teoremlerinde geçen bazı eşitsizlikleri kullanarak Φ_p operatörü yardımı ile benzer teoremler ispatlamışlardır. Teoremlerin ifadesini vermeden önce gerekli bilgiler aşağıda ifade edilmiştir.

Tanım 3.2.26: E bir vektör uzayı ve E nin üzerinde bir çarpma işlemi tanımlı olsun. Elemanların çarpımı aşağıdaki aksiyomları sağlasın. Her $x, y \in E$ için

(1) $x(yz)=(xy)z,$

(2) $x(y+z)=xy+xz,$

(3) $(x+y)z=xz+yz,$

(4) $a \in F$ için $a(xy)=x(ay)$.

Bu durumda E ye bir cebir denir. Her $x \in E$ için $ex=xe=x$ eşitliğini sağlayan $\theta \ne e \in E$ varsa E ye birimli cebir denir. Her $x, y \in E$ için $xy=yx$ ise E ye değişmeli cebir denir (Gök 2010).

Tanım 3.2.27: Normlu bir E uzayı cebir aksiyomlarını sağlasın. Her $x, y \in E$ için $\|xy\| \le \|x\|\|y\|$ ise E ye normlu cebir denir. Tam normlu cebire bir Banach cebiri denir (Gök 2010).

Örnek 3.2.28: E bir Banach uzayı ve E den E ye tanımlı tüm sürekli lineer operatörlerin kümesi $B(E)$ olsun. $S,T \in B(E)$ için $(ST)(x) = S(Tx)$ çarpımı bileşke olarak tanımlansın. $\|ST\| \leq \|S\|\|T\|$ olduğu için $B(E)$ bir Banach cebiridir. Her $x \in E$ için $I(x) = x$ birim operatörü I, E nin birim elemanıdır (Gök 2010).

Örnek 3.2.29: $E = C[0,1]$ olsun. $f, g \in C[0,1]$ ve her $x \in C[0,1]$ için $(fg)(x) = f(x)g(x)$ şeklinde tanımlansın. Sürekli iki fonksiyonun çarpımı da sürekli olduğundan $fg \in C[0,1]$ dir. $\|fg\| = \sup_{x\in[0,1]} |(fg)(x)| \leq \|f\|\|g\|$ olduğundan $C[0,1]$ bir Banach cebiridir (Gök 2010).

Tanım 3.2.30: E Banach cebiri ve $(E, \| \|_C)$ Banach uzay olsun. $\Phi_p : E \to E$, $\Phi_p(x) = \|x\|^{p-2} x$ kuralı ile artan pozitif bir dönüşümdür. Burada $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ dir. Eğer $E = \mathbb{R}$ ise $\Phi_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi_p(x) = |x|^{p-2} x$ kuralı ile bir p-Laplace dönüşümdür.

$\Phi_p : E \to E$ dönüşümünün tanımı kullanılarak aşağıdaki özellikler gösterilebilir.

(1) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ise $\Phi_p(x) \leq \Phi_p(y)$;

(2) Φ_p sürekli, birebir, örten ve ayrıca terside sürekli bir dönüşüm;

(3) Her $x, y \in E$ için $\Phi_p(xy) = \Phi_p(x)\Phi_p(y)$;

(4) Her $x, y \in E$ için $\Phi_p(x+y) \leq \Phi_p(x) + \Phi_p(y)$ dir (Mutlu and Yolcu 2013).

Teorem 3.2.31: X, $\|x\|_C = d(x,\theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. E bir Banach cebiri olmak üzere $\Phi_p : E \to E$ bir dönüşüm ve $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt kümesi olmak üzere $T : C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$\Phi_p(d(x,Tx)) + \Phi_p(d(y,Ty)) \leq k\Phi_p(d(x,y))$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $2^{p-1} \leq k < 4^{p-1}$ sayısı varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır (Mutlu and Yolcu 2013).

Teorem 3.2.32: X , $\|x\|_C = d(x,\theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. E bir Banach cebiri olmak üzere $\Phi_p : E \to E$ bir dönüşüm ve $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt kümesi olmak üzere $T : C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$a\Phi_p(d(Tx,Ty)) + b\Phi_p(d(x,Tx)) + c\Phi_p(d(y,Ty)) \leq r\Phi_p(d(x,y))$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $0 \leq \Phi_q(r) < \Phi_q(a) + 2(\Phi_q(b) + \Phi_q(c))$ sayıları varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır (Mutlu and Yolcu 2013).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde öncelikle Materyal ve Yöntem kısmında Karapınar (2009) tarafından verilen Teorem 3.2.21 ve 3.2.22 nin sadece birim dönüşümler için geçerli olduğunun ispatı verilecektir.

Teorem 4.1: X , $\|x\|_C = d(x,\theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt küme ve $T : C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d(x,Tx) + d(y,Ty) \leq qd(x,y)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $2 \leq q < 4$ sayısı varsa, T bir birim dönüşümdür.

İspat: Varsayalım ki T birim dönüşüm olmasın. O halde $x_0 \neq Tx_0$ olacak şekilde $x_0 \in C$ vardır. $x_1 = \dfrac{3x_0 + Tx_0}{4}$ alalım ve $x_0 \neq x_1$ olduğu rahatlıkla görülebilir. Ayrıca

$$x_0 - Tx_0 = 4\left(x_0 - (\frac{3x_0 + Tx_0}{4}) \right) = 4(x_0 - x_1)$$

olup $d(x_0,Tx_0) = \|x_0 - Tx_0\|_C = 4\|x_0 - x_1\|_C = 4d(x_0,x_1)$ den $d(x_0,Tx_0) = 4d(x_0,x_1)$ elde ederiz. Şimdi hipotezde x yerine x_0, y yerine x_1 koyalım

$$d(x_0,Tx_0) + d(x_1,Tx_1) \leq qd(x_0,x_1)$$

$$4d(x_0,x_1) + d(x_1,Tx_1) \leq qd(x_0,x_1)$$

$$d(x_1,Tx_1) \leq (q-4)d(x_0,x_1) < \theta$$

elde ederiz. Bu ise konik metrik tanımıyla çelişir. O halde T birim dönüşümdür.

Teorem 4.2: X , $\|x\|_C = d(x,\theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt küme ve $T: C \to C$ dönüşümü verilsin. Eğer her $x, y \in C$ için

$$d(Tx,Ty) + d(x,Tx) + d(y,Ty) \leq rd(x,y)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $2 \leq r < 5$ sayısı varsa, T bir birim dönüşümdür.

İspat: Bunu göstermek için $x_1 = \dfrac{4x_0 + Tx_0}{5}$ alarak Teorem 4.1 in ispatında olduğu gibi benzer şekilde rahatça gösterilebilir.

Aşağıda yazacağımız teoremle birlikte Karapınarın çalışmasını hem genişletip hem de teorideki sınırlamayı kaldırabiliriz.

Teorem 4.3: X , $\|x\|_C = d(x,\theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt küme olmak üzere $T: C \to C$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in C$ ve $x \neq y$ için

$$d(x,Tx) + d(y,Ty) \leq \alpha d(x,Ty) + kd(x,y)$$

olacak şekilde $\alpha < 2$ ve k reel sayıları varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır.

İspat: $\alpha < 2$ olduğundan $\alpha < \dfrac{2\gamma - k}{\gamma - 1}$ olacak şekilde $\gamma > 1$ reel sayısı vardır. Aksi taktirde her $\gamma > 1$ için $\dfrac{2\gamma - k}{\gamma - 1} \leq \alpha$ olursa $\gamma \to \infty$ iken $2 \leq \alpha$ olur. Bu ise $\alpha < 2$ kabulü ile çelişir. x_0, C de keyfi nokta ve

$$x_{n+1} = \frac{(\gamma - 1)x_n + Tx_n}{\gamma}, \quad n = 0,1,2,...$$

dizisini ele alalım. Bazı $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x_{n_0} = x_{n_0+1}$ ise $x_{n_0} = Tx_{n_0}$ olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla işlemlerimize bundan sonra her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ olarak devam edeceğiz. İlk olarak aşağıdaki

$$\begin{aligned} x_n - Tx_n &= \gamma[x_n - (\frac{(\gamma-1)x_n + Tx_n}{\gamma})] \\ &= \gamma(x_n - x_{n+1}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} x_n - Tx_{n-1} &= \frac{(\gamma-1)x_{n-1} + Tx_{n-1}}{\gamma} - Tx_{n-1} \\ &= \frac{\gamma-1}{\gamma}(x_{n-1} - Tx_{n-1}) \\ &= (\gamma-1)(x_{n-1} - x_n) \end{aligned}$$

eşitlikleriyle birlikte

$$d(x_n, Tx_n) = \|x_n - Tx_n\|_C = \gamma\|x_n - x_{n+1}\|_C = \gamma d(x_n, x_{n+1}) \tag{4.1}$$

ve

$$d(x_n, Tx_{n-1}) = \|x_n - Tx_{n-1}\|_C = (\gamma-1)\|x_{n-1} - x_n\|_C = (\gamma-1)d(x_{n-1}, x_n) \tag{4.2}$$

olduğunu görürüz. Hipotezde x yerine x_n, y yerine x_{n-1} alınırsa

$$d(x_n, Tx_n) + d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \leq \alpha d(x_n, Tx_{n-1}) + kd(x_{n-1}, x_n)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Üsteki eşitsizlikte (4.1) ve (4.2) deki eşitlikler kullanılarak

$$\gamma d(x_n, x_{n-1}) + \gamma d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha(\gamma-1)d(x_{n-1}, x_n) + kd(x_{n-1}, x_n)$$

ve

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha(\gamma-1) + k - \gamma}{\gamma} d(x_{n-1}, x_n)$$

yazılır. $\alpha < \frac{2\gamma - k}{\gamma - 1}$ olduğundan $\frac{\alpha(\gamma-1)+k-\gamma}{\gamma} < 1$ dir. Banach Daralma İlkesindeki teknik ile $\{x_n\}$ nin bir Cauchy dizisi olduğunu söyleyebiliriz ve $x^* \in C$ olmak üzere $x_n \to x^*$ dır. Ayrıca (4.1) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} d(x^*, Tx_n) &\leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_n) \\ &= d(x^*, x_n) + \gamma d(x_{n+1}, x_n) \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. $n \to \infty$ için limit alınırsa $Tx_n \to x^*$ elde edilir. En kötü ihtimal ile $x_{n_j} = x^*$ olursa $x_{n_j+1} \neq x_{n_j}$ olduğundan $x_{n_j+1} \neq x^*$ olur ve hipotezde $x = x^*, y = x_{n_j+1}$ alınırsa

$$d(x^*, Tx^*) + d(x_{n_j+1}, Tx_{n_j+1}) \leq \alpha d(x^*, Tx_{n_j+1}) + kd(x^*, x_{n_j+1})$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki ifade de $j \to \infty$ iken limit alınırsa $d(x^*, Tx^*) = \theta$ olur. Buradan $x^* = Tx^*$ eşitliğini yani T nin sabit noktasının olduğunu göstermiş oluruz.

Teorem 4.4: X , $\|x\|_C = d(x, \theta)$ normu ile bir konik Banach uzay ve P normal sabiti K olan normal konik olsun. E bir Banach cebiri olmak üzere $\Phi_p : E \to E$ dönüşümü ve $C \subseteq X$ kapalı, konveks bir alt küme olmak üzere $T : C \to C$ dönüşümü verilsin. Her $x, y \in C$ ve $x \neq y$ için

$$\Phi_p(d(x, Tx)) + \Phi_p(d(y, Ty)) \leq \alpha \Phi_p(d(x, Ty)) + k\Phi_p(d(x, y))$$

olacak şekilde $\Phi_q(\alpha) < 2$ ve k sayıları varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır.

İspat: $\Phi_q(\alpha) < 2$ olduğundan $\Phi_q(\alpha) < \frac{2\lambda - \Phi_q(k)}{\lambda - 1}$ olacak şekilde $\lambda > 1$ reel sayısı vardır. x_0, C de keyfi nokta ve

$$x_{n+1} = \frac{(\lambda - 1)x_n + Tx_n}{\lambda}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

dizisini ele alalım. Teorem 4.3 nin ispatında olduğu gibi $d(x_n,Tx_n)=\lambda d(x_{n+1},x_n)$ ve $d(x_n,Tx_{n-1})=(\lambda-1)d(x_n,x_{n-1})$ eşitlikleri geçerlidir. Hipotezde x yerine x_n, y yerine x_{n-1} alırsak ve yukardaki eşitlikleri uygularsak

$$\Phi_p(\lambda d(x_{n+1},x_n))+\Phi_p(\lambda d(x_n,x_{n-1}))\le \alpha\Phi_p((\lambda-1)d(x_n,x_{n-1}))+k\Phi_p(d(x_n,x_{n-1}))$$

elde ederiz. Burada Φ_p özelliğinden ve Φ_p nin tersinin Φ_q olduğunu düşünerek (çünkü $\Phi_q(\Phi_p(x))=x=\Phi_p(\Phi_q(x))$ olduğu tanımdan görülür.)

$$\Phi_p(\lambda d(x_{n+1},x_n))+\Phi_p(\lambda d(x_n,x_{n-1}))-\Phi_p(\Phi_q(\alpha)(\lambda-1)d(x_n,x_{n-1}))\le k\Phi_p(d(x_n,x_{n-1}))$$

$$\Phi_p[\lambda d(x_{n+1},x_n)+\lambda d(x_n,x_{n-1})-\Phi_q(\alpha)(\lambda-1)d(x_n,x_{n-1})]\le k\Phi_p(d(x_n,x_{n-1}))$$

$$d(x_{n+1},x_n)\le\frac{\Phi_q(k)+\Phi_q(\alpha)(\lambda-1)-\lambda}{\lambda}d(x_n,x_{n-1})$$

elde ederiz. λ nın seçiminden $\Phi_q(\alpha)<\dfrac{2\lambda-\Phi_q(k)}{\lambda-1}$ olup

$$\frac{\Phi_q(k)+\Phi_q(\alpha)(\lambda-1)-\lambda}{\lambda}<1$$

dir. Böylece $\{x_n\}$ Cauchy dizisidir ve $x_n\to x^*$ olacak şekilde $x^*\in C$ vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}d(x^*,Tx_n)&\le d(x^*,x_n)+d(x_n,Tx_n)\\&=d(x^*,x_n)+\lambda d(x_{n+1},x_n)\end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n\to\infty$ için limit alınırsa $Tx_n\to x^*$ dir. En kötü ihtimal ile $x_{n_j}=x^*$ olursa $x_{n_j+1}\ne x_{n_j}$ olduğundan $x_{n_j+1}\ne x^*$ olur ve hipotezde $x=x^*, y=x_{n_j+1}$ alırsak

$$\Phi_p(d(x^*,Tx^*))+\Phi_p(d(x_{n_j+1},Tx_{n_j+1}))\le\alpha\Phi_p(d(x^*,Tx_{n_j+1}))+k\Phi_p(d(x^*,x_{n_j+1}))$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu ifade, Φ_p nin özellikleri kullanılarak düzenlenirse

$$d(x^*,Tx^*)+d(x_{n_j+1},Tx_{n_j+1})-\Phi_q(\alpha)d(x^*,Tx_{n_j+1})\le\Phi_q(k)d(x^*,x_{n_j+1})$$

bulunur. $j\to\infty$ için limit alınırsa $x^*=Tx^*$ elde edilir.

Şimdi yukardaki Teorem 4.3'ün konveks metrik uzaylarda bir ve iki dönüşüm için ispatı verilecektir.

Teorem 4.5: (X,d,W) tam konveks metrik uzay olsun. $C \subseteq X$ boş kümeden farklı, kapalı, konveks bir alt küme ve $T:C \to C$ dönüşümü verilsin. Her $x,y \in C$ ve $x \neq y$ için

$$d(x,Tx)+d(y,Ty) \leq \alpha d(x,Ty)+kd(x,y)$$

olacak şekilde $\alpha < 2$ ve k reel sayıları varsa, T nin en az bir sabit noktası vardır.

İspat: $\alpha < 2$ olduğundan $\alpha < \dfrac{2\gamma - k}{\gamma - 1}$ olacak şekilde $\gamma > 1$ reel sayısı vardır. Aksi taktirde her $\gamma > 1$ için $\dfrac{2\gamma - k}{\gamma - 1} \leq \alpha$ olursa $\gamma \to \infty$ iken $2 \leq \alpha$ olur. Bu ise $\alpha < 2$ kabulü ile çelişir. $x_0 \in C$ olmak üzere

$$x_{n+1} = W(x_n, Tx_n, \frac{\gamma - 1}{\gamma}), \;\; n = 0,1,2,...$$

dizisini ele alalım. Bazı $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = x_{n+1}$ ise

$$\begin{aligned} d(Tx_n, x_n) &= d(Tx_n, x_{n+1}) \\ &= d(Tx_n, W(x_n, Tx_n, \frac{\gamma-1}{\gamma})) \\ &\leq \frac{\gamma-1}{\gamma} d(Tx_n, x_n) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(Tx_n, x_n) &\leq \frac{\gamma-1}{\gamma} d(Tx_n, x_n) \\ &\Rightarrow d(Tx_n, x_n) = 0 \\ &\Rightarrow Tx_n = x_n \end{aligned}$$

dir. Yani x_n, T nin sabit noktası olur ve ispat biter. Bundan sonra her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ alalım. Önerme 3.1.6 (ii) de $x = x_n$, $y = Tx_n$, $\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ alınırsa

$$d(x_n, Tx_n) = \gamma d(x_n, x_{n+1}) \tag{4.3}$$

elde edilir. Ayrıca üsteki eşitlik ve Önerme 3.1.6 (i) de $x = x_n$, $y = Tx_n$, $\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ alınırsa

$$d(Tx_n, x_{n+1}) = (\gamma - 1)d(x_n, x_{n+1}) \tag{4.4}$$

eşitliği bulunur. Hipotezde x yerine x_n, y yerine x_{n-1} koyarsak

$$d(x_n, Tx_n) + d(x_{n-1}, Tx_{n-1}) \leq \alpha d(x_n, Tx_{n-1}) + kd(x_{n-1}, x_n)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Üsteki ifadede (4.3) ve (4.4) deki eşitlikleri kullanırsak

$$\gamma d(x_n, x_{n-1}) + \gamma d(x_{n-1}, x_n) \leq \alpha(\gamma - 1)d(x_{n-1}, x_n) + kd(x_{n-1}, x_n)$$

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{\alpha(\gamma - 1) + k - \gamma}{\gamma} d(x_{n-1}, x_n)$$

olur. $\alpha < \frac{2\gamma - k}{\gamma - 1}$ olduğundan $\frac{\alpha(\gamma - 1) + k - \gamma}{\gamma} < 1$ dir ve Banach Daralma İlkesindeki teknik ile (x_n) nin bir Cauchy dizisi olduğunu söyleriz. X tam olduğudan $x_n \to x^*$ olacak şekilde $x^* \in X$ vardır. Ayrıca (4.3) ve üçgen eşitsizliğinden

$$d(x^*, Tx_n) \leq d(x^*, x_n) + d(x_n, Tx_n) = d(x^*, x_n) + \gamma d(x_{n+1}, x_n)$$

ifadesini yazabiliriz. $n \to \infty$ için limit alırsak $Tx_n \to x^*$ elde ederiz. En kötü ihtimal ile $x_{n_j} = x^*$ olursa $x_{n_j+1} \neq x_{n_j}$ olduğundan $x_{n_j+1} \neq x^*$ olur ve hipotezde $x = x^*, y = x_{n_j+1}$ alırsak

$$d(x^*, Tx^*) + d(x_{n_j+1}, Tx_{n_j+1}) \leq \alpha d(x^*, Tx_{n_j+1}) + kd(x^*, x_{n_j+1})$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki ifade de $j \to \infty$ için limit alırsak $d(x^*, Tx^*) = 0$ olur. Buradan $x^* = Tx^*$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.6: (X,d,W) konveks metrik uzay olsun. $C \subseteq X$ boş kümeden farklı bir alt küme ve $S,T:C\to C$ aşağıdaki koşulları sağlayan dönüşümler olsun:

(i) $T(C)\subseteq S(C)$,

(ii) $S(C)$ konveks ve tam alt uzay.

Eğer her $x,y\in C$ ve $x\neq y$ için

$$d(Sx,Tx)+d(Sy,Ty)\leq \alpha d(Sx,Ty)+kd(Sx,Sy)$$

olacak şekilde $\alpha<2$ ve k reel sayıları varsa, S ve T nin en az bir çakışık noktası vardır.

İspat: $\alpha<2$ olduğundan $\alpha<\dfrac{2\gamma-k}{\gamma-1}$ olacak şekilde $\gamma>1$ reel sayısı vardır. x_0, C de keyfi bir nokta olsun. $S(C)$ konveks bir küme olduğunundan, C kümesinde $S(x_1)=W(Sx_0,Tx_0,\dfrac{\gamma-1}{\gamma})$ olacak şekilde bir x_1 elemanı bulabiliriz. Bunu devam ettirerek C de aşağıdaki şekilde olduğu gibi bir $\{x_n\}$ dizisi elde ederiz.

$$S(x_{n+1})=W(Sx_n,Tx_n,\frac{\gamma-1}{\gamma}),\ \ n=0,1,2,...$$

Bazı $n\in\mathbb{N}$ için $x_n=x_{n+1}$ ise

$$\begin{aligned}d(Tx_n,Sx_n)&=d(Tx_n,Sx_{n+1})\\&=d(Tx_n,W(Sx_n,Tx_n,\frac{\gamma-1}{\gamma}))\\&\leq\frac{\gamma-1}{\gamma}d(Tx_n,Sx_n)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}d(Tx_n,Sx_n)&\leq\frac{\gamma-1}{\gamma}d(Tx_n,Sx_n)\\&\Rightarrow d(Tx_n,Sx_n)=0\\&\Rightarrow Tx_n=Sx_n\end{aligned}$$

dir. Yani x_n, T ve S nin çakışık noktası olur ve ispat biter. Bundan sonra her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n+1}$ alalım. Önerme 3.1.6 (ii) de $x = Sx_n$, $y = Tx_n$, $\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ alınırsa

$$d(Sx_n, Tx_n) = \gamma d(Sx_n, Sx_{n+1}) \tag{4.5}$$

elde edilir. Ayrıca üsteki eşitlik ve Önerme 3.1.6 (i) de $x = Sx_n$, $y = Tx_n$, $\lambda = \frac{\gamma - 1}{\gamma}$ alınırsa

$$d(Tx_n, Sx_{n+1}) = (\gamma - 1) d(Sx_n, Sx_{n+1})$$

veya

$$d(Tx_{n-1}, Sx_n) = (\gamma - 1) d(Sx_{n-1}, Sx_n) \tag{4.6}$$

eşitliği bulunur. Hipotezde x yerine x_n, y yerine x_{n-1} koyarsak

$$d(Sx_n, Tx_n) + d(Sx_{n-1}, Tx_{n-1}) \leq \alpha d(Sx_n, Tx_{n-1}) + k d(Sx_{n-1}, Sx_n)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Üsteki ifadede (4.5) ve (4.6) deki eşitlikleri kullanırsak

$$\gamma [d(Sx_n, Sx_{n-1}) + d(Sx_{n-1}, Sx_n)] \leq \alpha (\gamma - 1) d(Sx_{n-1}, Sx_n) + k d(Sx_{n-1}, Sx_n)$$

ve

$$d(Sx_n, Sx_{n+1}) \leq \frac{\alpha(\gamma - 1) + k - \gamma}{\gamma} d(Sx_{n-1}, Sx_n)$$

olur. $\alpha < \frac{2\gamma - k}{\gamma - 1}$ olduğundan $\frac{\alpha(\gamma - 1) + k - \gamma}{\gamma} < 1$ dir ve Banach Daralma İlkesindeki teknik ile (Sx_n) nin bir Cauchy dizisi olduğunu söyleriz. $S(C)$ tam olduğudan (Sx_n) dizisi, $S(C)$ de bir z noktasına yakınsar öyleki $z = Sp$ olacak şekilde $p \in C$ vardır. Ayrıca (4.5) ve üçgen eşitsizliğinden

$$d(z, Tx_n) \leq d(z, Sx_n) + d(Sx_n, Tx_n) = d(z, Sx_n) + \gamma d(Sx_{n+1}, Sx_n)$$

ifadesini yazabiliriz. $n \to \infty$ için limit alırsak $Tx_n \to z$ elde ederiz. En kötü ihtimal ile $x_{n_j} = p$ olursa $x_{n_j+1} \neq x_{n_j}$ olduğundan $x_{n_j+1} \neq p$ olur ve hipotezde $x = p, y = x_{n_j+1}$ alırsak

$$d(z,Tp)+d(Sx_{n_j+1},Tx_{n_j+1})\leq \alpha d(z,Tx_{n_j+1})+kd(z,Sx_{n_j+1})$$

eşitsizliğini elde ederiz. Yukarıdaki ifade de $j\to\infty$ için limit alırsak $d(z,Tp)=0$ olur. Buradan $Tp=z=Sp$ olup ispat tamamlanır.

Son olarak $d(x,Tx)+d(y,Ty)\leq \alpha d(x,Ty)+kd(x,y)$ daraltanlık koşulu için bir not yazalım.

Not 4.7: Teorem 4.5 deki koşullar sağlansın. Eğer T, x_0 noktasında sürekli ise bu nokta T nin sabit noktasıdır. Bunu göstermek için $y_0\neq x_0$ olacak şekilde bir $y_0\in C$ seçelim ve ardından $y_{n+1}=W(y_n,x_0,\frac{1}{2})$ olacak şekilde C de bir $\{y_n\}$ dizisi oluşturalım. $y_n\to x_0$ olduğu açıktır ayrıca T nin x_0 noktasında sürekli olmasından $Ty_n\to Tx_0$ dır. Daraltanlık koşuluna uygulamadan önce her $n\in\mathbb{N}$ için $y_n\neq x_0$ olduğunu tümevarım tekniği ile gösterelim.

(i) $n=0$ için $y_0\neq x_0$ olduğu şeçimimizden bellidir.

(ii) $n=k$ için $y_k\neq x_0$ olduğunu varsayalım.

(iii) $n=k+1$ için $y_{k+1}\neq x_0$ olduğunu gösterelim.

Burada $y_{k+1}=x_0$ olduğunu kabul edelim. Böylece

$$\begin{aligned} d(y_k,x_0)=d(y_k,y_{k+1})&=d(y_k,W(y_k,x_0,\frac{1}{2})) \\ &\leq \frac{1}{2}d(y_k,x_0)\Rightarrow y_k=x_0 \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ise tümavarımın ikinci adımı ile çelişir. Bundan dolayı her $n\in\mathbb{N}$ için $y_n\neq x_0$ dir. Şimdi daraltanlık koşulunda x yerine x_0, y yerine y_n yazıp $n\to\infty$ için limit alırsak $2d(x_0,Tx_0)\leq \alpha d(x_0,Tx_0)$ olup $x_0=Tx_0$ olduğu görülür.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak, Karapınar'ın 2009 yılındaki makalesindeki Teorem 3.2.21 ve Teorem 3.2.22 nin sadece T birim dönüşümü için sağlandığını gösterdik. Ardından bu teoremlerdeki sınırlandırmayı kaldırıp daha da genişlettik. Daha sonra Φ_p operatörü yardımı ile benzer daraltanlık koşulunu sağlayan ve görüntü kümesi Banach cebiri olan konik metrik uzayda tanımlanan T dönüşümünün en az bir sabit noktaya sahip olduğunu gösterdik. Son olarak, konik metrik uzayda yaptığımız çalışmayı konveks metrik uzaylara taşıyıp,

$$d(x,Tx)+d(y,Ty)\le \alpha d(x,Ty)+kd(x,y)$$

eşitsizliğini sağlayan dönüşümler için Asadi (2014) nin çalışmasındaki

$$2\beta+\gamma-|\gamma|-\alpha\le k<\alpha+4\beta+3\gamma-|\gamma|,\ \beta+\gamma\le 0$$

ve

$$\frac{b+e-|f|(1-\lambda)-|c|\lambda}{1-\lambda}\le k<\frac{a+b+c+e+f-|c|\lambda-|f|(1-\lambda)}{1-\lambda}$$

kuvvetli şartların yerine $\alpha<2$ gibi daha zayıf bir koşul altında sabit nokta ve çakışık noktanın varlığından bahsettik.

Konu ile ilgilenen araştırmacılar bu tezde konik ve konveks metrik uzayda ispatlanan teoremleri konik konveks metrik uzaylar ve yıldızıl metrik uzaylar için yeniden düzenleyebilir. Teoremlerdeki normallik şartı kaldırılarak ve mevcut daraltanlık koşulu

(i) $d(x,Tx)+d(y,Ty)\le \alpha d(y,Tx)+kd(x,y)$

(ii) $d(x,Tx)+d(y,Ty)\le \alpha d(x,Ty)+\beta d(y,Tx)+kd(x,y)$

şeklinde ve buna benzer olarak genişletilerek yeni çalışmalar yapılabilir. $\frac{k}{2}$-Lipschitz sabitli bir dönüşümün $\alpha=\beta=1$ için yukarıdaki (ii) eşitsizliğini sağladığı kolaylıkla gösterilebilir. Dolayısıyla yukarıdaki eşitsizlikleri ve bunların genelleştirmelerini sağlayan dönüşümlerle literatürdeki mevcut dönüşümler (daraltan, genişlemeyen, Lipschitzian v.s.) arasındaki bağlantılar araştırılabilir. Araştırma bulgular kısmındaki teoremlerin ispatlarında geçen $x_{n+1} = W(x_n, Tx_n, \frac{\gamma - 1}{\gamma})$ dizisi yerine $x_{n+1} = W(x_n, Ty_n, \frac{\gamma - 1}{\gamma})$, $y_n = W(x_n, Tx_n, \frac{\beta - 1}{\beta})$ şeklindeki iki adım veya üç adımdan oluşan alternative diziler seçilerek dönüşümlerin sabit noktasına yaklaşmadaki etkileri araştırılabilir. Ayrıca son bir kaç yılda Banach cebiri üzerindeki çalışmalar artış göstermektedir. Bundan dolayı araştırmacılar literatürde var olan sabit nokta teoremlerini yeniden düzenleyerek Banach cebiri üzerindeki metrik uzaylarda gösterebilirler.

KAYNAKLAR

Abuloha, M., 2009. Konik metrik uzaylar ve bazı sabit nokta teoremleri. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Agarwal, R. P., Oregan, D. and Sahu, D. R., 2009. Fixed Point Theory for Lipschitzian-type Mappings with Applications. Springer, 368p, New York.

Asadi, M., 2014. Some results of fixed point theorems in convex metric space. Nonlinear Functional Analysis and Applications, 19 (2), 171-175.

Berinde, V. Iterative Approximation of Fixed Points, 2007. Lecture Notes in Mathematics, Springer, 326p, Romania.

Beg I., Abbas M., and Kim, J. K., 2006. Convergence theorems of the iterative schemes in convex metric spaces. Nonlinear Funct. Anal. & Appl., 11 (3), 421-436.

Ciric, L., 1993. On some discontinuous fixed point theorems in convex metric spaces. Czech. Math. J., 43 (188), 319-326.

Chung, R. and Malik, P., 2014. Convergence and fixed point theorems in convex metric space: a survey. International Journal of Applied Mathematical Research, 3 (2), 133-160.

Gök, Ö., 2010. Fonksiyonel Analize Giriş. Yıldız Teknik Üniversitesi Yayınları No: YTÜ.FE.DK-10.0821, 159s, İstanbul.

Gunduz, B. and Akbulut, S., 2013. Strong convergence of an explicit iteration process for a finite family of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces. Miskolc Mathematical Notes, 14 (3), 905-913.

Huang, L. G., Zhang, X., 2007. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings. J. Math. Anal. Appl., 332 (2), 1468-1476.

Lei, D. and Xie, D., 1992. Fixed points of nonexpansive mappings on star-shaped subset of a convex metric space. Applied Mathematics and Mechanics, 13 (2), 135-141.

Karaoğlu, A., 2017. (k,h)-Konveks fonksiyonlar ve bazı integral eşitsizlikler üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu.

Karapinar, E., 2009. Fixed Point Theorems in Cone Banach Spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2009 (2009), 1-9.

Kirk, W. A., 1982. Krasnoselskii's iteration process in hyperbolic space. Numer. Funct. Analy. Optim. 4 (4), 371-381.

Moosaei, M., 2012. Fixed Point Theorems in Convex Metric Spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2012 (2012), 1-6.

Moosaei, M., 2014. Common fixed points for some generalized contraction pairs in convex metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2014 (2014), 1-8.

Mutlu, A., Yolcu, N., 2013. Fixed point theorems for Φ_p operator in cone Banach space. Fixed Point Theory and Applications, 2013 (2013), 1-6.

Radenoviç, S., Rhoades, B. E., 2009. Fixed point theorem for two non-self mappings in cone metric spaces. Computers and Mathematics with Applications, 57 (10), 1701-1707.

Rezapour, Sh., Hamlbarani, R., 2008. Some notes on the paper "Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings". J. Math. Anal. Appl., 345 (2), 719-724.

Shimizu, T., Takahashi, W., 1996. Fixed point of multivalued mappings in certain convex metric spaces. Topological Methods in Nonlinear Analysis, 8 (1), 197-203.

Takahashi, W., 1970. A convexity in metric spaces and nonexpansive mapping. I. Kodai Math. Sem. Rep., 22 (2), 142–149.

Turkoğlu, D. and Abuloha, M., 2010. Cone metric space and fixed point theorems in diametrically contractive mappings. Acta Mathematica Sinica, English Series, 26 (3), 489-496.

Wang, C. and Liu, L.W., 2009. Convergence theorems for fixed points of uniformly quasi-Lipschitzian mappings in convex metric spaces. Nonlinear Analiysis, Theory, Methods and Applications, 70 (5), 2067-2071.

Yildirim, I., Khan, S. H., 2012. Convergence theorems for common fixed points of asymptotically quasi-nonexpansive mappings in convex metric spaces. Appl. Math. and Comp. 218 (9), 4860-4866.

Yildirim, I., Khan, S. H. and Ozdemir, M., 2013. Some fixed point results for Quasi-Lipschitzian mappings in convex metric space, Journal of Nonlinear Analysis and Optimization, 4 (2), 143-148.

Yıldırım, İ., 2010. Asimptotik genişlemeyen dönüşümlerin ortak sabit noktaları için yeni yaklaşım metotları. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

ÖZGEÇMİŞ

1992 yılında Bayburt'da doğdu. İlk, orta, lise öğrenimini İstanbul'da tamamladı. 2012 yılında girdiği İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2016 yılında mezun oldu. Aynı yıl Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde Yüksek Lisans öğrenimine başladı. 2018 yılında Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı olarak Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı.