

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

VERİMLİLİK ESASLI REAKSİYON KONVEKSİYON DİFÜZYON MODELİ

Olgun CABRİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 10.05.2011
Tezin Savunma Tarihi : 30.05.2011

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Erhan COŞKUN

Trabzon 2011

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalında

Olgun CABRİ tarafından hazırlanan

VERİMLİLİK ESASLI REAKSİYON-KONVEKSİYON-DİFÜZYON MODELİ

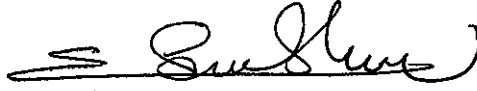
başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 10 / 05 / 2011 gün ve 1404 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından 30/ 05 / 2011 tarihinde yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof.Dr. Erhan COŞKUN



Üye : Prof.Dr. İhsan ÜNVER



Üye : Prof.Dr. Orhan AYDIN



Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada daha çok reaksiyon-difüzyon etkileri ile bilinen tek canlı nüfus modeli; verimli coğrafi bölgelere doğru göç olayını modelleyebilecek biçimde genelleştirilerek reaksiyon-difüzyon-konveksiyon nüfus modeli elde edilmiştir. Elde edilen bu model Türkiye İstatistik Kurumu'ndan elde edilen nüfus verileri ile test yapılarak, içeriye göç alan veya dışarıya göç veren bölgelerin gelecekteki nüfusunu tahmin etmede kullanılabileceğini göstermiştir.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine yardımlarını esirgemeyen Sayın hocam Prof. Dr. Erhan COŞKUN'a teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Ayrıca KTÜ ve AÇÜ Matematik Bölümü'nün tüm hocalarına, moral desteklerinden ve yardımlarından dolayı KTÜ ve AÇÜ Matematik Bölümünün tüm araştırma görevlisi arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Olgun CABRİ

Trabzon 2011

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Verimlilik Esaslı Reaksiyon-Konveksiyon-Difüzyon Modeli” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Erhan COŞKUN’un sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 02/06/2011



Olgun CABRİ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ	III
TEZ BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET.....	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ	IX
TABLolar DİZİNİ.....	XII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1. Mevcut Nüfus Modelleri	2
2.1.1. Üstel Büyüme Modeli (Malthous Modeli)	2
2.1.2. Lojistic Büyüme Modeli.....	3
2.1.3. Reaksiyon Difüzyon Modelleri	5
3. YAPILAN ÇALIŞMALAR	7
4. REAKSİYON-KONVEKSİYON DENKLEMLERİ	9
4.1. Verimlilik Fonksiyonu Tanımı	9
4.1.1. Lineer Verimlilik Fonksiyonu	9
4.1.2. Parabolik Verimlilik Fonksiyonu	10
4.2. Reaksiyon - Konveksiyon Denklemleri	11
4.2.1. Üstel Büyüme Reaksiyon Terimi ile Konveksiyon Denklemleri.....	11
4.2.1.1. Lineer Verimlilik.....	12
4.2.1.2. Parabolik Verimlilik.....	17
4.2.2. Lojistik Büyüme Reaksiyon Terim ile Reaksiyon Konveksiyon Denklemi	26
4.2.2.1. Lineer Verimlilik.....	26

4.2.2.2.	Parabolik Verimlilik.....	33
5.	REAKSİYON-KONVEKSİYON-DİFÜZYON NÜFUS MODELİ.....	42
5.1.	Üstel Büyüme Reaksiyon Terimi ile Reaksiyon -Konveksiyon-Difüzyon	42
5.1.1.	Lineer Verimlilik.....	42
6.	REAKSİYON KONVEKSİYON DİFÜZYON MODELİNİN UYGULAMASI.	49
7.	SONUÇLAR	85
8.	ÖNERİLER	86
9.	KAYNAKLAR.....	87
	ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

VERİMLİLİK ESASLI REAKSİYON KONVEKSİYON DİFÜZYON MODELİ

Olgun CABRİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Erhan COŞKUN
2011, 88 sayfa

Bu çalışmada belirli bir bölgede nüfus tahmini için bölge verimliliğini esas alan bir Reaksiyon-Konveksiyon-Difüzyon (RKD) modeli geliştirilmiştir. Model üstel ve lojistik reaksiyon terimleriyle incelenmiş, analitik ve sayısal çözümleri elde edilmiştir. Özellikle değişik verimlilik fonksiyonları ile konveksiyon teriminin etkisi incelenmiş ve nüfusun hareketleri gözlemlenmiştir. Ayrıca geliştirilen RKD modeli, Türkiye İstatistik Kurumu'ndan (TÜİK) alınan gerçek veriler ile test edilmiş ve elde edilen sonuçlar ile bu modelin göç söz konusu olan bir bölgede kullanılabileceği sonucuna ulaşılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Reaksiyon Konveksiyon Difüzyon, Nüfus Modelleri, Verimlilik,

Master Thesis

SUMMARY

A POPULATION MODEL WITH REACTION DIFFUSION CONVECTION
EQUATION

Olgun CABRİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Erhan COŞKUN
2011, 88 Pages

In this study, a reaction-convection and diffusion type population model was developed. for analyzing population of some neighboring local regions. The model enhances the existing models, considering immigrations across neighboring locations, due to differences in productivity. This model has been tested on several local regions in Turkey with population data from TUIK(Turkish Statistical Institute).The results show that the predicted populations comply with the real data.

Key Words: Convection, Diffusion, Reaction, Population Model

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. Üstel büyüme modelinin $r > 0$ ve $r < 0$ olduğu durumlarına göre çözümün grafiği.....	3
Şekil 2. Değişik N_0 değerleri için lojistik modelin grafiği	4
Şekil 3. Örnek bir yaşam alanı	5
Şekil 4. Verimliliği lineer olan bir bölge.....	9
Şekil 5. Verimliliği parabolik olan bir bölge.....	10
Şekil 6. Verimliliği parabolik olan bir bölge.....	10
Şekil 7. Bölge üzerinde lineer artan verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı	13
Şekil 8. $r = 0$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	13
Şekil 9. $r = 0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	14
Şekil 10. $r = -0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	14
Şekil 11. Bölge üzerinde lineer azalan verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı	15
Şekil 12. $r = 0$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	16
Şekil 13. $r = 0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	16
Şekil 14. $r = -0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	17
Şekil 15. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı	19
Şekil 16. $r = 0$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	20
Şekil 17. $r = 0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	20
Şekil 18. $r = -0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	21
Şekil 19. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı	21
Şekil 20. $r = 0$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	22

Şekil 21. $r = 0$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	23
Şekil 22. $r < 0$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği.....	23
Şekil 23. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun grafiği	24
Şekil 24. $r = 0$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği.....	25
Şekil 26. $r = 0.3$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği.....	30
Şekil 27. $r = 0.3$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği.....	31
Şekil 28. $r = 0.3$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği.....	31
Şekil 30. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun grafiği	37
Şekil 31. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	38
Şekil 32. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği.....	39
Şekil 33. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun grafiği	39
Şekil 34. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	40
Şekil 35. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği	41
Şekil 36. Lineer artan verimlilik fonksiyonu ve bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı....	46
Şekil 37. İlerleyen t değerlerinde konveksiyon terimi ile beraber difüzyonun etkisi	47
Şekil 38. $t=2$ anında farklı difüzyon katsayılarının etkisi	48
Şekil 39. Bölgeler için alınan verimlilik fonksiyonu	51
Şekil 40. A bölgesindeki illerin Türkiye haritasındaki konumu	52
Şekil 41. A bölgesinde alınan illerin bir hat üzerindeki gösterimi.....	53
Şekil 42. A bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri.....	54
Şekil 43. Çanakkale ili nüfusunu temsil eden uygun lojistik eğri.....	55
Şekil 44. Bolu ili nüfusunu temsil eden uygun lojistik eğri.....	55
Şekil 45. A bölgesinin 1970 nüfuslarına uygun başlangıç fonksiyonu.....	56
Şekil 46. A bölgesinin 1985 yıllarına uygun eğri.....	61
Şekil 47. A bölgesinin 1990 yılı nüfus tahmini.....	62

Şekil 48. B bölgesindeki illerin Türkiye haritasındaki konumu.....	63
Şekil 49. B bölgesinde alınan illerin bir hat üzerindeki gösterimi	64
Şekil 50. B bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri.....	65
Şekil 51. Tunceli ilinin nüfusları için uygun üstel eğri	66
Şekil 52. Hakkari ilinin nüfusları için uygun lojistik eğri.....	66
Şekil 53. B bölgesinin 1965 nüfuslarına uygun eğri	67
Şekil 54. B bölgesinin 1980 yılı başlangıç ve gerçek nüfusları	72
Şekil 55. B bölgesinin 1985 yılı nüfus tahmini	73
Şekil 56. C bölgesindeki illerin Türkiye haritasındaki konumu.....	74
Şekil 57. C bölgesindeki alınan illerin hat üzerindeki görünümü	75
Şekil 58. C bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri.....	76
Şekil 59. C bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri.....	77
Şekil 60. C bölgesinin 1970 nüfuslarına uygun başlangıç fonksiyonu	78
Şekil 61. C bölgesinin 1985 yılı nüfusuna uygun eğri	82
Şekil 62. C bölgesinin 1990 yılı nüfus tahmini	84

TABLolar DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. A bölgesi nüfus verileri.....	53
Tablo 2. A bölgesi 1970 nüfus verileri.....	56
Tablo 3. (Belirlenen h değerleriyle A bölgesi nüfus verileri).....	57
Tablo 4. (Belirlenen h değerleriyle A bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)....	58
Tablo 5. (Belirlenen k değerleriyle A bölgesi nüfus verileri).....	58
Tablo 6. (Belirlenen k değerleriyle A bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)....	59
Tablo 7. (Belirlenen verimlilik fonksiyonları ile A bölgesi nüfus verileri).....	59
Tablo 8. (Belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla A bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması).....	60
Tablo 9. (A bölgesi 1985 nüfus verileri).....	61
Tablo 10. (RDK ve RD modelleriyle A bölgesi 1990 yılı nüfus tahmini).....	63
Tablo 11. B bölgesi nüfus verileri.....	64
Tablo 12. B bölgesi 1970 nüfus verileri.....	67
Tablo 13. (Belirlenen h değerleriyle B bölgesi nüfus verileri).....	68
Tablo 14. (Belirlenen h değerleriyle B bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)....	69
Tablo 15. (Belirlenen k değerleriyle B bölgesi nüfus verileri).....	69
Tablo 16. (Belirlenen k değerleriyle B bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)....	70
Tablo 17. (Belirlenen verimlilik fonksiyonları ile B bölgesi nüfus verileri).....	70
Tablo 18. (Belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla B bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması).....	71
Tablo 19. (B bölgesi 1985 nüfus verileri).....	72
Tablo 20. (RDK ve RD modelleriyle B bölgesi 1990 yılı nüfus tahmini).....	74
Tablo 21. C bölgesi nüfus verileri.....	75
Tablo 22. C bölgesi 1970 nüfus verileri.....	77
Tablo 23. (Belirlenen h değerleriyle C bölgesi nüfus verileri).....	78
Tablo 24. (Belirlenen h değerleriyle C bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)....	79
Tablo 25. (Belirlenen k değerleriyle C bölgesi nüfus verileri).....	80
Tablo 26. (Belirlenen k değerleriyle C bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)....	80
Tablo 27. (Belirlenen verimlilik fonksiyonları ile C bölgesi nüfus verileri).....	81

Tablo 28. (Belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla C bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması).....	82
Tablo 29. (C bölgesi 1985 nüfus verileri).....	82
Tablo 30. (RDK ve RD modelleriyle C bölgesi 1990 yılı nüfus tahmini).....	84

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Popülasyon ekolojisinde difüzyon denklemleri önemli yer tutmaktadır. Birçok çalışmada hayvanların, bitkilerin ve bakterilerin yayılım hareketleri difüzyon denklemleri ile ifade edilmiştir. Bazı durumlarda (göç, rüzgâr, akıntı vb.) difüzyon denklemlerine konveksiyon(taşıma) terimi de eklenerek bu hareketler incelenmiştir.

Geçmişte olduğu gibi günümüzde de insanlar daha iyi yaşam koşulları için belirli bölgelerde toplanmaktadır. Bu bölgeler bazı özellikler bakımından diğer bölgelerden farklılıklar gösterirler. Bu farklılıklar ekonomik, sosyal ve doğal nedenlerden kaynaklanabilir. İnsanlar bu nedenlerden dolayı bölgeler arasında göç yapmaktadır. Böylece bazı bölgeler göç alan, bazı bölgeler ise göç veren bölgeler olarak adlandırılmaktadır.

Bu çalışmada amaç belirli bir bölgede nüfus tahmini yapmaktır. Bunun için coğrafi bir bölgeye, geçmişte göç alması veya göç vermesi kriterine göre bir verimlilik değeri atanmıştır. Göz önüne alınan bölgeye uygun verimlilik fonksiyonu tanımlandıktan sonra verimliliğe göre değişen nüfusu tahmin etmek amacıyla mevcut reaksiyon difüzyon modeli, reaksiyon-difüzyon-konveksiyon modeli olarak geliştirilmiştir. Elde edilen geliştirilmiş model ile bölge nüfus değişimleri incelenmiştir.

Bu amaçla, Bölüm 2’de temel kavramlar verilerek, reaksiyon-difüzyon modelleri tanıtılmış, Bölüm 3’te verimlilik kavramı matematiksel olarak tanımlanarak verimliliği dikkate alan reaksiyon-konveksiyon modeli ele alınmıştır. Bölüm 4’te reaksiyon-konveksiyon modeline difüzyon terimi eklenerek bu terimin etkisi incelenmiştir. Bölüm 5’te ise TÜİK’ ten alınan verilerle, uygun bölge verimlilik fonksiyonları tanımlanmış ve ilgili bölgelerin geriye dönük nüfusları daha eski tarihlerden başlamak suretiyle tahmin edilmiştir. Elde edilen sonuçların ilgili bölgenin nüfusunu tahmin işleminde etkin olduğu gözlemlenmiştir. Bölgelerin komşuları ile nüfus bağlamında ilişkileri geliştirilen modelin uygun Neuman sınır şartları ile temsil edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Mevcut Nüfus Modelleri

2.1.1. Üstel Büyüme Modeli (Malthous Modeli)

$N(t)$ bir türün nüfusu göstermek üzere, belirli bir tür için nüfus korunduğundan nüfustaki değişim oranı

$$\frac{dN}{dt} = \text{doğum} - \text{ölüm} + \text{net göç} \quad (1)$$

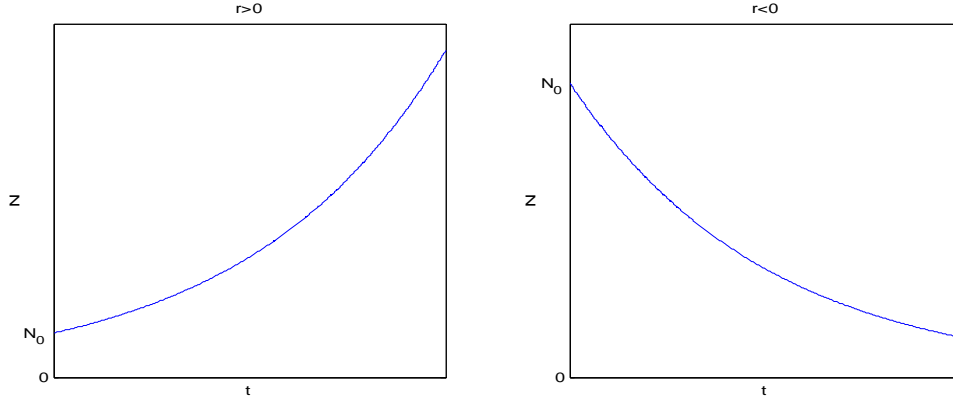
şeklinde ifade edilir. Öncelikle göç olmadığı ve doğum ile ölüm terimlerinin var olan N nüfusu ile orantılı olduğu kabul edilsin. Bu durumda (1) denklemi yeniden düzenlenirse

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN = rN, N(0) = N_0 \quad (2)$$

denklemi elde edilir. (2) denkleminde a , b pozitif katsayılar ve N_0 başlangıç nüfusedir. a katsayısı doğum oranını, b katsayısı ise ölüm oranını göstermektedir. Değişkenlerine ayırma yöntemi ile (2) diferansiyel denkleminin çözümü

$$N(t) = N_0 e^{rt} \quad (3)$$

olarak elde edilir.



Şekil 1. Üstel büyüme modelinin $r > 0$ ve $r < 0$ olduğu durumlarına göre çözümün grafiği

Şekil 1’de (3) çözümünün r parametresine göre grafikleri verilmiştir. Buna göre $r > 0$ ise nüfus üstel olarak büyümekte iken $r < 0$ ise üstel olarak azalmaktadır.

2.1.2. Lojistic Büyüme Modeli

Üstel büyüme modeli basit fakat gerçekçi olmayan bir nüfus modelidir. Çünkü (3) çözümü $r > 0$ olduğunda sınırsız büyümektedir. Verhulst (1838,1845) uzun vadede nüfusun ortamın taşıma kapasitesini geçemeyeceğini önermiştir.

β doğum oranının, N nüfus büyüklüğünün bir lineer azalan fonksiyonu olduğunu kabul edilsin. Dolayısıyla $\beta = \beta_0 - \beta_1 N$ doğum ve δ ölüm oranı olmak üzere (2) denklemi

$$\frac{dN}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 N)N - \delta N, \quad \beta_0, \beta_1, \delta > 0$$

halini alır. Bu denklem $a = \beta_0 - \delta$ ve $b = \beta_1$ olmak üzere yeniden düzenlenirse

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \tag{4}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. (4) denklemi $r = a$ ve $M = a/b$ alınarak yeniden yazılırsa

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{M}\right), N(0) = N_0 \quad (5)$$

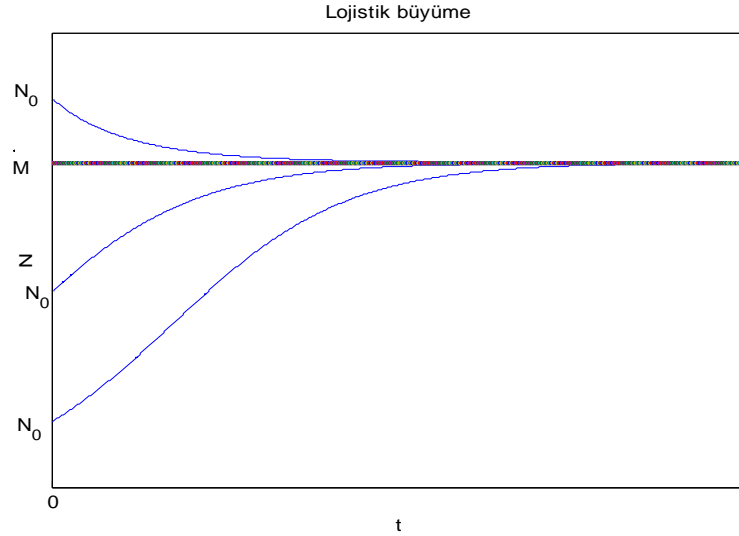
halini alır. (Referans)

(5) diferansiyel denkleminde görülür ki $N_0 = M$ olduğu anda nüfusta değişim olmamaktadır. Eğer $N_0 < M$ olursa denklemin sağ tarafı sıfırdan büyük olacağından nüfus M oluncaya kadar artar. Eğer $N_0 > M$ olduğunda ise sağ taraf sıfırdan küçük olacağından nüfus M oluncaya kadar azalır.

Ayrıca (5) adi diferansiyel denklemini değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümlerse $N(t)$ çözümü

$$N(t) = \frac{MN_0}{N_0 + (M - N_0)e^{-rt}} \rightarrow M, \quad t \rightarrow \infty$$

olarak elde edilir.



Şekil 2. Değişik N_0 değerleri için lojistik modelin grafiği

Şekil 2'de değişik başlangıç nüfusu ile (5) denkleminin çözümünün grafiği verilmiştir. Başlangıç nüfusu taşıma kapasitesi olan M 'nin altında olduğunda, nüfus taşıma kapasitesine kadar artar ve daha sonra sabit kalır. Eğer başlangıç nüfusu taşıma kapasitesinin üstündeyse nüfus taşıma kapasitesine kadar azalır ve daha sonra sabit kalır. (Edwards and Penney, 2006)

2.1.3. Reaksiyon Difüzyon Modelleri

Popülasyon ekolojisinde kısmi türevli diferansiyel denklemlerinin bir uygulaması olan difüzyon modelleri geniş yer tutar.

x konumunda ve t zamanında $N(x, t)$, nüfus yoğunluğunu göstermek üzere en basit difüzyon denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (6)$$

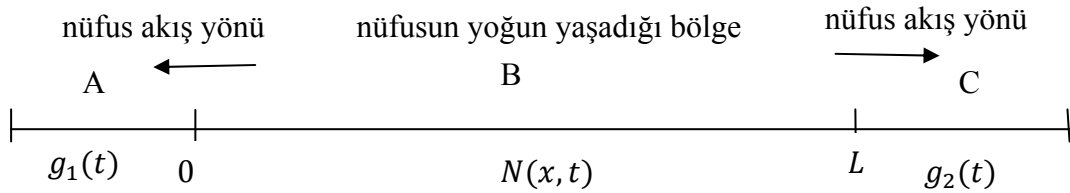
ile verilir. (6) denkleminde $k(\partial^2 N)/(\partial x^2)$ difüzyon terimini, k ise difüzyon katsayısını belirtir. Birimi m^2/s dir. Difüzyon modeli $N(x, t)$ 'nin büyük değerlerinin zamanla azalacağını gösterir. Buna göre bu model, nüfusu yoğun olan bölgelerden daha az yoğun bölgelere göç olacağı varsayımını esas alır.

Basit bir reaksiyon-difüzyon modeli aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = f(N) + k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (7)$$

(7) denkleminde $f(N)$ terimi reaksiyon terimi olarak bilinir.

(7) denklemi için sıklıkla kullanılan iki sınır şartı vardır.



Şekil 3. Örnek bir yaşam alanı

Şekil 3 bir nüfusun örnek bir yaşam alanında dağılımını göstermektedir. B bölgesi nüfusun yaşadığı bölge, A ve C bölgesi ise B bölgesinin sınırlarına bağlı komşu bölgeleri belirtmektedir. $N(x, t)$ B bölgesindeki nüfus yoğunluğunu, $g_1(t)$ ve $g_2(t)$ ise sırayla A ve

C bölgesinin nüfus yoğunluğunu göstermektedir. Oluşturulan reaksiyon-difüzyon modelini için sınır şartları aşağıdaki gibi tanımlanır.

1) $x \in [0, L]$ sonlu bir aralıkta sınır şartı

$$N(t, 0) = g_1(t) , N(t, L) = g_2(t)$$

olarak tanımlanır. Eğer $N_0(t) = 0 = N(t)$ ise homojen Dirichlet sınır şartı olarak adlandırılır.

2) Diğer bir sınır şartı ise $x \in [0, L]$ sonlu bir aralıkta

$$\frac{\partial N}{\partial x}(t, 0) = h(N(0, t) - g_1(t)),$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(t, L) = -h(N(L, t) - g_2(t))$$

(8)

olarak tanımlanır. h katsayısı, sınırlardaki göç oranını temsil eden katsayıdır. Bu çalışmanın ileriki bölümlerinde yer alan reaksiyon-difüzyon denklemlerinde (8)'deki sınır şartları kullanılacaktır.

3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Skellam(1951) Avrupa'da misk faresinin ve Britanya'da meşe ağacının yayılması üzerine yaptığı çalışmalarda

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN + k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (9)$$

türünden denklem sistemini kullanmıştır. (9) denkleminde $N(x, t)$ farenin veya meşe ağacının nüfusunu, r ise nüfusun büyüme oranını göstermektedir.

Segel (1977) bakterilerin (*Pseudomonas fluorescens*) yayılması üzerine yaptığı çalışmalarda

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN + k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (10)$$

denklemini kullanmıştır. (10) denkleminde $N(x, t)$, x noktasında ve t zamanında bakteri nüfusunu, r ise nüfusun büyüme oranını göstermektedir. Segel $r = 0$ olarak k nün değerini hesaplamıştır.

Kierstead ve Slobodkin (1953) (10) denklemini $r < 0$ için planktonlara uygulamışlardır.

Fisher (1937) *advantageous* geninin yayılması üzerine yaptığı çalışmalarda

$$\frac{\partial N}{\partial t} = rN\left(1 - \frac{N}{M}\right) + k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \quad (11)$$

denklemini kullanmıştır. Daha sonra Kolmogorov(1937) (11) denklemini daha derin incelemiş ve bazı analitik çözümler elde etmiştir. (11) denklemi Fisher Kolmogorov denklemi olarak bilinir.

Helland (1984) ve Banks(1988) hayvanların rüzgâr, su akıntısı veya göç ile taşınması durumunda çalışmalarında (6) denkleminde $N(x, t)$ x noktasında ve t zamanında hayvan nüfusunun yoğunluğu ve w göç hızı olmak üzere konveksiyon terimi eklemiştir.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - w \frac{\partial N}{\partial x} \quad (12)$$

Bu çalışmada ise yukarıdaki nüfus modellerine ek olarak nüfustaki göçe ilişkin verimlilik fonksiyonu tanımlanmış ve bu verimlilik fonksiyonuna bağlı bir konveksiyon-reaksiyon-difüzyon denklemi oluşturulmuştur. Bu denklemde reaksiyon terimi olarak üstel ve lojistik büyüme alınarak konveksiyon teriminin etkisi incelenmiştir.

Bu çalışma aşağıdaki gibi organize edilmiştir.

Kesim 4'te lineer ve parabolik verimlilik fonksiyonları alınmış ve üstel ve lojistik reaksiyon terimleriyle konveksiyon-reaksiyon denklemi çözülmeye çalışılmıştır. Kesim 5'te konveksiyon reaksiyon denkleminde difüzyon terimi eklenerek etkisi incelenmiştir. Kesim 6'da ise TÜİK' ten alınan veriler ile oluşturulan konveksiyon-reaksiyon-difüzyon denklemi test edilmiştir.

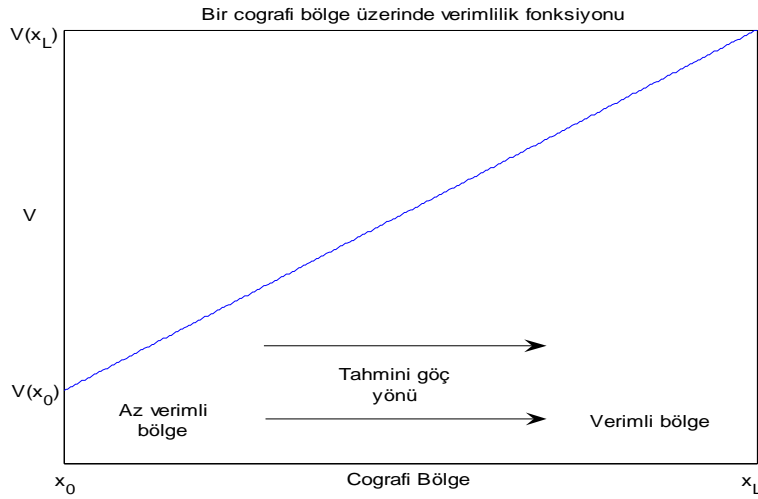
4. REAKSİYON-KONVEKSİYON DENKLEMLERİ

4.1. Verimlilik Fonksiyonu Tanımı

Bir $[a, b]$ coğrafi bölgesinde her noktaya $0 \leq V(x) \leq 1$ olmak üzere bir verimlilik değeri atansın. $V(x)$ değerinin 0'a yakın olduğu noktaların az verimli noktalar olduğu, $V(x)$ değerinin 1'e yakın olduğu noktaların ise verimli noktalar olduğu varsayalım ve nüfusun az verimli noktalardan, verimli noktalara doğru göç ettiği kabul edilsin. Tipik olarak lineer ve parabolik verimlilik fonksiyonlarını inceleyelim.

4.1.1. Lineer Verimlilik Fonksiyonu

Bir coğrafi bölgede verimliliğin tipik olarak $V(x) = ax + b$ şeklinde olduğu kabul edilsin.

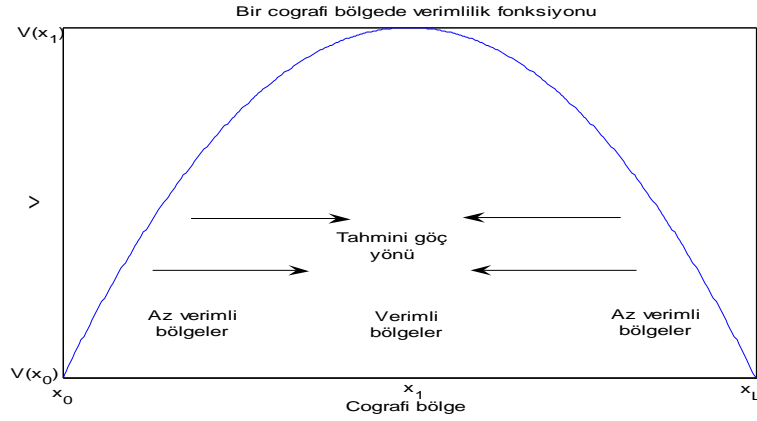


Şekil 4. Verimliliği lineer olan bir bölge

Şekil 4 bir coğrafi bölgede verimliliğin lineer olduğunu göstermektedir. x_0 noktasına yakın bölgeler kısmen az verimli bölgeler, x_L noktasında yakın bölgeler ise verimli bölgelerdir. Bu durumda tahmini göç yönü ok yönünde, az verimli bölgelerden verimli bölgelere doğru, yani x_L noktasına doğru olduğu kabul edilmektedir.

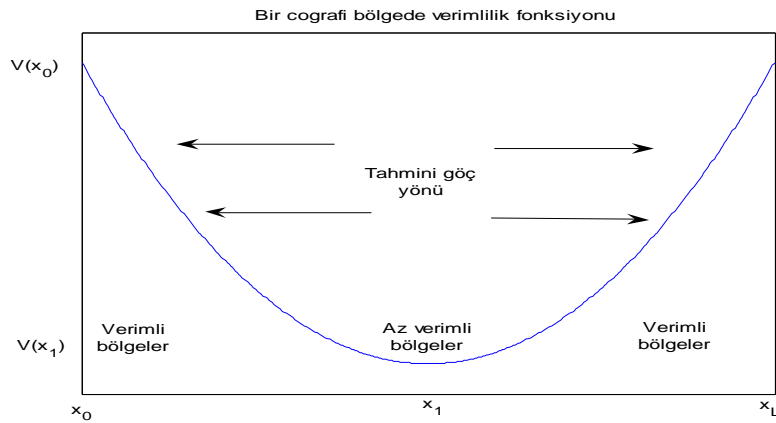
4.1.2. Parabolik Verimlilik Fonksiyonu

Bir coğrafi bölgede verimliliğin tipik olarak $V(x) = ax^2 + bx + c$ şeklinde olduğu kabul edilsin.



Şekil 5. Verimliliği parabolik olan bir bölge

Şekil 5 bir coğrafi bölgede verimliliğin parabolik olduğunu göstermektedir. x_0 ve x_L noktasına yakın bölgeler kısmen az verimli bölgeler, x_1 noktasına yakın bölgeler ise verimli bölgelerdir. Bu durumda tahmini göç yönü ok yönünde az verimli bölgelerden verimli bölgelere, yani x_1 noktasına doğru olduğu kabul edilmektedir.



Şekil 6. Verimliliği parabolik olan bir bölge

Şekil 6 bir coğrafi bölgede verimliliğin parabolik olduğunu göstermektedir. x_1 noktasına yakın bölgeler kısmen az verimli bölgeler x_0 ve x_L noktalarına yakın bölgeler ise verimli bölgelerdir. Bu durumda tahmini göç yönü ok yönünde az verimli bölgelerden verimli bölgelere, yani x_0 ve x_L noktalarına doğru olduğu kabul edilmektedir.

4.2. Reaksiyon - Konveksiyon Denklemleri

Verimliliğe bağlı nüfus hareketliliğini modellemek için aşağıdaki gibi bir reaksiyon-konveksiyon denklemi tanımlansın.

$$\begin{aligned} N_t + (V_x N)_x &= g(N) \\ N(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \quad (13)$$

(13) denkleminde $N(x, t)$, x konumunda ve t zamanındaki nüfusu $V_x = dV/dx$ ile $V(x)$ ile tanımlanan verimlilik fonksiyonunun türevini, $g(N)$ ise reaksiyon terimini göstermektedir. (13) denkleminde verimliliğin birimi m^2/s olarak bulunur. Bu birim difüzyon katsayısının birimi ile aynıdır.

$g(N)$ reaksiyon terimi yerine tipik fonksiyonlar alınarak (13) denklemindeki nüfus dağılımı incelensin.

4.2.1. Üstel Büyüme Reaksiyon Terimi ile Konveksiyon Denklemleri

Reaksiyon-konveksiyon denkleminde reaksiyon terimi olarak üstel büyüme modelindeki gibi $g(N) = rN$ olarak alınsın.

$$\begin{aligned} N_t + (V_x N)_x &= rN \\ N(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (14)$$

Lineer ve parabolik verimlilik fonksiyonları alarak (14) denkleminin çözümü ve çözümün davranışı istensin.

4.2.1.1. Lineer Verimlilik

Öncelikle verimlilik fonksiyonunu lineer olarak göz önüne alınsın. Yani $V(x) = ax + b$ olsun.

Bu durumda $V'(x) = a$ olacağından (13) denklemi

$$\begin{aligned} N_t + aN_x &= rN \\ N(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned} \quad (15)$$

halini alır. (15) denklemi için karakteristikler metodunu kullanarak çözümü araştırılır. Bu denklem için karakteristik denklemler aşağıdaki gibidir.

$$\frac{dx}{dt} = a, \quad x(0) = x_0 \Rightarrow x = at + x_0 \Rightarrow x_0 = x - at \quad (16)$$

$$\frac{dN}{dt} = rN, \quad N(0) = f(x_0) \Rightarrow N(t) = f(x_0)e^{rt} \quad (17)$$

(16) çözümü (17) de yerine yazılırsa çözüm

$$N(x, t) = f(x - at)e^{rt} \quad (18)$$

olarak elde edilir. Bulunan bu çözüm a hızı ile kayan ($a > 0$ ise sağa, $a < 0$ ise sola) başlangıç nüfusunun e^{rt} oranında artış gösterdiğini ifade eder. Değişik örnek lineer verimlilik fonksiyonları ile (18) çözümünün davranışını gözlemleyelim.

Örnek 4.1. Lineer artan bir verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceği araştırılsın.

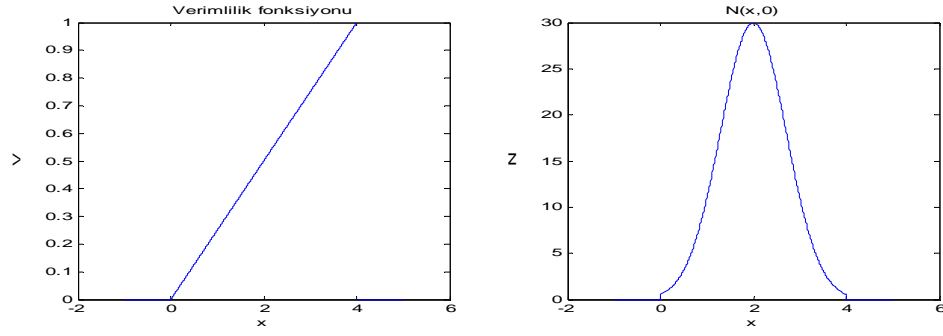
- Bu amaçla Şekil 6'daki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} 0.25x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 30e^{-(x-2)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelensin.



Şekil 7. Bölge üzerinde lineer artan verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfus dağılımı

- Bu durumda (15) reaksiyon-konveksiyon denklemi

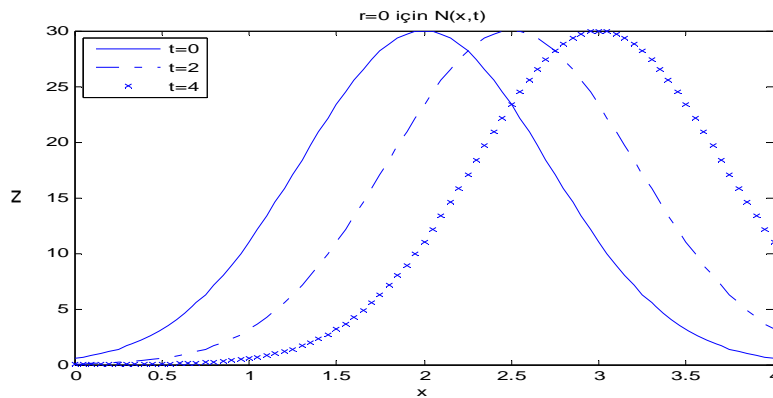
$$\begin{aligned} N_t + 0.25N_x &= rN \\ N(x, 0) &= 30e^{-(x-2)^2}, \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (19)$$

halini alır.

- (18)'i kullanarak (19) denkleminin çözümü

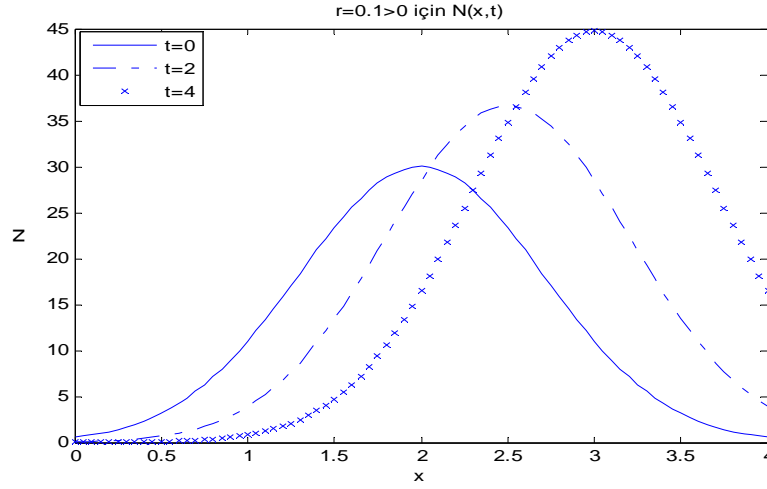
$$N(x, t) = 30e^{-(x-\frac{1}{4}t-2)^2} e^{rt}$$

olarak elde edilir. Elde edilen bu çözümü r parametresinin durumuna göre inceleyelim



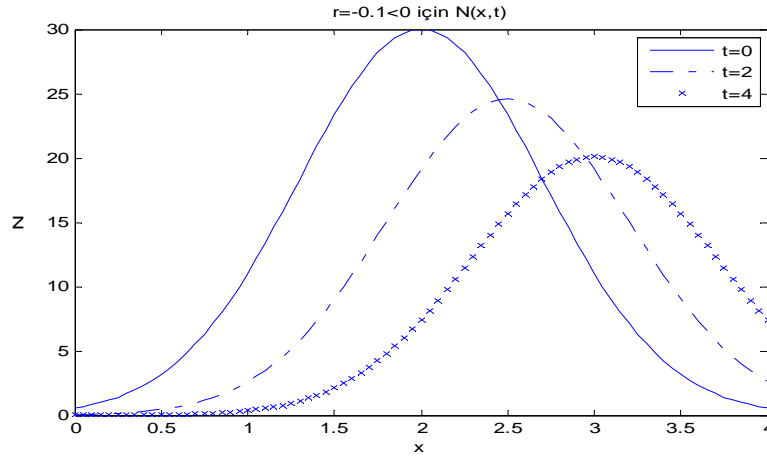
Şekil 8. $r = 0$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekil 8'de görüldüğü gibi nüfus, ilerleyen t değerlerinde $x = 4$ noktasına doğru taşınmaktadır. $r = 0$ için $N(x, t) = 30e^{-(x-\frac{1}{4}t-2)^2}$ olduğundan sadece taşınma gerçekleşir.



Şekil 9. $r = 0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

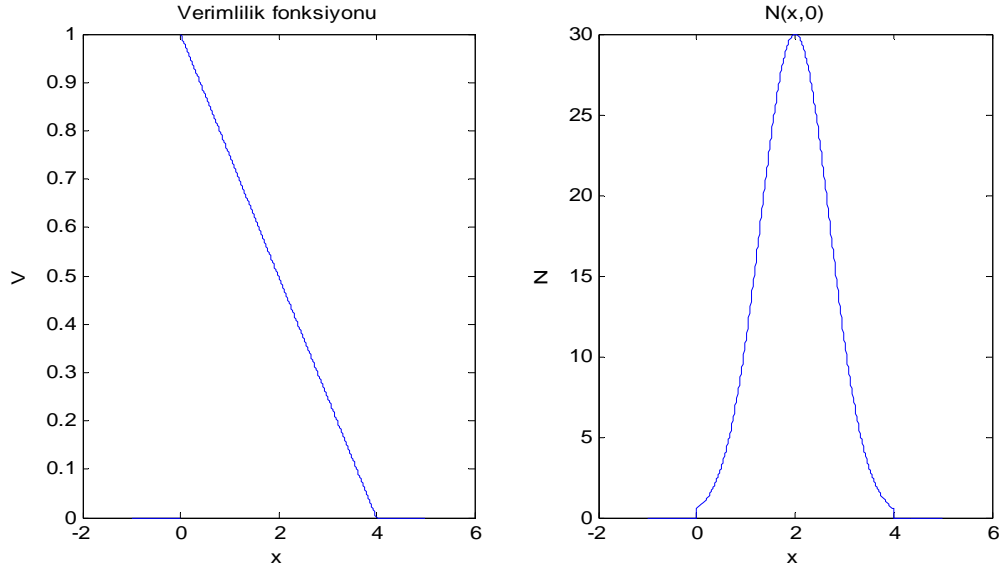
Şekil 9'da görüldüğü gibi eğer $r > 0$ ise $e^{rt} > 1$ olduğundan $N(x, t)$, t nin ilerleyen değerlerinde $x = 4$ noktasına doğru taşınırken büyümektedir.



Şekil 10. $r = -0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekilde görüldüğü gibi eğer $r < 0$ ise $e^{rt} < 1$ olduğundan $N(x, t)$, t nin ilerleyen değerlerinde $x = 4$ noktasına doğru taşınırken azalmaktadır.

Örnek 4.2. Lineer azalan bir verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceği araştırılsın.



Şekil 11. Bölge üzerinde lineer azalan verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfus dağılımı

- Bu amaçla Şekil 11'deki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} 1 - 0.25x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 30e^{-(x-2)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelensin.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

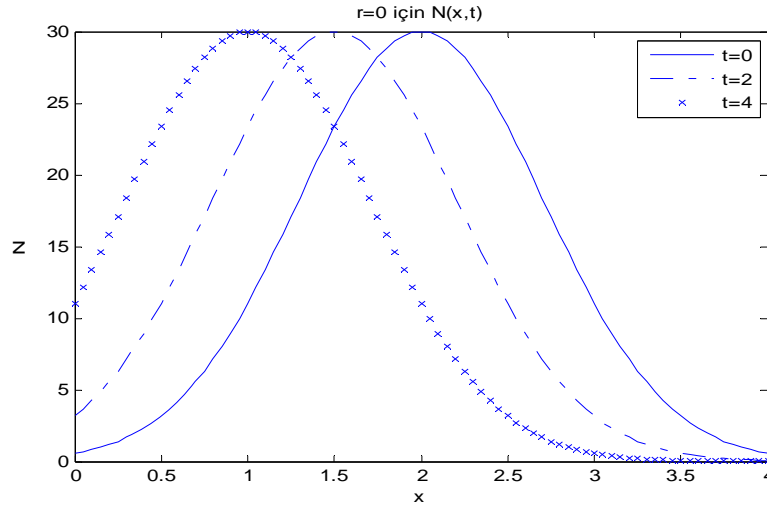
$$\begin{aligned} N_t - 0.25N_x &= rN \\ N(x, 0) &= 30e^{-(x-2)^2}, \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (20)$$

halini alır.

- (18)'i kullanarak (20) denkleminin çözümü

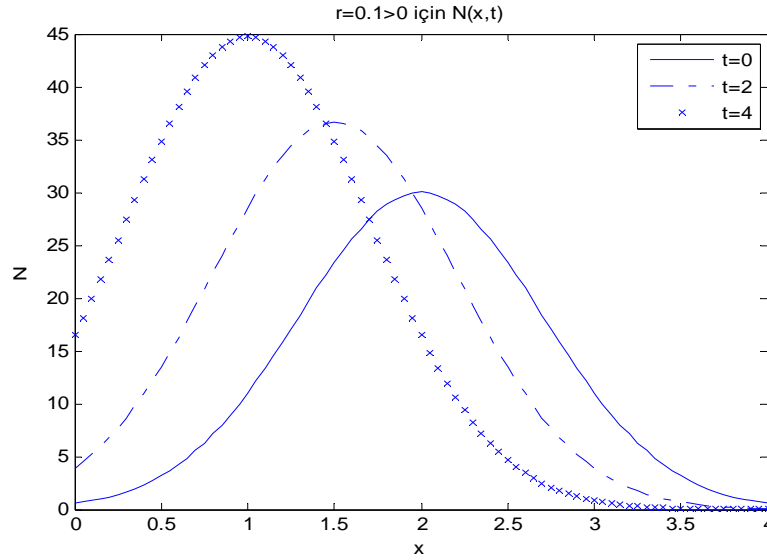
$$N(x, t) = 30e^{-(x+\frac{1}{4}t-2)^2} e^{rt}$$

olarak elde edilir. Şimdi bu çözümü r parametresinin durumuna göre inceleyelim.



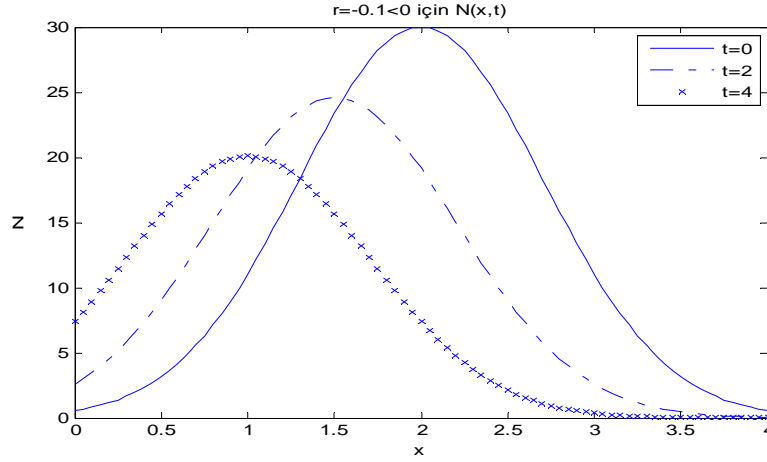
Şekil 12. $r = 0$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekil 12’de görülüyor ki nüfus ilerleyen t değerlerinde $x = 0$ noktasına doğru taşınmaktadır. $r = 0$ olduğu için nüfusta büyüme ya da azalma meydana gelmemektedir.



Şekil 13. $r = 0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekil 13’de görülüyor ki ilerleyen t değerlerinde nüfus $x = 0$ bölgesine doğru taşınmaktadır. $r = 0.1 > 0$ olduğu için nüfus büyüyerek $x = 0$ noktasına doğru taşınmaktadır.



Şekil 14. $r = -0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekilde görülüyor ki ilerleyen t değerlerinde nüfus $x = 0$ bölgesine doğru taşınmaktadır. $r = -0.1 < 0$ olduğu için nüfus küçülerek $x = 0$ bölgesine doğru taşınmaktadır.

Sonuç olarak (15) denkleminde nüfus

- $a > 0$ ise sağa doğru
- $a < 0$ ise sola doğru
- $r > 0$ ise artarak
- $r < 0$ ise azalarak taşınır.

4.2.1.2. Parabolik Verimlilik

(14) denklemindeki verimlilik fonksiyonu $V(x) = ax^2 + bx + c$ gibi parabolik bir fonksiyon olarak ele alınsın. Bu durumda

$$\frac{\partial(V_x N)}{\partial x} = V_{xx} N + V_x \frac{\partial N}{\partial x}$$

olduğundan (14) denklemini

$$\begin{aligned} N_x + (2ax + b)N_x &= (r - 2a)N \\ N(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \end{aligned} \tag{21}$$

halini alır. (21) kısmi diferansiyel denkleminin çözümü için karakteristik metodu kullanılır. Birinci karakteristik denklem değişkenlere ayırma metodu ile çözülür.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2ax + b, \quad x(0) = x_0 \Rightarrow \int \frac{dx}{2ax + b} = \int dt \\ &\Rightarrow \frac{1}{2a} \ln|2ax + b| = t + c \\ &\Rightarrow x(t) = \frac{c_1 e^{2at} - b}{2a}\end{aligned}$$

Başlangıç koşulu $x(0) = x_0$ uygulanırsa $x(t)$ çözümü

$$\begin{aligned}x(0) = x_0 &= \frac{c_1 - b}{2a} \Rightarrow c_1 = 2ax_0 + b \\ &\Rightarrow x(t) = \frac{(2ax_0 + b)e^{2at} - b}{2a}\end{aligned}\tag{22}$$

olarak bulunur. İkinci karakteristik denklem için de yine değişkenlere ayırma metodu kullanılırsa çözüm

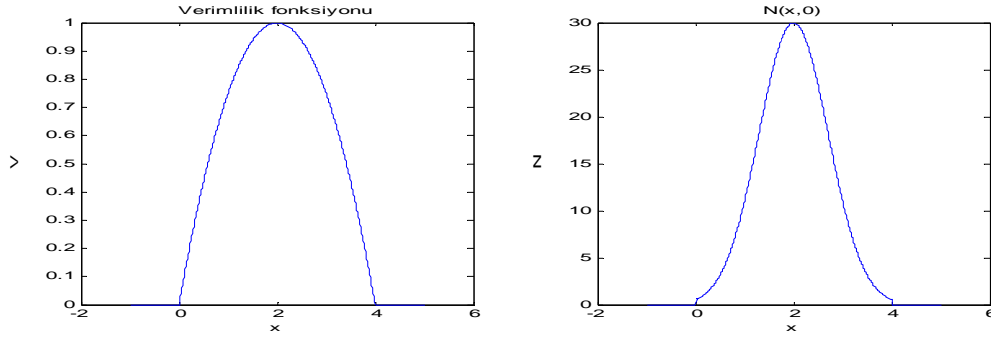
$$\frac{dN}{dt} = (r - 2a)N, \quad N(0) = f(x_0) \Rightarrow N(t) = f(x_0)e^{(r-2a)t}\tag{23}$$

olarak bulunur. (22) çözümünde x_0 'ı çekip (23) çözümünde yerine yazılırsa (21) denkleminin çözümü

$$N(x, t) = f\left(\frac{(2ax + b)e^{-2at} - b}{2a}\right)e^{(r-2a)t}\tag{24}$$

olarak elde edilir.

Örnek 4.3. Parabolik ve orta noktalarda daha yüksek değerlerde verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta verimli olan noktada tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceğini araştırılsın.



Şekil 15. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfus dağılımı

- Bu amaçla Şekil 15'deki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} -0.25x^2 + x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 30e^{-(x-2)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak alarak çözümün davranışı incelensin.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

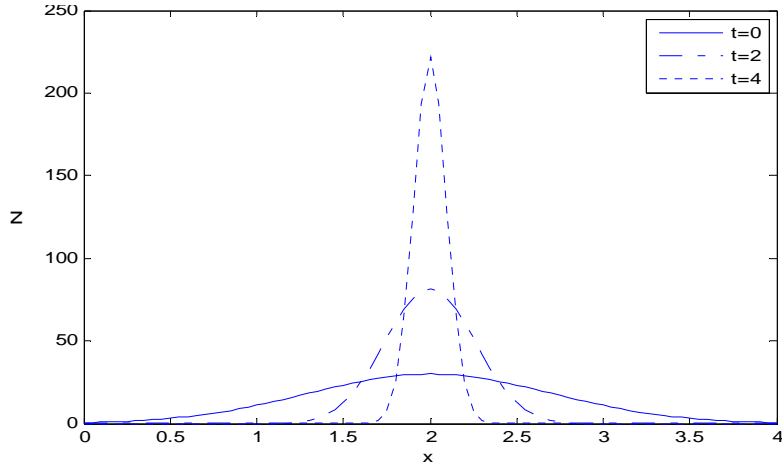
$$\begin{aligned} N_t + (-0.5x + 1)N_x &= (r + 0.5)N \\ N(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (25)$$

halini alır.

- (23) ü kullanırsak bu denklemin çözümü

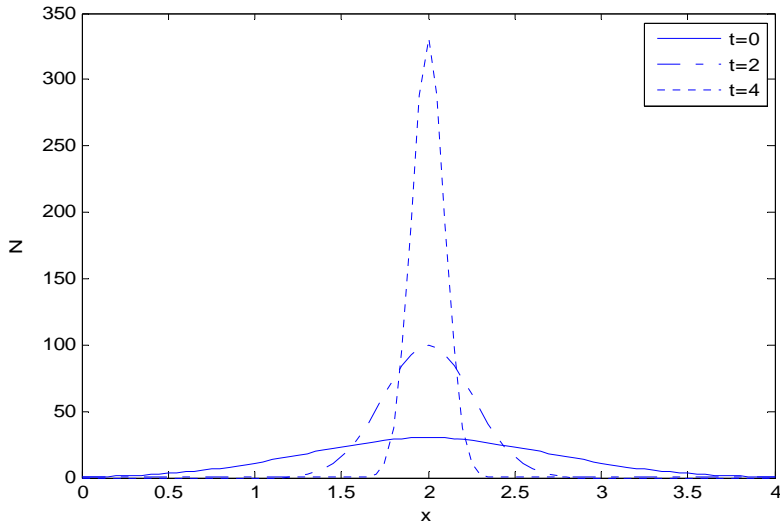
$$N(x, t) = 30e^{-\left(\frac{(-0.5x+1)e^{0.5t}-1}{-0.5}-2\right)^2} e^{(r+0.5)t} = 30e^{-((x-2)e^{0.5t})^2} e^{(r+0.5)t}$$

olarak elde edilir. Bulunan bu çözümün grafiğini r nin durumuna göre inceleyelim.



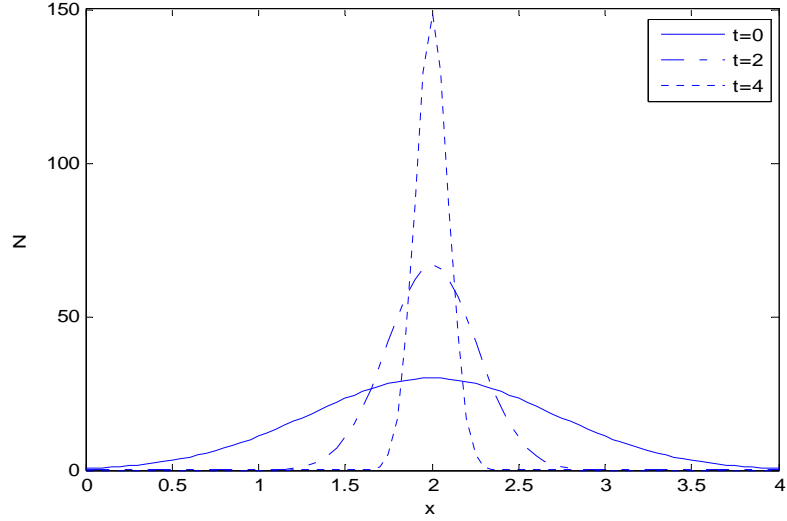
Şekil 16. $r = 0$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekil 16'da görülüyor ki nüfus verimliliğin fazla olan $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. Başlangıç nüfusunda dış taraftan iç tarafa doğru hareketlilik vardır.



Şekil 17. $r = 0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

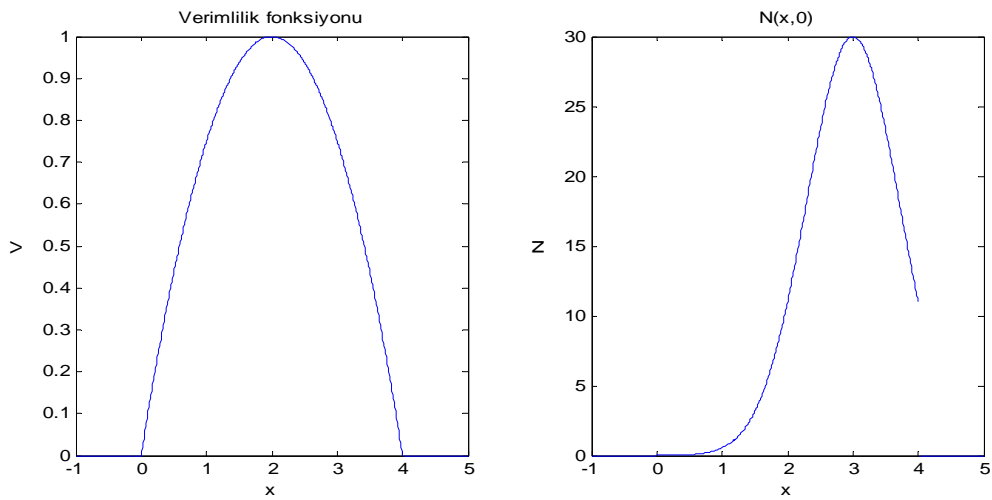
Şekil 17'den görülüyor ki nüfus verimliliği fazla olan $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. $r > 0$ olduğu için nüfus $r = 0$ dan farklı olarak büyüyerek $x = 2$ noktasına doğru hareket etmektedir.



Şekil 18. $r = -0.1$ değeri için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekil 18'den görülüyor ki nüfus verimliliği fazla olan $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. $r < 0$ olduğu için nüfus $r = 0$ dan farklı olarak azalarak $x = 2$ noktasına doğru hareket etmektedir.

Örnek 4.4. Parabolik ve orta noktalarda daha yüksek değerlerde verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta verimli olmayan noktada tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceği araştırılsın.



Şekil 19. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı

- Bu amaçla Şekil 19'daki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} -0.25x^2 + x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 30e^{-(x-3)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelenir.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

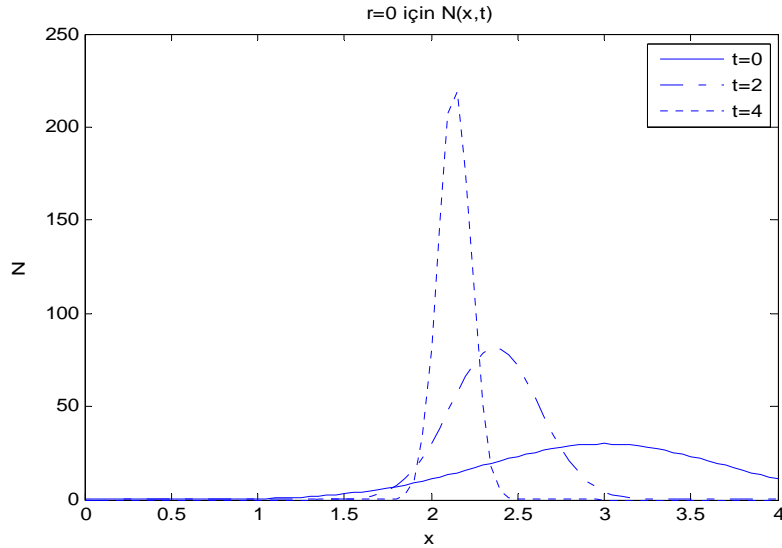
$$\begin{aligned} N_t + (-0.5x + 1)N_x &= (r + 0.5)N \\ N(x, 0) &= 30e^{-(x-3)^2}, \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (26)$$

halini alır.

- Bu durumda (23)'ü kullanarak çözüm

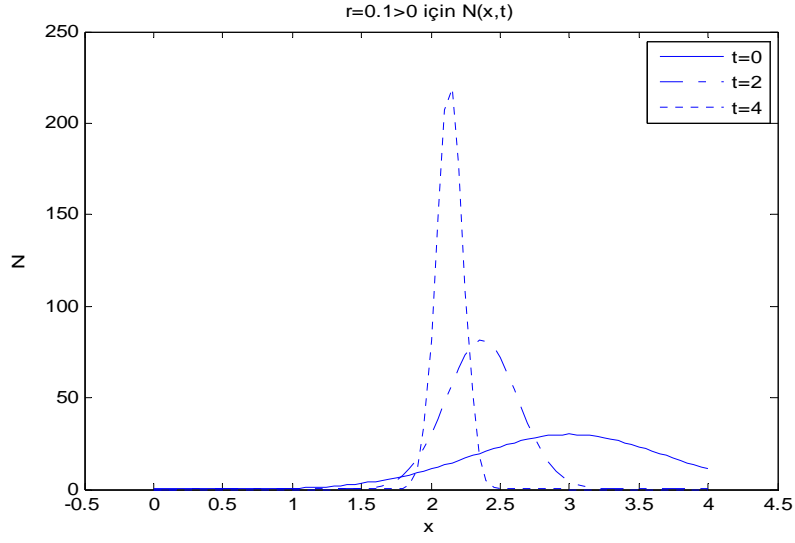
$$N(x, t) = 30e^{-((x-2)e^{0.5t}-1)^2} e^{(r+0.5)t}$$

olarak elde edilir.



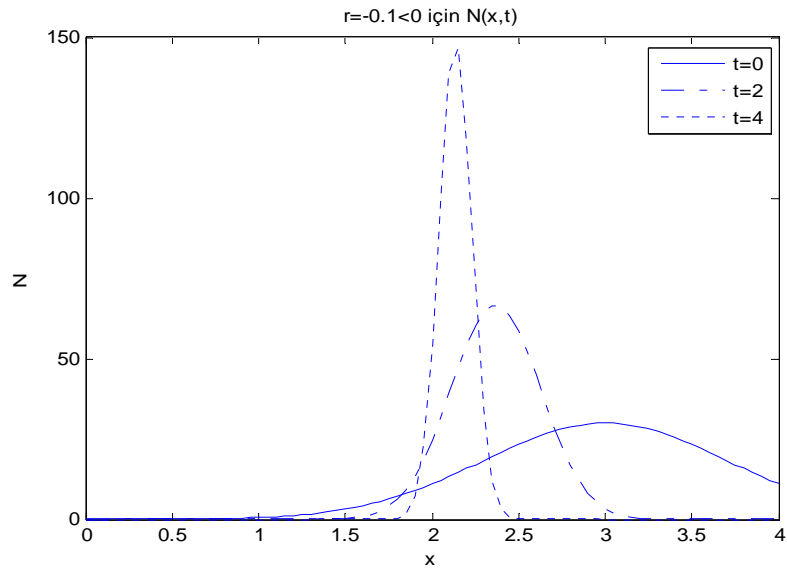
Şekil 20. $r = 0$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekil 20'de görülüyor ki başlangıçta $x = 3$ noktasına doğru yoğunlaşan nüfus ilerleyen t değerlerinde $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. $r = 0$ olduğu için nüfusta büyüme ya da azalma olmamaktadır.



Şekil 21. $r = 0$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

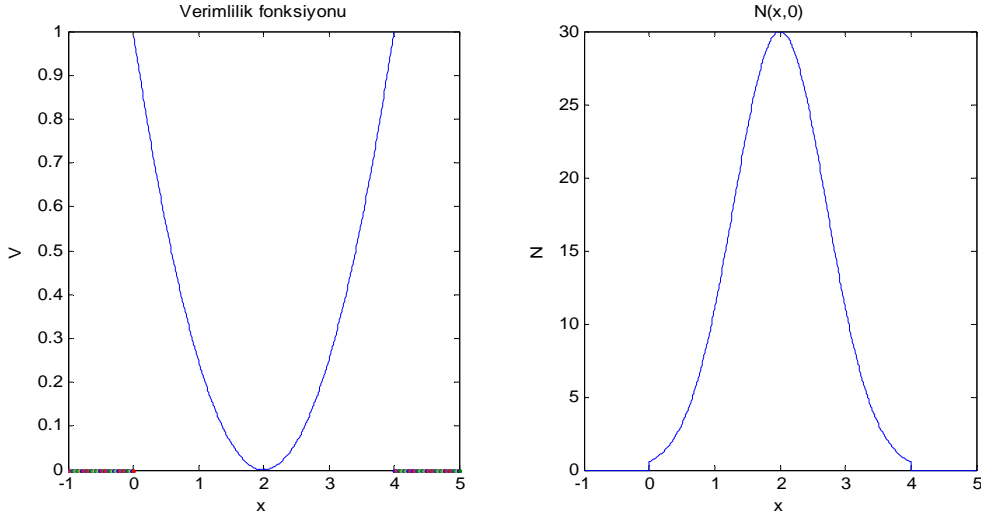
Şekil 21’de görülüyor ki başlangıçta $x = 3$ noktasına doğru yoğunlaşan nüfus ilerleyen t değerlerinde $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. $r > 0$ olduğu için nüfus taşınırken büyümektedir.



Şekil 22. $r < 0$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekil 22’de görülüyor ki başlangıçta $x = 3$ noktasına doğru yoğunlaşan nüfus ilerleyen t değerlerinde $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. $r < 0$ olduğu için nüfus taşınırken azalmaktadır.

Örnek 4.5. Parabolik ve kenar noktalarda daha yüksek değerlerde verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta verimli olmayan noktada tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceği araştırılsın.



Şekil 23. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun grafiği

- Bu amaçla Şekil 23’deki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} 0.25x^2 - x + 1, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 30e^{-(x-2)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelensin.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

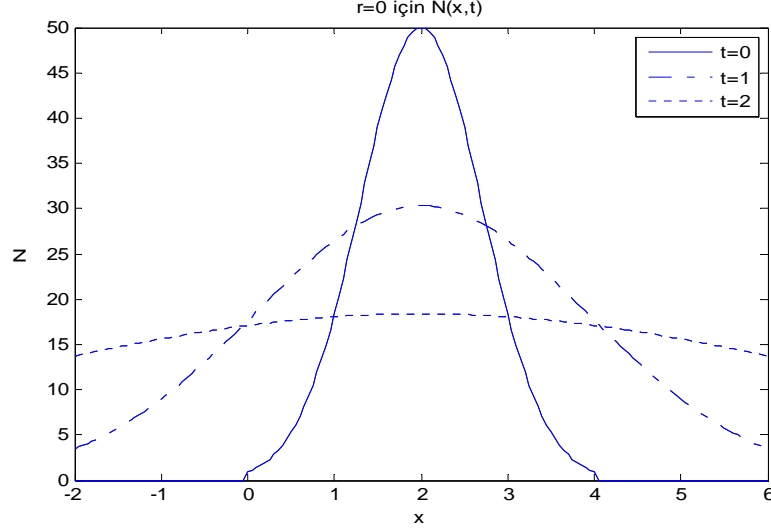
$$\begin{aligned} N_t + (0.5x - 1)N_x &= (r - 0.5)N \\ N(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (27)$$

halini alır.

- (23) kullanılırsa bu denklemin çözümü

$$N(x, t) = 30e^{-\left(\frac{(0.5x-1)e^{0.5t}+1}{0.5}-2\right)^2} e^{(r-0.5)t} = 30e^{-((x-2)e^{-0.5t})^2} e^{(r-0.5)t}$$

olarak elde edilir. Bulduğumuz bu çözümün grafiğini $r = 0$ için çizdirelim.



Şekil 24. $r = 0$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği

Şekil 24'te görüldüğü gibi başlangıçta $x=2$ noktasında toplanan nüfusu ilerleyen t değerlerinde verimliliğin fazla olduğu $x = 0$ ve $x = 4$ noktalarına doğru zamanla dağılmaktadır.

Sonuç olarak (21) denkleminde nüfus

- $a < 0$ ise parabolün kolları aşağıya olduğundan bölgenin ortasına doğru
- $a > 0$ ise parabolün kolları yukarı doğru olduğundan bölge kenarlarına doğru
- $r > 0$ ise artarak
- $r < 0$ ise azalarak taşınır

Buraya kadar (13) denkleminde reaksiyon terimi olarak üstel büyüme terimini alarak çözümün davranışını inceledik. Bundan sonra reaksiyon terimi olarak lojistik büyüme terimi alarak çözümün davranışını inceleyeceğiz.

4.2.2. Lojistik Büyüme Reaksiyon Terim ile Reaksiyon Konveksiyon Denklemi

(13) denkleminde reaksiyon terimi olarak lojistik büyüme

$$g(N) = rN\left(1 - \frac{N}{M}\right)$$

alınsın. r doğum oranı, M bölgenin konveksiyonsuz modelin taşıma kapasitesidir.

Bu durumda (13) denklemi

$$\begin{aligned} N_t + (V_x N)_x &= rN\left(1 - \frac{N}{M}\right) \\ N(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (28)$$

halini alır. İşlemlerde kolaylık olması açısından (28) denkleminde

$$P(x, t) = \frac{N(x, t)}{M}$$

değişken dönüşümü yapılsın. Bu dönüşüm altında (28) denklemindeki kısmi türevler yazılsın.

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} &= M \frac{\partial P}{\partial t} \\ \frac{\partial (V_x N)}{\partial x} &= M \frac{\partial (V_x P)}{\partial x} \\ P(x, 0) &= \frac{N(x, 0)}{M} = g(x) \end{aligned}$$

Bu kısmi türevleri (28) denkleminde yerine yazıp yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} P_t + (V_x P)_x &= rP(1 - P) \\ P(x, 0) &= g(x) \end{aligned} \quad (29)$$

denklemini elde edilir. (29) denklemini lineer ve parabolik verimlilik fonksiyonları olarak çözümün davranışını inceleyelim.

4.2.2.1. Lineer Verimlilik

(29) denkleminde verimlilik fonksiyonunu $V(x) = ax + b$ olarak alalım. Bu durumda konveksiyon-reaksiyon denklemi

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} + a \frac{\partial N}{\partial x} &= rN \left(1 - \frac{N}{M}\right) \\ N(x, 0) &= f(x)\end{aligned}\quad (30)$$

halini alır. (30) denkleminde $P(x, t) = N(x, t)/M$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial t} + a \frac{\partial P}{\partial x} &= rP(1 - P) \\ P(x, 0) &= g(x)\end{aligned}\quad (31)$$

halini alır.

Karakteristik metodu ile (31) denklemini için çözüm aranır.

$$\frac{dx}{dt} = a \text{ ve } x(0) = x_0 \Rightarrow x = at + x_0 \quad (32)$$

$$\frac{dP}{dt} = rP(1 - P), \quad P(0) = g(x_0) \quad (33)$$

(33) karakteristik denklemini için değişkenlere ayırma metodu ile çözüm aransın.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{P(1 - P)} &= r dt \\ \Rightarrow \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{P - 1}\right) dP &= rt + c \\ \Rightarrow \ln \left(\frac{P}{P - 1}\right) &= rt + c \\ \Rightarrow \frac{P}{P - 1} &= c_1 e^{rt} \\ \Rightarrow P(t) &= \frac{c_1 e^{rt}}{1 + c_1 e^{rt}}\end{aligned}$$

Bulunan son çözüme başlangıç koşulu uygulansın.

$$\begin{aligned}g(x_0) &= \frac{c_1}{1 + c_1} \\ \Rightarrow c_1 &= \frac{g(x_0)}{1 - g(x_0)}\end{aligned}$$

Dolayısıyla (33) karakteristik denkleminin çözümü

$$P(t) = \frac{c_1 e^{rt}}{1 + c_1 e^{rt}} = \frac{c_1}{c_1 + e^{-rt}} = \frac{g(x_0)}{g(x_0) + (1 - g(x_0))e^{-rt}} \quad (34)$$

olarak bulunur. (32) 'den $x_0 = x - at$ çekerek (33) de yerine yazılırsa (30) denkleminin çözümü

$$P(x, t) = \frac{g(x - at)}{g(x - at) + (1 - g(x - at))e^{-rt}} \quad (35)$$

olarak elde edilir.

$P = N/M$ ve $g(x, 0) = f(x, 0)/M$ olduğundan lineer verimlilikle (30) denkleminin çözümü

$$N(x, t) = \frac{f(x - at)M}{f(x - at) + (M - f(x - at))e^{-rt}} \quad (36)$$

olarak bulunur.

Teorem: M konveksiyonsuz modelin kararlı denge noktası ise aynı zamanda lineer verimlilik ile konveksiyonlu modelin kararlı denge noktasıdır.

İspat:

$r > 0$ olsun. $\forall t \in [0, \infty)$ için $p(x) = f(x - at)$ olsun ve $q(x) = M - f(x - at)$

• Başlangıç fonksiyonu $f(x) < M$ olan noktalar için ilerleyen t değerlerinde $f(x - at)$ terimi sadece öteleme işlemi yaptığından $p(x) < M$ olur. Dolayısıyla $q(x) > 0$ olur.

$t \rightarrow \infty$ iken $q(x)e^{-rt} \xrightarrow{\text{azalarak}} 0$ olduğu için

$$N(x, t) = \frac{f(x - at)M}{f(x - at) + (M - f(x - at))e^{-rt}} \xrightarrow{\text{artarak}} M$$

olur.

• Başlangıç fonksiyonu $f(x) > M$ olan noktalar için ilerleyen t değerlerinde $f(x - at)$ terimi sadece öteleme işlemi yaptığından $p(x) > M$ olur. Dolayısıyla $q(x) < 0$ olur.

$t \rightarrow \infty$ iken $q(x)e^{-rt} \xrightarrow{\text{artarak}} 0$ olduğu için

$$N(x, t) = \frac{f(x - at)M}{f(x - at) + (M - f(x - at))e^{-rt}} \xrightarrow{\text{azalarak}} M$$

olur.

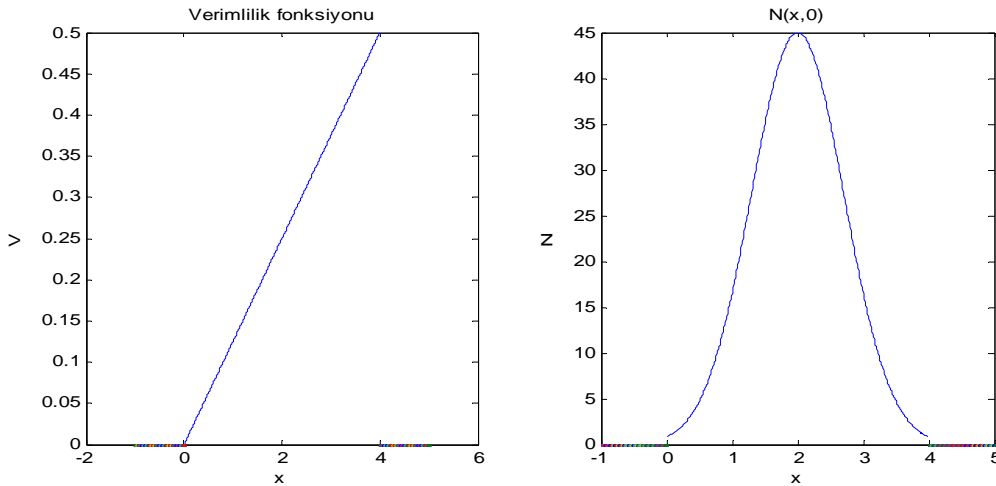
• Başlangıç fonksiyonu $f(x) = M$ olan noktalar için ilerleyen t değerlerinde $f(x - at)$ terimi sadece öteleme işlemi yaptığından $p(x) = M$ olur. Dolayısıyla $q(x) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$N(x, t) = \frac{f(x - at)M}{f(x - at) + (M - f(x - at))e^{-rt}} = M$$

olur.

Buradan $N(x, t) = M$ kararlı çözümdür.

Örnek 4.6. Lineer artan bir verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını lojistik büyüme reaksiyon terimiyle nasıl etkileyeceği araştırılsın.



Şekil 25. Bölge üzerinde lineer verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı

- Bu amaçla Şekil 25'teki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} 0.125x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 8 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 45e^{-(x-2)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelenir.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

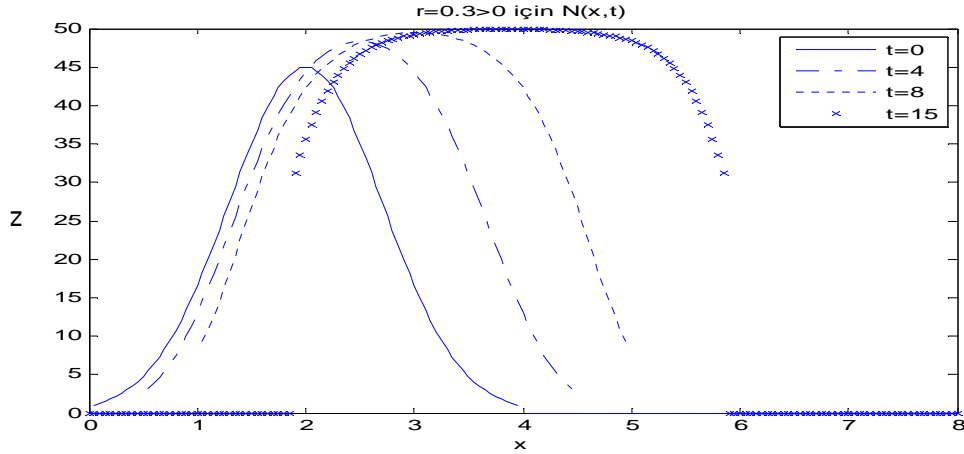
$$\begin{aligned} N_t + 0.125N_x &= 0.3N\left(1 - \frac{N}{50}\right) \\ N(x, 0) &= 45e^{-(x-2)^2}, \quad 0 \leq x \leq 4 \end{aligned} \quad (37)$$

halini alır.

- (35) i kullanarak (36) denkleminin çözümü

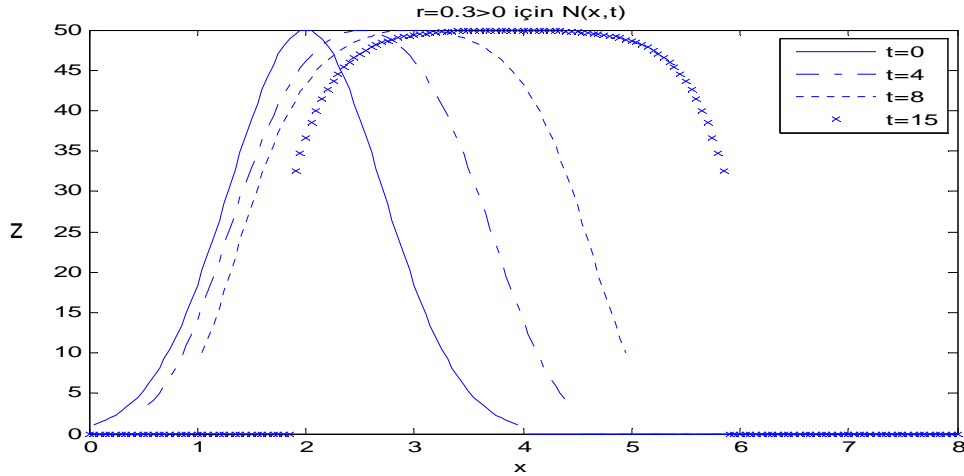
$$N(x, t) = \frac{45e^{-(x-0.125t-2)^2} 50}{45e^{-(x-0.125t-2)^2} + (50 - 45e^{-(x-0.125t-2)^2})e^{-0.3t}} \quad (38)$$

olarak elde edilir. t nin ilerleyen değerleri için (36) çözümünün grafiğini çizelim.



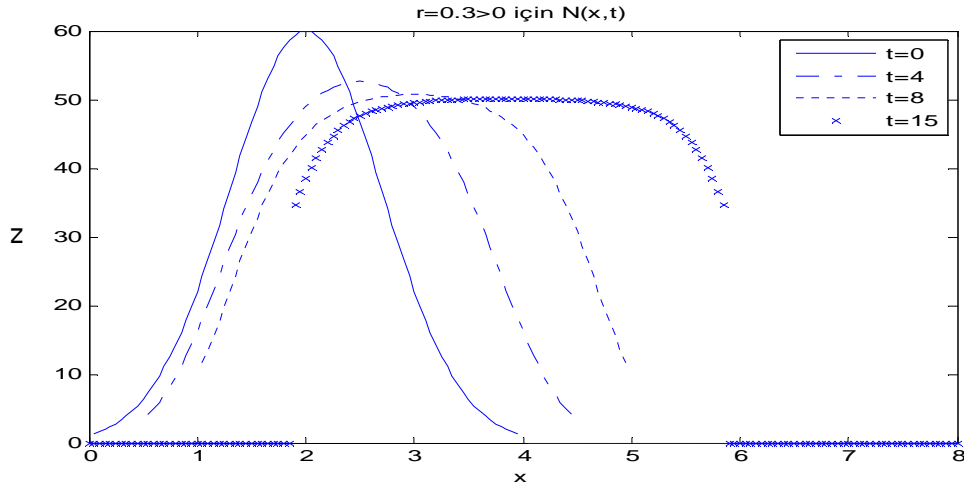
Şekil 26. $r = 0.3$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği

Başlangıçta her bölgede nüfus taşıma kapasitesi olan 50'den düşüktür. Görüldüğü gibi $r > 0$ olduğu için başlangıç nüfusu her noktada büyüyerek taşınmaktadır. Fakat her bölgede nüfus taşıma kapasitesi olan 50'yi geçmemektedir. Nüfus 50 olduğunda o noktada nüfus sabit kalmaktadır.



Şekil 27. $r = 0.3$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği

Şekil 27’de görüldüğü gibi başlangıç nüfusu $N(x, 0) = 50e^{-(x-2)^2}$ olarak alındığında $x = 2$ noktasında 50 olan nüfus sabit kalmaktadır. Sadece taşınmaktadır. Diğer noktalarda nüfus 50 oluncaya kadar artmaktadır. Yani nüfus taşıma kapasitesine eşit olduğunda o noktada büyüme durmaktadır.

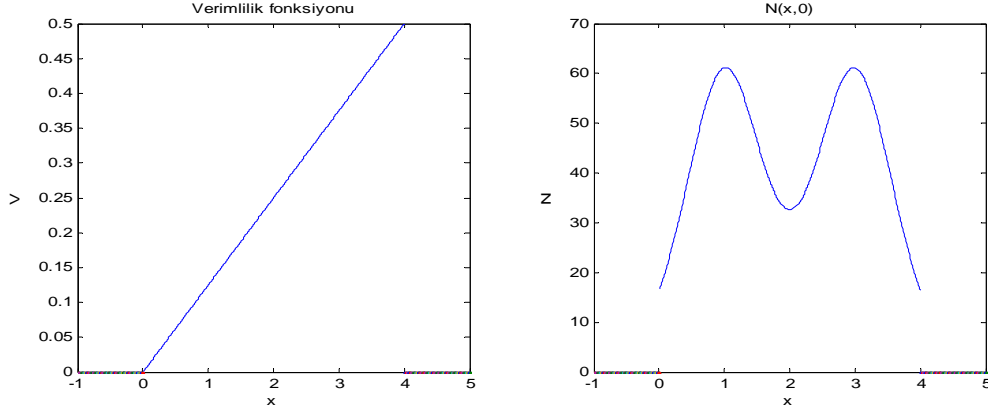


Şekil 28. $r = 0.3$ için ilerleyen t değerinde çözümün grafiği

Şekil 28’de görüldüğü gibi başlangıç nüfusu $N(x, 0) = 60e^{-(x-2)^2}$ olarak alındığında $x = 2$ bölgesinde 60 olan nüfus taşınırken azalmaya başlamaktadır. Nüfus 50 olduğunda sabit kalarak taşınmaktadır. Diğer bölgelerde nüfus 50 oluncaya kadar artmaktadır. Yani

nüfusu taşıma kapasitesinin üstünde olan noktalarda nüfus azalırken nüfusu taşıma kapasitesinden az olan noktalarda nüfus artmaktadır. Nüfusu taşıma kapasitesine gelen bölgelerde nüfus sabit kalmaktadır.

Örnek 4.7. Lineer artan bir verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta iki yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceği araştırılsın.



Şekil 29. Bölge üzerinde lineer verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı

- Bu amaçla Şekil 29'daki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} 0.125x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 8 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 55(\operatorname{sech}(x - 3)^3 + \operatorname{sech}(x - 1)^3), & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelensin.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

$$\frac{\partial N}{\partial t} + 0.125 \frac{\partial N}{\partial x} = 0.3N \left(1 - \frac{N}{50}\right) \quad (39)$$

$$N(x, 0) = 55(\operatorname{sech}(x - 3)^3 + \operatorname{sech}(x - 1)^3), \quad 0 \leq x \leq 4$$

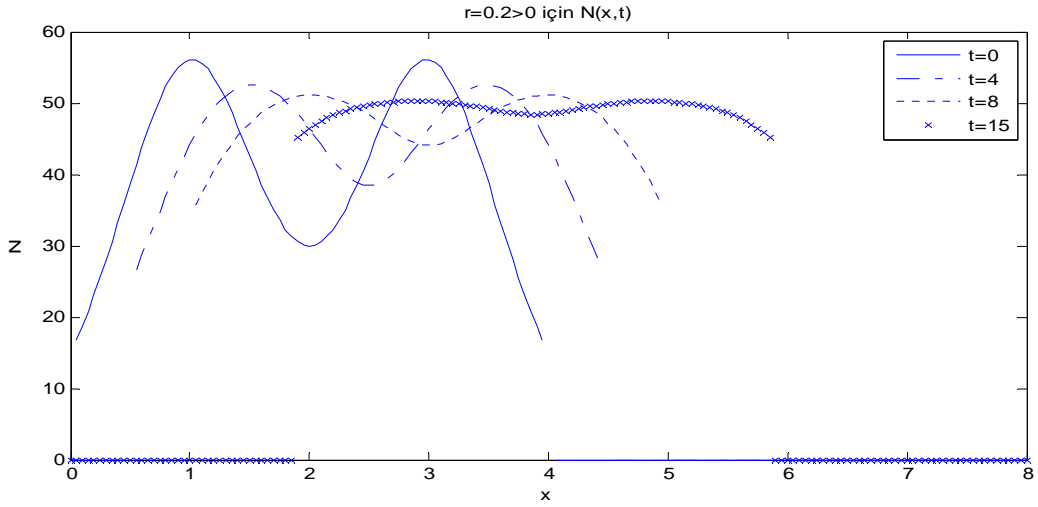
halini alır.

(36) i kullanarak (39) denkleminin çözümü

$P = 55(\operatorname{sech}(x - 0.125 * t - 3))^3 + \operatorname{sech}^3(x - 0.125 * t - 1)^3$ olmak üzere

$$N(x, t) = \frac{50P}{P + (50 - P)e^{-0.3t}} \quad (40)$$

olarak elde edilir. t 'nin ilerleyen değerleri için (38) çözümünün grafiğini çizelim.



Şekil 30. $r = 0.3$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekilde görüldüğü gibi bazı noktalarda nüfus 50'nin üstünde bazı bölgelerde 50'nin altındadır. Nüfus taşınırken 50'nin üstünde olan bölgelerde nüfus azalırken 50 nin altında olan bölgeler 50 oluncaya kadar artmaktadır. Nüfusu 50 olan bölgelerde nüfus sabit kalmaktadır.

Buraya kadar lineer verimlilik fonksiyonu ve lojistik büyüme reaksiyon terimiyle konveksiyon difüzyon denklemini inceledik. Bundan sonraki kısımda parabolik verimlilik fonksiyonu ve lojistik reaksiyon terimiyle konveksiyon reaksiyon modelini inceleyeceğiz.

4.2.2.2. Parabolik Verimlilik

(28) denkleminde verimlilik fonksiyonu olarak parabolik fonksiyon $V(x) = ax^2 + bx + c$ olarak alınsın. Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} + (2ax + b) \frac{\partial N}{\partial x} &= rN \left(1 - \frac{N}{M}\right) - 2aN \\ N(x, 0) &= f(x)\end{aligned}\quad (41)$$

halini alır.

$r \neq 0$ için bu denklemi düzenleyelim.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} + (2ax + b) \frac{\partial N}{\partial x} &= rN \left(1 - \frac{N}{M}\right) - 2aN \\ N(x, 0) &= f(x)\end{aligned}\quad (42)$$

Bu denklemin çözümü için karakteristik metodunu kullanılır. (42) denklemi için karakteristik denklemler aşağıdaki gibi yazılır.

$$\frac{dx}{dt} = 2ax + b, \quad x(0) = x_0 \quad (43)$$

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{M}\right) - 2aN = N \left(r - 2a - \frac{rN}{M}\right), \quad N(0) = f(x_0) \quad (44)$$

(43) karakteristik denklemi için değişkenlere ayırma metodu ile çözülür.

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2ax + b, \quad x(0) = x_0 \Rightarrow \frac{dx}{2ax + b} = dt \\ \Rightarrow \frac{1}{2a} \ln|2ax + b| &= t + c \\ \Rightarrow x(t) &= \frac{c_1 e^{2at} - b}{2a}\end{aligned}$$

Bu çözüme başlangıç koşulu uygulanırsa çözüm

$$x(t) = \frac{(2ax_0 + b)e^{2at} - b}{2a} \quad (45)$$

olarak elde edilir. (44) karakteristik denklemi için $r - 2a = u$ ve $r/M = v$ olarak değişkenlere ayırma metodu ile çözüm aransın.

$$\frac{dN}{dt} = N(u - vN) \quad (46)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dN}{N(u - vN)} = \int dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} \int \left(\frac{1}{N} + \frac{v}{u - vN} \right) dN = t + c$$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{N}{u - vN} \right) = ut + c$$

$$\Rightarrow \frac{N}{u - vN} = c_1 e^{ut}$$

$$\Rightarrow N(t) = \frac{uc_1 e^{ut}}{1 + vc_1 e^{ut}}$$

Bu çözüme başlangıç koşulu uygulansın.

$$f(x_0) = \frac{uc_1}{1 + vc_1}$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{f(x_0)}{u - vf(x_0)}$$

Dolayısıyla (44) karakteristik denkleminin çözümü

$$\Rightarrow N(t) = \frac{uc_1 e^{ut}}{1 + vc_1 e^{ut}} = \frac{uc_1}{vc_1 + e^{-ut}} = \frac{uf(x_0)}{vf(x_0) + (u - vf(x_0))e^{-ut}} \quad (47)$$

olarak bulunur.

(43) çözümünden x_0 ı çekip (47) çözümünde yerine yazılırsa (41) denkleminin çözümü

$$\frac{(r - 2a)f \left(\frac{(2ax+b)e^{-2at-b}}{2a} \right)}{\frac{r}{M} f \left(\frac{(2ax+b)e^{-2at-b}}{2a} \right) + \left((r - 2a) - \frac{r}{M} f \left(\frac{(2ax+b)e^{-2at-b}}{2a} \right) \right) e^{-ut}} \quad (48)$$

olarak elde edilir. Bu çözüm düzenlenirse

$$N(x, t) = \frac{\frac{r-2a}{r} M f\left(\frac{(2ax+b)e^{-2at}-b}{2a}\right)}{f\left(\frac{(2ax+b)e^{-2at}-b}{2a}\right) + \left(\frac{r-2a}{r} M - f\left(\frac{(2ax+b)e^{-2at}-b}{2a}\right)\right) e^{-(r-2a)t}} \quad (49)$$

elde edilir. Daha düzenli olması açısından $z = ((2ax + b)e^{-2at} - b)/2a$ olarak alınırsa çözüm

$$N(x, t) = \frac{\frac{r-2a}{r} M f(z)}{f(z) + \left(\frac{r-2a}{r} M - f(z)\right) e^{-(r-2a)t}} \quad (50)$$

olarak elde edilir.

Teorem: M konveksiyonsuz modelin kararlı denge noktası ise $(r - 2a)M/r$ parabolik verimlilik ile konveksiyonlu modelin kararlı denge noktasıdır.

İspat: $(r - 2a) > 0$ olsun. $\forall t \in [0, \infty)$ için

$$z = \frac{(2ax + b)e^{-2at} - b}{2a}, \quad p(x) = f(z)$$

ve $q(x) = (r - 2a)M/r - f(z)$ olsun.

•Başlangıç fonksiyonu $f(x) < (r - 2a)M/r$ olan noktalar için ilerleyen t değerlerinde $f(z)$ terimi sadece öteleme işlemi yaptığından $p(x) < (r - 2a)M/r$ olur. Dolayısıyla $q(x) > 0$ olur.

$t \rightarrow \infty$ iken $q(x)e^{-rt} \rightarrow 0$ olduğu için

$$N(x, t) = \frac{\frac{r-2a}{r} M f(z)}{f(z) + \left(\frac{r-2a}{r} M - f(z)\right) e^{-(r-2a)t}} \rightarrow \frac{(r - 2a)}{r} M$$

olur.

•Başlangıç fonksiyonu $f(x) > (r - 2a)M/r$ olan noktalar için ilerleyen t değerlerinde $f(z)$ terimi sadece öteleme işlemi yaptığından $p(x) > (r - 2a)M/r$ olur. Dolayısıyla $q(x) < 0$ olur.

$t \rightarrow \infty$ iken $q(x)e^{-rt} \xrightarrow{\text{artarak}} 0$ olduğu için

$$N(x, t) = \frac{\frac{r-2a}{r} M f(z)}{f(z) + \left(\frac{r-2a}{r} M - f(z)\right) e^{-(r-2a)t}} \xrightarrow{\text{azalarak}} \frac{(r - 2a)}{r} M$$

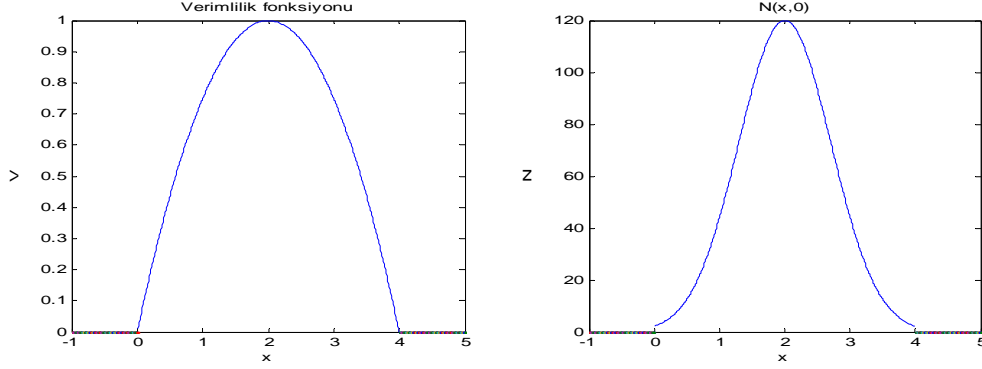
olur.

•Başlangıç fonksiyonu $f(x) = (r - 2a)M/r$ olan noktalar için ilerleyen t değerlerinde $f(z)$ terimi sadece öteleme işlemi yaptığından $p(x) = (r - 2a)M/r$ olur. Dolayısıyla $q(x) = 0$ olur. Dolayısıyla

$$N(x, t) = \frac{\frac{r-2a}{r} M f(z)}{f(z) + qe^{-(r-2a)t}} = \frac{(r - 2a)}{r} M$$

olur. Buradan $N(x, t) = ((r - 2a))/r M$ kararlı çözümdür. $(r - 2a) < 0$ ise $t \rightarrow \infty$ iken $N(x, t) = 0$ olduğu açıktır.

Örnek 4.8. Lineer artan bir verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceği araştırılsın.



Şekil 30. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun grafiği

- Bu amaçla Şekil 30'daki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} -0.25x^2 + x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 8 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 120e^{-(x-2)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelensin.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (-0.5x + 1) \frac{\partial N}{\partial x} = 0.1N \left(1 - \frac{N}{50}\right) + 0.5N \quad (51)$$

$$N(x, 0) = 120e^{-(x-2)^2}, \quad 0 \leq x \leq 4$$

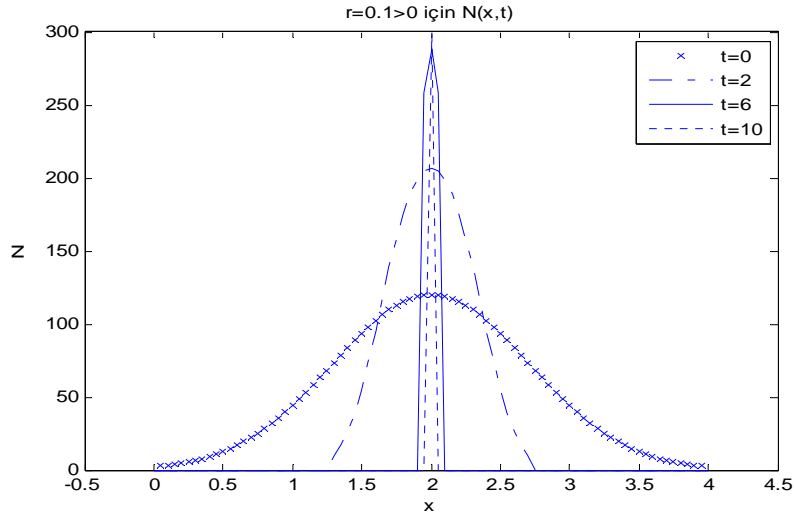
halini alır.

• (50) çözümünü kullanarak (51) denkleminin çözümü $p = 120e^{-((x-2)e^{0.5t})^2}$ olmak üzere

$$N(x, t) = \frac{300p}{p + (300 - p)e^{-(0.6)t}} \quad (52)$$

elde edilir.

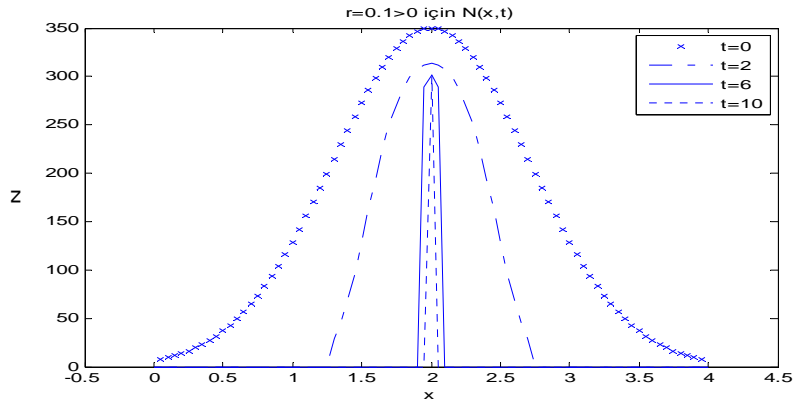
r parametresine göre (52) çözümünün grafiğini çizelim.



Şekil 31. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekilde görüldüğü gibi nüfus verimli olan $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. Taşınırken nüfus ortamın taşıma kapasitesi olan $(r - 2a)/r = 300$ değerini geçmemektedir.

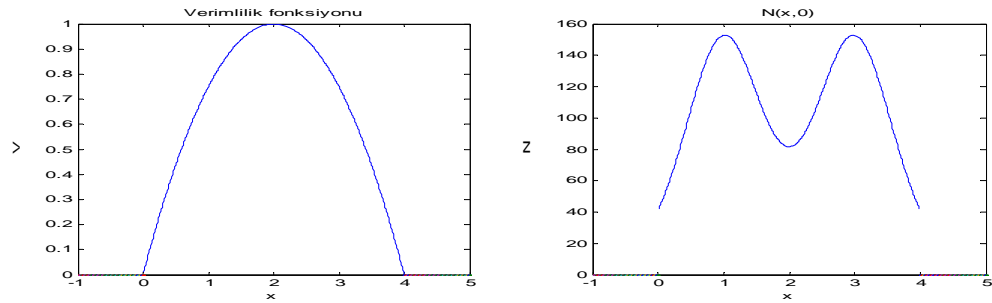
Başlangıç nüfusu olarak $N(x, 0) = 350e^{-(x-2)^2}$ alınsın. Bu durumda çözümün grafiği aşağıdaki gibi olur.



Şekil 32. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Görüldüğü gibi nüfus $x = 2$ noktasına doğru taşınmaktadır. Başlangıç nüfusu taşıma kapasitesin büyük olan bölgelerde nüfus azalırken, taşıma kapasitesinden düşük olan bölgelerde nüfus artmaktadır.

Örnek 4.9. Parabolik ve orta noktalarda daha yüksek değerlerde verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta iki yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını nasıl etkileyeceği araştırılsın



Şekil 33. Bölge üzerinde parabolik verimlilik fonksiyonu ve bu bölgedeki başlangıç nüfusun grafiği

- Bu amaçla Şekil 33'teki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} -0.25x^2 + x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x,0) = \begin{cases} 150(\operatorname{sech}(x-3)^3 + \operatorname{sech}(x-1)^3), & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelensin.

- Bu durumda reaksiyon-konveksiyon denklemi

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (-0.5x + 1) \frac{\partial N}{\partial x} = 0.1N \left(1 - \frac{N}{50}\right) + 0.5N \quad (53)$$

$$N(x, 0) = 150(\operatorname{sech}(x - 3)^3 + \operatorname{sech}(x - 1)^3), \quad 0 \leq x \leq 4$$

halini alır.

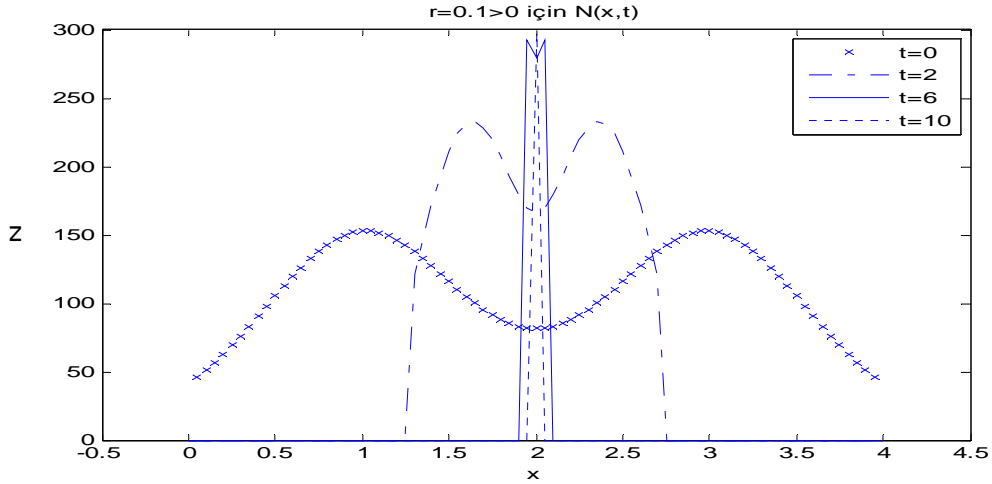
- (50) çözümünü kullanarak (53) denkleminin çözümü

$$p = 150(\operatorname{sech}((x - 2)e^{0.5t} - 1)^3 + \operatorname{sech}((x - 2)e^{0.5t} + 1)^3)$$

olmak üzere

$$N(x, t) = \frac{300p}{p + (300 - p)e^{-(0.6)t}} \quad (54)$$

Olarak elde edilir. (54) çözümünün ilerleyen t değerlerinde grafiğini çizelim.



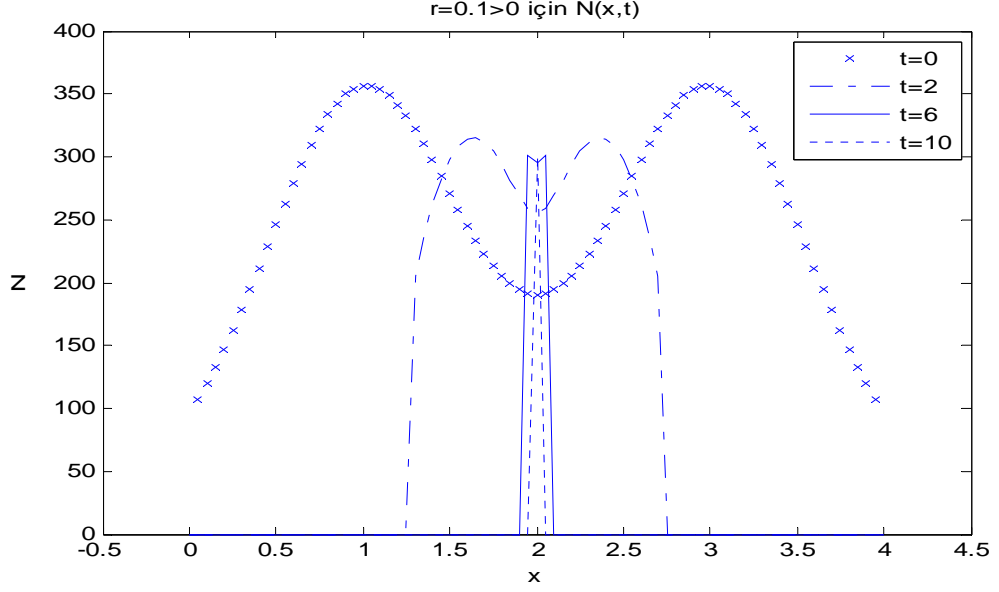
Şekil 34. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekilde görüldüğü gibi ilerleyen t değerlerinde nüfus başlangıç şeklini bozmadan nüfus $x = 2$ bölgesine doğru taşınır. Her noktada nüfus 300 den düşük olduğu için nüfus artarak taşınır. Taşıma kapasitesi 300 olduğu anda büyüme durur.

(53) denkleminin başlangıç fonksiyonunu

$$N(x, 0) = 350(\operatorname{sech}^3(x - 3) + \operatorname{sech}^3(x - 1)), \quad 0 \leq x \leq 4$$

olarak alınsın. Bu durumda çözümün grafiğini çizelim.



Şekil 35. $r = 0.1$ için çözümün ilerleyen t değerlerindeki grafiği

Şekilde görüldüğü nüfus ilerleyen t değerlerinde $x = 2$ bölgesine doğru taşınırken nüfusu taşıma kapasitesinden büyük olan bölgelerde nüfus azalmaktadır. Nüfus 300 olduğu anda büyüme durmaktadır.

- Sonuç olarak lojistik büyüme ve parabolik verimlilik fonksiyonu ile konveksiyon-reaksiyon modellerinde nüfus taşınırken taşıma kapasitesi $(r - 2a)M/r$ değerini geçememektedir.

Buraya kadar olan bölümlerde reaksiyon ve konveksiyon terimlerinin etkisini inceledik. Bundan sonraki bölümlerde bu modele difüzyon terimini de ilave edip etkisini inceleyeceğiz.

5. REAKSİYON-KONVEKSİYON-DİFÜZYON NÜFUS MODELİ

Bu bölümde reaksiyon konveksiyon modeline yoğun bölgelerden daha az yoğun bölgelere göç eğilimini modellemek amacıyla difüzyon terimi ilave ederek reaksiyon konveksiyon difüzyon modeli elde ederek analiz edeceğiz.

5.1. Üstel Büyüme Reaksiyon Terimi ile Reaksiyon -Konveksiyon-Difüzyon

Üstel büyüme reaksiyon terimi ile inceleyeceğimiz reaksiyon-konveksiyon-difüzyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial(V_x N)}{\partial x} &= k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN \\ N(x, 0) &= f(x), \quad 0 \leq x \leq L \\ \frac{\partial N}{\partial x}(0, t) &= h(N(0, t) - g_1(t)) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(L, t) &= -h(N(L, t) - g_2(t))\end{aligned}\tag{55}$$

Bazı verimlilik fonksiyonları için (55) denkleminin çözümü araştırılsın.

5.1.1. Lineer Verimlilik

Verimlilik fonksiyonunu lineer alarak (54) başlangıç sınır değer problemi için çözüm aransın.

$$V(x) = ax + b, \quad 0 \leq V(x) \leq 1$$

olsun. Bu durumda (55) denklemini

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -v \frac{\partial N}{\partial x} + k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN$$

$$N(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0, t) = h(N(0) - g_1(t))$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(L, t) = -h(N(L) - g_2(t))$$

(56)

halini alır.

Özel olarak $h = 0$ alıp (56) başlangıç sınır değer probleminin çözümü yapalım. Bu problemde $N(x, t) = P(x, t) \cdot e^{rt}$ dönüşümü yapıldığında (56) denklemi aşağıdaki probleme indirgenir.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial x} + k \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$$

$$P(x, 0) = f(x)$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial P}{\partial x}(L, t)$$

(57)

(57) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki değişken dönüşümleri uygulansın.

$$X = x - vt, T = t$$

Bu değişken dönüşümü altında kısmi türevleri tekrar yazılsın.

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = -v \frac{\partial P}{\partial X} + \frac{\partial P}{\partial T}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial X}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial P}{\partial X} \right) = \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$$

Bulunan bu kısmi türevleri (56) denkleminde yerine koyulursa

$$\frac{\partial P}{\partial T} = k \frac{\partial^2 P}{\partial X^2}$$

$$P(X + vT, 0) = f(X + vT)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X}(-vT, T) = 0 = \frac{\partial P}{\partial X}(L - vT, T)$$

(58)

difüzyon problemi elde edilir.

(58) denklemi için değişkenlere ayırma yöntemini kullanarak çözüm aranır.

$$\begin{aligned} P(X, T) &= U(X)V(T) \\ \Rightarrow U(X)V'(T) &= kU''(X)V(T) \\ \Rightarrow \frac{V'(T)}{kV(T)} &= \frac{U''(X)}{U(X)} = -\lambda \end{aligned}$$

$$V'(T) + \lambda kV(T) = 0$$

$$U''(x) + \lambda U(X) = 0$$

$$U'(-vT) = 0 = U'(L - vT)$$

(59)

(59) denkleminin çözümünü λ parametresine göre araştırılsın.

1) $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda

$$U(X) = AX + B$$

$$U'(X) = A$$

$$U'(-vT) = 0 = A, U'(L - vT) = 0 = A$$

elde edilir. Buradan B yi keyfi seçebiliriz. $U(X) = 1$ bir çözümdür.

2) $\lambda = -\alpha^2 < 0$ olsun. Bu durumda çözüm

$$U(X) = Ae^{-\alpha X} + Be^{\alpha X}$$

$$U'(X) = -\alpha Ae^{-\alpha X} + \alpha Be^{\alpha X}$$

elde edilir. Sınır şartları uygulansın.

$$-\alpha Ae^{-\alpha vT} + \alpha Be^{\alpha vT} = 0$$

$$-\alpha Ae^{-\alpha L + \alpha vT} + \alpha Be^{\alpha L - \alpha vT} = 0$$

Bu iki denklemi matris formatında yazılsın.

$$\begin{bmatrix} -\alpha e^{-\alpha vT} & \alpha e^{\alpha vT} \\ -\alpha e^{-\alpha L + \alpha vT} & \alpha e^{\alpha L - \alpha vT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sıfırdan farklı A, B katsayıları olması için determinantın sıfır olması gerekir.

$$-\alpha^2 e^{-\alpha L} + \alpha^2 e^{\alpha L} = 0 \Rightarrow \alpha^2 (e^{-\alpha L} + e^{\alpha L}) = 0 \xrightarrow{\alpha \neq 0} e^{\alpha L} = e^{-\alpha L} \Rightarrow L = 0$$

Dolayısıyla $L \neq 0$ olduğundan bu durumda çözüm yoktur.

3) $\lambda = \alpha^2 > 0$ olsun. Bu durumda çözüm

$$U(X) = A \cos \alpha X + B \sin \alpha X$$

$$U'(X) = -\alpha A \sin \alpha X + \alpha B \cos \alpha X$$

olarak elde edilir. Sınır şartları uygulansın.

$$-\alpha A \sin(-\alpha v T) + \alpha B \cos(-\alpha v T) = 0$$

$$-\alpha A \sin(\alpha L - \alpha v T) + \alpha B \cos(\alpha L - \alpha v T) = 0$$

Bu iki denklemi matris formatında yazılsın.

$$\begin{bmatrix} -\alpha \sin(-\alpha v T) & \alpha \cos(-\alpha v T) \\ -\alpha \sin(\alpha L - \alpha v T) & \alpha \cos(\alpha L - \alpha v T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sıfırdan farklı A, B katsayıları olması için determinantın sıfır olması gerekir.

$$-\alpha^2 \sin(-\alpha v T) \cos(\alpha L - \alpha v T) + \alpha^2 \sin(\alpha L - \alpha v T) \cos(-\alpha v T) =$$

$$\alpha^2 \sin(\alpha L - \alpha v T + \alpha v T) = \alpha^2 \sin(\alpha L) = 0$$

Dolayısıyla A ve B nin sıfırdan farklı olması için

$$\alpha L = n\pi \Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, \dots$$

olması gerekir. Buradan çözüm

$$U_n(X) = A_n \cos \frac{n\pi}{L} X + B_n \sin \frac{n\pi}{L} X$$

olarak elde edilir.

Son olarak (58) denkleminin çözümü

$$P(X, T) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi}{L} X + B_n \sin \frac{n\pi}{L} X) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} T}$$

olarak elde edilir. $X = x - vt$ ve $T = t$ olduğundan (57) denkleminin çözümü

$$P(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi}{L} (x - vt) + B_n \sin \frac{n\pi}{L} (x - vt)) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2} t}$$

olarak elde edilir.

Başlangıç koşulunu uygulayarak A_n ve B_n katsayılarını bulalım.

$$P(x, 0) = f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{n\pi}{L} x + B_n \sin \frac{n\pi}{L} x)$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

Dolayısıyla $N(x, t) = P(x, t)e^{rt}$ olduğundan (56) başlangıç sınır değer probleminin çözümü

$$N(x, t) = e^{rt} \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{L} (x - vt) + B_n \sin \frac{n\pi}{L} (x - vt) \right) e^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t} \right)$$

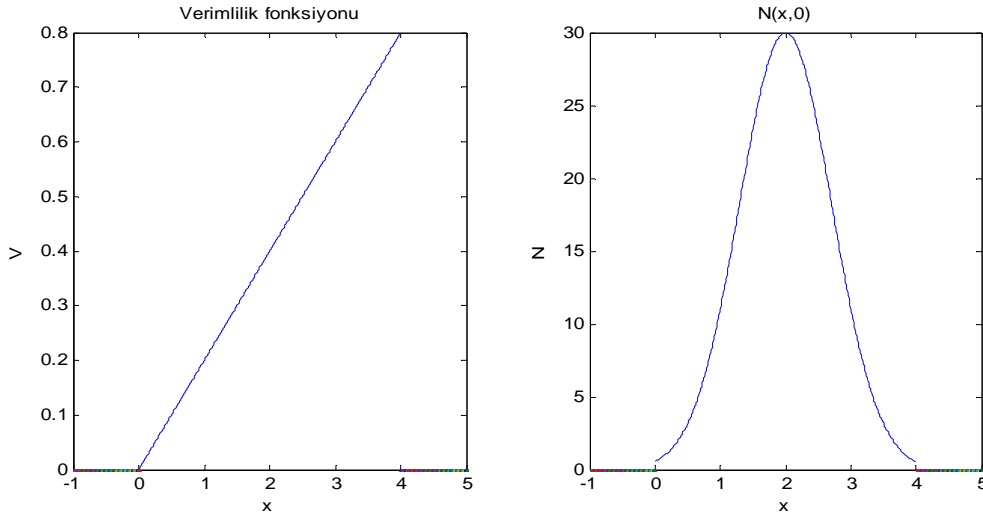
$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

(60)

olarak elde edilir.

Örnek 5.1. Lineer artan bir verimlilik fonksiyonuna sahip bir bölgenin, başlangıçta tek yerel maksimuma sahip bölge nüfusunun dağılımını difüzyon terimiyle beraber nasıl etkileyeceği araştırılsın.



Şekil 36. Lineer artan verimlilik fonksiyonu ve bölgedeki başlangıç nüfusun dağılımı

- Bu amaçla Şekil 36'daki gibi $0 \leq x \leq 4$ bölgesinde verimlilik fonksiyonunu

$$V(x) = \begin{cases} 0.2x, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

ve başlangıç nüfus fonksiyonunu

$$N(x, 0) = \begin{cases} 30e^{-(x-2)^2}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & x < 0 \text{ ve } x > 4 \end{cases}$$

olarak çözümün davranışı incelensin.

Bu durumda reaksiyon-konveksiyon-difüzyon denklemi

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -0.2 \frac{\partial N}{\partial x} + 0.1 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2}$$

$$N(x, 0) = 30e^{-(x-2)^2}, 0 \leq x \leq 4$$

(61)

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0, t) = 0 = \frac{\partial N}{\partial x}(L, t)$$

halini alır.

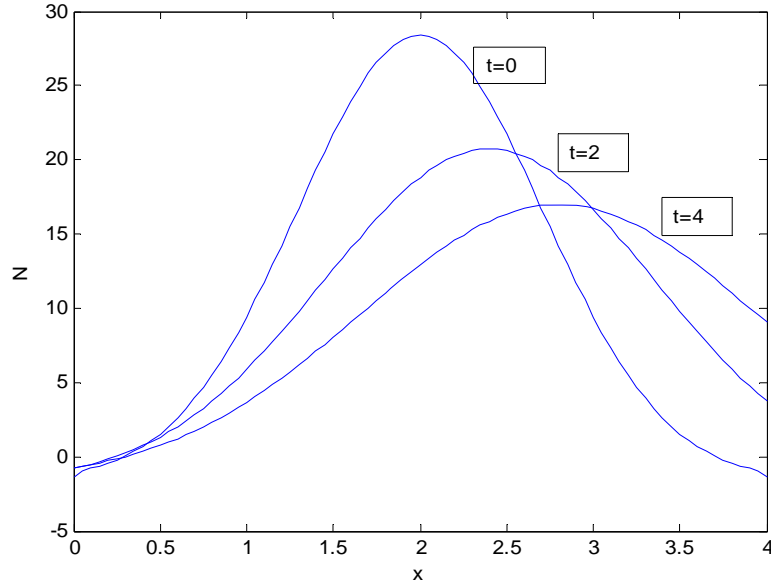
(60)' çözümlünü kullanarak (61) probleminin çözümlü

$$N(x, t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi}{4} (x - 0.2t) + B_n \sin \frac{n\pi}{4} (x - 0.2t) \right) e^{-\frac{0.1n^2\pi^2}{4^2}t}$$

$$A_n = \frac{1}{2} \int_0^4 30e^{-(x-2)^2} \cos \frac{n\pi}{4} x dx$$

$$B_n = \frac{1}{2} \int_0^4 30e^{-(x-2)^2} \sin \frac{n\pi}{4} x dx$$

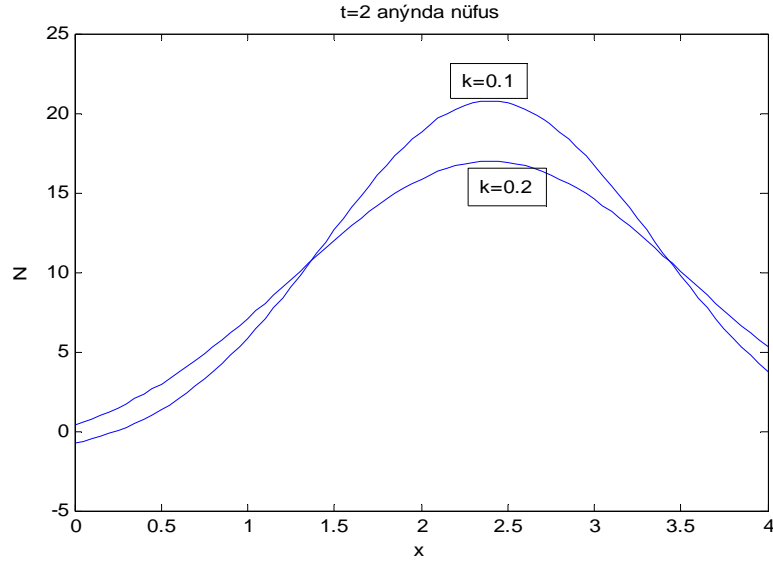
olarak elde edilir. Bulunan çözümlü grafiiğini görmek için $n = 100$ olarak grafiiğini çizelim.



Şekil 37. İlerleyen t değerlerinde konveksiyon terimi ile beraber difüzyonun etkisi

Şekil 37’de ilerleyen t değerlerinde taşıma ve difüzyonun beraber etkisi görülmektedir. Nüfus $x = 4$ noktasına doğru taşınırken difüzyon katsayısının etkisiyle nüfus diğer noktalara doğru yayılmaktadır.

Farklı difüzyon katsayısının etkisi görmek için $t = 2$ anında $k = 0.1$ ve $k = 0.2$ olarak çözümü tekrar çizdirelim.



Şekil 38. t=2 anında farklı difüzyon katsayılarının etkisi

Şekil 38’de görülüyor ki difüzyon katsayısı artması nüfusun ilerleyen değerlerde daha çok yayılmasını sağlamaktadır.

6. REAKSİYON KONVEKSİYON DİFÜZYON MODELİNİN UYGULAMASI

Bu bölümde geliştirilen model TÜİK'ten alınan veriler ile test yapılmaktadır. Türkiye haritası üzerinde bir bölge seçilmiş ve bu bölgedeki illerin belli bir zamandaki nüfusu iki model yardımıyla tahmin edilmeye çalışılmıştır. Birinci model reaksiyon difüzyon (RD) modeli, ikinci model ise reaksiyon-konveksiyon-difüzyon (RDK) modelidir. Bu bölümde nüfus tahmini için kullanılacak olan RDK modeli bundan önceki bölümlerde incelenen parabolik verimlilik ile reaksiyon-difüzyon-konveksiyon modelidir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= -(2ax + b) \frac{\partial N}{\partial x} + k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + (r + 2a)N - \frac{r}{M}N^2 \\ N(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(0, t) &= h(N(0, t) - g_1(t)) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(L, t) &= -h(N(L, t) - g_2(t))\end{aligned}\tag{62}$$

Kullanılacak ikinci yöntem ise bilinen RD yöntemidir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + rN - \frac{r}{M}N^2 \\ N(x, 0) &= f(x) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(0, t) &= h(N(0) - g_1(t)) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(L, t) &= -h(N(L) - g_2(t))\end{aligned}\tag{63}$$

Yöntem:

Verilen bir bölgenin (62) modeli ile belirli bir zamanda nüfusunu tahmin etmek için Matlab'de RDK ve RD modeli için iki program hazırlanmıştır. Modellerde kullanılmak üzere iki başlangıç yılı seçilmiştir. İlk başlangıç yılı tahmin edilmek istenilen zamandan 5 yıl öncesi, ikinci başlangıç yılı ise tahmin edilmek istenilen zamandan 20 yıl öncesidir. Birinci başlangıç yılı nüfusu tahmin etmek için, ikinci başlangıç yılı ise geçmiş verilerden

yararlanarak (64) denklemindeki ihtiyacımız olan parametreler ve fonksiyonları belirlemek için kullanılmıştır. Nüfusu tahmini yapmak için gereken parametreler: başlangıç nüfus fonksiyonları, lojistik model parametreleri, difüzyon katsayısı, sınır parametreleri ve verimlilik fonksiyonlarıdır. Bu parametrelerin belirlenmesinde aşağıdaki yöntemler kullanılmıştır.

➤ Başlangıç Nüfus Dağılımı $f(x)$

Belirlenen iki başlangıç yılı için de başlangıç nüfus fonksiyonları, illeri $[0,1]$ aralığına uygun bir şekilde yerleştirilerek o zamanki nüfuslarını temsil edecek şekilde uygun bir eğri Matlab yardımıyla belirlenmiştir.

➤ Lojistik Model Parametreleri ve Sınır Fonksiyonları $(r, M, g_1(t), g_2(t))$

Bir bölgenin lojistik model parametrelerini bulmak için illerin 1935-2010 yılları arasındaki nüfusları TÜİK'ten alınmıştır. Daha sonra illerin bu tarihler arasındaki toplam nüfuslarının lojistik modeli sağladığını kabul ederek Matlab yardımıyla toplam nüfusu temsil eden

$$N(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-rt}}$$

şeklinde lojistik eğrisinin değişken parametreleri M, C, r belirlenmiştir. Aynı şekilde sınırdaki illerin nüfusunu temsil eden $g_1(t), g_2(t)$ fonksiyonları için de lojistik eğri parametreleri belirlenmiştir.

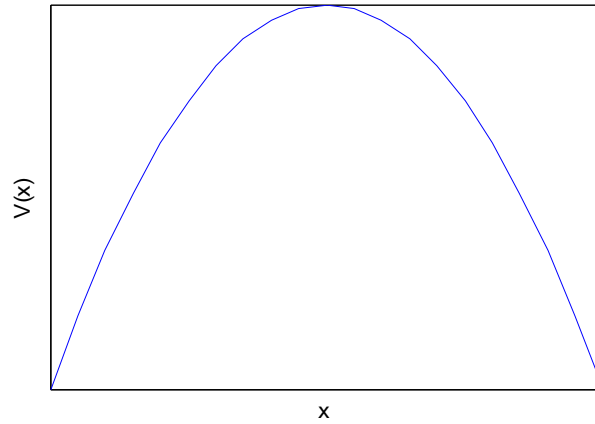
➤ Sınır Parametresi (h)

Uygun h değeri bulmak için hazırlanan RD programında sabit k değeri ve değişik h değerleri alınarak beşer yıl arayla sınırdaki illerin nüfusu hesaplanmıştır. Sınırdaki illerin nüfusunu 1975, 1980 ve 1985 yıllarında tahmin eden h değerleri arasından hataları kareleri ortalaması en düşük olan h değeri sınır parametresi olarak seçilmiştir.

➤ Difüzyon Katsayısı (k)

Uygun k değeri bulmak için hazırlanan RD programında bulunan h değeri ve değişik k değerleri alınarak bölgedeki illerin nüfusu hesaplanmıştır. Bölgedeki illerin nüfusunu 1975, 1980 ve 1985 yıllarında tahmin eden k değerleri arasından hataları kareleri ortalaması en düşük olan k değeri difüzyon katsayısı olarak seçilmiştir.

➤ Verimlilik Fonksiyonu ($V(x)$)



Şekil 39. Bölgeler için alınan verimlilik fonksiyonu

Alınan bölgede verimliliğin kısmen de olsa orta noktaya doğru gidildikçe artan parabolik bir fonksiyon olduğunu varsayılmıştır. Uygun verimlilik fonksiyonu bulmak için hazırlanan RDK programında bulunan h ve k değerleri ve değişik parabolik verimlilik fonksiyonları alınarak bölgedeki illerin nüfusları beşer yıl arayla hesaplanmıştır. Bölgedeki illerin nüfusunu 1975, 1980 ve 1985 yıllarında tahmin eden verimlilik fonksiyonları arasından hataları kareleri ortalaması en düşük olanı o bölgenin verimlilik fonksiyonu olarak seçilmiştir.

Bu bölümde sıkça kullanacağımız bir kavramı hatırlatalım.

Bilgi: Belirleme Katsayısı (Coefficient of Determination)

İstatistikte belirleme katsayısı, gelecek çıktılarının model tarafından ne kadar iyi tahmin edilebildiğine ait bir ölçü sağlar. R^2 ile gösterilir.

$$R^2 = 1 - \frac{SS_{er}}{SS_{tot}}$$

formülü ile verilir. Bu formülde $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$ ve f_i gözlem değerleri olmak üzere

$$SS_{tot} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

$$SS_{er} = \sum_{i=1}^n (y_i - f_i)^2$$

olarak verilir. SS_{er} terimi hataların kareleri toplamı olarak adlandırılır.(URL-1)

Örnek 6.1 (A bölgesi)

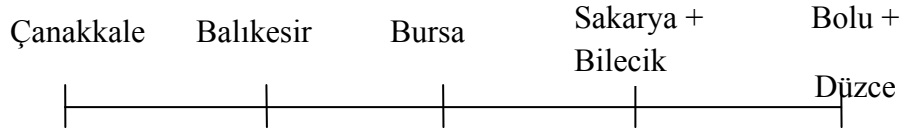
Komşularına göre daha fazla göç alan ili barındıran bir bölgedeki illerin nüfusunu göçe bağlı olarak bulunmak istenmektedir.



Şekil 40. A bölgesindeki illerin Türkiye haritasındaki konumu

Bu amaçla Şekil 40'teki gibi Türkiye haritasında görüldüğü gibi bir hat üzerinde 5 tane il alınıp bu illerin geçmiş 1990 yılı nüfusları tahmin edilmek isteniyor. Orta kısımdaki illerin nüfusu kenardaki illere göre daha fazla olduğundan kısmen de olsa bu bölgede verimliliğin orta kısımlarında fazla diğer kısımlarda az olan parabolik bir fonksiyon

olduğunu kabul edilmektedir. Yani Bursa'nın diğer illere göre daha fazla verimli olduğunu kabul edilmektedir.



Şekil 41. A bölgesinde alınan illerin bir hat üzerindeki gösterimi

Bu illerden Bilecik'in nüfusu diğerlerine göre çok azdır. Bundan dolayı başlangıç nüfuslarına kolay bir eğri uydurmak için Sakarya ve Bilecik beraber alınmışlardır.

A bölgesinin 1990 yılı nüfusunu tahmin etmek için 1985 ve 1970 olmak üzere iki başlangıç yılı seçilmektedir.

➤ A bölgesine ait illerin verileri

A bölgesine ait illerin 1935 yılından itibaren nüfusları aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 1. (A bölgesi nüfus verileri)

(bin)	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya+Bilecik	Bolu	Toplam
1935	222	481	442	307	248	1700
1940	304	482	461	332	257	1836
1945	317	524	491	368	276	1976
1950	289	563	545	399	303	2099
1955	311	612	598	436	318	2275
1960	337	670	693	506	353	2559
1965	350	708	755	543	383	2739
1970	360	749	848	597	403	2957
1975	369	789	961	632	428	3179
1980	391	853	1148	695	471	3558
1985	417	910	1324	771	504	3926

Tablo 1 in devamı

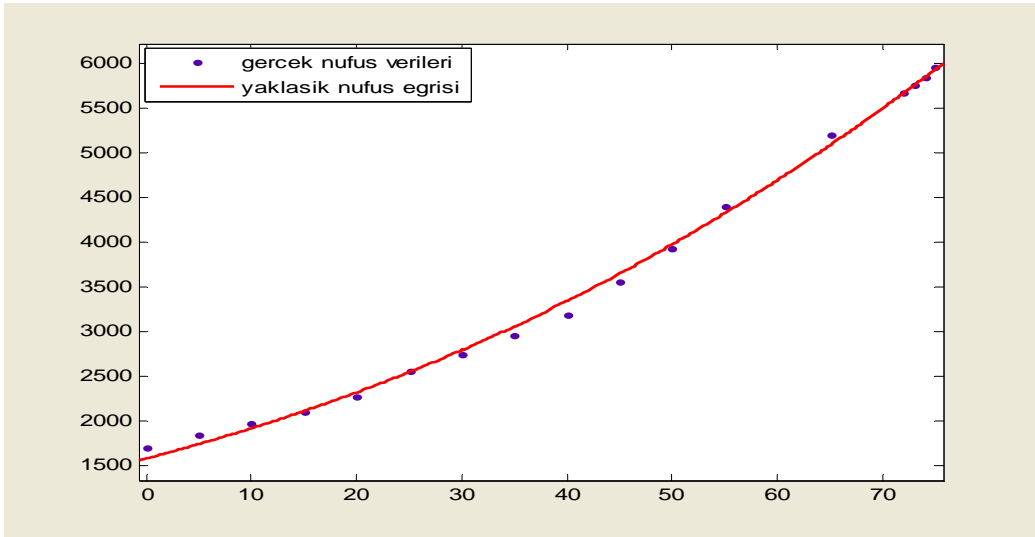
1990	432	973	1603	858	536	4402
2000	464	1076	2125	950	584	5199
2007	476	1118	2439	1038	593	5664
2008	474	1130	2507	1044	596	5751
2009	477	1140	2550	1063	606	5836
2010	490	1152	2605	1097	609	5953

➤ A bölgesine ait lojistik model parametrelerinin belirlenmesi

Bu illerin 1935 ile 2010 yılları arasındaki toplam nüfusunun lojistik modeli sağladığını kabul edilsin. İllerin toplam nüfusunu temsil edecek şekilde

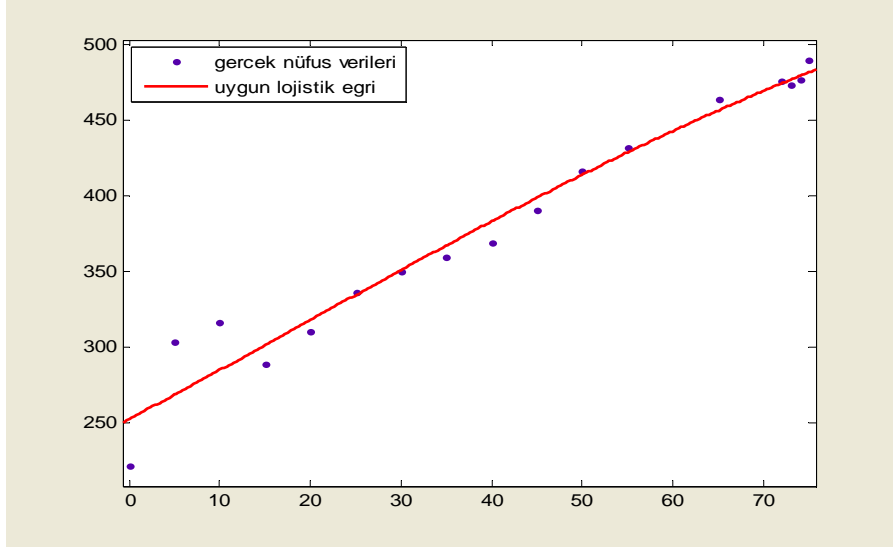
$$N(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-rt}}$$

lojistik eğrisinin parametreleri Matlab ile $M = 19820$, $C = 11.53$, $r = 0.021$ olarak $R = 0.99$ uyum ile bulunmuştur.



Şekil 42. A bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri

Aynı yöntemle sınırda olan Çanakkale ve Bolu illeri için de nüfuslarını temsil eden lojistik eğri parametreleri bulunmuştur.



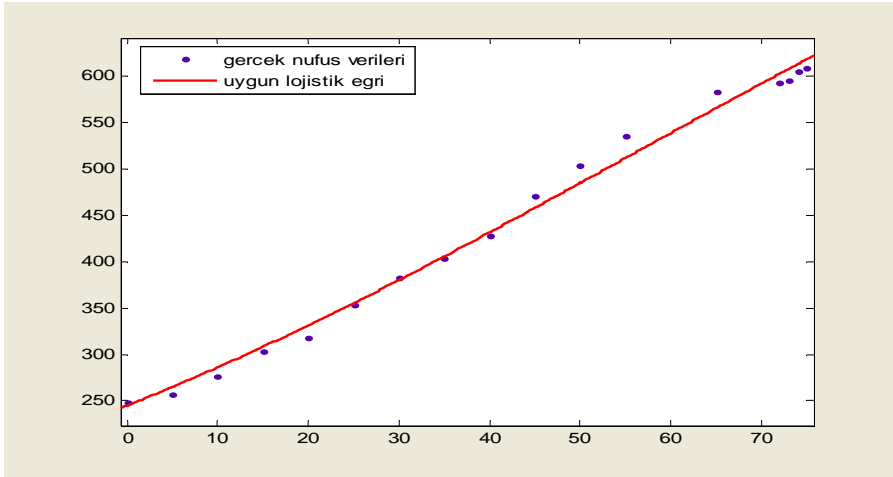
Şekil 43. Çanakkale ili nüfusunu temsil eden uygun lojistik eğri

Matlab ile Çanakkale ili için aranan parametreler $M = 631$, $C = 1.495$, $r = 0.021$ olarak $R = 0.96$ uyum ile bulunmuştur.

Dolayısıyla sınırdaki Çanakkale ilinin nüfusunu temsil eden eğri

$$g_1(t) = \frac{631}{1 + 1.95e^{-0.021t}}$$

olarak bulunur.



Şekil 44. Bolu ili nüfusunu temsil eden uygun lojistik eğri

Matlab ile Bolu ili için aranan parametreler $M = 1029$, $C = 3.2$, $r = 0.021$ olarak $R = 0.99$ uyum ile bulunmuştur.

Dolayısıyla sınırdaki Bolu ilinin nüfusunu temsil eden eğri

$$g_2(t) = \frac{1029}{1 + 3.2e^{-0.021t}}$$

olarak bulunur.

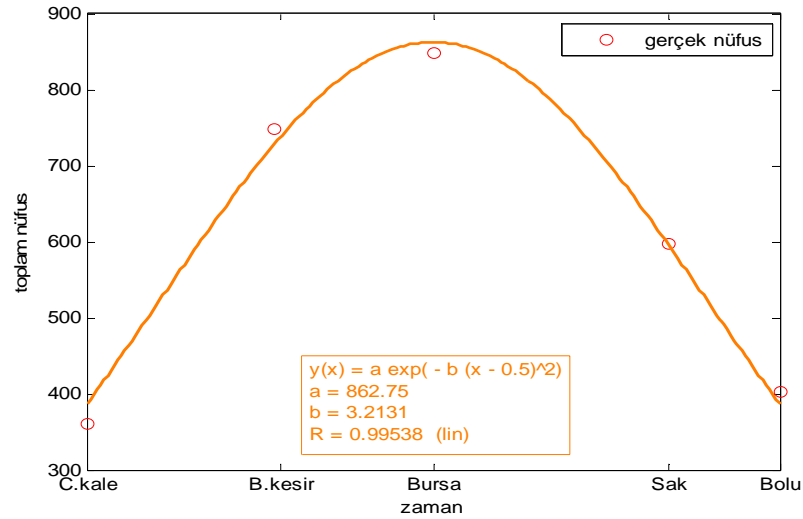
➤ A bölgesine ait illerin 1970 yılı nüfuslarına uygun eğrinin belirlenmesi

A bölgesinin 1970 nüfuslarını temsil edecek şekilde uygun bir eğri bulunmak istenmektedir.

Tablo 2. (A bölgesi 1970 nüfus verileri)

(bin)	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya+Bilecik	Bolu	Toplam
1970	360	749	848	597	403	2957

Matlab ile bu noktaları temsil eden yaklaşık eğri $N_0 = 862.75e^{-3.2131(x-0.5)^2}$ olarak elde edilir.



Şekil 45. A bölgesinin 1970 nüfuslarına uygun başlangıç fonksiyonu

Bulunan eğrinin gerçek veriler ile uyumluluk oranı $R = 0.99$ dur. (Eğrinin uygun olması amacıyla iller eksen üzerine sırayla 0, 0,27, 0,5, 0,84, 1 noktalarına yerleştirilmiştir.)

- A bölgesine ait illerin verimlilik fonksiyonu, difüzyon katsayı ve sınır değerlerinin belirlenmesi

a) Sınır Değerleri

Matlab’de A bölgesi için hazırlanan RD programında belirli h değerleri için 1970, 1975 ve 1980 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3. (Belirlenen h değerleriyle A bölgesi nüfus verileri)

	h değerleri	Çanakkale	Bolu	SSer
1975 yılı		369(bin)	428(bin)	
	0,002	371	443	229
	0,0018	368	442	197
	0,0016	366	441	178
	h değerleri	Çanakkale	Bolu	SSer
1980 yılı		391(bin)	471(bin)	
	0,002	391	476	25
	0,0018	389	474	13
	0,0016	386	473	29
	h değerleri	Çanakkale	Bolu	SSer
1985 yılı		417(bin)	504(bin)	
	0,002	413	509	41
	0,0018	409	507	73
	0,0016	406	505	122

Belirlenen bu h değerlerinin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4. (Belirlenen h değerleriyle A bölgesi nüfus tahmininin hatalarının kareleri ortalaması)

h değerleri	Hataların Kareleri Ortalaması
0,002	98,33333
0,0018	94,33333
0,0016	109,6667

Tablo 4’de görüldüğü gibi verilenlerden en uygun h değeri 0,0018 dir. Çünkü daha küçük veya daha büyük h değeri seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir. Bu nedenle A bölgesi için h parametresi 0,0018 olarak seçilmiştir.

b) Difüzyon Katsayısı

Matlab’de A bölgesi için hazırlanan RD programında daha önce bulunan h ve belirli k değerleri için 1975, 1980 ve 1985 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 5. (Belirlenen k değerleriyle A bölgesi nüfus verileri)

	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1975		369	789	961	632	428	
yılı	0,000005	386	805	953	658	438	1385
	0,00001	383	804	953	658	439	1282
	0,000015	382	804	953	658	439	1255
	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1980		391	853	1148	695	471	
yılı	0,000005	413	890	1053	728	474	11976
	0,00001	409	889	1052	728	475	11941
	0,000015	406	889	1052	728	475	11842
	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
		417	910	1324	771	504	

1985	Tablo 5 in devamı						
yılı	0,000005	441	983	1162	806	512	28109
	0,00001	435	983	1162	806	512	27857
	0,000015	431	983	1161	806	512	28054

Belirlenen k değerlerinin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 6. (Belirlenen k değerleriyle A bölgesi nüfus tahmininin hataları kareleri ortalaması)

k değerleri	Hataların Kareleri Ortalaması
0,000005	13717
0,00001	13693,33
0,000015	13823,33

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun k değeri 0,00001 dir. Çünkü daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir. Bu nedenle A bölgesi için difüzyon katsayısı seçimi 0.00001 olacaktır.

c) Verimlilik fonksiyonu

Matlab'de A bölgesi için hazırlanan RDK programında daha önce bulunan h ve k değerleri için bazı verimlilik fonksiyonlarıyla 1975, 1980 ve 1985 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 7. (Belirlenen verimlilik fonksiyonları ile A bölgesi nüfus verileri)

	Verimlilik Fonksiyonu	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1975		369	789	961	632	428	
yılı	$-0.003x^2 + 0.003 + c$	369	738	982	647	441	3436
	Tablo 7'nin devamı						

	$-0.004x^2 + 0.004 + c$	366	741	992	648	441	3699
	$-0.005x^2 + 0.005 + c$	363	744	1002	649	441	4200
	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1980		391	853	1148	695	471	
yılı	$-0.003x^2 + 0.003 + c$	384	826	1117	720	474	2373
	$-0.004x^2 + 0.004 + c$	379	832	1140	721	473	1329
	$-0.005x^2 + 0.005 + c$	376	838	1162	722	473	1379
	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1985		417	910	1324	771	504	
yılı	$-0.003x^2 + 0.003 + c$	400	924	1270	798	505	4131
	$-0.004x^2 + 0.004 + c$	395	933	1308	799	504	2053
	$-0.005x^2 + 0.005 + c$	392	941	1348	799	503	2947

Bu üç dönem için belirlenen verimlilik fonksiyonlarının hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 8. (Belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla A bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)

Verimlilik Fonksiyonu	Hataların Kareleri Ortalaması
$-0.003x^2 + 0.003 + c$	3313,333
$-0.004x^2 + 0.004 + c$	2360,333
$-0.005x^2 + 0.005 + c$	2842

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun verimlilik fonksiyonu $V(x) = 0.004x^2 + 0.004 + c$ dur. Çünkü parabolün baş katsayısı daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir.

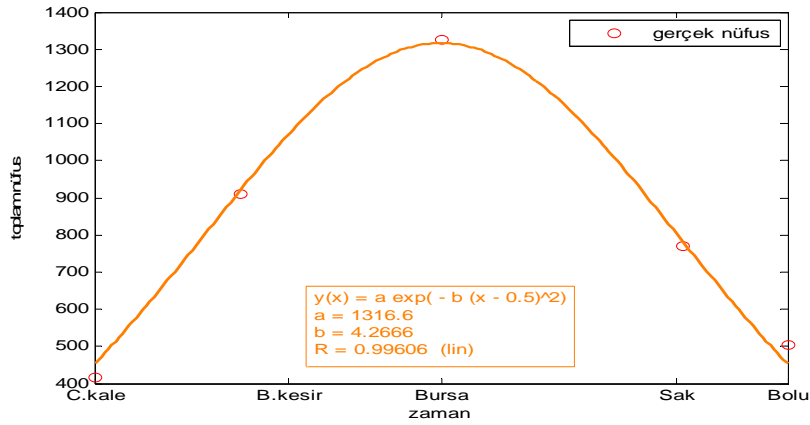
➤ İllerin 1985 yılı nüfuslarına uygun eğrinin belirlenmesi

A bölgesinin 1985 yılı nüfuslarını temsil edecek şekilde uygun bir eğri bulunmak istenmektedir.

Tablo 9. (A bölgesi 1985 nüfus verileri)

(bin)	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya+Bilecik	Bolu	Toplam
1985	417	910	1324	771	504	3926

Matlab ile elde edilen eğri $N_0 = f(x) = 1316.6e^{-4.2666(x-0.5)^2}$ olarak elde edilir.



Şekil 46. A bölgesinin 1985 yıllarına uygun eğri

Bulunan eğri ile gerçek verilerin uyumluluk oranı $R = 0.99549$ dır. (Eğrinin nüfusu daha iyi uygun olması amacıyla iller eksen üzerine sırayla 0, 0,21, 0,5, 0,85, 1 noktalarına yerleştirilmiştir)

➤ A bölgesine ait illerin 1990 yılı nüfus tahmini

Şimdiye kadar A bölgesi için gerekli parametreleri bulundu. Bulunan bu parametreler ile elde edilen RD modeli aşağıdaki hali almıştır.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = 0.00001 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + 0.021N - \frac{0.021}{19820} N^2 \quad (64)$$

$$N(x, 0) = 1316.6e^{-4.2666(x-0.5)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0, t) = 0.0009(N(0, t) - \frac{631}{1 + 1.95e^{-0.021t}})$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(1, t) = -0.0009(N(1, t) - \frac{1029}{1 + 3.2e^{-0.021t}})$$

Bulunan parametreler ile elde edilen RDK modeli aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -(0.008x + 0.004)\frac{\partial N}{\partial x} + 0.00001\frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + (0.021 + 0.008)N - \frac{0.021}{19820}N^2$$

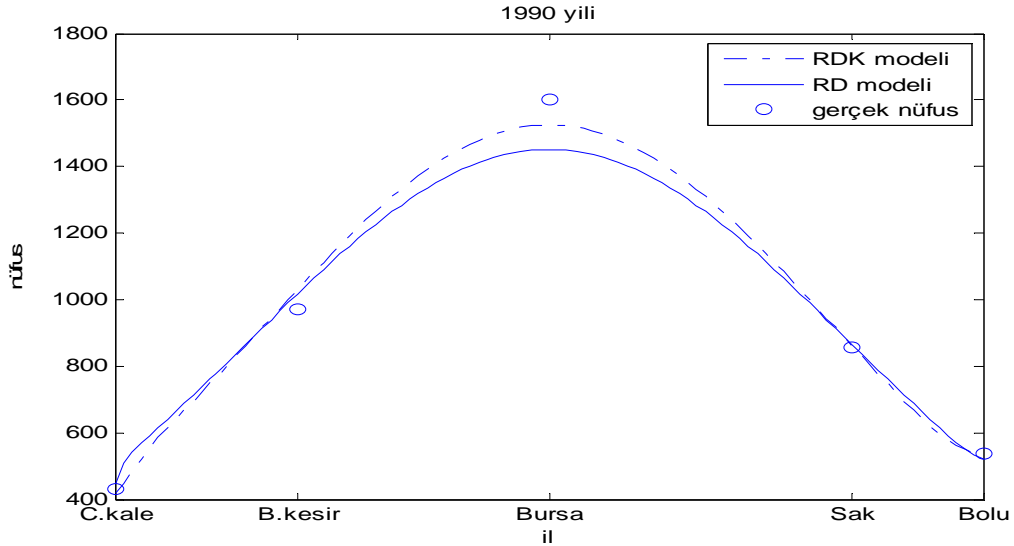
$$N(x, 0) = 1316.6e^{-4.2666(x-0.5)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(0, t) = 0.0009(N(0, t) - \frac{631}{1 + 1.95e^{-0.021t}})$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(1, t) = -0.0009(N(1, t) - \frac{1029}{1 + 3.2e^{-0.021t}})$$

(65)

(65) ve (66) modellerini kullanarak A bölgesi için 1990 yılı elde edilen tahmini nüfuslar aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 47. A bölgesinin 1990 yılı nüfus tahmini

Tablo 10. (RDK ve RD modelleriyle A bölgesi 1990 yılı nüfus tahmini)

Model	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1990 yılı	432	973	1603	858	536	
RDK	421	1026	1509	860	524	11914
RD	446	1016	1451	863	521	25399

(64) ve (65) denklemleri kullanılarak A bölgesinin 1990 yılı nüfus tahmini için; RDK modeli ile hatalarının kareleri 11914, RD modeli ile 25399 olarak bulunmuştur.

➤ Sonuç:

A bölgesindeki illerin 1990 yılı nüfusları, RDK modeli ile RD modeline göre daha az hatayla tahmin edilmiştir.

Örnek 6.2 (B bölgesi)

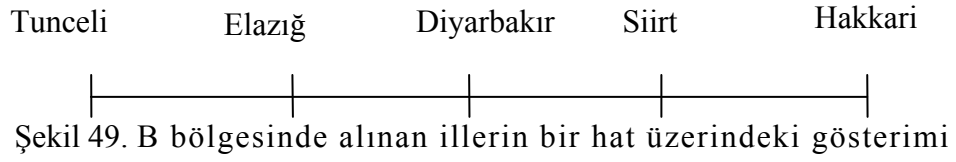
Komşularına göre daha fazla göç alan bir il barındıran bir bölgedeki illerin nüfusunu göçe bağlı olarak bulmak istenmektedir.



Şekil 48. B bölgesindeki illerin Türkiye haritasındaki konumu

Bu amaçla Şekil 38'deki gibi Türkiye haritasında bir hat üzerinde 5 tane başka il alınıp, bu illerin geçmiş yıllardaki nüfus verilerini kullanarak 1985 yılı nüfusunu tahmin etmeye çalışılmıştır. Orta kısımdaki illerin nüfusu kenardaki illere göre daha fazla olduğundan kısmen de olsa bu bölgede verimliliğin orta kısımlarında fazla diğer kısımlarda az olan parabolik bir fonksiyon olduğunu kabul edilmiştir. Yani Diyarbakır'ın diğer illere

göre daha fazla verimli olduğunu kabul edilmiştir. Batman ve Şırnak 1990 yılında Siirt'ten ayrıldığı için bölgede nüfusları beraber alınmıştır.



B bölgesinin 1985 yılı nüfusunu tahmin etmek için 1980 ve 1965 olmak üzere iki başlangıç yılı seçilmektedir.

➤ B bölgesine ait illerin verileri

B bölgesine ait illerin 1940 yılından itibaren nüfusları aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 11. (B bölgesi nüfus verileri)

(bin)	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	Toplam
1940	40	94	190	257	146	36
1945	90	198	249	127	35	705
1950	105	213	293	146	44	811
1955	121	242	343	133	54	951
1960	140	278	401	156	67	1118
1965	154	322	475	191	83	1298
1970	157	376	581	232	102	1536
1975	164	417	651	264	126	1739
1980	157	440	778	320	155	1975
1985	151	483	934	381	182	2274
1990	133	498	1094	445	172	2484
2000	93	569	1362	524	236	2979
2007	84	541	1460	849	246	2964
Tablo 11'in Devamı						
2008	86	547	1492	1072	258	3031
2009	83	550	1515	889	256	3069

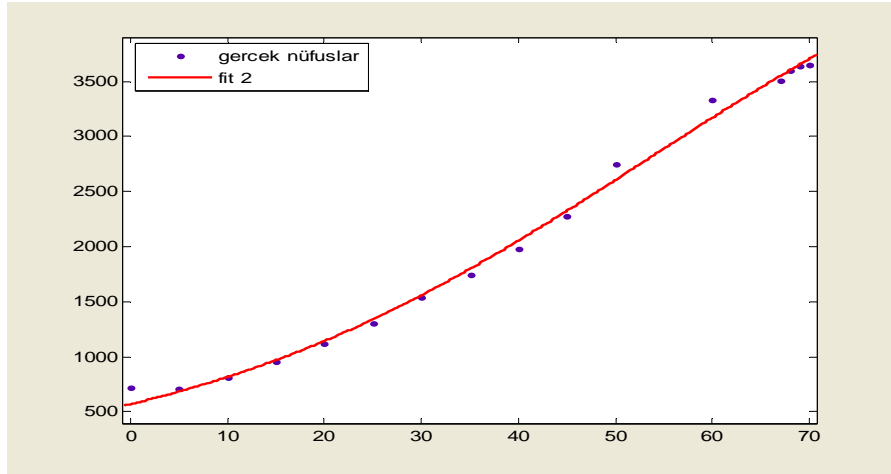
2010	76	552	1528	1240	251	3647
------	----	-----	------	------	-----	------

➤ B bölgesine ait illerin lojistik model parametrelerinin belirlenmesi

Bu illerin 1940 ile 2010 yılları arasındaki toplam nüfusunun lojistik modeli sağladığını kabul edilsin. İllerin toplam nüfusunu temsil edecek şekilde

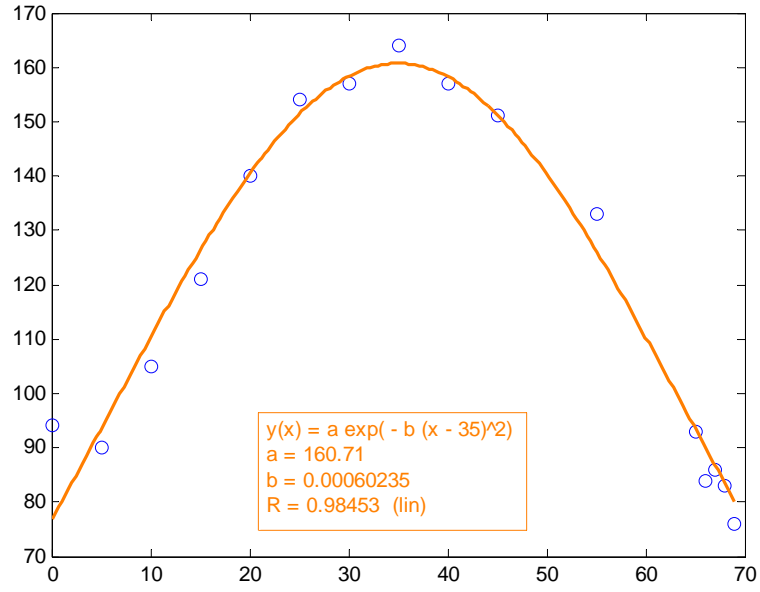
$$N(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-rt}}$$

lojistik eğrisinin parametreleri Matlab ile $M = 5560$, $C = 7.095$, $r = 0.04$ olarak $R = 0.99$ uyum ile bulunmuştur.



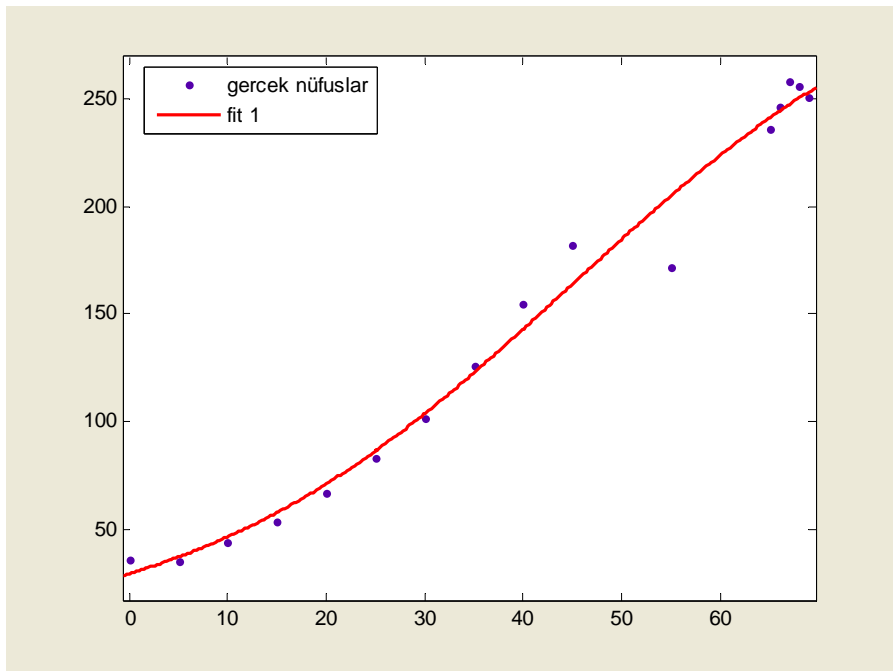
Şekil 50. B bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri

Sınırdaki Tunceli ve Hakkari illeri için de nüfuslarını temsil edecek şekilde uygun eğri bulunmuştur. Tunceli'nin 1940 ile 2010 yılları arasındaki nüfus verileri lojistik bir eğriye uygun olmadığından Tunceli ili için üstel bir fonksiyon tercih edilmiştir.



Şekil 51. Tunceli ilinin nüfusları için uygun üstel eğri

Matlab ile bulunan üstel eğri $g_1(t) = 160e^{0.00060235(x-35)^2}$ olarak bulunmuştur. Hakkari ilinin nüfusu lojistik eğriye uygun olduğundan lojistik model parametreleri Matlab ile belirlenmiştir.



Şekil 52. Hakkari ilinin nüfusları için uygun lojistik eğri

Matlab ile Bolu ili için aranan parametreler $M = 326$, $C = 10.01$, $r = 0.051$ olarak $R = 0.99$ uyum ile bulunmuştur.

Dolayısıyla Hakkari ilini temsil eden eğri

$$g_2(t) = \frac{326}{1 + 10.01e^{-0.51t}}$$

olarak elde edilir.

➤ B bölgesine ait illerin 1965 nüfuslarına uygun eğrinin belirlenmesi

B bölgesinin 1965 yılı nüfuslarını temsil edecek şekilde uygun bir eğri bulunmak istenmektedir.

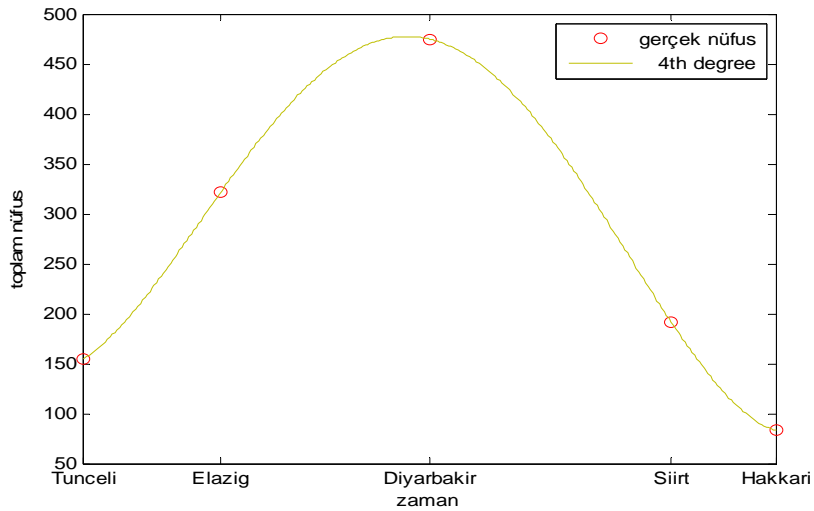
Tablo 12. (B bölgesi 1965 nüfus verileri)

(bin)	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	Toplam
1965	154	322	475	191	83	2463

Matlab ile bu noktaları temsil eden yaklaşık eğri

$$N_0 = 154 + 437,75x + 3518x^2 - 8412,1x^3 + 4385x^4$$

olarak elde edilir.



Şekil 53. B bölgesinin 1965 nüfuslarına uygun eğri

Bulunan eğri gerçek verilerin uygunluğu $R = 1$ dir. (Eğrinin uygun olması amacıyla iller eksen üzerine sırayla 0, 0,20, 0,5, 0,85, 1 noktalarına yerleştirilmiştir.)

- B bölgesine ait illerin verimlilik fonksiyonu, difüzyon katsayı, sınır değerlerinin belirlenmesi

a) Sınır Değerleri

Matlab’de B bölgesi için hazırlanan RD programında belirli h değerleri için 1970, 1975 ve 1980 yılında elde edilen tahmini nüfus verileri ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 13. (Belirlenen h değerleriyle B bölgesi nüfus verileri)

	h değerleri	Çanakkale	Bolu	SSer
1970 yılı		157	102	
	0,0004	160	104	13
	0,0006	161	105	25
	0,0008	163	105	45
	h değerleri	Çanakkale	Bolu	SSer
1975 yılı		391(bin)	471(bin)	
	0,0004	164	123	9
	0,0006	166	125	5
	0,0008	167	126	9
	h değerleri	Çanakkale	Bolu	SSer
1980 yılı		417(bin)	504(bin)	
	0,0004	163	144	157
	0,0006	165	146	145
	0,0008	168	147	185

Belirlenen h değerlerinin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 14. (Belirlenen h değerleriyle B bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)

h değerleri	Hataların Kareleri Ortalaması
0,0004	59,66667
0,0006	58,33333
0,0008	79,66667

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun h değeri 0,006 dır. Çünkü daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir.

b) Difüzyon Katsayısı

Matlab'de B bölgesi için hazırlanan programda daha önce bulunan h değerler ile belirli k değerleri için 1970, 1975 ve 1980 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 15. (Belirlenen k değerleriyle B bölgesi nüfus verileri)

	k değerleri	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	SSer
1970		157	376	581	232	102	
yılı	0,0004	161	386	557	236	104	712
	0,0005	161	385	554	238	105	871
	0,0006	161	385	552	239	105	996
	k değerleri	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	SSer
1975		164	417	651	264	126	
yılı	0,0004	166	461	653	292	124	2732
	0,0005	166	460	647	294	124	2773
	0,0006	166	458	640	296	125	2831
	k değerleri	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	SSer
1980		157	440	778	320	155	
yılı	0,0004	166	549	763	357	145	13656

Tablo 15 in Devamı						
0,0005	165	545	752	360	146	13446
0,0006	165	541	742	361	146	13323

Belirlenen k değerlerinin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 16. (Belirlenen k değerleriyle B bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)

h değerleri	Hataların Kareleri Ortalaması
0,0004	5700
0,0005	5696,667
0,0006	5716,667

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun k değeri 0,0005 dir. Çünkü daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir. Bu nedenle B bölgesi için k parametresi seçimi 0,0005 olacaktır.

c) Verimlilik fonksiyonu

Matlab'de B bölgesi için hazırlanan RDK programında daha önce bulunan h ve k değerleri için bazı verimlilik fonksiyonlarıyla 1970, 1975 ve 1980 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 17. (Belirlenen verimlilik fonksiyonları ile B bölgesi nüfus verileri)

	Verimlilik Fonksiyonu	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	SSer
1970		157	376	581	232	102	
yılı	$-0.0015x^2 + 0.0015 + c$	161	386	562	235	104	490
	$-0.001x^2 + 0.001 + c$	161	386	560	236	104	577
	$-0.0005x^2 + 0.0005 + c$	161	385	557	237	105	707

Tablo 17 nin Devamı							
	Verimlilik Fonksiyonu	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	SSer
1975		164	417	651	264	126	
yılı	$-0.0015x^2 + 0.0015 + c$	165	462	665	290	124	2902
	$-0.001x^2 + 0.001 + c$	165	462	659	291	124	2823
	$-0.0005x^2 + 0.0005 + c$	166	461	653	293	124	2789
	Verimlilik Fonksiyonu	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	SSer
1980		157	440	778	320	155	
yılı	$-0.0015x^2 + 0.0015 + c$	165	550	783	354	145	13445
	$-0.001x^2 + 0.001 + c$	165	548	773	356	145	13149
	$-0.0005x^2 + 0.0005 + c$	165	547	762	358	145	13313

Bu üç dönemde belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla elde edilen verilerin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 18. (Belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla A bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)

Verimlilik Fonksiyonu	Hataların Kareleri Ortalaması
$-0.0015x^2 + 0.0015 + c$	5612,333
$-0.001x^2 + 0.001 + c$	5516,333
$-0.0005x^2 + 0.0005 + c$	5603

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun verimlilik fonksiyonu $-0.001x^2 + 0.001 + c$ dir Çünkü daha parabolün baş katsayısı daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir.

➤ B bölgesine ait illerin 1980 yılı nüfuslarına uygun eğrinin belirlenmesi

B bölgesinin 1980 yılı nüfuslarını temsil edecek şekilde uygun bir eğri bulunmak istenmektedir.

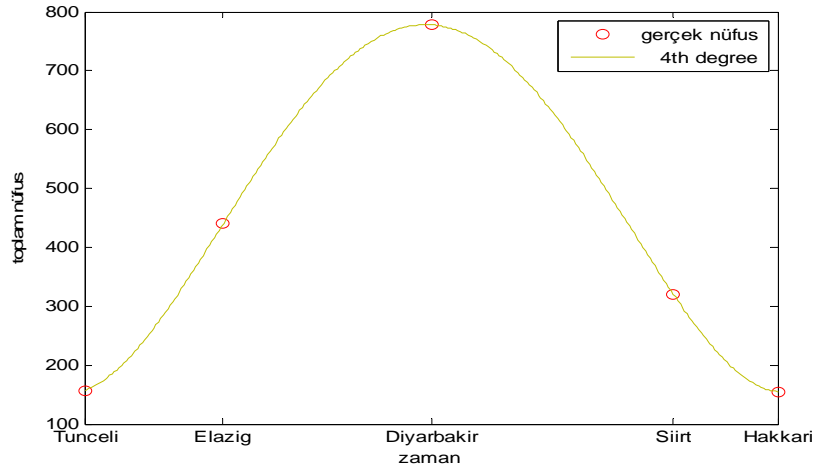
Tablo 19. (B bölgesi 1980 nüfus verileri)

(bin)	Tunceli	Elazığ	Diyarbakır	Siirt	Hakkari	Toplam
1980	157	440	778	320	155	1975

Bu noktaları temsil eden yaklaşık eğri Matlab ile

$$N_0 = 157 + 398,03x + 8242,8x^2 - 17577x^3 + 8933,8x^4$$

olarak elde edilir.



Şekil 54. B bölgesinin 1980 yılı başlangıç ve gerçek nüfusları

Bulunan eğri ile gerçek veriler arasında uyumluluk oranı $R = 1$ dir. (Eğrinin uygun olması amacıyla iller eksen üzerine sırayla 0, 0,20, 0,5, 0,85, 1 noktalarına yerleştirildi)

➤ B bölgesine ait illerin 1985 yılı nüfus tahmini

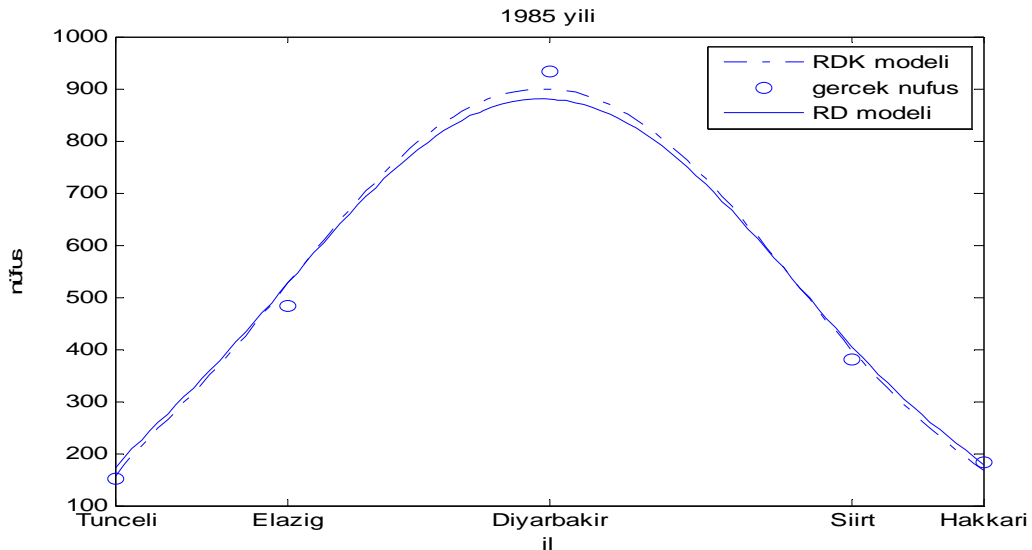
Şimdiye kadar B bölgesi için gerekli parametreleri bulunmuştur. Bulunan bu parametreler ile elde edilen RD modeli aşağıdaki hali almıştır.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= 0.0005 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + 0.04N - \frac{0.04}{5560} N^2 \\ N(x, 0) &= 157 + 398,03x + 8242,8x^2 - 17577x^3 + 8933,8x^4 \\ \frac{\partial N}{\partial x}(0, t) &= 0.0006(N(0, t) - 160e^{-0.00059(t-35)^2}) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(1, t) &= -0.0006(N(1, t) - \frac{326}{1 + 10.01e^{-0.051t}})\end{aligned}\quad (66)$$

Bulunan parametreler ile elde edilen RDK modeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= -(0.002x + 0.001) \frac{\partial N}{\partial x} + 0.0005 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + (0.04 + 0.002)N - \frac{0.04}{5560} N^2 \\ N(x, 0) &= 157 + 398,03x + 8242,8x^2 - 17577x^3 + 8933,8x^4 \\ \frac{\partial N}{\partial x}(0, t) &= 0.0006(N(0, t) - 160e^{-0.00059(t-35)^2}) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(1, t) &= -0.0006(N(1, t) - \frac{326}{1 + 10.01e^{-0.051t}})\end{aligned}\quad (67)$$

(67) ve (68) modellerini kullanarak B bölgesi için 1985 yılı elde edilen tahmini nüfuslar aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 55. B bölgesinin 1985 yılı nüfus tahmini

Tablo 20. (RDK ve RD modelleriyle A bölgesi 1985yılı nüfus tahmini)

Model	Çanakkal	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1985	151	483	934	381	182	
yılı						
RDK	156	526	903	395	166	3287
RD	157	527	895	397	166	4005

(66) ve (67) denklemleri kullanılarak B bölgesinin 1985 yılı nüfus tahmini için; RDK modeli ile hatalarının kareleri 3287, RD modeli ile 4005 olarak bulunmuştur.

➤ Sonuç:

B bölgesindeki illerin 1985 yılı nüfusları, RDK modeli ile RD modeline göre daha az hatayla tahmin edilmiştir.

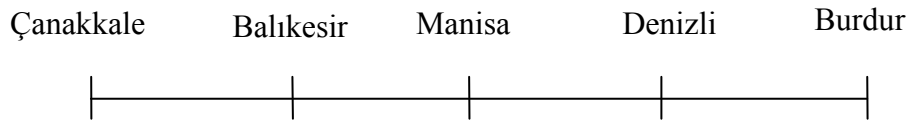
Örnek 6.3 (C Bölgesi)

Komşularına göre daha fazla göç alan bir il barındıran bir bölgedeki illerin nüfusunu göçe bağlı olarak bulmak isteniliyor.



Şekil 56. C bölgesindeki illerin Türkiye haritasındaki konumu

Bu amaçla Şekil 54'teki gibi Türkiye haritasında görüldüğü gibi bir hat üzerinde başka iller alınmıştır ve bu illerin geçmiş yıllardaki nüfus verilerini kullanarak 1990 yılı nüfusunu tahmin etmeye çalışılmıştır. Orta kısımdaki illerin nüfusu kenardaki illere göre daha fazla olduğundan kısmen de olsa bu bölgede verimliliğin orta kısımlarında fazla diğer kısımlarda az olan parabolik bir fonksiyon olduğunu kabul edilmiştir. Yani Manisa'nın diğer illere göre daha fazla verimli olduğunu kabul edilmektedir



Şekil 57. C bölgesindeki alınan illerin hat üzerindeki görünümü

C bölgesinin 1990 yılı nüfusunu tahmin etmek için 1985 ve 1970 olmak üzere iki başlangıç yılı seçilmiştir.

➤ C bölgesine ait illerin verileri

Bu illerin 1935 yılından itibaren nüfusları aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 21. (C bölgesi nüfus verileri)

(bin)	Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	Toplam
1935	222	481	426	285	95	1509
1940	304	482	455	285	119	1645
1945	317	524	472	315	125	1753
1950	289	563	520	340	136	1848
1955	311	612	562	368	157	2010
1960	337	670	657	425	179	2268
1965	350	708	748	463	194	2463
1970	360	749	805	511	210	2635
1975	369	789	872	560	222	2812
1980	391	853	941	603	235	3023

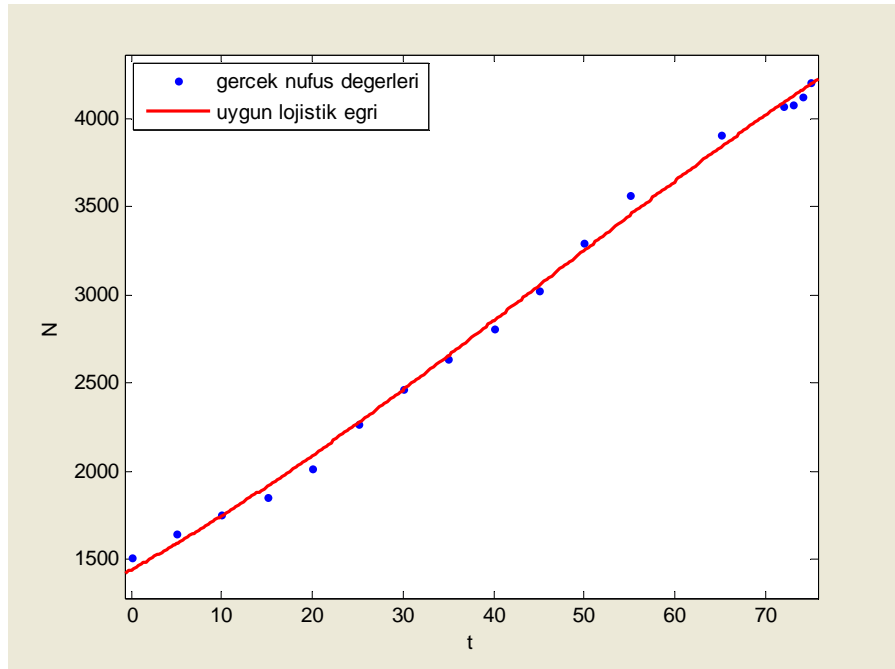
Tablo 21'in Devamı						
1985	417	910	1057	667	248	3299
1990	432	973	1154	750	254	3563
2000	464	1076	1260	850	256	3906
2007	476	1118	1319	907	251	4071
2008	474	1130	1316	917	247	4084
2009	477	1140	1331	926	251	4125
2010	490	1152	1379	931	258	4210

➤ C bölgesine ait lojistik model parametrelerinin belirleniş

Bu illerin 1935 ile 2010 yılları arasındaki toplam nüfusunun lojistik modeli sağladığını kabul edilsin. İllerin toplam nüfusunu temsil edecek şekilde

$$N(t) = \frac{M}{1 + Ce^{-rt}}$$

lojistik eğrisinin parametreleri Matlab ile $M = 6144$, $C = 3.267$, $r = 0.026$ olarak $R = 0.99$ uyum ile bulunmuştur.



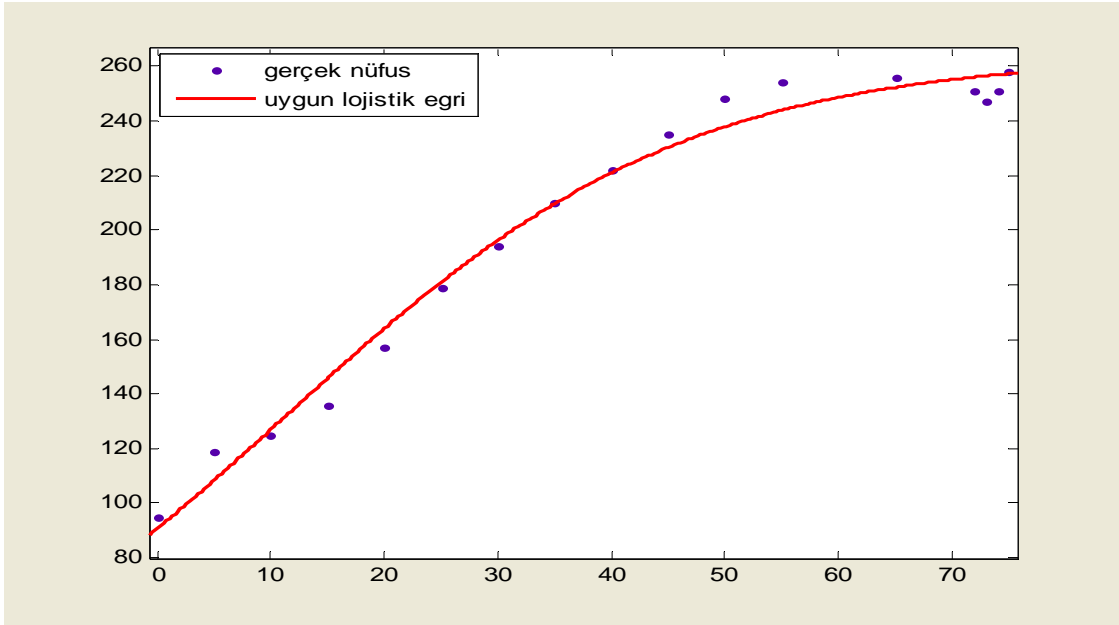
Şekil 58. C bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri

Aynı yöntemle sınırdaki olan Çanakkale ve Burdur illeri için de nüfuslarını temsil edecek şekilde lojistik model parametrelerini bulunmuştur. Çanakkale ilinin parametreleri A bölgesinde bulunduğu için yalnızca Burdur ili için lojistik bir eğri bulalım.

Burdur ili için Matlab ile aranan parametreler $M = 264$, $c = 1.9089$, $r = 0.05699$ olarak $R = 0.99$ uyum ile bulunmuştur. Dolayısıyla sınırdaki Burdur için lojistik eğri

$$g_2(t) = \frac{264}{1 + 1.9089e^{-0.05699t}}$$

olarak bulunur.



Şekil 59. C bölgesinin toplam nüfuslarına uygun lojistik eğri

➤ C bölgesine ait illerin 1970 nüfuslarına uygun eğrinin belirlenmesi

İllerin 1970 nüfuslarını temsil edecek şekilde 4.dereceden bir polinom bulalım.

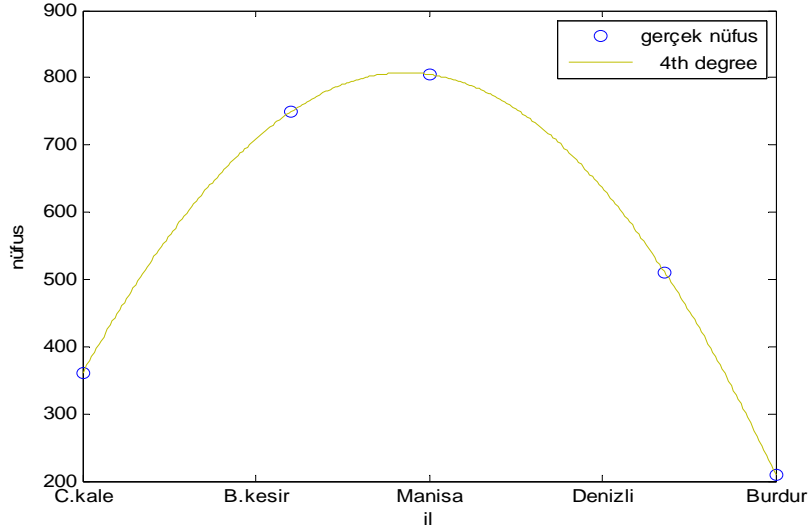
Tablo 22. (C bölgesi 1970 nüfus verileri)

(bin)	Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	Toplam
1970	350	708	748	463	194	2463

Matlab ile bu noktaları temsil eden yaklaşık eğri

$$N_0 = 154 + 437,75x + 3518x^2 - 8412,1x^3 + 4385x^4$$

olarak elde edilir.



Şekil 60. C bölgesinin 1970 nüfuslarına uygun başlangıç fonksiyonu

Bulunan eğri ile gerçek veriler arasındaki uygunluk oranı $R = 1$ dir. (Eğrinin uygun olması amacıyla iller eksen üzerine sırayla 0, 0,30, 0,5, 0,84, 1 noktalarına yerleştirildi)

- C bölgesine ait illerin verimlilik fonksiyonu, difüzyon katsayı, sınır değerlerinin belirlenmesi

a) Sınır Değerleri

Matlab 'de C bölgesi için hazırlanan programda belirli h değerleri için 1975, 1980 ve 1985 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 23. (Belirlenen h değerleriyle C bölgesi nüfus verileri)

	h değerleri	Çanakkale	Burdur	SSer
1975 yılı		369	222	
	0,0011	361	235	233

Tablo 23'ün Devamı			
0,0012	363	236	232
0,0013	364	237	250
h değerleri	Çanakkale	Burdur	SSer
1980 yılı	391	235	
0,0011	382	249	277
0,0012	384	250	274
0,0013	386	252	314
h değerleri	Çanakkale	Burdur	SSer
1985 yılı	417	248	
0,0011	402	261	394
0,0012	405	262	340
0,0013	407	264	356

Belirlenen h değerlerinin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 24. (Belirlenen h değerleriyle C bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)

h değerleri	Hataların Kareleri Ortalaması
0,0011	301,3333
0,0012	282
0,0013	306,6667

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun h değeri 0,0012 dir. Çünkü daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir.

b) Difüzyon Katsayısı

Matlab 'de C bölgesi için hazırlanan programda daha önce buluna h değeri ile belirli k değerleri için 1975, 1980 ve 1985 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 25. (Belirlenen k değerleriyle C bölgesi nüfus verileri)

	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	SSer
1975 yılı		369	789	872	560	222	
	0,0011	356	813	874	552	234	957
	0,0012	356	811	872	550	234	897
	0,0013	356	808	869	548	234	827
	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	SSer
1980 yılı		391	853	941	603	235	
	0,0011	374	881	948	597	245	1258
	0,0012	374	875	943	593	245	977
	0,0013	374	870	938	589	245	883
	k değerleri	Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	SSer
1985 yılı		417	910	1057	667	248	
	0,0011	392	951	1026	643	255	3892
	0,0012	391	943	1018	637	254	4222
	0,0013	391	934	1010	631	254	4793

Belirlenen h değerlerinin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir

Tablo 26. (Belirlenen k değerleriyle C bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)

k değerleri	Hataların Kareleri Ortalaması
0,0011	2035,667
0,0012	2032
0,0013	2167,667

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun k değeri 0,0012 dir. Çünkü daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir. Bu nedenle C bölgesi için h parametresi seçimi 0,0012 olacaktır.

c) Verimlilik fonksiyonu

Matlab’de C bölgesi için hazırlanan RDK programında daha önce bulunan h ve k değerleri için bazı verimlilik fonksiyonlarıyla 1975, 1980 ve 1985 yılında elde edilen veriler ve hataların kareleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 27. (Belirlenen verimlilik fonksiyonları ile C bölgesi nüfus verileri)

	Verimlilik Fonksiyonu	Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	SSer
1975		369	789	872	560	222	
yılı	$-0.0004x^2 + 0.0004 + c$	356	814	877	563	235	997
	$-0.00035x^2 + 0.00035 + c$	356	814	877	563	235	1077
	$-0.0003 + 0.0003 + c$	355	815	878	565	234	997
		Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	SSer
1980		391	853	941	603	235	
yılı	$-0.0004x^2 + 0.0004 + c$	374	882	953	604	245	1375
	$-0.00035x^2 + 0.00035 + c$	374	881	952	603	245	1294
	$-0.0003 + 0.0003 + c$	373	885	955	607	244	1641
		Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	SSer
1985		417	910	1057	667	248	
yılı	$-0.0004x^2 + 0.0004 + c$	391	953	1033	647	255	3550
	$-0.00035x^2 + 0.00035 + c$	391	952	1032	647	255	3514
	$-0.0003 + 0.0003 + c$	391	951	1031	647	255	3482

Bu üç dönemde belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla elde edilen verilerin hatalarının kareleri ortalaması aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 28. (Belirlenen verimlilik fonksiyonlarıyla C bölgesi nüfus verilerinin kareleri ortalaması)

Verimlilik fonksiyonu	Hataların Kareleri Ortalaması
$-0.0004x^2 + 0.0004 + c$	1974
$-0.00035x^2 + 0.00035 + c$	1935
$-0.0003 + 0.0003 + c$	2066,667

Tabloda görüldüğü gibi verilenlerden en uygun verimlilik fonksiyonu $0,00035x^2 + 00035 + c$ Çünkü daha parabolün başkatsayısı daha küçük veya daha büyük seçildiğinde hataların kareleri ortalaması büyümektedir.

➤ C bölgesine ait illerin 1985 yılı nüfuslarına uygun eğrinin belirlenmesi

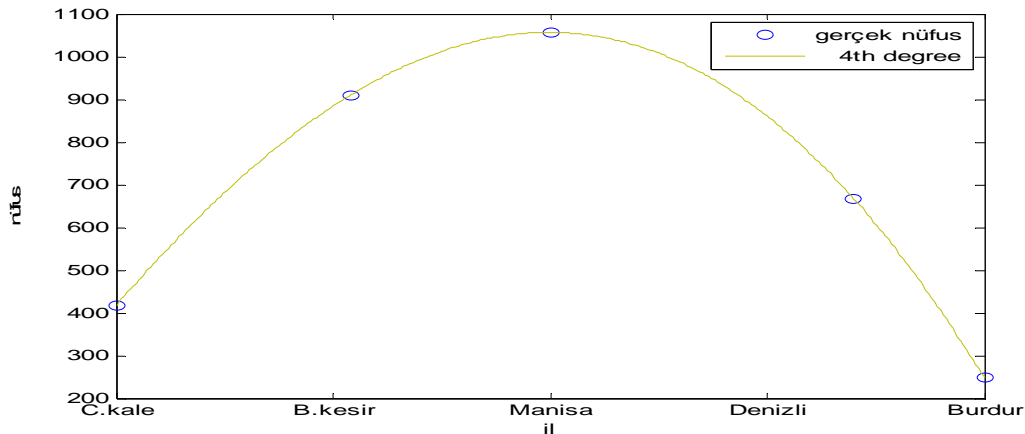
Tablo 29. (C bölgesi 1985 nüfus verileri)

(bin)	Çanakkale	Balıkesir	Manisa	Denizli	Burdur	Toplam
1985	391	853	941	603	235	3023

Bu noktaları temsil eden yaklaşık eğri

$$N_0 = 360 + 1862.6x - 1764.5x^2 - 475.05x^3 + 226.88x^4$$

olarak elde edilir.



Şekil 61. C bölgesinin 1985 yılı nüfusuna uygun eğri

Bulunan eğri ile gerçek veriler arasında uyumluluk oranı $R = 1$ dir. (Eğrinin uygun olması amacıyla iller eksen üzerine sırayla 0, 0,27, 0,5, 0,85, 1 noktalarına yerleştirildi)

➤ C bölgesine ait illerin 1990 yılı nüfus tahmini

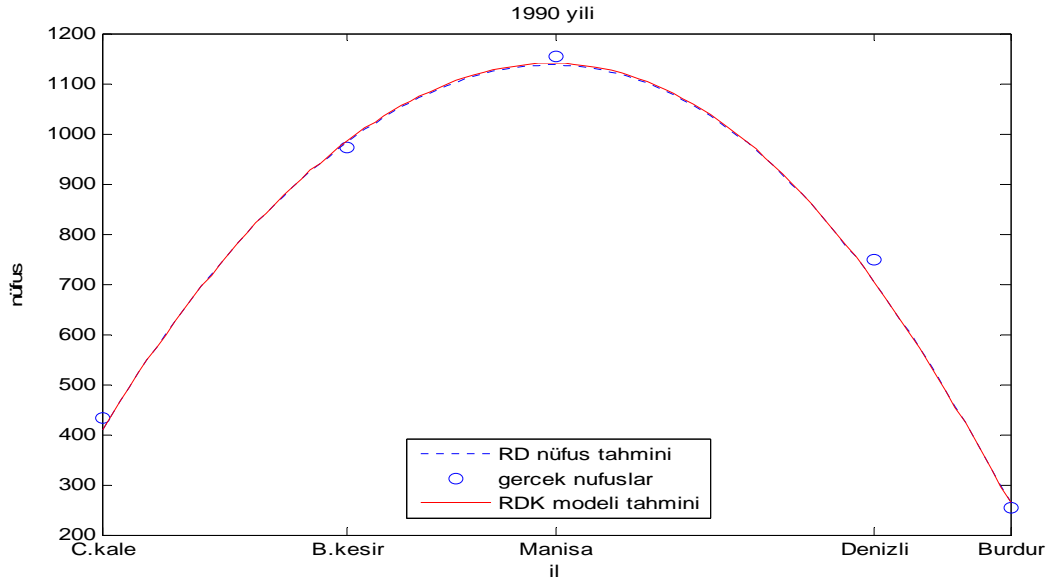
Şimdiye kadar C bölgesi için gerekli parametreleri bulundu. Bulunan bu parametreler ile elde edilen RD modeli aşağıdaki hali almıştır.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= 0.0012 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + 0.026N - \frac{0.026}{6144} N^2 \\ N(x, 0) &= 360 + 1862.6x - 1764.5x^2 - 475.05x^3 + 226.88x^4 \\ \frac{\partial N}{\partial x}(0, t) &= 0.0012(N(0, t) - \frac{631}{1 + 1.95e^{-0.021t}}) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(1, t) &= -0.0012(N(1, t) - \frac{264}{1 + 1.9089e^{-0.05699t}})\end{aligned}\tag{68}$$

Bulunan parametreler ile elde edilen RDK modeli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}\frac{\partial N}{\partial t} &= -(0.008x + 0.004) \frac{\partial N}{\partial x} + 0.00001 \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + (0.021 + 0.008)N - \frac{0.026}{6144} N^2 \\ N(x, 0) &= 360 + 1862.6x - 1764.5x^2 - 475.05x^3 + 226.88x^4 \\ \frac{\partial N}{\partial x}(0, t) &= 0.0012(N(0, t) - \frac{631}{1 + 1.95e^{-0.021t}}) \\ \frac{\partial N}{\partial x}(1, t) &= -0.0012(N(1, t) - \frac{264}{1 + 1.9089e^{-0.05699t}})\end{aligned}\tag{69}$$

(68) ve (69) modellerini kullanarak C bölgesi için 1990 yılı elde edilen tahmini nüfuslar aşağıdaki şekilde gibidir.



Şekil 62. C bölgesinin 1990 yılı nüfus tahmini

Tablo 30. (RDK ve RD modelleriyle C bölgesi 1990 yılı nüfus tahmini)

Model	Çanakkale	Balıkesir	Bursa	Sakarya	Bolu	SSer
1990 yılı	432	973	1154	750	254	
RDK	409	985	1140	704	264	3085
RD	407	983	1137	704	262	3194

➤ Sonuç:

(68) ve (69) denklemleri kullanılarak C bölgesinin 1990 yılı nüfus tahmini için; RDK modeli ile hatalarının kareleri 3089, RD modeli ile 3194 olarak bulunmuştur.

7. SONUÇLAR

Literatürde mevcut reaksiyon difüzyon konveksiyon modellerine, bölgeler arası göçü temsil etmek üzere uygun konveksiyon terimi ilave ederek RDK nüfus modeli geliştirildi. Geliştirilen modelin çözümüne ait özellikler incelendikten sonra, TÜİK'ten alınan ve göç alan bazı illerin komşuluğundaki bölgelerin nüfusu RDK modeli ile test yapıldı. Elde edilen sonuçlar RDK modelinin, göç hareketliliği olan bölgenin nüfusunu tahmin etmede kullanabildiğini ve RD modeline göre nüfusu daha az hata ile tahmin ettiğini göstermektedir. Ayrıca aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

❖ Konveksiyon difüzyon reaksiyon modelinde verimliliğin lineer artan olduğu durumda nüfusun hareket yönünün sağa, lineer azalan olduğu durumda nüfusun hareket yönünün sola olduğu gözlemlendi.

❖ Konveksiyon difüzyon reaksiyon modelinde verimliliğin parabolik olduğu durumda; parabolün kolları aşağıya doğru ise nüfusun hareket yönünün orta tarafa olduğu, parabolün kolları aşağıya doğru ise kenarlara doğru olduğu gözlemlendi.

8. ÖNERİLER

Bu çalışmada bir boyutlu bölgede verimliliği esas alan konveksiyon-difüzyon-reaksiyon modeli geliştirildi. Bu model iki boyutlu bölgeye uyarlanarak geliştirilebilir ve bir ülkenin bölgesel veya bölgeler arası nüfus değişimi analizinde kullanılabilir.

9. KAYNAKLAR

- Allen, L., J., S., 2007. An Introduction Mathematical Biology, Pearson, London
- Banks, H., T., 1988. Kareiva, P.M. ve Zia, L., Analyzing Field Studies of Insect Dispersal Using Two Dimensional Transport Equation, Environmental Entomology, 17, 815-820
- Edelstein, L., 2005. Mathematical Models in Biology, SIAM, New York
- Edwards D. ve Penney, C., 2003. Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling, Third Edition, Prentice Hall, London
- Fisher, R., A., 1937. The Wave of Advance of Advantageous Gene, Ann Eugen(London), 7, 355-369
- Skellam, J., G., 1951. Random Dispersal in Theoretical Population, Biometrika, 196-218.
- Okubo, A., 2002. Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models.Springer-Verlag, New York.
- Helland, I., S., Hoff J., M. ve Anderbrant, G., 1984. Attraction of Bark Beetles (Coleoptera:Scolytidae) To a Pheromone Trap: Experiment and Mathematical Models, Journal of Chemical Acology,10, 723-752.
- Holmes E. E., Levis M., A. ve Banks, J., E. ve Veit, R., R., M., A., 1974. Partial Differential Equation in Ecology:Spatial interaction and Population Dynamics, Ecology, Vol 75, No 1, 17-29.
- Kierstead, H. ve Slobodkin, L., B., 1953. The Size of Water Masses Containing Plankton Blooms, J. Mar. Res., 12, 141-147
- Murray, J., D., 2002. Mathematical Biology I:An Introduction, 3rd ed.Springer Verlag, New York
- Kolmogoroff, A., Petrovsky, I. ve Piscounoff, N., 1937. Etude de L'equation de la Diffusion Avec Croissance de la Quantite de Matierre et Son Application a un Probleme Biologique, Moscow Univ.Bull.Mst, 1, 1-25
- Segel, L., A., A., 1977. Theoretical Study of Receptor Mechanism in Bacterial Chemotaxis, SIAM Journal Application Mathematics, 32653-665
- URL-1, http://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination, Coefficient of Determination, 01 MAYIS 2011.

URL-2, <http://www.tuik.gov.tr>, Türkiye İstatistik Kurumu, Genel Nüfus Sayımları, 15 OCAK 2011.

ÖZGEÇMİŞ

Olgun CABRİ 22.06.1985 yılında Trabzon'un Beşikdüzü ilçesinde doğdu. İlkokulu Dağlıca Köyü İlköğretim Okulunda ve Ortaokulu Beşikdüzü Anadolu İmam Hatip Lisesinde, lise öğrenimini Beşikdüzü Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. 2003 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği 2008 yılında bitirdi. 2008 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2008 yılında Artvin Çoruh Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne araştırma görevlisi olarak atandı. İyi derecede İngilizce bilmektedir.