# FAİZİN RASLANTI DEĞİŞKENİ OLMASI DURUMUNDA ÖDEME DİZİLERİ

# ANNUITIES UNDER RANDOM RATE OF INTEREST

**DİDEM ÇAM**

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

2006

**FAİZİN RASLANTI DEĞİŞKENİ OLMASI DURUMUNDA ÖDEME DİZİLERİ**

**Didem Çam**

**ÖZ**

Annuiteler eşit aralıklarla yapılan ödeme dizileridir. Buna örnek olarak bir sigorta alıcısının ödemiş olduğu primler ve bunun karşısında sigortayı sağlayan kuruluştan taksitler halinde geri aldığı gelir verilebilir. Annuitelerde faizin sabit olarak alınması uzun süreler kullanılan bir yöntem olmuştur. Ancak hızla değişen günümüz ekonomisinde faizin sabit olarak alınması hem sigorta alıcısının hem de sigorta sağlayıcısının zararına olabilmektedir. Özellikle yaşam sigortaları gibi uzun süreli ödeme dizilerinde faiz oranının değişebileceğini düşünmek gerçek hayata daha uygun hesaplamalar yapılmasını sağlayacaktır.

Bu çalışmanın konusu faiz oranının raslantı değişkeni olduğu durumlardaki annuitelerin birikimli ve bugünkü değerlerinin beklenen değeri ile varyansını hesaplamaktır. Bunun yanı sıra sık rastlanan ödeme dizisi türlerinden biri olan yaşam annuiteleri üzerinde de durulmuştur. Bu annuiteler hesaplanırken yaşam süresinin de değişken olabileceği düşünülmüş ve bu değişikliğin yukarıdaki momentler üzerindeki etkileri incelenmiştir. Faiz oranı ve yaşam süresindeki değişkenlik Ornstein-Uhlenbeck süreci ile sağlanmış, buna alternatif olarak gösterilen Wiener süreci ile karşılaştırmalar yapılmıştır.

Bazı parametre değişikliklerinin beklenen değer ve varyansı nasıl etkilediği formüllerden faydalanarak tablo ve grafikler ile gösterilmiştir. Bu doğrultuda faiz ve yaşam süresinin rasgele değişkenler olarak alınmasının olumlu ve olumsuz sonuçları tartışılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Birikimli değer, rasgele faiz oranı, finansal matematik, annuite, Ornstein-Uhlenbeck stokastik süreci, uzay integrali fonksiyonu

**Danışman:** Doç. Dr. Meral Sucu, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

**ANNUITIES UNDER RANDOM RATE OF INTEREST**

**Didem Çam**

**ABSTRACT**

Annuities are used to describe sequences of payments made in fixed intervals. For example, regular payments made by an insured to an insurer, and the regular income she receives in return to these payments may both be called annuities. A conventional way of paying annuities has been to apply a fixed rate of interest. However, as a result of the rapid pace of today's economy, fixed interest rates may be to the disadvantage of both the receiver and the payer. This disadvantage becomes more significant for long-term annuities such as life annuities. In such cases, allowing the interest rates to change results in computations that are more commensurate with real life situations.

The main focus of this work is to compute the expected value and variance of both accumulated and present values of annuities where the interest rate is an independent random variable. In addition, emphasis is given on life annuities which is one of the most common type of annuities used in practice. When life annuities are considered the lifetime of an individual is also taken as a random variable. Its implications on the moments mentioned above are discussed. The variability in the interest rate and lifetimes are modeled using Ornstein-Uhlenbeck process, and comparisons are made to an alternative approach which uses Wiener process.

Effects of changes of certain parameters on expected value and variance are demonstrated with tables and illustrations. The implications of taking the interest rates and lifetimes as independent random variables are discussed.

**Keywords:** Accumulated value, random interest, financial mathematics, annuity, Ornstein-Uhlenbeck stochastic process, function space integrals

**Advisor:** Doç. Dr. Meral Sucu, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences

**TEŞEKKÜR**

Tez konusu seçiminde beni teşvik eden, çalışmanın sonuçlandırılmasında ve karşılaşılan sorunların çözülmesinde çok büyük katkı sağlayan danışmanım Sayın Doç. Dr. Meral Sucu'ya,

Tez aşamasına gelme sürecindeki yardım ve desteklerinden dolayı Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Ömer Esensoy'a,

Çalışma süresince her zaman yanımda olan değerli Anneme, Babama, ve Ablama,

Tezin her aşamasında bana destek olan Ahmet Oğuz Akyüz'e,

en içten teşekkürlerimi sunarım.

# İÇİNDEKİLER

## ŞEKİLLER DİZİNİ

## ÇİZELGELER DİZİNİ

# BİRİNCİ BÖLÜM

## 1. GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Annuite eşit aralıklarla yapılan ödemelerin bir serisi olarak tanımlanabilir (Gerber, 1997). Buna örnek olarak ev kiraları, taksitli ev ve araba alımları ve sigorta prim ödemeleri verilebilir. Annuitelerin birikimli ve bugünkü değerini faiz oranları belirler. Değişen ekonomik koşullar altında faizin sabit kalması beklenemez. Bu nedenle, aktüeryal çalışmalarda faizin raslantı değişkeni olarak alınması kişinin yüklendiği riski karşılamak için karşı taraftan alması gereken miktar ve yapacağı yatırımdaki riski hesaplamada daha gerçekçi olacaktır (Kellison, 1991).

Şirketlerin kendilerinden beklenen görevleri ve hizmetleri yerine getirebilmeleri için sağlam bir mali güce sahip olmaları gerekir. Bu güce sahip olmanın yollarından biri de gelecekte olabilecek değişiklikleri önceden düşünerek ödeme dizilerinin değerlerini bu varsayımlar altında hesaplamaktır. Bu nedenle aktüerler ve diğer uzmanlar, yatırım ve faiz oranlarının değer değişimlerinin rasgele olması durumu üzerine uzun yıllardan beri çalışmaktadırlar.

Boyle (1976) bir yıllık geri dönüşlerin olduğu bir stokastik model kullanarak hayat sigortaları ve bileşik faiz kuramını gerçekleştirmeye çalışmıştır. Log-normal dağılıma bağlı olarak bazı sonuçlara da çalışmasında yer vermiştir. Pollard (1976) aktüerlerin hesaplama kolaylığı nedeniyle stokastik oranlar yerine deterministik oranları tercih ettiğini ancak yapılan prim hesaplarının faizdeki dalgalamaları yansıtmadığını belirtmiştir. Bu konudaki önemli çalışmalardan biri de sigorta fonksiyonları ile faizin istatistiksel özelliklerini ölümlülüğün ve faizin raslantı değişkeni olması durumunda inceleyen Panjer ve Bellhouse’dır (1980). Çalışmada faiz oranı hareketlerinin bazı deneysel sonuçları da ayrıntılı olarak test edilmiştir. Hickman (1985) faize stokastik yaklaşımın nedenlerini ele almıştır.

Wilkie (1981) faiz oranlarının stokastik olarak alınmasının uzun dönemli sözleşmeler açısından daha uygun olacağını belirtmiştir. Giacotto (1986) ise oranların stokastik olması durumunda, sigorta fonksiyonlarının analizi için genel yöntemler vermiştir. Aktüeryal durumda hem durağan hem de durağan olmayan süreçler için yinelemeli (recursive) algoritmalar geliştirmiştir. Denge yaklaşımı için sıfır kuponlu Vasicek modeli, iki sigorta fonksiyonunun bugünkü değerinin elde edilmesinde kullanılmıştır. Jetton (1988) aktüer fiyatlandırma analizini ve varlık-hükümlülük testini yapabilmek için değişik faiz senaryoları yaratarak çeşitli metodlar tanımlamıştır.

Son zamanlarda yapılan çalışmalar faizin yanı sıra ölümlülüğün de bir rasgele değişken olması durumundaki annuiteler üzerinde durmaktadır. Bu duruma en uygun örneklerden birisi de yaşam annuiteleridir. Yaşam sigortası ve annuitelerinde ölümlülük ile faiz çeşitli matematiksel süreçlerle modellenmektedir. Örneğin Beekman ve Fuelling çalışmalarında Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener stokastik süreçlerine yer vermiştir (Beekman and Fuelling, 1990, 1991).

Çalışmanın ikinci bölümünde annuitelere ilişkin genel bilgiler verilerek faizin deterministik ve stokastik olması durumunda annuitelerin bugünkü ve birikimli değerleri hesaplanmıştır. Bu değerlerin beklenen değer ve varyansları bulunmuştur (Zaks, 2001). Üçüncü bölümde yaşam annuiteleri incelenmiş, faiz ve ölümlülükte olabilecek olumsuz koşullar için gereken yeterli miktarın ne kadar olacağı hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde Brownian hareketi ile Ornstein-Uhlenbeck süreci açıklanarak, bu süreçler faiz ve ölümlülükte rasgeleliği sağlamak amacıyla kullanılmıştır. Bu şekilde oluşturulan annuitelerin beklenen değer ve varyansları hesaplanmış, bulunan sonuçlar tablo ve grafiklerle gösterilmiştir. Beşinci bölümde çalışmanın sonuçları tartışılmıştır.

## İKİNCİ BÖLÜM

## 2. GENEL BİLGİLER

Günlük hayatta yapılan ödemelerin birçoğu peşin değildir. Bu ödemeler eşit aralıklarla yapılan ödemelerin bir serisi olarak adlandırılan *annuite*'lerden oluşur. Annuiteler farklı biçimlerde sınıflandırılabilir. En basit sınıflandırma ödemelerin bir koşula bağlı olup olmamasına göre yapılabilir. Ödemelerin bir koşula bağlı olmadan kesin bir tarihte yapıldığı ödemelere *kesin* (certain) annuite denir. Böyle bir ödemeye örnek olarak günümüzde yaygın olarak kullanılan taksitli ev alımlarının (mortgage) ödemeleri verilebilir. Ödemeleri bir koşula bağlı olan ödeme dizilerine *koşullu* (contingent) annuite denir. Yaygın olarak kullanılan koşullu annuite türü kişinin yaşam süresi boyunca yapılan ödeme dizileridir. Örnek olarak yaşam annuiteleri ya da emekli aylıkları verilebilir. Bir diğer sınıflandırma, ödeme miktarlarına göre *değişen* veya *değişmez* ödemeli annuite olarak yapılabilir. Yine ödemenin yapıldığı ana bağlı olarak *hemen başlayan* veya *ertelenmiş* annuiteler olarak da sınıflandırılabilir.

Annuite ödemeleri genellikle çok uzun bir periyoda yayılır. Bu nedenle, kullanılacak olan faiz oranı çok iyi belirlenmelidir. Geleneksel bir annuitede faiz deterministik olarak belirlenmesine karşın, dış etkenlere bağlı olarak faizin zaman karşısında değişimi stokastik olarak da incelenebilir. Faize stokastik olarak yaklaşılması yöneticilerin daha önceden öngöremediği bazı olumsuzlukları azaltacaktır. Bu olumsuzluklara örnek olarak artan enflasyon karşında paranın değer kaybetmesi verilebilir.

Sermayeye gereksinim duyan bir borçlunun, ödünç aldığı para karşılığında parayı ödünç veren kişiye ödeyeceği karşılık faiz olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle faiz paranın zaman değeridir (Kellison, 1991). Efektif faiz oranı $i$ bir dönemin başlangıcında yatırılan bir birim paranın dönem boyunca kazandırdığı para olup dönem sonunda ödenmektedir. Efektif iskonto oranı olan $d$ ise, dönem sonunda bir birim para elde etmek için dönem başında ödenen faizdir. Faiz, basit ve bileşik faiz olarak ikiye ayrılabilir. Bileşik faizde kazanılan faiz tekrar yatırıma yönlendirilir. Bu çalışmada tersi belirtilmedikçe faiz sözcüğü bileşik faiz anlamında kullanılacaktır.

Eğer bir dönemin başında yıllık efektif faiz oranı $i$ olacak şekilde bir birim yatırılırsa, $t \geq 0$ için bu paranın birikimli değeri

$$a(t) = (1+i)^t$$

olarak gösterilir.

Burada $a(t)$ birikim fonksiyonudur. Ayrıca tutar fonksiyonu olarak adlandırılan $A(t)$, dönem başında yatırılan ana para olan $P$'nin birikimli değerini göstermekte ve

$$A(t) = Pa(t)$$

eşitliği ile yazılmaktadır. $t$ dönem sonunda bir birim para elde edilmesi için dönem başında ne kadar para yatırılması gerektiği de araştırılabilir. Birikim fonksiyonunun tersi olan işleme bugünkü (present) değer denir ve $a^{-1}(t)$ ile gösterilir. $v$ iskonto faktörü olarak adlandırılır. $t \geq 0$ için

$$v^t = a^{-1}(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$$

olur (Kellison, 1991).

Faiz oranı $i$, iskonto oranı $d$, ve iskonto faktörü $v$ arasında

$$d = \frac{i}{1+i} \qquad\qquad d = iv \qquad\qquad d + v = 1$$

ilişkileri yazılabilir.

Ödemeler $n$ dönemli bir periyot için her bir dönemin sonunda yapılıyorsa buna *dönem sonu annuite* denir. Eğer ödemeler her bir dönemin başında yapılıyorsa *dönem başı annuite* olarak adlandırılır. Çalışmada, tersi belirtilmedikçe dönem başı annuiteler kullanılacaktır.

## 2.1. Faizin Deterministik Olması Durumunda Ödeme Dizileri

Annuitelerin ödeme zamanına göre dönem başı (annuity due) ve dönem sonu (annuity immediate) annuiteler olarak ayrıldığı daha önceki bölümde ifade edilmişti. Bu kısımda her iki annuite çeşidi için bugünkü değer ve birikimli değerin nasıl hesaplanacağı gösterilerek bulunan formüller arasında ilişkiler kurulacaktır. Buna ek olarak artan ve azalan annuitelerin de faizin deterministik olması durumundaki bugünkü değeri ve birikimli değeri hesaplanacaktır.

$n$ dönemlik, yıllık faiz oranının $i$ olarak alındığı ve ödemelerin dönem sonlarında bir birim olarak yapıldığı bir annuitenin bugünkü değeri $a_{\bar{n}|i}$ ve birikimli değeri ise $s_{\bar{n}|i}$ olarak gösterilir. Buna göre

$$\begin{aligned} a_{\bar{n}|i} &= v + v^2 + \cdots + v^{n-1} + v^n \\ &= v\frac{1-v^n}{1-v} \\ &= \frac{1-v^n}{i} \end{aligned} \tag{2.1}$$

olarak bulunur. Böyle bir annuitenin birikimli değeri ise,

$$\begin{aligned} s_{\bar{n}|i} &= 1 + (1+i) + \cdots + (1+i)^{n-1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{i} \end{aligned} \tag{2.2}$$

şeklinde yazılabilir.

$n$ dönemlik, yıllık faiz oranının $i$ olarak alındığı ve ödemelerin dönem başlarında bir birim olarak yapıldığı bir annuitenin bugünkü değeri $\ddot{a}_{\bar{n}|i}$ ve birikimli değeri ise $\ddot{s}_{\bar{n}|i}$ olarak gösterilir. Buna göre

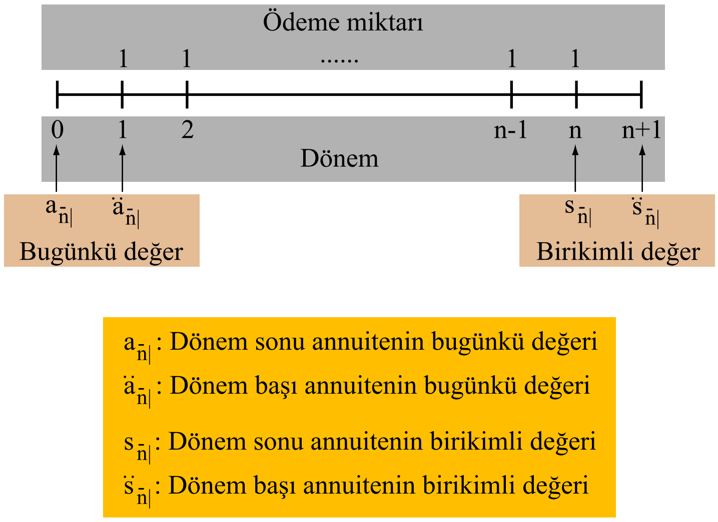
$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\bar{n}|i} &= 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1} \\ &= \frac{1-v^n}{1-v} \\ &= \frac{1-v^n}{d} \end{aligned} \tag{2.3}$$

olarak bulunur. Böyle bir annuitenin birikimli değeri ise:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\bar{n}|i} &= (1+i) + (1+i)^2 + \cdots + (1+i)^n \\ &= \frac{(1+i)((1+i)^n - 1)}{(1+i) - 1} \\ &= \frac{(1+i)^n - 1}{d} \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde ifade edilir. Birikimli değer yinelemeli (recursive) olarak da

$$\begin{aligned} \ddot{s}_{\bar{n}|i} &= [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)](1+i) + (1+i) \\ &= (1+i)[\ddot{s}_{\overline{n-1}|i} + 1] \end{aligned}$$




Şekil 2.1: Dönem başı ve dönem sonu annuitelerin zaman doğrusunda gösterimi.

biçiminde yazılabilir. Yukarıdaki gösterimlerde faiz oranı olan $i$ dönemler boyunca değişmez olarak alındığında, ihmal edilerek bugünkü değer $\ddot{a}_{\bar{n}|}$ ve birikimli değer $\ddot{s}_{\bar{n}|}$ olarak da gösterilebilir (Kellison, 1991).

Dönem başı ödemelerde, ödemeler dönem sonu ödemelere göre bir dönem önce yapıldığı için bugünkü değer ve birikimli değer daha büyüktür. Bu ilişki

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = a_{\bar{n}|}(1+i) \qquad \ddot{s}_{\bar{n}|} = s_{\bar{n}|}(1+i) \tag{2.5}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dönem başı ve dönem sonu annuitelerin bugünkü ve birikimli değerleri Şekil 2.1'de zaman doğrusu üzerinde gösterilmiştir.

Bu iki annuite arasındaki bir başka ilişki ise aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$\ddot{a}_{\bar{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|} \qquad \ddot{s}_{\bar{n}|} = s_{\overline{n+1}|} - 1 \tag{2.6}$$

### 2.1.1. Artan annuiteler

Ödemelerin dönem başında ve ödeme miktarlarının $1, 2, \ldots, n$ şeklinde aritmetik olarak artan biçimde yapıldığı bir annuitenin bugünkü değeri,

$$\begin{aligned}(I\ddot{a})_{\bar{n}|i} &= \frac{\ddot{a}_{\bar{n}|(1+i)} - nv^{n-1}}{i} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\bar{n}|}}{d} - nv^n \frac{1}{vi} \\ &= \frac{\ddot{a}_{\bar{n}|} - nv^n}{d} \end{aligned} \tag{2.7}$$

ve birikimli değeri,

$$(I\ddot{s})_{\bar{n}|i} = \frac{\ddot{s}_{\bar{n}|i} - n}{d} \tag{2.8}$$

olarak ifade edilir. Ayrıca,

$$(I\ddot{s})_{\bar{n}|i} = (1+i)^n + 2(1+i)^{n-1} + \cdots + (n-1)(1+i)^2 + n(1+i)$$

şeklinde de gösterilebilir (Kellison, 1991).

### 2.1.2. Azalan annuiteler

Ödemeleri dönem başında yapılan ve ödemelerin $n, n-1, \ldots, 1$ biçiminde aritmetik olarak azaldığı bir annuitenin bugünkü değeri ve birikimli değeri,

$$(D\ddot{a})_{\bar{n}|i} = \frac{n - \ddot{a}_{\bar{n}|}}{d}$$
$$(D\ddot{s})_{\bar{n}|i} = \frac{n(1+i)^n - \ddot{s}_{\bar{n}|}}{d}$$

eşitlikleri ile yazılır (Kellison, 1991).

## 2.2. Faizin Stokastik Olması Durumunda Ödeme Dizileri

Şimdiye kadar bir dönem boyunca faiz oranının deterministik olduğu varsayıldı. Fakat günlük yaşamdaki faiz değişimlerinin deterministik olması beklenemez. Özellikle güçlü ve istikrarlı ekonomik yapıya sahip olmayan ülkelerde paranın zaman içindeki değeri de istikrarlı değildir. Beklenmedik koşullar ve çok küçük olaylar bile faiz oranlarında çok büyük değişikliğe yol açabilir. Bunun için faiz oranının raslantı değişkeni olarak kabul edilmesi daha doğru olacaktır (Kellison, 1991, Bowers et al., 1986, Zaks, 2001).

### 2.2.1. Tek ve değişmez ödemeler

Faizin her bir dönemde değiştiği düşünülerek $k.$ dönem için faiz oranı $i_k$ ile gösterilsin. Bu durumda, $k-1$ ile $k$ aralığında ($k = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere) $i_1, i_2, \ldots, i_n$'lerin bağımsız rasgele değişken oldukları kabul edilecektir.

Öncelikle dönem başında bir birimlik tek bir ödeme yapılsın. Bu durumda $c_1 = 1$ ve $c_2 = c_3 = \ldots = c_k = 0$ olarak alınabilir. $C_k$, $k$ dönem sonraki birikimli değeri göstermek üzere,

$$\begin{aligned} C_k &= (1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_k) \\ &= C_{k-1}(1+i_k) \quad k=2,3,\ldots,n \end{aligned} \tag{2.9}$$

eşitliği ile yazılabilir.

Bu durumda her bir $k$ dönemi içerisinde $E(i_k) = j$ ve $Var(i_k) = s^2$ olsun. Bir birimlik ödemenin $k$. dönem içerisinde beklenen değeri ve varyansı,

$$\begin{aligned} E(1+i_k) &= 1+j = \mu \\ E[(1+i_k)^2] &= 1+2j+E(i_k^2) \\ Var(i_k) &= s^2 = E(i_k^2) - [E(i_k)]^2 = E(i_k^2) - j^2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$E(i_k^2) = s^2 + j^2$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla,

$$E[(1+i_k)^2] = 1+2j+s^2+j^2 = (1+j)^2 + s^2$$

şeklinde hesaplanabilir (Zaks, 2001). Eğer $f = 2j + j^2 + s^2$ alınırsa

$$E[(1+i_k)^2] = 1+f = m$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $k$. dönem süresince biriken miktarın varyansı,

$$\begin{aligned} Var(1+i_k) &= E[(1+i_k)^2] - E[(1+i_k)]^2 \\ &= 1+f-\mu^2 \\ &= m-\mu^2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

eşitliği yardımı ile hesaplanabilir. Dönem başında bir birimlik tek ödemeli bir yatırım yapıldığı düşünülürse $C_k$ birikimli değerinin beklenen değeri $E[C_k] = \mu_k$ ise $i_k$'lar bağımsız olduğundan

$$\mu_k = \mu_{k-1}\mu = \mu^k$$

olur. Bu dönem başı bir birimlik tek ödemeli bir yatırımın $k$ yıl sonundaki birikimli değerinin beklenen değerini verir. Varyansı ise,

$$m = m_{k-1}m = m^k$$
$$Var(C_k) = m^k - \mu^{2k}$$

eşitliğinden bulunabilir (Zaks, 2001).

**Teorem 2.1.** $C_k$ bir birimlik dönem başı ödemelerin $k$ dönem sonraki birikimli değeri olsun. $k.$ yıl boyunca yıllık faizin raslantı değişkeni $i_k$ ile gösterilsin ($i_1, i_2, \ldots, i_k$'lar bağımsız değişkenlerdir). $E(1 + i_k) = 1 + j$ ve $Var(i_k) = s^2$ olduğu düşünülürse beklenen değer ve varyans,

$$E(C_k) = (1 + j)^k$$
$$Var(C_k) = ((1 + j)^2 + s^2)^k - (1 + j)^{2k}$$

şeklinde bulunabilir.

Birinci dönemin başında tek bir ödeme yerine $k$ yıl boyunca ($k = 1, 2, 3, \ldots, n$) dönem başlarında birer birimlik ödemeler yapılsın. Bu durumda $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$ olur. $C_k$, $k$ dönem sonundaki birikimli değeri göstermek üzere,

$$\begin{aligned} C_k &= (1 + i_1)(1 + i_2)\ldots(1 + i_k) + (1 + i_2)(1 + i_3)\ldots(1 + i_k) \\ &\quad + \cdots + (1 + i_{k-1})(1 + i_k) + (1 + i_k) \\ &= (1 + i_k)[(1 + i_1)(1 + i_2)\ldots(1 + i_{k-1}) \\ &\quad + (1 + i_2)(1 + i_3)\ldots(1 + i_{k-1}) + \cdots + (1 + i_{k-1}) + 1] \\ &= (1 + i_k)[C_{k-1} + 1] \end{aligned}$$

eşitliği ile yazılabilir. Bu birikimli değerin beklenen değeri $E(C_k)$,

$$\mu_k = \mu(1 + \mu_{k-1})$$
$$m_k = m(1 + 2\mu_{k-1} + m_{k-1})$$

şeklinde ifade edilebilir ve

$$\begin{aligned} E(C_k) = \ddot{s}_{\bar{k}|j} &= (1 + j)^k + (1 + j)^{k-1} + \cdots + (1 + j) \\ &= (1 + j)[1 + \ddot{s}_{\overline{k-1}|j}] \end{aligned}$$

'den yararlanarak aşağıdaki Teorem 2.2 verilebilir (Zaks, 2001).

**Teorem 2.2.** $C_k$ bir birimlik dönem başı ödemelerin $k$ dönem sonraki birikimli değeri olsun. $k.$ yıl boyunca yıllık faizin raslantı değiskeni $i_k$ ile gösterilsin ($i_1, i_2, \ldots, i_k$'lar bağımsız değişkenlerdir). $E(1+i_k) = 1+j$ ve $Var(i_k) = s^2$ olduğu düşünülürse,

$$\mu_k = E(C_k) = \ddot{s}_{\overline{k}|j}$$

olur.

Genel olarak

$$\mu_n = E(C_n) = \ddot{s}_{\overline{n}|j}$$

şeklinde gösterilebilir. Öncelikle $Var(C_k)$ bulunacaktır. $Var(C_k) = m_k - \mu_k^2$ olduğu gösterilmişti. $E(C_k^2) = m_k$ ve $E(C_k) = \mu_k$ olduğunda

$$M_{1k} = (m + m^2 + \cdots + m^k) = \ddot{s}_{\overline{k}|f}$$
$$M_{2k} = (m\ddot{s}_{\overline{k-1}|j} + m^2\ddot{s}_{\overline{k-2}|j} + \cdots + m^{k-1}\ddot{s}_{\overline{1}|j})$$

tanımlanırsa

$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$$

eşitliği ile yazılabilir (Zaks, 2001). Buradan $M_{2k}$ şu şekilde tanımlanabilir.

$$M_{2k} = (1+f)\frac{(1+j)^{k-1}-1}{d} + \cdots + (1+f)^{k-1}\frac{(1+j)-1}{d}$$

Aşağıdaki eşitlikleri kullanarak

$$1+r = \frac{1+f}{1+j} \quad \text{ve} \quad d = \frac{j}{1+j}$$

$M_{2k}$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} M_{2k} &= (1+f)\left[\frac{(1+j)^{k-1}-1}{\dfrac{j}{1+j}}\right] + \cdots + (1+f)^{k-1}\left[\frac{(1+j)-1}{\dfrac{j}{1+j}}\right] \\ &= (1+f)\frac{(1+j)}{j}[(1+j)^{k-1}-1] + \ldots \\ &\quad + (1+f)^{k-1}\frac{(1+j)}{j}[(1+j)-1] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(1+f)(1+j)}{j}\left[\frac{(1+j)^k}{(1+j)}-1\right]+\dots \\
&\quad + \frac{(1+f)^{k-1}(1+j)}{j}[(1+j)-1] \\
&= \frac{(1+j)^{k+1}}{j}\left[\frac{(1+f)}{(1+j)}+\dots+(\frac{(1+f)}{(1+j)})^{k-1}\right] \\
&\quad - \frac{1+j}{j}[(1+f)+\dots+(1+f)^{k-1}] \\
&= \frac{(1+j)^{k+1}}{j}\left[\frac{1+f}{1+j}+(\frac{1+f}{1+j})^2+\dots+(\frac{1+f}{1+j})^{k-1}\right] \\
&\quad - \frac{1+j}{j}[(1+f)+\dots+(1+f)^{k-1}] \\
&= \frac{(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}-(1+j)\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{j} \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

Varyans hesaplarında gerekli olan $E(C_k^2) = m_k$ aşağıdaki formül yardımıyla hesaplanacaktır:

$$
\begin{aligned}
m_k &= M_{1k}+2M_{2k} \\
&= \ddot{s}_{\overline{k}|r}+2\left[\frac{(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}-(1+j)\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{j}\right] \\
&= \frac{1(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{j}-\frac{2\ddot{s}_{\overline{k}|r}-j\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{j} \\
&= \frac{2(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|r}}{j}-\frac{(2-j)\ddot{s}_{\overline{k}|r}-j\ddot{s}_{\overline{k}|f}}{j} \qquad (2.12)
\end{aligned}
$$

Varyansın bulunması için gerekli olan ikinci terim $[E(C_k)]^2 = \mu_k^2 = (\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2$ Teorem 2.3 yardımıyla hesaplanabilir.

**Teorem 2.3.** $C_k$ bir birimlik dönem başı ödemelerin $k$ dönem sonraki birikimli değeri olsun. $k.$ yıl boyunca yıllık faizin raslantı değiskeni $i_k$ ile gösterilsin ($i_1, i_2, \dots, i_k$'lar bağımsız değişkenlerdir). $E(1+i_k) = 1+j$ ve $Var(i_k) = s^2$ olduğu düşünülürse,

$$
\begin{aligned}
(\ddot{s}_{\overline{k}|j})^2 &= \frac{[(1+j)^k-1]^2}{d^2} \\
&= \frac{(1+j)^{2k}-2(1+j)^k+1}{d^2} \\
&= \frac{[(1+j)^{2k}-1]-2[(1+j)^k-1]}{d^2} \\
&= \frac{\frac{(1+j)^{2k}-1}{d}-2\left[\frac{(1+j)^k-1}{d}\right]}{d} \\
&= \frac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j}-2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d} \qquad (2.13)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

$Var(C_k) = E(C_k^2) - [E(C_k)]^2$ olduğu için bulunan sonuçlar yerlerine konularak, varyans aşağıdaki gibi ifade edilir (Zaks, 2001):

$$Var(C_k) = \frac{2(1+j)^{k+1}\ddot{s}_{\overline{k}|j} - (2+j)\ddot{s}_{\overline{k}|j} + 2(1+j)\ddot{s}_{\overline{k}|j} - (1+j)\ddot{s}_{\overline{2k}|j}}{j} \tag{2.14}$$

### 2.2.2. Artan ödemeler

Bundan önceki kesimlerde her dönemin başında yapılan ödemelerin bir birim olduğu düşünülmüştü. Bu kesimde ödemelerin sabit olmadığı dönem başı artan ödemeler incelenecektir. Bu durumda $c_1 = 1, c_2 = 2, \ldots, c_k = k$ olsun. Öyleyse, $k$ zamanındaki birikimli değer,

$$\begin{aligned} C_k &= (1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_k) + 2(1+i_2)(1+i_3)\ldots(1+i_3) \\ &\quad + \cdots + (k-1)(1+i_{k-1})(1+i_k) + k(1+i_k) \\ &= (1+i_k)(C_{k-1}+k) \end{aligned} \tag{2.15}$$

olarak bulunur. Aşağıdaki gösterimlerin yardımı ile artan bir annuitenin beklenen değeri Teorem 2.4 yardımıyla bulunabilir.

$$\mu_k = \mu(\mu_{k-1} + k)$$
$$m_k = m(m_{k-1} + 2k\mu_{k-1} + k^2)$$
$$\mu = 1 + j = (I\ddot{s})_{\overline{1}|j}$$

**Teorem 2.4.** $C_k$, $k$ yıl boyunca dönem başı $1, 2, \ldots, k$ şeklinde ödemeleri olan artan bir ödeme dizisinin birikimli değerini göstersin. $k$. yıl boyunca yıllık faiz oranı rasgele değişken olan $i_k$ ile ifade edilsin. $E(1+i_k) = 1+j$, $Var(i_k) = s^2$, ve $i_1, i_2, \ldots, i_k$'ler bağımsız değişkenler ise,

$$\mu_k = E(C_k) = (I\ddot{s})_{\overline{k}|j}$$

olur.

Bu durumda beklenen değer

$$\begin{aligned} E(C_k) &= E(1+i_k)E[(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_{k-1}) + 2(1+i_2)(1+i_3) \\ &\quad \ldots(1+i_{k-1}) + \cdots + (k-1)(1+i_{k-1}) + k] \\ &= [(1+j)^k + 2(1+j)^{k-1} + \cdots + k(1+j)] \end{aligned}$$

$$= (I\ddot{s})_{\overline{k}|j} \tag{2.16}$$

işlemleri ile bulunur. İşlemler $n$ dönem için genelleştirilirse

$$\mu_n = E(C_n) = (I\ddot{s})_{\overline{n}|j}$$
$$m_k = m(1 + 2\mu_{k-1}m_{k-1})$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu değerler varyansın elde edilmesinde kullanılacaktır (Zaks, 2001).

**Teorem 2.5.** $C_k$, $k$ yıl boyunca dönem başı $1, 2, \dots, k$ şeklinde ödemeleri olan artan bir ödeme dizisinin birikimli değerini göstersin. $k.$ yıl boyunca yıllık faiz oranı rasgele değişken olan $i_k$ ile ifade edilsin. $i_1, i_2, \dots, i_k$'ler bağımsız değişkenler ise,

$$m_k = (m^k + 2^2m^{k-1} + \cdots + k^2m) + 2(2m^{k-1}(I\ddot{s})_{\overline{1}|j} + \cdots + km(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|j})$$
$$m = 1 + f$$

olur.

Bu ifade

$$M_{1k} = m^k + 2^2m^{k-1} + \cdots + k^2m$$
$$M_{2k} = 2m^{k-1}(I\ddot{s})_{\overline{1}|j} + \cdots + km(I\ddot{s})_{\overline{k-1}|j}$$
$$m_k = M_{1k} + 2M_{2k}$$

şeklinde de yazılabilir.

Bu sonuçlar tümevarım yöntemi ile ispatlanabilir. $k = 2$ için,

$$\mu = (I\ddot{s})_{\overline{1}|j} \quad \text{ve} \quad m_1 = m \tag{2.17}$$

ise

$$m_2 = m_1 + 4\mu + 4 = m^2 + 4(I\ddot{s})_{\overline{1}|j} + 4$$

olur.

Varsayımların $2 \leq k \leq n-1$ için doğru olduğu düşünülürse,

$$
\begin{aligned}
m_k &= m(1+2\mu_{k-1}+m_{k-1}) \quad (k+1 \text{ için de doğrudur})\\
m &= 1+f\\
\mu_k &= (I\ddot{s})_{\overline{k}|f}\\
(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} &= \frac{\ddot{s}_{\overline{k}|j}-j}{d} \quad \text{ve} \quad 1+r=\frac{1+f}{1+j}\\
M_{2k} &= \frac{2(1+f)^{k-1}[\ddot{s}_{\overline{1}|j}-1]+\cdots+k(1+f)[\ddot{s}_{\overline{k-1}|j}-(k-1)]}{d}\\
&= \frac{2(1+f)^{k-1}\left[\frac{(1+j)-1}{d}\right]+\cdots+k(1+f)\left[\frac{(1+f)^{k-1}-1}{d}\right]}{d}\\
&\quad - \frac{2(1+f)^{k-1}+\cdots+k(k-1)(1+f)}{d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{2k} = {} & \frac{(1+j)^k 2(1+r)^{k-1}+\cdots+k(k-1)(1+f)}{d^2}\\
& - \frac{2(1+f)^{k-1}+\cdots+k(1+f)}{d^2} - \frac{2^2(1+f)^{k-1}+\cdots+k^2(1+f)}{d}\\
& + \frac{2(1+f)^{k-1}+\cdots+k(1+f)}{d}
\end{aligned}
$$

olur. $\ddot{s}_{\overline{1}|j},\ldots,\ddot{s}_{\overline{k-1}|j}$ terimleri yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
M_{2k} &= \frac{(1+j)^k[(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}-(1+r)^k-(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}-(1+f)^k]}{d^2}\\
&\quad - \frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}-(1+f)^k+(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}-(1+f)^k}{d}\\
&= \frac{(1+j)^k(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}}{d^2}-\frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{d^2}-\frac{(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{d}+\frac{(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{d}\\
&= \frac{(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}}{j^2}-\frac{(1+j)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}-\frac{(1+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j} \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur (Zaks, 2001).

**Teorem 2.6.** $C_k$, $k$ yıl boyunca her dönem başında $1,2,\ldots,k$ şeklinde ödemeleri olan artan bir ödeme dizisinin birikimli değerini göstersin. $k$. yıl boyunca yıllık faiz oranı rasgele değişken olan $i_k$ ile ifade edilsin. $i_1,i_2,\ldots,i_k$'ler bağımsız değişkenler ise,

$$
M_{2k} = \frac{(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r}-(2+2k-j^2)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}-j(1+j)(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}
$$

şeklinde yazılabilir.

**Teorem 2.7.** $C_k$, $k$ yıl boyunca her dönem başında $1, 2, \ldots, k$ şeklinde ödemeleri olan artan bir ödeme dizisinin birikimli değerini göstersin. $k.$ yıl boyunca yıllık faiz oranı rasgele değişken olan $i_k$ ile ifade edilsin. $i_1, i_2, \ldots, i_k$'ler bağımsız değişkenler ise,

$$m_k = \frac{2(1+j)^{k+2}(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (2+2k-j^2)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - (1+j)^2(I^2\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2}$$

$$[E(C_k)]^2 = \mu_k^2 = [(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}]^2$$

şeklinde ifade edilir. $Var(C_k)$'yı elde etmek için

$$\begin{aligned}
[(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}]^2 &= \frac{(\ddot{s}_{\overline{k}|j} - j)^2}{d^2} \\
&= \frac{\left[\dfrac{\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j}}{d}\right] - 2k\ddot{s}_{\overline{k}|j} + k^2}{d^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2\ddot{s}_{\overline{k}|j} &= (\ddot{s}_{\overline{2k}|j} - 2k) - 2(\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k) \\
[(I\ddot{s})_{\overline{k}|j}]^2 &= \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - 2k(\ddot{s}_{\overline{k}|j} - k) - k^2}{d^2} \\
&= \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}
\end{aligned}$$

kullanılacaktır.

**Teorem 2.8.** $C_k$ yıllık ödemeleri dönem başı $1, 2, \ldots, k$ şeklinde olan artan bir ödeme dizisinin $k$ yıl sonraki birikimli değerini göstersin. $k.$ yıl boyunca yıllık faiz oranının rasgele değişken olan $i_k$ ile gösterilmesi durumunda:

$$E(1+i_k) = 1+j \qquad\qquad Var(i_k) = s^2$$

ve $i_1, i_2, \ldots, i_k$'ler bağımsız değişkenler ise, varyans

$$E(C_k) = (I\ddot{s})_{\overline{k}|f} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned}
Var(C_k) = {} & \frac{2(1+j)^2(I\ddot{s})_{\overline{k}|r} - (2+2j-j^2)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f} - (j+j^2)(I\ddot{s})_{\overline{k}|f}}{j^2} \\
& - \frac{(I\ddot{s})_{\overline{2k}|j} - 2(1+kd)(I\ddot{s})_{\overline{k}|j} - k^2}{d^2}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

olarak bulunur.

## ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

## 3. YAŞAM ANNUİTELERİ

Kesin ödeme dizileri önceki bölümde incelenmişti. Bu ödeme dizileri belli bir döneme yayılan ve ödeme sayısı belirli olan ödeme dizileridir. Fakat bütün ödeme dizileri bu şekilde değildir. Ödeme sayısının belirsiz olduğu ödeme dizileri de vardır. Bu ödeme dizilerinin yayılmış olduğu dönem sayısı tam olarak söylenemez. Belirsiz ödeme dizilerine en uygun örneklerden biri de yaşam annuiteleridir. Çünkü yaşam annuitelerinde ödemeler kişi yaşadığı sürece yapılır. Örneğin, kişi emekli olduktan sonra yapılan aylık ödemeler, kişi ölene kadar sürecektir. Bu nedenle kişinin ne kadar hayatta kalacağı ile bağlantılı olan bir raslantı değişkeni ile oluşabilecek kayıpları azaltmak mümkündür.

Bu bölümde kişinin yaşadığı süre boyunca dönem başlarında bir birim ödediği ödeme dizileri düşünülecektir. *Yaşam annuiteleri* kesin annuitelere benzer, fakat burada kişinin yaşama koşulu da göz önüne alınacaktır.

### 3.1. Faizin Deterministik Olması Durumunda Yaşam Annuiteleri

Bu bölümde faizin deterministik olduğu durumlar için yaşam annuitelerinin beklenen değer ve varyansları hesaplanacaktır. Bu hesaplamalar sürekli ve kesikli olarak iki kesim halinde incelenecektir. Faiz sabit alınıp, faiz oranı $i$ ya da anlık sabit faiz oranı $\delta$ ile gösterilecektir.

#### 3.1.1. Sürekli yaşam annuiteleri

Sürekli yaşam annuitelerinde her dönem bir birimlik ödeme yapıldığı düşünülecektir. Ödemeler kişi yaşadığı sürece devam edecektir. Kişinin şu andaki yaşı $x$ ve ölüm yaşı $X$ ile gösterildiğinde kişinin gelecekteki yaşam süresi olan $T(x)$ raslantı değişkeni ise

$$T(x) = X - x$$

olur.

Sürekli bir yaşam annuitesinin aktüeryal bugünkü değeri $\ddot{a}_x$ ile gösterilsin. $T(x)$ ise $x$

yaşındaki bilgilere bağlı olarak değişebilir ve

$$T(x) = {}_tp_x\mu(x+t)$$

olarak hesaplanır. Burada ${}_tp_x$, $x$ yaşındaki bir kişinin $x+t$ yaşına kadar yaşama olasılığını, $\mu(x+t)$ ise $x+t$ yaşındaki anlık ölüm oranını gösterir. Buna göre aktüeryal bugünkü değer,

$$\ddot{a}_x = E[\ddot{a}_{\overline{T}|}] = \int_0^\infty \ddot{a}_{\overline{t}|}\,{}_tp_x\mu(x+t)dt \tag{3.1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu integral kısmi integral yardımı ile

$$\begin{aligned} f(t) &= \ddot{a}_{\overline{t}|} \\ df(t) &= v^t dt \\ g(t) &= -{}_tp_x \\ dg(t) &= {}_tp_x\mu(x+t)dt \end{aligned}$$

alınarak çözülebilir. Buna göre

$$\ddot{a}_x = \int_0^\infty v^t\,{}_tp_x dt = \int_0^\infty {}_tE_x dt \tag{3.2}$$

olarak gösterilebilir. Bulunan formül

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \int_0^1 v^t\,{}_tp_x dt + \int_1^\infty v^t\,{}_tp_x dt \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{1}|} + vp_x \int_0^\infty v^s\,{}_sp_{x+1} ds \\ &= \ddot{a}_{x:\overline{1}|} + vp_x\ddot{a}_{x+1} \end{aligned} \tag{3.3}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir.

Bu eşitlikte kullanılan $\ddot{a}_{x:\overline{1}|}$

$$\ddot{a}_{x:\overline{1}|} = \int_0^1 v^t\,{}_tp_x dt = \frac{1+vp_x}{2}$$

şeklinde yazılabilir.

Bileşik faiz teorisinden bilinen bir ilişki

$$1 = \delta\ddot{a}_{\overline{t}|} + v^t$$

olarak verilebilir. Bu günümüzde yatırılan bir birimlik ödemenin $t$ dönem boyunca her dönemde $\delta$ faizi getirerek tümüyle geri ödendiği şeklinde yorumlanabilir. Bu ilişki bütün $t$ değerleri için doğru olduğundan rasgele bir değişken olan $T$ için de geçerlidir:

$$1 = \delta \ddot{a}_{\overline{T}|} + v^T$$

Beklenen değer alınırsa yukarıdaki eşitlik,

$$1 = \delta \ddot{a}_{\overline{x}} + \ddot{A}_x$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada $\ddot{A}_x$ kişinin ölmesi durumunda yapılacak bir birimlik ödemenin bugünkü değerini göstermektedir.

Bu annuitenin varyansı ise

$$\begin{aligned} Var(\ddot{a}_{\overline{T}|}) &= Var\left(\frac{1-v^T}{\delta}\right) \\ &= \frac{Var(v^T)}{\delta^2} \\ &= \frac{\ddot{A}^2{}_x - (\ddot{A}_x)^2}{\delta^2} \end{aligned}$$

olarak hesaplanabilir. Bu da hayat annuitesinin riskini verir.

Buna ek olarak, $1 = \delta \ddot{a}_{\overline{T}|} + v^T$ olduğu için, $Var(\delta \ddot{a}_{\overline{T}|} + v^T) = 0$ olur. Yani $\delta$ faizli sürekli yaşam annuitesi ölüm durumunda ödenecek bir birimlik bir yaşam sigortası ile birlikte alındığı taktirde ölümlülükten doğacak bir risk yoktur (Bowers et al., 1997).

### 3.1.2. Kesikli yaşam annuiteleri

Kesikli yaşam annuiteleri de sürekli yaşam annuitelerine benzer. Ancak kesikli yaşam annuitelerinde dönem başı ve dönem sonu ödemeler farklı hesaplamalara yol açar. Bu farklılık sürekli yaşam annuitelerinde yoktur. Burada öncelikle dönem başı annuiteler incelenecektir. Daha sonra dönem sonu annuiteler üzerinde durulacaktır.

Kişinin yaşam süresi boyunca dönem başlarında birer birimlik ödemelerin yapıldığı bir annuite düşünülecektir. Bu dönem başı *tam yaşam annuitesi (whole life annuity-due)* olarak da adlandırılır. Bugünkü değer raslantı değişkeni olan

$$Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}$$

ile gösterilir. Burada $K$ kişinin yaşayacağı dönem sayısını göstermektedir. $x$ yaşındaki bir bireyin gelecek yaşam süresinin $k$ olma olasılığı

$$Pr(K = k) = {}_kp_x q_{x+k}$$

şeklinde ifade edilir. Bu durumda yaşam annuitesinin aktüeryal bugünkü değeri

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E[Y] = E[\ddot{a}_{\overline{K+1}|}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}\, {}_kp_x q_{x+k} \end{aligned}$$

ile bulunabilir. Bu eşitlik kesikli kısmi toplam işleminde $\Delta f(k) = {}_kp_x q_{x+k}$ ve $g(k) = \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$ kullanarak aşağıdaki şekle dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k+1}p_x \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x \end{aligned} \tag{3.4}$$

Aktüeryal değer,

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1}\, {}_{k+1}p_x = 1 + vp_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_x \\ &= 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1} \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde de gösterilebilir. Aktüeryal değerin beklenen değeri ise

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= E\left[\frac{1 - v^{K-1}}{d}\right] \\ &= \frac{1 - A_x}{d} \end{aligned} \tag{3.6}$$

olarak bulunur.

Varyans ise

$$\begin{aligned} Var(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) &= Var\left(\frac{1 - v^{K+1}}{d}\right) = Var\left(\frac{v^{K+1}}{d^2}\right) \\ &= \frac{\ddot{A}^2{}_x - (\ddot{A}_x)^2}{\delta^2} \end{aligned} \tag{3.7}$$

şeklinde ifade edilir.

Her bir dönemin sonunda bir birim ödemelerin yapıldığı dönem sonu annuitelerin bugünkü değeri raslantı değişkeni olan $Y = a_{\overline{K|}}$ ile gösterilsin. Bu durumda beklenen değer

$$a_x = E[Y] = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x q_{x+k} a_{\overline{k|}} \tag{3.8}$$

şeklinde gösterilir.

$$Y = \frac{(1-v^K)}{i} = \frac{[1-(1+i)v^{K+1}]}{i} \tag{3.9}$$

eşitlikleri yerine yazılarak beklenen değer alınırsa

$$a_x = E[Y] = \frac{1-(1+i)A_x}{i} \tag{3.10}$$

olur (Bowers et al., 1997).

## 3.2. Faizin Rasgele Değişken Olması Durumunda Yaşam Annuiteleri

Kişinin yaşam süresi önceden bilinemediği için hem kişinin yaşam süresinin hem de faizin raslantı değişkeni olarak alınması daha gerçekçi olacaktır. Bu bölümde faiz ve yaşam süresinin rasgele değişken olması durumunda yaşam annuitelerinin aktüeryal değerleri hesaplanacaktır.

Burada faiz oranı için $n$ tane uygun değerin olabileceği varsayılacaktır. Her bir faiz oranı $i_k,\ k \leq n$ ile gösterilecektir. $E(i_k) = j$ ve $Var(i_k) = s^2$'dir.

Faizin rasgele değişken olması durumunda yaşam annuitesinin aktüeryal bugünkü değeri ${}_*\ddot{a}_x$ ile gösterilecektir. Sonuç olarak beklenen değerin, $K$ ve $i_k$'ye göre hesaplanması gerekir. Burada $K$ ve $i_k$'ler bağımsızdır. Beklenen değer $E_{i_k|K}$ ile gösterilecektir:

$$\begin{aligned} {}_*\ddot{a}_x &= E_K E_{i_k|K}[i_k\, \ddot{a}_{\overline{K+1|}}] \\ &= E_K[\ddot{a}_{\overline{K+1|}j}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1|}j}\ {}_kp_x q_{x+k} \end{aligned}$$

ayrıca:

$$ {}_*\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+j}\right)^k {}_kp_x \tag{3.11}$$

şeklinde de yazılabilir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

# 4. STOKASTİK SÜREÇLERİN ANNUİTELERE UYGULAMALARI

Faiz oranlarında olabilecek rasgele değişiklikler stokastik süreçler kullanarak da modellenebilir. Çeşitli süreçler kullanılarak faiz senaryolarının gerçeğe daha yakın olması ve değişik koşullara uyumlu olması sağlanabilir. Bu bölümde Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener süreçleri kullanılarak ödeme dizilerinin beklenen değer ve varyansları elde edilecektir (Beekman and Fuelling, 1990, 1991). Bu değerler gerçek hayat durumlarına uyarlanarak tablo ve grafikler ile gösterilecektir.

## 4.1. Brownian Hareketi

Brownian hareketi (Brownian motion) olasılık, stokastik süreç kuramlarında, fizikte, finansta, vb. alanlarda önemli bir rol oynar. Eğer bir, $B = (B_t, t \in [0, \infty))$ stokastik süreci aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu süreç Brownian hareketi veya Wiener süreci olarak adlandırılır.

1. Sıfır noktasında başlar: $B_0 = 0$

2. Durağandır, bağımsız artımlıdır. Yani,

   $$t, s \in T \quad \text{ve} \quad t+h, s+h \in T \quad \text{için}$$
   $$X_t - X_s = X_{t+h} - X_{s+h}$$

   'dır ve

   $$\forall t_0 \in T, t_1 < \cdots < t_n, n \geq 1 \quad \text{için}$$
   $$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

   bağımsız rasgele değişkenler ise $X$ süreci bağımsız artımlıdır.

   $$\forall t > 0 \quad \text{için} \quad B_t \sim N(0, t)$$

   'dir. Sürekli örnek yolu olup atlama yoktur.

Zamana bağlı olarak çalışıldığında Brownian hareketi, onun *statik* benzeri olan Normal dağılımın *dinamik* benzeridir (Mikosch, 1999). Her ikisi de merkezi limit teoreminden ortaya çıkmıştır. Normal dağılan bir çok bağımsız raslantı değişkenlerinin toplamları da yaklaşık olarak normal dağılmaktadır (Schoutens, 2003).

Standard Brownian hareketi, Wiener anısına

$$W = \{W_t, t \geq 0\}$$

olarak da gösterilir. Brownian hareketi, bağımsız artımlara sahip olduğundan dolayı aynı zamanda bir Markov sürecidir.

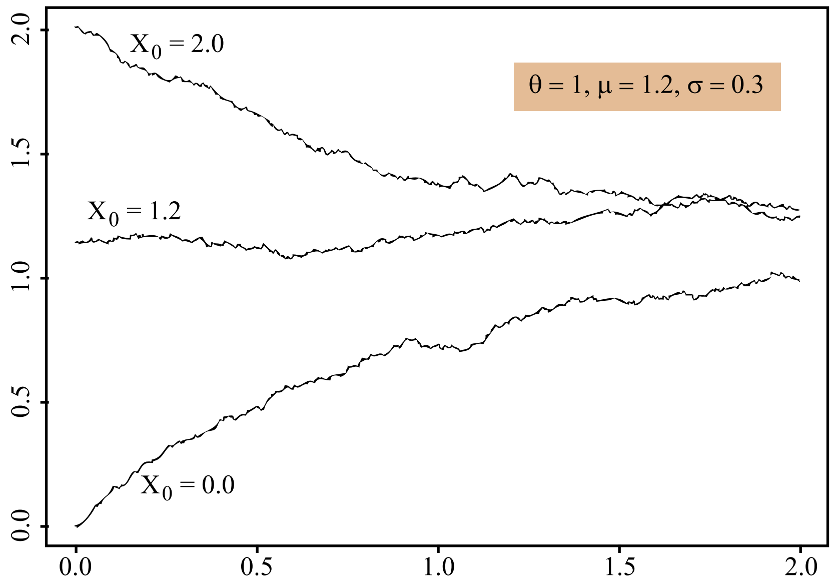
### 4.2. Ornstein-Uhlenbeck Süreci

Ornstein-Uhlenbeck süreci durağan olmakla birlikte Gaussian ve Markovian özelliklerini de taşımaktadır. Bu sürecin özellikleri kısaca şöyledir:

1. Bu süreç durağandır: Buna göre, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ ve $h > 0$ için $Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots, Y_{tn}$ ve $Y_{t1+h}, Y_{t2+h}, \ldots, Y_{tn+h}$ $n$ boyutlu rasgele vektörlerdir. Bu durum zamanın değişmesine rağmen olasılığın ve dağılımın değişmediğini gösterir. Yani $h$ artımının verilmesi bileşik dağılımdaki olasılıkları değiştirmez.

2. Süreç Gaussian dağılır. Çünkü, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ için, $Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots, Y_{tn}$ çok değişkenli $n$ boyutlu vektör olmak üzere normal dağılımlıdır.

3. Markovian özelliğini taşımaktadır. Buna göre, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ için $P(Y_{tn} \leq y | Y_{t1}, Y_{t2}, \ldots, Y_{tn-1}) = P(Y_{tn} \leq y | Y_{tn-1})$'dir. Bu süreç yalnızca şimdiki duruma bağlıdır ya da bir sonraki durum yalnızca bugüne bağlıdır. Geçmiş zaman süreci etkilemez. Bu süreç $(YT : t \geq 0)$, $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ için ve $Y_{t1} - Y_{t0}, Y_{t2} - Y_{t1}, \ldots, Y_{tn} - Y_{tn-1}$'in bağımsız olduğu durumlarda, bağımsız artışlara sahiptir. Bu durum $(YT : t \geq 0)$ durumunda Markovian özelliği ile sağlanır. Buna göre $t > s$ ve $h > 0$ için $(Y_{t+h} - Y_{s+h})$ dağılımının $(Y_t - Y_s)$ dağılımı ile aynı olması durumu artışların durağan olduğunu gösterir. Bu ise OU stokastik sürecinin $(WT : t \geq 0)$ durağan bağımsız artışları olması durumunda Wiener-Lévy süreci ve Brownian hareketi özelliklerini taşıdığını gösterir. Eğer Wiener-Lévy süreci normal dağılımlı ise her bir $t > 0$ ve $W_0 = 0$ olması durumunda $E(W_t) = 0$'dır. Bu sürecin genel formülü aşağıda verilmiştir.




Şekil 4.1: Üç farklı $X_0$ ile başlayan Ornstein-Uhlenbeck süreçleri.

$$dX_t = -\theta(X_t - \mu)dt + \sigma dW_t \tag{4.1}$$

$\theta$, $\mu$ ve $\sigma$ parametreleri $W_t$ ise Wiener sürecini ifade etmektedir. Bu denklemde *Ito lemmasından* bilinen fonksiyon $f(X_t, t) = X_t e^{\theta t}$ kullanılırsa:

$$\begin{aligned} d_f(X_t, t) &= \theta X_t e^{\sigma t} dt + e^{\sigma t} dX_t \\ &= e^{\theta t}\theta\mu dt + \sigma e^{\theta t} dW_t \end{aligned}$$

$0$'dan $t$'ye kadar integral alınırsa:

$$\begin{aligned} X_t e^{\theta t} &= r_0 + \int_0^t e^{\theta s}\theta\mu ds + \int_0^t \sigma e^{\theta s} dW_s \\ X_t &= r_0 e^{-\theta t} + \mu(1 - e^{\theta t}) + \int_0^t \sigma e^{\theta(s-t)} dW_s \end{aligned}$$

Buradan sürecin birinci momenti ($r_0$ sabit olmak üzere)

$$E(X_t) = r_0 e^{-\theta} + \mu(1 - e^{-\theta t}) \tag{4.2}$$

şeklinde bulunur (Finch, 2004, Hog and Frederiksen, 2006).

Ornstein-Uhlenbeck süreci $\theta = 1$, $\mu = 1.2$, $\sigma = 0.3$ parametreleri ve üç farklı ilk değer $X_0$ için Şekil 4.1'da gösterilmiştir.

Ornstein-Uhlenbeck sürecinin Wiener sürecinden farkı içerdiği fonksiyonların daha düşük varyansa sahip olmasıdır. Bu yüzden yüksek varyansın beklendiği koşullarda Wiener sürecinin kullanılması daha uygun olacaktır (Beekman and Fuelling, 1991).

### 4.3. Faizin Stokastik Süreç Olması Durumu

Bu kesimde faiz oranı, Ornstein-Uhlenbeck stokastik süreci ile sabit bir faiz seviyesi olan $\delta$ etrafında değişime uğratılacaktır. Bu şekilde modellenen annuitelerin beklenen değer ve standard sapmaları hesaplanacaktır.

Değişken faiz oranı $R(s) = \delta + V(s)$ ile gösterilirsin. Burada $V(s)$ faizde olabilecek değişim miktarını simgeler. $V(s)$'lerin bütün dönemler boyunca olan birikimi $X(t)$ ile ifade edilir:

$$X(t) = \int_0^t V(s)\, ds \quad 0 \leq t \leq n$$

Buna göre ani faiz oranının birikim fonksiyonu,

$$\int_0^t R(s)\, ds = \delta t + X(t) \quad t \geq 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada $X(t)$'nin, $0 \leq t \leq n$ Ornstein-Uhlenbeck stokastik süreci olduğu kabul edilecektir. Bu süreç yukarıda açıklandığı gibi Gaussian ve Markovian özelliklerini taşımaktadır (Beekman and Shiu, 1988). Buna göre $X(t)$'nin beklenen değeri,

$$m(\tau) = E[X(\tau)] = 0$$

ve otokorelasyon fonksiyonu:

$$C(s,t) = E[X(s) - m(s)][X(t) - m(t)] = \frac{\beta^2 e^{-\kappa|s-t|}}{2\kappa}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre $X(t)$ aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$X(t) = \int_0^t \beta e^{-(t-\tau)}\, dZ(\tau) \quad Z(\tau),\ 0 \leq \tau < \infty$$

$\{Z(\tau), 0 \leq \tau\infty\}$ Weiner stokastik sürecidir. $\kappa$ ve $\beta$ ise pozitif sabitlerdir. Ayrıca $X(0) = 0$ olduğu varsayılacaktır.

Beklenen değer ve varyans,

$$E[X(t)|X(s) = x] = xe^{-\kappa(t-s)} \tag{4.3}$$

$$Var[X(t)|X(s) = x] = A(s,t) = \frac{\beta^2[1 - e^{-2\kappa(t-s)}]}{2\kappa} \quad t > s \tag{4.4}$$

eşitlikleri ile yazılabilir (Beekman and Fuelling, 1990).

Çizelge 4.1: Ornstein-Uhlenbeck süreci kullanılması durumunda beklenen değerler.

| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{n = 5}$ | | | $\mathbf{n = 10}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 4.877183 | 4.880204 | 4.905466 | 9.516595 | 9.524694 | 9.592488 |
| *0.03* | 4.643186 | 4.646025 | 4.669770 | 8.639693 | 8.646901 | 8.707235 |
| *0.05* | 4.424096 | 4.426766 | 4.449098 | 7.869655 | 7.876087 | 7.929923 |
| *0.07* | 4.218846 | 4.221360 | 4.242376 | 7.191878 | 7.197633 | 7.245797 |
| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{n = 20}$ | | | $\mathbf{n = 30}$ | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 18.127688 | 18.146026 | 18.299620 | 25.919331 | 25.947021 | 26.178991 |
| *0.03* | 15.040229 | 15.055044 | 15.179122 | 19.781865 | 19.802372 | 19.974145 |
| *0.05* | 12.642915 | 12.655017 | 12.756368 | 15.538045 | 15.553623 | 15.684095 |
| *0.07* | 10.763317 | 10.773312 | 10.857010 | 12.536842 | 12.548965 | 12.650503 |

Bundan sonraki gösterimlerde $\frac{\beta^2}{2\kappa} = \sigma^2$ olarak alınacaktır. Beekman ve Shiu'nin çalışmasında $\kappa = 0.17$ olarak alınmıştır (1988). Bu değer ABD hazine bonosunun bir yıllık getiri oranıdır.

Gelecekteki ödemelerin bugünkü rasgele değeri olan $\overline{a}_{\overline{n}|R}$, ödeme dizisi olan $b(t),\ 0 \leq t \leq n$'den bulunabilir.

$$\overline{a}_{\overline{n}|R} = \int_0^n b(t)exp\left(-\int_0^t R(s)\,ds\right)\,dt$$

Eğer $b(t) = 1,\ 0 \leq t \leq n$ olarak alınırsa:

$$\overline{a}_{\overline{n}|R} = \int_0^n exp(-\int_0^t R(s)\,ds)\,dt = \int_0^n e^{(-\delta t - X(t))}\,dt$$

olur. $\overline{a}_{\overline{n}|R}$'nın beklenen değeri ise:

$$E[\overline{a}_{\overline{n}|R}] = \int_0^n \int_{C_0[0,n]}^n e^{(-\delta t - X(t))}\,dt\,dX$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $C_0[0,n]$, $[0,n]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesidir. Buradan da beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$\begin{aligned} E[\overline{a}_{\overline{n}|R}] &= \int_0^n e^{-\delta t} \int_{C_0[0,n]}^n e^{-X(t)}\,dX\,dt \\ &= \int_0^n e^{-\delta t} exp\left(\sigma^2 \frac{1 - e^{-2\kappa t}}{2}\right)\,dt \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aşağıda verilen parametre değerleri için beklenen değer hesaplanarak bulunan değerler Tablo 4.1'de gösterilmiştir.

$$\kappa = 0.17$$
$$\delta = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07$$
$$\sigma = 0.01, 0.10, 0.15$$
$$n = 5, 10, 20, 30$$

Bu tablodan faydalanarak beklenen değer, $\delta$ ve $\sigma$ arasındaki ilişkiyi gösteren grafikler sırasıyla Şekil 4.2 ve Şekil 4.3'de çizilmiştir.

Şekil 4.2'de $\sigma = 0.15$ sabit alınarak değişen faizin annuitenin bugünkü değerine etkisi gösterilmiştir. Buna göre faiz arttıkça bugünkü değerin beklenen değeri azalmaktadır. Bu sonuç bugünkü değerin faiz ile ters orantılı olması nedeniyle beklenen bir sonuçtur. Ayrıca dönem sayısı arttıkça beklenen değer artmakta, faizdeki artış beklenen değerde daha büyük bir değişime yol açmaktadır.

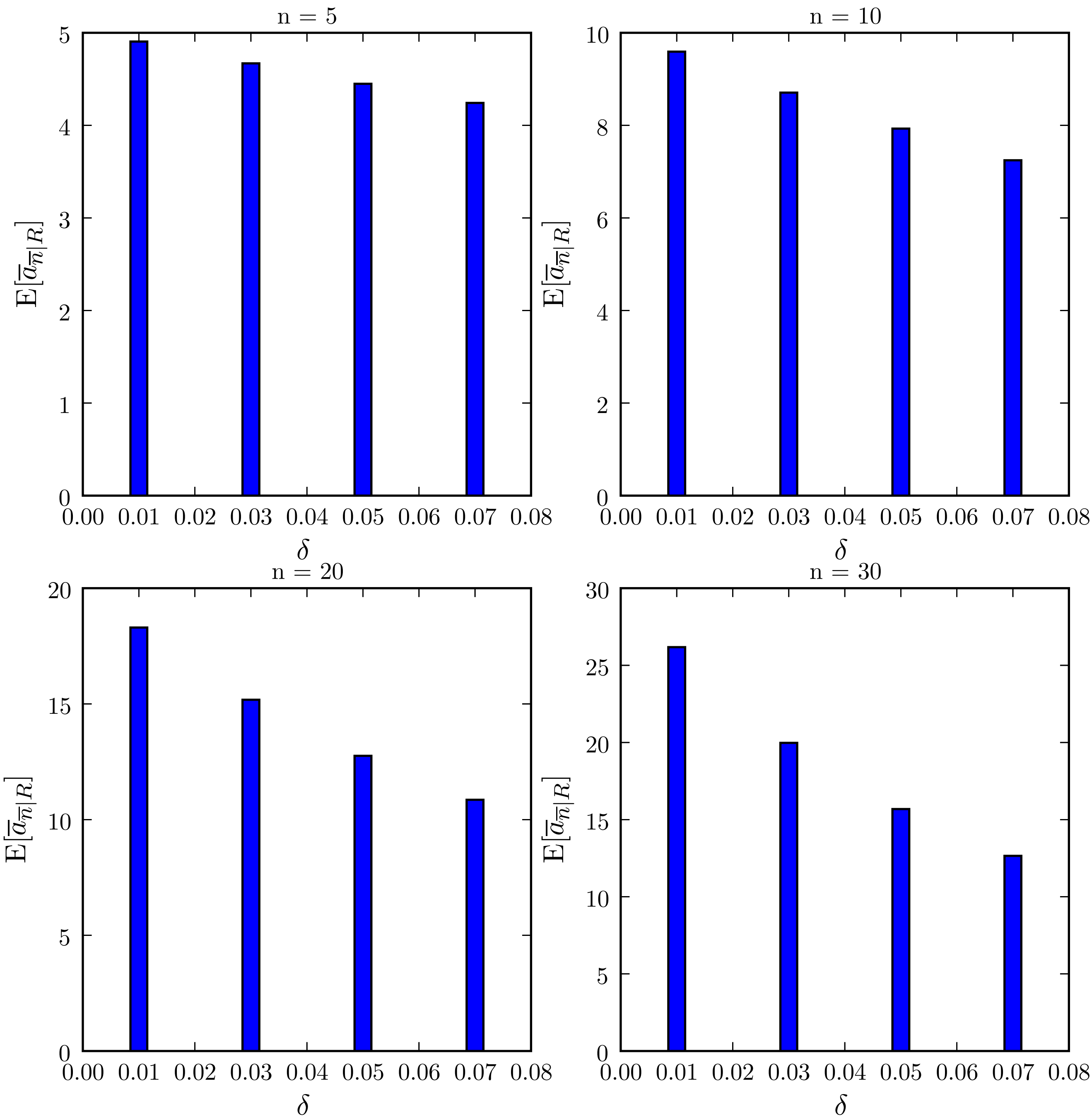
Şekil 4.3'de ise $\delta = 0.01$ sabit alınarak standart sapmanın annuitenin bugünkü değeri nasıl etkilediği gösterilmiştir. Buna göre de standart sapma arttıkça bugünkü değerin beklenen değeri artmaktadır. Ayrıca dönem sayısı arttığında bu artışın daha fazla olduğu görülmektedir.

Şimdi de ikinci moment olan varyans elde edilecektir. Bunun için:

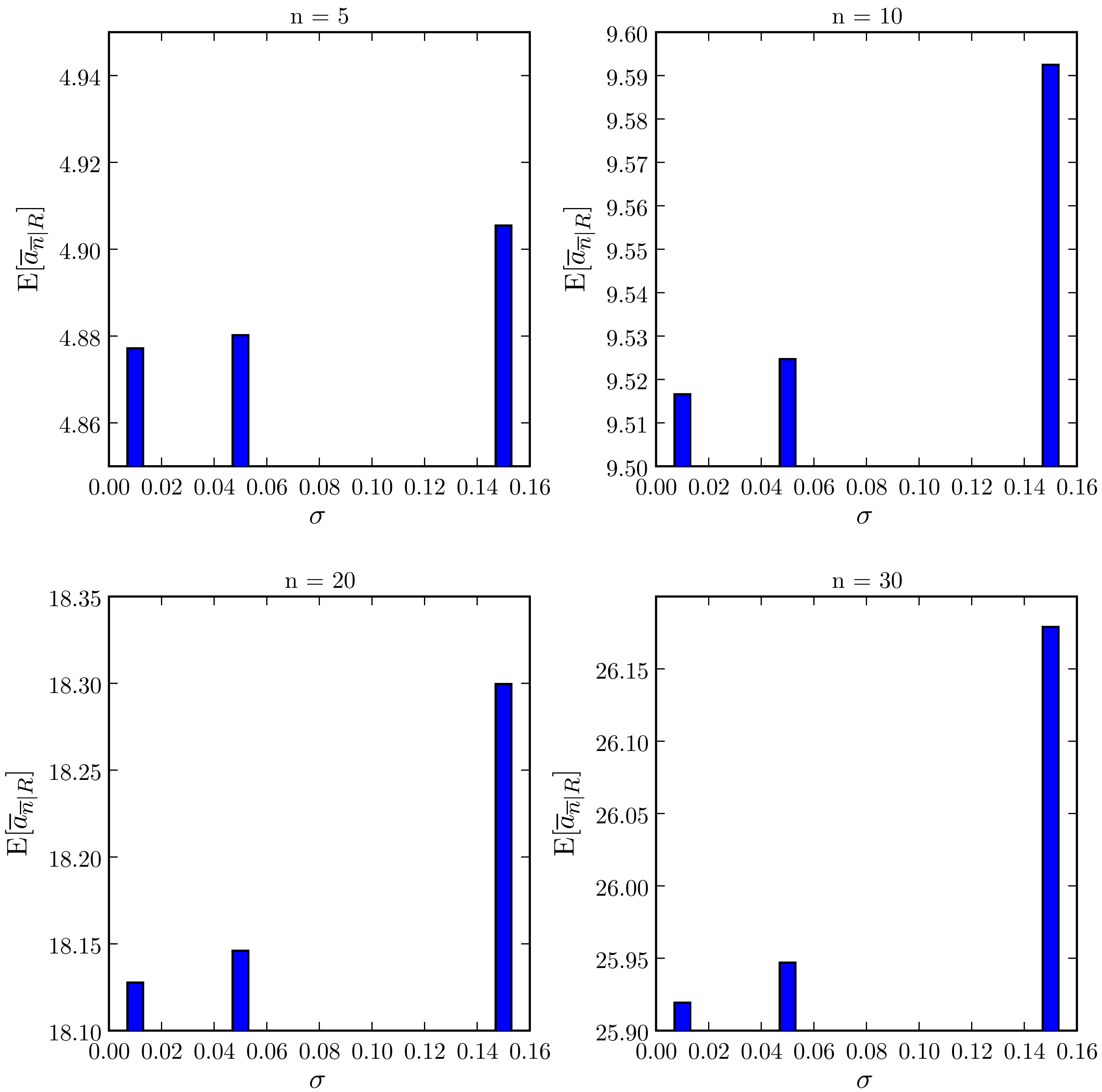
$$\begin{aligned}
E[(\overline{a}_{\overline{n}|R})^2] &= \int_{c_o[0,n]}^{n} \left[ \int_0^n e^{-\delta t - X(t)\,dt} \right]^2 dX \\
&= \int_{c_0[0,n]}^{n} \int_0^n e^{-\delta s - X(s)}\, ds \int_0^n e^{-\delta t - X(t)}\, dt\, dX \\
&= \int_0^n \int_0^n \int_{c_0[0,n]}^{n} e^{-\delta s - X(s)} e^{-\delta t - X(t)}\, dX\, ds\, dt \\
&= \int_0^n e^{-\delta t} \int_0^t e^{-\delta s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\dfrac{M}{N_s}}\, dx\, dy\, ds\, dt \\
&\quad + \int_0^n e^{-\delta t} \int_0^t e^{-\delta s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\dfrac{M}{N_t}}\, dx\, dy\, ds\, dt
\end{aligned}$$

burada:

$$M = -x - y - \frac{x^2}{2A(0,s)} - \frac{[y - xe^{-\kappa(t-s)}]^2}{2A(s,t)}$$
$$N_s = [(2\pi)^2 A(0,s) A(s,t)]^2$$
$$N_t = [(2\pi)^2 A(0,t) A(s,t)]^2$$




Şekil 4.2: Ornstein-Uhlenbeck süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\sigma = 0.15$ ve $n = 5, 10, 20, 30$ için $\delta$'ya göre değişimleri.




Şekil 4.3: Ornstein-Uhlenbeck süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\delta = 0.01$ ve $n = 5, 10, 20, 30$ için $\sigma$'ya göre değişimleri.

Çizelge 4.2: Ornstein-Uhlenbeck süreci kullanılması durumunda standart sapma değerleri.

| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{n=5}$ | | | $\mathbf{n=10}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 0.027199 | 0.136128 | 0.411776 | 0.058162 | 0.291181 | 0.882929 |
| *0.03* | 0.025631 | 0.128282 | 0.388011 | 0.051938 | 0.260019 | 0.788307 |
| *0.05* | 0.024173 | 0.120981 | 0.365897 | 0.046536 | 0.232969 | 0.706180 |
| *0.07* | 0.022815 | 0.114183 | 0.345308 | 0.041837 | 0.209440 | 0.634745 |
| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{n=20}$ | | | $\mathbf{n=30}$ | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 0.104554 | 0.523513 | 1.589253 | 0.135018 | 0.676068 | 2.052871 |
| *0.03* | 0.084958 | 0.425379 | 1.291023 | 0.101303 | 0.507232 | 1.539772 |
| *0.05* | 0.070094 | 0.350948 | 1.064847 | 0.078814 | 0.394614 | 1.197544 |
| *0.07* | 0.058694 | 0.293859 | 0.891387 | 0.063335 | 0.317100 | 0.962010 |

’ye eşittir. Burada $A$ aşağıdaki dağılıma eşittir:

$$A(0,t) = \sigma^2(1 - e^{-2\kappa t})$$

Kolay gösterim olması için birinci bölümdeki integral $I$ ile gösterilirse (Hogg and Craig, 1978):

$$I = \int_0^n e^{-\delta t} \int_0^t e^{-\delta s + A(s,t)/2} e^{\left(\frac{A(0,s)}{2}[1+e^{-\kappa(t-s}]^2\right)} \, ds \, dt$$

olarak hesaplanır. İkinci bölümdeki integral de $J$ ile gösterilirse:

$$J = \int_0^n e^{-\delta t} \int_0^t e^{-\delta s + A(t,s)/2} e^{\left(\frac{A(0,t)}{2}[1+e^{-\kappa(s-t)}]^2\right)} \, ds \, dt$$

olur. Buna göre:

$$Var(\overline{a}_{\overline{n}|R}) = I + J - \left(\int_0^n e^{-\delta t} e^{A(0,t)/2} \, dt\right)^2 \qquad (4.6)$$

olarak bulunur. Bu formülün yardımıyla Tablo 4.2 oluşturulabilir.

## 4.4. Faiz ve Ölümlülüğün Stokastik Süreç Olması Durumu

Bu kısımda kişinin gelecekteki yaşam süresi de rasgele değişken olarak kabul edilecektir. Ayrıca faizdeki değişkenlik de yine korunacaktır. Gelecekteki ödemelerin bugünkü değerine ilişkin beklenen değer ve standard sapmalar incelenecektir.

$X$ yaşındaki bir kişinin gelecekteki rasgele yaşam süresi $T(x)$ ile gösterilirse; $T(x)$, ${}_tp_x\mu_{x+t},\ 0 \leq t < \infty$'nin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. $T(x)$'nin bağımsız bir süreç olduğu varsayılacaktır ($X(t),\ 0 \leq t < \infty$).

Gelecekteki ödemelerin bugünkü rasgele değeri $b(t),\ 0 \leq t \leq T$ olmak üzere

$$\overline{a}_{\overline{T}|R} = \int_0^T b(t)exp\left(-\int_0^t R(s)\,ds\right)\,dt$$

ile gösterilecektir. $b(t) = 1$ olarak alınırsa:

$$\overline{a}_{\overline{T}|R} = \int_0^T exp\left(-\int_0^t R(s)\,ds\right)\,dt$$

Bağımsızlık varsayımları ile:

$$E[\overline{a}_{\overline{T}|R}] = E_R E_T[\overline{a}_{\overline{T}|R}|R]$$

ve Bowers'den (1986):

$$E_T[\overline{a}_{\overline{T}|R}|R] = \int_0^\infty e^{-\delta t - X(t)}{}_tp_x\,dt$$

Fubini teoremini uygulayarak (Beekman and Fuelling, 1990):

$$\begin{aligned} E_R E_T[\overline{a}_{\overline{T}|R}|R] &= \int_0^\infty e^{-\delta t}{}_tp_x E_X(e^{-X(t)})\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t}{}_tp_x\,e^{A(0,t)/2}\,dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t}{}_tp_x\,e^{\sigma^2[1-e^{-2\kappa t}]/2}\,dt \end{aligned}$$

$\sigma^2 \to 0$ olması durumu $\overline{a}_x$'i azaltacaktır. İkinci moment için:

$$E[\overline{a}^2_{\overline{T}|R}] = E\left[\left(\int_0^T exp\left(-\int_0^t R(s)\,ds\right)\,dt\right)^2\right]$$

ve yine Bowers (1986)'den:

$$\begin{aligned} Z(t) &= \left[\int_0^t exp\left(-\int_0^v R(u)\,du\right)\,dv\right]^2 \\ Z'(t) &= 2\left[\int_0^t e\left(-\int_0^v R(u)\,du\right)\,dv\right]exp\left(-\int_0^t R(u)\,du\right) \\ &= 2\left[\int_0^t e^{-\delta v - X(v)}\,dv\right]e^{-\delta t - X(t)} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak

$$
\begin{aligned}
E[\overline{a}^2_{\overline{T}|R}] &= E_R E_T[Z(T)|R] \\
&= E_R\left(\int_0^\infty 2\int_0^\infty e^{-\delta v - X(v)}\, dv e^{-\delta t - X(t)}\, {}_tp_x\right) \\
&= 2\int_0^\infty \int_0^t E_R(e^{-X(v)}e^{-X(t)})e^{-\delta v - \delta t}\, {}_tp_x\, dv\, dt
\end{aligned}
$$

ve Fubini teoreminden:

$$
E[\overline{a}^2_{\overline{T}|R}] = 2\int_0^\infty \int_0^t e^{-\delta v - \delta t} e^{\left(\frac{A(v,t)}{2} + \frac{A(0,v)}{2}\left[1+e^{-\kappa(t-v)}\right]^2\right)}\, {}_tp_x\, dv\, dt
$$

olarak bulunur. Varyans herzamanki gibi aşağıdaki formül ile hesaplanacaktır:

$$
Var[\overline{a}_{\overline{T}|R}] = E[\overline{a}^2_{\overline{T}|R}] - (E[\overline{a}_{\overline{T}|R}])^2 \tag{4.7}
$$

Bulunan sonuçlar bir örnek üzerinde gösterilebilir.

**Örnek 4.1.** Makeham yasasının yaşam süresindeki rasgelelik için kullanıldığını varsayalım. Bu durumda:

$$
\mu_x = A + Bc^x \qquad (A,\ B,\ \text{ve } c \text{ sabittir})
$$

Buna göre:

$$
\begin{aligned}
{}_tp_x &= e^{[-At - mc^x(c^t-1)]} \\
m &= B/ln\, c \\
E_R E_T[\overline{a}_{\overline{T}|R}|R] &= \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{\left(\sigma^2[1-e^{-2\kappa t}]/2\right)} e^{\left(-At - mc^x(c^t-1)\right)}\, dt
\end{aligned}
$$

Burada bulunan $A$, $B$, ve $c$ sabitleri yerine $13 - 110$ yaşındakiler için tanımlanan yaşam tablosundan değerler konulacaktır (Bowers et al., 1986).

Buna göre $A = 0.0007$, $B = 0.00005$, ve $c = 10^{0.04}$'dür. Ayrıca $\kappa = 0.17$ ve $t > 110 - x$ için ${}_tp_x = 0$'dır.

$$
\begin{aligned}
E_R E_T[\overline{a}_{\overline{T}|R}|R] = \int_0^{110-x} & e^{-\delta t} e^{\left(\sigma^2[1-e^{-0.34}]/2\right)} \\
& .\, e^{\left(-0.0007t - 0.000543(10^{0.04x})(10^{0.04t}-1)\right)}\, dt
\end{aligned}
$$

Örnekte aşağıdaki değerler kullanılacaktır:

$$
\begin{aligned}
x &= 65, 70, 75, 80 \\
\delta &= 0.05, 0.06, 0.07, 0.08 \\
\sigma &= 0.0200, 0.0100, 0.0050, 0.0025
\end{aligned}
$$

Çizelge 4.3: Ornstein-Uhlenbeck sürecinin rasgele faiz ve rasgele ölümlülük için kullanılması durumundaki beklenen değerler.

| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{x=50}$ | | | $\mathbf{x=60}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 23.257099 | 23.281663 | 23.487443 | 17.021270 | 17.038439 | 17.182238 |
| *0.03* | 17.680309 | 17.698355 | 17.849510 | 13.789329 | 13.802783 | 13.915465 |
| *0.05* | 13.944817 | 13.958537 | 14.073447 | 11.429098 | 11.439869 | 11.530071 |
| *0.07* | 11.348515 | 11.359262 | 11.449262 | 9.664104 | 9.672893 | 9.746487 |
| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{x=70}$ | | | $\mathbf{x=80}$ | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 11.354347 | 11.364912 | 11.453388 | 6.771251 | 6.776707 | 6.822373 |
| *0.03* | 9.765536 | 9.774339 | 9.848051 | 6.136055 | 6.140857 | 6.181052 |
| *0.05* | 8.506023 | 8.513447 | 8.575601 | 5.594024 | 5.598276 | 5.633868 |
| *0.07* | 7.493559 | 7.499888 | 7.552876 | 5.128142 | 5.131930 | 5.163622 |

alınarak Tablo 4.3 oluşturulacaktır. Bu tablodaki değerler Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'de gösterilmiştir.

Şekil 4.4'de faiz arttıkça beklenen değerin azaldığı görülmektedir. Kişinin annuite ödemelerini almaya başladığı yaş yükseldikçe annuitenin beklenen değeri azalmaktadır. Dönem sayısının kişinin yaşı ile ters orantılı olduğu düşünülürse bu beklenen bir sonuçtur. Ayrıca kişinin yaşı yükseldikçe değişen faiz için annuitenin beklenen değerleri arasındaki fark azalmaktadır.

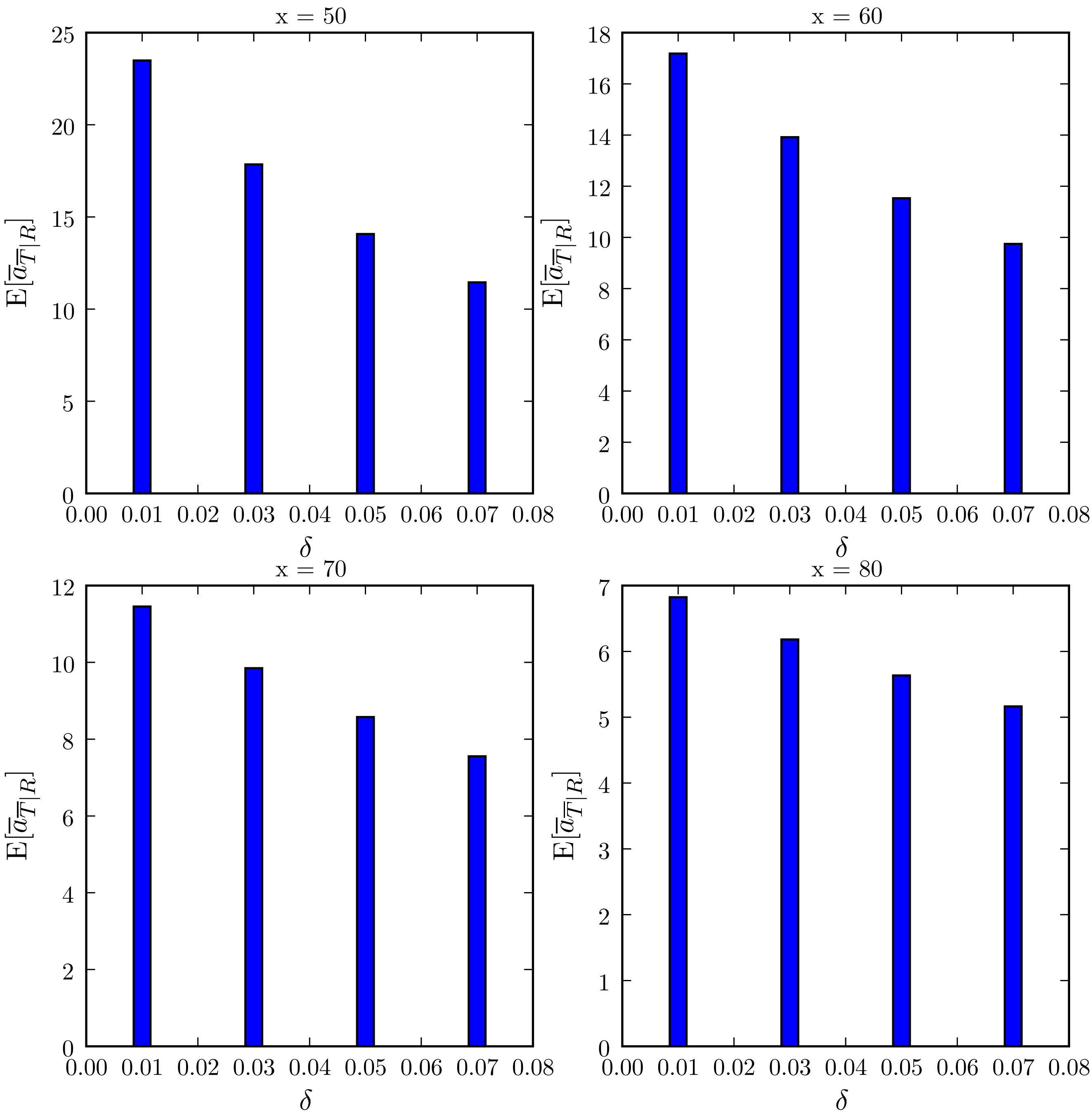
Şekil 4.5'de beklenen değerin standart sapma ile arttığı görülmektedir. Kişinin annuite ödemelerine giriş yaşı yükseldikçe annuitenin beklenen değeri de azalmaktadır.

Benzer yöntemi kullanarak:

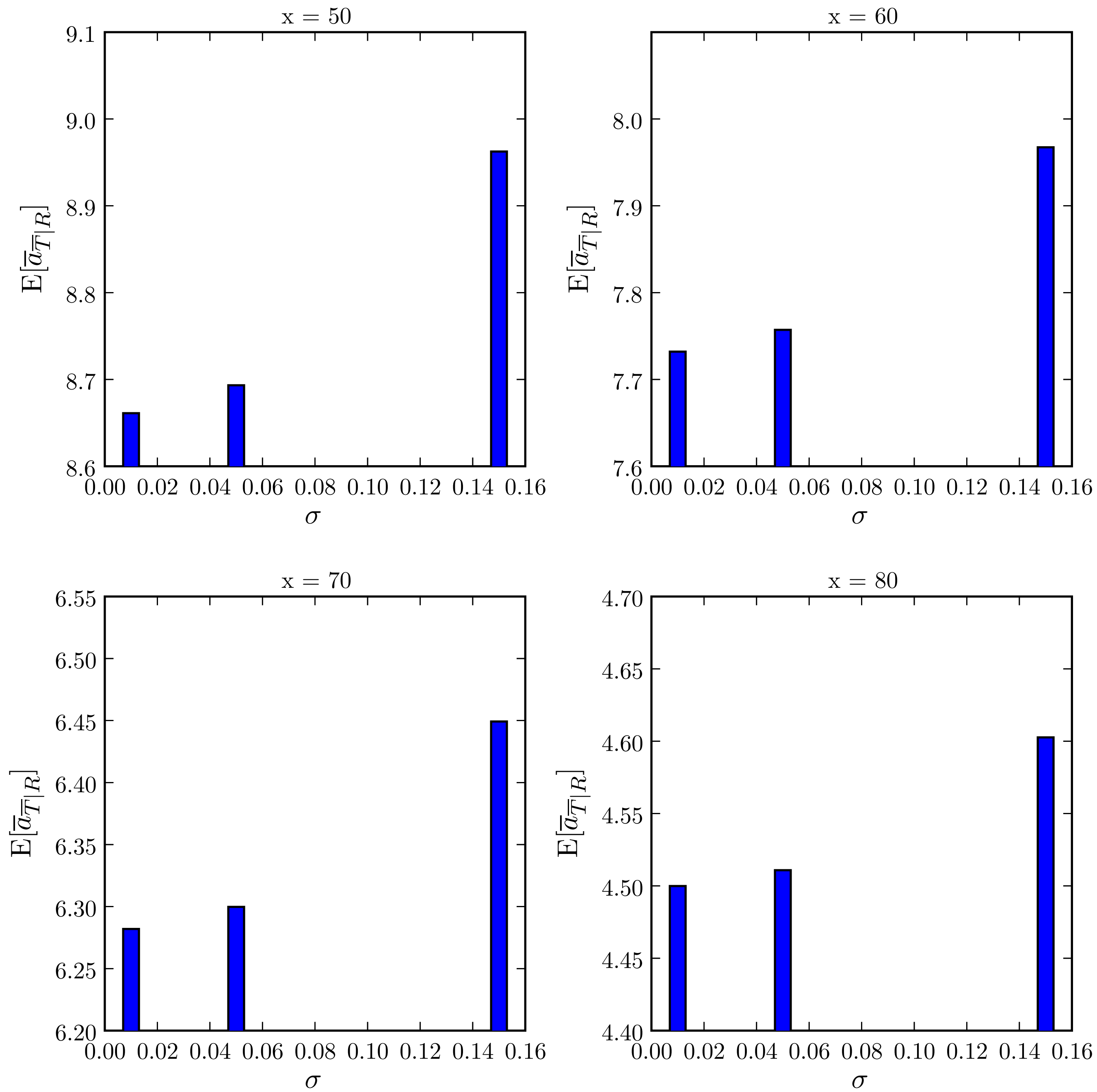
$$E[\overline{a}^2_{\overline{T}|R}] = 2\int_0^{110-x}\int_0^t e^{-\delta v-\delta t}$$

$$.\, e^{\sigma^2\frac{\left[1-e^{-0.34(t-v)}\right]}{2}+\sigma^2\frac{\left[1-e^{-0.34v}\right]}{2}[1+e^{-0.17(t-v)}]^2}$$

$$.\, e^{\left[-0.0007t-0.000543(10^{0.04x})(10^{0.04t}-1)\right]}\,dv\,dt$$




Şekil 4.4: Ornstein-Uhlenbeck süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\sigma = 0.15$ ve $x = 50, 60, 70, 80$ için $\delta$'ya göre değişimleri.




Şekil 4.5: Ornstein-Uhlenbeck süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\delta = 0.01$ ve $x = 50, 60, 70, 80$ için $\sigma$'ya göre değişimleri.

Çizelge 4.4: Ornstein-Uhlenbeck sürecinin rasgele faiz ve ölümlülük için kullanılması durumunda standart sapma değerleri.

| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{x=50}$ | | | $\mathbf{x=60}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 8.661154 | 8.693309 | 8.962530 | 7.732053 | 7.757136 | 7.967396 |
| *0.03* | 5.518921 | 5.544429 | 5.757228 | 5.490451 | 5.510747 | 5.680579 |
| *0.05* | 3.712033 | 3.733588 | 3.912510 | 4.034780 | 4.051847 | 4.194326 |
| *0.07* | 2.624195 | 2.643208 | 2.800040 | 3.059915 | 3.074701 | 3.197803 |
| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{x=70}$ | | | $\mathbf{x=80}$ | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 6.281968 | 6.299784 | 6.449241 | 4.499935 | 4.510873 | 4.602651 |
| *0.03* | 4.913333 | 4.928233 | 5.053115 | 3.819762 | 3.829281 | 3.909115 |
| *0.05* | 3.920447 | 3.933171 | 4.039712 | 3.276037 | 3.284407 | 3.354569 |
| *0.07* | 3.186115 | 3.197177 | 3.289687 | 2.836600 | 2.844028 | 2.906264 |

İkinci moment:

$$x = 65, 70, 75, 80$$

$$\delta = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$$

$$\sigma = 0.0200, 0.0100, 0.0050, 0.0025$$

alınarak hesaplanır. Eşitlik 4.7'de yerine konarak standart sapma hesaplanır. Sonuçlar Tablo 4.4'de gösterilmiştir.

### 4.5. Faizde Daha Fazla Rasgelelik

Önceki kesimde faiz ve ölümlülükteki değişkenlik Ornstein-Uhlenbeck süreci ile sağlanmıştı. Bu süreç ile elde edilen değişkenlik bazı durumlarda yeterli olmayabilir. Örneğin ekonomik açıdan zayıf olan ülkelerde faizler ekonomisi güçlü olan ülkelere göre çok daha büyük oynamalar gösterebilmektedir. Böyle bir durumu modellemek için ve bu durumda oluşacak riskleri hesaplamak için faiz ve ölümlülükteki rasgeleliğin Wiener süreci ile sağlanması uygun olacaktır (Beekman and Fuelling, 1991).

Bu kesimde faizin sabit bir anlık faiz oranı olan $\delta$ etrafında değiştiği kesin annuitelerin beklenen değer ve varyansları hesaplanacaktır.

Önceki kesimdeki gibi değişken faiz oranı $R(s) = \delta + V(s), 0 \leq s \leq n$ ile gösterilsin. Burada $V(s)$ faizde olabilecek değişim miktarını simgeler. $V(s)$'lerin bütün dönemler boyunca olan birikimi $X(t)$ ile ifade edilir:

$$X(t) = \int_0^t V(s)\, ds \quad 0 \leq t \leq n$$

Buna göre ani faiz oranının birikim fonksiyonu,

$$\int_0^t R(s)\, ds = \delta t + X(t) \quad t \geq 0$$

ile yazılabilir. Burada $X(t)$'nin, $0 \leq t \leq n$, $X(0) = 0$ özelliği taşıyan bir Wiener stokastik süreci olduğu kabul edilecektir. Bu sürecin beklenen değer ve varyansı,

$$E[X(t)|X(s) = x] = x$$
$$Var[X(t)|X(s) = x] = A(s,t) = \sigma^2(t-s) \quad t > s$$

olarak ifade edilebilir (Feller, 1971).

Bir annuitenin bugünkü rasgele değeri $\ddot{a}_{\overline{n}|R}$ ile gösterilirse, beklenen değeri

$$\begin{aligned} E[\ddot{a}_{\overline{n}|R}] &= \int_{C_0[0,n]}^{n} \int_0^n e^{(-\delta t - X(t))}\, dt\, dX \\ &= \int_0^n e^{-\delta t + \sigma^2 t/2} dt = \frac{1 - e^{-n[\delta - 0.5\sigma^2]}}{\delta - 0.5\sigma^2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

eşitliği ile bulunur.

Beklenen değer aşağıdaki örnek parametre değerleri için hesaplanacaktır:

$$\delta = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07$$
$$\sigma = 0.01, 0.05, 0.15$$
$$n = 5, 10, 20, 30$$

Sonuçlar Tablo 4.5'da gösterilmiştir. Bu tablodaki değerler Ornstein-Uhlenbeck süreci kullanılarak elde edilen tablodaki (Tablo 4.1) değerler ile karşılaştırsa beklenen değerlerin daha geniş bir aralıkta değiştiği görülebilir. Bu tablodan yararlanarak Şekil 4.6 ve Şekil 4.7 oluşturulmuştur.

Şekil 4.6'da gösterildiği gibi faiz arttığında beklenen değer azalmaktadır. Dönem sayısı arttığında ise beklenen değer artmakta ve beklenen değerler arasındaki farklar büyümektedir. Şekil 4.7'de ise standart sapma arttığında beklenen değerin de arttığı görülmektir. Ornstein-Uhlenbeck sürecindeki benzer şekil (Şekil 4.3)

Çizelge 4.5: Wiener süreci kullanılması durumundaki beklenen değerler.

| $\delta\backslash\sigma$ | **n = 5** | | | **n = 10** | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 4.877662 | 4.892203 | 5.015658 | 9.518598 | 9.574986 | 10.062761 |
| *0.03* | 4.643633 | 4.657244 | 4.772781 | 8.641445 | 8.690902 | 9.118447 |
| *0.05* | 4.424514 | 4.437261 | 4.545449 | 7.871191 | 7.914669 | 8.290280 |
| *0.07* | 4.219238 | 4.231183 | 4.332548 | 7.193229 | 7.231541 | 7.562301 |
| $\delta\backslash\sigma$ | **n = 20** | | | **n = 30** | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 18.135689 | 18.347769 | 20.252096 | 25.936655 | 26.385558 | 30.569598 |
| *0.03* | 15.046387 | 15.210265 | 16.677905 | 19.793657 | 20.100678 | 22.944916 |
| *0.05* | 12.647698 | 12.775541 | 13.917322 | 15.546244 | 15.760894 | 17.736685 |
| *0.07* | 10.767067 | 10.867788 | 11.764783 | 12.542670 | 12.696208 | 14.100165 |

ile karşılaştırılacak olursa beklenen değerdeki değişimlerin çok daha büyük olduğu görülmektedir. Wiener sürecinin değişkenliği Ornstein-Uhlenbeck sürecinin değişkenliğine göre daha büyük olduğu düşünülürse bu da beklenen bir sonuçtur.

İkinci moment de önceki bölümdekine benzer bir yöntemle hesaplanabilir. İlk olarak,

$$
\begin{aligned}
E[(\ddot{a}_{\overline{n}|R})^2] &= \int_{C_0[0,n]} \left[ \int_0^n e^{(-\delta t - X(t))}\, dt \right]^2 dX \\
&= \int_0^n e^{-\delta t} \int_0^t e^{-\delta s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-y} \frac{exp\left(-x^2/2\sigma^2 s - (y-x)^2/2\sigma^2(t-s)\right)}{\left[(2\pi)^2 \sigma^2 s \sigma^2 (t-s)\right]^{0.5}} dxdydsdt \\
&+ \int_0^n e^{-\delta t} \int_t^n e^{-\delta s} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x-y} \frac{exp\left(-x^2/2\sigma^2 t - (y-x)^2/2\sigma^2(s-t)\right)}{\left[(2\pi)^2 \sigma^2 t \sigma^2 (s-t)\right]^{0.5}} dxdydsdt \\
&= I + J
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılır. $I$ ve $J$'nin değerleri integraller hesaplanarak,

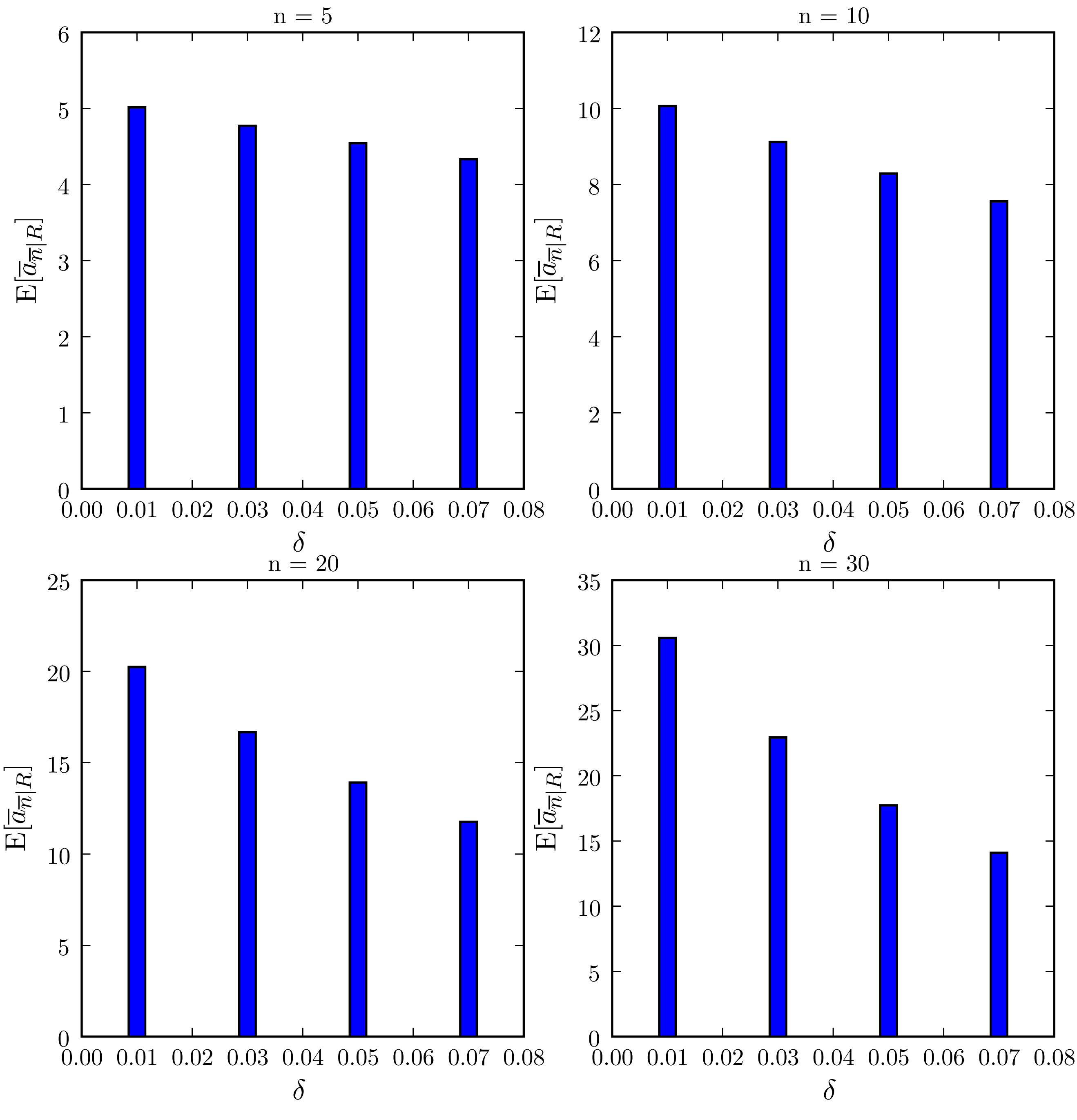
$$
I = \frac{1}{\delta - \frac{3}{2}\sigma^2} \left[ \frac{1 - exp(-n(\delta - \sigma^2/2))}{\delta - \sigma^2/2} - \frac{1 - exp(-n(2\delta - 2\sigma^2))}{2\delta - 2\sigma^2} \right] \tag{4.9}
$$

$$
J = \frac{1}{\delta - \sigma^2/2} \left[ \frac{1 - exp(-n(2\delta - 2\sigma^2))}{2\delta - 2\sigma^2} \right] - \frac{exp(-n(\delta - \sigma^2/2))}{\delta - \sigma^2/2} \left( \frac{1 - exp(-n(\delta - \frac{3}{2}\sigma^2))}{\delta - \frac{3}{2}\sigma^2} \right) \tag{4.10}
$$

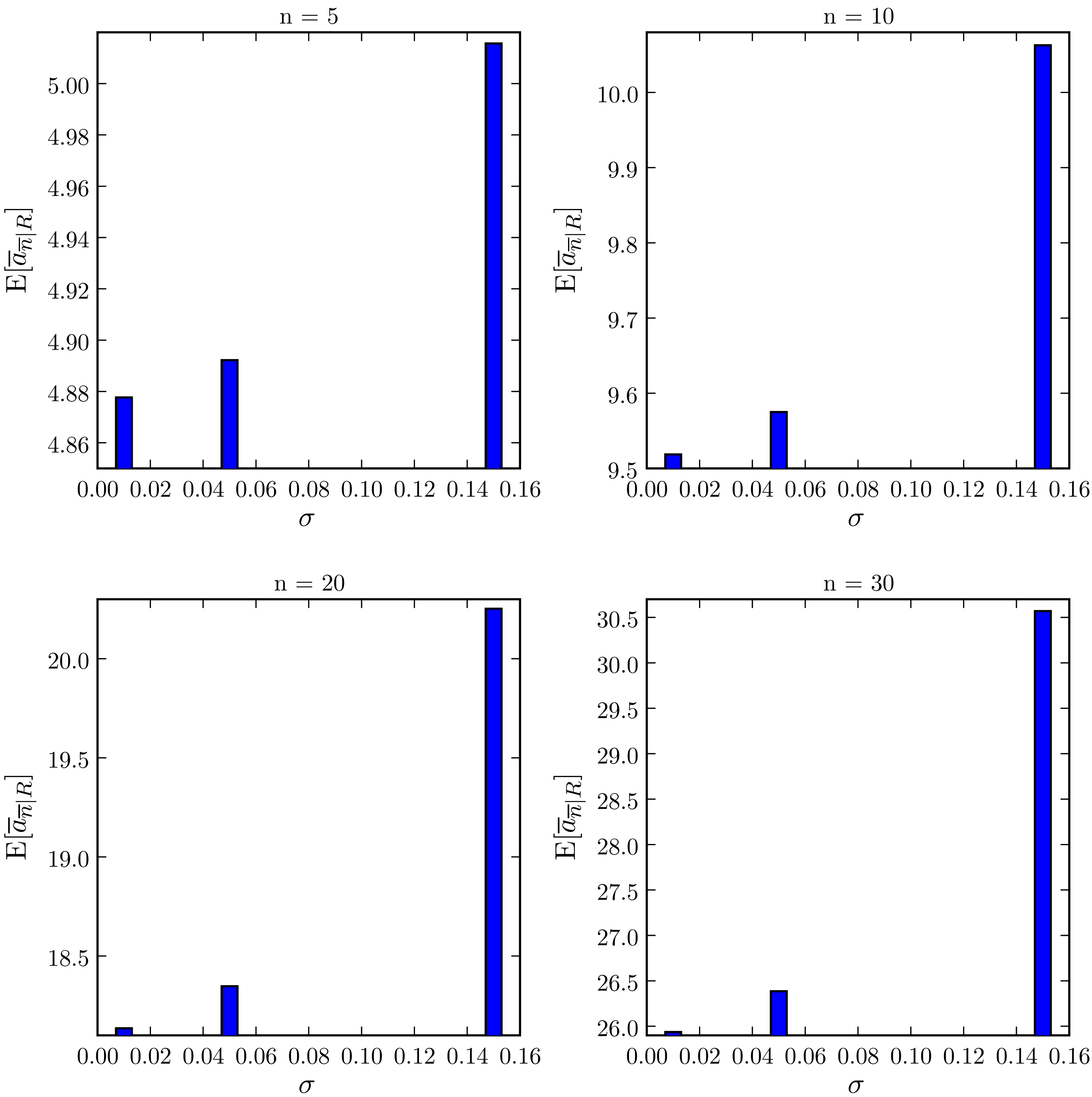
bulunur. Böylece varyansın değeri,

$$
Var(\ddot{a}_{\overline{n}|R}) = I + J - \left( \frac{1 - exp(-n(\delta - \sigma^2/2))}{\delta - \sigma^2/2} \right)^2 \tag{4.11}
$$

olarak bulunur. Bu eşitlik yardımıyla ve aşağıdaki parametreleri kullanarak Tablo 4.6




Şekil 4.6: Wiener süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\sigma = 0.15$ ve $n = 5, 10, 20, 30$ için $\delta$'ya göre değişimleri.




Şekil 4.7: Wiener süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\delta = 0.01$ ve $n = 5, 10, 20, 30$ için $\sigma$'ya göre değişimleri.

Çizelge 4.6: Wiener süreci kullanılması durumundaki standart sapma değerleri.

| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{n=5}$ | | | $\mathbf{n=10}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 0.062583 | 0.314552 | 0.985933 | 0.171646 | 0.867192 | 2.840354 |
| *0.03* | 0.058832 | 0.295679 | 0.926281 | 0.151898 | 0.767224 | 2.507480 |
| *0.05* | 0.055344 | 0.278133 | 0.870842 | 0.134807 | 0.680717 | 2.219846 |
| *0.07* | 0.052100 | 0.261814 | 0.819299 | 0.119988 | 0.605725 | 1.970869 |
| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{n=20}$ | | | $\mathbf{n=30}$ | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 0.456742 | 2.331132 | 8.341419 | 0.789953 | 4.072045 | 15.929349 |
| *0.03* | 0.359738 | 1.834100 | 6.505144 | 0.557018 | 2.864396 | 10.980650 |
| *0.05* | 0.286686 | 1.460068 | 5.131608 | 0.403517 | 2.069936 | 7.770871 |
| *0.07* | 0.231246 | 1.176430 | 4.096697 | 0.300469 | 1.537593 | 5.653056 |

oluşturulur.

$$\delta = 0.01, 0.03, 0.05, 0.07$$

$$\sigma = 0.01, 0.05, 0.15$$

$$n = 5, 10, 20, 30$$

### 4.6. Faiz ve Ölümlülükte Daha Fazla Rasgelelik

$T$, $x$ yaşındaki bir kişinin gelecekte yaşayacağı rasgele süre olsun. Burada $T$'nin $X(t), t \geq 0$'dan bağımsız olduğu kabul edilecektir. $A(0,t)$'nin Wiener stokastik süreci ile bulunan değeri yerine yazılarak beklenen değer,

$$E[\ddot{a}_{\overline{T}|R}] = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,{}_tp_x e^{\sigma^2 t/2} dt \tag{4.12}$$

ve varyans için gerekli olan terim,

$$E[(\ddot{a}_{\overline{T}|R})^2] = 2\int_0^\infty e^{-t(\delta-\sigma^2/2)} \left(\frac{1-exp(-t(\delta-\frac{3}{2}\sigma^2))}{\delta-\frac{3}{2}\sigma^2}\right) {}_tp_x dt \tag{4.13}$$

şeklinde ifade edilebilir. Bulunan sonuçlar bir örnek ile gösterilecektir.

**Örnek 4.2.** Makeham yasasının yaşam süresindeki rasgelelik için kullanıldığını varsayalım. Bu durumda:

$$\mu_x = A + Bc^x \qquad (A,\ B,\ \text{ve } c \text{ sabittir})$$

Buna göre:

$${}_tp_x = e^{[-At-mc^x(c^t-1)]} \qquad m = B/ln\,c$$

ve

$$E[\ddot{a}_{\overline{T|R}}] = E_R E_T[\overline{a}_{\overline{T|R}}|R] = \int_0^{\infty} e^{-\delta t+\sigma^2 t/2} exp(-At - mc^x(c^t - 1))dt$$

olur. Burada bulunan $A$, $B$, ve $c$ sabitleri yerine $13 - 110$ yaşındakiler için tanımlanan yaşam tablosundan değerler konulacaktır (Bowers et al., 1986).

Buna göre $A = 0.0007$, $B = 0.00005$, ve $c = 10^{0.04}$'dür. Ayrıca $t > 110 - x$ için ${}_tp_x = 0$'dır.

$$E_R E_T[\overline{a}_{\overline{T|R}}|R] = \int_0^{110-x} e^{-\delta t} e^{\sigma^2 t/2} e^{\left(-0.0007t - 0.000543(10^{0.04x})(10^{0.04t}-1)\right)}\, dt$$

Örnekte aşağıdaki değerler kullanılacaktır:

$$x = 65, 70, 75, 80$$

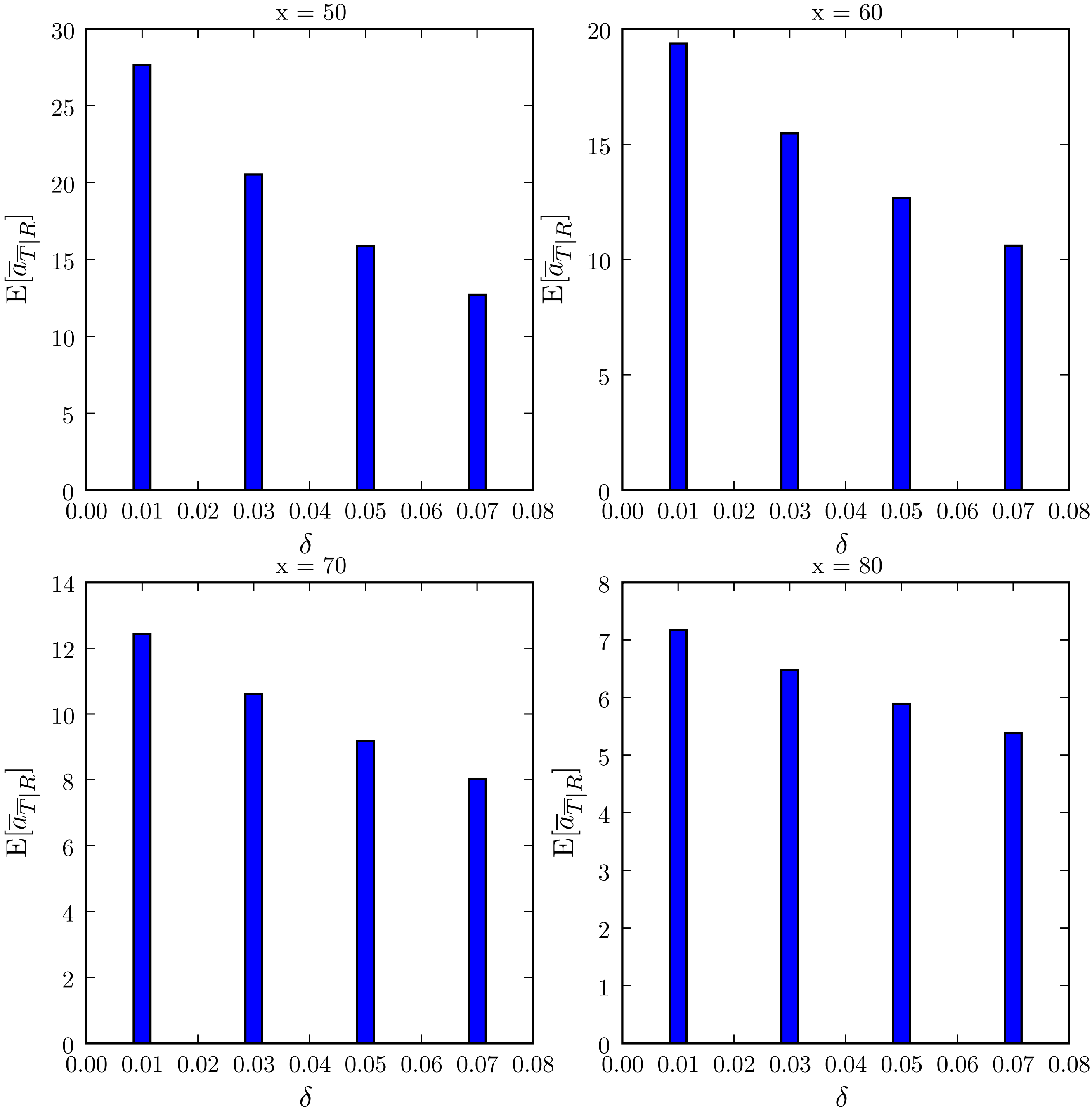
$$\delta = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$$

$$\sigma = 0.01, 0.10, 0.18$$

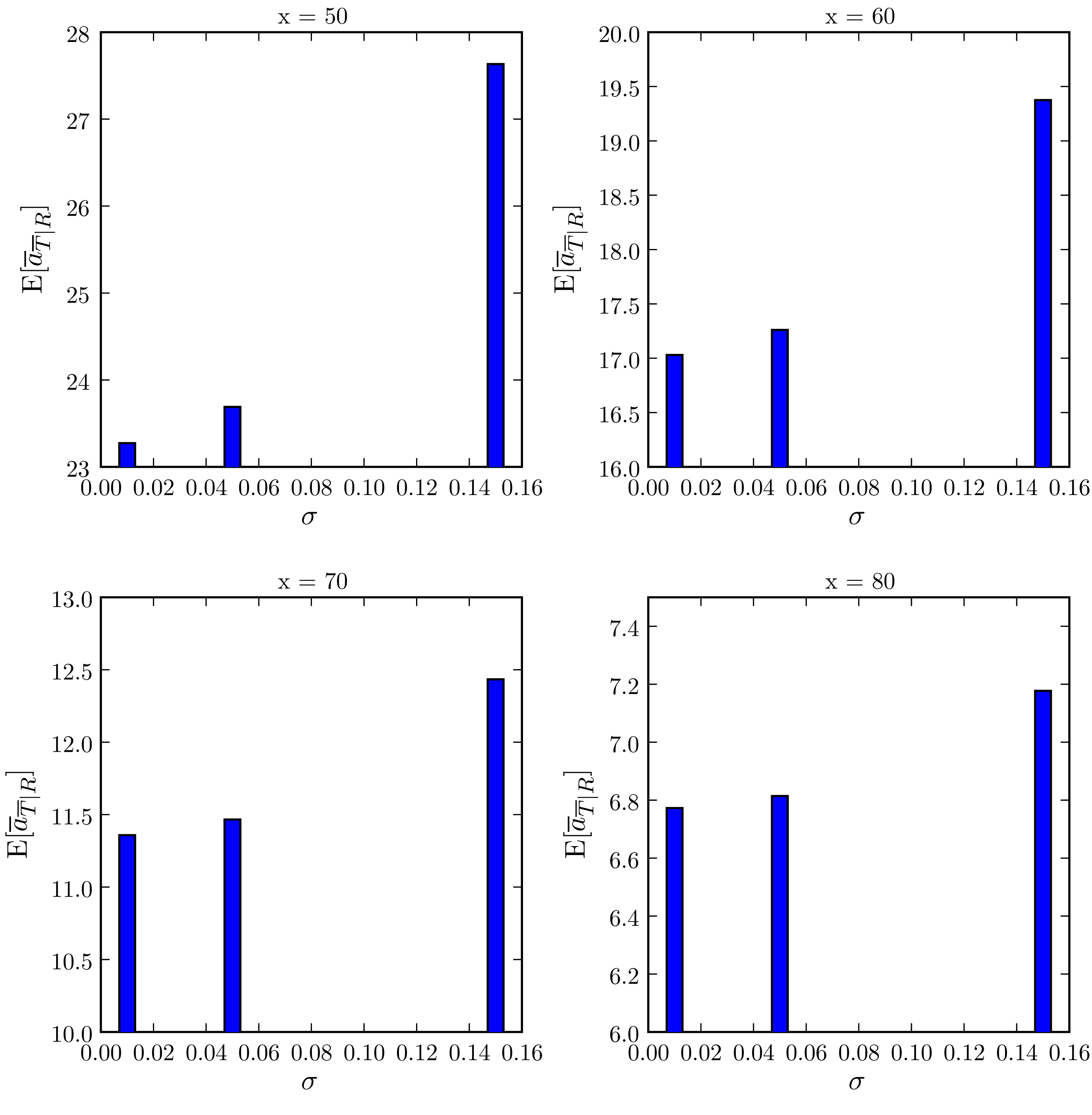
alınarak Tablo 4.7 oluşturulacaktır. Bu tablodaki değerler kullanılarak Şekil 4.8 ve Şekil 4.9 çizilmiştir.

Şekil 4.8'e göre faiz oranı olan $\delta$ arttığında beklenen değer azalmaktadır. Beklenen değer faiz ile ters orantılı olduğu için bu beklenen bir sonuçtur. Ayrıca annuite ödemelerinin başladığı yaş arttıkça beklenen değer azalmaktadır. Bunun nedeni kişinin annuite ödemelerini alabileceği dönem sayısının azalmasıdır.

Şekil 4.9'da değişen standart sapma ve yaşa göre annuitenin beklenen değeri gösterilmiştir. Standart sapma arttıkça annuitenin beklenen değerinin arttığı, kişinin yaşı yükseldikçe ise beklenen değerin azaldığı görülmektedir. Ayrıca beklenen değerdeki değişimler bir önceki bölümde gösterilen Ornstein-Uhlenbeck sürecindeki değişimlere göre daha fazladır. Bu da Wiener sürecinin değişkenliğinin daha yüksek olmasından kaynaklanmakadır.




Şekil 4.8: Wiener süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\sigma = 0.15$ ve $x = 50, 60, 70, 80$ için $\delta$'ya göre değişimleri.




Şekil 4.9: Wiener süreci ile elde edilen beklenen değerlerin $\delta = 0.01$ ve $x = 50, 60, 70, 80$ için $\sigma$'ya göre değişimleri.

Çizelge 4.7: Wiener sürecinin rasgele faiz ve rasgele ölümlülük için kullanılması durumunda beklenen değerler.

| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{x=50}$ | | | $\mathbf{x=60}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 23.273202 | 23.689929 | 27.633256 | 17.030047 | 17.260270 | 19.375323 |
| *0.03* | 17.690826 | 17.964677 | 20.526893 | 13.795619 | 13.961667 | 15.476165 |
| *0.05* | 13.951946 | 14.138866 | 15.869050 | 11.433717 | 11.556432 | 12.668055 |
| *0.07* | 11.353520 | 11.485729 | 12.697338 | 9.667573 | 9.760370 | 10.595593 |
| $\delta\backslash\sigma$ | $\mathbf{x=70}$ | | | $\mathbf{x=80}$ | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 11.358379 | 11.466554 | 12.433933 | 6.772746 | 6.814281 | 7.177154 |
| *0.03* | 9.768690 | 9.853812 | 10.611826 | 6.137319 | 6.172625 | 6.480408 |
| *0.05* | 8.508526 | 8.576472 | 9.179123 | 5.595100 | 5.625335 | 5.888360 |
| *0.07* | 7.495572 | 7.550547 | 8.036313 | 5.129066 | 5.155140 | 5.381527 |

Benzer yöntem kullanılarak,

$$E[\overline{a}^2_{\overline{T}|R}] = 2\int_0^{110-x}\int_0^t e^{-\delta v-\delta t}$$
$$.\, e^{\sigma^2\frac{\left[1-e^{-0.34(t-v)}\right]}{2}+\sigma^2\frac{\left[1-e^{-0.34v}\right]}{2}[1+e^{-0.17(t-v)}]^2}$$
$$.\, e^{\left[-0.0007t-0.000543(10^{0.04x})(10^{0.04t}-1)\right]}\,dv\,dt$$

ikinci moment,

$$x = 65, 70, 75, 80$$
$$\delta = 0.05, 0.06, 0.07, 0.08$$
$$\sigma = 0.0200, 0.0100, 0.0050, 0.0025$$

alınarak hesaplanır. Eşitlik 4.7'de yerine konarak standart sapma hesaplanır. Sonuçlar Tablo 4.8'de gösterilmiştir.

### 4.7. Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener Süreçlerinin Karşılaştırılması

Farklı dönem sayıları ve artan $\delta$ için Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener süreçleri kullanılarak elde edilen beklenen değerler Şekil 4.10'de gösterilmiştir. Buna göre faiz Wiener süreci ile modellendiğinde elde edilen beklenen değer daha yüksek olmaktadır. Ayrıca dönem sayısı arttıkça beklenen değerler arasındaki farklar daha hızlı büyümektedir.

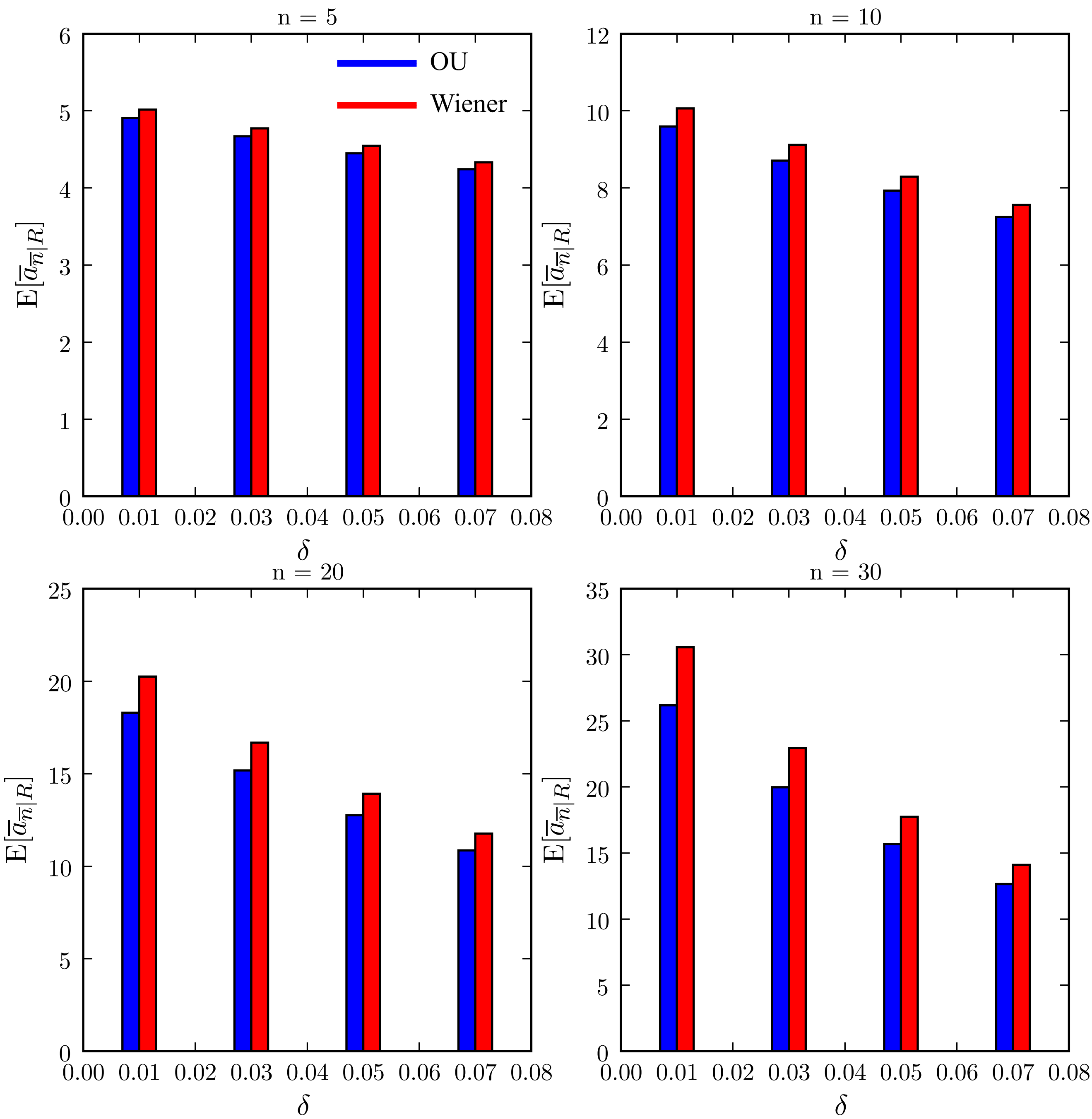
Şekil 4.11'de ise faizdeki değişkenliği gösteren farklı $\sigma$ değerleri için bu iki

Çizelge 4.8: Wiener sürecinin rasgele faiz ve ölümlülük için kullanılması durumunda standart sapma değerleri.

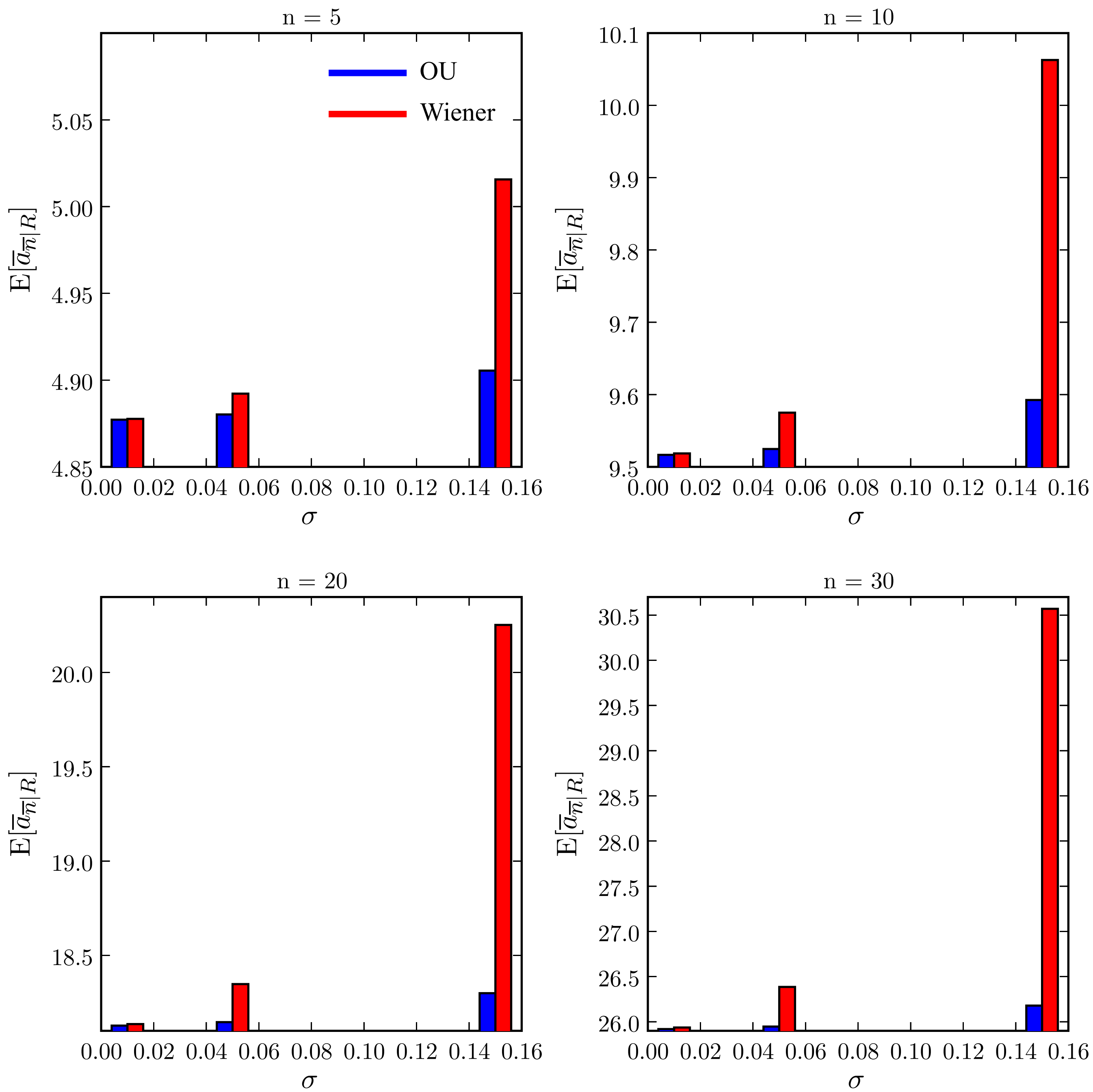
| $\delta \backslash \sigma$ | $\mathbf{x=50}$ | | | $\mathbf{x=60}$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 8.706627 | 9.830866 | 20.552183 | 7.756124 | 8.364791 | 14.182941 |
| *0.03* | 5.549368 | 6.298621 | 13.006474 | 5.507579 | 5.941200 | 9.943155 |
| *0.05* | 3.733489 | 4.259956 | 8.698790 | 4.047399 | 4.367604 | 7.225654 |
| *0.07* | 2.639993 | 3.027290 | 6.119870 | 3.069507 | 3.313729 | 5.427034 |
| $\delta \backslash \sigma$ | $\mathbf{x=70}$ | | | $\mathbf{x=80}$ | | |
| | *0.01* | *0.05* | *0.15* | *0.01* | *0.05* | *0.15* |
| *0.01* | 6.293189 | 6.583705 | 9.322178 | 4.504347 | 4.622354 | 5.705222 |
| *0.03* | 4.921882 | 5.144119 | 7.201814 | 3.823372 | 3.920385 | 4.803041 |
| *0.05* | 3.927104 | 4.100940 | 5.683426 | 3.279026 | 3.359777 | 4.088587 |
| *0.07* | 3.191403 | 3.330202 | 4.573841 | 2.839104 | 2.907103 | 3.516200 |

sürecin beklenen değerleri karşılaştırılmıştır. Buna göre $\sigma$ arttıkça Wiener süreci kullanılarak elde edilen beklenen değerlerin daha hızlı büyüdüğü görülmektedir. Wiener sürecindeki değişkenliğin daha büyük olduğu düşünülürse bu beklenen bir sonuçtur.

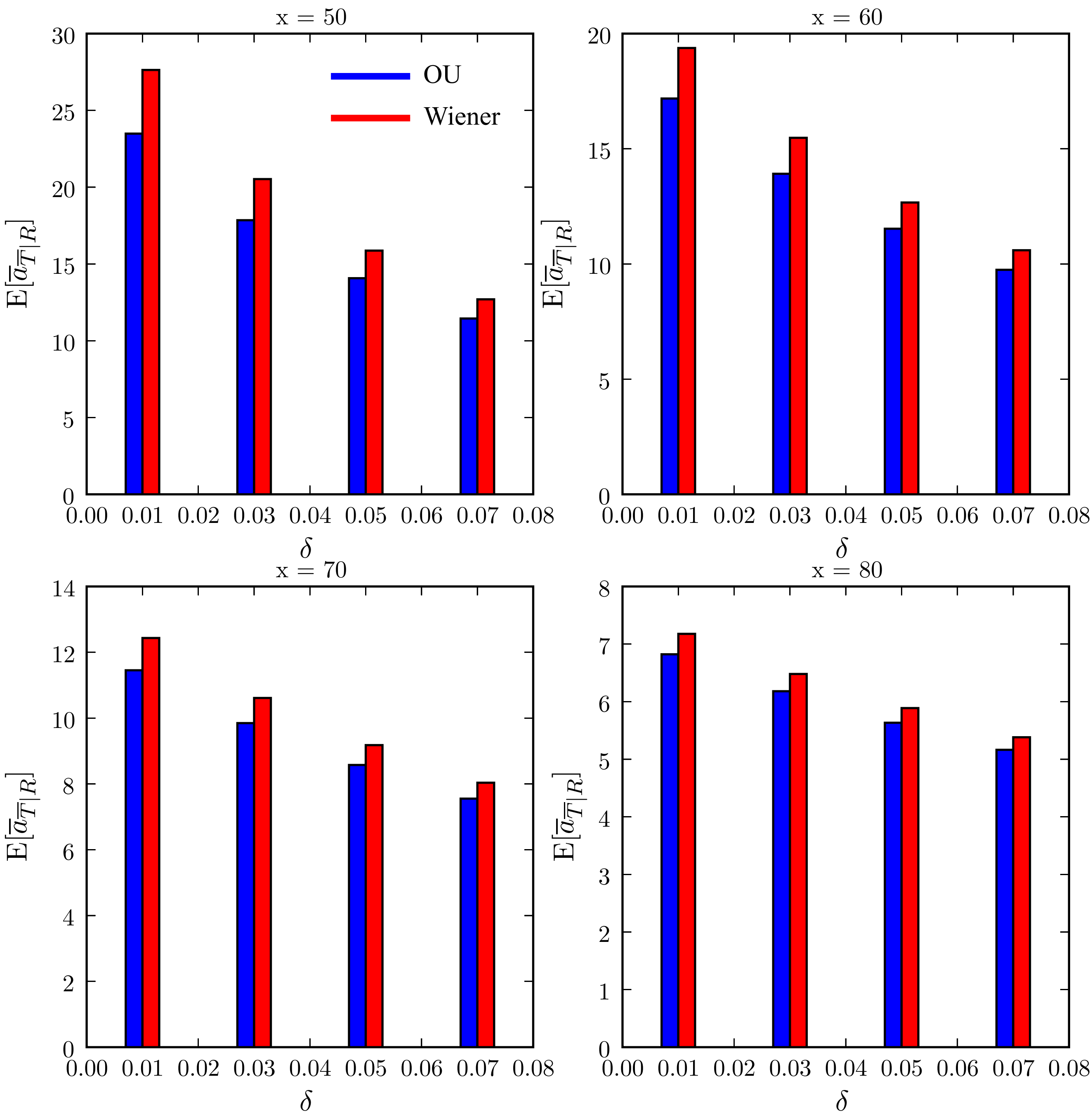
Faizin yanı sıra ölümlüğün de rasgele değişken olduğu annuitelerde de Wiener sürecini kullanmak varyansın daha büyük olmasını sağlamaktadır. Bunun sonucu olarak $\delta$ (Şekil 4.12) ve $\sigma$'nın (Şekil 4.12) arttığı durumlarda Wiener süreci ile edilen beklenen değerlerin Ornstein-Uhlenbeck süreci ile elde edilen beklenen değerlere göre daha yüksek olduğu ve dönem sayısıyla birlikte daha hızlı değişmektiği görülmektedir.



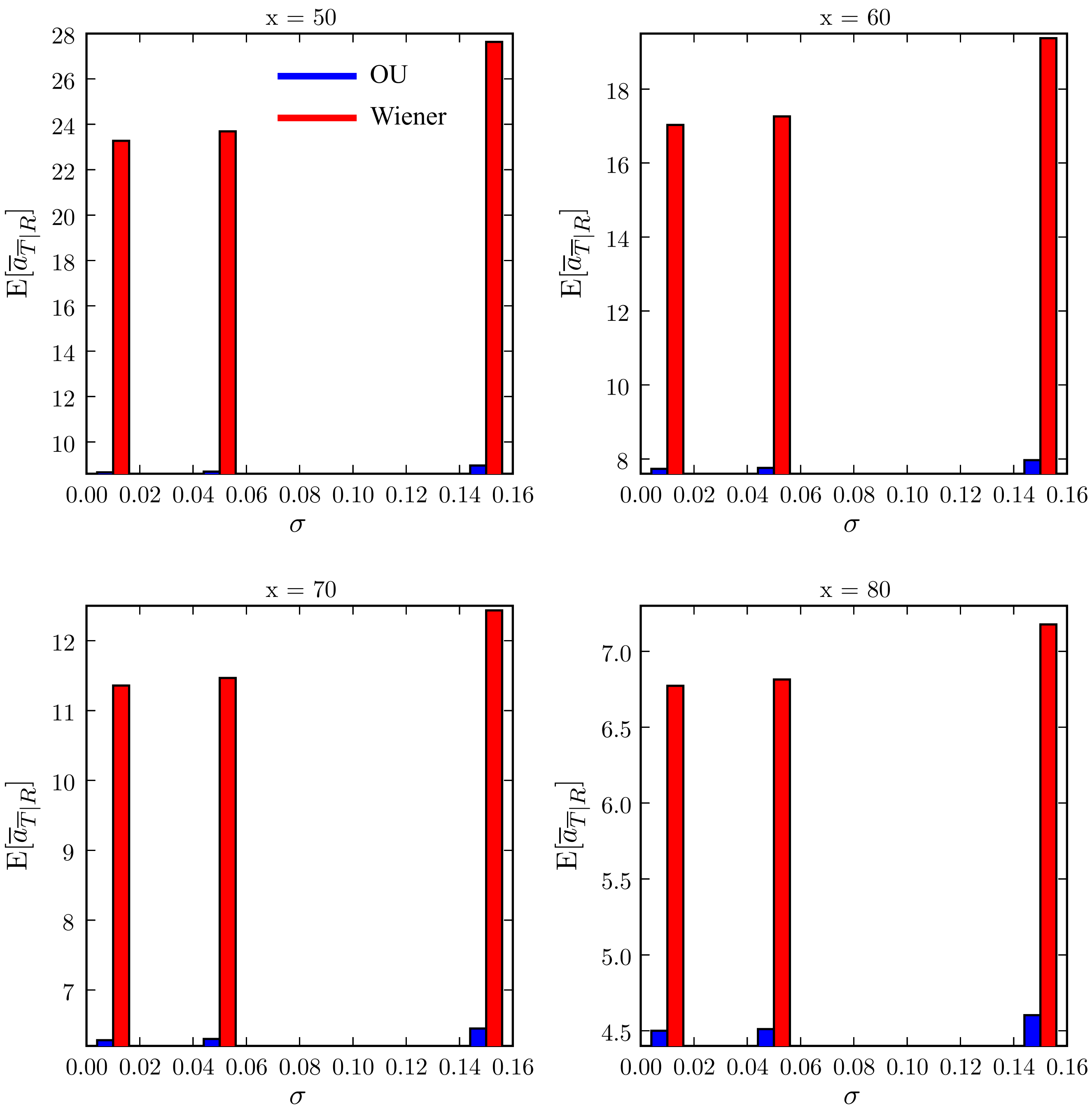

Şekil 4.10: Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener süreçleri ile elde edilen beklenen değerlerin $\sigma = 0.15$ ve $n = 5, 10, 20, 30$ için $\delta$'ya göre değişimleri.




Şekil 4.11: Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener süreçleri ile elde edilen beklenen değerlerin $\delta = 0.01$ ve $n = 5, 10, 20, 30$ için $\sigma$'ya göre değişimleri.




Şekil 4.12: Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener süreçleri ile elde edilen beklenen değerlerin $\sigma = 0.15$ ve $x = 50, 60, 70, 80$ için $\delta$'ya göre değişimleri.




Şekil 4.13: Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener süreçleri ile elde edilen beklenen değerlerin $\delta = 0.01$ ve $x = 50, 60, 70, 80$ için $\sigma$'ya göre değişimleri.

## BEŞİNCİ BÖLÜM

### 5. SONUÇ ve TARTIŞMA

Ekonomik açıdan güçlü ve istikrarlı olan ülkelerde paranın zaman içindeki değeri istikrarlı olup, faiz oranları değişmez kabul edilebilir. İstikrarlı bir ekonomik yapıya sahip olmayan ülkelerde ise, önceden tahmin edilemeyen olaylar ve koşullar faiz oranlarında beklenmeyen değişikliklere neden olabilir. Bu yüzden, özellikle uzun dönemli annuitelerde faiz oranının rasgele değişken olarak kabul edilmesi daha uygun olacaktır.

Annuitelerde meydana gelebilecek değişiklik sadece faiz oranlarıyla sınırlı değildir. Önemli bir annuite türü olan yaşam annuitelerinde ödemeler genellikle kişi hayatta kaldığı sürece yapılır. Kişinin ne kadar yaşayacağı bilinemeyeceğinden, yaşam süresini de bir raslantı değişkeni olarak almak gerçeğe uygun olacaktır.

Çalışmada, ilk olarak temel annuite kavramları açıklanmış ve annuitelerin sınıflandırmaları yapılmıştır. İkinci bölümde faizin deterministik olduğu artan ve azalan annuiteler incelenmiştir. Daha sonra faizin stokastik olması düşünülerek tek ve değişmez ödemeleri olan annuiteler ile artan ödemeli annuitelerin bugünkü ve birikimli değerleri hesaplanmıştır.

Üçüncü bölümde faizin deterministik ve stokastik olduğu durumlar için yaşam annuiteleri incelenmiş, bu annuitelerin beklenen değer ve varyansları hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde faiz ve ölümlülükte rasgeleliği sağlamak için kullanılan stokastik süreçler üzerinde durulmuştur. Bunların arasından sıkça kullanılan Ornstein-Uhlenbeck ve Wiener süreçleri açıklanarak, annuitelerin beklenen değer ve varyanslarının hesaplanmasında bu süreçler kullanılmıştır. Beklenen değer ve varyans gerçek hayata uygun örnek parametre değerleri ile hesaplanmış, bu sonuçlar tablo ve şekillerle gösterilmiştir. Oluşturulan tablo ve şekiller yorumlanmış, bu iki sürecin birbiri ile karşılaştırılması yapılmıştır.

Sonuç olarak, annuite hesaplamalarında faizin raslantı değişkeni olmasının yatırımcının aldığı riski ve bu riski karşılamak için karşı taraftan alması için gerekli olan miktarı daha gerçekçi olarak bulmada etkili olduğu söylenebilir.

## KAYNAKLAR

Beekman, J. A. and Fuelling, C. P., 1991, Extra randomness in certain annuity models. *Insurance: Mathematics and Economics 10*, 275–287.

Beekman, J. A. and Fuelling, C. P., 1990, Interest and mortality randomness in some annuities. *Insurance: Mathematics and Economics 9*, 185–196.

Beekman, J. A. and Shiu, E. S. W., 1988, Stochastic models for bond prices, function space integrals and immunization theory. *Insurance: Mathematics and Economics 7*, 163–173.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., and Nesbitt, C. J., 1986, *Actuarial Mathematics*. Schaumburg, IL: Society of Actuaries.

Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., and Nesbitt, C. J., 1997, *Actuarial Mathematics* (2. ed.). The Society of Actuaries.

Boyle, P. P., 1976, Rates of return as random variables. *Journal of Risk and Insurance 43*, 693–713.

Feller, W., 1971, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* (2 ed.). New York: Wiley.

Finch, S., 2004, Ornstein-uhlenbeck process. Unpublished note (2004).

Gerber, H. U., 1997, *Life Insurance Mathematics*. Berlin: Springer.

Giacotto, C., 1986, Stochastic modelling of interest rates: Actuarial vs equilibrium approach. *Journal of Risk and Insurance 53*, 435–453.

Hickman, J. C., 1985, Why not random interest? *The Actuary 19*(2).

Hog, E. P. and Frederiksen, P. H., 2006, The fractional ornstein-uhlenbeck process: Term structure theory and application. Technical Report 06-1, Aarhus School of Business, Department of Business Studies.

Hogg, R. and Craig, A., 1978, *Introduction to Mathematical Statistics* (4th. ed.). New York: Macmillan.

Jetton, M. F., 1988, Interest rate scenarios. *Transactions of the Society of Actuaries 40*, 423–437.

Kellison, S. G., 1991, *The Theory of Interest*. Irwin.

Mikosch, T., 1999, *Elementary Stochastic Calculus With Finance in View*. World Scientific Publishing Company.

Panjer, H. H. and Bellhouse, D. R., 1980, Stochastic modelling of interest rates with application to life contingencies. *Journal of Risk and Insurance 47*, 91–110.

Pollard, J. H., 1976, Premium loadings for non-participating business. *Journal of the Institute of Actuaries 103*, 205–212.

Schoutens, W., 2003, *Lévy Processes in Finance*. Chicester: John Wiley and Sons.

Wilkie, A. D., 1981, Indexing long-term financial contracts. *Journal of the Institute of Actuaries 108*, 299–341.

Zaks, A., 2001, Annuities under random rates of interest. *Insurance: Mathematic and Economics 28*, 1–11.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı Soyadı** : Didem Çam

**Doğum Yeri** : Ankara

**Doğum Yılı** : 1981

**Medeni Hali** : Bekar

**Eğitim ve Akademik Durumu :**

Lise 1995 - 1999 Ayrancı Süper Lisesi, Ankara

Lisans 1999 - 2003 Ankara Ünv. Matematik Bölümü

**Yabancı Dil :** İngilizce

**İş Tecrübesi :**

2004 - 2005 Jale Tezer Dersanesi Matematik Öğretmeni

2005 - . . . MEV Özel Köksal Toptan Lisesi Matematik Öğretmeni