SONLU MERKEZLEYİCİ ZİNCİRİNE SAHİP GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

Tuba ÇAKMAK

Doktora Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı
Prof. Dr. Erdal KARADUMAN
Doç. Dr. A. Tuna ALTINEL
2018

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

SONLU MERKEZLEYİCİ ZİNCİRİNE SAHİP GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

Tuba ÇAKMAK

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

ERZURUM
2018

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

SONLU MERKEZLEYİCİ ZİNCİRİNE SAHİP GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

Prof. Dr. Erdal KARADUMAN danışmanlığında, Doç. Dr. A. Tuna ALTINEL ikinci danışmanlığında, Tuba ÇAKMAK tarafından hazırlanan bu çalışma 05/06/2018 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı – Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı'nda Doktora tezi olarak **oybirliği/~~oyçokluğu~~ (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Engin ÖZKAN — *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Erdal KARADUMAN — *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU — *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Tamer UĞUR — *İmza* :

Üye : Prof. Dr. İnci GÜLTEKİN — *İmza* :

Üye : Prof. Dr. Şakir AYDOĞAN — *İmza* :

Üye : Doç. Dr. Sedat İLHAN — *İmza* :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu 21.06.2018 tarih ve 25 / 32 nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN V.
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Doktora Tezi

SONLU MERKEZLEYİCİ ZİNCİRİNE SAHİP GRUPLARIN CEBİRSEL YAPISI

Tuba ÇAKMAK

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN
İkinci Danışman: Doç. Dr. A. Tuna ALTINEL

Bu tezde, sonsuz grupların çifte merkezleyicileri genelleştiren ve E_k-kılıfları olarak adlandırılan özel altgrupları üzerine çalışılmıştır. Azalan bir dizi oluşturan bu altgrup zincirinin belirli bir noktadan sonra durması için yeterli şartlar analiz edilmiştir. Bu anlamda, bir grubun nilpotent altgrubuna karşılık gelen kılıfların oluşturduğu zincirin bu altgrubun nilpotenlik sınıfıyla sınırlı olduğu ispatlanmıştır. E_k-kılıflarının ve tekrarlı merkezleyicilerin sonlu ötesi formları tanımlanarak, bir grubun hipermerkezil altgrubu için oluşturulan kılıfların azalan zincirinin stabil olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, bir $\mathfrak{M}_c$-grubun, keyfi altgrubuna karşılık gelen E_k-kılıfları zincirinin stabilliği problemi topolojik yaklaşımlarla kısmen olumlu olarak cevaplanmıştır. Kılıfların stabilliği problemi için elde edilen bu olumlu sonuçların yanı sıra genel olarak, gruplarda E_k-kılıfları zincirinin stabil olması gerekmediğini gösteren bir ters örnek bütün ayrıntıları ile inşa edilmiştir.

2018, 107 sayfa

Anahtar Kelimeler: E_k-kılıfları, $\mathfrak{M}_c$-grup, verbal topoloji.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

ALGEBRAIC STRUCTURE OF GROUPS WITH FINITE CENTRALIZER CHAIN

Tuba ÇAKMAK

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Algebra and Number Theory

Supervisor: Prof. Dr. Erdal KARADUMAN
Co Supervisor: Assoc. Prof. Dr. A. Tuna ALTINEL

In this thesis, special classes of subgroups of infinite groups that generalize double centralizers have been analyzed. They are called E_k-envelopes. Sufficient conditions have been analyzed for descending chain of this subgroups to stop after finitely many steps. In this sense, it is proved that the length of the descending chain of E_k-envelopes of a nilpotent subgroup of any group is bounded by the nilpotency class of this subgroup. The stabilization of the descending chain of a hypercentral subgroup of any group is shown by describing the transfinite forms of envelopes and iterated centralizers. Also, the stabilization problem of the chain of E_k-envelopes corresponding to a subgroup of an $\mathfrak{M}_c$-group is answered partially positively by topological approaches. In addition to these affirmative conclusions obtained for the stabilization problem of envelopes, a counter example that shows the chain of E_k-envelopes does not have to stabilize has been constructed with all details.

2018, 107 pages

Keywords: E_k-envelopes, $\mathfrak{M}_c$-group, verbal topology.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan, bilgi, destek ve sabırlarını esirgemeyen çok değerli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. Erdal KARADUMAN ve Sayın Doç. Dr. A. Tuna ALTINEL'e en içten dileklerimle sonsuz teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Doktora çalışmamın bir buçuk yıla yakın tez sürecini geçirdiğim Universite Claude Bernard Lyon 1 de sağlanan her türlü destek ve misafirperverlik için teşekkürlerimi sunarım. Ayırca bu süreçte maddi, manevi ve bilimsel hiçbir desteğini esirgemeyen ikinci danışmanım Sayın Doç. Dr. A. Tuna ALTINEL'e teşekkür etmeyi borç bilirim.

Tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım Tez İzleme Komitesine, Matematik bölümünde gerekli yardımı esirgemeyen Matematik Bölümü öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Doktora eğitimim boyunca 2211/E kodlu "Doğrudan Yurt İçi Doktora Burs Programı" ve 2214/A kodlu "Yurt Dışı Doktora Sırası Araştırma Burs Programı" ile tarafıma vermiş olduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkür etmeyi borç bilirim.

Tuba ÇAKMAK
Mayıs, 2018

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\left(C^{j}_{E_k(H)}\right)_{(k,j)}$	H altgrubunun k. kılıfına göre j. tekrarlı merkezleyicilerinin dizisi
$(G)'$	G kümesinin tümleyeni
$[G]^{\omega}$	G grubunun sonlu alt kümelerinin kümesi
$[x_1, x_2]$	x_1, x_2 elemanlarının komütatörü
$\mathbb{C}^*, \mathbb{N}^*$	Sıfırdan farklı kompleks sayılar, sıfırdan farklı doğal sayılar
$\mathfrak{C}_G$	Merkezleyici topolojisi
$\bar{A}$	A kümesinin kapanışı
$C_G(X)$	$X \subseteq G$ alt kümesinin G grubundaki merkezleyicisi
$C_G(x)$	$x \in G$ elemanının G grubundaki merkezleyicisi
$C^n_G(X)$	$X \subseteq G$ alt kümesinin G grubundaki n. tekrarlı merkezleyicisi
$E_k(H)$	H altgrubunun E_k-kılıfları
$[G, G]$	G grubunun komütatör altgrubu
$G^{(n)}$	G grubunun n. komütatör altgrubu
$GL_n(K)$	Elemanları K cisminden alınan n. dereceden genel lineer grup
G/N	G grubunun N normal altgrubuna göre bölüm grubu
$N_G(X)$	$X \subseteq G$ alt kümesinin G grubundaki normalleyicisi
$Sym_{\omega}(X)$	Sonlu desteğe sahip permütasyonların oluşturduğu grup
$[X, Y]$	X, Y alt kümelerinin komütatör altgrubu
$\|X\|$	X kümesinin kardinalitesi
$\langle X \rangle$	X alt kümesi tarafından üretilen grup
X^G	X alt kümesinin G grubundaki normal kapanışı
$\langle X \| R \rangle$	Üreteçleri X, bağıntıları R ile temsil edilen grup
X^g	Bütün x^g elemanları ile üretilen altgrup
$Z_n(G)$	Yukarı merkez serisinin n. elemanı
$\sum_{a=0}^{n} j_h(2a)$	Sıfır sayısından n sayısına kadar olan $j_h(2a)$ sayılarının toplamı
$k_x^{-1}(X)$	X alt kümesinin k_x fonksiyonuna göre ters görüntüsü
$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$	H_n altgruplarının ara kesiti
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$	H_n altgruplarının birleşimi

$\prod_{x\in\mathbb{N}} G_x$	G_x gruplarının iç direkt çarpımı
$\bigoplus_{x\in\mathbb{N}} G_x$	G_x gruplarının direkt toplamı
$\mathcal{T}_p$	Noktasal yakınsama topolojisi
$\mathcal{Z}_G', \mathcal{Z}_G''$	Kısmi Zariski topolojileri
$\mathfrak{M}_C$	Merkezleyiciler üzerinde azalan zincir şartı
$\mathfrak{T}_G$	Taimanov merkezleyici topolojisi
$\gamma_n(G)$	Aşağı merkez serisinin n. elemanı
$AutG$	G grubunun otomorfizm grubu
$G, H, G_0, \ldots$	Kümeler, gruplar, vs.
$G \setminus H$	G fark H kümesi
$G \simeq H$	G grubu ile H grubu birbirine izomorf
$H < G$	H, G grubunun bir öz altgrubu
$H \leq G$	H, G grubunun bir altgrubu
$H \trianglelefteq G$	H, G grubunun bir normal altgrubu
$H \ltimes N$	H ve N altgruplarının yarıdirekt çarpım
$Sym(X)$	X kümesi üzerindeki simetrik grup
$X \subseteq Y$	X kümesi Y kümesinin bir alt kümesi
$Z(G)$	G grubunun merkezi
$f, k, k_x \ldots$	Fonksiyonlar
$\mathcal{T}, \mathcal{T}^*, \ldots$	Topolojik uzaylar
$\mathcal{T}, \mathfrak{C}, \mathcal{C}, \ldots$	Kümeler ailesi
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$	Ordinal sayılar

1. GİRİŞ

Sonsuz mertebeli gruplara cebirsel yaklaşımlar ile ilgili olan bu tezde; modern grup teoride önemli yer tutan ve matematiksel mantığın bir kolu olan modeller teorisinde de karşımıza çıkan, merkezleyiciler üzerinde azalan zincir şartını sağlayan ve $\mathfrak{M}_c$-grup olarak adlandırılan grupların yapısı üzerine çalışılmıştır. Abel gruplar, lineer gruplar gibi birçok grup sınıfı $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip olduğu için, bu özellik uzun yıllardan beri grup teori çalışan bilim insanlarının araştırma konusu olmuştur. $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip grupların temel özellikleri Bryant (1979) çalışmasında bulunabilir.

Model teoride temel anlamda öneme sahip bir grup sınıfı olan durağan (stable) gruplar merkezleyiciler üzerinde zincir şartını sağladıklarından, $\mathfrak{M}_c$-gruplar ile model teoride de sıklıkla karşılaşılmaktadır. Matematiksel yapıların model teorik analizinde, çoğunlukla matematiksel mantık anlamında birinci mertebeden tanımlanabilirlik kavramı kullanılır. Bu matematiksel yapılar gruplar olduğunda ise, altgrupların cebirsel özelliklerinin (nilpotentlik, çözülebilirlik vb.) bu altgrupları ihtiva eden yeterince küçük üst gruplara aktarılıp aktarılamayacağı sıklıkla sorulan bir sorudur. Bu anlmada, Altınel ve Baginski (2014) bir $\mathfrak{M}_c$-grubun her nilpotent altgrubunun bu altgrup ile aynı nilpotentlik sınıfına sahip bir tanımlanabilir nilpotent altgrupta ihtiva edildiğini göstermişlerdir. Bu da, cebirsel olarak kapalı cisimler üzerindeki cebirsel grupların nilpotent altgruplarının Zariski kapanışlarının benzer bir özelliğini genelleştirir.

Altınel ve Baginski (2014), ispatlarına $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip G grubunun bir H nilpotent altgrubu ile başlamış ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $E_k(H)$ olarak gösterilen H nın üst gruplarının azalan bir zincirini inşa etmişlerdir. Kılıfın tanımlanabilirliği, $E_k(H)$ altgruplarının yapısı ve onları çevreleyen merkezleyiciler üzerindeki zincir şartı ile yakından bağlantılı olacak şekilde oluşturulmuştur.

Bu tez çalışması; Altınel and Baginski (2014) tarafından verilen tanımlanabilir kılıfların oluşturduğu azalan zincirin durması anlamına gelen, “G grup ve $H \leq G$ olmak üzere her

$l \geq k$ doğal sayısı için $E_l(H) = E_k(H)$ olacak şekilde bir k doğal sayısının var olması" şeklinde ifade edilen stabilleşme problemi üzerine kurulmuştur. Bu anlamda araç olarak, Altınel and Baginski (2014) tarafından tanımlanan ve temel fikri belli bölüm gruplarındaki çifte merkezleyiciler olan E_k-kılıfları, teknik kavram olarak ise Bryant (1979) tarafından verilen tekrarlı merkezleyiciler kullanılmıştır.

İlk olarak, problemin $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip gruplardaki yanıtı üzerinde durulmuştur. Ardından, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğinin cebirsel bir özellik olmasına rağmen, belirli bir noktadan sonra bu anlamdaki verilerin yetersiz kalmasından dolayı probleme topolojik açılardan yaklaşılmıştır. Böylece, çalışmanın cebirsel ve topolojik olmak üzere çift yönlü yürütülmesine gerek duyulmuştur.

Bu tez çalışması ile elde edilen cebirsel sonuçlara yön veren temel kavram ve gerçekler, "Definable Envelopes of Nilpotent Subgroups of Groups With Chain Conditions on Centralizers" başlıklı çalışmada yer almaktadır (Altınel and Baginski 2014). Bu çalışmaya cebirsel anlamda katkısı bulunan diğer kaynakların kısa bir özeti aşağıda verilmiştir.

Zalesski (1965), merkezleyiciler üzerinde minimal şartı sağlayan yerel sonlu gruplar üzerine çalışmıştır.

Bryant'ın (1979) çalışmasında, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip bir grubun bölüm grubunun $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip olması gerekmediği gösterilmiş ve bir $\mathfrak{M}_c$-grupta merkezleyicilerin azalan zincirinin uzunluğu üzerinde sonlu bir sınır olması gerekmediğini gösteren iki ters örnek ayrıntılı olarak verilmiştir. Yine aynı çalışmada, merkezleyiciler üzerinde minimal şartı sağlayan bir grubun yerel sonlu olması halinde; her p asalı için bu grubun Sylow p-altgruplarının eşlenik oldukları gösterilmiştir.

Merkezleyiciler üzerinde minimal şartı sağlayan grupların periyodik yerel çözülebilir olması durumu üzerine araştırmalar yapılmış ve bu grupların çözülebilir olduğu ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra, lineer gruplarla karşılaştırmayı sınırlandırmak adına bütün p asalları için değişmeli olmayan Sylow p-altgruplarına sahip bir periyodik çözülebilir $\mathfrak{M}_c$-grup örneği tanımlanmıştır (Bryant and Hartley 1979).

Belirli zincir şartını sağlayan gruplar için yerel nilpotentlik ve genel nilpotentlik arasındaki bağlantılar Derakhshan and Wagner (1997) tarafından çalışılmıştır. Bu bağlamda, merkezleyiciler üzerinde zincir şartını sağlayan bir grubun tek bir maksimal normal nilpotent altgruba sahip olduğunu (Fitting Altgrup), yani tüm normal nilpotent alt gruplar tarafından üretilen grubun yine nilpotent olmak zorunda olduğunu kanıtlamışlardır.

$\mathfrak{M}_c$-gruplar üzerine yapılan çalışmaların bir genel değerlendirmesi "Stable Groups" isimli kaynakta yer almaktadır (Wagner 1997).

Merkezleyiciler üzerinde minimal şartı sağlayan yerel nilpotent grupların hipermerkezil gruplar olduğu ve normal altgrupların merkezleyicileri üzerinde minimal şartı sağlayan bir grubun Fitting altgrubunun nilpotent olduğu ispatlanmıştır (Bludov 1998).

Wagner (1999), merkezleyiciler üzerinde minimal şartı sağlayan gruplarda nilpotentlik üzerine çalışmıştır. Diğer taraftan, yerel nilpotentliği ikili nilpotentlik ile, yerel sonluluğu da periyodiklik veya ikili sonluluk ile değiştirerek sırasıyla Bryant (1979) ve Bryant and Hartley (1979) çalışmalarının sonucunu genişletmiştir. Bu sonuçlara ek olarak John Wilson'un $\mathfrak{M}_c$ 2-grupların yerel sonlu olup olmaması ile ilgili sorusunu olumlu olarak yanıtlamıştır.

Altınel and Baginski (2014), temel fikri belli bölüm gruplarındaki çifte merkezleyiciler olan, herhangi bir G grubunun H altgrubu için $k \geq 0$ olmak üzere $E_k(H)$ ile gösterilen ve E_k-kılıfları olarak adlandırılan altgrupların azalan bir dizisi şeklinde cebirsel bir tanım vermişlerdir. Bu temel tanımda G, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip bir grup olduğunda, grubun her nilpotent altgrubu için oluşturulan E_k-kılıflarının altgrup ile aynı nilpotentlik sınıfına sahip olduklarını ve bazı model teorik yöntemler kullanarak E_k-kılıflarının tanımlanabilir olduğunu göstermişlerdir.

Öte yandan, bu çalışma ile elde edilen topolojik sonuçlara yön veren temel kavramlar ve teoremler ise “An Introduction to Differential Algebra”, “Infinite Linear Groups”, “The Verbal Topology of a Group”, “Topologizable Groups”, “Algebraically Determined Topologies on Permutation Groups” başlıklı çalışmalarda yer almaktadır (Kaplansky 1957; Wehrfritz 1973; Bryant 1977; Taimanov 1978; Banakh *et al.* 2012). Topolojik açıdan yürütülen çalışmalar sırasında aşağıda kısa özetleri verilen kaynaklardan yararlanılmıştır.

Kaplansky’nin (1957) çalışmasında, üzerinde tek elemanlı kümelerin kapalı olduğu, kapalı kümeler üzerinde minimal şartın sağlandığı ve bazı özel fonksiyonların sürekli olduğu topolojik uzayda CZ-grup olarak adlandırılan grup sınıfı tanımlanmış ve bu grup sınıfı ile ilgili bir takım gerçekler ispatlanmıştır.

“Infinite Linear Groups” isimli kaynakta CZ-gruplar ile ilgili sonuçların değerlendirmesine yer verilmektedir (Wehrfritz 1973).

Taimanov (1978), değişmeli olmayan grupların topolojikleştirilmesi amacı ile birim elemanın komşuluklarının filtresinin bir alt bazı olarak G grubunun elemanlarının merkezleyicilerinin ailesine sahip olan, G grubu üzerindeki $\mathfrak{T}_G$ grup topolojisini tanımlamıştır.

“Algebraically Determined Topologies on Permutation Groups” çalışmasında, bir X kümesinin permütasyonlarının grubu $Sym(X)$ ve onun normal altgrubu olan, bütün sonlu destekli $f: X \to X$, $supt(f) = \{x \in X | f(x) \neq x\}$ şeklindeki permütasyonları içeren $Sym_\omega(X)$ grubu üzerinde cebirsel olarak belirlenen topolojiler ile ilgili Dikran Dikranjan’ın problemleri yanıt bulmaktadır. Bunun yanı sıra, $G \subset Sym(X)$ ve $Sym_\omega(X) \subset G$ olacak şekildeki bir G grubu üzerindeki Zariski, kısmi Zariski ve noktasal yakınsama topolojileri arasındaki bağıntı verilmiştir (Banakh *et al.* 2012).

Bryant’ın (1977) çalışmasında ise; bir grubun cebirsel alt kümelerinin ailesi, grup için alt baz olarak alındığında bu ailenin grup üzerinde ürettiği topoloji verbal topoloji olarak adlandırılmıştır. Verbal topolojiye göre kapalı olan kümeler üzerindeki minimal şartı sağlayan min-kapalı (min-closed) olarak adlandırılan bir grup sınıfı tanımlamıştır. Ayrıca, min-kapalı (min-closed) olma özelliğini sağlayan grup sınıfları ile ilgili bazı sonuçlar ispatlanmıştır.

E_k-kılıfları zincirinin stabilleşmesi probleminin yanıtının araştırıldığı bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, sonuçların anlaşılabilmesi ve konunun sınırlanması açısından, çalışmanın temelini oluşturan kavramlar ve ilgili özellikler verilmiştir.

Araştırma konusunun temel materyali olan E_k-kılıfları, tekrarlı merkezleyiciler ve sonuçlar elde edilirken kullanılan teknik gerçekler Materyal ve Yöntem bölümünde sunulmaktadır.

Üç alt bölümden oluşan dördüncü bölümde, tez çalışması boyunca elde edilen sonuçlar sunulmuştur. Bu bağlamda, ilk olarak herhangi bir grubun nilpotent altgrubunu sarmalayan kılıfların zincirinin, en fazla altgrubun nilpotentlik sınıfında durduğu ispatlanmıştır. Ayrıca herhangi bir grubun nilpotent olmayan fakat çözülebilir olan altgruplarına karşılık gelen kılıfların cebirsel yapıları incelenmiştir. Bu amaçla, bir takım örnekler üzerinde çalışılmıştır. Sonuç olarak, iki boyutlu köşegen matrislerin oluşturduğu grubun genel lineer gruptaki normalleyeninin $k \geq 2$ için elde edilen E_k kılıflarının, normalleyen altgrubunda sabitlendiği ve grup çözülebilir iken kılıfın da çözülebilir olduğu; öte yandan üç ve daha büyük boyutlu köşegen matrislerin oluşturduğu grubun genel lineer gruptaki normalleyeni için elde edilen kılıfların grubun kendisinde (genel lineer grupta) sabitlendiği ve altgrup çözülebilir olduğu halde bu altgruba karşılık gelen kılıfın çözülebilir olmadığını gösteren örnekler sunulmuştur. Bu örneklerin yanı sıra, yerel nilpotent $\mathfrak{M}_c$-grup örnekleri de incelenerek, bu özellikteki gruplar için oluşturulan kılıfların nilpotent, yerel nilpotent ve hipermerkezil olması gerekmediği gösterilmiştir.

Daha sonra, Altınel and Baginski (2014) tarafından verilen bazı temel tanımların ve gerçeklerin sonlu ötesi formları tanımlanarak, kılıflar ve tekrarlı merkezleyiciler ile ilgili yeni sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar kullanılarak nilpotent grupların bir çeşit genellemesi olan hipermerkezil altgrupların kılıflarının zincirinin belirli bir noktadan sonra durduğu ispatlanmıştır. Bunun yanı sıra bu iddiaları destekleyecek nilpotent ve ardışık ordinal derecesinden hipermerkezil grup örnekleri ve ayrıntıları verilmiştir.

Böylelikle, E_k-kılıflarının oluşturduğu azalan zincirin, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip bazı grup sınıflarında stabil olduğu sonucuna varılmıştır.

Bu sonuçlara rağmen, bu altgrup zincirinin $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip bütün grup sınıflarında stabil olup olmadığı yönündeki çalışmalara devam edilirken, cebirsel anlamdaki verilerin yetersiz kalmasından dolayı problem topolojik yaklaşımlarla çözülmeye çalışılmıştır. Bu bağlamda, ilk olarak E_k-kılıflarının Verbal topoloji olarak adlandırılan topolojiye göre kapalı oldukları ispatlanmıştır. Ardından, Verbal topolojiye göre kapalı olan kümeler üzerinde minimal şartı sağlayan herhangi bir gruptaki kılıfların zincirinin belirli bir noktadan sonra durduğu doğrulanmıştır. Bu sonucu kullanarak $\mathfrak{M}_c$-gruplar sınıfına dahil olan lineer grupların herhangi bir altgrubunun kılıflarının meydana getirdiği zincirin stabil olduğu gösterilmiştir. Stabilleşme probleminin olumlu yanıta sahip olduğu bu özel hallerin yanı sıra, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip gruplarda bu problemi cevaplayabilmek için topolojik yöndeki araştırmalara devam edilmiştir. Bu kapsamda, cebirsel bir tanımlama olan $\mathfrak{M}_c$ olma özelliği ile daha yakın ilişki içerisindeki topolojiler araştırılmış ve bu topolojiler ile $\mathfrak{M}_c$- gruplar arasında bir ilişki kurulmaya çalışılmıştır. Bu anlamda, merkezleyicilerin yan kümelerinin kümesini veya yan kümelerinin kümesi ile tek nokta kümelerinin birleşimini alt baz olarak alan, Toller (2014) tarafından tanımlanan merkezleyici topolojisi üzerinde çalışılmıştır. Kapalı bir altgrubun normalleyicisi, buna bağlı olarak bir alt kümenin tekrarlı merkezleyicileri dolayısıyla da kılıfların merkezleyici topolojisine göre kapalı olup olmadığını belirleme yönünde çalışmalar yapılmıştır. Bu soruların yanıtları cebirsel olarak belirlenen bazı topolojilerde incelenmiştir. Araştırmalar esnasında merkezleyici topolojisinin yanı sıra üzerinde çalışılan topolojilerden bazıları da permütasyon grupları üzerinde cebirsel olarak belirlenen topolojilerdir. Bunlardan birkaçı; kısmi Zariski topolojileri, noktasal yakınsama topolojisi ve $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğini sağlayan gruplar ile yakın ilişki içerisinde olan merkezleyici topolojileridir. Bu topolojiler üzerinde yapılan çalışmalar sonucunda, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip bir grubun merkezinin Taimanov merkezleyici topolojisine göre hem açık hem kapalı olduğu, bir açık altgrubun normalleyicisinin, tekrarlı merkezleyicilerinin ve E_k altgruplarının Taimanov merkezleyici topolojisine göre kapalı oldukları ispatlanmıştır. Ayrıca, E_k-kılıflarının noktasal yakınsama topolojisine göre de kapalı oldukları gösterilmiştir. Gruba getirilen belirli kısıtlamalar dahilinde, $\mathcal{Z}_G'$ kısmi Zariski topolojisine göre de E_k kılıflarının kapalı oldukları ispatlanmıştır.

Özellikle topolojik anlamdaki araştırmalar ve çalışmalardan esinlenerek, genel olarak gruplarda E_k-kılıf zincirinin stabil olması gerekmediğini gösteren bir ters örnek bütün ayrıntıları ile inşa edilmiştir. Bahsi geçen örnek, merkezleyiciler üzerinde zincir şartını sağlamayan $Sym(\mathbb{N})$ grubunun bir altgrubudur.

Tartışma ve Sonuç adını alan beşinci bölümde ise; elde edilen sonuçların kısa bir özeti sunulmuş, araştırma konusu ile ilgili açık bir soru verilmiş ve bu soruya hangi tür yaklaşımlarla yanıt bulunabileceği ile ilgili önerilerde bulunulmuştur. Ayrıca, genel olarak gruplarda olumlu yanıta sahip olması gerekmeyen stabilleşme problemi için inşa edilen karşıt örneğin genel halinin elde edilebileceği bir projeden bahsedilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, tez çalışması süresince kullanılan ve elde edilen sonuçlar için gerekli olan temel kavramlar ve teoremler hatırlatılacaktır. Bu tez çalışması, cebirsel ve topolojik olmak üzere çift yönlü yürütüldüğünden, bahsedilen temel bilgiler iki alt başlık altında sunulacaktır.

2.1. Cebirsel Tanımlar ve Teoremler

Bu alt başlık ile, cebirsel yönde yürütülen çalışmalar kapsamında elde edilen sonuçlar için baz teşkil eden tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1: G bir grup olsun.

i. $c \in G$ olmak üzere, eğer $x \in G$ için $xc = cx$ eşitliği sağlanır ise x elemanı c'yi merkezler ya da c ile x elemanları birbiri ile değişmelidir denir. Buradan

$$C_G(c) = \{x \in G | xc = cx\}$$

kümesine de c elemanının G grubundaki merkezleyicisi,

ii. $X \subseteq G$ olmak üzere, eğer $g \in G$ elemanı ve her $x \in X$ için $gx = xg$ eşitliği sağlanıyor ise g elemanı X kümesini merkezler ya da g ile X'nin elemanları birbiri ile değişmelidir denir. Buradan

$$C_G(X) = \{g \in G | \forall\, x \in X, gx = xg\}$$

kümesine X alt kümesinin G grubundaki merkezleyicisi adı verilir (Nesin 2014).

Teorem 2.1.2: G grup, $X \subseteq G$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,

i. $C_G(x) \leq G$,
ii. $C_G(X) = \bigcap_{x \in X} C_G(x)$,
iii. $C_G(X) \leq G$,
iv. $X \trianglelefteq G \Rightarrow C_G(X) \trianglelefteq G$

ifadeleri sağlanır (Nesin 2014).

Teorem 2.1.3: G grup, $X, Y \subseteq G$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda,

i. $X \subseteq C_G\big(C_G(X)\big)$,
ii. $C_G\Big(C_G\big(C_G(X)\big)\Big) = C_G(X)$,
iii. $X \subseteq Y \Rightarrow C_G(Y) \subseteq C_G(X)$,
iv. $C_G(X) \subseteq C_G(Y) \Leftrightarrow C_G\big(C_G(Y)\big) \subseteq C_G\big(C_G(X)\big)$

ifadeleri doğrudur (Lennox and Roseblade 1970).

Teorem 2.1.4: G grup, I indis kümesi olmak üzere $\{H_i\}_{i \in I}$ kümesi G grubunun alt kümelerinin bir ailesi olsun. Bu durumda,

i. $\bigcap_{i \in I} C_G(H_i) = C_G(\bigcup_{i \in I} H_i)$,
ii. $\bigcup_{i \in I} C_G(H_i) \subseteq C_G(\bigcap_{i \in I} H_i)$

ifadeleri sağlanır (Lennox an d Roseblade 1970).

Tanım 2.1.5: G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere H altgrubunun merkezi,

$$Z(H) = \{z \in H | \forall\, x \in H, zx = xz\}$$

şeklinde tanımlanır (Nesin 2014).

Teorem 2.1.6: G bir grup ve $H \leq G$ olmak üzere,

i. $Z(H) \leq G$,
ii. $Z(H) = C_H(H)$

ifadeleri sağlanır (Nesin 2014).

Tanım 2.1.7: G bir grup olmak üzere, boş olmayan $X \subseteq G$ alt kümesi ve $g \in G$ için,

$$X^g = \{x^g | x \in X\} = \{g^{-1}xg | x \in X\} = g^{-1}Xg$$

olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$N_G(X) = \{g \in G | X^g = X\}$$

kümesine X alt kümesinin G grubundaki normalleyicisi adı verilir (Nesin 2014).

Teorem 2.1.8: G grup, $H \leq G$ ve $g \in G$ olmak üzere,

i. $H^g = g^{-1}Hg \leq G$,
ii. $N_G(H) \leq G$,
iii. $H \trianglelefteq N_G(H)$,
iv. $N_G(H) = G \Leftrightarrow H \trianglelefteq G$

bağıntıları doğrudur (Nesin 2014).

Tanım 2.1.9: G grup, $H, K \leq G$ olmak üzere $K \leq N_G(H)$ dır. Yani her $k \in K$ için $H^k = H$ olsun. Bu durumda K altgrubu, H altgrubunu normalize eder denir (Nesin 2014).

Tanım 2.1.10: G grup $x_1, x_2 \in G$ olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$$

elemanına x_1 ile x_2 elemanlarının komütatörü denir. Daha genel olarak $n \geq 2$ uzunluğundaki basit bir komütatör $[x_1] = x_1$ olmak üzere

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \big[[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}], x_n\big]$$

kuralı ile tanımlanır. Bu tanıma göre yararlı olabilecek kısaltılmış bir notasyon

$$\big[x,\ _n y\big] = [x, y, y, \dots, y]$$

şeklindedir (Robinson 1991).

Teorem 2.1.11: x, y, z bir G grubun elemanları olsun. Bu durumda,

i. $[x, y] = [y, x]^{-1}$,
ii. $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$,
iii. $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$,
iv. $[x, y^{-1}] = \left([x, y]^{y^{-1}}\right)^{-1}$,
v. $[x^{-1}, y] = \left([x, y]^{x^{-1}}\right)^{-1}$,
vi. $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1_G$ (Hall-Witt Özelliği)

eşitlikleri sağlanır (Robinson 1991).

Teorem 2.1.12: Herhangi bir G grubunda, her $x, y \in G$ ve her n doğal sayısı için

$$[x, y^n] = [x, y][x, y]^y \dots [x, y]^{y^{n-1}}$$

dir. Eğer grubun x ve y elemanları $z = [x, y]$ komütatörü ile değişmeli ise yani $xz = zx$ ve $yz = zy$ ise her $n, m \in \mathbb{Z}$ için

$$[x^n, y^m] = [x, y]^{nm}$$

ve

$$x^n y^n = (xy)^n [x, y]^{n(n-1)/2}$$

dir (Nesin 2014).

Tanım 2.1.13: G bir grup olmak üzere, G grubundaki bütün komütatörler tarafından üretilen komütatör altgrubu G' ile gösterilir ve

$$G' = [G, G] = \langle [a, b] : a, b \in G \rangle$$

olarak tanımlanır (Nesin 2014).

Tanım 2.1.14: G bir grup, X_1 ve X_2 kümeleri G grubunun boştan farklı alt kümeleri olsun. X_1 ve X_2 nin komütatör altgrubu adı verilen $[X_1, X_2]$,

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] : x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. Daha genel olarak $X_1, X_2, \dots$ kümeleri G grubunun boştan farklı alt kümeleri olmak üzere $n \geq 2$ için $X_1, X_2, \dots, X_n$ kümelerinin komütatör altgrubu

$[X_1, X_2, \dots, X_n] = \big[[X_1, X_2, \dots, X_{n-1}], X_n\big]$s

şeklinde tanımlanır (Robinson 1991).

Teorem 2.1.15: G bir grup ve $H, K \leq G$ olsun. Bu takdirde

i. $[H, K] = [K, H]$ olur.
ii. Eğer $H, K \trianglelefteq G$ ise $[H, K] \trianglelefteq G$ olur.
iii. G/G' abelyendir.
iv. Eğer H altgrubu K yı normalize ediyorsa $[H, K] \leq K$ olur. Dolayısıyla eğer H ve K birbirlerini normalize ediyorlarsa (örneğin G'de normallerse) $[H, K] \leq H \cap K$ olur. Ayrıca $H \cap K = 1_G$ ise, her $h \in H$ ve $k \in K$ için $hk = kh$ olur.
v. H ve K altgrupları $[H, K]$ komütatör altgrubunu normalize eder.
vi. $[G, H] \trianglelefteq G$ olur.
vii. $H = \langle X \rangle$ ve $K = \langle Y \rangle$ ise bu durumda $[H, K] = [X, Y]^{HK}$ olur.
viii. Eğer $\varphi: G \to G_1$ bir grup homomorfisiyse, her $H, K \leq G$ için,

$$\varphi([H, K]) = [\varphi(H), \varphi(K)]$$

olur.

ix. Eğer $A \trianglelefteq G$ ise $[HA/A\,, KA/A] = [H, K]A/A$ olur (Nesin 2014).

Teorem 2.1.16: G bir grup, $X \subseteq G$ ve $K \leq G$ olsun. Bu durumda,

i. $X^K = \langle X, [X, K] \rangle$,
ii. $[X, K]^K = [X, K]$,
iii. Eğer $K = \langle Y \rangle$ ise bu durumda $[X, K] = [X, Y]^K$

eşitlikleri sağlanır (Robinson 1991).

Tanım 2.1.17: G bir grup olsun. Tümevarım yöntemiyle her $n \geq 0$ için G grubunun aşağıdaki altgrupları tanımlansın:

$$G^{(0)} = G,$$

ve her $n \geq 0$ için

$$G^{(n+1)} = \left(G^{(n)}\right)'$$

olsun. Böylece G nin altgruplarının

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(n)} \geq G^{(n+1)} \geq \cdots$$

şeklinde azalan bir zinciri elde edilir. Bu şekildeki bir zincire G grubunun komütatör zinciri ve her $n \geq 0$ için $G^{(n)}$ ye G nin n. komütatör altgrubu denir (Asar vd 2009).

Tanım 2.1.18: Eğer bir G grubunun komütatör zinciri 1_G ye ulaşırsa o zaman bu zincire G grubunun komütatör serisi denir (Asar vd 2009).

Tanım 2.1.19: G bir grup, $\gamma_1(G) = G$ ve $\gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G]$ olmak üzere

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \gamma_3(G) \geq \cdots$$

şeklindeki seriye G grubunun aşağı merkez serisi denir (Robinson 1991).

Teorem 2.1.20: G bir grup ve $i, j \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:

i. $\gamma_i(G) \trianglelefteq G$,
ii. $G^{(i)} \trianglelefteq G$
iii. $\gamma_{i+1}(G) \leq \gamma_i(G)$ ve $G^{(i+1)} \leq G^{(i)}$,

iv. $G^{(i)} \leq \gamma_i(G)$,
v. $G^{(i)}/G^{(i+1)}$ bir abel grubudur,
vi. $\left(G^{(i)}\right)^{(j)} = G^{(i+j)}$ olur (Nesin 2014).

Tanım 2.1.21: G bir grup, $Z_0(G) = 1_G$ ve $Z(G/Z_n(G)) = Z_{n+1}(G)/Z_n(G)$ olmak üzere;

$$1_G = Z_0(G) \leq Z_1(G) \leq Z_2(G) \leq \cdots \leq Z_n(G) \leq Z_{n+1}(G) \leq \cdots$$

olarak tanımlanan seriye G grubunun yukarı merkez serisi denir (Robinson 1991).

Teorem 2.1.22 (Üç Altgrup Lemması): H, K, L bir G grubunun altgrupları olsun. Eğer $[H,K,L], [K,L,H], [L,H,K]$ komütatör altgruplarının ikisi G grubunun bir normal altgrubunda ihtiva ediliyorsa, üçüncüsü de aynı normal altgruptadır (Robinson 1991).

Üç altgrup lemması, yukarı ve aşağı merkez serileri ile ilgili, Teorem 2.1.23 ve Teorem 2.1.24 ile verilen oldukça yararlı bir takım özelliklerin elde edilmesine olanak sağlar.

Teorem 2.1.23: G bir grup ve $i, j \in \mathbb{N}$ olsun. Buna göre;

i. $[\gamma_i(G), \gamma_j(G)] \leq \gamma_{i+j}(G)$,
ii. $\gamma_i\left(\gamma_j(G)\right) \leq \gamma_{ij}(G)$,
iii. Eğer $j \geq 1$ ise $[\gamma_i(G), Z_j(G)] \leq Z_{j-(i+1)}(G)$,
iv. $Z_i(G/Z_j(G)) = Z_{i+j}(G)/Z_j(G)$,

ifadeleri sağlanır (Robinson 1991).

Teorem 2.1.24: G bir grup olmak üzere;

i. Her i için $Z_{i-1}(G) \leq Z_i(G) \trianglelefteq G$,
ii. Eğer $\varphi: G \to H$ bir grup homomorfizmi ise $\varphi\big(Z_i(G)\big) \leq Z_i\big(\varphi(G)\big)$ olur. Özel olarak bu homomorfizm birebir ise eşitlik olur,
iii. Her $i \geq 0$ için $[\gamma_i(G), Z_{i+1}(G)] = 1_G$ dir (Nesin 2014).

Tanım 2.1.25: Eğer bir n doğal sayısı için $Z_n(G) = G$ oluyorsa, G grubuna nilpotent grup adı verilir. Eğer n bu eşitliği sağlayan en küçük doğal sayı ise, G ye n. dereceden ya da n-nilpotent grup, n sayısına da G grubunun nilpotentlik sınıfı denir ve $c(G) = n$ şeklinde gösterilir (Nesin 2014).

Teorem 2.1.26: G bir grup ve i bir doğal sayı olsun. G grubunun nilpotent olması için gerek ve yeter şart G/Z_i grubunun nilpotent olmasıdır. Eğer $Z_i \neq G$ ise, $c(G) = c(G/Z_i) + i$ olur (Nesin 2014).

Teorem 2.1.27: G grup olmak üzere,

i. Eğer $G^n = 1_G$ ise, her i için $G^{n-i} \leq Z_i(G)$ olur. Dolayısıyla $Z_n(G) = G$ dir.
ii. Eğer $Z_n(G) = G$ ise $G^i \leq Z_{n-i}(G)$ olur. Dolayısıyla $G^n = 1_G$ dir.
iii. Eğer $G^n = 1_G$ ise G en fazla n. dereceden nilpotenttir. Eğer n bu eşitliği sağlayan en küçük doğal sayı ise G tam olarak n. dereceden nilpotent olur (Nesin 2014).

Teorem 2.1.28: $Z_i(G)$ grubu en fazla i. dereceden nilpotenttir (Nesin 2014).

Tanım 2.1.29: G bir grup olsun. $G_0 = 1_G$ olmak üzere

$$1_G = G_0 \lhd G_1 \lhd G_2 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

G grubunun bir alt normal serisi olsun. Eğer her $0 \leq i < n$ için G_{i+1}/G_i abel ise G grubuna çözülebilir grup denir. Eğer n bu özelliği sağlayan en küçük doğal sayı ise G ye n. dereceden çözülebilir grup ve n doğal sayısına da G grubunun çözülebilirlik sınıfı adı verilir. G grubunun bu şekildeki serilerinin en küçük uzunluğuna G nin komütatör uzunluğu denir (Robinson 1991).

Teorem 2.1.30: Nilpotent gruplar çözülebilir gruplardır. Nilpotentlik derecesi n olan bir grubun, çözünürlük derecesi $n \leq 2^m$ eşitsizliğini sağlayan en küçük m doğal sayısından küçük eşittir, yani çözünürlük derecesi $\leq \lceil log_2(n+1) \rceil$ dir (Nesin 2014).

Teorem 2.1.31: Asal bir p sayısı için sonlu p-grupları nilpotenttir. Ayrıca grubun eleman sayısı $n \geq 2$ için p^n ise, nilpotent sınıfı en fazla $n-1$ dir (Nesin 2014).

Teorem 2.1.32: Eğer G nilpotent bir grup ve $H < G$ ise $H < N_G(H)$ olur (Nesin 2014).

Teorem 2.1.33: G grubunun en fazla $n.$ dereceden çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul $G^{(n)} = 1_G$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Eğer $G^{(n)} = 1_G$ fakat $G^{(n-1)} \neq 1_G$ ise G grubu $n.$ dereceden çözülebilir olur (Nesin 2014).

Teorem 2.1.34: G bir grup ve $N \lhd G$ olsun.

i. Eğer G grubunun çözülebilirlik derecesi n ise, N ve G/N en fazla $n.$ derceden çözülebilir olur.
ii. Eğer N ve G/N çözülebilir gruplarsa o zaman G çözülebilir bir gruptur. Ayrıca G nin çözülebilirlik sınıfı, N ve G/N gruplarının çözülebilirlik sınıflarının toplamından küçük eşittir.
iii. Eğer G grubu $n.$ dereceden çözülebilirse ve $0 \leq i \leq n$ ise, o zaman $G^{(i)}$ altgrubu $(n-i).$ dereceden çözülebilirdir (Nesin 2014).

Tanım 2.1.35: G bir grup olmak üzere, G grubunun her sonlu üreteçli altgrubu nilpotent ise, G grubuna yerel nilpotent grup denir (Robinson 1991).

Tanım 2.1.36: G bir grup olmak üzere, G grubunun her sonlu üreteçli altgrubu çözülebilir ise, G grubuna yerel çözülebilir grup denir (Robinson 1991).

Tanım 2.1.37: : Genel olarak P ve Q grubun yapısal özelliklerini göstermek üzere G grubunun P den Q ya (P by Q) şeklinde adlandırılması için gerek ve yeter şart $H \trianglelefteq G$ için

i. H normal altgrubunun P özelliğini sağlaması,
ii. G/H bölüm grubunun Q özelliğini sağlamasıdır (Wagner 1997).

Tanım 2.1.38: G bir grup olmak üzere, G grubunun tüm normal nilpotent altgrupları ile üretilen altgruba G grubunun Fitting altgrubu denir ve $Fit\, G$ ile gösterilir (Robinson 1991).

Tanım 2.1.39: Λ kümesi $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı ile kısmi sıralı bir küme olsun. Λ kümesinin boş olmayan her Λ_0 alt kümesi en az bir maksimal eleman içeriyorsa, yani Λ_0 kümesinin hiçbir elemanı bu elemandan sonra yer almıyorsa, Λ kümesi maksimal şartı sağlar denir. Eğer Λ kümesinde $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$ şeklinde sonsuz artan bir zincir yok ise, Λ kümesi artan zincir şartını sağlar denir (Robinson 1991).

Tanım 2.1.40: Λ kümesi $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı ile kısmi sıralı bir küme olsun. Λ kümesinin boş olmayan her Λ_0 alt kümesi en az bir minimal eleman içeriyorsa, yani Λ_0 kümesinin hiçbir elemanı bu elemandan önce yer almıyorsa, Λ kümesi minimal şartı sağlar denir. Eğer Λ kümesinde $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots$ şeklinde sonsuz azalan bir zincir yok ise, Λ kümesi azalan zincir şartını sağlar denir (Robinson 1991).

Tanım 2.1.41: Bir G grubunun merkezleyicilerinin kümesini $\mathfrak{C}(G)$ ile gösterelim. Kapsama bağıntısı $\mathfrak{C}(G)$ üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlar. $\mathfrak{C}(G)$ nin bir eleman çiftinin infimumu

$$C(M_1) \wedge C(M_2) = C(M_1) \cap C(M_2) = C(M_1 \cup M_2)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathfrak{C}(G)$ nin $C(M_1)$ ve $C(M_2)$ elemanlarının $C(M_1) \vee C(M_2)$ supremumu, $C(M_1)$ ve $C(M_2)$ yi ihtiva eden tüm merkezleyicilerinin arakesiti olarak tanımlanır. Bu durumda $C(M_1) \vee C(M_2)$, $C(M_1)$ ve $C(M_2)$ elemanlarını ihtiva eden merkezleyiciler arasında en küçük olanıdır.

C ve C', $\mathfrak{C}(G)$ den alınan ve C, C' de ihtiva edilecek şekildeki iki eleman ise $C < C'$ olur. Her $i = 0,1,2, \dots, m$ için C_i bir merkezleyici ise bu durumda $C_0, C_1, C_2, \dots, C_m$ için

$$C_0 > C_1 > C_2 > \cdots > C_m$$

zinciri, m uzunluğunda merkezleyici zincir olarak adlandırılır (Duncan *et al.* 2005).

Teorem 2.1.42: Bir G grubunun merkezleyiciler üzerinde minimal şartı sağlaması için gerek ve yeter şart merkezleyiciler üzerinde maksimal şartı sağlamasıdır (Bryant 1979).

Teorem 2.1.43: Bir G grubunun merkezleyiciler üzerinde minimal şartı sağlaması için gerek ve yeter şart G grubunun her A alt kümesi için $C_G(A) = C_G(A_0)$ olacak şekilde A nın bir sonlu A_0 alt kümesinin var olmasıdır (Bryant 1979).

Tanım 2.1.44: d bir tamsayı olmak üzere, G grubunun bir merkezleyici zincirinin uzunluğu d ve uzunluğu d den büyük olan hiçbir merkezleyici zinciri yoksa bu durumda G grubu sonlu merkezleyici boyutuna sahiptir denir ve $cdim(G) = d$ şeklinde gösterilir. Eğer böyle bir d tamsayısı yoksa $cdim(G) = \infty$ olarak tanımlanır (Duncan *et al.* 2005).

Örnek 2.1.45: Sonlu merkezleyici boyutuna sahip gruplara örnek olarak;

- Abel gruplar,

- Değişmeli transitive gruplar (Birimden farklı elemanların kümesi üzerinde değişme özelliğinin bir denklik bağıntısı olduğu gruplar),
- Bir cisim üzerinde tanımlı genel lineer gruplar,
- Sonlu üretilmiş abelden nilpotente (abel-by-nilpotent) gruplar

verilebilir.

Tanım 2.1.46:

i. Bir α kümesi geçişmeli ve bu kümedeki eleman olma bağıntısına göre iyi sıralı ise α kümesine bir ordinal sayı,

ii. Bir α ordinal sayısı için $\alpha \cup \{\alpha\} = \alpha + 1$ kümesi de bir ordinal olup bu kümeye α nın ardışık ordinali,

iii. Sıfırdan farklı bir λ ordinali kendisinden önce gelen tüm ordinallerin birleşimi; yani

$$\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \alpha$$

ise λ ya limit ordinal denir (Cameron 1999).

Ordinal sayılar için de tümevarım uygulamak mümkündür ve oldukça önemlidir.

Teorem 2.1.47:

i. (Sonlu Ötesi Tümevarım Prensibi):

P ordinallerin bir özelliği olsun. Bütün $\beta < \alpha$ ordinalleri için $P(\beta)$ yı doğru kılan bir α ordinali için, $P(\alpha)$ nın da doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda $P(\alpha)$ bütün ordinaller için doğrudur.

ii. (Sonlu Ötesi Tümevarım Prensibinin İkinci Versiyonu):

P ordinallerin bir özelliği olsun. Varsayalım ki

- $P(0)$ için sağlansın.
- Herhangi α ordinali için $P(\alpha)$, $P(\alpha+1)$ in sağlanmasını gerektirsin.
- λ limit ordinal ve her $\beta < \lambda$ için $P(\beta)$ sağlanır ise $P(\lambda)$ da sağlanır.

Bu durumda tüm α ordinalleri için $P(\alpha)$ sağlanır (Cameron 1999).

Tanım 2.1.48: G bir grup olmak üzere,

i. G grubunun sonlu ötesi genişletilmiş yukarı merkez serisi

$$Z_0(G) = 1_G \text{ ve } Z_{\alpha+1}(G)/Z_\alpha(G) = Z(G/Z_\alpha(G))$$

genel kuralları ile birlikte

$$Z_\lambda(G) = \bigcup_{\alpha<\lambda} Z_\alpha(G)$$

şeklindeki tamlılık şartı ile tanımlanır. G grubunun kardinalitesi aşılamayacağndan,

$$Z_\beta(G) = Z_{\beta+1}(G) = \cdots$$

olacak şekilde bir β ordinal vardır. Bu şekildeki G grubunun en uç altgrubu G grubunun hipermerkezi olarak adlandırılır. $Z_\alpha(G)$ ye de G grubunun α-merkezi denir.

ii. Sonlu ötesi yukarı merkez serisi grubun kendisinde durursa, bu gruba hipermerkezil grup denir (Robinson 1991).

Teorem 2.1.49: Her hipermerkezil grup yerel nilpotenttir (Robinson 1991).

Teorem 2.1.50: G, yerel nilpotent $\mathfrak{M}_c$-grup olsun. Bu durumda G çözülebilirdir (Bryant 1979).

Teorem 2.1.51: G, yerel nilpotent $\mathfrak{M}_c$-grup olsun. Bu durumda G hipermerkezildir (Bludov 1998).

Tanım 2.1.52: X boştan farklı bir küme olmak üzere, X ten X e giden birebir ve örten fonksiyonlardan (yani permütasyonlardan) oluşan küme bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba simetrik grup adı verilir ve $SymX$ şeklinde gösterilir (Nesin 2014).

Tanım 2.1.53: $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplar olmak üzere

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} G_n = G_1 \oplus G_2 \oplus \ \dots \oplus G_n = \{(g_1, g_2, \dots, g_n) | g_i \in G_i, 1 \leq i \leq n\}$$

kümesi, $(g_1, g_2, \dots, g_n), (g_1', g_2', \dots, g_n') \in \underset{n\in\mathbb{N}}{\oplus} G_n$ için

$$(g_1, g_2, \dots, g_n)(g_1', g_2', \dots, g_n') = (g_1 g_1', g_2 g_2', \dots, g_n g_n')$$

şeklinde tanımlanan işleme göre bir grup oluşturur. Bu gruba $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplarının direkt toplamı (direkt çarpımı) denir (Karakaş 2010).

Tanım 2.1.54: G bir grup, $H_1, H_2, \dots, H_n \leq G$ olmak üzere

i. $G = H_1 H_2 \dots H_n$,
ii. Her $i \neq j$, $h_i \in H_i$, $h_j \in H_j$ için $h_i h_j = h_j h_i$,
iii. Her $i = 1,2, \dots, n-1$ için $(H_1 H_2 \dots H_i) \cap H_{i+1} = \{1_G\}$

koşulları sağlanıyorsa G grubu $H_1, H_2, \dots, H_n$ altgruplarının iç direkt çarpımıdır denir ve $G = H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n = \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n$ şeklinde gösterilir (Karakaş 2010).

Tanım 2.1.55: G bir grup olmak üzere, $N \trianglelefteq G$ ve $G = HN$ ve $H \cap N = 1_G$ olacak şekilde bir H altgrubunun olduğunu varsayalım. Bu durumda G ye H ve N nin iç yarıdirekt çarpımı adı verilir ve

$$G = H \ltimes N \text{ veya } G = N \rtimes H$$

olarak gösterilir. Tersine bir $\alpha: H \to AutN$ homomorfizimi ile birlikte H ve N gruplarının verildiğini varsayalım. $G = H\ {}_{n}\!\ltimes N$ (veya $N\ {}_{n}\!\rtimes H$) dış yarıdirekt çarpımı; $h \in H$ ve $n \in N$ olmak üzere

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2) = \left(h_1 h_2, {n_1}^{\alpha(h_2)} n_2\right)$$

grup işlemi ile birlikte bütün (h, n) sıralı ikililerinin kümesidir. Burada birim eleman $(1_H, 1_N)$ ve ters eleman $(h, n)^{-1} = \left(h^{-1}, (n^{-1})^{\alpha(h)^{-1}}\right)$ şeklindedir (Robinson 1991).

Tanım 2.1.56: G bir grup ve X boş olmayan bir küme olsun. $G \times X$ ten X e

$$*: G \times X \to X, (g, x) \to g * x$$

fonksiyonu,

i. Her $x \in X$ için, $e * x = x$,
ii. Her $x \in X$ ve $g, h \in G$ için $(gh) * x = g * (h * x)$

koşullarını sağlıyorsa, bu fonksiyona G nin X üzerine bir etkisi denir. X kümesine de bir G-küme denir (Karakaş 2010).

2.2. Topolojik Tanımlar ve Teoremler

Bu bölümde, elde edilen topolojik sonuçlar için gerekli olan temel ve topolojik tanımlar, bunların cebirsel kavramlar ile bağlantılarını gösteren bazı önermeler ve ispatları verilecektir.

Tanım 2.2.1: $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere, X in G_i alt kümelerinden meydana gelen bir alt kümeler ailesi $\mathcal{T}$ olsun. $\mathcal{T}$ kümeler ailesinin X üzerinde bir topoloji meydana getirmesi için gerek ve yeter şart

- $X \in \mathcal{T}$ ve $\emptyset \in \mathcal{T}$
- $\bigcap_{i=1}^{m} G_m \in \mathcal{T}$
- $\bigcup_i G_i \in \mathcal{T}$

aksiyomlarının sağlanmasıdır. Bu durumda, $\mathcal{T}$ kümeler ailesinin elemanlarına açık kümeler ve $(X, \mathcal{T})$ ikilisine de topolojik uzay adı verilir. Bu tanıma denk olarak, verilen şartların tümleyenleri olan

- $\emptyset \in \mathcal{T}$ ve $X \in \mathcal{T}$
- $\bigcup_{i=1}^{m} G_m \in \mathcal{T}$
- $\bigcap_i G_i \in \mathcal{T}$

aksiyomları da X kümesi üzerinde bir topoloji meydana getirir. Bu durumda, $\mathcal{T}$ kümeler ailesinin elemanlarına kapalı kümeler ve $(X, \mathcal{T})$ ikilisine de topolojik uzay adı verilir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.2.2: X bir topolojik uzay olmak üzere, $\forall x, y \in X$ için

$$x \in U \ \wedge y \notin U$$
$$y \in V \ \wedge x \notin V$$

olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa, bu topolojik uzaya T_1-uzayı denir (Bourbaki 1966).

Teorem 2.2.3: $(X,\mathcal{T})$ ve $(Y,\mathcal{T}^*)$ birer topolojik uzay olsun.

i. $f: X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart Y nin her $\mathcal{T}^*$-kapalı (açık) H kümesinin $f^{-1}(H)$ ters görüntüsünün X de bir $\mathcal{T}$-kapalı (açık) kümesi olmasıdır, yani; $\forall\, H \in \mathcal{T}^*$ kapalı kümesi için $f^{-1}(H) \in \mathcal{T}$ olmasıdır.

ii. $(Y,\mathcal{T}^*)$ topolojik uzayının bir bazı $\mathfrak{B}$ olmak üzere, $f: X \to Y$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter şart $\forall\, U' \in \mathfrak{B}$ için $f^{-1}(U')$ ters görüntüsünün X de $\mathcal{T}$-kapalı (açık) kümesi olmasıdır (Bourbaki 1966).

Teorem 2.2.4: $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayının bir T_1-uzayı olması için gerek ve yeter şart bu uzaydaki tek nokta kümelerinin kapalı olmasıdır (Bourbaki 1966).

Tanım 2.2.5: Her tek elemanlı kümenin kapalı olduğu ve kapalı kümeler üzerinde azalan zincir şartının sağlandığı uzaya Z-uzayı denir (Kaplansky 1957).

Tanım 2.2.6: G hem bir grup hem de topolojik uzay olsun. Eğer her $g, h \in G$ için

$$f: G \times G \to G, f(g,h) = gh$$
$$k: G \to G, k(g) = g^{-1}$$

dönüşümleri sürekli iseler G grubuna topolojik grup denir (Bourbaki 1966).

Tanım 2.2.7: Üzerinde tek elemanlı kümelerin kapalı olduğu, kapalı kümeler üzerinde minimal şartın sağlandığı ve her $a \in G$ için $f: G \to G$

$$x \to x^{-1}, \qquad x \to ax, \qquad x \to xa, \qquad x \to x^{-1}ax$$

fonksiyonlarının sürekli olduğu bir topoloji tanımlanan G grubuna CZ-grup denir (Kaplansky 1957).

Dikranjan and Toller'in (2012) "Markov's problems through the looking glass of Zariski and Markov topologies" başlıklı çalışmasında, Markov (1944) tarafından verilen aşağıdaki tanım yer almaktadır.

Tanım 2.2.8: G grup, $X \subseteq G$ olsun. Buna göre;

i. $g_1, g_2, \dots, g_n \in G$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ olmak üzere

$$X = \{x \in G | g_1 x^{\varepsilon_1} g_2 x^{\varepsilon_2} \dots\ g_n x^{\varepsilon_n} = e_G\}$$

olacak şekilde bir $n > 0$ tamsayısı varsa X kümesine temel cebirsel alt küme,

ii. X, G grubunun temel cebirsel alt kümelerinin sonlu bir birleşimi ise X kümesine toplamsal cebirsel alt küme,

iii. X, G grubunun toplamsal cebirsel alt kümelerinin bir arakesiti ise X kümesine cebirsel alt küme denir (Dikranjan and Toller 2012).

Tanım 2.2.9: G grup olmak üzere,

i. G grubunun cebirsel alt kümelerinin ailesi, G için bir alt baz olarak alındığında bu alt kümeler ailesinin G üzerinde ürettiği topolojiye verbal topoloji,

ii. Verbal topolojide kapalı kümeler üzerinde minimal şartı sağlayan gruba min-kapalı (min-closed) grup denir (Bryant 1977).

Tanım 2.2.10: G grup olmak üzere,

i.Elemanları temel cebirsel alt kümeler olan

$$\mathcal{C} = \{gC_G(a) | a, g \in G\}$$

kümesi alınsın. $\mathfrak{C}_G$, kapalı kümeler için $\mathcal{C}$ kümeler ailesini alt baz olarak alan bir merkezleyici topolojisi olarak adlandırılır.

ii. Elemanları temel cebirsel alt kümeler olan

$$\mathcal{C} = \{gC_G(a) | a, g \in G\} \cup \big\{\{g\} \big| g \in G\big\}$$

kümesi alınsın. $\mathfrak{C}_G$, kapalı kümeler için $\mathcal{C}$ kümeler ailesini alt baz olarak alan bir merkezleyici topolojisi olarak adlandırılır (Toller 2014).

Tanım 2.2.11: G grup ve 1_G grubun birim elemanı olmak üzere,

i. $a, b \in G$ ve $b^2 = 1_G$ olmak üzere alt baz olarak

$$\{x \in G | xbx^{-1} \neq aba^{-1}\}$$

kümelerinin ailesi alınarak üretilen topoloji $\mathcal{Z}_G''$ kısmi Zariski topolojisi,

ii. $a, b, c \in G$ ve $b^2 = c^2 = 1_G$ olmak üzere alt baz olarak

$$\{x \in G | xbx^{-1} \neq aba^{-1}\} \text{ ve } \{x \in G | (xcx^{-1})b(xcx^{-1}) \neq b\}$$

kümelerinin ailesi alınarak üretilen topoloji $\mathcal{Z}_G'$ kısmi Zariski topolojisi, olarak adlandırılır (Banakh *et al.* 2012).

Aşağıdaki merkezleyici topolojisi tanımı Taimanov (1978) tarafından verilmiştir (Banakh *et al.* 2012).

Tanım 2.2.12: G bir grup ve $a, b \in G$ olmak üzere,

$$\{x \in G | xbx^{-1} = aba^{-1}\}$$

kümelerinin ailesi alt baz olarak alınıp üretilen topoloji G grubunun $\mathfrak{T}_G$ merkezleyici topolojisi olarak adlandırılır (Banakh *et al.* 2012).

Aşağıdaki Teorem Taimanov (1978) tarafından verilmiştir.

Teorem 2.2.13: $A \in [G]^{<\omega}$, G grubunun sonlu bir alt kümesi ve A alt kümesinin G grubundaki

$$C_G(A) = \bigcap_{a \in A} C_G(a)$$

merkezleyicisini alalım. Bu durumda G grubunun altgruplarının

$$\mathcal{C} = \{C_G(A) | A \in [G]^{<\omega}\}$$

ailesi, sonlu arakesitler altında kapalıdır. Böylece $\mathfrak{T}_G$ merkezleyici topolojisi 1_G de bir komşuluk tabanı olarak $\mathcal{C}$ ye sahiptir, yani $B_{\mathfrak{T}_G} = \mathcal{C}$ dir (Dikranjan and Toller 2012).

İspatları tarafımızdan verilen Teorem 2.2.14 ve Teorem 2.2.16 Taimanov (1978) tarafından ifade edilmiştir.

Teorem 2.2.14: $(G, \mathfrak{T}_G)$ topolojik uzayı için G topolojik gruptur (Banakh *et al.* 2012).

İspat: G grubunun topolojik grup olduğunu göstermek için, her $g, h \in G$ için

$$f: G \times G \to G, f(x, y) = xy$$

$$k: G \to G, k(x) = x^{-1}$$

fonksiyonlarının sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak k fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterilsin. Bunun için merkezleyici topolojisinden alınan taban elemanlarının k fonksiyonu altındaki ters görüntüsünün yine bir taban elemanı olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. $A \subset G$ sonlu olduğundan $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ şeklinde alınsın. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere herhangi $a_i \in A$ için

$$\begin{aligned} k^{-1}\big(C_G(a_i)\big) &= \{x \in G | k(x) \in C_G(a_i)\} \\ &= \{x \in G | x^{-1} \in C_G(a_i)\} \\ &= \{x \in G | x \in C_G(a_i)\} \end{aligned}$$

olduğundan $k^{-1}\big(C_G(a_i)\big) \in \mathcal{C}$ dir. O halde

$$\begin{aligned} k^{-1}\big(C_G(A)\big) &= k^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} C_G(a_i)\right) \\ &= k^{-1}\big(C_G(a_1) \cap C_G(a_2) \cap \dots \cap C_G(a_n)\big) \\ &= k^{-1}\big(C_G(a_1)\big) \cap k^{-1}\big(C_G(a_2)\big) \cap \dots \cap k^{-1}\big(C_G(a_n)\big) \end{aligned}$$

olup, $\mathcal{C}$ alt tabanından alınan sonlu sayıda elemanın arakesiti yine $\mathcal{C}$ alt tabanında olacağından $k^{-1}\big(C_G(A)\big) \in \mathcal{C}$ dir. O halde k fonksiyonu süreklidir.

Şimdi de f fonksiyonunun sürekliliği incelenirse; $A \in [G]^{<\omega}$ olduğundan $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ olarak alınabilir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere herhangi $a_i \in A$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(C_G(a_i)\big) &= \{(x,y) \in G \times G | f(x,y) \in C_G(a_i)\} \\ &= \{(x,y) \in G \times G | xy \in C_G(a_i)\} \\ &= \{(x,y) \in G \times G | x \in C_G(a_i)y^{-1}\} \\ &= \{(x,y) \in G \times G | y \in x^{-1}C_G(a_i)\} \end{aligned}$$

olduğundan

$$xy \in C_G(a_i) \Leftrightarrow (x,y) \in (C_G(a_i)y^{-1}) \times \left(x^{-1}C_G(a_i)\right) \in \mathcal{C}$$

yani $f^{-1}\left(C_G(a_i)\right) \in \mathcal{C}$ dir. O halde

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(C_G(A)\right) &= f^{-1}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left((C_G(a_i)y^{-1}) \times \left(x^{-1}C_G(a_i)\right)\right)\right)\right) \\ &= \left(f^{-1}\left((C_G(a_1)y^{-1}) \times \left(x^{-1}C_G(a_1)\right)\right) \cap \ldots \right. \\ &\qquad \left. \cap f^{-1}\left((C_G(a_n)y^{-1}) \times \left(x^{-1}C_G(a_n)\right)\right)\right) \end{aligned}$$

olup $\mathcal{C}$ alt taban olduğundan sonlu sayıdaki elemanının kesişimi $\mathcal{C}$ dedir. Dolayısıyla $f^{-1}\left(C_G(A)\right) \in \mathcal{C}$ olduğundan f fonksiyonu da süreklidir. O halde G topolojik gruptur.

Tanım 2.2.15: G grup olmak üzere alt taban olarak

$$G(x,y) = \{g \in G | g(x) = y\}$$

kümelerini alarak üretilen topolojiye G grubu üzerindeki noktasal yakınsama topolojisi adı verilir, $\mathcal{T}_p$ ile gösterilir (Banakh *et al.* 2012).

Teorem 2.2.16: $\left(G, \mathcal{T}_p\right)$ topolojik uzayı için G topolojik gruptur (Banakh *et al.* 2012).

İspat: G grubunun topolojik grup olduğunu göstermek için, her $g, h \in G$ için

$$f: G \times G \to G, f(x,y) = xy$$
$$k: G \to G, k(x) = x^{-1}$$

fonksiyonlarının sürekli olduğu gösterimelidir. İlk olarak, k fonksiyonunun sürekli olduğu ispatlanacaktır. Bunun için noktasal yakınsama topolojisinden alınan taban elemanlarının k fonksiyonu altındaki ters görüntüsünün yine bir taban elemanı olduğu görülmelidir. Buna göre

$$\begin{aligned} k^{-1}\big(G(x,x)\big) &= \{g \in G | k(g) \in G(x,x)\} \\ &= \{g \in G | g^{-1} \in G(x,x)\} \\ &= \{g \in G | g \in G(x,x)\} \end{aligned}$$

olduğundan $k: G \to G, k(x) = x^{-1}$ fonksiyonu süreklidir.

Şimdi de f fonksiyonunun sürekliliği incelenirse:

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(G(x,y)\big) &= \{(g,h) \in G \times G | f(g,h) \in G(x,y)\} \\ &= \{(g,h) \in G \times G | gh \in G(x,y)\} \\ &= \{(g,h) \in G \times G | g \in G(x,y)h^{-1}\} \\ &= \{(g,h) \in G \times G | h \in g^{-1}G(x,y)\} \\ &\Rightarrow (g,h) \in (G(x,y)h^{-1}) \times \big(g^{-1}G(x,y)\big) \end{aligned}$$

yazılır. Öte yandan $g, h \in G(x,y)$ olsun. O halde

$$(g^{-1}h)(x) = g^{-1}\big(h(x)\big) = g^{-1}(y) = x$$

olduğundan, $g^{-1}h \in G(x,x)$ dir. Dolayısıyla $h \in gG(x,x)$ yazılır. h keyfi bir eleman olduğundan $G(x,y)$ kümesi, $G(x,x)$ in sol yan kümesidir. Benzer muhakeme ile $G(x,y)$ kümesi, $G(y,y)$ nin sağ yan kümesi olur. Bu bilgiler ışığında f fonksiyonunun sürekliliğine dönülürse $k, k' \in G(x,y)$ olmak üzere

$$(g,h) \in (G(x,y)h^{-1}) \times \big(g^{-1}G(x,y)\big) \Rightarrow (g,h) \in (kG(x,x)h^{-1}) \times (g^{-1}G(y,y)k')$$

olacağından f fonksiyonu süreklidir. O halde G grup ve $\mathcal{T}_p$ de noktasal yakınsama topolojisini göstermek üzere $(G, \mathcal{T}_p)$ topolojik uzayı için G topolojik gruptur.

Teorem 2.2.17: $|X| \geq 3$ kardinalitesine sahip her X kümesi ve $Sym_\omega(X) \subset G$ olacak şekildeki her $G \subset Sym(X)$için

$$\mathcal{Z}_G'' \subset \mathcal{Z}_G' = \mathcal{Z}_G = \mathcal{T}_p$$

olur. Eğer X sonsuz bir küme ise bu durumda $\mathcal{Z}_G'' \neq \mathcal{Z}_G'$ dir (Banakh *et al.* 2012).

Teorem 2.2.18: G, Tanım 2.2.7 de verilen fonksiyonların sürekli olduğu bir grup ise, bu durumda G grubunun bir kapalı alt kümesinin normalleyeni kapalıdır (Wehrfritz 1973).

Teorem 2.2.19: G, Tanım 2.2.7 de verilen fonksiyonların sürekli olduğu bir grup ise, bu durumda G grubunun herhangi bir alt kümesinin merkezleyicisi kapalıdır (Wehrfritz 1973).

Teorem 2.2.20: G, Tanım 2.2.7 de verilen fonksiyonların sürekli olduğu bir grup olsun. $A, B, C \leq G$ ve $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ bu altgrupların kapanışları olmak üzere $[A, C] \subseteq B$ ise $[\bar{A}, \bar{C}] \subseteq \bar{B}$ dır (Wehrfritz 1973).

Teorem 2.2.21: G, Tanım 2.2.7 de verilen fonksiyonların sürekli olduğu bir grup ise, $H \leq G$ ve G de $\overline{H}$, H altgrubunun kapanışı olsun. Bu durumda,

i. H altgrubunun d türev uzunluğundan çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $\overline{H}$ altgrubunun da d türev uzunluklu çözülebilir olması,
ii. H altgrubunun c sınıfından nilpotent olması için gerek ve yeter şart $\overline{H}$ altgrubunun da c sınıfından nilpotent olmasıdır (Wehrfritz 1973).

Teorem 2.2.22: G grubu min-kapalı (min-closed) olmayı sağlayan bir grup ise aynı zamanda bir CZ-gruptur (Bryant 1977).

Teorem 2.2.23: G min-kapalı (min-closed) şartını sağlayan bir grup ve $H \leq G$ olsun. H altgrubu alt uzay topolojisine göre min-kapalı (min-closed) şartını sağlar. Bunun sonucu olarak H bir min-closed gruptur (Bryant 1977).

Teorem 2.2.24: Cebirsel olarak kapalı bir K cismi için $GL_n(K)$ min-kapalı (min-closed) gruptur. Her lineer grup da hem kendi verbal topolojisine hem de altgrubu olduğu $GL_n(K)$ dan aldığı alt uzay verbal topolojisine göre bir min-kapalı (min-closed) gruptur (Bryant 1977).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, doktora tez konusu kapsamında, çalışmalarımız için temel teşkil eden teknik gerçekler ve bu gerçeklerden çıkarılan bazı pratik sonuçlar sunulacaktır.

3.1. Tekrarlı Merkezleyiciler

Bu tez çalışmasının anahtar kavramı, keyfi bir grubun bir H altgrubunun her $k \in \mathbb{N}$ için $E_k(H)$ ile gösterilen özel bir üst grup kılıfıdır. Bu kılıfları tanıtmak için ilk olarak tekrarlı merkezleyici kavramı ve tekrarlı merkezleyiciler ile ilgili bazı özellikler hatırlatılacaktır.

Tanım 3.1.1: G bir grup, $X \subseteq G$ olsun. $C_G^0(H) = 1_G$ olmak üzere $n \geq 1$ için X alt kümesinin G grubundaki n. tekrarlı merkezleyicisi;

$$C_G^n(X) = \left\{x \in \cap_{k<n} N_G\left(C_G^k(X)\right) \middle| [x, H] \subseteq C_G^{n-1}(X)\right\}$$

şeklinde tanımlanır (Bryant 1979).

Aşağıdaki iddianın doğruluğu tümevarım metodu ile görülebilir:

Teorem 3.1.2: G grup, $H \leq G$ ve $n \geq 0$ olmak üzere $C_G^n(H)$ tekrarlı merkezleyicileri artan bir dizi meydana getirirler (Bryant 1979).

Aşağıda verilecek olan gerçeklerde; tekrarlı merkezleyici kavramının yaygın olarak bilinen grubun k. merkezi kavramının bir genellemesi olduğu ve tekrarlı merkezleyicilerin bazı temel özellikleri görülebilir.

Teorem 3.1.3: G grup, $H \leq G$ ve $n \geq 0$ olmak üzere H altgrubunun G grubuna göre n. tekrarlı merkezleyicisi;

i. $C_G^n(H) \leq G$,
ii. $H \leq N_G\left(C_G^n(H)\right)$,
iii. $C_G^n(H) \cap H = Z_n(H)$,
iv. $C_G^n(G) = Z_n(G)$

özelliklerini sağlar (Bryant 1979).

Teorem 3.1.4: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda $i \leq k$ olacak şekildeki bütün i ve k pozitif tamsayıları için

$$\left[\gamma_i(H), C_G^k(H)\right] \leq C_G^{k-i}(H)$$

şeklindedir (Bryant 1979).

Teorem 3.1.5: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $i = 1,2, \ldots, k$ ve k bir pozitif tam sayı olmak üzere X, H altgrubunun $C_G\left(\gamma_i(X)\right) = C_G\left(\gamma_i(H)\right)$ koşulunu sağlayan bir altgrubu olsun. Bu durumda

$$C_G^k(X) = C_G^k(H)$$

olur (Bryant 1979).

Lemma 3.1.6: : $A \leq B \leq C$ gruplar olmak üzere $j \leq k$ olacak şekildeki bütün doğal sayılar için $C_C^j(A) = Z_j(C)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

i. Her $j \leq k$ için $C_C^j(A) = C_C^j(B) = Z_j(C)$,
ii. Her $j \leq k$ için $C_B^j(A) = Z_j(B) = Z_j(C) \cap B$,

iii. $C_B^{k+1}(A) = C_C^{k+1}(A) \cap B$

biçimindedir (Altınel and Baginski 2014).

Lemma 3.1.6 nın pratik bir çıkarımı, tarafımızdan verilen aşağıdaki sonuçtur.

Sonuç 3.1.7: i ve j, $i \leq j$ olacak şekildeki doğal sayılar olsun. Bu durumda

$$Z_i\big(E_i(H)\big) \leq Z_j\left(E_j(H)\right)$$

olur.

İspat: Tekrarlı merkezler artan bir zincir oluşturduğundan $Z_i\left(E_j(H)\right) \leq Z_j\left(E_j(H)\right)$ ve tümevarımsal olarak $Z_i\big(E_i(H)\big) \leq E_j(H)$ olduğundan, Lemma 3.1.6 (ii) seçeneği $H \leq E_j(H) \leq E_i(H)$ altgruplarına uygulanarak

$$Z_j\left(E_j(H)\right) \geq Z_i\left(E_j(H)\right) = Z_i\big(E_i(H)\big) \cap E_j(H) = Z_i\big(E_i(H)\big)$$

elde edilir.

3.2. E_k- Kılıfları

Bu başlık altında bu tez çalışmasının merkezil kavramı olan ve bir altgrubu sarmalayan üst gruplar olarak bilinen E_k-kılıfları tanımlanacak ve temel özellikleri sunulacaktır.

Tanım 3.2.1: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. $k \geq 0$ olmak üzere G grubunun $E_k(H)$ altgrupları $E_0(H) = G$ olmak üzere

$$E_{k+1}(H) = \left\{g \in E_k(H) \middle| \left[g, C_{E_k(H)}^{k+1}(H)\right] \leq C_{E_k(H)}^{k}(H)\right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu tanımdan özel olarak $k = 1$ için $E_1(H) = C_G\big(C_G(H)\big)$ olur (Altınel and Baginski 2014).

E_k-kılıflarının bazı temel özellikleri aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 3.2.2: G bir grup, $H \leq G$ ve $k \geq 0$ olmak üzere $E_k(H)$ altgrupları için;

i. $E_k(H)$ gruptur,
ii. $H \leq E_{k+1}(H) \leq E_k(H)$,
iii. $E_{k+1}(H) \leq N_G\big(C^k_{E_k(H)}(H)\big)$,
iv. $N_G(H) \leq N_G(E_k(H))$

bağıntıları sağlanır (Altınel and Baginski 2014).

Lemma 3.2.3: G bir grup olmak üzere $j \leq k$ şeklindeki bütün doğal sayılar için

$$C^j_{E_k(H)}(H) = Z_j\big(E_k(H)\big)$$

şeklindedir (Altınel and Baginski 2014).

Bu lemmanın pratik bir çıkarımı tarafımızdan elde edilmiş olup, sonucu aşağıda verilmiştir.

Sonuç 3.2.4: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda her $i \leq k$ doğal sayıları için tekrarlı merkezleyiciler

$$C^{i+1}_{E_k(H)}(H) = \big\{x \in E_k(H) \big| [x, H] \subseteq Z_i\big(E_k(H)\big)\big\}$$

şeklindedir.

İspat: Tanımdan $C^{i+1}_{E_k(H)}(H) = \left\{x \in \bigcap_{j \le i} N_{E_k(H)}\left(C^{j}_{E_k(H)}(H)\right) \middle| [x, H] \subseteq C^{i}_{E_k(H)}(H)\right\}$ yazılır. Lemma 3.2.3 den her $i \le k$ için $C^{i}_{E_k(H)}(H) = Z_i\big(E_k(H)\big)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
C^{i+1}_{E_k(H)}(H) &= \left\{x \in \bigcap_{j \le i} N_{E_k(H)}\left(C^{j}_{E_k(H)}(H)\right) \middle| [x, H] \subseteq C^{i}_{E_k(H)}(H)\right\} \\
&= \left\{x \in \bigcap_{j \le i} N_{E_k(H)}\left(Z_j\big(E_k(H)\big)\right) \middle| [x, H] \subseteq Z_i\big(E_k(H)\big)\right\} \\
&= \left\{x \in E_k(H) \middle| [x, H] \subseteq Z_i\big(E_k(H)\big)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 3.2.5: Merkezleyiciler için azalan zincir şartını sağlayan bir G grubuna $\mathfrak{M}_c$ grup denir (Wagner 1997).

Örnek 3.2.6: $\mathfrak{M}_c$ özelliğini sağlayan gruplara örnek olarak;

- Abel gruplar,
- Lineer gruplar,
- Serbest gruplar,
- Stable gruplar,
- Sonlu üretilmiş abelden nilpotente (abel-by-nilpotent) gruplar

verilebilir.

Teorem 3.2.7: $\mathfrak{M}_c$-gruplar sınıfında aşağıdaki özellikler geçerlidir:

i. $\mathfrak{M}_c$-sınıfı altgrupların oluşumu altında kapalıdır. Yani, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip bir grubun altgrubu da $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahiptir.
ii. $\mathfrak{M}_c$-sınıfı sonlu direkt çarpımların oluşumu altında kapalıdır.
iii. $\mathfrak{M}_c$-sınıfı sonlu genişlemelerin oluşumu altında kapalıdır.
iv. $\mathfrak{M}_c$-sınıfının bölüm gruplarının oluşumu altında kapalı olması gerekmez (Bryant 1979).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu başlık altında, araştırma ve çalışmalar süresince elde edilen sonuçlar ispatları ile birlikte verilecektir. Sonuçlar üç alt başlık altında toplanmıştır. Cebirsel sonuçlar alt başlığı kapsamında; stabilleşme problemi için cebirsel verileri kullanarak elde edilen sonuçlar sunulacaktır. Topolojik sonuçlar alt başlığı ile; problemin çözümü için topolojik yaklaşımlarla elde edilen sonuçlar verilecektir. Elde edilen bu sonuçlar ve topolojik araştırmalardan yararlanılarak, genel anlamda gruplarda stabilleşme probleminin yanıtının olumlu olması gerekmediğini gösteren bir örnek, karşıt örnek alt başlığı kapsamında ayrıntılı olarak inşa edilecektir.

4.1. Cebirsel Sonuçlar

Doktora tez çalışması süresince cebirsel yöntemler kullanılarak elde edilen sonuçlar bu bölümde sunulacaktır. Bu anlamda belli grup sınıflarına karşılık gelen E_k-kılıflarının yapısal özellikleri ve oluşturulan kılıflarının belli bir noktadan sonra stabil olup olmayacağı araştırılmıştır. Sonuç olarak, bir nilpotent grubun herhangi bir altgrubunun kılıfları için stabilizasyon probleminin olumlu yanıta sahip olduğu gösterilmiş, buna bağlı olarak nilpotentliğin genellemesi olan grup sınıflarında kılıfların cebirsel yapısı ile ilgili bazı sonuçları göstermesi açısından önemli olan bazı örnekler incelenmiş, tekrarlı merkezleyicilerin ve E_k üst gruplarının sonlu ötesi formları tanımlanmış, Altınel-Baginski (2014) tarafından verilen, tekrarlı merkezleyiciler ve merkezler arasındaki ilişkileri göstermesi açısından oldukça önemli olan bazı teknik gerçeklerin ordinaller için de doğru olduğu ispatlanmıştır. Bunlar göz önünde bulundurularak, E_k-kılıfları, tekrarlı merkezler ve bunlar arasındaki bağıntıları içeren birtakım sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak, nilpotent bir altgrubu sarmalayan E_k-kılıflarının cebirsel yapısı üzeinde çalışılmıştır. Bu bağlamda motivasyon olarak, herhangi bir grubun nilpotent altgrubu için oluşturulan kılıf örneği incelenmiştir.

Örnek 4.1.1: $X = \{1,2,3,4\}$ olmak üzere, X kümesi üzerindeki $G = Sym(X)$ simetrik grubunu alalım.

$$H = \langle (12)(34), (13)(24), (14)(23) \rangle \rtimes \langle (12) \rangle \leq G$$

altgrubu için $E_k(H)$ kılıflarını oluşturalım.

Tanımdan $E_0(H) = G$ ve $E_1(H) = C_G\big(C_G(H)\big)$ olduğundan, H altgrubunun G grubundaki merkezleyicisi,

$$C_G(H) = \{g \in G | \forall h \in H, gh = hg\} = \langle (12)(34) \rangle$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$E_1(H) = C_G\big(C_G(H)\big) = \{g \in G | \forall h \in C_G(H), gh = hg\} = H$$

şeklindedir. O halde, $H \leq E_k(H)$ olduğundan

$$E_k(H) = \cdots = E_2(H) = E_1(H) = H$$

elde edilir.

Örnek 4.1.1 ile nilpotentlik sınıfı 2 olan bir H altgrubuna karşılık gelen kılıfların yapısı incelenmiş ve $k \geq 2$ için $E_k(H) = E_2(H)$ eşitliğinin sağlandığı görülmüştür. Nilpotent altgruba karşılık gelen kılıfların yapısı ve kılıfların zincirinin stabil olup olmaması hususunda bir önsezi oluşturmak amaçlı üzerinde çalışılan bu örnek, nilpotent altgruplar için oluşturulan kılıfların nilpotentlik sınıfında stabilleşmeyi sağladığını göstermesi açısından önemlidir.

Nilpotent altgrupları sarmalayan kılıflar hakkında verilen örnekle elde edilen sonucun, genelde de doğru olacağı aşağıda gösterilmektedir. İlk olarak, bu alt bölümün temel sonucunu elde ederken kullanılacak olan Lemma 4.1.2 ile; abel bir altgrubun birinci kılıfı ile ilgili bilgi elde etmek amaçlanmaktadır.

Lemma 4.1.2: G grup ve H, G nin abel altgrubu olsun. Bu duruda $C_G\big(C_G(H)\big)$ grubu abeldir (Cakmak 2018).

İspat: H abel olduğundan $H \leq C_G(H)$ ve böylece $C_G(H) \geq C_G\big(C_G(H)\big)$ olur. Ayrıca $C_G(H) \leq G$ olduğundan $Z\big(C_G(H)\big) = C_G\big(C_G(H)\big) \cap C_G(H)$ yazılır. Buna göre,

$$Z\big(C_G(H)\big) = C_G\big(C_G(H)\big) \cap C_G(H) = C_G\big(C_G(H)\big)$$

olup $Z\big(C_G(H)\big) = C_G\big(C_G(H)\big)$ elde edilir. Böylece $C_G\big(C_G(H)\big)$ abel olur.

Herhangi bir grubun nilpotent altgrubunun kılıflarının nilpotentliği ve nilpotentlik sınıfları arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.1.3: G grup, $H \leq G$ olmak üzere, H altgrubu k-nilpotent ise $E_k(H)$ altgrubu da k-nilpotenttir (Cakmak 2018).

İspat: $E_{k-1}(H)$ grup, $H \leq E_{k-1}(H)$ ve $Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \trianglelefteq E_{k-1}(H)$ olduğundan II. İzomorfizm Teoreminden,

$$HZ_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \simeq H \Big/ H \cap Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \qquad (4.1)$$

ve Lemma 3.1.6 (ii) seçeneğinden

$$Z_{k-1}(H) = Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \cap H \tag{4.2}$$

yazılır. (4.2) eşitliği (4.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$HZ_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \simeq H \Big/ Z_{k-1}(H) \tag{4.3}$$

elde edilir. H altgrubu k-nilpotent olduğundan $H/Z_{k-1}(H)$ abel gruptur. Benzer şekilde, yine II. izomorfizm teoreminden

$$E_k(H)Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \simeq E_k(H) \Big/ E_k(H) \cap Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) = E_k(H) \Big/ Z_{k-1}\big(E_k(H)\big)$$

elde edilir. Diğer yandan, (4.3) ifadesindeki $H/Z_{k-1}(H)$ bölüm grubu μ olarak adlandırılırsa, $E_k(H)$ ve $C^k_{E_{k-1}(H)}(H)$ tanımlarından

$$E_k(H)Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) = C_{E_{k-1}(H)} \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \left(C_{E_{k-1}(H)} \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) (\mu) \right)$$

elde edilir. Ayrıca μ abel olduğundan, Lemma 3.1.2 den

$$C_{E_{k-1}(H)} \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \left(C_{E_{k-1}(H)} \Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) (\mu) \right)$$

grubu da abel olur. O halde,

$$
\begin{aligned}
E_k(H)Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big)\Big/ & Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big) \\
&= C_{E_{k-1}(H)}\Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big)\left(C_{E_{k-1}(H)}\Big/ Z_{k-1}\big(E_{k-1}(H)\big)^{(H)}\right) \\
&= E_k(H)\Big/ Z_{k-1}\big(E_k(H)\big)
\end{aligned}
$$

yazılır. Bu da $E_k(H)\Big/ Z_{k-1}\big(E_k(H)\big)$ grubunun abel olduğunu ifade eder. Böylece $E_k(H)$ bir k-nilpotent grup olur.

Teorem 4.1.3 ün bir çıkarımı olarak, herhangi bir grubun nilpotent altgrubuna karşılık gelen kılıfların oluşturduğu zincirin en fazla altgrubun nilpotentlik sınıfında duracağını gösteren stabilleşme ispatı Sonuç 4.1.4 ile verilmiştir.

Sonuç 4.1.4: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. H altgrubu k-nilpotent ise, $l \geq k$ şeklindeki bütün doğal sayılar için $E_l(H) = E_k(H)$ olur (Cakmak 2018).

İspat: Teorem 4.1.3 ten $E_k(H)$ altgrubunun k-nilpotent olduğu bilinmektedir. İspat l üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $l = k + 1$ için, Lemma 3.2.3 ve $E_k(H)$ nın k-nilpotentliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
C^{k+1}_{E_k(H)}(H) &= \left\{x \in \textstyle\bigcap_{i \leq k} N_{E_k(H)}\left(C^{i}_{E_k(H)}(H)\right) \,\middle|\, [x,H] \subseteq C^{k}_{E_k(H)}(H)\right\} \\
&= \{x \in E_k(H) \mid [x,H] \subseteq E_k(H)\} = E_k(H)
\end{aligned}
$$

yazılır.

$$
\begin{aligned}
E_{k+1}(H) &= \left\{g \in E_k(H) \,\middle|\, \left[g, C^{k+1}_{E_k(H)}(H)\right] \leq C^{k}_{E_k(H)}(H)\right\} \\
&= \{g \in E_k(H) \mid [g, E_k(H)] \leq E_k(H)\} = E_k(H)
\end{aligned}
$$

olduğundan $l = k + 1$ için iddia doğrudur. $l = k + n$ için iddianın doğru, yani $E_{k+n}(H) = E_k(H)$ olduğu kabul edilsin. $l = k + n + 1$ için,

$$E_k(H) = Z_k\big(E_k(H)\big) = C^{k}_{E_k(H)}(H) \leq C^{k+n}_{E_k(H)}(H) \leq E_k(H)$$

olduğundan, ilk ve son terimden $C^{k+n}_{E_k(H)}(H) = E_k(H)$ olur. Bu eşitlik ve tümevarım kabulünden,

$$\begin{aligned}
C^{k+n+1}_{E_{k+n}(H)}(H) &= \left\{x \in \cap_{i \leq k+n} N_{E_{k+n}(H)}\left(C^{i}_{E_{k+n}(H)}(H)\right) \Big| [x, H] \subseteq C^{k+n}_{E_{k+n}(H)}(H)\right\} \\
&= \left\{x \in \cap_{i \leq k+n} N_{E_k(H)}\left(C^{i}_{E_k(H)}(H)\right) \Big| [x, H] \subseteq C^{k+n}_{E_k(H)}(H)\right\} \\
&= \{x \in E_k(H) | [x, H] \subseteq E_k(H)\} = E_k(H)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece $C^{k+n+1}_{E_{k+n}(H)}(H) = E_k(H)$ elde edilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
E_{k+n+1}(H) &= \left\{g \in E_{k+1}(H) \middle| \left[g, C^{k+n+1}_{E_{k+n}(H)}(H)\right] \leq C^{k+n}_{E_{k+n}(H)}(H)\right\} \\
&= \left\{g \in E_k(H) \middle| [g, E_k(H)] \leq C^{k+n}_{E_k(H)}(H)\right\} \\
&= \{g \in E_k(H) | [g, E_k(H)] \leq E_k(H)\} = E_k(H)
\end{aligned}$$

olup iddia bütün $l \geq k$ doğal sayıları için sağlanır.

Nilpotent altgruplar için oluşturulan kılıfların cebirsel yapısı ile ilgili elde edilen bu sonuçların ardından beliren doğal bir soru, nilpotent grupların genellemeleri olan grup sınıflarının kılıfları ile grup arasında benzer yapısal özelliklerin var olup olmadığıdır. Bu anlamda ilk olarak, çözülebilir altgruplar için oluşturulan E_k-kılıfların cebirsel yapısı ile ilgili bir kanıya varmak amacıyla aşağıda verilen nilpotent olmayan çözülebilir altgrup örnekleri incelenmiştir.

Örnek 4.1.5: $T=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{C}^*\right\}\leq GL_2(\mathbb{C})$ olsun. T altgrubunun G grubundaki normalleyenini bulup, $E_k\big(N_G(T)\big)$ kılıflarını belirleyiniz.

Normalleyen tanımından $N_G(T)=\{g\in G: \forall t\in T \text{ } için \text{ } g^{-1}tg\in T\}$ olduğundan, gerekli işlemler yapılırsa,

$$N_G(T)=\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{C}^*\right\}\cup\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{C}^*\right\}=\left\langle\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\middle| a,b\in\mathbb{C}^*\right\rangle\rtimes\left\langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\rangle$$

elde edilir. Karmaşıklığı önlemek açısından $N_G(T)=H$ diyelim ve $E_k(H)$ altgruplarını bulalım. Tanımdan, $E_0(H)=G$ dir. $E_1(H)=C_G\big(C_G(H)\big)$ olup H altgrubunun G grubundaki merkezleyicisi G grubunun merkezine eşit olacağından

$$E_1(H)=C_G\big(C_G(H)\big)=C_G\big(Z(G)\big)=G$$

elde edilir. $E_2(H)$ kılıfı için tanımdan,

$$E_2(H)=\left\{g\in E_1(H)\middle|\left[g,C^2_{E_1(H)}(H)\right]\leq C^1_{E_1(H)}(H)\right\}=\{g\in G|[g,C^2_G(H)]\leq C_G(H)\}$$

olduğundan çözümü tamamlayabilmek için $C^2_G(H)$ grubu belirlenmelidir. Tanımdan,

$$C^2_G(H)=\left\{x\in N_G\big(C_G(H)\big)\cap N_G\big(C^0_G(H)\big)\middle|[x,H]\subseteq C_G(H)\right\}=\{x\in G|[x,H]\leq Z(G)\}$$

yazılır. Burada $x=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\in G$ ve $h=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\in H$ için $[x,h]\leq Z(G)$ olacak şekildeki $x\in G$ elemanları araştırılmaktadır. Buna göre

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} ax_{11} & bx_{12} \\ ax_{21} & bx_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax_{11}\alpha & ax_{12}\alpha \\ bx_{21}\alpha & bx_{22}\alpha \end{pmatrix}$$

eşitliğinden

$$\left.\begin{aligned} ax_{11} &= ax_{11}\alpha \\ bx_{12} &= ax_{12}\alpha \\ ax_{21} &= bx_{21}\alpha \\ bx_{22} &= \ bx_{22}\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_{11}(\alpha-1) &= 0 \\ x_{22}(\alpha-1) &= 0 \\ x_{12}(\alpha a - b) &= 0 \\ x_{21}(b\alpha - a) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

olup; $\alpha \neq 1 \Rightarrow x_{11} = x_{22} = 0$ olur ve $(x_{ij}) \in G$ matrisi terslenebilir olacağından $x_{12} \neq 0 \neq x_{21}$ olmalıdır. Bu durumda $a\alpha = b, b\alpha = a$ olacağından $b\alpha^2 = b$ yazılır. $b \neq 0$ olduğundan $\alpha^2 = 1$ olmak zorundadır. $\alpha^2 = 1$ iken $\alpha = 1$ veya $\alpha = -1$ dir. Başlangıçta $\alpha \neq 1$ seçildiğinden, $\alpha = -1$ olmalıdır. $\alpha = -1$ iken $x_{11} = x_{22} = 0$, $a \neq -b$ olduğundan $x_{12} = x_{21} = 0$ olur ki bu durum matrisin terslenebilirliği ile çelişir. O halde $\alpha = 1$ olmalıdır. Bu halde, $x_{11} \neq 0 \neq x_{22}$ ve $b \neq a$ olduğundan $x_{12} = x_{21} = 0$ dır. Şimdi de elde edilen matrisin hangi koşullar altında $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi ile komütatörünün merkeze ait olduğu görülmelidir.

$$\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_{11} &= x_{22}\alpha \\ x_{22} &= x_{11}\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_{11} &= \alpha^2 x_{11} \\ x_{22} &= \alpha^2 x_{22} \end{aligned}\right\}$$

olup $\alpha^2 \neq 1$ iken $x_{11} = x_{22} = 0$ olup determinant sıfır olacağından $\alpha^2 = 1$ olmalıdır. O halde, $\alpha = 1$ iken $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ veya $\alpha = -1$ iken, $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix}$ elde edilir. Yani,

$$C_G^2(H) = \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}^*\right\} \cup \left\{\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & -x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{C}^*\right\} = \left\langle\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C}^*\right\rangle \rtimes \langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\rangle$$

olarak bulunur. Öte yandan,

$$E_2(H) = \{g \in G | [g, C_G^2(H)] \leq C_G(H)\} = \{g \in G | [g, C_G^2(H)] \leq Z(G)\}$$

olup, $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in$ G ve $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in C_G^2(H)$ elemanları için $[g, C_G^2(H)] \leq Z(G)$ şartını sağlayan $g \in G$ elemanları belirlenmelidir. Gerekli komütatör işlemleri yapılırsa

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} xg_{11} & xg_{12} \\ xg_{21} & xg_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xg_{11}\alpha & xg_{12}\alpha \\ xg_{21}\alpha & xg_{22}\alpha \end{pmatrix}$$

yazılır. Buradan, $\alpha \neq 1$ iken $g_{11} = g_{12} = g_{21} = g_{22} = 0$ olup determinant sıfır olacağından, $\alpha = 1$ olmak zorundadır. Dolayısıyla, tüm matrisler bunu sağlar. Şimdi de aynı $g \in G$ elemanının $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ matrisi ile komütatörü incelenirse:

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{12} \\ g_{21} & -g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11}\alpha & g_{12}\alpha \\ -g_{21}\alpha & -g_{22}\alpha \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{r} g_{11} = g_{11}\alpha \\ -g_{12} = g_{12}\alpha \\ g_{21} = -g_{21}\alpha \\ g_{22} = g_{22}\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} g_{11}(\alpha - 1) = 0 \\ g_{22}(\alpha - 1) = 0 \\ g_{12}(\alpha + 1) = 0 \\ g_{21}(\alpha + 1) = 0 \end{array}\right\}$$

olup $\alpha \neq 1$ iken $g_{11} = g_{22} = 0$ ve $g_{12} \neq 0 \neq g_{21}$ olmalıdır ki bu durumda da $\alpha = -1$ olmak zorundadır. Bu halde, $\begin{pmatrix} 0 & g_{12} \\ g_{21} & 0 \end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. $\alpha = 1$ iken de $g_{11} \neq 0 \neq g_{22}$ olup bu durumda $g_{12} = 0 = g_{21}$ olmalıdır. Bu durumda, $\begin{pmatrix} g_{11} & 0 \\ 0 & g_{22} \end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. Buna göre,

$$E_2(H) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}^* \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = H$$

olarak bulunur.

Örnek 4.1.6: $T = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \middle| 1 \leq i,j \leq n, a_{ij} \in \mathbb{C}^* \right\} \leq G = GL_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $T \leq G$ nin, G grubundaki normalleyenini bulup $n \geq 3$ için $E_k(N_G(T)) = G$ olduğunu gösteriniz.

P_n permütasyon matrislerini göstermek üzere, $N_G(T) = \langle T \cup P_n \rangle$ dir. $N_G(T) = H$ alt grubuna karşılık gelen $E_k(H)$ kılıfları k üzerinden tümevarım ile oluşturulacaktır. Bunun için ilk olarak aşağıda verilen lemmaya ihtiyaç duyulur:

Lemma 4.1.7: Her $k \in \mathbb{N}$ için $E_k(H) = G$ ve her $j \geq 1$ için, $C^j_{E_k(H)}(H) = Z(G)$ olur.

İspat: $j = 1$ için $C^1_{E_k(H)}(H) = Z_1(E_k(H)) = Z(G)$ olup iddia açıktır. $i < j$ olacak şekildeki bütün i doğal sayıları için iddianın doğruluğu kabul edilip, j için doğruluğu incelenirse:

$$\begin{aligned} C^j_{E_k(H)}(H) &= \left\{ x \in \cap_{i<j} N_{E_k(H)}\left(C^i_{E_k(H)}(H)\right) \middle| [x,H] \subseteq C^{j-1}_{E_k(H)}(H) \right\} \\ &= \left\{ x \in \cap_{i<j} N_{E_k(H)}(Z(G)) \middle| [x,H] \subseteq Z(G) \right\} \\ &= \{ x \in E_k(H) | [x,H] \subseteq Z(G) \} \end{aligned}$$

yazılır. Şimdi, j. tekrarlı merkezleyici için komütatör şartını sağlayacak, $x \in E_k(H)$ ve $h \in H$ için $[x,H] \subseteq Z(G)$ olacak şekildeki $x \in E_k(H)$ matrislerini, yani

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

eşitliğini doğrulayan $(x_{ij})_{nn}$ matrisi belirlenmelidir. Bu şartı sağlayan matris için, $1 \leq i,j \leq n$ olmak üzere $x_{ij}a_{jj} = a_{ii}x_{ij}\alpha$ olacak şekilde bir denklem sistemi elde edilir. Bu sistemde, $\alpha \neq 1$ olduğunda $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $x_{ii} = 0$ olup determinantı sıfır olan bir matris elde edilir ki bu da istenilen matrisin terslenebilir olması ile çelişir. O halde, $\alpha = 1$ olmalıdır. $\alpha = 1$ olduğunda $1 \leq i, j \leq n$ olmak üzere $i \neq j$ iken $x_{ij} = 0$ ve $i = j$ iken $x_{ii} \in \mathbb{C}$ olur. Yani, köşegen matris elde edilir. Şimdi de bu köşegen matrislerin permütasyon matrisleri ile komütatörünü incelenmelidir. $i.$ ve $j.$ satırları değişmiş permütasyon matrisi dikkate alınırsa;

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{ii} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{jj} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}\right]$$

komütatör sonucunun merkezde olması için, $i \neq k$ ve $k \neq j$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} a_{ii} &= \alpha a_{jj} \\ \alpha a_{ii} &= a_{jj} \\ a_{kk} &= \alpha a_{kk} \end{aligned}\right\}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu durumda $\alpha \neq 1$ olması durumunda, her bir (ij) permütasyonu ve $i \neq k$, $j \neq k$ için a_{kk} elemanı sıfır olacaktır. Bu işlem, her bir permütasyon matrisi için yapıldığında $\alpha \neq 1$ iken köşegen elemanları sıfır olacağından $\alpha = 1$ olmak zorundadır. Bu halde, $C^{j}_{E_k(H)}(H)$, $j.$ tekrarlı merkezi için elde edilen matris skaler matris olur ki bu da G grubunun merkezine eşittir. O halde bütün $j \geq 1$ tam sayıları için $C^{j}_{E_k(H)}(H) = Z(G)$ elde edilir.

Şimdi Örnek 4.1.6 nın çözümüne devam edilebilir:

$E_k(H) = G$ olduğu gösterilmelidir. $k = 0$ için iddia açıktır. $k - 1$ için iddianın doğru olduğu varsayılsın. Tümevarım kabulü ve lemma 4.1.7 kullanılarak k için

$$E_k(H) = \{g \in E_{k-1}(H) \big| [g, C^k_{E_{k-1}(H)}(H)] \leq C^{k-1}_{E_{k-1}(H)}(H)\} = \{g \in G | [g, Z(G)] \leq Z(G)\} = G$$

olduğu görülür.

Örnek 4.1.5 ve Örnek 4.1.6;

- 2 boyutlu T köşegen matrislerinin oluşturduğu altgrubun genel lineer gruptaki normalleyeni için elde edilen $E_k(N_G(T))$ kılıflarının, $k \geq 2$ için $N_G(T)$ alt grubunda sabitlendiğini ve grup çözülebilir iken kılıfın da çözülebilir olduğunu,
- Öte yandan 3 ve daha büyük boyutlu T köşegen matrislerinin oluşturduğu altgrubun genel lineer gruptaki normalleyeni için ise, $E_k(N_G(T))$ kılıflarının G grubunda durduğunu ve grup çözülebilir olduğu halde buna karşılık gelen kılıfın çözülebilir olmadığını,
- $\mathfrak{M}_c$-gruplarda nilpotent bir alt grubun kılıfının da aynı sınıftan nilpotent olup, nilpotentlik sınıfından büyük veya nilpotenlik sınıfına eşit indisli kılıflar için stabilleşmenin sağlandığını görmemize rağmen, çözülebilir alt gruplara kılıf yapmanın bu kadar açık, kolay ve tek çözümlü olmadığını

görmek açısından oldukça önemlidir.

Nilpotent grupların genellemelerinden ilk olarak çözülebilir altgruplar için oluşturan kılıfların cebirsel yapıları ile ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Örnek 4.1.8 ile de nilpotent grupların bir başka genellemesi olan yerel nilpotent grupları sarmalayan kılıflar üzerine çalışılmıştır. Ayrıca, grubun $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip olması durumunda yerel nilpotent altgruba karşılık gelen kılıflar ile altgrup arasındaki yapısal benzerlikler ve farklılıklar incelenmiştir.

Örnek 4.1.8: $G = GL_2(\mathbb{C})$ genel lineer grubunu alalım. $n \in \mathbb{N}$ ve $i = 1,2$ için, λ_i 1 sayısının 2^n. köklerini göstermek üzere,

$$H_n = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \lambda_i^{2^n} = 1, i = 1,2 \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

$(n+1)$. sınıftan nilpotent alt grubu için, $E_k(H_n)$ kılıflarını belirleyiniz.

$n \geq 2$ için $E_{n+1}(H_n) = Z(G) \cdot H_n$ olduğu gösterilmek istenmektedir. Bu önermeyi ispatlamak ancak tekrarlı merkezleyicilerin belirlenmesi ile mümkündür. Buna göre ilk olarak aşağıda verilen adımların doğruluğu görülmelidir:

Adım 1: $T = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C}^* \right\} \leq G$ ve $N_G(T) = \left\langle \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{C}^* \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$ olmak üzere, $n \geq 2$ için;

a. $2 \leq i \leq n$ olmak üzere $C^i_{N_G(T)}(H_n) = Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{i-1}} \end{pmatrix} \rangle$

b. $C^{n+1}_{N_G(T)}(H_n) = Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$

dır. Burada $1^{1/2^n}$ 1 in 2^n. köklerini göstermektedir.

a. seçeneğinin doğruluğu $2 \leq i \leq n$ olmak üzere i üzerinden tümevarım uygulanarak, $Z(G) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^* \right\rangle$ olduğundan,

$$C^i_{N_G(T)}(H_n) = \langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{1/2^{i-1}} \end{pmatrix} \rangle = Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{i-1}} \end{pmatrix} \rangle$$

bulunur.

b. seçeneği için, tekrarlı merkezleyici tanımından ve a. seçeneğinin doğruluğundan,

$$C^{n+1}_{N_G(T)}(H_n) = \left\{x \in \cap_{k \le n} N_{N_G(T)}\left(C^k_{N_G(T)}(H_n)\right) \middle| [x, H_n] \subseteq C^n_{N_G(T)}(H_n)\right\}$$
$$= \left\{x \in N_G(T) \middle| [x, H_n] \subseteq Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \rangle \right\}$$

yazılır. Buradan, $x = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in N_G(T)$ ve $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} N_G(T)$ ile $k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in H_n$ ve $k = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in H_n$ için, $[x, k]$ komütatörleri incelenirse:

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^n_{N_G(T)}(H_n),$$

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x^{-1}y & 0 \\ 0 & y^{-1}x \end{pmatrix} \in C^n_{N_G(T)}(H_n)$$
$$\Leftrightarrow x^{-1}y = y^{-1}x1^{1/2^{n-1}}$$
$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 1^{1/2^{n-1}} \Rightarrow y = x1^{1/2^n},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^n_{N_G(T)}(H_n),$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} {\lambda_2}^{-1}\lambda_1 & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 \end{pmatrix} \in C^n_{N_G(T)}(H_n)$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1{\lambda_2}^{-1} = {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 1^{1/2^{n-1}}$$
$$\Leftrightarrow {\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2 1^{1/2^{n-1}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 1^{1/2^n},$$

bulunur. O halde bütün $\lambda_i \in H_n$ ler için bu ifade sağlanır. Buna göre,

$$C^{n+1}_{N_G(T)}(H_n) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{1/2^n} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N} \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

elde edilir.

Adım 2: $n \geq 2$ olmak üzere $2 \leq i \leq n$ için $E_i(H_n) = N_G(T)$ dir.

Birinci adımda tekrarlı merkezleyiciler için elde edilen sonuç göz önünde bulundurularak, i üzerinden tümevarım uygulanarak sonuca ulaşılır.

Adım 3: Şimdi örnek için sunulan $n \geq 2$ için $E_{n+1}(H_n) = Z(G) \cdot H_n$ iddiasının doğru olduğu gösterilecektir. Kılıfların tanımı ve yukarıdaki adımlar ile elde edilen sonuçlar kullanılarak,

$$\begin{aligned} E_{n+1}(H_n) &= \{g \in E_n(H_n) | [g, C^{n+1}_{E_n(H_n)}(H_n)] \leq C^{n}_{E_n(H_n)}(H_n)\} \\ &= \{g \in N_G(T) | [g, C^{n+1}_{N_G(T)}(H_n)] \leq C^{n}_{N_G(T))}(H_n)\} \\ &= \left\{g \in N_G(T) \middle| \left[g, Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \right] \leq Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \rangle \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Bu noktada, gerekli komütatörler bulunursa,

$$E_{n+1}(H_n) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{1/2^n} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N} \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = C^{n+1}_{N_G(T)}(H_n) = Z(G) \cdot H_n$$

olarak elde edilir.

Öte yandan, H_n altgruplarının bir limiti olan,

$$H_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \middle| \lambda^{2^n} = 1, n \in \mathbb{N} \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

grubu nilpotent değil fakat hipermerkezildir. H_n altgruplarına karşılık gelen kılıfları bulmak için yapılan hesaplamalar yöntemi ile

$$E_1(H_\infty) = C_G\big(C_G(H_\infty)\big) = C_G\big(Z(G)\big) = G$$

ve $i \geq 2$ için

$$E_i(H_\infty) = N_G(T)$$

elde edilir.

Örnek 4.1.8 ile, yerel nilpotent $\mathfrak{M}_c$-gruplar incelenmiştir. Yerel nilpotent $\mathfrak{M}_c$-grupların Teorem 2.1.50 den çözülebilir olduğu, Teorem 2.1.51 den de hipermerkezil olduğu bilinmektedir. Verilen H_n altgrubunu sarmalayan $E_k(H_n)$-kılıflarının nilpotent dolayısıyla yerel nilpotent, hipermerkezil ve aynı zamanda 2-çözülebilir gruplar olduğu görülmektedir. Bununla birlikte H_n altgruplarının bir limiti olan H_∞ yerel nilpotent ve hipermerkezil altgrubuna karşılık gelen kılıfların çözülebilir olduğu gösterilmiştir.

Nilpotent grupların genellemelerinden bir diğeri de hipermerkezil gruplardır. Hipermerkezilliğin yerel nilpotentlikten daha güçlü bir özellik olması, hipermerkezil altgruplar için oluşturulan kılıflar ile altgrubun cebirsel yapısı arasında daha fazla ortak özellik bulunabilmesi ihtimalini gündeme getirmektedir. Bu bağlamda, bundan sonraki etapta hipermerkezil altgruplar için oluşturulan kılıfların yapısı ile ilgili elde edilen sonuçlar ayrıntılı olarak verilecektir.

Hipermerkezil gruplar nilpotent grupların ordinal sayılara genellenmesi ile ortaya çıkan gruplar olduğundan, hipermerkezil gruplara karşılık gelen kılıfları oluştururken kullanacağımız teknik kavramlar için, “Materyal ve Yöntem” başlığı altında verdiğimiz gerçeklerin bir kısmının sonlu ötesi formlarının oluşturulması ve doğrulanması gerekmektedir. Bu gerçeklerin dayandığı temel tanımlar sırasıyla Bryant (1979) ve Altınel-Baginski (2014) tarafından verilen, tekrarlı merkezleyiciler ve E_k-kılıfları olduğundan, ilk olarak bu kavramlar ordinal sayılar için tanımlanacak ve ardından bazı temel gerçeklerin sonlu ötesi formlarının da doğruluğu ispatlanacaktır.

Tanım 4.1.9: G bir grup, $H \leq G$ ve α bir ordinal sayı olsun. Bu durumda $C_G^\alpha(H)$ tekrarlı merkezleyicileri;

i.α ardışık ordinal ise

$$C_G^{\alpha+1}(H) = \left\{x \in \cap_{i \leq \alpha} N_G\left(C_G^i(H)\right) \middle| [x, H] \subseteq C_G^\alpha(H)\right\},$$

ii.α limit ordinal ise

$$C_G^k(H) = \bigcup_{\alpha<k} C_G^\alpha(H)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.10: G bir grup, $H \leq G$ ve α bir ordinal sayı olmak üzere $E_\alpha(H)$ kılıfları;

i.α ardışık ordinal ise

$$E_{\alpha+1}(H) = \left\{x \in E_\alpha(H) \middle| \left[x, C_{E_\alpha(H)}^{\alpha+1}(H)\right] \leq C_{E_\alpha(H)}^\alpha(H)\right\},$$

ii.α limit ordinal ise

$$E_k(H) = \bigcap_{\alpha<k} E_\alpha(H)$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.1.6, Altınel-Baginski (2014) tarafından elde edilen sonuçlar açısından oldukça önemli bir temel oluşturmaktadır. Nilpotent altgrupların kılıfları için elde edilen sonuçlarının genelleştirilmesi ve çalışma boyunca elde edilen diğer sonuçlar açısından da önemli olan Lemma 3.1.6 nın sonlu ötesi formu aşağıdaki gibi oluşturulmuş ve ispatlanmıştır:

Lemma 4.1.11: $A \leq B \leq C$ gruplar ve λ, bütün $\alpha \leq \lambda$ ordinal sayıları için

$$C_C^{\alpha}(A) = Z_{\alpha}(C)$$

olacak şekilde bir ordinal olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i. $C_C^{\alpha}(A) = C_C^{\alpha}(B) = Z_{\alpha}(C)$
ii. $C_B^{\alpha}(A) = Z_{\alpha}(B) = Z_{\alpha}(C) \cap B$
iii. $C_B^{\lambda+1}(A) = C_C^{\lambda+1}(A) \cap B$.

İspat: İspat sonlu ötesi tümevarım prensibi ile verilecektir. $\alpha = 0$ için

i. $C_C^{0}(A) = C_C^{0}(B) = Z_0(C) = \{1_C\}$
ii. $C_B^{0}(A) = Z_0(B) = Z_0(C) \cap B = \{1_B\}$
iii. $C_B^{1}(A) = C_C^{1}(A) \cap B$

olup iddialar açıktır. Şimdi i. ve ii. ifadelerinin doğruluğunu ardışık ordinal ve limit ordinal durumları için inceleyelim. i. ve ii. iddialarının bütün $\beta < \lambda$ ordinalleri için sağlandığını varsayalım.

i.
(i.1)α bir ardışık ordinal, yani $\alpha = \beta + 1$ olsun. $\beta < \lambda$ olduğunda $\beta + 1 \leq \lambda$ olacağından, teoremin hipotezinden $C_C^{\beta+1}(A) = Z_{\beta+1}(C)$ dir. Bu gerçek ve teoremin hipotezi dikkate alınarak $C_C^{\beta+1}(B)$ merkezleyicisi için

$$\begin{aligned} C_C^{\beta+1}(B) &= \left\{x \in \cap_{\gamma<\beta+1} N_C\left(C_C^{\gamma}(B)\right) \middle| [x,B] \subseteq C_C^{\beta}(B)\right\} \\ &= \left\{x \in \cap_{\gamma<\beta+1} N_C\left(Z_{\gamma}(C)\right) \middle| [x,B] \subseteq Z_{\beta}(C)\right\} \\ &= \left\{x \in C \middle| [x,B] \subseteq C_C^{\beta}(A)\right\} \subseteq C_C^{\beta+1}(A) \end{aligned}$$

yazılır. Buradan,

$$C_C^{\beta+1}(A) = Z_{\beta+1}(C) = C_C^{\beta+1}(C) \leq C_C^{\beta+1}(B) \leq C_C^{\beta+1}(A)$$

olup ilk ve son terimden $C_C^{\beta+1}(A) = C_C^{\beta+1}(B)$ elde edilir.

(i.2) α bir limit ordinal ise; Tanım 4.1.9 ve iddianın her $\alpha < \beta$ için doğruluğu kullanılarak,

$$C_C^{\beta}(A) = \bigcup_{i<\beta} C_C^{i}(A) = \bigcup_{i<\beta} C_C^{i}(B) = C_C^{\beta}(B)$$
$$C_C^{\beta}(A) = \bigcup_{i<\beta} C_C^{i}(A) = \bigcup_{i<\beta} Z_i(C) = Z_\beta(C)$$

bulunur. Böylece i. iddiasının bütün ordinal sayılar için sağlandığı görülür.

ii.
(ii.1) Eğer α ardışık ordinal, yani $\alpha = \beta + 1$ ise; Tanım 4.1.9 ve tümevarım hipotezinden,

$$\begin{aligned} C_B^{\beta+1}(A) &= \left\{x \in \cap_{\delta<\beta+1} N_B\left(C_B^{\delta}(A)\right) \middle| [x, A] \subseteq C_B^{\beta}(A)\right\} \\ &= \left\{x \in \cap_{\delta<\beta+1} N_B\left(Z_\delta(B)\right) \middle| [x, A] \subseteq Z_\beta(B)\right\} = \left\{x \in B \middle| [x, A] \subseteq Z_\beta(B)\right\} \end{aligned}$$

ve aynı zamanda

$$\begin{aligned} C_C^{\beta+1}(A) \cap B &= \left\{x \in C \middle| [x, A] \subseteq C_C^{\beta}(A)\right\} \cap B \\ &= \left\{x \in C \middle| [x, A] \subseteq Z_\beta(C)\right\} \cap B \\ &= \left\{x \in B \middle| [x, A] \subseteq Z_\beta(B)\right\} = C_B^{\beta+1}(A) \end{aligned}$$

yazılır. Öyleyse

$$C_B^{\beta+1}(A) = C_C^{\beta+1}(A) \cap B = Z_{\beta+1}(C) \cap B$$

olur. Böylece ilk ve son terimden, ii. iddiasında yer alan eşitliklerden bir tanesi elde edilir. Diğer yandan i. ifadesinin tüm ordinaller için doğruluğu göz önünde bulundurularak $Z_{\beta+1}(C) \cap B = C_C^{\beta+1}(B) \cap B$ yazılabilir. Buradan,

$$\begin{aligned} Z_{\beta+1}(C) \cap B = C_C^{\beta+1}(B) \cap B &= \{x \in C \,|\, [x,B] \subseteq Z_\beta(C)\} \cap B \\ &= \{x \in B \,|\, [x,B] \subseteq Z_\beta(C) \cap B\} \\ &= \{x \in B \,|\, [x,B] \subseteq Z_\beta(B)\} = Z_{\beta+1}(B) \end{aligned}$$

olduğundan ii. iddiası ardışık ordinaller için doğrudur.

(ii.2) Eğer α bir limit ordinal ise Tanım 4.1.9 ve lemmanın ii. iddiasının β dan küçük tüm ordinaller için doğruluğu kullanılarak;

$$C_B^\alpha(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} C_B^\beta(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(B) = Z_\alpha(B)$$

ve

$$C_B^\alpha(A) = \bigcup_{\beta<\alpha} C_B^\beta(A) = \bigcup_{i<\beta} \big(Z_\beta(C) \cap B\big) = \left(\bigcup_{\beta<\alpha} Z_\beta(C)\right) \cap B = Z_\alpha(C) \cap B$$

olduğundan iddia ii. limit ordinaller için sağlanır. Böylece, ii. iddiası bütün ordinaller için doğrudur.

iii. Son olarak iii. iddiası ispatlanacaktır. Tanım 4.1.9 ve lemmanın ii. seçeneğinin doğruluğundan

$$\begin{aligned} C_B^{\lambda+1}(A) &= \{x \in \cap_{k\leq\lambda} N_B\big(Z_\lambda(B)\big) \,|\, [x,A] \subseteq Z_\lambda(B)\} \\ &= \{x \in B \,|\, [x,A] \subseteq Z_\lambda(B)\} \qquad (4.4) \end{aligned}$$

yazılır. Öte yandan $C_C^{\lambda+1}(A)$ tekrarlı merkezleyicisi için Tanım 4.1.9 ve i. iddiasının doğruluğundan

$$C_C^{\lambda+1}(A) = \left\{x \in \bigcap_{\delta\leq\lambda} N_C\left(C_C^{\delta}(A)\right)\middle|[x,A] \subseteq C_C^{\lambda}(A)\right\}$$
$$= \left\{x \in \bigcap_{\delta\leq\lambda} N_C\big(Z_\delta(C)\big)\middle|[x,A] \subseteq Z_\lambda(C)\right\} = \{x \in C|[x,A] \subseteq Z_\lambda(C)\}$$

olur. $C_C^{\lambda+1}(A)$ tekrarlı merkezleyicisinin B ile kesişimi alınır ve ii. ifadesinin doğruluğu da göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned} C_C^{\lambda+1}(A) \cap B &= \{x \in C|[x,A] \subseteq Z_\lambda(C)\} \cap B \\ &= \{x \in C \cap B|[x,A] \subseteq Z_\lambda(C) \cap B\} \\ &= \{x \in B|[x,A] \subseteq Z_\lambda(B)\} \end{aligned} \tag{4.5}$$

elde edilir. Böylece (4.4) ve (4.5) eşitliklerinden sonuç görülür.

Aşağıda verilecek olan lemma genel anlamda önem taşımaktadır.

Lemma 4.1.12: $(C_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ bir E kümesinin boş olmayan alt kümelerinin bir artan dizisi olsun. Eğer $x \in \bigcup_{\alpha<\lambda} C_\alpha$ ise, bu durumda $x \in C_\beta$ ve $\beta < \lambda$ olacak şekilde bir β minimal elemanı vardır ve β bir ardışık ordinaldir.

İspat: $x \in (C_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ ise bu durumda $\exists\, \beta < \lambda$ için $x \in C_\beta$ olur. Eğer β limit ordinal olarak seçilirse,

$$\left\{\beta \leq \lambda, \beta \text{ } limit \text{ } ordinal \,\middle|\, x \in C_\beta,\right\}$$

kümesi bir en küçük elemana sahip olur. Bu eleman β_0 olsun. $C_{\beta_0} = \bigcup_{\delta<j_0} C_\delta$ olduğundan, $x \in C_{\delta_0}$ olacak şekilde $\delta_0 < \beta_0$ vardır. β_0 elemanının seçiminden dolayı δ_0 bir ardışık ordinaldir.

Tekrarlı merkezleyicilerin artan bir dizi oluşturduğu tümevarım yöntemi ile görülebilir. Lemma 4.1.3 ile tekrarlı merkezleyicilerin sonlu ötesi formlarının da artan bir zincir oluşturduğu ispatlanmaktadır.

Lemma 4.1.13: α bir ordinal sayı olsun. $\lambda \geq \alpha$ için $C_G^{\alpha}(H) \leq C_G^{\lambda}(H)$ dir.

İspat: İspat sonlu ötesi tümevarım ile yapılacaktır. $\lambda = \alpha$ ise iddia açıktır. Şimdi λ nın ardışık ordinal, yani $\lambda = \beta + 1$ olduğu kabul edilsin. Buna göre iki durum söz konusudur:

- **Durum 1:** β bir ardışık ordinaldir.

İddia β dan daha küçük bütün ordinaller için sağlandığından $C_G^{\beta}(H) \leq C_G^{\beta+1}(H)$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Tanım 4.1.9 dan,

$$C_G^{\beta+1}(H) = \left\{ x \in \cap_{\alpha<\beta+1} N_G\big(C_G^{\alpha}(H)\big) \,\middle|\, [x,H] \subseteq C_G^{\beta}(H) \right\}$$
$$C_G^{\beta}(H) = \left\{ x \in \cap_{\alpha<\beta} N_G\big(C_G^{\alpha}(H)\big) \,\middle|\, [x,H] \subseteq C_G^{\beta-1}(H) \right\}$$

yazılır. $x \in C_G^{\beta}(H)$ olsun. Bu durumda $\alpha < \beta$ olacak şekildeki bütün α ordinalleri için $x \in N_G\big(C_G^{\alpha}(H)\big)$ olur. $C_G^{\beta}(H) \leq N_G\left(C_G^{\beta}(H)\right)$ olduğundan $x \in N_G\big(C_G^{\alpha}(H)\big)$ dır. Bu yüzden $x \in \cap_{\alpha<\beta+1} N_G\big(C_G^{\alpha}(H)\big)$. Öte yandan, β dan küçük tüm ordinaller için iddianın sağlandığı göz önüne alınırsa, $x \in C_G^{\beta}(H)$ için,

$$[x,H] \subseteq C_G^{\beta-1}(H) \subseteq C_G^{\beta}(H)$$

elde edilir. Bu sonuç $C_G^{\beta}(H) \leq C_G^{\beta+1}(H)$ olduğunu gösterir.

- **Durum 2:** β bir limit ordinalir.

Tanım 4.1.9 dan $C_G^{\beta}(H) = \bigcup_{\alpha<\beta} C_G^{\alpha}(H)$ yazılır. $x \in C_G^{\beta}(H)$ ise bu durumda $\gamma \leq \beta$ olacak şekildeki en az bir eleman için x, $C_G^{\gamma}(H)$ nın bir elemanıdır. Lemma 4.1.12 den, $x \in C_G^{\beta}(H)$ iken en az bir $\gamma \leq \beta$ için $x \in C_G^{\gamma}(H)$ ve $\gamma < \lambda$ olacak şekilde bir γ ardışık ordinali mevcuttur. Ayrıca, $\gamma \leq \beta$ için tümevarımdan $C_G^{\gamma}(H) \leq C_G^{\beta}(H)$ olur. O halde, $C_G^{\gamma}(H)$ tanımından $\delta < \gamma$ olacak şekildeki her δ için $x \in N_G\left(C_G^{\delta}(H)\right)$ yazılabilir. Tümevarımdan, $\gamma \leq \delta < \lambda = \beta + 1$ ise,

$$x \in C_G^{\gamma}(H) \leq C_G^{\delta}(H) \leq N_G\left(C_G^{\delta}(H)\right) \Rightarrow x \in N_G\left(C_G^{\delta}(H)\right)$$

olur. $C_G^{\beta}(H) \leq C_G^{\beta+1}(H)$ kapsamını doğrulamak için geriye komütatör şartını göstermek kalır. $x \in C_G^{\gamma}(H)$ olduğu, Tanım 4.1.9 ve $\gamma \leq \beta$ için tümevarım hipotezi dikkate alınarak;

$$[x, H] \subseteq C_G^{\gamma-1}(H) \subseteq C_G^{\beta}(H) \Rightarrow [x, H] \subseteq C_G^{\beta}(H)$$

elde edilir. O halde $C_G^{\beta}(H) \leq C_G^{\beta+1}(H)$ olur.

Son olarak λ limit ordinal ise, Tanım 4.1.9 kullanılarak

$$C_G^{\lambda}(H) = \bigcup_{\beta<\lambda} C_G^{\beta}(H) = \bigcup_{\alpha\leq\beta<\lambda} C_G^{\alpha}(H) \geq C_G^{\alpha}(H)$$

yazılır. Böylece iddia bütün ordinaller için sağlandığı görülür.

Tekrarlı merkezleyiciler arasındaki bu ilişkinin yanı sıra tekrarlı merkezleyiciler ile tekrarlı merkezler Lemma 4.1.14 te verildiği gibi ilişkilendirilebilir.

Lemma 4.1.14: λ bir ordinal sayı olsun. Bu durumda $\alpha \leq \lambda$ olacak şekildeki bütün ordinaller için, $C^{\alpha}_{E_{\lambda(H)}}(H) = Z_{\alpha}\big(E_{\lambda}(H)\big)$ olur.

İspat: $\lambda = 0$ olduğunda $\alpha = 0$ olur. Öyleyse iddiamız $\lambda = 0$ için açıktır. λ ardışık ordinal yani; $\lambda = \beta + 1$ olsun. Özel olarak $\alpha \leq \beta$ dır. Tümevarımdan $C^{\alpha}_{E_{\beta}}(H) = Z_{\alpha}(E_{\beta})$ olduğu bilinmektedir. Buna göre $\alpha = \beta + 1$ için

$$C^{\alpha}_{E_{\beta+1}}(H) = Z_{\alpha}(E_{\beta+1})$$

eşitliğini göstermek yeterli olacaktır. $H \leq E_{\beta+1} \leq E_{\beta}$ altgrupları için, Lemma 4.1.11 (ii) uygulanarak

$$C^{\alpha}_{E_{\beta+1}}(H) = Z_{\alpha}(E_{\beta+1}) \trianglelefteq E_{\beta+1} \Rightarrow C^{\alpha}_{E_{\beta+1}}(H) \trianglelefteq E_{\beta+1}$$

yazılır. Öte yandan, Tanım 4.1.9 ve Lemma 4.1.11 (ii) den

$$\big[Z_{\beta+1}(E_{\beta+1}), H\big] \leq Z_{\beta}(E_{\beta+1}) = C^{\beta}_{E_{\beta+1}}(H)$$

elde edilir. Şimdi de Lemma 4.1.11 kullanılarak çift yönlü kapsama gösterilecektir. Burada

$$\begin{aligned} C^{\beta+1}_{E_{\beta+1}}(H) &= \left\{x \in \cap_{\gamma<\beta+1} N_{E_{\beta+1}}\left(C^{\gamma}_{E_{\beta+1}}(H)\right) \Big| [x,H] \subseteq C^{\beta}_{E_{\beta+1}}(H)\right\} \\ &= \left\{x \in \cap_{\gamma<\beta+1} N_{E_{\beta+1}}\left(Z_{\gamma}(E_{\beta+1})\right) \Big| [x,H] \subseteq Z_{\beta}(E_{\beta+1})\right\} \\ &= \left\{x \in E_{\beta+1} \big| [x,H] \subseteq Z_{\beta}(E_{\beta+1})\right\} \end{aligned}$$

olur. Buna göre,

$$Z_{\beta+1}\left(E_{\beta+1}\right) \leq C_{E_{\beta+1}}^{\beta}(H) \leq C_{E_{\beta+1}}^{\beta+1}(H)$$

yazılır. Böylece $Z_{\beta+1}\left(E_{\beta+1}\right) \leq C_{E_{\beta+1}}^{\beta+1}(H)$ kapsamı doğrulanmış olur. Şimdi de ters yönlü kapsama için ispat yapılacaktır. Lemma 4.1.11 (ii) seçeneğinden,

$$\left[C_{E_{\beta+1}}^{\beta+1}(H), E_{\beta+1}\right] = \left[C_{E_{\beta}}^{\beta+1}(H) \cap E_{\beta+1}, E_{\beta+1}\right]$$

yazılır. $C_{E_{\beta+1}}^{\beta+1}(H) \leq Z_{\beta+1}\left(E_{\beta+1}\right)$ olduğunu doğrulamak için bu komütatörün $Z_{\beta}\left(E_{\beta+1}\right)$ de bulunduğu gösterilmelidir. $E_{\beta+1}(H)$ tanımı ve Lemma 4.1.11 (i) seçeneği dikkate alınarak,

$$E_{\beta+1}(H) = \left\{x \in E_{\beta}(H) \middle| \left[x, C_{E_{\beta}}^{\beta+1}(H)\right] \leq C_{E_{\beta}}^{\beta}(H)\right\} = \left\{x \in E_{\beta}(H) \middle| \left[x, C_{E_{\beta}}^{\beta+1}(H)\right] \leq Z_{\beta}\left(E_{\beta}\right)\right\}$$

yazılır. $E_{\beta+1} \leq E_{\beta}$ olduğu için, $x \in E_{\beta+1} \leq E_{\beta}$ ile $C_{E_{\beta}}^{\beta+1}(H)$ komütatörü $Z_{\beta}\left(E_{\beta}\right)$ grubundadır. Böylece, bu gerçek ve Lemma 4.1.11 kullanılarak,

$$\left[C_{E_{\beta+1}}^{\beta+1}(H), E_{\beta+1}\right] = \left[C_{E_{\beta}}^{\beta+1}(H) \cap E_{\beta+1}, E_{\beta+1}\right] \leq Z_{\beta}\left(E_{\beta}\right) \cap E_{\beta+1} = Z_{\beta}\left(E_{\beta+1}\right)$$
$$\Rightarrow C_{E_{\beta+1}}^{\beta+1}(H) \leq Z_{\beta}\left(E_{\beta+1}\right) \leq Z_{\beta+1}\left(E_{\beta+1}\right)$$

elde edilir. Buradan da ters kapsamın doğru olduğu görülür. O halde, iddia $\lambda = \beta + 1$ ardışık ordinali için doğrudur.

Son olarak λ limit ordinal olsun. $\alpha < \lambda$ iken tümevarım varsayımından her $\beta \leq \alpha$ için $C_{E_{\alpha}}^{\beta}(H) = Z_{\beta}(E_{\alpha})$ yazılabilir. Bu eşitliğe göre $\alpha \leq \lambda$ için $H \leq E_{\lambda} \leq E_{\alpha}$ alt gruplarına Lemma 4.1.11 uygulanabilir. Buna göre, $\beta \leq \alpha < \lambda$ olmak üzere

$$C_{E_{\lambda}}^{\beta}(H) = Z_{\beta}(E_{\lambda})$$

olur. $\beta = \lambda$ iken, Tanım 4.1.9 ve $C_{E_\lambda}^{\beta}(H) = Z_\beta(E_\lambda)$ eşitliği dikkate alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$C_{E_\lambda}^{\lambda}(H) = \bigcup_{i<\lambda} C_{E_\lambda}^{i}(H) = \bigcup_{i<\lambda} Z_i(E_\lambda) = Z_\lambda(E_\lambda).$$

Böylece iddianın ordinal sayılar için doğruluğu gösterilmiş olur.

Aşağıda verilecek olan Lemma 4.1.15 ve Lemma 4.1.16 ile ordinal sayılar için de kılıflar ile tekrarlı merkezleri arasında bazı bağıntıların olduğu ispatlanacaktır.

Lemma 4.1.15: α bir ordinal sayı olmak üzere, $\alpha \leq \lambda$ için $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq E_\lambda(H)$ olur.

İspat: $\alpha = \lambda$ için $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq E_\alpha(H)$ olduğundan durum açıktır. $\alpha < \lambda$ olduğunu kabul edelim. λ ardışık ordinal, yani $\lambda = \beta + 1$ olsun. $\alpha \leq \beta$ için tümevarımdan $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq E_\beta(H)$ yazılır. Tanım 4.1.10 dan $\alpha \leq \beta$ için $E_\beta(H) \leq E_\alpha(H)$ olduğu bilinmektedir. Lemma 4.1.11 ii. seçeneği $H \leq E_\beta(H) \leq E_\alpha(H)$ gruplarına uygulanarak,

$$Z_\alpha\left(E_\beta(H)\right) = Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \cap E_\beta(H)$$

elde edilir. Ayrıca tümevarım hipotezi kullanılarak,

$$Z_\alpha\left(E_\beta(H)\right) = Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \cap E_\beta(H) = Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)$$

yazılır. Öte yandan, tekrarlı merkezler artan bir dizi meydana getirdiğinden $\alpha \leq \beta$ için $Z_\alpha\left(E_\beta(H)\right) \leq Z_\beta\left(E_\beta(H)\right)$ ve her grubun tekrarlı merkezi normal altgrubu olduğundan $Z_\beta\left(E_\beta(H)\right) \trianglelefteq E_\beta(H)$ elde edilir. Bu gerçekler dikkate alınarak,

$$Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) = Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \cap E_\beta(H) = Z_\alpha\left(E_\beta(H)\right) \leq Z_\beta\left(E_\beta(H)\right) \leq E_\beta(H)$$

elde edilir. İlk ve son terimden $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq E_\beta(H)$ olur. O halde iddianın ardışık ordinaller için sağlandığının doğrulanması için geriye,

$$\left[Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big), C_{E_\beta(H)}^{\beta+1}\right] \subseteq Z_\beta\left(E_\beta(H)\right)$$

kapsamını göstermek kalır. Tümevarımdan $C_{E_\beta(H)}^{\beta+1} \leq E_\beta(H)$ ve $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq E_\beta(H)$ olduğundan,

$$\left[Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big), C_{E_\beta(H)}^{\beta+1}\right] \subset Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \subseteq Z_\beta\left(E_\beta(H)\right)$$

kapsamı elde edilir. Buna göre, $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq E_{\beta+1}(H)$ dir. O halde iddia $\lambda = \beta + 1$ ardışık ordinali için sağlanır.

λ limit ordinal olması halinde, $\alpha \leq \beta < \lambda$ için $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq E_\beta(H)$ olsun. Tanım 4.1.10 dan,

$$E_\lambda(H) = \bigcap_{\beta<\lambda} E_\beta(H) = \bigcap_{\alpha\leq\beta<\lambda} E_\beta(H) \geq Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)$$

yazılır. İlk ve son terimden sonuç görülür.

Sonuç 4.1.16: α bir ordinal sayı olsun. $\alpha \leq \lambda$ olmak üzere, $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \leq Z_\lambda\big(E_\lambda(H)\big)$ olur.

İspat: $\alpha \leq \lambda$ iken $E_\lambda(H) \leq E_\alpha(H)$ dır. Lemma 4.1.11 ve 4.1.15 den,

$$Z_\lambda\big(E_\lambda(H)\big) \geq Z_\alpha\big(E_\lambda(H)\big) = Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \cap E_\lambda(H) = Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)$$

yazılır. İlk ve son terimden sonuç görülür.

Şimdi geliştirilen bu teknik araçlar kullanılarak, çeşitli grup sınıflarının hipermerkezil altgruplarının E_α-kılıflarının yapısı analiz edilecektir. Bunun sonucunda $\mathfrak{M}_c$-grupların hipermerkezil altgruplarının kılıfları ile ilgili sonuçlar elde edilecek ve stabilleşme problemi için genel bir sonluluk şartı ispatlanacaktır.

Önerme 4.1.17: G grup, $H \leq G$ olsun. α bir ordinal sayı olmak üzere;

i. H $(\alpha+1)$-hipermerkezil altgrup ise, $E_{\alpha+1}(H)$ kılıfı $(\alpha+1)$- hipermerkezildir.
ii. H altgrubu α-hipermerkezil ise, $E_{\alpha+1}(H)$ kılıfı en fazla α-hipermerkezildir.

İspat:

i. H $(\alpha+1)$-hipermerkezil altgrup olsun. $E_\alpha(H)$ grup, $H \leq E_\alpha(H)$ ve $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \trianglelefteq E_\alpha(H)$ olup II. İzomorfizm Teoremi ve $H \leq H \leq E_\alpha(H)$ için Lemma 3.1.11 ii. kullanılarak,

$$HZ_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \Big/ Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \simeq H \Big/ H \cap Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) = H \Big/ Z_\alpha(H)$$

yazılır. H altgrubu $(\alpha+1)$-hipermerkezil olduğundan, $H/Z_\alpha(H)$ grubu abeldir. Benzer şekilde, $E_\alpha(H)$ grup, $E_{\alpha+1}(H) \leq E_\alpha(H)$ ve $Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \trianglelefteq E_\alpha(H)$ olup II. İzomorfizm Teoremi, $H \leq E_{\alpha+1}(H) \leq E_\alpha(H)$ üçlüsüne Lemma 4.1.11 ii. seçeneği uygulanarak ve Lemma 4.1.15 kullanılarak,

$$E_{\alpha+1}(H) \Big/ Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \simeq E_{\alpha+1}(H) \Big/ E_{\alpha+1}(H) \cap Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) = E_{\alpha+1}(H) \Big/ Z_\alpha\big(E_{\alpha+1}(H)\big)$$

elde edilir. Öte yandan $E_{\alpha+1}(H)$ ve $C_{E_{\alpha(H)}}^{\alpha+1}(H)$ tanımlarından,

$$E_{\alpha+1}(H)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) = C_{E_\alpha(H)/Z_\alpha(E_\alpha(H))}\left(C_{E_\alpha(H)/Z_\alpha(E_\alpha(H))}\left(HZ_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\right)\right)$$

yazılır. Burada, $H/Z_\alpha(H)$ abel grup ve $HZ_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \simeq H/Z_\alpha(H)$ olduğundan, Lemma 4.1.2 den,

$$E_{\alpha+1}(H)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \simeq E_{\alpha+1}(H)\Big/Z_\alpha\big(E_{\alpha+1}(H)\big)$$

grubu da abeldir. Böylece, $E_{\alpha+1}(H)$ alt grubu en fazla $(\alpha+1)$-hipermerkezildir. Fakat aynı zamanda bir grubun hipermerkezillik sınıfı altgrubun hipermerkezillik sınıfından daha küçük olamayacağından, $E_{\alpha+1}(H)$ tam olarak $(\alpha+1)$-hipermerkezildir.

ii. α limit ordinal iken, $Z_\alpha(H) = H$ olduğundan $H/Z_\alpha(H) = 1_H$ yazılır. Buradan

$$HZ_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big) \simeq H/Z_\alpha(H) = 1_H$$

elde edilir. i. seçeneğine ek olarak Tanım 4.1.9, 4.1.10 ve Lemma 4.1.15 kullanılarak,

$$\begin{aligned}
E_{\alpha+1}(H)\Big/Z_\alpha\big(E_{\alpha+1}(H)\big) &\simeq E_{\alpha+1}(H)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\\
&= C_{E_\alpha(H)/Z_\alpha(E_\alpha(H))}\left(C_{E_\alpha(H)/Z_\alpha(E_\alpha(H))}\left(HZ_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\right)\right)\\
&= C_{E_\alpha(H)/Z_\alpha(E_\alpha(H))}\left(C_{E_\alpha(H)/Z_\alpha(E_\alpha(H))}(1)\right) = Z\left(E_\alpha(H)\Big/Z_\alpha\big(E_\alpha(H)\big)\right)
\end{aligned}$$

abel grubu elde edilir. $E_{\alpha+1}(H)/Z_{\alpha}\big(E_{\alpha+1}(H)\big)$ bölüm grubu abel olduğundan, $E_{\alpha+1}(H)$ altgrubu en fazla $(\alpha+1)$-hipermerkezil olur. Ayrıca, Lemma 4.1.11 (ii) sırasıyla $H \leq H \leq E_{\beta}(H)$ ve $H \leq H \leq E_{\beta+1}(H)$ altgruplarına uygulanarak, $\beta < \alpha$ için

$$Z_i(H) = Z_i\big(E_i(H)\big) \cap H$$
$$Z_{i+1}(H) = Z_{i+1}\big(E_{i+1}(H)\big) \cap H$$

yazılabilir. $\beta = \alpha$ olduğunda önermenin hipotezinden H altgrubu α-hipermerkezil olduğundan ve $E_{\alpha+1}(H)$ nın en fazla $(\alpha+1)$-hipermerkezil olacağı gerçeğinden,

$$Z_{\alpha}(H) = Z_{\alpha+1}(H) \Rightarrow Z_{\alpha}\big(E_{\alpha}(H)\big) = Z_{\alpha+1}\big(E_{\alpha+1}(H)\big) = E_{\alpha+1}(H)$$

elde edilir. Bu eşitlik dikkate alınarak,

$$Z_{\alpha}\big(E_{\alpha+1}(H)\big) = Z_{\alpha}\big(E_{\alpha}(H)\big) \cap E_{\alpha+1}(H) = Z_{\alpha}\big(E_{\alpha}(H)\big) = Z_{\alpha+1}\big(E_{\alpha+1}(H)\big) = E_{\alpha+1}(H)$$

yazılır. Burada ilk eşitlik için $H \leq E_{\alpha+1}(H) \leq E_{\alpha}(H)$ altgruplarına Lemma 4.1.3 ii. uygulanırken, sırasıyla ikinci ve üçüncü eşitlik için Lemma 4.1.15 ve $E_{\alpha+1}(H)$ altgrubunun en fazla $(\alpha+1)$-hipermerkezil olduğu gerçeği kullanılmıştır. İlk ve son terimden,

$$Z_{\alpha}\big(E_{\alpha+1}(H)\big) = E_{\alpha+1}(H)$$

elde edilir. Bu sonuç, $E_{\alpha+1}(H)$ alt grubunun α-hipermerkezil olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.18: G, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip bir grup ve $H \leq G$ α-hipermerkezil olsun. Bu durumda $E_{\alpha+1}(H)$ altgrubu çözülebilirdir.

İspat: Önerme 4.1.17 ii. den $E_{\alpha+1}(H)$ altgrubu da hipermerkezildir. Teorem 2.1.49 dan herhangi hipermerkezil grup yerel nilpotent ve $\mathfrak{M}_c$ sınıfı altgrupların oluşumu altında kapalı olduğundan, $E_{\alpha+1}(H)$ yerel nilpotent $\mathfrak{M}_c$-gruptur. Teorem 2.1.50 den $E_{\alpha+1}(H)$ kılıfı çözülebilirdir.

Aşağıda, Örnek 4.1.8 ile verilen H_n altgruplarının bir limiti olan hipermerkezil altgruplara karşılık gelen kılıfların yapısı incelenecektir. Bu örnek ile, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip olan bir grubun hipermerkezil altgrubunu sarmalayan kılıfların nilpotent olması gerekmediği gösterilmiştir.

Örnek 4.1.19: $G = GL_2(\mathbb{C})$ genel lineer grubunu alalım. $n \in \mathbb{N}$ ve λ_i 1 sayısının 2^n. ilkel köklerini göstermek üzere,

$$H_n = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \lambda_i^{2^n} = 1, i = 1,2 \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

altgruplarının bir limiti olan G nin ardışık ordinal derecesinden hipermerkezil altgrubu

$$H_\infty = \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \lambda_i^{2^n} = 1, \lambda_i \in \mathbb{C}, i, n \in \mathbb{N} \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$$

için kılıfları belirleyiniz.

Çözüm üç aşamada tamamlanacaktır.

Adım 1: Kılıflar için gerekli olan tekrarlı merkezleyiciler belirlenecektir. $\mathrm{n} \in \mathbb{N}^*$ olmak üzere sırasıyla, n ordinal, ω limit ordinal ve $(\omega + 1)$ ardışık ordinali için iddia tekrarlı merkezleyicilerin,

$$C^n_{N_G(T)}(H_\infty) = Z(G) \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle$$

$$C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty) = Z(G)\cdot\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/_{2^{n-1}}} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle$$

$$C^{\omega+1}_{N_G(T)}(H_\infty) = Z(G)\cdot\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/_{2^{n-1}}} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

şeklinde olacağıdır.

İlk olarak n üzerinden tümevarım uygulanarak ordinaller için sonuç gösterilecektir. $C^{n}_{N_G(T)}(H_\infty)$ merkezleyicisi için $n = 1$ alınırsa tanımdan,

$$C^{1}_{N_G(T)}(H_\infty) = \left\{x \in N_G(T) \middle| [x, H_\infty] \subseteq C^{0}_{N_G(T)}(H_\infty)\right\} = \{x \in N_G(T) | [x, H_\infty] = 1\}$$

yazılır. $C^{1}_{N_G(T)}(H_\infty)$ merkezleyicisini belirlemek için gerekli komütatörler:

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x^{-1}y & 0 \\ 0 & y^{-1}x \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow x^{-1}y = 1 = y^{-1}x \Leftrightarrow y = x,$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} {\lambda_2}^{-1}\lambda_1 & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 \end{pmatrix} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1{\lambda_2}^{-1} = 1 = {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2,$$

olarak elde edilir. Bu komütatörlerden $\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right]$ komütatörü, bütün λ_i ler için değil, sadece belirtilen şekildeki $\lambda_i \in H_\infty$ elemanları için 1 e eşit olacağından $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin C^{1}_{N_G(T)}(H_\infty)$ olur. Buna göre,

$$C^1_{N_G(T)}(H_\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^* \right\rangle$$

olup, iddia $n = 1$ için doğrudur. $i \leq n - 1$ olacak şekildeki tüm $i \in \mathbb{N}$ doğal sayıları için ifadenin doğru olduğu kabul edilsin. $C^n_{N_G(T)}(H_\infty)$ tekrarlı merkezleyicisi için tanımdan,

$$\begin{aligned} C^n_{N_G(T)}(H_\infty) &= \left\{ x \in \cap_{k \leq n-1} N_{N_G(T)}\left(C^k_{N_G(T)}(H_\infty)\right) \middle| [x, H_\infty] \subseteq C^{n-1}_{N_G(T)}(H_\infty) \right\} \\ &= \left\{ x \in N_G(T) \middle| [x, H_\infty] \subseteq Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-2}} \end{pmatrix} \rangle \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Gerekli olan komütatörler,

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^{n-1}_{N_G(T)}(H_\infty),$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} x^{-1}y & 0 \\ 0 & y^{-1}x \end{pmatrix} &\in C^{n-1}_{N_G(T)}(H_\infty) \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y = y^{-1}x1^{1/2^{n-2}} \\ &\Leftrightarrow y^2 = x^2 1^{1/2^{n-2}} \Rightarrow y = x1^{1/2^{n-1}}, \end{aligned}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^{n-1}_{N_G(T)}(H_\infty),$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} {\lambda_2}^{-1}\lambda_1 & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 \end{pmatrix} &\in C^{n-1}_{N_G(T)}(H_\infty) \\ &\Leftrightarrow \lambda_1{\lambda_2}^{-1} = {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 1^{1/2^{n-2}} \\ &\Leftrightarrow {\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2 1^{1/2^{n-2}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 1^{1/2^{n-1}}, \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Bu komütatörlerden $\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right]$ komütatörü, bütün λ_i ler için değil, sadece belirtilen formdaki $\lambda_i \in H_\infty$ elemanları için sağlanacağından, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \notin C^{n-1}_{N_G(T)}(H_\infty)$ dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} C^{n}_{N_G(T)}(H_\infty) &= \left\langle \begin{pmatrix}x & 0\\0 & x1^{1/2^{n-1}}\end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle \\ &= Z(G) \cdot \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1^{1/2^{n-1}}\end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde, ordinaller için iddia doğrudur.

ω limit ordinali için Tanım 4.1.1 den,

$$C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty) = \bigcup_{n<\omega} C^{n}_{N_G(T)}(H_\infty) = Z(G) \cdot \left\langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1^{1/2^{n-1}}\end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle$$

elde edilir. $(\omega + 1)$ ardışık ordinali için,

$$\begin{aligned} C^{\omega+1}_{N_G(T)}(H_\infty) &= \left\{ x \in \cap_{n\leq\omega} N_{N_G(T)}\left(C^{n}_{N_G(T)}(H_\infty)\right) \middle| [x, H_\infty] \subseteq C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty) \right\} \\ &= \left\{ x \in N_G(T) \middle| [x, H_\infty] \subseteq Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1^{1/2^{n-1}}\end{pmatrix} \rangle \right\} \end{aligned}$$

yazılır. O halde, $g \in N_G(T)$ ile $k \in H_\infty$ için $[g, k]$ komütatörleri,

$$\left[\begin{pmatrix}x & 0\\0 & y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\0 & \lambda_2\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty),$$

$$\begin{aligned} \left[\begin{pmatrix}x & 0\\0 & y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right] &= \begin{pmatrix}x^{-1}y & 0\\0 & y^{-1}x\end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty) \\ &\Leftrightarrow x^{-1}y = y^{-1}x1^{1/2^{n-1}} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 1^{1/2^{n-1}} \Rightarrow y = x 1^{1/2^n},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty),$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} {\lambda_2}^{-1}\lambda_1 & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 \end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty)$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 {\lambda_2}^{-1} = {\lambda_1}^{-1}\lambda_2 1^{1/2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow {\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2 1^{1/2^{n-1}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 1^{1/2^n}$$

olup bütün $\lambda_i \in H_\infty$ elemanları için bu ifade sağlanır. Böylece,

$$C^{\omega+1}_{N_G(T)}(H_\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= Z(G) \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^n} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \middle| \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle = Z(G) \cdot H_\infty$$

olarak bulunur.

Adım 2: Şimdi de H_∞ alt grubunun $(\omega + 1)$-hipermerkezil olduğunu gösterelim. $H_\infty \leq N_G(T)$ olduğundan n $\in \mathbb{N}$ olmak üzere Teorem 3.1.3 iii. seçeneğinden,

$$C^{n}_{N_G(T)}(H_\infty) \cap H_\infty = Z_n(H_\infty)$$

yazılır. Buna göre,

$$Z(G) \cdot \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle \cap \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \middle| \lambda_i^{2^n} = 1, n \in \mathbb{N} \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \middle| \lambda^{2^n} = 1, \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle = Z_1(H_\infty) \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \middle| \mathrm{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle$$

bulunur. ω limit ordinal olmak üzere tekrarlı merkezlerin tanımından,

$$Z_\omega(H_\infty) = \bigcup_{n<\omega} Z_n(H_\infty) = Z_1(H_\infty)\left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1}/_{2^{n-1}} \end{pmatrix} \middle| \text{n} \in \mathbb{N}^* \right\rangle$$

elde edilir.

Son olarak, ardışık ordinal durumu için tekrarlı merkezler; $H_\infty \leq N_G(T)$ olduğundan $(\omega + 1)$ ardışık ordinal olmak üzere,

$$Z_{\omega+1}(H_\infty) = C^{\omega+1}_{N_G(T)}(H_\infty) \cap H_\infty = (Z(G) \cdot H_\infty) \cap H_\infty = H_\infty$$

şeklinde olup H_∞ alt grubu $\omega + 1$ hipermerkezildir.

Adım 3: Artık kılıfların belirlenmesi işlemine geçilebilir. Burada ordinal, limit ordinal ve ardışık ordinal durumları göz önüne alınacaktır. E_n altgruplarının tanımından, $E_0(H_\infty) = G$ dir. Yine tanımdan,

$$E_1(H_\infty) = C_G\big(C_G(H_\infty)\big) = C_G\big(Z(G)\big) = G$$

elde edilir. $E_2(H_\infty)$ için,

$$\begin{aligned} E_2(H_\infty) &= \left\{g \in E_1(H_\infty) \middle| \left[g, C^2_{E_1(H_\infty)}(H_\infty)\right] \leq C^1_{E_1(H_\infty)}(H_\infty)\right\} \\ &= \{g \in G | [g, C^2_G(H_\infty)] \leq C_G(H_\infty)\} \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitliğe göre, $C^2_G(H_\infty)$ tekrarlı merkezleyicisi için tanımdan,

$$C^2_G(H_\infty) = \left\{x \in \cap_{k\leq 1} N_G\left(C^k_G(H_\infty)\right) \middle| [x, H_\infty] \subseteq C^n_G(H_\infty)\right\} = \{x \in G | [x, H_\infty] \subseteq Z(G)\}$$

yazılır. Buradan $x \in G$ ve $k \in H_\infty$ olmak üzere $[x,k]$ komütatörleri için:

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}\alpha$$

eşitliğine göre

$$\lambda_1 g_1(\alpha - 1) = 0, g_2(\lambda_1\alpha - \lambda_2) = 0$$
$$\lambda_2 g_4(\alpha - 1) = 0, g_3(\lambda_2\alpha - \lambda_1) = 0$$

yazılır. Buna göre; $\alpha \neq 1$ durumunda $g_1 = 0 = g_4 \Rightarrow g_2 \neq 0 \neq g_3$ olup,

$$\lambda_1 g_3 = \lambda_2 g_3 \alpha \text{ ve } \lambda_2 g_2 = \lambda_1 g_2 \alpha$$

olur. Buradan, ${\lambda_1}^2 = {\lambda_2}^2$ elde edilir ki bu eşitlik her $\lambda_i \in H_\infty$ elemanı için sağlanmayacağından $\begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ g_3 & 0 \end{pmatrix} \notin C_G^2(H_\infty)$ dır. $\alpha = 1$ durumu için $g_1 \neq 0 \neq g_4$ ise

$$g_2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 \text{ ve } g_3(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$$

olur. Burada, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ihtimali mümkün olduğundan $g_2 = 0 = g_3$ elde edilir. Buna göre, $\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_4 \end{pmatrix} \in C_G^2(H_\infty)$ dır. Diğer taraftan,

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x^{-1}y & 0 \\ 0 & y^{-1}x \end{pmatrix} \in Z(G) \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = x1^{1/2}$$

dir. Buna göre,

$$C_G^2(H_\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x1^{1/2} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^* \right\rangle = Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2} \end{pmatrix} \rangle$$

elde edilir. Şimdi, $E_2(H_\infty)$ kılıfını bulabilmek için $C_G^2(H_\infty)$ altgrubunun elemanları ile komütatörünün merkezde olmasını sağlayan G grubunun elemanları belirlenmelidir. $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix} \in G$ ile $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \in C_G^2(H_\infty)$ elemanının komütatörü merkezde olduğundan, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in C_G^2(H_\infty)$ elemanı ile komütatör sonucunu bulmak yeterlidir. O halde,

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ g_3 & g_4 \end{pmatrix}\alpha \Rightarrow \begin{pmatrix} g_1 & -g_2 \\ g_3 & -g_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1\alpha & g_2\alpha \\ -g_3\alpha & -g_4\alpha \end{pmatrix}$$

olur. İki matrisin eşitliğinden,

$$g_1(\alpha - 1) = 0, g_2(\alpha + 1) = 0$$
$$g_4(\alpha - 1) = 0, g_3(\alpha + 1) = 0$$

olup $\alpha \neq 1$ ve $\alpha = 1$ durumları söz konusu olur. $\alpha \neq 1$ iken $\begin{pmatrix} 0 & g_2 \\ g_3 & 0 \end{pmatrix}$ matrisi, $\alpha = 1$ iken $\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_4 \end{pmatrix}$ matrisi elde edilir. O halde,

$$E_2(H_\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}^* \right\rangle \rtimes \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle = N_G(T)$$

olarak bulunur. $i \leq n-1$ için $E_n(H_\infty) = N_G(T)$ olsun. $E_n(H_\infty)$ için,

$$\begin{aligned} E_n(H_\infty) &= \left\{ g \in E_{n-1}(H_\infty) \middle| \left[g, C^n_{E_{n-1}(H_\infty)}(H_\infty)\right] \leq C^{n-1}_{E_{n-1}(H_\infty)}(H_\infty) \right\} \\ &= \left\{ g \in N_G(T) \middle| \left[g, C^n_{N_G(T)}(H_\infty)\right] \leq C^{n-1}_{N_G(T))}(H_\infty) \right\} \\ &= \left\{ g \in N_G(T) \middle| \left[g, Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix} \rangle \right] \leq Z(G) \cdot \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-2}} \end{pmatrix} \rangle \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in N_G(T)$ elemanının $C^{n}_{N_G(T))}(H_\infty)$ altgrubunun tüm elemanları ile komütatörü $C^{n-1}_{N_G(T))}(H_\infty)$ da bulunur. Bu yüzden, $\langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle \in N_G(T)$ elemanı ile komütatörünü belirlemek gerekir. İşlem kolaylığı açısından $\alpha = 1^{1/2^{n-1}}$ alınırsa

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in Z(G) \cdot \langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-2}} \end{pmatrix}\rangle$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha^{-1} 1^{1/2^{n-2}} \Rightarrow \alpha^2 = 1^{1/2^{n-2}} \Rightarrow \alpha = 1^{1/2^{n-1}}$$

olup tüm α lar için doğrudur. Buradan,

$$E_n(H_\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}^* \right\rangle \rtimes \langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle = N_G(T)$$

bulunur.

ω limit ordinal olmak üzere, Tanım 4.1.10 dan,

$$E_\omega(H_\infty) = \bigcap_{n<\omega} E_n(H_\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{C}^* \right\rangle \rtimes \langle\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle = N_G(T)$$

olur. $(\omega + 1)$ ardışık ordinal için tanımdan ve Adım 1 ile tekrarlı merkezleyiciler için elde edilen sonuçlardan yararlanarak,

$$\begin{aligned} E_{\omega+1}(H_\infty) &= \left\{ g \in E_\omega(H_\infty) \middle| \left[g, C^{\omega+1}_{E_\omega(H_\infty)}(H_\infty)\right] \leq C^{\omega}_{E_\omega(H_\infty)}(H_\infty) \right\} \\ &= \left\{ g \in N_G(T) \middle| \left[g, C^{\omega+1}_{N_G(T)}(H_\infty)\right] \leq C^{\omega}_{N_G(T))}(H_\infty) \right\} \\ &= \left\{ g \in N_G(T) \middle| \left[g, Z(G) \cdot \langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\rangle\right] \leq Z(G) \cdot \langle\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1^{1/2^{n-1}} \end{pmatrix}\rangle \right\} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece komütatörler aşağıdaki gibi belirlenir. İşlem kolaylığı açısından $\alpha = 1^{1/2^n}$ alınırsa,

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty),$$

$$\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x^{-1}y & 0 \\ 0 & y^{-1}x \end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^{-1}y = y^{-1}x1^{1/2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = x^2 1^{1/2^{n-1}} \Rightarrow y = x1^{1/2^n},$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty),$$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \in C^{\omega}_{N_G(T)}(H_\infty)$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \alpha^{-1}1^{1/2^{n-1}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 1^{1/2^{n-1}} \Rightarrow \alpha = 1^{1/2^n}$$

olduğundan

$$E_{\omega+1}(H_\infty) = \left\langle \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x1^{1/2^n} \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{C}^*, n \in \mathbb{N}^* \right\rangle \rtimes \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle = Z(G) \cdot H_\infty$$

bulunur.

$E_{\omega+1}(H_\infty)$ Önerme 4.1.17 den $(\omega + 1)$. dereceden hipermerkezil altgruptur ve böylece yerel nilpotenttir. Aynı zamanda G bir $\mathfrak{M}_c$-grup olduğundan Teorem 3.2.7 i. seçeneğinden $E_{\omega+1}(H_\infty)$ da bir $\mathfrak{M}_c$-gruptur. Teorem 2.1.50 den $E_{\omega+1}(H_\infty)$ çözülebilirdir. Fakat nilpotent değildir.

Bu sonuçlardan hareketle, limit ordinal derecesinden bir hipermerkezil altgrubun kılıflarının zincirinin belirli bir noktadan sonra durduğunu gösteren ve Sonuç 4.1.4 ü genelleştiren aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 4.1.20: α bir limit ordinal, G grup ve $H \leq G$ α-hipermerkezil altgrup olsun. Buna göre, $\alpha + 1 \leq \lambda$ olacak şekildeki bütün λ ordinalleri için $E_{\alpha+1}(H) = E_\lambda(H)$ olur.

İspat: İspat λ üzerinden sonlu ötesi tümevarım ile yapılacaktır. $\lambda = \alpha + 1$ için, iddianın sağlandığı açıktır. Eğer λ ardışık ordinal ise, yani $\lambda = \beta + 1$ ise, bütün $\alpha + 1 \leq \beta$ ordinalleri için iddianın doğru olduğu Teorem 4.1.3 den görülür. Buna göre, Lemma 4.1.14 ve Önerme 4.1.17 kullanılarak,

$$\begin{aligned} E_{\beta+1}(H) &= \left\{ x \in E_\beta(H) \middle| \left[x, C_{E_\beta}^{\beta+1}(H) \right] \leq C_{E_\beta}^{\beta}(H) \right\} \\ &= \left\{ x \in E_\beta(H) \middle| \left[x, C_{E_\beta}^{\beta+1}(H) \right] \leq Z_\beta\left(E_\beta\right) \right\} \\ &= \left\{ x \in E_\beta(H) \middle| \left[x, C_{E_\beta}^{\beta+1}(H) \right] \leq E_\beta(H) \right\} = E_\beta(H) = E_{\alpha+1}(H) \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer λ limit ordinal ise, E_λ nın azalan zincir oluşturduğu ve $\alpha + 1 \leq \beta$ olacak şekildeki bütün ordinaller için $E_{\alpha+1} = E_\beta$ olduğu gerçekleri göz önünde bulundurularak,

$$E_\lambda(H) = \bigcap_{\beta<\lambda} E_\beta(H) = \bigcap_{\alpha+1\leq\beta<\lambda} E_{\alpha+1}(H) = E_{\alpha+1}(H)$$

elde edilir. Böylece $\alpha + 1 \leq \lambda$ olacak şekildeki bütün λ ordinalleri için iddia doğrudur.

4.2. Topolojik Sonuçlar

Bu alt bölümde, “Kuramsal Temeller” ana başlığının “Topolojik Tanımlar ve Teoremler” alt başlığı kapsamında verilen gerçeklerden yararlanarak elde edilen sonuçlar sunulacaktır. Bu bağlamda, cebirsel olarak belirlenen topolojiler üzerinde araştırılmış, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip gruplar ile bu topolojiler arasında bağlantı kurulmaya çalışılmıştır. Tekrarlı merkezleyiciler ve E_k tanımlanabilir kılıflarının bahsi geçen topolojilere göre açık veya kapalı kümeler olması yönünde sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçların yanında tez çalışmasının temel sorusu olan stabilleşme probleminin, $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip gruplardan daha küçük bir grup sınıfı olan min-kapalı (min-closed) gruplarda doğru olduğu gösterilmştir.

Bu bölümde G grubu; Tanım 2.2.7 de de verildiği gibi tek nokta kümelerinin kapalı olduğu ve her $a \in G$ için

$$x \to x^{-1}, \qquad x \to ax, \qquad x \to xa, \qquad x \to x^{-1}ax$$

fonksiyonlarının sürekli olduğu bir topoloji ile donatılmış grup olarak alınacaktır. Grup üzerinde böyle bir topolojinin varlığının keyfi altgrupların E_k-kılıflarının kapalı olduğunu garanti etmek için yeterli olduğu gösterilecektir. Bu sonucun kapalı altgrupların noetherianlık özelliğini sağlayan grup sınıflarında (örneğin kapalı gruplar üzerinde zincir şartını sağlayan gruplar) E_k-kılıflarının stabil olduğu sonucuna ulaşmak için yeterli olduğu ispatlanacaktır.

Lemma 4.2.1: G bir grup ve $X \subseteq G$ olsun. Bu durumda, her $i \in \mathbb{N}$ için $C_G^i(X)$ tekrarlı merkezleyicileri kapalıdır (Cakmak 2018).

İspat: İspat i üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $i = 0$ için $C_G^0(X) = \{1_G\}$ olup G grubunun tek elemanlı her alt kümesi kapalı olacağından iddia doğrudur. $j < i$ olacak şekildeki tüm j doğal sayıları için $C_G^j(X)$ tekrarlı merkezleyicileri kapalı olsun. Tanımdan,

$$C_G^i(X) = \left\{ g \in \cap_{j<i} N_G\left(C_G^j(X)\right) \middle| [g, X] \subseteq C_G^{i-1}(x) \right\}$$

dır. Tümevarım kabulünden her $j < i$ için $C_G^j(X)$ merkezleyicisi kapalıdır. Öyleyse $C_G^j(X) \subseteq G$ kapalı alt kümesinin G grubundaki normalleyicisi de Teorem 2.2.18 den kapalı olduğundan $N_G\left(C_G^j(X)\right)$ kapalıdır. Kapalı kümelerin ara kesitleri de kapalı olacağından $\bigcap_{j<i} N_G\left(C_G^j(X)\right)$ kapalıdır. Diğer yandan, $x \in X$ sabit bir eleman olmak üzere G grubunda,

$$k_x : G \to G, k_x : g \to [g, x]$$

fonksiyonu süreklidir. $C_G^{i-1}(X) \leq G$ alt kümesinin k_x fonksiyonuna göre ters görüntüsü,

$$k_x^{-1}\left(C_G^{i-1}(X)\right) = \left\{g \in G \middle| k_x(g) \in C_G^{i-1}(X)\right\} = \left\{g \in G \middle| [g, x] \in C_G^{i-1}(X)\right\}$$

şeklindedir. $\bigcap k_x^{-1}\left(C_G^{i-1}(X)\right)$ kesişimi kapalı ve

$$g \in \bigcap k_x^{-1}\left(C_G^{i-1}(X)\right) \Leftrightarrow \forall x \in X\ için\ g \in k_x^{-1}\left(C_G^{i-1}(X)\right)$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in X\ için\ [g, x] \in C_G^{i-1}(X) \Leftrightarrow [g, X] \subset C_G^{i-1}(X)$$

olduğundan, $X \subset G$ için $C_G^i(X)$ kapalıdır.

Lemma 4.2.2: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu durumda $E_k(H)$-kılıfları kapalıdır (Cakmak 2018).

İspat: İspat k üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $k = 0$ için, $E_0(H) = G$ olup (topoloji kapalı kümeler üzerinde tanımlandığından) durum açıktır. k için E_k altgrubu kapalı olsun. $k + 1$ için tanımdan,

$$E_{k+1} = \left\{g \in E_k \middle| \left[g, C_{E_k}^{k+1}(H)\ \right] \leq C_{E_k}^k(H)\right\} = \left\{g \in E_k \middle| \left[g, C_{E_k}^{k+1}(H)\ \right] \leq Z_k(E_k)\right\}$$

yazılır. Tekrarlı merkezler için Teorem 3.1.3 ten $Z_k(E_k) = C_G^k(E_k) \cap E_k$ yazılabilir. Tümevarım kabulünden ve Lemma 4.2.1 den, E_k ve $C_G^k(E_k)$ altgrupları da kapalıdır. İki kapalı altgrubun ara kesiti de kapalı olduğundan $Z_k(E_k)$ kapalıdır. $x \in C_{E_k}^{k+1}(H)$ elamanını alalım. G üzerindeki topolojinin özelliklerinden,

$$k_x: G \to G, k_x: g \to [g,x]$$

fonksiyonu süreklidir. $Z_k(E_k) \subseteq G$ alt kümesinin k_x fonksiyona göre ters görüntüsü,

$$k_x^{-1}\big(Z_k(E_k)\big) = \{g \in G | k_x(g) \in Z_k(E_k)\} = \{g \in G | [g,x] \in Z_k(E_k)\}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} & g \in \bigcap k_x^{-1}\big(Z_k(E_k)\big) \Leftrightarrow \forall x \in C_{E_k}^{k+1}(H)\ için\ g \in k_x^{-1}\big(Z_k(E_k)\big) \\ & \Leftrightarrow \forall x \in C_{E_k}^{k+1}(H)\ için\ [g,x] \in \big(Z_k(E_k)\big) \\ & \Leftrightarrow \big[g, C_{E_k}^{k+1}(H)\big] \subset \big(Z_k(E_k)\big) \end{aligned}$$

olduğundan, E_{k+1} altgrubu kapalıdır.

Sonuç 4.2.3: G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer G grubu kapalı altgruplar üzerinde minimal şartı sağlarsa, bu durumda E_k- kılıfları zinciri stabildir (Cakmak 2018).

İspat: Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2 den görülür.

Sonuç 4.2.4: G min-kapalı (min-closed) olma şartını sağlayan bir grup, $H \leq G$ olmak üzere $E_k(H)$ altgrupları zinciri G grubunda stabildir.

İspat: G grubunun min-kapalı (min-closed) şartını sağlayan bir grup olması; verbal topolojiye göre kapalı kümeler üzerinde minimal şartın sağlanması demektir. Sonuç

4.2.3 e göre $E_k(H)$-kılıfları kapalı olup minimal şartı sağlar. O halde, bu altgruplar G de stabildir.

Sonuç 4.2.6: G bir lineer grup olmak üzere $H \leq G$ altgrubu için $E_k(H)$-kılıfları zinciri G grubunda stabildir (Cakmak 2018).

İspat: Teorem 2.2.24 gereğince G grubu min-closed (min-kapalı) olma şartını sağlar. O halde Sonuç 4.2.4 den $E_k(H)$-kılıfları G de stabildir.

Önerme 4.2.7: G bir $\mathfrak{M}_c$-grup, $\mathfrak{T}_G$ de G grubu üzerindeki Taimanov topolojisini göstersin. Buna göre grubun merkezi, bu topolojiye göre hem açık hem kapalıdır.

İspat: G, $\mathfrak{M}_c$ olma şartını sağlayan bir grup ise $A \subseteq G$ sonlu alt kümesi için,

$$Z(G) = C_G(G) = C_G(A)$$

şeklindedir. Sonlu A alt kümesi için $C_G(A)$ merkezleyicileri Taimanov topolojisine göre açık olduğundan $Z(G)$ grubun merkezi de bu topolojiye göre açıktır. Taimanov topolojisine göre açıklar aynı zamanda kapalı olduğundan $Z(G)$ aynı zamanda kapalıdır.

Şimdi de Taimanov topolojisine göre E_k altgruplarının kapalılığı incelenecektir.

Lemma 4.2.8: $\mathfrak{T}_G$ Taimanov topolojisine göre bir açık altgrubun normalleyicisi kapalıdır.

İspat: $(G, \mathfrak{T}_G)$ grup topolojisini ve $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subseteq G$ sonlu bir alt küme olmak üzere $C_G(A)$ açık altgrubunu alalım. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $a_i \in A$ için,

$$\left(C_G(a_i)\right)' = G \setminus C_G(a_i) = \bigcup_{g \in G} C_G(a_i)g$$

olup,

$$\left(C_G(A)\right)' = \left(\bigcap_{i=1}^{n} C_G(a_i)\right)' = \left[\left(C_G(a_1)\right)' \cup \dots \cup \left(C_G(a_n)\right)'\right]$$

$$= \left(\bigcup_{g\in G} C_G(a_1)g\right) \cup \dots \cup \left(\bigcup_{g\in G} C_G(a_n)g\right) = \bigcup_{g\in G}\left(\bigcup_{i=1}^{n} C_G(a_i)g\right)$$

olduğundan $\mathfrak{T}_G$ Taimanov topolojisinde açık altgruplar aynı zamanda kapalıdır. Kapalı bir altgrubun normalleyicisi $g \in G$ olmak üzere $\forall\, x \in G$ için,

$$x \to x^{-1}, \qquad x \to xg, \qquad x \to gx$$

fonksiyonlarının sürekli olduğu herhangi topolojik uzayda kapalı olduğundan ve $(G, \mathfrak{T}_G)$ topolojik grup olduğundan, $C_G(A)$ açık altgrubu için $N_G\left(C_G(A)\right)$ normalleyicisi kapalıdır.

Sonuç 4.2.9: G grup, $H \leq G$ açık altgrup olmak üzere $\mathfrak{T}_G$ Taimanov topolojisine göre $N_G(H)$ kapalıdır.

İspat: $H \leq G$ olduğundan, $H \leq N_G(H)$ dır. O halde, $N_G(H)$ da açıktır. $\mathfrak{T}_G$ Taimanov topolojisine göre her açık aynı zamanda kapalı olduğundan $N_G(H)$ kapalıdır.

Lemma 4.2.10: $\mathfrak{T}_G$ Taimanov topolojisi olsun. $(G, \mathfrak{T}_G)$ topolojik grubunda $A \subseteq G$ sonlu bir alt kümesi olsun. Buna göre her $i \in \mathbb{N}^*$ için $C_G^i(A)$ tekrarlı merkezleyicileri açıktır.

İspat: İspat i üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $i = 1$ için Taimanov topolojisinin tanımından $C_G(A)$ açıktır. $(i-1)$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim. i için iddianın doğru olduğunu gösterelim. Tekrarlı merkezleyiciler artan bir zincir meydana getirirler. Buna göre,

$$C_G^{i-1}(H) \leq C_G^i(H) = \left(C_G^i(H) \setminus C_G^{i-1}(H)\right) \cup C_G^{i-1}(H) = \left(\bigcup_{g \in G} C_G^{i-1}(H)g\right) \cup \left(C_G^{i-1}(H)\right)$$

olup tekrarlı merkezleyiciler açıktır.

Önerme 4.2.11: E_k-kılıfları $\mathfrak{T}_G$ Taimanov topolojisine göre kapalıdır.

İspat: G, tek nokta kümelerinin kapalı olduğu ve her $a \in G$ için,

$$x \to x^{-1}, \qquad x \to ax, \qquad x \to xa, \qquad x \to x^{-1}ax$$

fonksiyonlarının sürekli olduğu bir topoloji ile donatılmış grup iken Lemma 4.2.1 ve Lemma 4.2.2 ile kapalı bir alt kümenin normalleyicisinin, herhangi bir alt kümenin tekrarlı merkezleyicilerinin ve herhangi bir altgrubun E_k-kılıflarının kapalı olduğu gösterilmiştir. Taimanov topolojisine sahip bir grup topolojik grup olduğundan yukarıda belirtilen topolojik hipotezi sağlamaktadır. Dolayısıyla E_k-kılıfları Taimanov topolojisine göre kapalıdır.

Noktasal yakınsama topolojisine göre E_k-kılıflarının kapalı olduğu aşağıdaki sonuçtan görülebilir.

Sonuç 4.2.12: E_k-kılıfları $\mathcal{T}_p$ noktasal yakınsama topolojisine göre kapalıdır.

İspat: $\mathcal{T}_p$ noktasal yakınsama topolojisine sahip bir grup Teorem 2.2.16 dan topolojik gruptur. Eğer G bir topolojik grup ise her $g, h \in G$ için,

$$f: G \times G \to G, f(g,h) = gh$$
$$k: G \to G, k(g) = g^{-1}$$

dönüşümleri süreklidir. Dolayısıyla,

$$k_x: G \times G \to G, k_x(g,h) = [g,h]$$

dönüşümü de sürekli olur. Buna göre, Lemma 4.2.2 nin ispatından E_k-kılıfları kapalıdır.

Şimdi de E_k altgruplarının kısmı Zariski topolojisine göre hangi kısıtlamalar altında kapalı olacağı ispatlanacaktır.

Teorem 4.2.13: $G \supseteq S_\omega(X)$ olacak şekilde bir grup olmak üzere, E_k-kılıfları $\mathcal{Z}'_G$ kısmi Zariski topolojisine göre kapalıdır.

İspat: $S_\omega(X)$'i ihtiva eden bir G grubu için, Teorem 2.2.17 den,

$$\mathcal{Z}''_G \subset \mathcal{Z}'_G = \mathfrak{T}_G = \mathcal{T}_p$$

olduğundan $\mathcal{Z}'_G$ bir grup topolojisi olur. Sonuç 4.2.12 ve Lemma 4.2.2 nin ispatından E_k-kılıfları $\mathcal{Z}'_G$ kısmi Zariski topolojisine göre kapalıdır.

4.3. Karşıt Örnek

Araştırma bulguları ana başlığından bu alt bölüme kadar stabillik problemine olumlu yanıt veren grup sınıflarından bahsedildi. Bu bölümde E_k-kılıfları zincirinin stabilleşmesi probleminin genel olarak gruplarda doğru olması gerekmediğini gösteren bir ters örnek ayrıntılı bir şekilde inşa edilecektir.

Doğal sayılar üzerindeki simetrik grup $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ üzerinde çalışılmıştır. Bu grup G ile gösterilmektedir. $\mathrm{E_k}$-kılıfları sonsuz azalan bir zincir meydana getiren H altgrubunu, aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$\mathrm{K} = \bigoplus_{\mathrm{x}\in\mathbb{N}}\langle(2\mathrm{x}\ 2\mathrm{x}+1)\rangle$ olarak alınsın. Dikkat edilirse K, G grubunun bir normal altgrubudur. Şimdi her $\mathrm{x} \in \mathbb{N}$ için,

$$f(x) = \begin{cases} x \longmapsto x+2, & x\ çift\ sayı \\ x \longmapsto x-2, & x\ tek\ sayı, x \neq 1 \\ 1 \longmapsto 0, & x = 1\ ise \end{cases}$$

olmak üzere,

$$(2x\ 2x+1) \longmapsto (2f(x)\ 2f(x)+1)$$

etkimesi ile verilen özel bir permütasyon tanımlayalım. $\mathfrak{M}_c$ olma özelliğine sahip olmayan G grubunun $\mathrm{H} = \mathrm{K} \rtimes \langle \mathrm{f} \rangle$ olarak tanımlanan alt grubu için $\mathrm{E_k(H)}$ kılıflarınının sonsuz azalan bir zincir meydana getirdiği ispatlanacaktır.

Şu andan itibaren bu bölümün sonuna kadar verilen H altgrubuna karşılık gelen $E_k(H)$ kılıflarının yapısı belirlenecektir. Bu anlamda temel basamak, aşikar olmayan elemanları sonsuz desteğe sahip olan H nın tekrarlı merkezleyicilerinin G grubunun sonlu altgrupları olduğunu ve bu tekrarlı merkezleyicilerin sonsuz bir zincir oluşturduğunu kanıtlamaktır.

$\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ grubunun elemanları için özel bir notasyon kullanılacaktır:

$$g \in \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \Rightarrow g = \prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_g(x)}, j_g(x) \in \{0,1\}.$$

j_g fonksiyonu ile ilgili bölümler temel aritmetik içermektedir ve bu daima 2 moduna göre yapılacaktır.

İlk olarak, bilinen iki sonuç teknik bir lemma olarak ispatlanacaktır.

Lemma 4.3.1: G_0,

$$G \geq G_0 \geq \prod_{x \in \mathbb{N}} \langle (2x\ 2x+1) \rangle$$

özelliğini sağlayan bir grup olsun. Bu durumda

i. $C_G\left(\bigoplus_{x \in \mathbb{N}} \langle (2x\ 2x+1) \rangle\right) = \prod_{x \in \mathbb{N}} \langle (2x\ 2x+1) \rangle$
ii. $C_{G_0}(H) = \langle \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1) \rangle$

eşitlikleri sağlanır (Cakmak 2018).

İspat: İlk olarak i. seçeneği doğrulanacaktır.

$$C_G\left(\bigoplus_{x \in \mathbb{N}} \langle (2x\ 2x+1) \rangle\right) = C_G(\{(2x\ 2x+1) | x \in \mathbb{N}\})$$

olduğundan g nin $C_G\left(\bigoplus_{x \in \mathbb{N}} \langle (2x\ 2x+1) \rangle\right)$ merkezleyicisinin bir elemanı olması için gerek ve yeter şart her $x \in \mathbb{N}$ için $g(2x\ 2x+1)g^{-1} = (2x\ 2x+1)$ olmasıdır ki bunun da sağlanması için gerek ve yeter şart her $x \in \mathbb{N}$ için $g\{2x, 2x+1\} = \{2x, 2x+1\}$ olmasıdır.

Şimdi de ii. seçeneğini ispatlanacaktır. H alt grubu $K \rtimes \langle f \rangle$ şeklinde belirlendiği için $C_{G_0}(K \rtimes \langle f \rangle)$ merkezleyicisi araştırılmaktadır. $C_{G_0}(K)$ merkezleyicisi (i) seçeneğinden bilindiğinden,

$$C_{C_{G_0}(K)}(\langle f \rangle) = \left\{ g \in C_{G_0}(K) \middle| [g, f] = \mathrm{I} \right\}$$

merkezleyicisini belirlemek yeterli olacaktır. (i) seçeneğinden,

$$g \in C_{G_0}(K) \Longrightarrow g = \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1)^{j_g(x)}, 0 \leq j_g(x) \leq 1$$

seçilebilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}[g,f] &= \left[\prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1)^{j_g(x)}, f\right] \\ &= \prod_{x \in \mathbb{N}} \left((2x\ 2x+1)^{j_g(x)} f^{-1}\left((2x\ 2x+1)^{j_g(x)}\right) f\right) \\ &= \prod_{x \in \mathbb{N}} \left((2x\ 2x+1)^{j_g(x)} (2f^{-1}(x)\ 2f^{-1}(x)+1)^{j_g(x)}\right) \\ &= \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1)^{j_g(x)+j_g(f(x))}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde her $x \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned}[g,f] = \mathrm{I} &\Leftrightarrow \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1)^{j_g(x)+j_g(f(x))} = \mathrm{I} \\ &\Leftrightarrow j_g(x) + j_g(f(x)) = 0 \\ &\Leftrightarrow j_g(x) = j_g(f(x))\end{aligned}$$

olmasıdır. Bu noktada, f fonksiyonu göz önünde bulundurulursa,

$$C_{C_{G_0}(K)}(\langle f \rangle) = \left\{\mathrm{I}, \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1)\right\} = \langle \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1) \rangle$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$C_{G_0}(H) = \langle \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1) \rangle$$

elde edilir.

Aşağıda verilen önerme tekrarlı merkezleyicilerin belirli bir döngü ile tekrar ettiğini göstermesi açısından oldukça önemlidir. Daha sonra ise doğruluğu belli bir varsayım dahilinde ispatlanan Önerme 4.3.2 için, Sonuç 4.3.3 ile genel hale varılacaktır.

Önerme 4.3.2: $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $E_k(H)$ kılıfı için $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \leq E_k(H)$ kapsamının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ ve $i \leq k$ için,

$$C_{E_k(H)}^{i+1}(H) \leq \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$$

ve her $h \in C_{E_k(H)}^{i+1}(H)$ ile her $x \in \mathbb{N}$ için,

$$j_h(x) = j_h\big(x + 2^{(i+1)}\big)$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak her $k \in \mathbb{N}$ ve $i \leq k+1$ için $C_{E_k(H)}^{i+1}(H)$ grubu sonludur (Cakmak 2018).

İspat: $k \in \mathbb{N}$ olsun. İspat $i \leq k$ üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $i = 0$ için iddianın $C_{E_{k(H)}}(H)$ merkezleyicisinde sağlandığı gösterilmelidir. $H = K \rtimes \langle f\rangle$ olarak verildiğinden, $C_{E_{k(H)}}(H)$ ve $C_{E_{k(H)}}(\langle f\rangle)$ merkezleyicilerini hesaplamak yeterli olacaktır. Önermenin hipotezinden $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \leq E_k(H)$ altgrubu abel olduğundan $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \leq C_{E_{k(H)}}(H)$ olur. Şimdi ise bu kapsamanın aslında bir eşitlik olduğunu görelim. Lemma 3.3.1 i. den $C_{E_{k(H)}}(K) = \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ dir. $C_{E_{k(H)}}(H)$ merkezleyicisini bulabilmek için $C_{C_{E_{k(H)}}(K)}(\langle f\rangle)$ merkezleyicisi belirlenmelidir. $g \in \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ olsun. Buna göre g, $\prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_g(x)}$ formunda bir elemandır. Lemma 4.3.1 ile $[g,f] = 1$ olması için gerek ve yeter şartın her $x \in \mathbb{N}$ için $j_g(x) = j_g\big(f(x)\big)$ eşitliğinin sağlanması olduğu kanıtlanmıştır. f fonksiyonunu göz önünde bulundurarak,

$$j_g(x) = j_g\big(f(x)\big) \Leftrightarrow \begin{cases} j_g(2x) = j_g(2x+2), & x \in \mathbb{N} \\ j_g(2x+1) = j_g(2x-1), & 1 \le x, x \in \mathbb{N} \\ j_g(1) = j_g(0) \end{cases}$$

elde edilir. O halde,

$$C_{C_{E_{k(H)}}(K)}(\langle f \rangle) = \left\{ \mathrm{I}, \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1) \right\} = \langle \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1) \rangle$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$C_{E_{k(H)}}(H) = \langle \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1) \rangle$$

sonucuna ulaşılır. $j_g(x) = j_g(x+1)$ eşitliği $C_{E_{k(H)}}(H)$ merkezleyicisinde sağlandığından $j_g(x) = j_g(x+2)$ eşitliği direkt olarak sağlanır. O halde iddia $i = 0$ için doğrudur.

$(i-1)$ için iddia doğru olsun. Buna göre $C^i_{E_k(H)}(H) \le \prod_{x \in \mathbb{N}} \langle (2x\ 2x+1) \rangle$ ve her $h \in C^i_{E_k(H)}(H)$ ile her $x \in \mathbb{N}$ için $j_h(x) = j_h\big(x + 2^i\big)$ ifadeleri tümevarımdan doğrudur.

Dikkat edilirse $C^i_{E_k(H)}(H)$ merkezleyicisinin birim dışındaki elemanlarının sonsuz desteğe sahip oldukları tümevarım hipotezi ve $j_h(x) = j_h\big(x + 2^i\big)$ eşitliğinden görülebilir. $i \in \mathbb{N}$ için $C^{i+1}_{E_k(H)}(H) = \big\{ g \in E_{k(H)} \big| [g, H] \subseteq C^i_{E_k(H)}(H) \big\}$ ve $H = K \rtimes \langle f \rangle$ olduğundan, her $g \in C^{i+1}_{E_k(H)}(H)$ aşağıdaki şartları sağlamaz:

- $[g, K] \subseteq C^i_{E_k(H)}(H)$
- $[g, f] \subseteq C^i_{E_k(H)}(H)$.

$\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ üzerinde geçerli olan hipotez ile şu iki durum ortaya çıkar:

a. $g \in \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$

b. $g \in E_{k(H)} \setminus \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$.

Bu şartları sağlayan $g \in E_{k(H)}$ elemanları belirlenmelidir.

- $[g, K]$ üzerindeki komütatör şartı ile başlayalım.

a. $g \in \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ iken, $k \in K \Rightarrow k \in \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ olduğundan $[g, K] = \mathrm{I} \subseteq C^{i}_{E_k(H)}(H)$ olup, belirtilen formdaki bütün elemanlar $C^{i+1}_{E_k(H)}(H)$ merkezleyicisindedir.

b. $g \in E_k(H) \setminus \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ elemanı için, $g^{-1}\{2x, 2x+1\} = \{2x, 2x+1\}$ eşitliğini sağlamayan $\exists\ x \in \mathbb{N}$ vardır.

Böylece $[g, (2x\ 2x+1)] \neq 1$ dir. Fakat K grubunun $(2x\ 2x+1)$ elemanı için $[g, (2x\ 2x+1)]$ komütatörünün sonlu desteğe sahip olduğu hesaplanarak görülebilir. Bu yüzden K grubunun $[g, (2x\ 2x+1)] \notin C^{i}_{E_k(H)}(H)$ olacak şekildeki bir elemanı bulunmuş olur. Gerçekten ispatın tümevarım adımının başında bahsedildiği gibi, $C^{i}_{E_k(H)}(H)$ nın aşikar olmayan bütün elemanları sonsuz desteğe sahiptir. Böylece, $C^{i+1}_{E_k(H)}(H) \leq \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ olur.

- Bir önceki adımı kullanarak, $[g, f] \subseteq C^{i}_{E_k(H)}(H)$ şartını sağlayan $g \in \prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ elemanları analiz edilmelidir. g, $\prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_g(x)}$ formunda bir elemandır. Her $x \in \mathbb{N}$ için,

$$[g, f] = \prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_g(x)+j_g(f(x))}$$

olduğu daha önceden doğrulanmıştır. g elemanı,

$$[g,f]=\prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_g(x)+j_g(f(x))}\in C^i_{E_k(H)}(H)$$

şartını sağladığından,

$$\prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_g(x)+j_g(f(x))}=\prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_h(x)}$$

olacak şekilde $h=\prod_{x\in\mathbb{N}}(2x\ 2x+1)^{j_h(x)}\in C^i_{E_k(H)}(H)$ elemanı vardır. Buradan her $x\in\mathbb{N}$ için $j_g(x)+j_g(f(x))=j_h(x)$ olur. f fonksiyonunun tanımından $a\in\mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{aligned} j_g(2a)+j_g(2a+2)&=j_h(2a)\\ j_g(2a+3)+j_g(2a+1)&=j_h(2a+3)\\ j_g(1)+j_g(0)&=j_h(1)\end{aligned}$$

$j_g(x)$ kuvvetleri tek ve çift haneli olma durumları ayrı ayrı fakat paralel düşünme metodu kullanılarak incelenecektir. Tümevarım hipotezinden çift haneli elemanlar için

$$\begin{array}{ll} a=0, & j_{i+1}(0)+j_{i+1}(2)=j_i(0),\\ \vdots\ , & \quad\vdots \qquad = \quad \vdots\\ a=a, & j_{i+1}(2a)+j_{i+1}(2a+2)=j_i(2a),\\ \vdots\ , & \quad\vdots \qquad = \quad \vdots\\ a=2^{i-1}-1, & j_{i+1}(2^i)+j_{i+1}(2^i-2)=j_i(2^i-2) \end{array}$$

şeklinde verilen denklem sistemi

$$j_g(2a) + j_g(2a+2) = j_h(2a), \qquad 0 \le a < 2^{i-1}$$

genel kuralı ile elde edilir. Denklem sisteminde $0 \le j_g(x) \le 1$ olduğu göz önünde bulundurularak eşitlikler taraf tarafa toplanırsa,

$$j_g(0) + 2j_g(2) + \cdots + 2j_g(2^i - 2) + j_g(2^i) = j_h(0) + j_h(2) + j_h(4) + \cdots j_h(2^i - 2)$$

$$\Rightarrow j_g(0) + j_g(2^i) = \sum_{a=0}^{2^{i-1}-1} j_h(2a)$$

bulunur. $\sum_{a=0}^{2^{i-1}-1} j_h(2a)$ toplamı için aşağıdaki ihtimaller söz konusudur:

a. $\sum_{a=0}^{2^{i-1}-1} j_h(2a) = 0$
b. $\sum_{a=0}^{2^{i-1}-1} j_h(2a) = 1.$

a. Seçeneğinin sağlanması durumunda

$$j_g(0) + j_g(2^i) = 0 \Rightarrow j_g(0) = j_g(2^i)$$

elde edilir. Bu sonuç, $j_g(x) = j_g(x + 2^i)$ eşitliğinin $x = 0$ durumu için sağlandığını gösterir. Benzer şekilde, 0 ile $2^{i-1} - 1$ arasında a için seçilen başlangıç değerinin değiştirilmesi ile 2^{i-1} tane denklem ihtiva eden sistem oluşturulabilir. Dolayısıyla her x çift sayısı için $j_g(x) = j_g(x + 2^i)$ eşitliği sağlanır.

b. Seçeneğinin sağlanması durumunda kuvvetlerin peryodikliği tamamlanmamış olduğundan dolayı,

$$j_g(2a) + j_g(2a+2) = j_h(2a), \qquad 2^{i-1} \le a < 2^i - 1$$

aralığında denklem sistemi kaldığı yerden devam eder ve sisteme aynı sayıda denklem ilave edilirse,

$$
\begin{array}{ll}
a = 2^{i-1}, & j_{i+1}(2^i) + j_{i+1}(2^i + 2) = j_i(2^i) \\
a = 2^{i-1} + 1, & j_{i+1}(2^i + 2) + j_{i+1}(2^i + 4) = j_i(2^i + 2) \\
a = 2^{i-1} + 2, & j_{i+1}(2^i + 4) + j_{i+1}(2^i + 6) = j_i(2^i + 4) \\
\vdots \qquad , & \qquad \vdots \qquad\qquad = \quad \vdots \\
a = 2^i - 1, & j_{i+1}(2^{i+1} - 2) + j_{i+1}(2^{i+1}) = j_i(2^{i+1} - 2)
\end{array}
$$

yazılır. Tekrar taraf tarafa toplama yapılırsa,

$$j_g(2^i) + \cdots + 2j_g(2^{i+1} - 2) + j_g(2^{i+1}) = j_h(2^i) + j_h(2^i + 2) + \cdots + j_h(2^{i+1} - 2)$$

$$\Rightarrow j_g(2^i) + j_g(2^{i+1}) = \sum_{a=2^i-1}^{2^i-1} j_h(2a) = 1$$

elde edilir. Buna göre her iki denklem sisteminden,

$$\left(j_g(0) + j_g(2^i)\right) + \left(j_g(2^i) + j_g(2^{i+1})\right) = \sum_{a=0}^{2^{i-1}-1} j_h(2a) + \sum_{a=2^i-1}^{2^i-1} j_h(2a)$$

$$\Rightarrow j_g(0) + 2j_g(2^i) + j_g(2^{i+1}) = \sum_{a=0}^{2^i-1} j_h(2a)$$

$$\Rightarrow j_g(0) + j_g(2^{i+1}) = \sum_{a=0}^{2^i-1} j_h(2a) = 0$$

sonucu bulunur. Buradan, $j_g(0) = j_g(2^{i+1})$ olur. Tekrar a için seçilen başlangıç değeri değiştirilerek de $j_g(x) = j_g(x + 2^{i+1})$ olduğu herhangi bir x çift sayısı için görülebilir. O halde iddia çift sayılar için doğru olur.

Tek sayılar için,

$$j_g(2a+3)+j_g(2a+1)=j_h(2a+3)$$

denklemi göz önünde bulundurularak benzer hesaplamalar yapılırsa, istenilen eşitliğin x tek sayıları için sağlandığı görülebilir. Böylece, verilen önerme hem tek haneli hem de çift haneli elemanlar için sağlandığından, bütün doğal sayılar için doğrudur.

Aşağıda verilecek sonuç ile, Önerme 4.3.2 için verilen varsayım olmaksızın da iddianın sağlanacağı ispatlanmaktadır.

Sonuç 4.3.3: Her $k \in \mathbb{N}$ için $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \leq E_k(H)$ olur ve özel olarak Önerme 4.3.2 de verilen $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \leq E_k(H)$ varsayımına gerek yoktur (Cakmak 2018).

İspat: Durumun $k=0$ için doğru olduğu açıktır. k için iddianın doğru olduğunu kabul edip, $(k+1)$ için iddianın doğruluğunu görelim. Tanımdan,

$$E_{k+1}(H)=\left\{g\in E_k(H)\middle|\left[g,C^{k+1}_{E_k(H)}(H)\right]\leq C^{k}_{E_k(H)}(H)\right\}$$

yazılır. Tümevarım kabulünden $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \leq E_k(H)$ dır. $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ abel grup ve Önerme 4.3.2 den $C^{k+1}_{E_k(H)}(H)\leq\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ olduğundan, her $g\in\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle$ için,

$$\left[g,C^{k+1}_{E_k(H)}(H)\right]=1\leq C^{k}_{E_k(H)}(H)$$

olur. Buradan da, $\prod_{x\in\mathbb{N}}\langle(2x\ 2x+1)\rangle \leq E_{k+1}(H)$ olacağından iddia $(k+1)$ için de doğrudur.

Aşağıda verilen iki önerme ile $C^{i}_{E_k(H)}(H)$ tekrarlı merkezleyicilerinin, kesin artan bir zincir meydana getirdiği gösterilmiştir.

Önerme 4.3.4: $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $C^{k+1}_{E_{k+1}(H)}(H) = C^{k+1}_{E_k(H)}(H)$ olur (Cakmak 2018).

İspat: Lemma 3.1.6 iii, seçeneği $H \leq E_{k+1}(H) \leq E_k(H)$ grup üçlüsüne uygulanacaktır. Lemma 3.2.3 ten $i, k \in \mathbb{N}$ ve $i \leq k$ için $C^{i}_{E_k(H)}(H) = Z_i\big(E_k(H)\big)$ olduğundan, Lemma 3.1.6 nın uygulanabilmesi için gerekli olan hipotez sağlanmış olur. Böylece

$$C^{k+1}_{E_{k+1}(H)}(H) = C^{k+1}_{E_k(H)}(H) \cap E_{k+1}(H)$$

eşitliği yazılabilir. Önerme 4.3.2 ve Sonuç 4.3.3 ten,

$$C^{k+1}_{E_k(H)}(H) \leq \prod_{x \in \mathbb{N}} \langle (2x\ 2x+1) \rangle \leq E_{k+1}(H)$$

olduğundan,

$$C^{k+1}_{E_{k+1}(H)}(H) = C^{k+1}_{E_k(H)}(H)$$

elde edilir.

Önerme 4.3.5: Her $k \in \mathbb{N}$ ve $i \leq k$ için, $C^{i}_{E_k(H)}(H) < C^{i+1}_{E_k(H)}(H)$ olur (Cakmak 2018).

İspat: Önerme 4.3.2 den,

$$C_{E_{k(H)}}(H) = \langle \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1) \rangle$$

yazılır. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq k+1$ için $C^{i}_{E_k(H)}(H)$ birimden farklıdır. Aşikar olmayan her $h \in C^{i}_{E_k(H)}(H)$ elemanı için $x < x_0$ olacak şekildeki her x çift (sırasıyla tek) sayısı için $j_h(x_0) = 1$ ve $j_h(x) = 0$ şartını sağlayan bir ilk çift (sırasıyla tek) x_0 hanesi mevcuttur. x_0 maksimal olacak şekilde bir $h \in C^i_{E_k(H)}(H)$ elemanı sabitlensin. Önerme 4.3.2 den $C^i_{E_k(H)}(H)$ sonlu olduğundan böyle bir h elemanı mevcuttur. $[g, f] = h$ olacak şekilde $g \in C^{i+1}_{E_k(H)}(H) \setminus C^i_{E_k(H)}(H)$ elemanının var olduğu gösterilecektir. $g = \prod_{x \in \mathbb{N}} (2x\ 2x+1)^{j_g(x)}$ formunda bir eleman olduğuna dikkat edilmelidir. İlk olarak x_0 hanesinin çift sayı olması durumu göz önüne alınsın. Önerme 4.3.2 de verilen,

$$\begin{gathered} j_g(2a) + j_g(2a+2) = j_h(2a) \\ j_g(2a+3) + j_g(2a+1) = j_h(2a+3) \\ j_g(1) + j_g(0) = j_h(1) \end{gathered} \tag{4.6}$$

eşitliğinin çift sayılar için olan durumu kullanılarak g ve h için,

$$\begin{aligned} j_g(0) + j_g(2) &= j_h(0) = 0 \\ j_g(2) + j_g(4) &= j_h(2) = 0 \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ j_g(x_0 - 2) + j_g(x_0) &= j_h(x_0 - 2) = 0 \\ j_g(x_0) + j_g(x_0 + 2) &= j_h(x_0) = 1 \\ \vdots \quad &= \quad \vdots \\ j_g(2^{i+1} - 2) + j_g(2^{i+1}) &= j_h(2^{i+1} - 2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

şeklindeki denklem sistemi elde edilir. Önerme 4.3.2 den g haneleri 2^{i+1}-peryodik olduğundan bu denklem sistemi tekrar eder. g elemanı bu peryodiklik şartı ile tutarlı olarak tanımlanmaktadır. $j_g(0) = 0$ olarak alınsın. Bu durumda $2a \le x_0$ için $j_g(2a) = 0$ ve $j_g(x_0 + 2) = 1$ dir. (4.7) denklem sistemi kullanılarak, $x + 2 \le 2a \le 2^{i+1}$ için $j_g(2a)$ değerleri tümevarımsal hesaplanır. $j_g(0) = j_g(2^{i+1})$ olduğu gösterilmelidir. Denklem sisteminin her iki tarafı toplanarak,

$$j_g(0) + j_g\left(2^{i+1}\right) = \sum_{a=0}^{2^{i+1}-2} j_h(x) = 0$$

elde edilir. İkinci eşitlik ise j_h nın 2^i-peryodikliğinden görülebilir.

Geriye $a \in \mathbb{N}$ için j_g nin 2^{i+1}-peryodikliği ile tutarlı olarak $j_g(2a+1)$ leri tanımlamak kalır. $j_g(1) + j_g(0) = j_h(1)$ eşitliğinden, $j_g(1)$ değeri bulunabilir. Geriye kalan j_g tek haneleri ise $a \in \mathbb{N}$ için $j_g(2a+3) + j_g(2a+1) = j_h(2a+3)$ eşitliği kullanılarak tümevarımsal olarak hesaplanabilir. Eşitliğin sağ tarafı 2^i-peryodik olduğundan dolayı $j_g(2a+1)$ değerleri 2^{i+1}-peryodiktir.

x_0 hanesinin tek sayı olması durumunda ise;

$$j_g(1) + j_g(0) = j_h(1)$$

eşitliğinde $j_g(1) = 0$ ve $j_g(0) = 1$ alınır. Bu ilk adımdan sonra j_g nin kalan değerleri, x_0 ın çift sayı olması durumuna benzer şekilde (4.7) denklem sisteminde verilen eşitliklerin tutarlı olarak kullanılması yolu ile belirlenir.

Son olarak $g \in C^{i+1}_{E_k(H)}(H) \setminus C^{i}_{E_k(H)}(H)$ olduğunu belirtelim. Gerçekten de $[g, f] \in C^{i}_{E_k(H)}(H)$ ve aşikar bir biçimde $[g, K] = 1$ dir. Bu yüzden $g \in C^{i+1}_{E_k(H)}(H)$ dir. Hatta x_0 ın maksimal seçiminden dolayı $g \notin C^{i}_{E_k(H)}(H)$ dir.

Sonuç 4.3.6: $j < j'$, $k < k'$, $j \leq k$, $j' \leq k'$ olacak şekildeki bütün doğal sayılar için tekrarlı merkezleyiciler arasında aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

i. $C^{j}_{E_k(H)}(H) = C^{j}_{E_{k'}(H)}(H)$

ii. $C^{j}_{E_k(H)}(H) < C^{j'}_{E_{k'}(H)}(H)$.

Özel olarak, $\left(C^j_{E_k(H)}(H)\right)_{(k,j)}$ zinciri kesin artandır ve (k,j) indisleri sözlüksel biçimde sıralanmıştır (Cakmak 2018).

İspat: Tekrarlı merkezleyicilerin özelliklerinden $j \leq k$ için $C^j_{E_k(H)}(H) \leq C^k_{E_k(H)}(H)$ olduğunu bilinmektedir. Teorem 3.2.3 ten $C^k_{E_k(H)}(H) = Z_k\big(E_k(H)\big)$ yazılır. $k \leq k'$ için Sonuç 3.1.16 dan $Z_k\big(E_k(H)\big) \leq Z_{k'}\big(E_{k'}(H)\big)$ olduğundan,

$$C^j_{E_k(H)}(H) \leq C^k_{E_k(H)}(H) = Z_k\big(E_k(H)\big) \leq Z_{k'}\big(E_{k'}(H)\big) \leq E_{k'}(H) \qquad (4.8)$$

yazılır. Diğer yandan $j \leq k$ için $C^j_{E_k(H)}(H) = Z_j\big(E_k(H)\big)$ olduğundan, $H \leq E_{k'}(H) \leq E_k(H)$ altgruplarına Lemma 3.1.6 uygulanabilir. Buradan her $j \leq k$ için,

$$C^j_{E_{k'}(H)}(H) = C^j_{E_k(H)}(H) \cap E_{k'}(H)$$

elde edilir. (4.8) kapsamından,

$$C^j_{E_k(H)}(H) = C^j_{E_{k'}(H)}(H)$$

eşitliğinin doğruluğu görülür. ii. iddiası ise Önerme 4.3.5 ve i. sonucundan görülebilir.

Şimdi de E_k-kılıflarının sonsuz azalan bir zincir oluşturduğu kanıtlanacaktır. Bu bağlamda ilk olarak aşağıdaki teknik lemma verilmektedir.

Lemma 4.3.7: $k \in \mathbb{N}$ alalım. Her $x \in \mathbb{N}$ ve her $g \in C^{k+1}_{E_k(H)}(H)$ için $j_g(x) = j_g(x + 2^l)$ olacak şekildeki en küçük eleman $l \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$G_{x,l} = \left\langle \left(2(x + 2^l i)\ 2(x + 2^l i')\right)\left((2(x + 2^l i) + 1)\ (2(x + 2^l i') + 1)\right) \middle| i, i' \in \mathbb{N} \right\rangle$$

ve $0 \leq x < 2^l$ olmak üzere $G_{x,l} \leq E_k$ olur (Cakmak 2018).

İspat: İspat k üzerinden tümevarım ile yapılacaktır. $k = 0$ için sonuç açıktır. Tümevarımsal olarak iddianın k için sağlandığı kabul edilsin. Yani $G_{x,l} \leq E_k$ olsun. Önerme 4.3.2 den her $h \in C^{k+2}_{E_{k+1}(H)}(H)$ elemanı için $0 \leq x < 2^{l'}$ olmak üzere,

$$j_h(x) = j_h\left(x + 2^{l'}\right)$$

olacak şekilde bir $l' \leq k + 2$ sayısı vardır. $G_{x,l'} \leq E_{k+1}$ kapsamı doğrulanmak istenmektedir. $g \in G_{x,l'}$ alalım. $g \in E_{k+1}$ olduğunu doğrulamak için

a. $g \in E_k(H)$
b. $\left[g, C^{k+1}_{E_k(H)}(H)\right] \subseteq C^k_{E_k(H)}(H)$

şartlarının sağlanıp sağlanmayacağı kontrol edilmelidir.

a. $g \in E_k(H)$ olur mu?

Tümevarımdan hipotezinden, $0 \leq x < 2^l$ için $G_{x,l} \leq E_k$ olur. Sonuç 4.3.6 dan $C^{k+1}_{E_k(H)}(H) \leq C^{k+2}_{E_{k+1}(H)}(H)$ olduğundan, $l \leq l'$ dür. Bundan dolayı $2^{l'}$ moduna göre kalan sınıflarının oluşturduğu küme, 2^l moduna göre kalan sınıflarının oluşturduğu kümenin içinde kalacağından $0 \leq x < 2^{l'}$ için,

$$G_{x,l'} \leq G_{x,l} \leq E_k$$

elde edilir.

b. $\left[g, C^{k+1}_{E_k(H)}(H)\right] \subseteq C^k_{E_k(H)}(H)$ olur mu?

Tanımdan $0 \leq x < 2^{l'}$ olacak şekildeki belli bir x elemanı için $g \in G_{x,l'}$ olur. $2^{l'}$ moduna göre kalan sınıflarının oluşturduğu küme, 2^{l} moduna göre kalan sınıflarının oluşturduğu kümenin içinde kalacağından $\left[g, C_{E_k(H)}^{k+1}(H)\right] = 1$ dir. Bu yüzden $\left[g, C_{E_k(H)}^{k+1}(H)\right] \subseteq C_{E_k(H)}^{k}(H)$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.8: Her $k \in \mathbb{N}$ için $E_{k'+1}(H) < E_{k+1}(H)$ olacak şekilde en az bir $k' > k$ sayısı vardır (Cakmak 2018).

İspat: İlk olarak bir $k \in \mathbb{N}$ elemanı sabitlenerek başlanacaktır. x, l ve $G_{x,l} \leq E_{k+1}$ Lemma 4.3.7 ile verildiği gibi olsun. Önerme 4.3.2 den her $h \in C_{E_k(H)}^{k+1}(H)$ için $j_h(x) = j_h(x + 2^l)$ olsun. $C_{E_k(H)}^{i}$ sonlu olduğundan ve Sonuç 4.3.6 dan tekrarlı merkezleyicilerin bu şekildeki zinciri kesin artandır, $k' > k$, $h \in C_{E_{k'}(H)}^{k'+1}(H)$ ve $0 \leq x_0 < 2^l$ olmak üzere,

$$j_h(x_0) = j_h(x_0 + 2^l)$$

olacak biçimde x_0 sayısı vardır. g elemanını,

$$g = \left(2x_0 \ 2(x_0 + 2^l)\right)(2x_0 + 1 \ 2(x_0 + 2^l) + 1)$$

olarak tanımlayalım. Lemma 3.3.7 den $g \in E_k(H)$ dır. Aslında,

$$\left[g, C_{E_k(H)}^{k+1}(H)\right] = 1 \subseteq C_{E_k(H)}^{k}(H)$$

olduğundan $g \in E_{k+1}(H)$ dır. Fakat $g \notin E_{k'+1}(H)$ dir. Çünkü $i \in \mathbb{N}$ için,

$$[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}hgh = h^g$$

$$= (2x_0\ 2x_0+1)(2(x_0+2^l)\ 2(x_0+2^l)+1)\left(\prod_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ i\neq x_0,x_0+2^l}} (2i\ 2i+1)^{j_h(i)}\right)^2$$

$$= (2x_0\ 2x_0+1)(2(x_0+2^l)\ 2(x_0+2^l)+1)$$

transpozisyonlarının çarpımı elde edilir.

$[g,h] \neq 1$ ve sonlu desteğe sahip olduğundan $[g,h] \notin C^{k'}_{E_{k'}(H)}(H)$ dir. Dolayısıyla $g \in E_{k+1}(H)$ iken,

$$\left[g, C^{k'+1}_{E_{k'}(H)}(H)\right] \nleq C^{k'}_{E_{k'}(H)}(H)$$

olduğundan $g \notin E_{k'+1}(H)$ elde edilir.

Böylece, doğal sayılar üzerinde belirlenen simetrik grubun altgrubunda E_k-kılıflarının oluşturduğu zincirin durmadan azaldığı gösterilmiştir. Burada $Sym(\mathbb{N})$ grubunun merkezleyiciler üzerinde zincir şartını sağlamaktan uzak bir grup olduğuna dikkat edilmelidir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu doktora tez çalışmasında, sonsuz grupların E_k-kılıfları olarak adlandırılan özel bir altgrup sınıfı üzerine çalışılmıştır. Altgrupları sarmalayan özel bir üst grup sınıfı olan bu kılıfların zinciri azalan bir dizi meydana getirdiğinden, bu zincirin belli bir noktadan sonra durup durmayacağı ortaya çıkan doğal bir sorudur. Stabilleşme problemi olarak adlandırdığımız bu problemin yanıtı için, çeşitli grup sınıflarında E_k-kılıf zincirinin durması için yeterli şartlar analiz edilmiştir. $\mathfrak{M}_C$-grup sınıfına dahil bir grubun nilpotent altgruplarını sarmalayan kılıfların tanımlanabilir olduğunun kanıtlanması, benzer tanımlanabilirlik sonuçlarının farklı altgrup sınıfları için (örneğin; $\mathfrak{M}_C$-grupların çözülebilir altgrupları) elde edilip edilemeyeceği çalışmalarımız için temel anlamda motivasyon teşkil etmiştir. Bu yüzden özel olarak $\mathfrak{M}_C$-grup sınıfında stabilizasyon probleminin yanıtı araştırılmıştır.

Çalışmalarımız sonucunda stabilleşme problemi için aşağıda sıralanan olumlu sonuçlar elde edilmiştir:

- Kılıfın nilpotentliğinin H altgrubunun nilpotentliğinin bir sonucu olduğu ve buradan bir tümevarım argümanı ile H altgrubu k-nilpotent olduğunda $\left(E_i(H)\right)_i$ azalan zincirinin en fazla k adım sonrasında durduğu ispatlanmıştır.
- Çalışmalarımıza daha geniş kapsamda devam etmek için çeşitli teknik araçlar oluşturulmuş, keyfi grupların ve $\mathfrak{M}_C$-grupların hipermerkezil altgrupları analiz edilmiş ve keyfi bir grubun hipermerkezil altgrubunun kılıfları için yeni bir sonluluk şartı bulunmuştur. Ayrıca bir $\mathfrak{M}_C$-grubun ve keyfi bir grubun hipermerkezil altgrubunun kılıflarının cebirsel yapısı ile ilgili sonuca varılmıştır.
- Lineer gruplar gibi kapalı altgruplar üzerinde noetherianlık şartlarını sağlayan ve çeşitli topolojik özelliklere sahip gruplarda keyfi altgrupların kılıflarının E_k-zincirinin stabil olduğu ispatlanmıştır. Böylece $\mathfrak{M}_C$ olma özelliğine sahip bir grup sınıfında stabillik probleminin olumlu yanıt bulduğu görülmüştür.

E_k-zincirinin stabilliği oldukça güçlü bir özelliktir. Bu sebeple, genel manada bu problemin olumlu yanıta sahip olamayacağı tahmin edilebilir bir sonuçtur. Fakat hangi koşullar altında bir karşı örneğin ortaya konulabileceğini anlamak, bu konuda daha fazla bilgi verecektir. Merkezleyiciler üzerinde zincir şartını sağlamaktan uzak bir grup olan $Sym(\mathbb{N})$ grubunda kılıfların E_k-zincirinin stabil olmadığı bir ters örnek inşa edilmiştir. Daha belirgin örneklerle sonuca ulaşılmaya çalışılırken, sonsuz bir E_k-zincirinin, böylesine karmaşık bir örnek inşaası ile elde edilmesi ise şaşırtıcıdır.

Öte yandan, $p = 2$ özel hali için oluşturulan bu karşıt örneğin herhangi bir p asal sayısına genelleştirilmesi, üzerinde çalışılabilecek bir projedir. Tez sürecinin son aşamalarında çalışılmaya başlanan bu proje henüz tamamlanmamıştır. Bu konuda elde edilen bazı sonuçlar ise şu şekildedir: Tanımdan, sıfırıncı kılıfın grubun kendisine eşit olduğu bilinmektedir. Birinci kılıf p uzunluğundaki devirlerle üretilen grupların direkt çarpım grubu ile $Sym(\mathbb{N})$ grubunun yarıdirekt çarpımından oluşan gruptur. Çalışmalar ilerledikçe genelleme oldukça karmaşık bir hal alacağından, İkinci kılıfın belirlenmesi için gerekli olan tekrarlı merkezleyicileri bulmak oldukça karmaşık olup, birinci kılıfa göre ilk tekrarlı merkezleyici için p mertebeli, birinci kılıfa göre ikinci tekrarlı merkezleyici için ise p^2 mertebeli bir grup elde edilmiştir. Bundan sonraki aşamada ise kılıfları tek tek belirlemek oldukça zor olacağından genel bir sonuca ulaşmak planlanmaktadır.

Bu çalışmaların yanı sıra, bir takım topolojik metotlar kullanılarak $\mathfrak{M}_C$ olma özelliğine sahip bir grup sınıfında stabilleşme problemine olumlu yanıt elde edilmesine rağmen, $\mathfrak{M}_C$-grupların keyfi altgruplarının kılıflarının zincirinin stabilliği hala açık bir sorudur. Bu sorunun olumlu yanıta sahip olması ile, potansiyel olarak Altınel and Baginski (2014) çalışmasında elde edilen tanımlanabilirlik sonuçlarına benzer çıkarımlar elde edilebilecektir.

Kılıfların oluşturduğu azalan zincirin stabilliği üzerine yapılan bu çalışmada grup teorik ve topolojik metotlar kullanılarak probleme yaklaşılmıştır. Öte yandan;

- Probleme model teorik yaklaşımlar ile yeni bir boyut kazandırabilmek,
- Cebirsel bir tanım olan $\mathfrak{M}_C$ olma özelliği ile yakın ilişki içinde olan topolojiler araştırılıp, aralarında bir ilişki kurulabilirse stabilleşme probleminin $\mathfrak{M}_C$-gruplar için de bir çözümünü bulabilmek mümkün olabilir.

KAYNAKLAR

Altınel, T. and Baginski, P., 2014. Definable envelopes of nilpotent subgroups of groups with chain conditions on centralizers. Proceedings of the American Mathematical Society, 142(5), 1497-1506.

Asar, A.O., Arıkan, A. and Arıkan, A., 2009. Cebir. Eflatun Yayınevi, 373, Ankara.

Banakh, T., Guran, I. and Protasov, I., 2012. Algebraically determined topologies on permutation groups. Topology and its Applications, 159(9), 2258-2268.

Bludov, V.V., 1998. Locally nilpotent groups with the minimal condition on centralizers. Algebra and Logic, 37(3), 151-156.

Bourbaki, N., 1966. Elements of Mathematics: General Topology. Addison-Wesley Publishing Company, 442, France.

Bryant, R.M. and Hartley, B., 1979. Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralizers. Journal of Algebra, 61(2), 328-334.

Bryant, R.M., 1977. The verbal topology of a group. Journal of Algebra, 48(2), 340-346.

Bryant, R.M., 1979. Groups with the minimal condition on centralizers. Journal of Algebra, 60(2), 371-383.

Cakmak, T., 2018. On stabilization of E_k chains. Communications in Algebra, 1532-4125, Article DOI: 10.1080/00927872.2018.1472273.

Cameron, J.P., 1999. Sets,Logic and Categories. Springer-Verlag, 180, UK.

Derakhshan, J. and Wagner, F. O., 1997. Nilpotency in groups with chain conditions, Quarterly Journal Of Mathematics, 48, 453-466.

Dikranjan, D. and Toller, D., 2012. Markov's problems through the looking glass of Zariski and Markov topologies. In Ischia Group Theory 2010, 87-130.

Duncan, A.J., Kazatchkov, I.V. and Remeslennikov, V.N., 2005. Centraliser dimension and universal classes of groups. arXiv: math. GR/0502498.

Kaplansky, I., 1957. An introduction to differential algebra. Hermann, 62, Paris.

Karakaş, H.İ., 2010. Cebir Dersleri. Türkiye Bilimler Akademisi, 462, Ankara.

Lennox, J.C. and Roseblade, J.E., 1970. Centrality in finitely generated soluble groups. Journal of Algebra, 16(3), 399-435.

Markov A. A., 1944. On unconditionally closed sets. Comptes Rendus Doklady AN SSSR (N.S.), 44, 180–181 (in Russian).

Nesin, A., 2014. Temel Grup Teorisi. Nesin Yayıncılık, 390, İstanbul.

Robinson, D.J.S., 1991. A Course in the Theory of Groups. Springer-Verlag, 512, New York.

Taimanov A.D., 1978. Topologizable groups. II. Sibirsk. Mat. Zh. 19(5), 1201-1203 (in Russian). English translation in: Siberian Math. J. 19(5), 848–850.

Toller, D., 2014. Verbal Fuctions of a Group. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 46, 71-99

Wagner, F.O., 1997. Stable groups (Vol. 240). Cambridge University Press, 320,UK.

Wagner, F.O., 1999. Nilpotency in groups with the minimal condition on centralizers. Journal of Algebra, 217(2), 448-460.

Wehrfritz, B.A.F., 1973. Infinite Linear Groups. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 229, New York.

Zalesski, A.E., 1965. Locally finite groups with the minimality condition for the centralizers. Proceedings of Academy of Science of USSR N, 3, 127-129.

ÖZGEÇMİŞ

Tuba Çakmak 1987 yılında Erzurum'da doğdu. İlk ve orta öğretimini Erzurum'da tamamladı. 2006 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümüne yerleşerek lisans öğrenimine başladı ve 2010 yılında mezun oldu. Aynı yıl Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2012 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Cebir ve Sayılar Teorisi Bilim Dalında doktora eğitimine başlamaya hak kazandı. Halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.