TABAKALI RASGELE ÖRNEKLEMEDE YARDIMCI DEĞİŞKEN BİLGİSİ KULLANILARAK KİTLE ORTALAMASI VE VARYANSININ TAHMİN EDİLMESİ

ESTIMATION OF POPULATION MEAN AND VARIANCE USING AUXILIARY INFORMATION IN STRATIFIED RANDOM SAMPLING

NURSEL KOYUNCU

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2007

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:……................................... **Yrd. Doç. Dr. Yaprak Arzu ÖZDEMİR**
Üye (Danışman)	:……................................... **Doç. Dr. Cem KADILAR**
Üye	:……................................... **Prof. Dr. Hülya ÇINGI**

ONAY

Bu tez ...../...../..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Erdem YAZGAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

TABAKALI RASGELE ÖRNEKLEMEDE YARDIMCI DEĞİŞKEN BİLGİSİ KULLANILARAK KİTLE ORTALAMASI VE VARYANSININ TAHMİN EDİLMESİ

Nursel Koyuncu

Öz

Bu çalışmada, tabakalı rasgele örnekleme yönteminde, kitle ortalaması ve varyansının tahmini için kullanılan çeşitli tahmin ediciler incelenmiştir. Aynı zamanda bu tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalamaları çıkarsanmıştır. Tahmin ediciler birbirleriyle karşılaştırılmış ve hangi koşullar altında hangi tahmin edicilerin etkin oldukları araştırılmıştır.

Sayısal örnekte Türkiye'de bulunan 923 ilçedeki ilk ve ortaöğretimde okuyan öğrenci sayısı yardımcı değişken, öğretmen sayısı ilgilenilen değişken olarak alınmış ve tahmin ediciler için yan ve hata kareler ortalaması hesaplanmıştır.

Çalışmanın son bölümünde ise, sayısal örneklerde elde edilen sonuçlara bağlı olarak tahmin edicilerin etkinlikleri ile ilgili tartışma ve yorumlar yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Tabakalı rasgele örnekleme, ortalama, varyans, oransal tahmin edici, çarpımsal tahmin edici, yardımcı bilgi, etkinlik, yan, hata kareler ortalaması.

Danışman: Doç. Dr. Cem Kadılar, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü.

ESTIMATION OF POPULATION MEAN AND VARIANCE USING AUXILIARY INFORMATION IN STRATIFIED RANDOM SAMPLING

Nursel Koyuncu

ABSTRACT

In this study, various estimators, which are used for mean and variance estimations in stratified random sampling, are studied. Also bias and mean square error of these estimators are calculated. Estimators are compared with each other and the efficient conditions for these estimators are investigated.

In the numerical example, number of student and number of teachers in primary and secondary schools for 923 districts in Turkey are taken as auxiliary and study variables, respectively . Bias and mean square error are calculated for these estimators.

In the last section of the study, discussions and interpretations are given related to mean square error and efficiencies of the estimators based on the results are obtained from numerical example.

KEY WORDS: Stratified random sampling, mean, variance, ratio estimator, product estimator, auxiliary information, efficiency, bias, mean square error.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Cem Kadılar, Hacettepe University, Department of Statistics.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında değerli katkı ve eleştirileriyle bana yol gösteren danışmanım Sayın Doç. Dr. Cem KADILAR'a, önemli yorum ve değerlendirmeleri ile bana katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Hülya ÇINGI'ya, gerekli çalışma ortamını hazırlayan Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Süleyman GÜNAY'a, yardımlarını esirgemeyen Uzman Kemal BİRİNCİ'ye, manevi desteklerini esirgemeyen çalışma arkadaşlarıma, her zaman yanımda olarak bana destek olan AİLEM'e, bilimsel eğitime verdiği destekten dolayı TÜBİTAK'a içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

N:Kitle büyüklüğü

n:Örneklem büyüklüğü

L:Kitle tabaka sayısı (h=1,…,L)

N_h :h. tabakanın kitle büyüklüğü ($\sum_{h=1}^{L} N_h = N$)

n_h : h. tabakanın örneklem büyüklüğü ($\sum_{h=1}^{L} n_h = n$)

$W_h = \dfrac{N_h}{N}$:h. tabakanın ağırlığı

$f_h = \dfrac{n_h}{N_h}$:h. tabakanın örneklem oranı

$\lambda_h = \dfrac{1-f_h}{n_h} = \left(\dfrac{1}{n_h} - \dfrac{1}{N_h}\right)$:h.tabaka için düzeltme terimi

Y_{hi} :Kitledeki h. tabakanın i. biriminin ölçülebilen değeri (i=1,…, N_h)

y_{hi} :Seçilen örneklemdeki h. tabakanın i. biriminin ölçülebilen değeri (i=1,…, n_h)

$\overline{y}_h = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_h} y_{hi}}{n_h}$: y değişkeni için h. tabaka örneklem ortalaması

$\overline{x}_h = \dfrac{\sum_{i=1}^{n_h} x_{hi}}{n_h}$: x değişkeni için h. tabaka örneklem ortalaması

$\overline{Y} = \overline{Y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h$:Tabakalı örneklemede y değişkeni için kitle ortalaması

$\overline{X} = \overline{X}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{X}_h$:Tabakalı örneklemede x değişkeni için kitle ortalaması

$$\overline{Y}_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} Y_{hi}}{N_h}$$:y değişkeni için h. tabaka kitle ortalaması

$$\overline{X}_h = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}}{N_h}$$: x değişkeni için h. tabaka kitle ortalaması

$$S_{yh}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} \left(Y_{hi} - \overline{Y}_h\right)^2}{\left(N_h - 1\right)}$$: y değişkeni için h. tabakada birim başına düşen kitle varyansı

$$s_{yh}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} \left(y_{hi} - \overline{y}_h\right)^2}{\left(n_h - 1\right)}$$: y değişkeni için h. tabakada birim başına düşen örneklem varyansı

$$S_{xh}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} \left(X_{hi} - \overline{X}_h\right)^2}{\left(N_h - 1\right)}$$: x değişkeni için h. tabakada birim başına düşen kitle varyansı

$$s_{xh}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} \left(x_{hi} - \overline{x}_h\right)^2}{\left(n_h - 1\right)}$$: x değişkeni için h. tabakada birim başına düşen örneklem varyansı

$$S_{yxh} = \frac{\sum_{i=1}^{N_h} \left(Y_{hi} - \overline{Y}_h\right)\left(X_{hi} - \overline{X}_h\right)}{\left(N_h - 1\right)}$$: h. tabakada birim başına düşen kitle kovaryansı

$$s_{yxh} = \frac{\sum_{i=1}^{n_h} \left(y_{hi} - \overline{y}_h\right)\left(x_{hi} - \overline{x}_h\right)}{\left(n_h - 1\right)}$$: h. tabakada birim başına düşen örneklem kovaryansı

$$R_{US1} = \frac{\overline{Y}}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}$$

$$R_{US2} = \frac{\overline{Y}}{\left(\overline{X}C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}}$$

$\bar{y}_{st}$:	Klasik tabakalı tahmin edicisi
$\bar{y}_{RC}$:	Bileşik oransal tahmin edici
$\bar{y}_{PC}$:	Bileşik çarpımsal tahmin edici
$\bar{y}_{lrc}$:	Bileşik regresyon tahmin edicisi
$\bar{y}_{Rs}$:	Oransal ayrı tahmin edici
$\bar{y}_{Ps}$:	Çarpımsal ayrı tahmin edici
$\bar{y}_{lrs}$:	Ayrı regresyon tahmin edici
d_{α} :	Kaur tahmin edicisi I
$d_{(s)}$:	Kaur tahmin edicisi II
d:	Kaur tahmin edicisi III
$\bar{y}_{st(SD)}$:	Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi I
$\bar{y}_{st(SK)}$:	Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi II
$\bar{y}_{st(US1)}$:	Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi III
$\bar{y}_{st(US2)}$:	Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi IV
$\bar{y}^{*}_{st(SD)}$:	Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I
$\bar{y}^{*}_{st(US1)}$:	Shabbir ve Gupta tahmin edicisi III
$\bar{y}^{*}_{st(US2)}$:	Shabbir ve Gupta tahmin edicisi IV
$\bar{y}^{*}_{st(SK)}$:	Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II
$\bar{y}_{R(\alpha_{st})}$:	Singh ve Diğerleri tahmin edicisi I
$\bar{y}_{R(\delta_{st})}$:	Singh ve Diğerleri tahmin edicisi II
$\bar{y}_{ms}$:	Singh ve Vishwakarma tahmin edicisi I
$\bar{y}_{stp}$:	Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi V
$\bar{y}_{M}$:	Shabbir ve Gupta tahmin edicisi V
$\bar{y}_{mc}$:	Singh ve Vishwakarma tahmin edicisi II
$\bar{y}^{*}_{RS}$:	Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicisi I
$\bar{y}^{*}_{c}$:	Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicisi II
$\bar{y}_{RS}$:	Singh ve Singh'ın tahmin edicisi
$\bar{y}_{RW(st)}$:	Diana tahmin edicisi I
$\bar{y}_{Gu(st)}$:	Diana tahmin edicisi II
$\bar{y}_{RS(st)}$:	Diana tahmin edicisi III
$\bar{y}_{SR(st)}$:	Diana tahmin edicisi IV
$\bar{y}_{TR(st)}$:	Diana tahmin edicisi V
$\bar{y}_{sr(st)}$:	Diana tahmin edicisi VI
$\bar{y}_{sp(st)}$:	Diana tahmin edicisi VII
$\bar{y}_{rp(st)}$:	Diana tahmin edicisi VIII
$\bar{y}_{MS(st)}$:	Diana tahmin edicisi IX
$\bar{y}_{SM(st)}$:	Diana tahmin edicisi X

$s^2_{st,y}$: Klasik tabakalı varyans tahmin edicisi

s^2_{rc} : Bileşik oransal tahmin edici

s^2_{repr1} : Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi I

s^2_{repr2} : Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi II

s^2_{repr3} : Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi III

s^2_{repr4} : Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi IV

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Örneklem, aynı özelliğe sahip birimler topluluğu olan kitleden, belli kurallara göre seçilmiş ve seçildiği kitleyi temsil edebilen birimler topluluğudur. Araştırmalar, çoğunlukla örneklemler üzerinden yapılır ve örneklemden kitle parametreleri tahmin edilir.

Örneklem üzerinden çalışmak, araştırmacıya zaman, iş gücü ve para tasarrufu sağlar. Kitle üzerinde çalışmanın bir güçlüğü de, araştırma için gerekli kontrollerin sağlanmasındaki engellerin artmasıdır. Örneklemler üzerinde denetim kurmak daha kolaydır. Araştırmada amaç, çok veri toplamak değil, sağlam, geçerli güvenilir veriler toplamaktır. Bu nedenlerle araştırmacı, kitle yerine, örneklem üzerinde çalışmayı tercih eder.

Çoğu durumda, uygun seçilmiş küçük bir örneklem üzerinde yapılan çalışma, kötü seçilmiş büyük bir örneklemde yapılandan daha iyi sonuçlar verir. Ancak, her çalışmanın mutlaka örneklem üzerinde yapılması zorunluluğu da yoktur. Hakkında bilgi edinilmek istenen kitle, yukarıda belirtilen nedenler açısından bir sakınca yoksa, tümü ile de incelenebilir.

Örnekleme kuramı, sonlu N sayıda kitle birimi içeren kitlelerden, n büyüklüğünde rasgele örneklemler seçme ve seçilen örneklemlerden tahminler yapma yöntemlerini inceler. Bir başka deyişle, örnekleme kuramı konusu, kitleden, kitlenin yapısına en uygun örnekleme yöntemiyle, örneklem seçme süreci ve örneklemden kitlenin özelliklerinin tahmin edilmesi sürecidir. Seçim sürecinde kullanılan yönteme göre kitle parametreleri tahmin edilir.

Kitleden örneklemlerin seçildiği en temel örnekleme yöntemi, basit rasgele örnekleme yöntemidir. Bu yöntemde, sonlu büyüklükteki bir kitleden seçilebilecek tüm mümkün örneklemlere, dolayısıyla her bir örneklem birimine, eşit seçilme şansı verilerek ve seçilen örneklem birimi yerine konulmaksızın ya da konularak n büyüklüğünde örneklem seçilir. Bu örneklem ile parametre tahminleri yapılır.

Sonlu kitleden seçilen örneklemden yararlanarak, kitlenin özelliklerini tahmin etmek amacıyla tanımlanan matematiksel eşitliklere tahmin edici denir. Örneklemlerden elde edilen tahmin edicilerin tutarlılık (consistency), yansızlık (unbiased) ve etkinlik (efficiency) özelliklerini sağlamaları gerekmektedir.

Örneklem büyüklüğü, verilen bir sayıdan daha büyük alındığında tahmin ile parametre arasındaki farkın düşünülebilen en küçük pozitif bir sayıdan (ε) daha küçük kalma olasılığı 1 ise, o tahmine tutarlı tahmin denir. Matematiksel olarak, θ parametresinin $\hat{\theta}$ tahmini için tutarlılık,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\hat{\theta}-\theta\right| < \varepsilon\right) = 1 \tag{1.1}$$

şeklinde gösterilebilir. Sonlu kitle birimi içeren kitleden yapılacak tahminlerde, eğer, örneklem büyüklüğü kitle büyüklüğüne eşit olduğunda tahmin edicinin değeri parametre değerine eşitse, o tahmin tutarlıdır.

Yansızlık özelliği ise, bir tahmin edicinin beklenen değerinin, kitle parametresine eşit olmasıdır. Tahmin edicinin beklenen değeri ile parametre değeri arasındaki farka yan adı verilir. Yan,

$$\text{Yan}\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\hat{\theta}\right) - \theta \tag{1.2}$$

olarak gösterilebilir. Yanlı tahminlerden, yanı küçük olanın seçilmesi gerekir.

Bir tahmin edici ile parametre değeri arasındaki farkın karesinin beklenen değeri ise hata kareler ortalaması olarak adlandırılır ve,

$$\text{HKO}\left(\hat{\theta}\right) = E\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2 \tag{1.3}$$

şeklinde gösterilir. Bu ifade cebirsel olarak aşağıdaki şekilde incelenebilir:

$$
\begin{aligned}
HKO(\hat{\theta}) &= E(\hat{\theta}-\theta)^2 \\
&= E\left[\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)+\left(E(\hat{\theta})-\theta\right)\right]^2 \\
&= E\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)^2+\left(E(\hat{\theta})-\theta\right)^2+2E\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)\left(E(\hat{\theta})-\theta\right) \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

$E\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)=0$ olduğu için Eşitlik(1.4),

$$
\begin{aligned}
HKO(\hat{\theta}) &= E\left(\hat{\theta}-E(\hat{\theta})\right)^2+\left(E(\hat{\theta})-\theta\right)^2 \\
&= V(\hat{\theta})+\left(Yan(\hat{\theta})\right)^2 \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Bu nedenle, yansız olan tahmin ediciler için, hata kareler ortalaması ile varyans aynı anlama gelmektedir. Yanlı bir tahmin edici, yansız olandan, varyans ve yanın büyüklüğüne bağlı olarak daha iyi olabilir.

Hata kareler ortalamasının küçük olması, yani etkinlik, bir tahmin edici için istenen özelliklerdendir. Tahmin edicinin varyansının tersi ise, duyarlılık (precision) olarak adlandırılır. Bu durumda, bir tahmin edici ne kadar küçük varyanslı, yani duyarlı ise, tahmin edici o derece etkindir. $\hat{\theta}_1$ ve $\hat{\theta}_2$ gibi iki tahmin edici için, $\hat{\theta}_1$'in $\hat{\theta}_2$'ye göreli etkinliği ise,

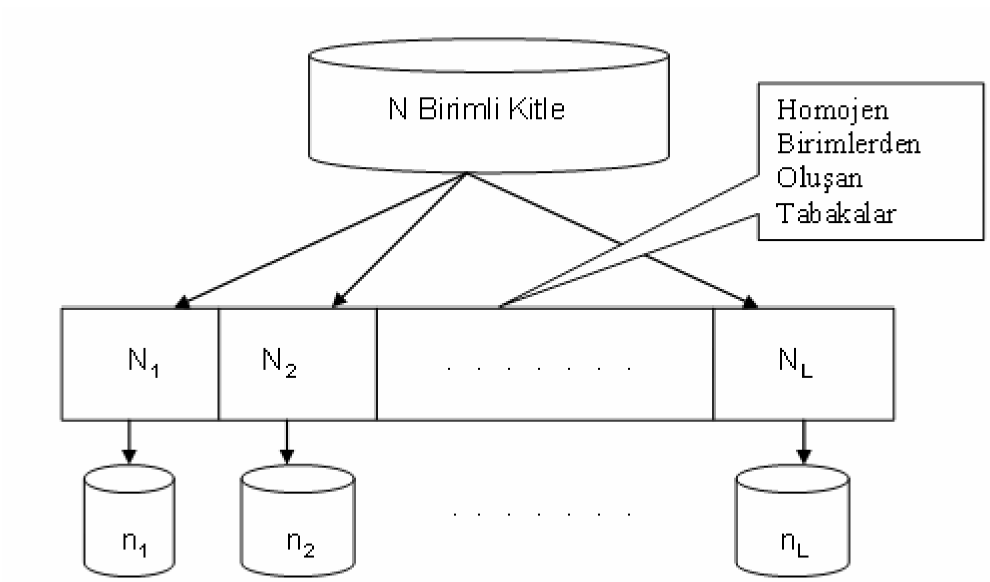
$$
GE = \frac{HKO(\hat{\theta}_1)}{HKO(\hat{\theta}_2)} \qquad (1.6)
$$

şeklinde gösterilebilir.

Örneklem araştırmalarında, sonlu kitleler için toplam, ortalama ve varyans tahminlerinde, tahmin edicilerin duyarlılıklarını, etkinliklerini artırmak için yardımcı bilginin kullanımı çok yaygındır. Yardımcı bilgi, oransal, çarpımsal, regresyon ve fark tahmin edicilerinde kolaylık ve duyarlılık nedeniyle kullanılmaktadır. Bu tahmin ediciler, yardımcı değişken ile ilgilenilen değişken arasındaki korelasyon açısından avantaj sağlamakta ve bazı koşullar altında basit ortalamaya dayanan tahmin edicilere göre daha küçük hata kareler ortalamasına sahip, yani daha etkin tahminler vermektedir.

Oransal tahmin edici, iki değişken arasındaki korelasyon katsayısı pozitif olduğu zaman, yardımcı değişkenin yardımıyla sonlu kitlenin toplamı, kitle ortalaması ve kitle varyansının tahmininde en yaygın olarak kullanılan tahmin edicilerdendir. İki değişken arasındaki korelasyon katsayısı negatif olduğu zaman ise, çarpımsal tahmin edici kullanılır. Bu tahmin edicilerin bazı koşullar altında basit rasgele örneklemenin, örneklem ortalamasına dayanan klasik tahmin ediciden daha küçük hata kareler ortalamasına sahip olduğu bilinmektedir (Karakülah, 2006).

Kitle, herbir kitle birimi bir ve yalnız bir tabakaya ait olacak ve hiçbir kitle birimi açıkta kalmayacak, Şekil 1.1'de gösterildiği gibi tabaka içi değişim olabildiğince küçük, tabakalar arası değişim oldukça büyük kalacak şekilde alt gruplara bölünüp örneklemin herbir tabakadan ayrı ve birbirinden bağımsız olarak çekildiği örnekleme yöntemine tabakalı örnekleme adı verilir.



Şekil. 1.1.Tabakalı Örnekleme

Tabakalı rasgele örneklemede N büyüklüğündeki kitle $N_1, N_2, ..., N_L$ büyüklüklerinde birbiriyle kesişmeyen ve tüm kitleyi oluşturan alt kitlelerden oluşur. Bu alt kitlelerin herbirine tabaka adı verilir.

Tabakalı örneklemede herbir tabaka kitle olarak düşünülebilir. Bu nedenle herbir tabakaya farklı örnekleme yöntemleri uygulanabilir. Herbir tabakaya basit rasgele örnekleme yönteminin uygulandığı tabakalı örneklemeye tabakalı rasgele örnekleme adı verilmektedir (Çıngı, 1994).

Kitle parametrelerinin duyarlılığı örneklem sayısının yanısıra kitle birimleri arasındaki değişime de bağlıdır. Bu nedenle duyarlılığı artırmak için örneklem sayısını artırmaktan başka, kitle grup içi değişimin minimum gruplar arası değişimin maksimum olduğu alt gruplara ayrılabilir. Duyarlılığı artırmak için dikkat edilmesi gereken diğer noktalar:

1. Tabakadan örneklem seçmek için uygulanan yöntem,
2. Tabaka sayısı,
3. Tabakalardan seçilecek örneklem büyüklüğüdür. (Singh ve Mangat, 1996).

Yukarıda tanımlanan tabakaların oluşturulmasına gereksinim duyulmasının birçok nedeni vardır. Bunlardan biri, tabakalamanın örneklem tahminlerinin varyanslarının azaltılması amacıyla kullanılmasıdır. Burada kitle varyansı büyükken, tabaka içi varyans daha küçük olacaktır. Dolayısıyla, uygun bir tabakalama ile yapılan tahminlerin duyarlılığında önemli bir kazanç sağlanacaktır.

Tabaka oluşturmaya gereksinim duyulmasının bir başka nedeni de, kitleye ait parametreler için yapılan tahminlerin aynı zamanda her tabaka için de yapılmak istenmesidir (Öztoprak, 1997).

Tabakalı örnekleme ayrı bir örnekleme yöntemi değil, bilinen yöntemlerin alt kitlelere ya da tabakalara uygulanmasıdır. Bu nedenle tabakalara hangi örnekleme yöntemi uygulanıyorsa, o yönteme göre çekim yapılabilir. Herbir tabakaya farklı bir örnekleme yöntemi uygulanabilmesi yönteme ayrıcalık kazandırmaktadır.

Tabakalı örneklemenin avantajları;

1. Kitle ilk olarak farklı tabakalara ayrıldığı ve herbir tabakadan örneklem çekildiği için, kitlede bulunan tüm gruplardan birimler alınmaktadır. Bu nedenle diğer yöntemlere göre kitleyi daha iyi temsil eden örnekleme ulaşılabilmektedir.
2. Tabakalı örnekleme tabakalara farklı örnekleme yöntemleri uygulama olanağı sağladığından, yardımcı değişken bilgisinin kullanımı daha etkin olabilmektedir. Bu durum tabakalardan elde edilebilen yardımcı değişken bilgisi değiştiğinde geçerli olmaktadır. Tabakalardan elde edilen ayrı tahminler birleşerek tüm kitle için daha duyarlı sonuçlar elde edilebilmektedir.
3. Anket araştırmaları farklı bölgelerde yapılıyor olabilir. Bu durumda, anket çalışmasının yönetimini kolaylaştırmak amacıyla bölgeler tabaka olarak düşünülebilir.
4. Kitle uç değerler içeriyorsa, bu değerlerden diğer tabakalardaki değişimi azaltmak için ayrı bir tabaka oluşturulabilir.
5. Tabaka içi değişim daha az düzeye indirildiğinden daha etkin tahminler yapılabilmektedir.
6. Tabakalı örnekleme de tabakalara uygun araştırma yöntemi uygulandığında maliyet en aza indirilebilmektedir (Singh ve Mangat, 1996).

Örneklem teorisini genel istatistik teorisinden ayıran etkenlerden birisi tahmin edicilerin duyarlılığını artırmak için yardımcı değişken bilgisinin kullanılabilmesidir. Yardımcı değişken bilgisi tahmin aşamasında kullanıldığında ilgilenilen değişken y'nin ortalama ve toplamının tahmin edilmesinde oransal yöntemlerin kullanılması oldukça pratiktir. Oransal tahmin edicilerin tercih edilmesinin sebebi ilgilenilen değişken y ile yardımcı değişken x arasındaki korelasyon bilgisinin kullanılmasıdır. Buna ek olarak x ile y arasındaki ilişki bir doğru ile gösterilebiliyorsa bu tahmin ediciler regresyon tahmin edicileri kadar iyi sonuç vermektedir. Birçok durumda bu ilişki doğrusal olarak yazılamaz ve bu nedenle oransal tahmin edicileri etkinleştirmek için birçok istatistikçi oransal tahmin ediciler önermişlerdir (Diana, 1992).

Tabakalı rasgele örneklemede kitle ortalamasının tahmini için oransal tahmin edici ilk olarak Hansen, Hurwitz ve Gurney (1946) tarafından önerilmiştir.

Yan ve Ma (2001) ilgilenilen değişken ile yardımcı değişken arasında negatif korelasyon olması durumunda çarpımsal tahmin ediciler önermişlerdir.

Kaur (1985) da çarpımsal tahmin ediciye güç fonksiyonu uygulamış ve yeni tahmin ediciler önermiştir.

Sisodia ve Dwivedi (1981) yardımcı değişkenin değişim katsayısını, Singh ve Kakran (1993) basıklık katsayısını, Upadhyaya ve Singh (1999) değişim ve basıklık katsayılarının her ikisini de kullanarak basit rasgele örneklemede oransal tahmin ediciler önermişlerdir. Kadılar ve Çıngı (2003) önerilen bu tahmin edicileri tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak kitle ortalaması için, Kadılar ve Çıngı (2006) çalışmasında da varyans tahmini için yeni tahmin ediciler önermişlerdir.

Shabbir ve Gupta (2005), Kadılar ve Çıngı (2003) tarafından önerilen tahmin edicileri ve klasik ortalama tahminini ağırlıklandırarak yeni tahmin ediciler önermişlerdir.

Kadılar ve Çıngı (2005), Prasad (1989)'ın basit rasgele örnekleme için önerdiği tahmin ediciyi tabakalı örneklemeye uyarlamışlardır.

Shabbir ve Gupta (2006), Bedi (1996)'nin kitle ortalaması için önerdiği tahmin ediciyi Kadılar ve Çıngı (2004;2005) çalışmalarındaki tahmin edicilerle birleştirerek tabakalı rasgele örnekleme için yeni bir tahmin edici önermişlerdir.

Singh ve diğerleri (2007), Kadılar ve Çıngı (2003) tarafından önerilen tahmin edicilere güç dönüşümü uygulayarak ortalama için yeni tahmin ediciler önermişlerdir.

Singh ve Vishwakarma (2006), Sahai (1979)'nin önerdiği tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak tabakalı rasgele örneklemede yeni tahmin ediciler önermişlerdir.

Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey (1990), basit rasgele örneklemede yerine koymadan örneklem çekilmesi durumunda Srivenkataramana (1980)'nın klasik çarpımsal tahmin ediciye alternatif olarak önerdiği tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak yeni bir tahmin edici önermişlerdir.

Singh ve Singh (1995) da Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey (1990)'in tahmin edicisini ve kendi önerdiklerini ağırlıklandırarak yeni tahmin ediciler önermişlerdir.

Srivastava (1967), Walsh (1970), Reddy (1973,1974), Gupta(1978), Chakrabarty (1979), Ray ve Sahai (1979), Sahai (1979), Sahai ve Ray (1980), Tripathi (1980), Vos (1980), Adhvaryu ve Gupta (1983), Mohanty ve Sahoo (1987) oransal tahminler için yeni stratejiler geliştirmişlerdir. Diana (1992) da Ceccon, Diana ve Salvan (1991)'ın önerdiği tahmin edicinin asimptotik özelliklerini çalışmıştır. Bu tahmin edici yukarıda bahsedilen Sahai (1979) dışında kalan diğer tüm tahmin edicileri içermektedir ve aynı zamanda yeni tahmin ediciler de elde edilebilmektedir. Bu tahmin edici Diana (1993) tarafından tabakalı rasgele örneklemeye uyarlanmıştır. Bu tahmin ediciye çeşitli parametre değerleri verilerek tabakalı rasgele örneklemede yeni tahmin ediciler türetilebilmektedir.

İKİNCİ BÖLÜM

2. TABAKALI RASGELE ÖRNEKLEME YÖNTEMİNDE ORANSAL VE ÇARPIMSAL TAHMİN EDİCİLER

Tabakalı örneklemede herbir tabaka ayrı bir kitle olarak düşünülebildiğinden bu tabakalardan basit rasgele örnekleme ile örneklem çekilebilir. Bu durumda örneklem birimlerine ilişkin x_{hi}, y_{hi} ölçümlerinin elde edilebildiği, x_{hi}/y_{hi} oran değişiminin küçük olduğu ve değişkenler arasındaki ilişkinin başlangıç noktasından geçen bir doğru ile gösterilebildiği durumda kitle ortalaması ve toplamı oransal yolla tahmin edilebilir. Böylece tabakalı rasgele örneklemede daha duyarlı tahminler elde edilebilmektedir.

Tabakalı örneklemede tahminler ayrı ve bileşik olarak iki şekilde yapılabilmektedir (Çıngı,1994).

2.1. Tabakalı Rasgele Örneklemede Ortalama Tahmin Edicileri

2.1.1. Bileşik Oransal Tahmin Edici

N büyüklüğündeki bir kitle, h (h=1,2,…,L) tabaka sayısı olmak üzere N_h büyüklüğündeki tabakalara ayrılmış olsun. Herbir tabakadan basit rasgele örnekleme ile yerine koymadan n_h büyüklüğünde örneklemler seçilsin. y_{hi} ve x_{hi} sırasıyla h. tabaka için ilgilenilen değişken ile yardımcı değişkenin gözlemlenen değerlerini göstersin. x ve y değişkeni arasındaki ilişki pozitif olduğunda Hansen, Hurwitz ve Gurney (1946) tarafından önerilen bileşik oransal tahmin edici,

$$\bar{y}_{RC} = \left(\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right)\bar{X} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada $\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h$ ve $\bar{x}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h$ sırasıyla ilgilenilen değişken ile yardımcı değişkenin tabakalı örneklemede ortalama tahmin edicileridir. Bu tahmin edicinin yanı ve hata kareler ortalaması Fark Yöntemiyle aşağıdaki gibi bulunabilir:

$$e_0 = \frac{\bar{y}_{st} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \Rightarrow \bar{y}_{st} = \bar{Y}(1 + e_0) \tag{2.2}$$

$$e_1 = \frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}} \Rightarrow \bar{x}_{st} = \bar{X}(1 + e_1) \tag{2.3}$$

olarak tanımlandığında oransal tahmin edici e'li terimler cinsinden,

$$\begin{aligned} \bar{y}_{RC} &= \left(\frac{\bar{Y}(1+e_0)}{\bar{X}(1+e_1)}\right)\bar{X} \\ &= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)^{-1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

şeklinde yazılabilir (Çıngı, 2005). Örneklem büyüklüğü n, yeterince büyük olarak seçildiğinde $\left|\frac{\bar{x}_{st} - \bar{X}}{\bar{X}}\right| < 1$ ve $\left|\frac{\bar{y}_{st} - \bar{Y}}{\bar{Y}}\right| < 1$ varsayımı yapılabilir. $|e_1| < 1$ olduğundan $(1+e_1)^{-1}$ terimi aşağıda özellikleri verilen MacLaurin Serisi kullanılarak açılabilir.

$f(x)$ fonksiyonu sürekli ve her dereceden türevli olsun. Bu durumda, $f(x)$'in x=a noktasındaki Taylor serisi açılımı,

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

şeklindedir. Eğer, a=0 ise,

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \ldots \tag{2.5}$$

olarak gösterilen bu seri, MacLaurin Serisi adını almaktadır (Adams,1999).

Bu durumda

$$(1+e_1)^{-1} = 1 - e_1 + e_1^2 - e_1^3 + ... \qquad (2.6)$$

olur. Bu eşitlikte 2. dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$(1+e_1)^{-1} \cong 1 - e_1 + e_1^2 \qquad (2.7)$$

elde edilir. Eşitlik (2.7), Eşitlik (2.4)'de yerine koyulduğunda

$$\bar{y}_{RC} \cong \bar{Y}(1+e_0)(1-e_1+e_1^2) \qquad (2.8)$$

eşitliğine ulaşılır. Eşitlik (2.8)'deki çarpımlar yapılıp 2. dereceden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$\bar{y}_{RC} \cong \bar{Y}(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1)$$
$$\bar{y}_{RC} - \bar{Y} = \bar{Y}(-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1) \qquad (2.9)$$

olarak bulunur. Buradan $\bar{y}_{RC}$ tahmin edicisinin yanı,

$$\begin{aligned}\text{Yan}(\bar{y}_{RC}) &= E(\bar{y}_{RC} - \bar{Y}) \\ &\cong \bar{Y}E(-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1)\end{aligned}$$

olur. Burada

$$E(e_0) = \frac{E(\bar{y}_{st}-\bar{Y})}{\bar{Y}} = \frac{E\left(\sum_{h=1}^{L} W_h\bar{y}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h\bar{Y}_h\right)}{\bar{Y}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h E(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)}{\bar{Y}} = 0 \qquad (2.10)$$

$$E(e_1) = \frac{E(\bar{x}_{st}-\bar{X})}{\bar{X}} = \frac{E\left(\sum_{h=1}^{L} W_h\bar{x}_h - \sum_{h=1}^{L} W_h\bar{X}_h\right)}{\bar{X}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h E(\bar{x}_h - \bar{X}_h)}{\bar{X}} = 0 \qquad (2.11)$$

$$e_0e_1 = \left(\frac{\bar{y}_{st}-\bar{Y}}{\bar{Y}}\right)\left(\frac{\bar{x}_{st}-\bar{X}}{\bar{X}}\right) = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h(\bar{y}_h-\bar{Y}_h)\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h(\bar{x}_h-\bar{X}_h)\right)}{\bar{Y}\bar{X}} \qquad (2.12)$$

$$E(e_0 e_1) = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 E\left[(\overline{y}_h - \overline{Y}_h)(\overline{x}_h - \overline{X}_h)\right]}{\overline{YX}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yxh}}{\overline{YX}} \tag{2.13}$$

$$e_1^2 = \frac{(\overline{x}_{st} - \overline{X})^2}{\overline{X}^2} = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h (\overline{x}_h - \overline{X}_h)\right)^2}{\overline{X}^2} \tag{2.14}$$

$$E(e_1^2) = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 E(\overline{x}_h - \overline{X}_h)^2}{\overline{X}^2} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2} \tag{2.15}$$

elde edilen beklenen değer eşitlikleri yan eşitliğinde yerine konulursa,

$$\begin{aligned} Yan(\overline{y}_{RC}) &\cong \overline{Y}\left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2} - \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\overline{XY}} \right) \\ &= \overline{Y} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(\frac{S_{xh}^2}{\overline{X}^2} - \frac{S_{xyh}}{\overline{XY}} \right) \\ &= \frac{1}{\overline{X}} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(R S_{xh}^2 - S_{xyh} \right) \end{aligned} \tag{2.16}$$

olarak bulunur. Burada

$$R = \frac{\overline{Y}}{\overline{X}} \tag{2.17}$$

olmaktadır. Eşitlik (2.9)'un karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$(\overline{y}_{RC} - \overline{Y})^2 \cong \overline{Y}^2 \left(e_0^2 + e_1^2 - 2 e_0 e_1 \right) \tag{2.18}$$

elde edilir. $\overline{y}_{RC}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(\bar{y}_{RC}) = E(\bar{y}_{RC} - \bar{Y})^2$$
$$\cong \bar{Y}^2 E(e_0^2 + e_1^2 - 2e_0e_1)$$

olur. Burada

$$e_0^2 = \frac{(\bar{y}_{st} - \bar{Y})^2}{\bar{Y}^2} = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)\right)^2}{\bar{Y}^2} \tag{2.19}$$

$$E(e_0^2) = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 E(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)^2}{\bar{Y}^2} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} \tag{2.20}$$

olmaktadır. Eşitlik (2.13), Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.20)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$HKO(\bar{y}_{RC}) \cong \bar{Y}^2 \left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2} - 2\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\overline{XY}} \right)$$
$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h (S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 - 2RS_{xyh}) \tag{2.21}$$

olarak bulunur.

2.1.2. Bileşik Çarpımsal Tahmin Edici

x ve y değişkeni arasındaki ilişki negatif olduğunda Yan ve Ma (2001) tarafından önerilen bileşik çarpımsal tahmin edici,

$$\bar{y}_{PC} = \frac{\bar{y}_{st}\bar{x}_{st}}{\bar{X}} \tag{2.22}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{PC}$ tahmin edicisi, Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'deki e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{PC} &= \frac{\bar{Y}(1+e_0)\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1) \\
&= \bar{Y}(1+e_0+e_1+e_0e_1)
\end{aligned}$$

$$\bar{y}_{PC} - \bar{Y} = \bar{Y}(e_0+e_1+e_0e_1) \tag{2.23}$$

elde edilir. $\bar{y}_{PC}$ tahmin edicisinin yanı,

$$\begin{aligned}
Yan(\bar{y}_{PC}) &= E(\bar{y}_{PC} - \bar{Y}) \\
&= \bar{Y}E(e_0+e_1+e_0e_1)
\end{aligned}$$

Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11) ve Eşitlik (2.13)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
Yan(\bar{y}_{PC}) &= \bar{Y}\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\bar{Y}\bar{X}} \\
&= \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\bar{X}}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.23)'ün karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$(\bar{y}_{PC} - \bar{Y})^2 \cong \bar{Y}^2\left(e_0^2 + e_1^2 + 2e_0e_1\right) \tag{2.25}$$

elde edilir. $\bar{y}_{PC}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$HKO(\bar{y}_{PC}) = E(\bar{y}_{PC} - \bar{Y})^2$$

$$\cong \overline{Y}^2 E\left(e_0^2 + e_1^2 + 2e_0 e_1\right)$$

biçiminde olacağından Eşitlik (2.13), Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.20)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden

$$HKO\left(\overline{y}_{PC}\right) \cong \overline{Y}^2 \left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2}{\overline{Y}^2} + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2} + 2\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\overline{XY}} \right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 + 2RS_{xyh}\right) \tag{2.26}$$

olarak bulunur.

2.1.3. Bileşik Regresyon Tahmin Edicisi

Tabakalı rasgele örneklemede bileşik regresyon tahmin edicisi,

$$\overline{y}_{lrc} = \overline{y}_{st} + b_c\left(\overline{X} - \overline{x}_{st}\right) \tag{2.27}$$

olarak verilir (Çıngı,1994). Burada

$$b_c = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h s_{yxh}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h s_{xh}^2}\ . \tag{2.28}$$

olmaktadır.

$$e_{2h} = \frac{s_{xh}^2 - S_{xh}^2}{S_{xh}^2} \Rightarrow s_{xh}^2 = S_{xh}^2\left(1 + e_{2h}\right) \tag{2.29}$$

$$e_{3h} = \frac{s_{xyh} - S_{xyh}}{S_{xyh}} \Rightarrow s_{xyh} = S_{xyh}\left(1 + e_{3h}\right) \tag{2.30}$$

biçiminde tanımlansın. b_c tahmini Eşitlik (2.29) ve Eşitlik (2.30)'daki e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$b_c = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}(1+e_{3h})}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 (1+e_{2h})}$$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh} + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh} e_{3h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 e_{2h}}$$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh} \left(1 + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh} e_{3h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}\right)}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 \left(1 + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 e_{2h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}\right)} \tag{2.31}$$

elde edilir.

$$e_2 = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 e_{2h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2} \tag{2.32}$$

$$e_3 = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh} e_{3h}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}} \tag{2.33}$$

olarak tanımlandığında ise Eşitlik (2.32) ve Eşitlik (2.33)'den yararlanarak

$$b_c = \beta_c (1+e_3)(1+e_2)^{-1} \tag{2.34}$$

şeklinde de yazılabilir (Singh, 2003). Burada

$$\beta_c = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yxh}}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2} \tag{2.35}$$

olmaktadır. $\overline{y}_{lrc}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.2), Eşitlik (2.3) ve Eşitlik (2.34)'deki e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\overline{y}_{lrc} = \overline{Y}(1+e_0) + \beta_c (1+e_3)(1+e_2)^{-1}\left(\overline{X} - \overline{X}(1+e_1)\right)$$

ve $(1+e_2)^{-1}$ terimi MacLaurin Serisine açılıp , 2. dereceden büyük çarpımlar ihmal edilirse

$$\overline{y}_{lrc} \cong \overline{Y}(1+e_0) - \beta_c \overline{X}(1+e_3)\left(1-e_2+e_2^2\right)e_1$$

$$\overline{y}_{lrc} - \overline{Y} \cong \overline{Y}e_0 - \beta_c \overline{X}(e_1 - e_1 e_2 + e_1 e_3) \tag{2.36}$$

elde edilir. Bu durumda $\overline{y}_{lrc}$ tahmin edicisinin yanı,

$$\begin{aligned} Yan(\overline{y}_{lrc}) &= E\left(\overline{y}_{lrc} - \overline{Y}\right) \\ &\cong \overline{Y}E(e_0) - \beta_c \overline{X}E(e_1 - e_1 e_2 + e_1 e_3) \end{aligned} \tag{2.37}$$

olur. Burada

$$E(e_1 e_2) = \frac{1}{\overline{X}} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \mu_{03h} \alpha_h \tag{2.38}$$

$$\mu_{rsh} = \frac{1}{N_h - 1} \sum_{j=1}^{N_h} \left(y_{hj} - \overline{Y}_h\right)^r \left(x_{hj} - \overline{X}_h\right)^s \tag{2.39}$$

eşitliğinden elde edilebilir.

$$\alpha_h = \frac{N_h^2 W_h \lambda_h}{(N_h - 1)(N_h - 2)\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{hx}^2} \tag{2.40}$$

$$E(e_1 e_3) = \frac{1}{\overline{\overline{X}}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \mu_{12h} \alpha_h^* \tag{2.41}$$

$$\alpha_h^* = \frac{N_h^2 W_h \lambda_h}{(N_h - 1)(N_h - 2)\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}} \tag{2.42}$$

olmaktadır. Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.38), Eşitlik (2.41)'deki beklenen değer eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
Yan(\overline{y}_{lrc}) &\cong -\beta_c \overline{X}\left(-\frac{1}{\overline{\overline{X}}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \mu_{03h} \alpha_h + \frac{1}{\overline{\overline{X}}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \mu_{12h} \alpha_h^*\right) \\
&= -\beta_c \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(\alpha_h^* \mu_{12h} - \alpha_h \mu_{03h}\right)
\end{aligned} \tag{2.43}$$

olarak bulunur (Sukhatme ve Sukhatme, 1984). Eşitlik (2.36)'nın karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\overline{y}_{lrc} - \overline{Y}\right)^2 \cong \left\{\overline{Y}^2 e_0^2 + \beta_c^2 \overline{X}^2 e_1^2 - 2\overline{Y}\overline{X}\beta(e_0 e_1)\right\} \tag{2.44}$$

elde edilir. $\overline{y}_{lrc}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
HKO(\overline{y}_{lrc}) &= E\left(\overline{y}_{lrc} - \overline{Y}\right)^2 \\
&\cong E\left\{\overline{Y}^2 e_0^2 + \beta_c^2 \overline{X}^2 e_1^2 - 2\overline{Y}\overline{X}\beta_c (e_0 e_1)\right\}
\end{aligned}$$

Eşitlik (2.13), Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.20) 'deki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$HKO(\bar{y}_{lrc}) \cong \left\{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 + \beta_c^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 - 2\beta_c \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yxh}\right\}$$

$$= \left\{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 - \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yxh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}\right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 \left\{1 - \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yxh}\right)^2}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2\right)\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2\right)}\right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 \left\{1 - \rho_c^2\right\} \tag{2.45}$$

olarak bulunur. Burada

$$\rho_c = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yxh}}{\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2}\right)\left(\sqrt{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}\right)} \tag{2.46}$$

tabakalı örneklemede tüm tabakalar üzerinden korelasyon katsayısı olmaktadır. $\bar{y}_{lrc}$ tahmin edicisinde $b_c = \beta_c$ gibi bir sabit olarak alınırsa,

$$\bar{y}_{lrc} = \bar{y}_{st} + \beta_c\left(\bar{X} - \bar{x}_{st}\right)$$

$$\bar{y}_{lrc} = \bar{Y}(1 + e_0) + B_c\left(\bar{X} - \bar{X}(1 + e_1)\right)$$

$$\bar{y}_{lrc} - \bar{Y} = \bar{Y}e_0 - B_c\bar{X}e_1$$

$$Yan(\bar{y}_{lrc}) = E\left(\bar{y}_{lrc} - \bar{Y}\right) = 0$$

regresyon tahmin edicisi yansızdır. Hata kareler ortalaması ise, Eşitlik (2.45)'e eşit olmaktadır.

2.1.4. Oransal Ayrı Tahmin Edici

x ve y değişkenleri arasında pozitif bir korelasyon varsa oransal ayrı tahmin edici,

$$\bar{y}_{Rs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} \bar{X}_h \tag{2.47}$$

olarak tanımlanır. $\bar{y}_{Rs}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması Fark Yöntemiyle bulunabilir.

$$e_{0h} = \frac{\bar{y}_h - \bar{Y}_h}{\bar{Y}_h} \Rightarrow \bar{y}_h = \bar{Y}_h (1 + e_{0h}) \tag{2.48}$$

$$e_{1h} = \frac{\bar{x}_h - \bar{X}_h}{\bar{X}_h} \Rightarrow \bar{x}_h = \bar{X}_h (1 + e_{1h}) \tag{2.49}$$

biçiminde tanımlansın. $\bar{y}_{Rs}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.48) ve Eşitlik (2.49)'daki e'li terimler cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{y}_{Rs} &= \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{\bar{Y}_h (1 + e_{0h})}{\bar{X}_h (1 + e_{1h})} \bar{X}_h \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h (1 + e_{0h})(1 + e_{1h})^{-1} \end{aligned}$$

ve $(1 + e_{1h})^{-1}$ terimi MacLaurin Serisine açılıp 2. dereceden büyük terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} \bar{y}_{Rs} &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h (1 + e_{0h})(1 - e_{1h} + e_{1h}^2) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h + \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \left(- e_{1h} + e_{1h}^2 + e_{0h} - e_{0h} e_{1h}\right) \end{aligned}$$

$$\bar{y}_{Rs} - \bar{Y} \cong \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \left(- e_{1h} + e_{1h}^2 + e_{0h} - e_{0h} e_{1h}\right) \tag{2.50}$$

elde edilir. $\bar{y}_{Rs}$ tahmin edicisinin yanı,

$$\text{Yan}(\bar{y}_{Rs}) = E(\bar{y}_{Rs} - \bar{Y})$$
$$\cong \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h E(-e_{1h} + e_{1h}^2 + e_{0h} - e_{0h}e_{1h})$$

biçiminde olur. Burada

$$E(e_{0h}) = \frac{E(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)}{\bar{Y}_h} = 0 \tag{2.51}$$

$$E(e_{1h}) = \frac{E(\bar{x}_h - \bar{X}_h)}{\bar{X}_h} = 0 \tag{2.52}$$

$$E(e_{1h}^2) = \frac{E(\bar{x}_h - \bar{X}_h)^2}{\bar{X}_h^2} = \frac{\lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} = \lambda_h C_{xh}^2 \tag{2.53}$$

$$E(e_{0h}e_{1h}) = \frac{E(\bar{x}_h - \bar{X}_h)(\bar{y}_h - \bar{Y}_h)}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} = \frac{\lambda_h S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} = \lambda_h C_{xyh} \tag{2.54}$$

$$C_{xh} = \frac{S_{xh}}{\bar{X}_h},\ C_{xyh} = \frac{S_{xyh}}{\bar{X}_h \bar{Y}_h} \tag{2.55}$$

değişim katsayıları olmak üzere beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak

$$\text{Yan}(\bar{y}_{Rs}) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \lambda_h (C_{xh}^2 - C_{xyh})$$
$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \lambda_h C_{xh}^2 (1 - K_h) \tag{2.56}$$

olarak bulunur. Burada

$$K_h = \rho_h \frac{C_{yh}}{C_{xh}} \tag{2.57}$$

olmaktadır. Eşitlik (2.50)'nin karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\bar{y}_{Rs} - \bar{Y}\right)^2 \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \left(e_{0h}^2 + e_{1h}^2 - 2e_{0h}e_{1h}\right) \tag{2.58}$$

elde edilir. $\bar{y}_{Rs}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{Rs}) &= E\left(\bar{y}_{Rs} - \bar{Y}\right)^2 \\ &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 E\left(e_{0h}^2 + e_{1h}^2 - 2e_{0h}e_{1h}\right) \end{aligned}$$

Burada

$$E\left(e_{0h}^2\right) = \frac{E\left(\bar{y}_h - \bar{Y}_h\right)^2}{\bar{Y}_h^2} = \frac{\lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}_h^2} = \lambda_h C_{yh}^2 \tag{2.59}$$

olduğundan Eşitlik (2.53), Eşitlik (2.54) ve Eşitlik (2.59)'dan yararlanarak,

$$\begin{aligned} HKO(\bar{y}_{Rs}) &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left(C_{yh}^2 + C_{xh}^2 - 2C_{xyh}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left(C_{yh}^2 + C_{xh}^2 (1 - 2K_h)\right) \end{aligned} \tag{2.60}$$

olarak bulunur.

2.1.5. Çarpımsal Ayrı Tahmin Edici

x ve y değişkeni arasındaki ilişki negatif olduğunda Yan ve Ma (2001) tarafından önerilen çarpımsal ayrı tahmin edici,

$$\bar{y}_{Ps} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{\bar{y}_h \bar{x}_h}{\bar{X}_h} \tag{2.61}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{Ps}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.48) ve Eşitlik (2.49)'daki e'li ifadeler cinsinden yazılırsa,

$$\bar{y}_{Ps} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h (1+e_{0h})(1+e_{1h})$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h (1+e_{0h}+e_{1h}+e_{0h}e_{1h})$$

$$\bar{y}_{Ps} - \bar{Y} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h (e_{0h}+e_{1h}+e_{0h}e_{1h}) \tag{2.62}$$

elde edilir. $\bar{y}_{Ps}$ tahmin edicisinin yanı,

$$Yan(\bar{y}_{Ps}) = E(\bar{y}_{Ps} - \bar{Y})$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h E(e_{0h}+e_{1h}+e_{0h}e_{1h})$$

biçiminde olur ve Eşitlik (2.51), Eşitlik (2.52) ve Eşitlik (2.54)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden

$$Yan(\bar{y}_{Ps}) = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \lambda_h C_{xyh}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \lambda_h C_{hx}^2 K_h \tag{2.63}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.62)'nin karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$(\bar{y}_{Ps} - \bar{Y})^2 \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 (e_{0h}^2 + e_{1h}^2 + 2e_{0h}e_{1h}) \tag{2.64}$$

elde edilir. $\bar{y}_{Ps}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO(\overline{y}_{Ps}) &= E(\overline{y}_{Ps} - \overline{Y})^2 \\
&\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \overline{Y}_h^2 E(e_{0h}^2 + e_{1h}^2 + 2e_{0h}e_{1h})
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

olup Eşitlik (2.53), Eşitlik (2.54) ve Eşitlik (2.59)'daki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$
\begin{aligned}
HKO(\overline{y}_{Ps}) &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \overline{Y}_h^2 \lambda_h (C_{yh}^2 + C_{xh}^2 + 2C_{hxy}) \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \overline{Y}_h^2 \lambda_h (C_{yh}^2 + C_{xh}^2 (1 + 2K_h))
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

olarak bulunur.

2.1.6. Ayrı Regresyon Tahmin Edici

Tabakalı rasgele örneklemede ayrı regresyon tahmin edicisi,

$$
\overline{y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{y}_h + b_h (\overline{X}_h - \overline{x}_h) \right] \tag{2.67}
$$

şeklinde tanımlanır (Çıngı, 1994). Burada

$$
b_h = \frac{s_{xyh}}{s_{xh}^2} \tag{2.68}
$$

olmaktadır. $\overline{y}_{lrs}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.29), Eşitlik (2.30), Eşitlik (2.48) ve Eşitlik (2.49)'da tanımlanan e'li terimli ifadelerle yazılırsa,

$$
\overline{y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{Y}_h (1 + e_{0h}) + \frac{S_{xyh}(1 + e_{3h})}{S_{xh}^2 (1 + e_{2h})} (\overline{X}_h - \overline{X}_h (1 + e_{1h})) \right]
$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{Y}_h + \overline{Y}_h e_{0h} - \beta_h \overline{X}_h e_{1h} (1 + e_{3h})(1 + e_{2h})^{-1} \right]$$

bulunur. Burada

$$\beta_h = \frac{S_{xyh}}{S_{xh}^2} \tag{2.69}$$

olmaktadır. $(1 + e_{2h})^{-1}$ terimi MacLaurin Serisine açılıp 2. dereceden büyük terimler ihmal edilirse,

$$\overline{y}_{lrs} - \overline{Y} \cong \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\overline{Y}_h e_{0h} - \beta_h \overline{X}_h \left(e_{1h} - e_{1h} e_{2h} + e_{1h} e_{3h} \right) \right] \tag{2.70}$$

elde edilir. Eşitlik (2.70)'den beklenen değere geçilirse tahmin edicinin yanı,

$$\begin{aligned} \text{Yan}(\overline{y}_{lrs}) &= E(\overline{y}_{lrs} - \overline{Y}) \\ &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h E\left[\overline{Y}_h e_{0h} - \beta_h \overline{X}_h \left(e_{1h} - e_{1h} e_{2h} + e_{1h} e_{3h} \right) \right] \end{aligned}$$

olur. Burada

$$E(e_{1h} e_{2h}) = \lambda_h C_{xh} \lambda_{03h} \tag{2.71}$$

$$\lambda_{rsh} = \frac{\mu_{rsh}}{\mu_{20h}^{r/2} \mu_{02h}^{s/2}} \tag{2.72}$$

$$E(e_{1h} e_{3h}) = \lambda_h C_{xh} \frac{\lambda_{12h}}{\rho_{xyh}} \tag{2.73}$$

$$\rho_{xyh} = \frac{S_{xyh}}{S_{xh} S_{yh}} \tag{2.74}$$

olacağından Eşitlik (2.51), Eşitlik (2.52) ve yukarıda tanımlanan beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$\text{Yan}(\bar{y}_{lrs}) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h \beta_h \bar{X}_h \lambda_h C_{xh} \left(\lambda_{03h} - \frac{\lambda_{12h}}{\rho_{xyh}} \right) \tag{2.75}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.70)'in karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\bar{y}_{lrs} - \bar{Y}\right)^2 \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left[\bar{Y}_h^2 e_{0h}^2 + \beta_h^2 \bar{X}_h^2 e_{1h}^2 - 2\beta_h \bar{Y}_h \bar{X}_h e_{0h} e_{1h} \right] \tag{2.76}$$

elde edilir. $\bar{y}_{lrs}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} \text{HKO}(\bar{y}_{lrs}) &= E\left(\bar{y}_{lrs} - \bar{Y}\right)^2 \\ &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left[\bar{Y}_h^2 E\left(e_{0h}^2\right) + \beta_h^2 \bar{X}_h^2 E\left(e_{1h}^2\right) - 2\beta_h \bar{Y}_h \bar{X}_h E\left(e_{0h} e_{1h}\right) \right] \end{aligned}$$

olup Eşitlik (2.53), Eşitlik (2.54) ve Eşitlik (2.59)'dan yararlanarak,

$$\text{HKO}(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left[S_{yh}^2 + \beta_h^2 S_{xh}^2 - 2\beta_h S_{xyh} \right] \tag{2.77}$$

olarak bulunur. $\bar{y}_{lrs}$ tahmin edicisinde $b_h = \beta_h$ gibi bir sabit olursa

$$\bar{y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{y}_h + \beta_h \left(\bar{X}_h - \bar{x}_h \right) \right]$$

$$\bar{y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{Y}_h (1 + e_{0h}) + \beta_h \left(\bar{X}_h - \bar{X}_h (1 + e_{1h}) \right) \right]$$

$$\bar{y}_{lrs} - \bar{Y} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\bar{Y}_h e_{0h} - \beta_h \bar{X}_h e_{1h} \right]$$

$$\text{Yan}(\bar{y}_{lrs}) = E\left(\bar{y}_{lrs} - \bar{Y}\right) = 0$$

regresyon tahmin edicisi yansızdır. Hata kareler ortalaması ise, Eşitlik (2.77) ile aynıdır.

2.1.7. Kaur Tahmin Edicileri

2.1.7.1. Kaur Tahmin Edicisi I

Tabakalı rasgele örneklemede ortalama tahmini için Kaur (1985) tarafından önerilen tahmin edici,

$$d_\alpha = \bar{y}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right)^\alpha \tag{2.78}$$

şeklindedir. Burada α uygun bir sabittir. Bu tahmin edicide α=-1, 1 ve 0 değerlerini aldığında sırasıyla $\bar{y}_{RC}$, $\bar{y}_{PC}$ ve $\bar{y}_{st}$ tahmin edicilerine ulaşılabilmektedir. d_α tahmin edicisi Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'teki e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned} d_\alpha &= \bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}}\right)^\alpha \\ &= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)^\alpha \end{aligned} \tag{2.79}$$

olarak elde edilir. $(1+e_1)^\alpha$ terimi MacLaurin Serisine açılıp 2. dereceden büyük terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned} d_\alpha &\cong \bar{Y}(1+e_0)\left(1+\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2\right) \\ &= \bar{Y}\left(1+\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2+e_0+\alpha e_0 e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_0 e_1^2\right) \end{aligned}$$

$$d_\alpha-\bar{Y} \cong \bar{Y}\left(\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2+e_0+\alpha e_0 e_1\right) \tag{2.80}$$

olarak bulunur. d_α tahmin edicisinin yanı,

$$\begin{aligned} Yan(d_\alpha) &= E(d_\alpha-\bar{Y}) \\ &\cong \bar{Y}E\left(\alpha e_1+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_1^2+e_0+\alpha e_0 e_1\right) \end{aligned}$$

Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.15)'deki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$Yan(d_\alpha) \cong \overline{Y}\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2} \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2} + \alpha \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\overline{Y}\overline{X}} \right)$$

$$= \frac{\alpha}{\overline{X}} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(\frac{(\alpha-1)}{2} R S_{xh}^2 + S_{xyh} \right) \tag{2.81}$$

olarak bulunur.

$$V_{r,s} = \sum_{h=1}^{L} W_h^{r+s} \frac{E\left[\left(\overline{x}_h - \overline{X}_h\right)^r \left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right)^s \right]}{\overline{X}^r \overline{Y}^s} \tag{2.82}$$

olarak tanımlanırsa beklenen değer eşitlikleri,

$$E(e_0 e_1) = V_{1,1} \tag{2.83}$$

$$E(e_1^2) = V_{2,0} \tag{2.84}$$

$$E(e_0^2) = V_{0,2} \tag{2.85}$$

şeklinde de verilebilir. d_α tahmin edicisi için yan,

$$Yan(d_\alpha) \cong \alpha \overline{Y} \left[V_{1,1} + \frac{(\alpha-1)}{2} V_{2,0} \right] \tag{2.86}$$

olarak da yazılabilir. Eşitlik (2.80)'nin karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(d_\alpha - \overline{Y}\right)^2 \cong \overline{Y}^2 \left(\alpha^2 e_1^2 + e_0^2 + 2\alpha e_0 e_1 \right) \tag{2.87}$$

elde edilir. Eşitlik (2.87)'nin beklenen değeri alınırsa hata kareler ortalaması,

$$HKO(d_\alpha) = E(d_\alpha - \overline{Y})^2$$
$$\cong \overline{Y}^2\left(\alpha^2 E(e_1^2) + E(e_0^2) + 2\alpha E(e_0 e_1)\right)$$

olur ve Eşitlik (2.13), Eşitlik (2.15), Eşitlik (2.20)'deki beklenen değerlerden yararlanarak,

$$HKO(d_\alpha) \cong \overline{Y}^2\left(\alpha^2 \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2} + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2}{\overline{Y}^2} + 2\alpha \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\overline{XY}}\right)$$
$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(\alpha^2 R^2 S_{xh}^2 + S_{yh}^2 + 2\alpha R S_{xyh}\right)$$

veya Eşitlik (2.83), Eşitlik (2.84), Eşitlik (2.85)'den

$$HKO(d_\alpha) \cong \overline{Y}^2\left(V_{0,2} + \alpha^2 V_{2,0} + 2\alpha V_{1,1}\right) \tag{2.88}$$

eşitliğine ulaşılır. Hata kareler ortalamasını minimum yapan α değeri,

$$\frac{\partial HKO(d_\alpha)}{\partial \alpha} = 0$$
$$2\alpha V_{2,0} + 2V_{1,1} = 0$$
$$\alpha^* = -\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = -\frac{\beta_c}{R} \tag{2.89}$$

α^* değeri Eşitlik (2.88)'de yerine yazılırsa,

$$HKO_{min}(d_\alpha) = \overline{Y}^2\left(V_{0,2} + \left(-\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}\right)^2 V_{2,0} - 2\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} V_{1,1}\right)$$
$$= \overline{Y}^2\left(V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right)$$

$$= \overline{Y}^2 V_{0,2}\left(1-\frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}V_{0,2}}\right)$$

$$= \overline{Y}^2 V_{0,2}\left(1-\rho_c^2\right)$$

$$= HKO\left(\overline{y}_{lrc}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 \left\{1-\rho_c^2\right\} \tag{2.90}$$

olarak bulunur. Tahmin edicinin minimum hata kareler ortalaması, bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşittir.

2.1.7.2. Kaur Tahmin Edicisi II

Eğer α^* tamsayı ise d_{α^*}'ın hesaplanması basittir. Ancak α^*, s ve s+1 tamsayı aralığında bir değer alabilir. Bu durumda $s \le \alpha^* \le s+1$ olmak üzere önerilen tahmin edici,

$$d_{(s)} = \beta d_s + (1-\beta) d_{s+1}$$

$$d_{(s)} = \beta \overline{y}_{st}\left(\frac{\overline{x}_{st}}{\overline{X}}\right)^{s} + (1-\beta)\overline{y}_{st}\left(\frac{\overline{x}_{st}}{\overline{X}}\right)^{s+1} \tag{2.91}$$

şeklindedir. Burada β, $0 \le \beta \le 1$ aralığında bir değerdir. Bu durumda

$$d_{(s)} - \overline{Y} \cong \beta d_s + (1-\beta) d_{s+1} - \beta\overline{Y} - (1-\beta)\overline{Y}$$

$$= \beta\left(d_s - \overline{Y}\right) + (1-\beta)\left(d_{s+1} - \overline{Y}\right) \tag{2.92}$$

olur. Eşitlik (2.92)'nin beklenen değeri alınırsa $d_{(s)}$ tahmin edicisi için yan,

$$Yan\left(d_{(s)}\right) = E\left(d_{(s)} - \overline{Y}\right)$$

$$= \beta E\left(d_s - \overline{Y}\right) + (1-\beta) E\left(d_{s+1} - \overline{Y}\right)$$

$$= \beta Yan\left(d_s\right) + (1-\beta) Yan\left(d_{s+1}\right)$$

Eşitlik (2.86)'dan yararlanarak,

$$\begin{aligned}
Yan\left(d_{(s)}\right) &\cong \beta s\overline{Y}\left[V_{1,1}+\frac{(s-1)}{2}V_{2,0}\right]+(1-\beta)(s+1)\overline{Y}\left[V_{1,1}+\frac{s}{2}V_{2,0}\right] \\
&= \left[\beta s\overline{Y}+s\overline{Y}+\overline{Y}-\beta s\overline{Y}-\beta\overline{Y}\right]V_{1,1} \\
&+\left[\beta s\overline{Y}\frac{s-1}{2}+(s+1)\overline{Y}\frac{s}{2}-\beta(s+1)\overline{Y}\frac{s}{2}\right]V_{2,0} \\
&= \overline{Y}\left\{(s+1-\beta)V_{1,1}+\frac{s}{2}(-2\beta+s+1)V_{2,0}\right\}
\end{aligned} \tag{2.93}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.92)'nin karesi alınırsa,

$$\left(d_{(s)}-\overline{Y}\right)^2 \cong \left[\beta^2\left(d_s-\overline{Y}\right)^2+(1-\beta)^2\left(d_{s+1}-\overline{Y}\right)^2+2\beta\left(d_s-\overline{Y}\right)(1-\beta)\left(d_{s+1}-\overline{Y}\right)\right] \tag{2.94}$$

elde edilir. $d_{(s)}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
HKO\left(d_{(s)}\right) &= E\left(d_{(s)}-\overline{Y}\right)^2 \\
&\cong \left[\beta^2 E\left(d_s-\overline{Y}\right)^2+(1-\beta)^2 E\left(d_{s+1}-\overline{Y}\right)^2\right. \\
&\left.+2\beta(1-\beta)E\left(d_s-\overline{Y}\right)\left(d_{s+1}-\overline{Y}\right)\right]
\end{aligned} \tag{2.95}$$

olur. Burada

$$\left(d_s-\overline{Y}\right)\left(d_{s+1}-\overline{Y}\right)=\left(\overline{y}_{st}\left(\frac{\overline{x}_{st}}{\overline{X}}\right)^s-\overline{Y}\right)\left(\overline{y}_{st}\left(\frac{\overline{x}_{st}}{\overline{X}}\right)^{s+1}-\overline{Y}\right) \tag{2.96}$$

olduğu açıktır. Eşitlik (2.96), Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'teki e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\left(d_s-\overline{Y}\right)\left(d_{s+1}-\overline{Y}\right)=\left\{\overline{Y}(1+e_0)(1+e_1)^s-\overline{Y}\right\}\left\{\overline{Y}(1+e_0)(1+e_1)^{s+1}-\overline{Y}\right\}$$

olacaktır. $(1+e_1)^s$ ve $(1+e_1)^{s+1}$ ifadeleri MacLaurin Serisine açılıp, 2. dereceden büyük terimler ihmal edilirse,

$$\begin{aligned}(d_s-\overline{Y})(d_{s+1}-\overline{Y}) &\cong \left\{\overline{Y}(1+e_0)\left(1+se_1+\frac{s(s-1)}{2}e_1^2\right)-\overline{Y}\right\}\\ &* \left\{\overline{Y}(1+e_0)\left(1+(s+1)e_1+\frac{s}{2}e_1^2\right)-\overline{Y}\right\}\\ &=\overline{Y}^2\left(se_1+\frac{s(s-1)}{2}e_1^2+e_0+se_0e_1\right)\\ &*\left(se_1+e_1+\frac{s}{2}e_1^2+e_0+se_0e_1+e_0e_1\right)\\ &=\overline{Y}^2\left(s^2e_1^2+se_1^2+se_0e_1+se_0e_1+e_0e_1+e_0^2\right) \qquad (2.97)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.97)'nin beklenen değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}E(d_s-\overline{Y})(d_{s+1}-\overline{Y}) &\cong \overline{Y}^2E\left(s^2e_1^2+se_1^2+se_0e_1+se_0e_1+e_0e_1+e_0^2\right)\\ &=\overline{Y}^2\left(s^2V_{2,0}+sV_{2,0}+2sV_{1,1}+V_{1,1}+V_{0,2}\right)\\ &=\overline{Y}^2\left(s(s+1)V_{2,0}+(2s+1)V_{1,1}+V_{0,2}\right) \qquad (2.98)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.95)'te, Eşitlik (2.88) ve Eşitlik (2.98)'de bulunan değerler yerine koyulursa $d_{(s)}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}HKO(d_{(s)}) &= \beta^2\overline{Y}^2\left(V_{0,2}+s^2V_{2,0}+2sV_{1,1}\right)\\ &+(1-\beta)^2\overline{Y}^2\left(V_{0,2}+(s+1)^2V_{2,0}+2(s+1)V_{1,1}\right)\\ &+2\beta(1-\beta)\overline{Y}^2\left(s(s+1)V_{2,0}+(2s+1)V_{1,1}+V_{0,2}\right)\\ &=\overline{Y}^2\left\{2(s+1-\beta)V_{1,1}+V_{0,2}+(s+1-\beta)^2V_{2,0}\right\} \qquad (2.99)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan β değeri,

$$\frac{\partial HKO\left(d_{(s)}\right)}{\partial\beta}=0$$

$$\overline{Y}^2\left\{-2V_{1,1}-2(s+1-\beta)V_{2,0}\right\}=0$$

$$\beta^*=\frac{V_{1,1}+(s+1)V_{2,0}}{V_{2,0}}$$

$$\beta^*=-\alpha^*+s+1 \tag{2.100}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (2.99)'da β yerine β^* değeri koyulursa hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
HKO_{min}\left(d_{(s)}\right)&=\overline{Y}^2\left\{2\left(s+1+\alpha^*-s-1\right)V_{1,1}+V_{0,2}+\left(s+1+\alpha^*-s-1\right)^2V_{2,0}\right\}\\
&=\overline{Y}^2\left\{2\alpha^*V_{1,1}+V_{0,2}+\alpha^{*2}V_{2,0}\right\}\\
&=\overline{Y}^2\left\{-2\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}V_{1,1}+V_{0,2}+\left(\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}\right)^2V_{2,0}\right\}\\
&=\overline{Y}^2\left\{V_{0,2}-\frac{\left(V_{1,1}\right)^2}{V_{2,0}}\right\}\\
&=\overline{Y}^2V_{0,2}\left\{1-\rho_c^2\right\}\\
&=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_hS_{yh}^2\left\{1-\rho_c^2\right\}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

2.1.7.3. Kaur Tahmin Edicisi III

α^* (0,1) aralığında değerler aldığı durum için önerilen tahmin edici,

$$d=\frac{\overline{y}_{st}\overline{X}}{\overline{X}+\delta\left(\overline{x}_{st}-\overline{X}\right)} \tag{2.102}$$

şeklindedir. Burada δ, $[0,1]$ aralığında bir sabittir. d tahmin edicisinin yanı,

$$
\begin{aligned}
Yan(d) &= E\left(d-\overline{Y}\right) \\
&\cong \overline{Y}E\left(-\delta e_1+\delta^2 e_1^2+e_0-\delta e_0 e_1\right) \\
&= \overline{Y}\delta\left(\delta V_{2,0}-V_{1,1}\right) \qquad (2.103)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur ve hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO(d) &= E\left(d-\overline{Y}\right)^2 \\
&\cong \overline{Y}^2\left(\delta^2 E\left(e_1^2\right)+E\left(e_0^2\right)-2\delta E\left(e_0 e_1\right)\right) \\
&= \overline{Y}^2\left(\delta^2 V_{2,0}+V_{0,2}-2\delta E V_{1,1}\right) \qquad (2.104)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan δ değeri,

$$
\frac{\partial HKO(d)}{\partial \delta}=0
$$

$$
\overline{Y}^2\left(2\delta V_{2,0}-2V_{1,1}\right)=0
$$

$$
\delta^*=\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}=-\alpha^*=\frac{\beta_c}{R} \qquad (2.105)
$$

Eşitlik (2.103)'de δ yerine δ^* değeri yerine koyulursa,

$$
\begin{aligned}
Yan\left(d^*\right) &= \overline{Y}\delta^*\left(\delta^* V_{2,0}-V_{1,1}\right) \\
&= 0 \qquad (2.106)
\end{aligned}
$$

tahmin edicinin yansız olduğu görülebilir. Eşitlik (2.104)'de δ yerine δ^* değeri yerine koyulursa, hata kareler ortalaması,

$$
HKO_{min}(d)=\overline{Y}^2\left(\delta^{*2}V_{2,0}+V_{0,2}-2\delta^* V_{1,1}\right)
$$

$$= \overline{Y}^2\left(\left(\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}\right)^2 V_{2,0} + V_{0,2} - 2\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}V_{1,1}\right)$$

$$= \overline{Y}^2\left(V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right)$$

$$= \overline{Y}^2 V_{0,2}\left(1-\rho_c^2\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 \left\{1-\rho_c^2\right\} \qquad (2.107)$$

bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olarak bulunmaktadır.

Kaur tahmin edicilerinden elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir :

1) d_α ve $d_{(s)}$ tahmin edicilerinde $\alpha^* = 0$ olduğunda bu tahmin edici $\overline{y}_{st}$ tahmin edicisine eşit olmaktadır.

2) α^* (0,1) aralığında değerler aldığında optimum tahmin edici d^* dir.

3) α^* (0,1) aralığında değilse s bir tamsayı olmak üzere (s,s+1) aralığında değerler alıyorsa optimum tahmin edici $d^*_{(s)}$'dır.

4) $-\beta_c/R$ değeri ne olursa olsun uygun s ve δ değerleri için d veya $d_{(s)}$ tahmin edicileri vardır ve bu tahmin ediciler $\overline{y}_c$, $\overline{y}_p$ ve $\overline{y}_{st}$ tahmin edicilerinden daha etkindir. Aynı şekilde d_{α^*}, $d^*_{(s)}$ ve d^* tahmin edicileri her zaman $\overline{y}_c$, $\overline{y}_p$ ve $\overline{y}_{st}$ tahmin edicilerinden daha etkindir (Kaur, 1985).

2.1.8. Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicileri

2.1.8.1. Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi I

Basit rasgele örneklemede Sisodia ve Dwivedi (1981), yardımcı değişkene ait kitle değişim katsayısı C_x'in bilinmesi durumunda ilgilenilen değişkenin ortalaması için

$$\bar{y}_{SD} = \bar{y}\frac{\bar{X}+C_x}{\bar{x}+C_x}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Kadılar ve Çıngı (2003), bu tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak

$$\bar{y}_{st(SD)} = \bar{y}_{st}\frac{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}}{\bar{x}_{st}+C_{x(st)}} \tag{2.108}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada $C_{x(st)} = \sum_{h=1}^{L} W_h C_{xh}$ olarak tanımlanmıştır. $\bar{y}_{st(SD)}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'deki e'li terimli ifadelerle yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{st(SD)} &= \bar{Y}(1+e_0)\frac{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}}{\bar{X}_{st}(1+e_1)+C_{x(st)}} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}_{st}(1+e_1)+C_{x(st)}}{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}}\right)^{-1} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)\left(\frac{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}+e_1\bar{X}_{st}}{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}}\right)^{-1} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)\left(1+\frac{\bar{X}_{st}}{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}}e_1\right)^{-1}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\psi = \frac{\bar{X}_{st}}{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}} \tag{2.109}$$

olarak tanımlanırsa

$$\bar{y}_{st(SD)} = \bar{Y}(1+e_0)(1+\psi e_1)^{-1}$$

olur ve $|\psi e_1| < 1$ koşulu sağlandığından $(1+\psi e_1)^{-1}$ MacLaurin Serisine açılabilir. Bu durumda

$$\bar{y}_{st(SD)} \cong \bar{Y}(1+e_0)(1-\psi e_1 + \psi^2 e_1^2)$$

$$= \bar{Y}(1+e_0 - \psi e_1 - \psi e_0 e_1 + \psi^2 e_1^2)$$

$$\bar{y}_{st(SD)} - \bar{Y} \cong \bar{Y}(e_0 - \psi e_1 - \psi e_0 e_1 + \psi^2 e_1^2) \tag{2.110}$$

olup Eşitlik (2.110) ‘da beklenen değere geçilirse yan,

$$\text{Yan}(\bar{y}_{st(SD)}) = E(\bar{y}_{st(SD)} - \bar{Y})$$

$$\cong \bar{Y}E(e_0 - \psi e_1 - \psi e_0 e_1 + \psi^2 e_1^2)$$

biçiminde ifade edilebilir. Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.15)’deki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak

$$\text{Yan}(\bar{y}_{st(SD)}) \cong \bar{Y}\left(\psi^2 \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2} - \psi \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)$$

$$= \bar{Y}\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \psi\left(\psi \frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2} - \frac{S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \frac{\psi}{\bar{X}}(\psi R S_{xh}^2 - S_{xyh}) \tag{2.111}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.110)’nun karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınıp beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$\text{HKO}(\bar{y}_{st(SD)}) = E(\bar{y}_{st(SD)} - \bar{Y})^2$$

$$= \bar{Y}^2 E(e_0^2 + \psi^2 e_1^2 - 2\psi e_0 e_1)$$

olmaktadır. Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.20)'deki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak

$$HKO\left(\bar{y}_{st(SD)}\right) \cong \bar{Y}^2\left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} + \psi^2\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2} - 2\psi\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2 + \psi^2R^2S_{xh}^2 - 2\psi RS_{xyh}\right)$$

veya Eşitlik (2.83) ve Eşitlik (2.84) ve Eşitlik (2.85)'den

$$HKO\left(\bar{y}_{st(SD)}\right) = \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + \psi^2V_{2,0} - 2\psi V_{1,1}\right) \tag{2.112}$$

olarak bulunur.

Kadılar ve Çıngı (2003) tahmin edicisi I ile klasik oransal tahmin edici aşağıda karşılaştırılmıştır.

$$HKO\left(\bar{y}_{st(SD)}\right) < HKO\left(\bar{y}_{RC}\right)$$

$$\bar{Y}^2\left(V_{0,2} + \psi^2V_{2,0} - 2\psi V_{1,1}\right) < \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + V_{2,0} - 2V_{1,1}\right)$$

$$\left(\psi^2V_{2,0} - 2\psi V_{1,1}\right) < \left(V_{2,0} - 2V_{1,1}\right)$$

$$\left(\psi^2 - 1\right)V_{2,0} < 2V_{1,1}(\psi - 1)$$

$$(\psi - 1)(\psi + 1)V_{2,0} < 2V_{1,1}(\psi - 1)$$

$$(\psi - 1) > 0\ ,\ \psi > 1 \text{ ise}$$

$$\psi < \frac{2V_{1,1} - V_{2,0}}{V_{2,0}}$$

$$1 < \psi < 2\frac{\beta_c}{R} - 1 \tag{2.113}$$

$$(\psi - 1) < 0\ ,\ \psi < 1 \text{ ise}$$

$$2\frac{\beta_c}{R} - 1 < \psi < 1 \tag{2.114}$$

Eşitlik (2.113) veya Eşitlik (2.114) koşulunun sağlanması durumunda önerilen tahmin edici klasik oransal tahmin ediciden daha etkindir.

2.1.8.2. Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi II

Basit rasgele örneklemede Singh ve Kakran (1993), yardımcı değişkene ait kitle basıklık katsayısı $\beta_{2(x)}$'in bilinmesi durumunda ilgilenilen değişkenin ortalaması için

$$\bar{y}_{SK} = \bar{y}\frac{\bar{X}+\beta_{2(x)}}{\bar{x}+\beta_{2(x)}}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Kadılar ve Çıngı (2003), bu tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak,

$$\bar{y}_{st(SK)} = \bar{y}_{st}\frac{\bar{X}_{st}+\beta_{2(x)st}}{\bar{x}_{st}+\beta_{2(x)st}} \tag{2.115}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada $\beta_{2(x)st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \beta_{2(x)h}$ olarak tanımlanmıştır. Ayrıca aynı mantıkla

$$\delta = \frac{\bar{X}_{st}}{\bar{X}_{st}+\beta_{2(x)st}} \tag{2.116}$$

olarak tanımlanırsa bu tahmin edicinin yanı,

$$Yan\left(\bar{y}_{st(SK)}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \frac{\delta}{\bar{X}}\left(\delta R S_{xh}^2 - S_{xyh}\right) \tag{2.117}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalaması ise

$$HKO\left(\bar{y}_{st(SK)}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + \delta^2 R^2 S_{xh}^2 - 2\delta R S_{xyh}\right)$$

$$= \bar{Y}^2 \left(V_{0,2} + \delta^2 V_{2,0} - 2\delta V_{1,1}\right) \qquad (2.118)$$

şeklinde yazılabilir.

Kadılar ve Çıngı (2003) tahmin edicisi II ile klasik oransal tahmin edici aşağıda karşılaştırılmıştır.

$$HKO\left(\bar{y}_{st(SK)}\right) < HKO\left(\bar{y}_{RC}\right)$$

$$\bar{Y}^2 \left(V_{0,2} + \delta^2 V_{2,0} - 2\delta V_{1,1}\right) < \bar{Y}^2 \left(V_{0,2} + V_{2,0} - 2V_{1,1}\right)$$

$$\left(\delta^2 V_{2,0} - 2\delta V_{1,1}\right) < \left(V_{2,0} - 2V_{1,1}\right)$$

$$\left(\delta^2 - 1\right) V_{2,0} < 2V_{1,1}(\delta - 1)$$

$$(\delta - 1)(\delta + 1) V_{2,0} < 2V_{1,1}(\delta - 1)$$

$$(\delta - 1) > 0 \Rightarrow \delta > 1 \text{ ise}$$

$$\delta < \frac{2V_{1,1} - V_{2,0}}{V_{2,0}}$$

$$1 < \delta < 2\frac{\beta_c}{R} - 1 \qquad (2.119)$$

$$(\delta - 1) < 0 \Rightarrow \delta < 1 \text{ ise}$$

$$2\frac{\beta_c}{R} - 1 < \delta < 1 \qquad (2.120)$$

Eşitlik (2.119) veya Eşitlik (2.120) koşulunun sağlanması durumunda önerilen tahmin edici klasik oransal tahmin ediciden daha etkindir.

2.1.8.3. Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi III

Basit rasgele örneklemede Upadhyaya ve Singh (1999), yardımcı değişkene ait kitle basıklık katsayısı $\beta_{2(x)}$ ve değişim katsayısı C_x'in bilinmesi durumunda ilgilenilen değişkenin ortalaması için

$$\bar{y}_{US1} = \bar{y}\frac{\bar{X}\beta_{2(x)} + C_x}{\bar{x}\beta_{2(x)} + C_x}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Kadılar ve Çıngı (2003), bu tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak,

$$\bar{y}_{st(US1)} = \bar{y}_{st}\frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}} \tag{2.121}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada $C_{x(st)} = \sum_{h=1}^{L} W_h C_{xh}$, $\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h \beta_{2(x)h}$ ve $\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{X}_h \beta_{2(x)h}$ olarak tanımlanmıştır. Bu tanımlara göre

$$\bar{y}_{st(US1)} = \bar{y}_{st}\left(\frac{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}\right)^{-1}$$

$$= \bar{y}_{st}\left(\frac{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)} - \left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + \left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}\right)^{-1}$$

$$= \bar{y}_{st}\left(1 + \frac{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} - \left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}\right)^{-1}$$

$$= \bar{y}_{st}\left(1 + \frac{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} - \left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}} * \frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right)^{-1}$$

$$= \bar{y}_{st}\left(1 + \frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}} * \frac{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} - \left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right)^{-1}$$

$$= \bar{y}_{st}\left(1 + \varphi\frac{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} - \left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right)^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\varphi = \frac{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}} \tag{2.122}$$

olmaktadır. Ayrıca

$$e_1 = \frac{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} - \left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h \beta_{2(x)h}\left(\bar{x}_h - \overline{X}_h\right)}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}} \tag{2.123}$$

tanımlaması yapılarak $\bar{y}_{st(US1)}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.123)'deki e'li terimli ifadelerle yazılırsa,

$$\bar{y}_{st(US1)} = \overline{Y}\left(1 + e_0\right)\left(1 + \varphi e_1\right)^{-1} \tag{2.124}$$

biçimine döner. $\left(1 + \varphi e_1\right)^{-1}$ terimi MacLaurin Serisine açılıp 2. dereceden büyük çarpımlar ihmal edilirse,

$$\bar{y}_{st(US1)} \cong \overline{Y}\left(1 + e_0\right)\left(1 - \varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2\right)$$

$$= \overline{Y}\left(1 - \varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2 + e_0 - \varphi e_0 e_1\right)$$

$$\bar{y}_{st(US1)} - \overline{Y} \cong \overline{Y}\left(-\varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2 + e_0 - \varphi e_0 e_1\right) \tag{2.125}$$

olarak bulunur. Burada

$$E\left(e_1\right) = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h \beta_{2(x)h} E\left(\bar{x}_h - \overline{X}_h\right)}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}} = 0 \tag{2.126}$$

$$e_1^2 = \left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h \beta_{2(x)h}\left(\bar{x}_h - \overline{X}_h\right)}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right)^2 = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h}^2\left(\bar{x}_h - \overline{X}_h\right)^2}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}^2} \tag{2.127}$$

$$E\left(e_1^2\right)=\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h}^2 E\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)^2}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}^2}=\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h}^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}^2} \tag{2.128}$$

$$e_0 e_1=\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h}\left(\bar{y}_h-\bar{Y}_h\right)\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)}{\bar{Y}\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}} \tag{2.129}$$

$$E\left(e_0 e_1\right)=\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h} E\left(\bar{y}_h-\bar{Y}_h\right)\left(\bar{x}_h-\bar{X}_h\right)}{\bar{Y}\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}=\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h} \lambda_h S_{xyh}}{\bar{Y}\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}} \tag{2.130}$$

olmaktadır. Eşitlik (2.125)'in beklenen değeri alınırsa yan,

$$\begin{aligned}
Yan\left(\bar{y}_{st(US1)}\right) &= E\left(\bar{y}_{st(US1)}-\bar{Y}\right) \\
&\cong \bar{Y}E\left(-\varphi e_1+\varphi^2 e_1^2+e_0-\varphi e_0 e_1\right)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.126), Eşitlik (2.128) ve Eşitlik (2.130)'daki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
Yan\left(\bar{y}_{st(US1)}\right) &\cong \bar{Y}\left(\frac{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}\right)^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}\right)^2}\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h}^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}\right)^2}\right. \\
&\left.-\frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h} \lambda_h S_{xyh}}{\bar{Y}\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right) \\
&=\left(\frac{\bar{Y}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h}^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}\right)^2}-\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h} \lambda_h S_{xyh}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}\right)
\end{aligned} \tag{2.131}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.125)'in karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\bar{y}_{st(US1)}-\bar{Y}\right)^2 \cong \bar{Y}^2\left(\varphi^2 e_1^2+e_0^2-2\varphi e_0 e_1\right) \tag{2.132}$$

elde edilir. Bu durumda $\bar{y}_{st(US1)}$ tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}_{st(US1)}\right) &= E\left(\bar{y}_{st(US1)}-\bar{Y}\right)^2 \\
&\cong \bar{Y}^2\left(\varphi^2 E\left(e_1^2\right)+E\left(e_0^2\right)-2\varphi E\left(e_0 e_1\right)\right)
\end{aligned}$$

ve Eşitlik (2.20), Eşitlik (2.128) ve Eşitlik (2.130)'daki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}_{st(US1)}\right) &\cong \bar{Y}^2\left(\frac{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}\right)^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}\right)^2}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}\right)^2}+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}\right. \\
&\qquad \left. -2\frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{\bar{Y}\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right) \\
&= \bar{Y}^2\left(\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}\right)^2}+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2}-2\frac{1}{\bar{Y}}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}\right)
\end{aligned}$$

bulunur ve

$$R_{US1}=\frac{\bar{Y}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}} \tag{2.133}$$

olarak tanımlanırsa,

$$HKO\left(\bar{y}_{st(US1)}\right)\cong R_{US1}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yh}^2-2R_{US1}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + R_{US1}^2 \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2 - 2R_{US1} \beta_{2(x)h} S_{xyh} \right) \tag{2.134}$$

biçiminde yazılabilir.

2.1.8.4. Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi IV

Basit rasgele örneklemede Upadhyaya ve Singh (1999), yardımcı değişkene ait kitle basıklık katsayısı $\beta_{2(x)}$ ve değişim katsayısı C_x'in bilinmesi durumunda ilgilenilen değişkenin ortalaması için

$$\bar{y}_{US2} = \bar{y} \frac{\bar{X} C_x + \beta_{2(x)}}{\bar{x} C_x + \beta_{2(x)}}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Kadılar ve Çıngı (2003), bu tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak,

$$\bar{y}_{st(US2)} = \bar{y}_{st} \frac{\left(\bar{X} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}}{\left(\bar{x} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}} \tag{2.135}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada $\beta_{2(x)st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \beta_{2(x)h}$, $\left(\bar{x} C_x\right)_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h C_{xh}$ ve $\left(\bar{X} C_x\right)_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{X}_h C_{xh}$ olarak tanımlanmıştır. Aynı mantıkla bu tahmin edicinin yanı,

$$Yan\left(\bar{y}_{st(US2)}\right) \cong \left(\frac{\bar{Y} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 C_{xh}^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\bar{X} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}\right)^2} - \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 C_{xh} \lambda_h S_{xyh}}{\left(\bar{X} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}} \right) \tag{2.136}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde hata kareler ortalaması ise

$$HKO\left(\bar{y}_{st(US2)}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + R_{US2}^2 C_{xh}^2 S_{xh}^2 - 2R_{US2} C_{xh} S_{xyh}\right) \tag{2.137}$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$R_{US2} = \frac{\bar{Y}}{\left(\bar{X}C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}} \tag{2.138}$$

olmaktadır.

2.1.9. Shabbir ve Gupta Tahmin Edicileri

Shabbir ve Gupta (2005), Kadılar ve Çıngı (2003) tarafından önerilen tahmin edicileri ve klasik ortalama tahminini ağırlıklandırarak kitle ortalaması için,

$$\bar{y}_{st(\theta)}^{*} = K_1 \bar{y}_{st} + K_2 \bar{y}_{st(\theta)} \tag{2.139}$$

tahmin edicilerini önermişlerdir. Burada $\bar{y}_{st(\theta)}$, θ =SD,SK,US1,US2 Kadılar ve Çıngı (2003) tarafından önerilen tahmin edicilerdir ve $K_1 + K_2 = 1$ ‘dir.

2.1.9.1. Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi I

θ =SD için tahmin edici,

$$\begin{aligned} \bar{y}_{st(SD)}^{*} &= K_1 \bar{y}_{st} + K_2 \bar{y}_{st(SD)} \\ &= K_1 \bar{y}_{st} + K_2 \bar{y}_{st} \frac{\bar{X}_{st} + C_{x(st)}}{\bar{x}_{st} + C_{x(st)}} \end{aligned} \tag{2.140}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{st(SD)}^{*}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)’deki e’li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\bar{y}^{*}_{st(SD)} = K_1\bar{Y}(1+e_0)+K_2\bar{Y}(1+e_0)\left(1+\frac{\bar{X}_{st}}{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}}e_1\right)^{-1}$$

Eşitlik (2.109)'daki tanımdan ve $K_1+K_2=1$ eşitliğinden,

$$\bar{y}^{*}_{st(SD)} = (1-K_2)\bar{Y}(1+e_0)+K_2\bar{Y}(1+e_0)(1+\psi e_1)^{-1}$$

şeklinde yazılabilir. $(1+\psi e_1)^{-1}$ terimi MacLaurin serisine açılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}^{*}_{st(SD)} &\cong \bar{Y}(1+e_0)-K_2\bar{Y}(1+e_0)+K_2\bar{Y}(1+e_0)(1-\psi e_1+\psi^2 e_1^2)\\
&= \bar{Y}+\bar{Y}e_0+K_2\bar{Y}(1+e_0)(-\psi e_1+\psi^2 e_1^2)\\
&\cong \bar{Y}+\bar{Y}\left[e_0+K_2\left(-\psi e_1+\psi^2 e_1^2-\psi e_0 e_1\right)\right]
\end{aligned}$$

$$\bar{y}^{*}_{st(SD)}-\bar{Y} \cong \bar{Y}\left[e_0+K_2\left(-\psi e_1+\psi^2 e_1^2-\psi e_0 e_1\right)\right] \qquad (2.141)$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse yan,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Yan}\left(\bar{y}^{*}_{st(SD)}\right) &= E\left(\bar{y}^{*}_{st(SD)}-\bar{Y}\right)\\
&\cong \bar{Y}E\left[e_0+K_2\left(-\psi e_1+\psi^2 e_1^2-\psi e_0 e_1\right)\right]
\end{aligned}$$

yazılır ve Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.15)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Yan}\left(\bar{y}^{*}_{st(SD)}\right) &\cong \bar{Y}K_2\left(\psi^2\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2}-\psi\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)\\
&= \bar{Y}K_2\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\psi\left(\psi\frac{S_{xh}^2}{\bar{X}^2}-\frac{S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)\right)\\
&= K_2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\frac{\psi}{\bar{X}}\left(\psi R S_{xh}^2-S_{xyh}\right)
\end{aligned}$$

$$= K_2 Yan\left(\bar{y}_{st(SD)}\right) \tag{2.142}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.141)'in karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa

$$\left(\bar{y}^*_{st(SD)} - \bar{Y}\right)^2 \cong \bar{Y}^2\left(e_0^2 + K_2^2\psi^2 e_1^2 - 2K_2\psi e_0 e_1\right) \tag{2.143}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$HKO\left(\bar{y}^*_{st(SD)}\right) = E\left(\bar{y}^*_{st(SD)} - \bar{Y}\right)^2$$
$$\cong \bar{Y}^2 E\left(e_0^2 + K_2^2\psi^2 e_1^2 - 2K_2\psi e_0 e_1\right)$$

biçiminde ifade edilip Eşitlik (2.13), Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.20)'deki beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$HKO\left(\bar{y}^*_{st(SD)}\right) \cong \bar{Y}^2\left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} + K_2^2\psi^2\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2} - 2K_2\psi\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)$$
$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2 + K_2^2\psi^2 R^2 S_{xh}^2 - 2K_2\psi R S_{xyh}\right)$$

veya Eşitlik (2.83), Eşitlik (2.84) ve Eşitlik (2.85)'den

$$HKO\left(\bar{y}^*_{st(SD)}\right) \cong \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + K_2^2\psi^2 V_{2,0} - 2K_2\psi V_{1,1}\right) \tag{2.144}$$

şeklinde yazılabilir. Hata kareler ortalamasını minimum yapan K_2 değerini bulmak için,

$$\frac{\partial HKO\left(\bar{y}^*_{st(SD)}\right)}{\partial K_2} = 0$$
$$\bar{Y}^2\left(2K_2\psi^2 V_{2,0} - 2\psi V_{1,1}\right) = 0$$

$$K_2 = \frac{\psi V_{1,1}}{\psi^2 V_{2,0}}$$

$$K_2^* = \frac{V_{1,1}}{\psi V_{2,0}} = \frac{\beta_c}{R\psi} \tag{2.145}$$

K_2^*'ı Eşitlik (2.144)'de yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} HKO_{min}\left(\bar{y}^*_{st(SD)}\right) &= \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + \left(\frac{V_{1,1}}{\psi V_{2,0}}\right)^2 \psi^2 V_{2,0} - 2\frac{V_{1,1}}{\psi V_{2,0}}\psi V_{1,1}\right) \\ &= \bar{Y}^2\left(V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right) \\ &= \bar{Y}^2 V_{0,2}\left(1-\rho_c^2\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2\left(1-\rho_c^2\right) \end{aligned} \tag{2.146}$$

minimum hata kareler ortalaması bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I ile klasik oransal tahmin edicinin karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$\begin{aligned} & HKO\left(\bar{y}_{RC}\right) - HKO_{min}\left(\bar{y}^*_{st(SD)}\right) > 0 \\ & \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + V_{2,0} - 2V_{1,1}\right) - \bar{Y}^2 V_{0,2}\left(1-\rho_c^2\right) > 0 \\ & V_{0,2} + V_{2,0} - 2V_{1,1} - V_{0,2} + V_{0,2}\rho_c^2 > 0 \\ & \rho_c^2 > \frac{2V_{1,1} - V_{2,0}}{V_{0,2}} \end{aligned} \tag{2.147}$$

Eşitlik (2.147)'nin sağlanması durumunda Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I, klasik oransal tahmin ediciye göre daha etkindir.

Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I ile Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi I'in karşılaştırılması aşağıdaki gibi yapılabilir.

$$HKO\left(\overline{y}_{st(SD)}\right) - HKO_{min}\left(\overline{y}^{*}_{st(SD)}\right) > 0$$

$$\overline{Y}^2\left(V_{0,2} + \psi^2 V_{2,0} - 2\psi V_{1,1}\right) - \overline{Y}^2 V_{0,2}\left(1 - \rho_c^2\right) > 0$$

$$\psi^2 V_{2,0} - 2\psi V_{1,1} + V_{0,2}\rho_c^2 > 0$$

$$\rho_c^2 > \frac{2\psi V_{1,1} - \psi^2 V_{2,0}}{V_{0,2}} \tag{2.148}$$

Eşitlik (2.148)'in sağlanması durumunda Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I, Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi I'e göre daha etkindir.

2.1.9.2. Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi II

θ =SK için tahmin edici,

$$\overline{y}^{*}_{st(SK)} = K_1\overline{y}_{st} + K_2\overline{y}_{st(SK)}$$

$$= K_1\overline{y}_{st} + K_2\overline{y}_{st}\frac{\overline{X}_{st} + \beta_{2(x)st}}{\overline{x}_{st} + \beta_{2(x)st}} \tag{2.149}$$

şeklindedir. $\overline{y}^{*}_{st(SK)}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'deki e'li terimler cinsinden yazılır ve MacLaurin Serisine açılırsa,

$$\overline{y}^{*}_{st(SK)} - \overline{Y} \cong \overline{Y}\left[e_0 + K_2\left(-\delta e_1 + \delta^2 e_1^2 - \delta e_0 e_1\right)\right] \tag{2.150}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse yan,

$$Yan\left(\overline{y}^{*}_{st(SK)}\right) \cong K_2\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h \frac{\delta}{\overline{X}}\left(\delta R S_{xh}^2 - S_{xyh}\right)$$

$$= K_2 Yan\left(\overline{y}_{st(SK)}\right) \tag{2.151}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.151)'in karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\bar{y}^*_{st(SK)} - \bar{Y}\right)^2 \cong \bar{Y}^2\left(e_0^2 + K_2^2\delta^2 e_1^2 - 2K_2\delta e_0 e_1\right) \tag{2.152}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO\left(\bar{y}^*_{st(SK)}\right) &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2 + K_2^2\delta^2R^2S_{xh}^2 - 2K_2\delta RS_{xyh}\right) \\ &= \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + K_2^2\delta^2V_{2,0} - 2K_2\delta V_{1,1}\right) \end{aligned} \tag{2.153}$$

şeklinde yazılabilir. Hata kareler ortalamasını minimum yapan K_2 değeri

$$\frac{\partial HKO\left(\bar{y}^*_{st(SK)}\right)}{\partial K_2} = 0$$

$$K_2 = \frac{\delta V_{1,1}}{\delta^2 V_{2,0}}$$

$$K_2^* = \frac{V_{1,1}}{\delta V_{2,0}} = \frac{\beta_c}{R\delta} \tag{2.154}$$

olarak bulunur. K_2^*'ı $HKO\left(\bar{y}^*_{st(SK)}\right)$ eşitliğinde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned} HKO_{min}\left(\bar{y}^*_{st(SK)}\right) &= \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + \left(\frac{V_{1,1}}{\delta V_{2,0}}\right)^2\delta^2V_{2,0} - 2\frac{V_{1,1}}{\delta V_{2,0}}\delta V_{1,1}\right) \\ &= \bar{Y}^2\left(V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right) \\ &= \bar{Y}^2V_{0,2}\left(1-\rho_c^2\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_hS_{yh}^2\left(1-\rho_c^2\right) \end{aligned} \tag{2.155}$$

minimum hata kareler ortalaması bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II ile klasik oransal tahmin edici karşılaştırıldığında Eşitlik (2.147)'nin sağlanması durumunda Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II, klasik oransal tahmin edicisine göre daha etkin olduğu görülmektedir.

Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi II ile Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II karşılaştırıldığında ise

$$
\begin{aligned}
& HKO\left(\bar{y}_{st(SK)}\right) - HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(SK)}\right) > 0 \\
& \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + \delta^2 V_{2,0} - 2\delta V_{1,1}\right) - \bar{Y}^2 V_{0,2}\left(1-\rho_c^2\right) > 0 \\
& \rho_c^2 > \frac{2\delta V_{1,1} - \delta^2 V_{2,0}}{V_{0,2}} \qquad (2.156)
\end{aligned}
$$

Eşitlik (2.156)'nın sağlanması durumunda Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II, Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi II'ye göre daha etkindir.

2.1.9.3. Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi III

θ =US1 için tahmin edici,

$$
\begin{aligned}
\bar{y}^{*}_{st(US1)} &= K_1 \bar{y}_{st} + K_2 \bar{y}_{st(US1)} \\
&= K_1 \bar{y}_{st} + K_2 \bar{y}_{st} \frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}} \qquad (2.157)
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.124)'den yararlanarak tahmin edici,

$$
\begin{aligned}
\bar{y}^{*}_{st(US1)} &= \left(1-K_2\right)\bar{Y}\left(1+e_0\right) + K_2\bar{Y}\left(1+e_0\right)\left(1+\varphi e_1\right)^{-1} \\
&\cong \bar{Y}\left(1+e_0\right) - K_2\bar{Y}\left(1+e_0\right) + K_2\bar{Y}\left(1+e_0\right)\left(1-\varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2\right)
\end{aligned}
$$

$$= \bar{Y} + \bar{Y}e_0 + K_2\bar{Y}(1+e_0)\left(-\varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2\right)$$

$$= \bar{Y} + \bar{Y}\left[e_0 + K_2\left(-\varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2 - \varphi e_0 e_1\right)\right]$$

$$\bar{y}^*_{st(US1)} - \bar{Y} \cong \bar{Y}\left[e_0 + K_2\left(-\varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2 - \varphi e_0 e_1\right)\right] \qquad (2.158)$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.158)'de beklenen değere geçilirse yan,

$$\begin{aligned} Yan\left(\bar{y}^*_{st(US1)}\right) &= E\left(\bar{y}^*_{st(US1)} - \bar{Y}\right) \\ &\cong \bar{Y}E\left[e_0 + K_2\left(-\varphi e_1 + \varphi^2 e_1^2 - \varphi e_0 e_1\right)\right] \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.126), Eşitlik (2.128) ve Eşitlik (2.130)'da verilen beklenen değer eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} Yan\left(\bar{y}^*_{st(US1)}\right) &\cong \bar{Y}K_2\left(\frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}\right)^2}\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}^2}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{\bar{Y}\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right) \\ &= K_2\left(\frac{\bar{Y}\sum_{h=1}^{L} W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}\right)^2} - \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}\right)}\right) \\ &= K_2 Yan\left(\bar{y}_{st(US1)}\right) \end{aligned} \qquad (2.159)$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.158)'in karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\bar{y}^*_{st(US1)} - \bar{Y}\right)^2 \cong \bar{Y}^2\left(e_0^2 + K_2^2\varphi^2 e_1^2 - 2K_2\varphi e_0 e_1\right) \qquad (2.160)$$

elde edilir. Eşitlik (2.160)'ın beklenen değeri alınırsa hata kareler ortalaması,

$$\mathrm{HKO}\left(\bar{y}^{*}_{st(US1)}\right)=E\left(\bar{y}^{*}_{st(US1)}-\bar{Y}\right)^{2}$$

$$\cong \bar{Y}^{2}E\left(e_0^2+K_2^2\varphi^2e_1^2-2K_2\varphi e_0e_1\right)$$

olup Eşitlik (2.20), Eşitlik (2.128) ve Eşitlik (2.130)'da verilen beklenen değer eşitliklerinden

$$\mathrm{HKO}\left(\bar{y}^{*}_{st(US1)}\right)\cong \bar{Y}^{2}\left(\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_hS_{yh}^2}{\bar{Y}^2}+K_2^2\frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}^2}{\left(\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}\right)^2}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_hS_{xh}^2}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}^2}\right.$$

$$\left.-2K_2\frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_hS_{xyh}}{\bar{Y}\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right)$$

$$=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2+K_2^2R_{US1}^2\beta_{2(x)h}^2S_{xh}^2-2K_2R_{US1}\beta_{2(x)h}S_{xyh}\right) \qquad (2.161)$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan K_2 değeri,

$$\frac{\partial \mathrm{HKO}\left(\bar{y}^{*}_{st(US1)}\right)}{\partial K_2}=0$$

$$\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(2K_2R_{US1}^2\beta_{2(x)h}^2S_{xh}^2-2R_{US1}\beta_{2(x)h}S_{xyh}\right)=0$$

$$K_2R_{US1}^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\beta_{2(x)h}^2S_{xh}^2-R_{US1}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\beta_{2(x)h}S_{xyh}=0$$

$$K_2=\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\beta_{2(x)h}S_{xyh}}{R_{US1}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\beta_{2(x)h}^2S_{xh}^2}=K_2^{*} \qquad (2.162)$$

K_2^{*} değerini Eşitlik (2.161)'de yerine koyulursa,

$$HKO_{min}\left(\bar{y}^*_{st(US1)}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + K_2^{*2} R_{US1}^2 \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2 - 2K_2^* R_{US1} \beta_{2(x)h} S_{xyh}\right)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 - \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h} S_{xyh}\right)^2}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2\right)} \qquad (2.163)$$

olarak bulunur.

2.1.9.4. Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi IV

θ =US2 için tahmin edici,

$$\bar{y}^*_{st(US2)} = K_1 \bar{y}_{st} + K_2 \bar{y}_{st(US2)}$$

$$= K_1 \bar{y}_{st} + K_2 \bar{y}_{st} \frac{\left(\bar{X} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}}{\left(\bar{x} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}} \qquad (2.164)$$

şeklindedir. Aynı mantıkla bu tahmin edicinin yanı

$$Yan\left(\bar{y}^*_{st(US2)}\right) \cong \bar{Y} K_2 \left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 C_{xh}^2 \lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\bar{X} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}\right)^2} - \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 C_{xh} \lambda_h S_{xyh}}{\bar{Y}\left(\left(\bar{X} C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}\right)} \right)$$

$$= K_2 Yan\left(\bar{y}_{st(US2)}\right) \qquad (2.165)$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalaması ise

$$HKO\left(\bar{y}^*_{st(US2)}\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + K_2^2 R_{US2}^2 C_{xh}^2 S_{xh}^2 - 2K_2 R_{US2} C_{xh} S_{xyh}\right) \qquad (2.166)$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan K_2 değeri,

$$K_2 = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh}}{R_{US2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2} = K_2^* \tag{2.167}$$

olmaktadır. K_2^* değeri Eşitlik (2.166)'da yerine koyulursa,

$$\begin{aligned} HKO_{min}\left(\bar{y}_{st(US2)}^*\right) &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + K_2^{*2} R_{US2}^2 C_{xh}^2 S_{xh}^2 - 2K_2^* R_{US2} C_{xh} S_{xyh}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 - \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh}\right)^2}{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2\right)} \end{aligned} \tag{2.168}$$

elde edilir.

2.1.10. Singh ve Diğerleri Tahmin Edicileri

Singh ve diğerleri (2007), Kadılar ve Çıngı (2003) tarafından önerilen tahmin edicilere güç dönüşümü uygulayarak ortalama için,

$$\bar{y}_{R(\alpha_{st})} = \bar{y}_{st}\left(\frac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}\right)^{\alpha_{st}} \tag{2.169}$$

$$\bar{y}_{R(\delta_{st})} = \bar{y}_{st}\left(\frac{\left(\bar{X}C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}}{\left(\bar{x}C_x\right)_{st} + \beta_{2(x)st}}\right)^{\delta_{st}} \tag{2.170}$$

tahmin edicilerini önermişlerdir. Burada α_{st} ve δ_{st} sabitlerdir.

2.1.10.1. Singh ve Diğerleri Tahmin Edicisi I

$\bar{y}_{R(\alpha_{st})}$, tahmin edicisi Eşitlik (2.124)'den yararlanarak e'li terimler cinsinden

$$\bar{y}_{R(\alpha_{st})} = \bar{Y}(1+e_0)(1+\varphi e_1)^{-\alpha_{st}}$$

şeklinde yazılabilir. $(1+\varphi e_1)^{-\alpha_{st}}$ terimi MacLaurin Serisine açılırsa,

$$\bar{y}_{R(\alpha_{st})} \cong \bar{Y}(1+e_0)\left(1-\alpha_{st}\varphi e_1+\frac{\alpha_{st}(\alpha_{st}+1)}{2}\varphi^2 e_1^2\right)$$

$$= \bar{Y}\left(1-\alpha_{st}\varphi e_1+\frac{\alpha_{st}(\alpha_{st}+1)}{2}\varphi^2 e_1^2+e_0-\alpha_{st}\varphi e_0 e_1\right)$$

$$\bar{y}_{R(\alpha_{st})}-\bar{Y} \cong \bar{Y}\left(-\alpha_{st}\varphi e_1+\frac{\alpha_{st}(\alpha_{st}+1)}{2}\varphi^2 e_1^2+e_0-\alpha_{st}\varphi e_0 e_1\right) \qquad (2.171)$$

elde edilir. Eşitlik (2.171)'den beklenen değere geçilirse yan,

$$\mathrm{Yan}\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}\right)=E\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}-\bar{Y}\right)$$

$$\cong \bar{Y}E\left(-\alpha_{st}\varphi e_1+\frac{\alpha_{st}(\alpha_{st}+1)}{2}\varphi^2 e_1^2+e_0-\alpha_{st}\varphi e_0 e_1\right)$$

olup Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.126), Eşitlik (2.128) ve Eşitlik (2.130)'dan yararlanarak,

$$\mathrm{Yan}\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}\right)\cong \bar{Y}\left(\frac{\alpha_{st}(\alpha_{st}+1)}{2}\frac{\left((\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}\right)^2}{\left((\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}+C_{x(st)}\right)^2}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left((\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}\right)^2}\right.$$

$$\left.-\alpha_{st}\frac{(\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}}{(\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}+C_{x(st)}}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{\bar{Y}(\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}}\right)$$

$$=\frac{\alpha_{st}(\alpha_{st}+1)}{2}\frac{\bar{Y}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left((\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}+C_{x(st)}\right)^2}-\alpha_{st}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{(\bar{X}\beta_{2(x)})_{st}+C_{x(st)}}$$

$$=\alpha_{st}\left[\frac{(\alpha_{st}+1)}{2}\frac{\overline{Y}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}\right)^2}-\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}\right] \tag{2.172}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.172)'nin karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\overline{y}_{R(\alpha_{st})}-\overline{Y}\right)^2\cong\overline{Y}^2\left(\alpha_{st}^2\varphi^2e_1^2+e_0^2-2\alpha_{st}\varphi e_0e_1\right) \tag{2.173}$$

elde edilir. Eşitlik (2.173)'ün beklenen değeri alınırsa hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}HKO\left(\overline{y}_{R(\alpha_{st})}\right)&=E\left(\overline{y}_{R(\alpha_{st})}-\overline{Y}\right)^2\\&\cong\overline{Y}^2\left(\alpha_{st}^2\varphi^2E\left(e_1^2\right)+E\left(e_0^2\right)-2\alpha_{st}\varphi E\left(e_0e_1\right)\right)\end{aligned}$$

olur. Eşitlik (2.20), Eşitlik (2.128) ve Eşitlik (2.130)'daki beklenen değerlerden yararlanarak,

$$\begin{aligned}HKO\left(\overline{y}_{R(\alpha_{st})}\right)\cong\overline{Y}^2&\left(\alpha_{st}^2\frac{\left(\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}\right)^2}{\left(\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}\right)^2}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}{\left(\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}\right)^2}+\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yh}^2}{\overline{Y}^2}\right.\\&\left.-2\alpha_{st}\frac{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}\lambda_h S_{xyh}}{\overline{Y}\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}}\right)\\&=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2+\alpha_{st}^2R_{US1}^2\beta_{2(x)h}^2S_{xh}^2-2\alpha_{st}R_{US1}\beta_{2(x)h}S_{xyh}\right)\end{aligned} \tag{2.174}$$

olarak bulunur. Burada

$$R_{US1}=\frac{\overline{Y}}{\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}+C_{x(st)}}$$

olmaktadır. Hata kareler ortalamasını minimum yapan α_{st} değeri,

$$\frac{\partial HKO\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}\right)}{\partial \alpha_{st}} = 0$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(2\alpha_{st} R_{US1}^2 \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2 - 2R_{US1} \beta_{2(x)h} S_{xyh}\right) = 0$$

$$\alpha_{st} R_{US1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2 = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h} S_{xyh}$$

$$\alpha_{st}^* = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h} S_{xyh}}{R_{US1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2} \tag{2.175}$$

biçiminde elde edilir. Bu değer Eşitlik (2.174)'te yerine koyulursa,

$$HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 - \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h} S_{xyh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2} \tag{2.176}$$

olarak bulunur. Bu hata kareler ortalaması Shabbir ve Gupta tahmin edicisi III için bulunan minimum hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi III ile Singh ve diğerleri tahmin edicisi I karşılaştırıldığında ise

$$HKO\left(\bar{y}_{st(US1)}\right) - HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}\right) > 0$$

$$R_{US1}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h}^2 \lambda_h S_{xh}^2 - 2R_{US1} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \beta_{2(x)h} \lambda_h S_{xyh} + \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h} S_{xyh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \beta_{2(x)h}^2 S_{xh}^2} > 0$$

$$\frac{\left(R_{US1}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2-\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\beta_{2(x)h}S_{xyh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\beta_{2(x)h}^2\lambda_h S_{xh}^2}>0 \tag{2.177}$$

koşulu her zaman sağlandığından Singh ve diğerleri tahmin edicisi I, Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi III'den daha etkindir.

2.1.10.2. Singh ve Diğerleri Tahmin Edicisi II

$\bar{y}_{R(\delta_{st})}$ tahmin edicisinin yanı aynı mantıkla,

$$Yan\left(\bar{y}_{R(\delta_{st})}\right)\cong\delta_{st}\left(\frac{(\delta_{st}+1)}{2}\frac{\bar{Y}\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2\right)}{\left(\left(\bar{X}C_x\right)_{st}+\beta_{2(x)st}\right)^2}-\frac{\left(\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h C_{xh}S_{xyh}\right)}{\left(\bar{X}C_x\right)_{st}+\beta_{2(x)st}}\right) \tag{2.178}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalaması ise,

$$HKO\left(\bar{y}_{R(\delta_{st})}\right)\cong\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2+\delta_{st}^2R_{US2}^2C_{xh}^2S_{xh}^2-2\delta_{st}R_{US2}C_{xh}S_{xyh}\right) \tag{2.179}$$

şeklinde elde edilir. Burada R_{US2}

$$R_{US2}=\frac{\bar{Y}}{\left(\bar{X}C_x\right)_{st}+\beta_{2(x)st}}$$

olmaktadır. Hata kareler ortalamasını minimum yapan δ_{st} değeri,

$$\frac{\partial HKO\left(\bar{y}_{R(\delta_{st})}\right)}{\partial\delta_{st}}=0$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(2\delta_{st} R_{US2}^2 C_{xh}^2 S_{xh}^2 - 2R_{US2} C_{xh} S_{xyh}\right) = 0$$

$$\delta_{st} R_{US2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2 = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh}$$

$$\delta_{st}^* = \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh}}{R_{US2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2} \tag{2.180}$$

olarak bulunur. Bu değer Eşitlik (2.179)'da yerine koyulursa,

$$HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\delta_{st})}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 - \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2} \tag{2.181}$$

olarak bulunur. Bu hata kareler ortalaması Shabbir ve Gupta tahmin edicisi IV için bulunan minimum hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi IV ile önerilen tahmin edici karşılaştırıldığında,

$$HKO\left(\bar{y}_{st(US2)}\right) - HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\delta_{st})}\right) > 0$$

$$R_{US2}^2 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2 - 2R_{US2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh} + \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2} > 0$$

$$\frac{\left(R_{US2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2 - \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh} S_{xyh}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 S_{xh}^2} > 0 \tag{2.182}$$

koşulu her zaman sağlandığından önerilen tahmin edici daha etkindir.

2.1.11. Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi V

Basit rasgele örneklemede Prasad (1989) ortalama tahmini için

$$\bar{y}_p = \kappa \bar{y}_R = \kappa \frac{\bar{y}}{\bar{x}} \bar{X}$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Kadılar ve Çıngı (2005) bu tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak,

$$\bar{y}_{stp} = \kappa \bar{y}_{RC} = \kappa \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X} \qquad (2.183)$$

tahmin edicisini önermişlerdir. Burada κ sabit bir terimdir.

Bu tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'teki e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{stp} &= \kappa \frac{\bar{Y}(1+e_0)}{\bar{X}(1+e_1)} \bar{X} \\
&= \kappa \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)^{-1} \\
&\cong \kappa \bar{Y}(1+e_0)\left(1-e_1+e_1^2\right) \\
&= \kappa \bar{Y}\left(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right) \qquad (2.184)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{stp} - \bar{Y} &\cong \kappa \bar{Y}\left(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right) - \bar{Y} \\
&= \bar{Y}(\kappa-1) + \kappa \bar{Y}\left(-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right) \qquad (2.185)
\end{aligned}$$

olur ve Eşitlik (2.185)'ten beklenen değere geçilirse yan,

$$\begin{aligned}
Yan(\bar{y}_{stp}) &= E(\bar{y}_{stp} - \bar{Y}) \\
&\cong \bar{Y}(\kappa-1) + \kappa \bar{Y} E\left(-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right)
\end{aligned}$$

olup Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.15)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$\text{Yan}\left(\overline{y}_{stp}\right) \cong \overline{Y}(\kappa-1)+\kappa\overline{Y}\left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2}-\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xyh}}{\overline{X}\overline{Y}}\right)$$

$$=\overline{Y}(\kappa-1)+\kappa\frac{1}{\overline{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h\left(RS_{xh}^2-S_{xyh}\right) \tag{2.186}$$

elde edilir. Eşitlik (2.185)'in karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\overline{y}_{stp}-\overline{Y}\right)^2 &\cong \left[\kappa\overline{Y}\left(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right)-\overline{Y}\right]^2 \\
&=\kappa^2\overline{Y}^2\left(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right)^2+\overline{Y}^2-2\kappa\overline{Y}^2\left(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right) \\
&=\kappa^2\overline{Y}^2\left(1+e_1^2+e_0^2-2e_1+2e_1^2+2e_0-2e_0e_1-2e_0e_1\right)+\overline{Y}^2 \\
&\quad-2\kappa\overline{Y}^2\left(1-e_1+e_1^2+e_0-e_0e_1\right)
\end{aligned} \tag{2.187}$$

biçiminde yazılır. Eşitlik (2.187)'den beklenen değere geçilirse, Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.13), Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.20)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
\text{HKO}\left(\overline{y}_{stp}\right) &\cong \kappa^2\overline{Y}^2\left[1+3\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2}+\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yh}^2}{\overline{Y}^2}-4\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yxh}}{\overline{Y}\overline{X}}\right]+\overline{Y}^2 \\
&\quad-2\kappa\overline{Y}^2\left[1+\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\overline{X}^2}-\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yxh}}{\overline{Y}\overline{X}}\right] \\
&=\kappa^2\left[\overline{Y}^2+3R^2\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xh}^2+\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yh}^2-4R\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yxh}\right]+\overline{Y}^2
\end{aligned}$$

$$-2\kappa\left[\overline{Y}^2+R^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{xh}^2-R\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yxh}\right]$$

$$=\overline{Y}^2(\kappa-1)^2+\kappa^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(3R^2S_{xh}^2+S_{yh}^2-4RS_{yxh}\right)$$

$$-2\kappa R\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(RS_{xh}^2-S_{yxh}\right)$$

veya Eşitlik (2.83), Eşitlik (2.84) ve Eşitlik (2.85)'den

$$HKO\left(\overline{y}_{stp}\right)\cong\overline{Y}^2\left[(\kappa-1)^2+\kappa^2\left(3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}\right)-2\kappa\left(V_{2,0}-V_{1,1}\right)\right] \tag{2.188}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan κ değeri,

$$\frac{\partial HKO\left(\overline{y}_{stp}\right)}{\partial\kappa}=0$$

$$2(\kappa-1)+2\kappa\left(3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}\right)-2\left(V_{2,0}-V_{1,1}\right)=0$$

$$\kappa\left(1+3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}\right)=1+\left(V_{2,0}-V_{1,1}\right)$$

$$\kappa^*=\frac{1+V_{2,0}-V_{1,1}}{1+3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}}$$

$$\kappa^*=\frac{\overline{Y}^2+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(R^2S_{xh}^2-RS_{yxh}\right)}{\overline{Y}^2+\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left(3R^2S_{xh}^2+S_{yh}^2-4RS_{yxh}\right)} \tag{2.189}$$

şeklindedir.

$$HKO_{min}\left(\overline{y}_{stp}\right)=\overline{Y}^2\left[1+\kappa^{*2}\left(1+3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}\right)-2\kappa^*\left(1+V_{2,0}-V_{1,1}\right)\right]$$

$$=\overline{Y}^2\left[1+\left(\frac{1+V_{2,0}-V_{1,1}}{1+3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}}\right)^2\left(1+3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}\right)\right]$$

$$-2\frac{1+V_{2,0}-V_{1,1}}{1+3V_{2,0}+V_{0,2}-4V_{1,1}}\left(1+V_{2,0}-V_{1,1}\right)$$

$$= \overline{Y}^2 \left[1 - \frac{(1 + V_{2,0} - V_{1,1})^2}{(1 + 3V_{2,0} + V_{0,2} - 4V_{1,1})} \right] \tag{2.190}$$

Klasik oransal tahmin edici ile önerilen tahmin edici karşılaştırıldığında,

$$HKO(\overline{y}_{RC}) - HKO(\overline{y}_{stp}) > 0$$

$$\overline{Y}^2 (V_{0,2} + V_{2,0} - 2V_{1,1}) - \overline{Y}^2 \left[(\kappa - 1)^2 + \kappa^2 (3V_{2,0} + V_{0,2} - 4V_{1,1}) - 2\kappa (V_{2,0} - V_{1,1}) \right] > 0$$

$$\left(-(\kappa - 1)^2 + (1 - \kappa^2) V_{0,2} + (1 - 3\kappa^2 + 2\kappa) V_{2,0} - 2(1 - 2\kappa^2 + \kappa) V_{1,1} \right) > 0$$

$$\left(-(1 - \kappa)^2 + (1 + \kappa)(1 - \kappa) V_{0,2} + (3\kappa + 1)(1 - \kappa) V_{2,0} - 2(1 - \kappa)^2 V_{1,1} \right) > 0$$

$$(1 - \kappa) > 0 \Rightarrow \kappa < 1$$

$$(\kappa - 1 + (1 + \kappa) V_{0,2} + (3\kappa + 1) V_{2,0} - 2(1 - \kappa) V_{1,1}) > 0$$

$$\kappa (1 + V_{0,2} + 3V_{2,0} + 2V_{1,1}) > 1 - V_{0,2} - V_{2,0} + 2V_{1,1}$$

$$\kappa > \frac{1 - V_{0,2} - V_{2,0} + 2V_{1,1}}{1 + V_{0,2} + 3V_{2,0} + 2V_{1,1}}$$

$$\frac{1 - V_{0,2} - V_{2,0} + 2V_{1,1}}{1 + V_{0,2} + 3V_{2,0} + 2V_{1,1}} < \kappa < 1 \tag{2.191}$$

$$(1 - \kappa) < 0 \Rightarrow 1 < \kappa$$

$$1 < \kappa < \frac{1 - V_{0,2} - V_{2,0} + 2V_{1,1}}{1 + V_{0,2} + 3V_{2,0} + 2V_{1,1}} \tag{2.192}$$

koşullarının sağlanması durumunda önerilen tahmin edici daha etkindir.

Eşitlik (2.187) de kare alınırken e_1^2 ve $e_0 e_1$ terimleri ihmal edilirse

$$(\overline{y}_{stp} - \overline{Y})^2 \cong \left[\kappa \overline{Y} (1 - e_1 + e_0) - \overline{Y} \right]^2$$

$$= \left[\kappa^2 \overline{Y}^2 (1 + e_1^2 + e_0^2 - 2e_1 + 2e_0 - 2e_0 e_1) + \overline{Y}^2 - 2\overline{Y}^2 (1 - e_1 + e_0) \right] \tag{2.193}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması;

$$HKO^*(\bar{y}_{stp}) = E(\bar{y}_{stp} - \bar{Y})^2$$

$$= E\left[\kappa^2\bar{Y}^2\left(1 + e_1^2 + e_0^2 - 2e_1 + 2e_0 - 2e_0e_1\right) + \bar{Y}^2 - 2\bar{Y}^2\left(1 - e_1 + e_0\right)\right]$$

$$= \bar{Y}^2(\kappa - 1)^2 + \kappa^2\bar{Y}^2\left(\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2} + \frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{yh}^2}{\bar{Y}^2} - 2\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{xyh}}{\bar{X}\bar{Y}}\right)$$

$$= \bar{Y}^2(\kappa - 1)^2 + \kappa^2\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2 - 2RS_{xyh} + R^2S_{xh}^2\right) \qquad (2.194)$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan κ değeri,

$$\frac{\partial HKO^*(\bar{y}_{stp})}{\partial\kappa} = 0$$

$$\bar{Y}^2\, 2(\kappa - 1) + 2\kappa\sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2 - 2RS_{xyh} + R^2S_{xh}^2\right) = 0$$

$$\kappa^{**} = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h\left(S_{yh}^2 - 2RS_{xyh} + R^2S_{xh}^2\right)} \qquad (2.195)$$

Burada κ^{**} (0,1) aralığında değer almaktadır (Kadılar ve Çıngı, 2005).

2.1.12. Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi V

Basit rasgele örneklemede Ray ve Singh (1981)'ın önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{RS} = \left[\bar{y} + b_c\left(\bar{X}^\alpha - \bar{x}^\alpha\right)\right]\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^v$$

şeklindedir. Burada α, v sabitler ve b_c örneklemden elde edilen regresyon katsayısıdır. Tahmin edicide $\alpha = 1$, $v = 1$ olması durumu Kadılar ve Çıngı (2004)'nın basit rasgele örnekleme için önerdiği ortalama tahmin edicisine eşit olmaktadır.

Bu tahmin edici tabakalı örnekleme için şu şekilde verilebilir (Shabbir ve Gupta, 2006):

$$\bar{y}^{*}_{st(RS)} = \left[\bar{y}_{st} + b_c\left(\bar{X} - \bar{x}_{st}\right)\right]\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right) \tag{2.196}$$

Basit rasgele örneklemede Bedi (1996)'nin x yardımcı değişkenine uyguladığı dönüşüm,

$$Z_i = x_i + X \tag{2.197}$$

şeklindedir. Tabakalı örnekleme için bu dönüşüm

$$Z_{hi} = x_{hi} + X$$

$$\bar{z}_h = \bar{x}_h + X$$

$$\bar{Z}_h = \bar{X}_h + X$$

$$\bar{z}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{x}_h + X\right) = \bar{x}_{st} + N\bar{X} \tag{2.198}$$

$$\bar{Z} = \sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{X}_h + X\right) = (N+1)\bar{X} \tag{2.199}$$

şeklinde verilebilir. Shabbir ve Gupta (2006), Bedi (1996) dönüşümünü kullanarak

$$\bar{y}_M = \kappa\left\{\bar{y}_{st} + b_c\left(\bar{X} - \bar{x}_{st}\right)\right\}\left(\frac{\bar{z}_{st}}{\bar{Z}}\right) \tag{2.200}$$

ortalama tahmin edicisini önermişlerdir. Burada κ sabit bir sayıdır. Eşitlik (2.198) ve Eşitlik (2.199), Eşitlik (2.200)'de yerine koyulduğunda,

$$\bar{y}_M = \kappa\left\{\bar{y}_{st} + b_c\left(\bar{X} - \bar{x}_{st}\right)\right\}\left(\frac{\bar{x}_{st} + N\bar{X}}{(N+1)\bar{X}}\right) \tag{2.201}$$

elde edilir. Burada b_c'nin β_c gibi bir sabite eşit olduğu varsayımı yapılarak, Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'deki e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_M &= \kappa\left\{\bar{Y}(1+e_0)+\beta_c\left[\bar{X}-\bar{X}(1+e_1)\right]\right\}\left(\frac{\bar{X}(1+e_1)+N\bar{X}}{(N+1)\bar{X}}\right) \\
&= \kappa\left\{\bar{Y}+\bar{Y}e_0-\beta_c\bar{X}e_1\right\}\left(1+\frac{e_1}{N+1}\right) \\
&= \kappa\left\{\bar{Y}+\bar{Y}e_0-\beta_c\bar{X}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_0e_1-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}e_1^2\right\}
\end{aligned}$$

$$\bar{y}_M-\bar{Y}=\kappa\left\{\bar{Y}+\bar{Y}e_0-\beta_c\bar{X}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_0e_1-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}e_1^2\right\}-\bar{Y} \qquad (2.202)$$

elde edilir ve beklenen değere geçilirse yan,

$$\begin{aligned}
Yan(\bar{y}_M) &= E(\bar{y}_M-\bar{Y}) \\
&= \bar{Y}(\kappa-1)+\kappa E\left\{\bar{Y}e_0-\beta_c\bar{X}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_0e_1-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}e_1^2\right\}
\end{aligned}$$

olup Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.15)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
Yan(\bar{y}_M) &= \bar{Y}(\kappa-1)+\kappa\left\{\frac{\bar{Y}}{N+1}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yxh}}{\bar{Y}\bar{X}}-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}^2}\right\} \\
&= \bar{Y}(\kappa-1)+\kappa\frac{1}{\bar{X}(N+1)}\left\{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yxh}-\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{yxh}}{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{xh}^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{xh}^2\right\} \\
&= \bar{Y}(\kappa-1)
\end{aligned} \qquad (2.203)$$

olarak bulunur (Shabbir ve Gupta, 2006). Eşitlik (2.202)'nin karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\bar{y}_M-\bar{Y}\right)^2 \cong \kappa^2\left\{\bar{Y}+\bar{Y}e_0-\beta_c\bar{X}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_0e_1-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}e_1^2\right\}^2+\bar{Y}^2$$

$$-2\bar{Y}\kappa\left\{\bar{Y}+\bar{Y}e_0-\beta_c\bar{X}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_0e_1-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}e_1^2\right\}$$

$$=\kappa^2\left\{\bar{Y}^2+\bar{Y}^2e_0^2+\beta_c^2\bar{X}^2e_1^2+\left(\frac{\bar{Y}}{N+1}\right)^2e_1^2+2\bar{Y}^2e_0-2\beta_c\overline{XY}e_1+2\frac{\bar{Y}^2}{N+1}e_1\right.$$

$$\left.+2\frac{\bar{Y}^2}{N+1}e_0e_1-2\frac{\beta_c\overline{XY}}{N+1}e_1^2-2\beta_c\overline{YX}e_0e_1+2\frac{\bar{Y}^2}{N+1}e_0e_1-2\beta_c\bar{X}\frac{\bar{Y}}{N+1}e_1^2\right)+\bar{Y}^2$$

$$-2\bar{Y}\kappa\left\{\bar{Y}+\bar{Y}e_0-\beta_c\bar{X}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_1+\frac{\bar{Y}}{N+1}e_0e_1-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}e_1^2\right\} \qquad (2.204)$$

elde edilir. Eşitlik (2.204)'de, beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$HKO\left(\bar{y}_M\right)=E\left(\bar{y}_M-\bar{Y}\right)^2$$

olduğundan Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.83), Eşitlik (2.84) ve Eşitlik (2.85)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak

$$HKO\left(\bar{y}_M\right)\cong\kappa^2\left\{\bar{Y}^2+\bar{Y}^2V_{0,2}+\left(\beta_c^2\bar{X}^2+\frac{\bar{Y}^2}{(N+1)^2}-4\frac{\beta_c\overline{XY}}{N+1}\right)V_{2,0}+2\left(2\frac{\bar{Y}^2}{N+1}-\overline{YX}\beta_c\right)V_{1,1}\right\}$$

$$+\bar{Y}^2-2\bar{Y}\kappa E\left\{\bar{Y}+\frac{\bar{Y}}{N+1}V_{1,1}-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}V_{2,0}\right\}$$

$$=\kappa^2\left\{\bar{Y}^2V_{0,2}+\left(\beta_c^2\bar{X}^2+\frac{\bar{Y}^2}{(N+1)^2}-4\frac{\beta_c\overline{XY}}{N+1}\right)V_{2,0}+2\left(2\frac{\bar{Y}^2}{N+1}-\overline{YX}\beta_c\right)V_{1,1}\right\}$$

$$+\bar{Y}^2(\kappa-1)^2-2\bar{Y}\kappa\left\{\frac{\bar{Y}}{N+1}V_{1,1}-\frac{\beta_c\bar{X}}{N+1}V_{2,0}\right\}$$

β_c, Eşitlik (2.82) de verilen tanımlamadan $\beta_c = \dfrac{RV_{1,1}}{V_{2,0}}$ biçiminde yazılabileceğinden

$$= \kappa^2 \overline{Y}^2 \left\{ V_{0,2} + \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}} + \frac{1}{(N+1)^2} V_{2,0} - \frac{4}{N+1} V_{1,1} + \frac{4}{N+1} V_{1,1} - 2\frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}} \right\} + \overline{Y}^2 (\kappa - 1)^2$$

$$= \overline{Y}^2 (\kappa - 1)^2 + \kappa^2 \overline{Y}^2 \left\{ V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}} + \frac{1}{(N+1)^2} V_{2,0} \right\} \tag{2.205}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan κ değeri,

$$\frac{\partial HKO(\overline{y}_M)}{\partial \kappa} = 0$$

$$(\kappa - 1) + \kappa \left\{ V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}} + \frac{1}{(N+1)^2} V_{2,0} \right\} = 0$$

$$\kappa^* = \frac{1}{1 + \left\{ V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}} + \frac{1}{(N+1)^2} V_{2,0} \right\}} \tag{2.206}$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (2.202)'de $e_0 e_1$ ve e_1^2 terimleri ihmal edilerek kare alınırsa,

$$(\overline{y}_M - \overline{Y})^2 \cong \left[\kappa \left(\overline{Y} + \overline{Y} e_0 - \beta_c \overline{X} e_1 + \frac{\overline{Y}}{N+1} e_1 \right) - \overline{Y} \right]^2$$

$$\cong \left[\kappa^2 \left(\overline{Y} + \overline{Y} e_0 - \beta_c \overline{X} e_1 + \frac{\overline{Y}}{N+1} e_1 \right)^2 + \overline{Y}^2 - 2\overline{Y}\kappa \left(\overline{Y} + \overline{Y} e_0 - \beta_c \overline{X} e_1 + \frac{\overline{Y}}{N+1} e_1 \right) \right]$$

$$\cong \left[\kappa^2 \left(\overline{Y}^2 + \overline{Y}^2 e_0^2 + \beta_c^2 \overline{X}^2 e_1^2 + \left(\frac{\overline{Y}}{N+1} \right)^2 e_1^2 + 2\overline{Y}^2 e_0 - 2\beta_c \overline{YX} e_1 \right. \right.$$

$$\left. + 2\frac{\overline{Y}^2}{N+1} e_1 - 2\beta_c \overline{XY} e_0 e_1 - 2\frac{\overline{Y}^2}{N+1} e_0 e_1 - 2\beta_c \frac{\overline{XY}}{N+1} e_1^2 \right)$$

$$\left. + \overline{Y}^2 - 2\overline{Y}\kappa \left(\overline{Y} + \overline{Y} e_0 - \beta_c \overline{X} e_1 + \frac{\overline{Y}}{N+1} e_1 \right) \right]$$

Eşitlikte beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$HKO^{*}(\bar{y}_M) \cong \bar{Y}^2(\kappa-1)^2 + \kappa^2\left[\bar{Y}^2\left(V_{0,2} + \frac{1}{(N+1)^2}V_{2,0} + \frac{2}{(N+1)}V_{1,1}\right) + \left(\frac{RV_{1,1}}{V_{2,0}}\right)^2 \bar{X}^2 V_{2,0}\right]$$

$$- 2\kappa^2\bar{Y}^2\left(\frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}} + \frac{1}{(N+1)}V_{1,1}\right)$$

$$= \bar{Y}^2(\kappa-1)^2 + \kappa^2\bar{Y}^2\left[\left(V_{0,2} + \frac{1}{(N+1)^2}V_{2,0} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right)\right]$$

$$= \bar{Y}^2(\kappa-1)^2 + \kappa^2\bar{Y}^2\left[V_{0,2}(1-\rho_c^2) + \frac{1}{(N+1)^2}V_{2,0}\right]$$

$$= \bar{Y}^2(\kappa-1)^2 + \kappa^2\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left[S_{yh}^2(1-\rho_c^2) + \frac{R^2S_{xh}^2}{(N+1)^2}\right] \qquad (2.207)$$

olarak bulunur.

$$\frac{\partial HKO^{*}(\bar{y}_M)}{\partial\kappa} = 0$$

$$\bar{Y}^2(\kappa-1) + \kappa\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left[S_{yh}^2(1-\rho_c^2) + \frac{R^2S_{xh}^2}{(N+1)^2}\right] = 0$$

$$\kappa^{**} = \frac{\bar{Y}^2}{\bar{Y}^2 + \sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h\left[S_{yh}^2(1-\rho_c^2) + \frac{R^2S_{xh}^2}{(N+1)^2}\right]} \qquad (2.208)$$

biçiminde elde edilir (Shabbir ve Gupta, 2006).

2.1.13. Singh ve Vishwakarma Tahmin Edicileri

2.1.13.1. Singh ve Vishwakarma Tahmin Edicisi I

Sahai (1979)'nin basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici

$$\bar{y}_s = \bar{y}\frac{\bar{x}+\theta\bar{X}}{\bar{X}+\theta\bar{x}}$$

şeklindedir. Singh ve Vishwakarma (2006), Sahai (1979)'nin önerdiği tahmin ediciyi tabakalı rasgele örneklemeye uyarlayarak önerdikleri tahmin edici,

$$\bar{y}_{ms} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h \frac{\left(\bar{x}_h + \theta_h \bar{X}_h\right)}{\left(\bar{X}_h + \theta_h \bar{x}_h\right)} \tag{2.209}$$

şeklindedir. Burada θ_h'lar rasgele seçilen sabitlerdir.

$\theta_h = 1$ için $\bar{y}_{ms} = \bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h$, $\theta_h = 0$ için $\bar{y}_{ms} = \bar{y}_{ps} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h \frac{\bar{x}_h}{\bar{X}_h}$ ve eğer θ_h yeterince büyük ise bu tahmin edici $\bar{y}_{Rs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h \frac{\bar{X}_h}{\bar{x}_h}$ tahmin edicisine eşit olmaktadır. Bu tahmin edici Eşitlik (2.48) ve Eşitlik (2.49)'daki e'li terimler cinsinden yazılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{ms} &= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \left(1+e_{0h}\right) \frac{\left(\bar{X}_h\left(1+e_{1h}\right)+\theta_h \bar{X}_h\right)}{\left(\bar{X}_h + \theta_h \bar{X}_h\left(1+e_{1h}\right)\right)} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \left(1+e_{0h}\right) \frac{\left(1+e_{1h}+\theta_h\right)}{\left(1+\theta_h+\theta_h e_{1h}\right)} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \left(1+e_{0h}\right) \left\{1+\frac{e_{1h}}{\left(1+\theta_h\right)}\right\} \left\{1+\theta_h\left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h}\right)\right\}^{-1}
\end{aligned}$$

olur ve $\left|\frac{\theta_h e_{1h}}{\left(1+\theta_h\right)}\right| < 1$ varsayımı ile $\left\{1+\theta_h\left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h}\right)\right\}^{-1}$ MacLaurin Serisine açılırsa,

$$\bar{y}_{ms} \cong \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h \left(1+e_{0h}\right) \left\{1+\frac{e_{1h}}{\left(1+\theta_h\right)}\right\} \left\{1-\theta_h\left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h}\right)+\theta_h^2\left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h}\right)^2\right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h (1+e_{0h}) \left\{ 1-\theta_h \left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h} \right) + \theta_h^2 \left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h} \right)^2 + \left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h} \right) - \theta_h \left(\frac{e_{1h}}{1+\theta_h} \right)^2 \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h (1+e_{0h}) \left\{ 1+ \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) e_{1h} - \frac{\theta_h (1-\theta_h)}{(1+\theta_h)^2} e_{1h}^2 \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h \left\{ 1+ \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) e_{1h} - \theta_h \frac{(1-\theta_h)}{(1+\theta_h)^2} e_{1h}^2 + e_{0h} + \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) e_{0h} e_{1h} \right\}$$

$$\overline{y}_{ms} - \overline{Y} \cong \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h \left\{ \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) e_{1h} - \theta_h \frac{(1-\theta_h)}{(1+\theta_h)^2} e_{1h}^2 + e_{0h} + \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) e_{1h} e_{0h} \right\} \tag{2.210}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse yan,

$$\begin{aligned}
Yan(\overline{y}_{ms}) &= E(\overline{y}_{ms} - \overline{Y}) \\
&\cong \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h \left\{ -\theta_h \frac{(1-\theta_h)}{(1+\theta_h)^2} E(e_{1h}^2) + \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) E(e_{1h} e_{0h}) \right\} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h \left\{ -\theta_h \frac{(1-\theta_h)}{(1+\theta_h)^2} \lambda_h C_{hx}^2 + \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) \lambda_h C_{hxy} \right\} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h \lambda_h C_{hx}^2 \left\{ -\theta_h \frac{(1-\theta_h)}{(1+\theta_h)^2} + \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) K_h \right\} \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{Y}_h D_h \lambda_h C_{hx}^2 \left\{ K_h - \frac{(1-D_h)}{2} \right\}
\end{aligned} \tag{2.211}$$

olarak bulunur. Burada

$$D_h = \frac{(1-\theta_h)}{(1+\theta_h)} \tag{2.212}$$

olmaktadır. Eşitlik (2.210)'un karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$(\overline{y}_{ms} - \overline{Y})^2 \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \overline{Y}_h^2 \left\{ \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right)^2 e_{1h}^2 + e_{0h}^2 + 2 \left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h} \right) e_{0h} e_{1h} \right\} \tag{2.213}$$

elde edilir. Eşitlik (2.213)'ün beklenen değeri alınırsa hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(\bar{y}_{ms}) &= E(\bar{y}_{ms}-\bar{Y})^2\\ &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2\bar{Y}_h^2\left\{\left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h}\right)^2 E(e_{1h}^2)+E(e_{0h}^2)+2\left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h}\right)E(e_{0h}e_{1h})\right\}\end{aligned}$$

olup Eşitlik (2.53), Eşitlik (2.54) ve Eşitlik (2.59)'da verilen beklenen değer eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(\bar{y}_{ms}) &\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2\bar{Y}_h^2\lambda_h\left\{\left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h}\right)^2 C_{hx}^2+C_{hy}^2+2\left(\frac{1-\theta_h}{1+\theta_h}\right)C_{hxy}\right\}\\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2\bar{Y}_h^2\lambda_h\left\{C_{hy}^2+D_hC_{hx}^2(D_h+2K_h)\right\} \qquad (2.214)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Burada $K_h=\dfrac{C_{hxy}}{C_{hx}^2}=\rho_{hxy}\dfrac{C_{hy}}{C_{hx}}$ olmaktadır. Hata kareler ortalamasını minimum yapan D_h değeri,

$$\frac{\partial \mathrm{HKO}(\bar{y}_{ms})}{\partial D_h}=0$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2\bar{Y}_h^2\lambda_h C_{hx}^2\{2D_h+2K_h\}=0$$

$$D_h=-K_h=D_h^* \qquad (2.215)$$

olarak bulunur. D_h^* değeri Eşitlik (2.214)'te yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}_{min}(\bar{y}_{ms}) &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2\bar{Y}_h^2\lambda_h\left\{C_{hy}^2-K_hC_{hx}^2(-K_h+2K_h)\right\}\\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2\bar{Y}_h^2\lambda_h\left\{C_{hy}^2-K_h^2C_{hx}^2\right\}\\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2\lambda_h S_{hy}^2\left(1-\rho_{hxy}^2\right) \qquad (2.216)\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu hata kareler ortalaması ayrı regresyon tahmin edicinin varyansına eşittir.

Bu tahmin edici oransal ayrı tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında,

$$HKO(\bar{y}_{ms}) < HKO(\bar{y}_{Rs})$$
$$D_h^2 - 2D_h D_h^* < 1 + 2D_h^*$$
$$D_h^2 - 2D_h D_h^* + D_h^{*2} < 1 + 2D_h^* + D_h^{*2}$$
$$\left|D_h - D_h^*\right| < \left|1 + D_h^*\right| \tag{2.217}$$

koşulu elde edilir. Burada ρ_{hxy} pozitiftir, $D_h^* = -K_h$ olduğundan D_h^* negatif olmaktadır.

Bu tahmin edici çarpımsal ayrı tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında,

$$HKO(\bar{y}_{ms}) < HKO(\bar{y}_{Ps})$$
$$D_h^2 - 2D_h D_h^* < 1 - 2D_h^*$$
$$D_h^2 - 2D_h D_h^* + D_h^{*2} < 1 - 2D_h^* + D_h^{*2}$$
$$\left|D_h - D_h^*\right| < \left|1 - D_h^*\right| \tag{2.218}$$

koşulu elde edilir. Burada ρ_{hxy} negatiftir, $D_h^* = -K_h$ olduğundan D_h^* pozitif olmaktadır.

Sonuç olarak $\bar{y}_{ms}$ tahmin edicisi aşağıdaki koşulların sağlanması durumunda sırasıyla $\bar{y}_{Rs}$ ve $\bar{y}_{Ps}$ tahmin edicilerinden daha etkindir.

$$(i)\left|D_h - D_h^*\right| < \left|1 + D_h^*\right|, \qquad (\rho_{hxy}, -D_h^* > 0)$$
$$(ii)\left|D_h - D_h^*\right| < \left|1 - D_h^*\right|, \qquad (\rho_{hxy}, -D_h^* < 0)$$

Uygulamada $D_h = D_h^*$ olarak alındığında yukarıdaki eşitsizlikler her koşulda sağlanır. Dolayısıyla D_h^* optimal değeri için $\bar{y}_{ms}$ tahmin edicisi $\bar{y}_{Rs}$ ve $\bar{y}_{Ps}$ tahmin edicilerinden her zaman daha etkindir.

2.1.13.2. Singh ve Vishwakarma Tahmin Edicisi II

Sahai (1979)'nin basit rasgele örnekleme için önerdiği tahmin ediciden yola çıkılarak Singh ve Vishwakarma (2006) tarafından önerilen bileşik tahmin edici,

$$\bar{y}_{mc} = \bar{y}_{st}\frac{\left(\bar{x}_{st} + \theta\bar{X}\right)}{\left(\bar{X} + \theta\bar{x}_{st}\right)} \tag{2.219}$$

şeklindedir. θ uygun bir şekilde seçilen sabit olmak üzere $\theta = 1$ için $\bar{y}_{mc} = \bar{y}_{st}$ ve $\theta = 0$ için $\bar{y}_{mc} = \bar{y}_{Pc}$ tahmin edicilerine ulaşılabilmektedir. $\bar{y}_{mc}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'te verilen e'li ifadeler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{mc} &= \bar{Y}(1+e_0)\frac{\left(\bar{X}(1+e_1)+\theta\bar{X}\right)}{\left(\bar{X}+\theta\bar{X}(1+e_1)\right)} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)\frac{(1+\theta+e_1)}{(1+\theta+\theta e_1)} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)\left(1+\frac{e_1}{(1+\theta)}\right)\left(1+\frac{\theta e_1}{(1+\theta)}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$\left|\frac{\theta e_1}{(1+\theta)}\right| < 1$ varsayımı altında $\left\{1+\frac{\theta e_1}{(1+\theta)}\right\}^{-1}$ MacLaurin Serisine açılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{mc} &\cong \bar{Y}(1+e_0)\left(1+\frac{e_1}{(1+\theta)}\right)\left(1-\frac{\theta e_1}{(1+\theta)}+\left(\frac{\theta e_1}{(1+\theta)}\right)^2\right) \\
&= \bar{Y}\left(1+e_0+\frac{e_1}{(1+\theta)}+\frac{e_0e_1}{(1+\theta)}\right)\left(1-\frac{\theta e_1}{(1+\theta)}+\left(\frac{\theta e_1}{(1+\theta)}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

$$= \overline{Y}\left(1 + e_0 + \frac{e_1}{(1+\theta)} + \frac{e_0 e_1}{(1+\theta)} - \frac{\theta e_1}{(1+\theta)} - \frac{\theta e_0 e_1}{(1+\theta)} - \frac{\theta e_1^2}{(1+\theta)^2} + \frac{\theta^2 e_1^2}{(1+\theta)^2}\right)$$

$$\overline{y}_{mc} - \overline{Y} \cong \overline{Y}\left(e_0 + \frac{(1-\theta)}{(1+\theta)} e_1 + \frac{(1-\theta)}{(1+\theta)} e_0 e_1 - \frac{\theta(1-\theta)}{(1+\theta)^2} e_1^2\right) \qquad (2.220)$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse yan,

$$\mathrm{Yan}(\overline{y}_{mc}) = E(\overline{y}_{mc} - \overline{Y})$$

$$\cong \overline{Y} E\left(e_0 + \frac{(1-\theta)}{(1+\theta)} e_1 + \frac{(1-\theta)}{(1+\theta)} e_0 e_1 - \frac{\theta(1-\theta)}{(1+\theta)^2} e_1^2\right)$$

biçiminde yazılır.

$$D = \frac{(1-\theta)}{(1+\theta)} \qquad (2.221)$$

olarak tanımlanırsa ve Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.11), Eşitlik (2.13) ve Eşitlik (2.15)'de verilen beklenen değer eşitlikleri kullanılarak

$$\mathrm{Yan}(\overline{y}_{mc}) \cong \overline{Y}\left(D \frac{1}{\overline{X}\overline{Y}} \sum_{h=1}^{L} \lambda_h W_h^2 S_{hxy} - \frac{D(1-D)}{2} \frac{1}{\overline{X}^2} \sum_{h=1}^{L} \lambda_h W_h^2 S_{hx}^2\right)$$

$$= \frac{D}{\overline{X}}\left\{\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{hxy} - \frac{(1-D)}{2} R S_{hx}^2\right)\right\} \qquad (2.222)$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.220)'nin karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$(\overline{y}_{mc} - \overline{Y})^2 \cong \overline{Y}^2\left(e_0^2 + 2De_0 e_1 + D^2 e_1^2\right) \qquad (2.223)$$

elde edilir. Eşitlik (2.223)'ün beklenen değeri alınırsa hata kareler ortalaması,

$$\mathrm{HKO}(\overline{y}_{mc}) = E(\overline{y}_{mc} - \overline{Y})^2$$

$$\cong \overline{Y}^2\left(E\left(e_0^2\right)+2DE\left(e_0 e_1\right)+D^2E\left(e_1^2\right)\right)$$

olup Eşitlik (2.13), Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.20)'den yararlanarak,

$$HKO\left(\overline{y}_{mc}\right)\cong \overline{Y}^2\left(\frac{1}{\overline{Y}^2}\sum_{h=1}^{L}\lambda_h W_h^2 S_{hy}^2+2D\frac{1}{\overline{X}\overline{Y}}\sum_{h=1}^{L}\lambda_h W_h^2 S_{hxy}+D^2\frac{1}{\overline{X}^2}\sum_{h=1}^{L}\lambda_h W_h^2 S_{hx}^2\right)$$
$$=\sum_{h=1}^{L}\lambda_h W_h^2\left(S_{hy}^2+2DRS_{hxy}+D^2R^2S_{hx}^2\right)$$

veya Eşitlik (2.83), Eşitlik (2.84) ve Eşitlik (2.85)'den

$$HKO\left(\overline{y}_{mc}\right)\cong \overline{Y}^2\left(V_{0,2}+2DV_{1,1}+D^2V_{2,0}\right) \qquad (2.224)$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan D değeri,

$$\frac{\partial HKO\left(\overline{y}_{mc}\right)}{\partial D}=0$$

$$\overline{Y}^2\left(2V_{1,1}+2DV_{2,0}\right)=0$$

$$D^*=-\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}=-\frac{\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{hxy}}{R\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h S_{hx}^2}=-\frac{\beta_c}{R} \qquad (2.225)$$

biçiminde elde edilir. Bu tahmin edicinin minimum hata kareler ortalaması ise

$$HKO_{min}\left(\overline{y}_{mc}\right)=\overline{Y}^2\left(V_{0,2}+2D^*V_{1,1}+D^{*2}V_{2,0}\right)$$
$$=\overline{Y}^2\left(V_{0,2}-2\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}V_{1,1}+\left(\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}\right)^2V_{2,0}\right)$$
$$=\overline{Y}^2\left(V_{0,2}-\frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right)$$
$$=\overline{Y}^2V_{0,2}\left(1-\frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}V_{0,2}}\right)$$

$$=\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 \left(1-\rho_c^2\right) \tag{2.226}$$

olarak bulunur. Bu hata kareler ortalaması bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır. D^* sabitinin seçimi bilinmeyen parametreler içermektedir. Bu daha önce yapılmış araştırmalardan elde edilebilir.

2.1.14. Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey Tahmin Edicileri

Basit rasgele örneklemede yerine koymadan örnekleme ile örneklem çekilmesi durumunda Srivenkataramana (1980)'nın klasik çarpımsal tahmin ediciye alternatif olarak önerdiği tahmin edici,

$$T_1 = \bar{y}\frac{\bar{x}^*}{\bar{X}} \tag{2.227}$$

şeklindedir. Burada $\bar{x}^*$; N kitle büyüklüğü, n örneklem büyüklüğü olmak üzere $n^* = (N-n)$ birim üzerinden elde edilen ortalamadır. Yani

$$\bar{x}^* = \frac{N\bar{X}-n\bar{x}}{N-n} \tag{2.228}$$

$$E(\bar{x}^*) = \frac{N\bar{X}-nE(\bar{x})}{N-n} = \frac{\bar{X}(N-n)}{N-n} = \bar{X} \tag{2.229}$$

biçimindedir. Eşitlik (2.229) sağlandığından $\bar{x}^*$, tahmin edicisi yansız bir tahmin edicidir.

2.1.14.1. Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey Tahmin Edicisi I

Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey (1990)'in tabakalı rasgele örnekleme için önerdiği ayrı tahmin edici,

$$\bar{y}^{*}_{RS}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}^{*(1)}_{Rh} \tag{2.230}$$

$$\bar{y}^{*(1)}_{Rh}=\bar{y}_h\left(\frac{\bar{x}^{*}_h}{\bar{X}_h}\right) \tag{2.231}$$

şeklindedir. h. tabaka için $\bar{x}^{*}_h$,

$$\bar{x}^{*}_h=\frac{N_h\bar{X}_h-n_h\bar{x}_h}{N_h-n_h} \tag{2.232}$$

şeklinde verilebilir. Bu durumda Eşitlik (2.230)

$$\bar{y}^{*(1)}_{Rh}=\frac{\bar{y}_h}{\bar{X}_h}\left(\frac{N_h\bar{X}_h-n_h\bar{x}_h}{N_h-n_h}\right)=\bar{y}_h\left(\frac{N_h}{N_h-n_h}-\frac{n_h\bar{x}_h}{\bar{X}_h(N_h-n_h)}\right)$$

şeklinde yazılabilir ve

$$e_{2h}=\frac{\bar{x}^{*}_h-\bar{X}_h}{\bar{X}_h}\Longrightarrow\bar{x}^{*}_h=\bar{X}_h(1+e_{2h}) \tag{2.233}$$

olur. $\bar{y}^{*(1)}_{Rh}$ tahmin edicisi Eşitlik (2.48) ve Eşitlik (2.233)'te tanımlanan e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\bar{y}^{*(1)}_{Rh}=\bar{Y}_h(1+e_{0h})\frac{\bar{X}_h(1+e_{2h})}{\bar{X}_h}$$

$$=\bar{Y}_h(1+e_{0h}+e_{2h}+e_{0h}e_{2h})$$

$$\bar{y}^{*(1)}_{Rh}-\bar{Y}_h=\bar{Y}_h(e_{0h}+e_{2h}+e_{0h}e_{2h}) \tag{2.234}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse yan,

$$\mathrm{Yan}\left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh}\right)=E\left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh}-\bar{Y}_h\right)$$

$$= \overline{Y}_h E\left(e_{0h} + e_{2h} + e_{0h} e_{2h}\right)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\overline{x}_h^* - \overline{X}_h = \frac{N_h \overline{X}_h - n_h \overline{x}_h}{N_h - n_h} - \overline{X}_h = \frac{-n_h\left(\overline{x}_h - \overline{X}_h\right)}{N_h - n_h} = -G_h\left(\overline{x}_h - \overline{X}_h\right)$$

$$G_h = \frac{n_h}{N_h - n_h} \tag{2.235}$$

$$e_{2h} = -G_h \frac{\left(\overline{x}_h - \overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h} \tag{2.236}$$

$$E\left(e_{2h}\right) = -G_h \frac{E\left(\overline{x}_h - \overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h} = 0 \tag{2.237}$$

$$E\left(e_{0h} e_{2h}\right) = -\frac{G_h E\left[\left(\overline{x}_h - \overline{X}_h\right)\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right)\right]}{\overline{X}_h \overline{Y}_h} = -G_h \lambda_h \frac{S_{yxh}}{\overline{X}_h \overline{Y}_h} = -G_h \lambda_h \rho_h C_{yh} C_{xh} \tag{2.238}$$

olmaktadır. Eşitlik (2.51), Eşitlik (2.237) ve Eşitlik (2.238)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden,

$$\begin{aligned}
Yan\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}\right) &= E\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right) \\
&= -\overline{Y}_h G_h \lambda_h \rho_h C_{yh} C_{xh} \\
&= -\overline{Y}_h G_h \lambda_h C_{hx}^2 \left(\frac{\rho_h C_{yh}}{C_{xh}}\right) \\
&= -\overline{Y}_h G_h \lambda_h C_{hx}^2 K_h \\
&= -\frac{\overline{Y}_h C_{hx}^2 K_h}{N_h}
\end{aligned} \tag{2.239}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.234)'ün karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek karesi alınırsa,

$$\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right)^2 \cong \overline{Y}_h^2\left(e_{0h}^2 + e_{2h}^2 + 2 e_{0h} e_{2h}\right) \tag{2.240}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh}\right) &= E\left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh} - \bar{Y}_h\right)^2 \\
&\cong \bar{Y}_h^2 E\left(e_{0h}^2 + e_{2h}^2 + 2e_{0h}e_{2h}\right)
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$
E\left(e_{2h}^2\right) = G_h^2 \frac{E\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)^2}{\bar{X}_h^2} = G_h^2 \frac{\lambda_h S_{xh}^2}{\bar{X}_h^2} = G_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 \tag{2.241}
$$

olacağından Eşitlik (2.59), Eşitlik (2.238) ve Eşitlik (2.241)'de verilen beklenen değer eşitliklerinden,

$$
\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh}\right) &\cong \bar{Y}_h^2\left(\lambda_h C_{yh}^2 + G_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 - 2G_h \lambda_h \rho_h C_{yh} C_{xh}\right) \\
&= \bar{Y}_h^2 \lambda_h \left(C_{yh}^2 + G_h C_{xh}^2 \left(G_h - 2K_h\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.242}
$$

olur. Buradan $\bar{y}^*_{RS}$ tahmin edicisinin yanı

$$
\begin{aligned}
\bar{y}^*_{RS} - \bar{Y} &= \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh} - \bar{Y}_h\right) \\
Yan\left(\bar{y}^*_{RS}\right) &= \sum_{h=1}^{L} W_h Yan\left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh}\right) \\
&\cong \sum_{h=1}^{L} W_h \left(-\bar{Y}_h G_h \lambda_h C_{hx}^2 K_h\right) \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{h=1}^{L} \bar{Y}_h C_{hx}^2 K_h
\end{aligned} \tag{2.243}
$$

olup hata kareler ortalaması ise

$$
\begin{aligned}
\left(\bar{y}^*_{RS} - \bar{Y}\right)^2 &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh} - \bar{Y}_h\right)^2 \\
HKO\left(\bar{y}^*_{RS}\right) &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 HKO\left(\bar{y}^{*(1)}_{Rh}\right) \\
&\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \lambda_h \left(C_{yh}^2 + G_h C_{xh}^2 \left(G_h - 2K_h\right)\right)
\end{aligned} \tag{2.244}
$$

olmaktadır.

Bu tahmin edici oransal ayrı tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında,

$$HKO\left(\bar{y}_{RS}^{*}\right) < HKO\left(\bar{y}_{Rs}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \lambda_h \left(C_{yh}^2 + G_h C_{xh}^2 \left(G_h - 2K_h\right)\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left(C_{yh}^2 + C_{xh}^2 \left(1 - 2K_h\right)\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \bar{Y}_h^2 \lambda_h C_{xh}^2 G_h \left(G_h - 2K_h\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \bar{Y}_h^2 C_{xh}^2 \left(1 - 2K_h\right)$$

$$\left(G_h^2 - 2K_h G_h\right) < \left(1 - 2K_h\right)$$

$$\left(G_h^2 - 1\right) < 2K_h \left(G_h - 1\right)$$

$$\left(G_h - 1\right)\left(G_h + 1\right) < 2K_h \left(G_h - 1\right)$$

($\left(G_h - 1\right)$ terimi negatif olduğundan)

$$\left(G_h + 1\right) > 2\rho_{hxy} \frac{C_{yh}}{C_{xh}}$$

$$\rho_{hxy} < \frac{\left(G_h + 1\right) C_{xh}}{2 * C_{yh}} \qquad (2.245)$$

koşulu elde edilir. Eşitlik (2.245)'in sağlanması durumunda $\bar{y}_{RS}^{*}$ tahmin edicisi $\bar{y}_{Rs}$ tahmin edicisinden daha etkindir.

2.1.14.2. Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey Tahmin Edicisi II

Klasik oransal bileşik tahmin ediciye alternatif bir tahmin edici şu şekilde verilmiştir:

$$\bar{y}_c^{*} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}^{*}} \bar{X} \qquad (2.246)$$

Burada $\bar{x}_{st}^{*} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h^{*}$ ve $\bar{x}_h^{*} = \dfrac{N_h \bar{X}_h - n_h \bar{x}_h}{N_h - n_h}$ olmaktadır.

$$e_2 = \frac{\bar{x}^*_{st} - \bar{X}}{\bar{X}} \Rightarrow \bar{x}^*_{st} = \bar{X}(1+e_2) \tag{2.247}$$

$$e_2 = \frac{\bar{x}^*_{st} - \bar{X}}{\bar{X}} = \frac{1}{\bar{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\bar{x}^*_h - \bar{X}_h\right) = -\frac{1}{\bar{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h G_h\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)$$

$$G_h = \frac{n_h}{N_h - n_h}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\bar{y}^*_c$ tahmin edicisi Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.247)'de tanımlanan e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}^*_c &= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_2)^{-1} \\
&\cong \bar{Y}(1+e_0)\left(1-e_2+e_2^2\right) \\
&= \bar{Y}\left(1-e_2+e_2^2+e_0-e_0e_2\right)
\end{aligned}$$

$$\bar{y}^*_c - \bar{Y} \cong \bar{Y}\left(-e_2+e_2^2+e_0-e_0e_2\right) \tag{2.248}$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse yan,

$$\begin{aligned}
\text{Yan}\left(\bar{y}^*_c\right) &= E\left(\bar{y}^*_c - \bar{Y}\right) \\
&\cong \bar{Y}E\left(-e_2+e_2^2+e_0-e_0e_2\right)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada

$$E(e_2) = -\frac{1}{\bar{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h G_h E\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right) = 0 \tag{2.249}$$

$$e_2^2 = \frac{1}{\bar{X}^2}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h^2\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)^2 \tag{2.250}$$

$$E\left(e_2^2\right) = \frac{1}{\bar{X}^2}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h^2 E\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)^2 = \frac{1}{\bar{X}^2}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 \tag{2.251}$$

$$e_0 e_2 = -\frac{1}{\bar{Y}\bar{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h\left(\bar{x}_h - \bar{X}_h\right)\left(\bar{y}_h - \bar{Y}_h\right) \tag{2.252}$$

$$E\left(e_0 e_2\right) = -\frac{1}{\overline{Y}\overline{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h E\left(\overline{x}_h - \overline{X}_h\right)\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) = -\frac{1}{\overline{Y}\overline{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h \lambda_h S_{yxh} \qquad (2.253)$$

olmaktadır. Eşitlik (2.10), Eşitlik (2.249), Eşitlik (2.251) ve Eşitlik (2.253)'den yararlanarak,

$$\begin{aligned} Yan\left(\overline{y}_c^*\right) &\cong \overline{Y}\left(\frac{1}{\overline{X}^2}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 - \frac{1}{\overline{Y}\overline{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h \lambda_h S_{yxh}\right) \\ &= \frac{1}{\overline{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h \lambda_h \left(G_h R S_{xh}^2 - S_{yxh}\right) \qquad (2.254) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.248)'in karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$\left(\overline{y}_c^* - \overline{Y}\right)^2 \cong \overline{Y}^2\left(e_2^2 + e_0^2 - 2e_0 e_2\right) \qquad (2.255)$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO\left(\overline{y}_c^*\right) &= E\left(\overline{y}_c^* - \overline{Y}\right)^2 \\ &\cong \overline{Y}^2 E\left(e_2^2 + e_0^2 - 2e_0 e_2\right) \end{aligned}$$

olup Eşitlik (2.20), Eşitlik (2.251) ve Eşitlik (2.253)'de tanımlanan beklenen değer eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} HKO\left(\overline{y}_c^*\right) &\cong \overline{Y}^2 E\left(\frac{1}{\overline{X}^2}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h^2 \lambda_h S_{xh}^2 + \frac{1}{\overline{Y}^2}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 + \frac{2}{\overline{Y}\overline{X}}\sum_{h=1}^{L} W_h^2 G_h \lambda_h S_{yxh}\right) \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + R^2 G_h^2 S_{xh}^2 + 2R G_h S_{yxh}\right) \qquad (2.256) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Bu tahmin edici klasik oransal tahmin edici ile karşılaştırıldığında,

$$HKO\left(\bar{y}_c^*\right) < HKO\left(\bar{y}_{RC}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + R^2 G_h^2 S_{xh}^2 + 2RG_h S_{xyh}\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \left(S_{yh}^2 + R^2 S_{xh}^2 - 2RS_{xyh}\right)$$

$$\left(R^2 G_h^2 S_{xh}^2 + 2RG_h S_{xyh}\right) < \left(R^2 S_{xh}^2 - 2RS_{xyh}\right)$$

$$R^2 S_{xh}^2 \left(G_h^2 - 1\right) < -2RS_{xyh}\left(1 + G_h\right)$$

$$\left(G_h - 1\right)\left(G_h + 1\right) < -2\left(1 + G_h\right)\frac{RS_{xyh}}{R^2 S_{xh}^2}$$

$\left(1 + G_h\right) = 1 + \dfrac{n_h}{N_h - n_h} = \dfrac{N_h}{N_h - n_h}$ olduğundan $\left(1 + G_h\right)$ terimi pozitiftir.

$$\frac{\left(1 - G_h\right)}{2} > \frac{\beta_{xyh}}{R} \tag{2.257}$$

koşulu altında önerilen tahmin edici daha etkindir.

2.1.15. Singh ve Singh Tahmin Edicisi

Singh ve Singh (1995), tabakalı rasgele örneklemede önerdikleri tahmin edici,

$$\bar{y}_{RS} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{Rh} \tag{2.258}$$

şeklindedir. Burada

$$\bar{y}_{Rh} = W_1 \bar{y}_h + W_2 \bar{y}_{Rh}^{*(1)} + W_3 \bar{y}_{Rh}^{*(2)} \tag{2.259}$$

olmaktadır. Burada W_i'ler uygun sabitler olmak üzere, $\sum_{i=1}^{3} W_i = 1$ koşulu sağlanmalıdır. $\bar{y}_{Rh}^{*(1)}$ tahmin edicisi Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey (1990)'in önerdiği tahmin edicidir. $\bar{y}_{Rh}^{*(2)}$ tahmin edicisi ise,

$$\bar{y}_{Rh}^{*(2)} = \frac{1}{\bar{X}_h}\frac{1}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}x_{hj}^{*} \tag{2.260}$$

şeklindedir. Burada $x_{hj}^{*} = \dfrac{N_h\bar{X}_h - n_h x_{hj}}{N_h - n_h}$ olmaktadır. $\bar{y}_{Rh}^{*(2)}$, tahmin edicisinde x_{hj}^{*} değeri yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{Rh}^{*(2)} &= \frac{1}{\bar{X}_h}\frac{1}{n_h}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}\left(\frac{N_h\bar{X}_h - n_h x_{hj}}{N_h - n_h}\right) \\
&= \frac{1}{\bar{X}_h}\frac{1}{n_h}\left[\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}\frac{N_h\bar{X}_h}{N_h - n_h} - \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}\frac{n_h x_{hj}}{N_h - n_h}\right] \\
&= \frac{N_h}{n_h(N_h - n_h)}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} - \frac{1}{\bar{X}_h(N_h - n_h)}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}x_{hj} \\
&= \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\bar{y}_h - \frac{1}{\bar{X}_h(N_h - n_h)}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}x_{hj}
\end{aligned} \tag{2.261}$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafından $\bar{Y}_h$ değeri çıkarılırsa ve çeşitli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{Rh}^{*(2)} - \bar{Y}_h &= \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\bar{y}_h - \frac{1}{\bar{X}_h(N_h - n_h)}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}x_{hj} - \bar{Y}_h \\
&= \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\left(\bar{y}_h - \bar{Y}_h\right) + \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\bar{Y}_h - \frac{1}{\bar{X}_h(N_h - n_h)}\sum_{j=1}^{n_h} y_{hj}x_{hj} - \bar{Y}_h \\
&= \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\left(\bar{y}_h - \bar{Y}_h\right) + \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\bar{Y}_h - \bar{Y}_h \\
&\quad - \frac{1}{\bar{X}_h(N_h - n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\left[\left(y_{hj} - \bar{Y}_h + \bar{Y}_h\right)\left(x_{hj} - \bar{X}_h + \bar{X}_h\right)\right] \\
&= \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\left(\bar{y}_h - \bar{Y}_h\right) + \frac{N_h}{(N_h - n_h)}\bar{Y}_h - \bar{Y}_h
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\left[\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)+\overline{X}_h\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)+\overline{Y}_h\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)+\overline{Y}_h\overline{X}_h\right]$$

$$=\frac{N_h}{(N_h-n_h)}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)+\frac{N_h}{(N_h-n_h)}\overline{Y}_h-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)-\overline{Y}_h$$

$$-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\overline{X}_h\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\overline{Y}_h\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)-\frac{n_h\overline{Y}_h\overline{X}_h}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}$$

$$=\frac{N_h}{(N_h-n_h)}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)+\frac{N_h}{(N_h-n_h)}\overline{Y}_h-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)-\overline{Y}_h$$

$$-\frac{n_h\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)}{(N_h-n_h)}-\frac{\overline{Y}_h n_h\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}-\frac{n_h\overline{Y}_h}{(N_h-n_h)}$$

$$=\frac{N_h-n_h}{(N_h-n_h)}\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)$$

$$-\frac{\overline{Y}_h n_h\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}-\overline{Y}_h+\frac{N_h-n_h}{(N_h-n_h)}\overline{Y}_h$$

$$=\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\sum_{j=1}^{n_h}\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)-\frac{\overline{Y}_h n_h\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\quad(2.262)$$

eşitliğine ulaşılır. $\overline{y}_{Rh}^{*(2)}$ tahmin edicisinin yanı,

$$E\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}-\overline{Y}_h\right)=E\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)-\frac{E\sum_{j=1}^{n_h}\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}-\frac{\overline{Y}_h n_h E\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}$$

olur. Örneklem toplamının beklenen değeri kitle toplamının $\frac{n}{N}$ katı (Çıngı,1994) olduğundan burada

$$\text{Yan}\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right)=-\frac{1}{\overline{X}_h(N_h-n_h)}\frac{n_h}{N_h}\sum_{j=1}^{N_h}\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)$$

yazılabilir. Burada

$\sum_{j=1}^{N_h}\left(y_{hj}-\overline{Y}_h\right)\left(x_{hj}-\overline{X}_h\right)=\left(N_h-1\right)S_{yxh}$ olmaktadır. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
\text{Yan}\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) &= -\frac{n_h}{N_h}\frac{\left(N_h-1\right)S_{yxh}}{\overline{X}_h\left(N_h-n_h\right)} \\
&= -\frac{\overline{Y}_h\left(N_h-1\right)}{\left(N_h-n_h\right)}\frac{n_h}{N_h}\rho_h C_{xh}C_{yh} \\
&= -\frac{\overline{Y}_h\left(N_h-1\right)}{\left(N_h-n_h\right)}\frac{n_h}{N_h}C_{hx}^2 K_h \qquad (2.263)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Eşitlik (2.262)'nin karesi 2. dereceden büyük terimler ihmal edilerek alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}-\overline{Y}_h\right)^2 &\cong \left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)^2+\left(\frac{\overline{Y}_h^2}{\overline{X}_h^2}\right)G_h^2\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)^2 \\
&\quad -2G_h\frac{\overline{Y}_h}{\overline{X}_h}\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right) \qquad (2.264)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitlikte beklenen değere geçilirse hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
\text{HKO}\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) &= E\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}-\overline{Y}_h\right)^2 \\
&\cong E\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right)^2-\left(\frac{\overline{Y}_h^2}{\overline{X}_h^2}\right)G_h^2 E\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)^2-2G_h\frac{\overline{Y}_h}{\overline{X}_h}E\left(\overline{x}_h-\overline{X}_h\right)\left(\overline{y}_h-\overline{Y}_h\right) \\
&= \lambda_h S_{yh}^2-\left(\frac{\overline{Y}_h^2}{\overline{X}_h^2}\right)G_h^2\lambda_h S_{xh}^2-2G_h\frac{\overline{Y}_h}{\overline{X}_h}\lambda_h\rho_{xyh}S_{xh}S_{yh} \\
&= \lambda_h\overline{Y}_h^2\left[C_{yh}^2+G_h^2C_{xh}^2-2G_h\rho_{xyh}C_{xh}C_{yh}\right] \\
&= \lambda_h\overline{Y}_h^2\left[C_{yh}^2+G_hC_{xh}^2\left(G_h-2K_h\right)\right] \qquad (2.265)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. $\overline{y}_{Rh}$ tahmin edicisi yalnız aşağıdaki koşulun sağlanması durumunda yansızdır.

$$W_2 \operatorname{Yan}\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}\right) + W_3 \operatorname{Yan}\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) = 0$$

$$-W_2 \frac{\overline{Y}_h}{N_h} C_{hx}^2 K_h - W_3 \frac{\overline{Y}_h (N_h - 1)}{(N_h - n_h)} \frac{n_h}{N_h} C_{hx}^2 K_h = 0$$

$$W_2 + W_3 \frac{n_h (N_h - 1)}{(N_h - n_h)} = 0$$

$$W_3 = -W_2 \frac{(N_h - n_h)}{n_h (N_h - 1)}$$

$$\left(\delta_h = \frac{(N_h - n_h)}{n_h (N_h - 1)} \text{ olarak tanımlanırsa} \right) \qquad (2.266)$$

$$W_3 = -\delta_h W_2 \qquad (2.267)$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = 1$$

$$W_1 = 1 - W_2 - W_3$$

$$= 1 - W_2 + \delta_h W_2$$

$$= \left[1 - (1 - \delta_h) W_2\right] \qquad (2.268)$$

Burada $W_2 = p_h$ gibi bir sabit olarak alınırsa ve $W_1 = \left[1 - (1 - \delta_h) p_h\right]$, $W_3 = -\delta_h p_h$ eşitlikleri yerine koyulursa yansız bir tahmin edici elde edilir. Bu durumda bu yansız tahmin ediciler

$$\overline{y}_{Rh}^{(u)} = \left[1 - (1 - \delta_h) p_h\right] \overline{y}_h + p_h \overline{y}_{Rh}^{*(1)} - p_h \delta_h \overline{y}_{Rh}^{*(2)} \qquad (2.269)$$

$$= \left[1 - (1 - \delta_h) p_h\right] \overline{y}_h + p_h \overline{y}_h \left(\frac{\overline{x}_h^*}{\overline{X}_h} \right) - p_h \delta_h \frac{1}{\overline{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \qquad (2.270)$$

ve

$$\overline{y}_{RS}^{(u)} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{y}_{Rh}^{(u)} \qquad (2.271)$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \left[1 - (1 - \delta_h) p_h\right] \overline{y}_h + p_h \overline{y}_h \left(\frac{\overline{x}_h^*}{\overline{X}_h} \right) - p_h \delta_h \frac{1}{\overline{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \right\} \qquad (2.272)$$

biçiminde olur.

(i) $p_h = 0$ ise $\bar{y}_{RS}^{(u)} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h \Rightarrow \bar{y}_{RS}^{(u)} = \bar{y}_{st}$ klasik tabakalı tahmin edicisi elde edilir.

$p_h = (1-\delta_h)^{-1}$ olarak alınırsa başka bir yansız tahmin edici elde edilebilir.

$$\bar{y}_{RS}^{(1)} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \left[1-(1-\delta_h)\frac{1}{(1-\delta_h)} \right] \bar{y}_h + \frac{1}{(1-\delta_h)} \bar{y}_h \left(\frac{\bar{x}_h^*}{\bar{X}_h} \right) - \frac{1}{(1-\delta_h)} \delta_h \frac{1}{\bar{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \frac{1}{(1-\delta_h)} \bar{y}_h \left(\frac{\bar{x}_h^*}{\bar{X}_h} \right) - \frac{1}{(1-\delta_h)} \delta_h \frac{1}{\bar{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \right\}$$

$$\left(\delta_h = \frac{(N_h - n_h)}{n_h(N_h-1)} \text{ ifadesi denklemde yerine koyulursa} \right)$$

$$1-\delta_h \Rightarrow 1 - \frac{(N_h - n_h)}{n_h(N_h-1)} = \frac{N_h(n_h-1)}{n_h(N_h-1)}$$

$$\frac{1}{(1-\delta_h)} = \frac{n_h(N_h-1)}{N_h(n_h-1)}$$

$$\bar{y}_{RS}^{(1)} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \frac{n_h(N_h-1)}{N_h(n_h-1)} \left(\frac{\bar{x}_h^*}{\bar{X}_h} \right) \bar{y}_h - \frac{n_h(N_h-1)}{N_h(n_h-1)} \frac{(N_h-n_h)}{n_h(N_h-1)} \frac{1}{\bar{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \frac{n_h(N_h-1)}{N_h(n_h-1)} \left(\frac{\bar{x}_h^*}{\bar{X}_h} \right) \bar{y}_h - \frac{(N_h-n_h)}{N_h(n_h-1)} \frac{1}{\bar{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \right\} \qquad (2.273)$$

olarak bulunur.

(ii) $p_h = 1$ için ise

$$\bar{y}_{RS}^{(2)} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \delta_h \bar{y}_h + \bar{y}_h \left(\frac{\bar{x}_h^*}{\bar{X}_h} \right) - \delta_h \frac{1}{\bar{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \delta_h \left(\bar{y}_h - \frac{1}{\bar{X}_h} \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} x_{hj}^* \right) + \bar{y}_h \left(\frac{\bar{x}_h^*}{\bar{X}_h} \right) \right\}$$

$$= \sum_{h=1}^{L} W_h \left\{ \frac{(N_h-n_h)}{n_h(N_h-1)} \left(\bar{y}_h - \frac{1}{n_h} \sum_{j=1}^{n_h} y_{hj} \frac{x_{hj}^*}{\bar{X}_h} \right) + \bar{y}_h \left(\frac{\bar{x}_h^*}{\bar{X}_h} \right) \right\} \qquad (2.274)$$

olacaktır. p_h yerine farklı değerler koyarak daha başka yansız tahmin ediciler de elde edilebilir.

Eşitlik (2.269)'da eşitliğin her iki tarafından $\overline{Y}_h$ çıkarılırsa,

$$
\begin{aligned}
\overline{y}_{Rh}^{(u)} - \overline{Y}_h &= \left[1-(1-\delta_h)p_h\right]\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) + p_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right) - p_h\delta_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right) \\
&\quad + \overline{Y}_h\left(-1+1-p_h+p_h\delta_h+p_h-p_h\delta_h\right) \\
&= \left[1-(1-\delta_h)p_h\right]\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) + p_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right) - p_h\delta_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right) \\
&= \left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) - (1-\delta_h)p_h\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) + p_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right) - p_h\delta_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right) \qquad (2.275)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitlik (2.275)'in karesi alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\left(\overline{y}_{Rh}^{(u)} - \overline{Y}_h\right)^2 &= \left[\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) - (1-\delta_h)p_h\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) + p_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right) - p_h\delta_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right)\right]^2 \\
&= \left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right)^2 + (1-\delta_h)^2 p_h^2\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right)^2 + p_h^2\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right)^2 \\
&\quad + p_h^2\delta_h^2\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right)^2 - 2(1-\delta_h)p_h\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right)^2 + 2p_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right)\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) \\
&\quad - 2p_h\delta_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right)\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right) - 2(1-\delta_h)p_h^2\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right)\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right) \\
&\quad + 2p_h^2\delta_h(1-\delta_h)\left(\overline{y}_h - \overline{Y}_h\right)\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right) - 2p_h^2\delta_h\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)} - \overline{Y}_h\right)\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)} - \overline{Y}_h\right) \qquad (2.276)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eşitlik (2.276)'da beklenen değer alınırsa hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO\left(\overline{y}_{Rh}^{(u)}\right) &= HKO\left(\overline{y}_h\right) + (1-\delta_h)^2 p_h^2 HKO\left(\overline{y}_h\right) + p_h^2 HKO\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}\right) + p_h^2\delta_h^2 HKO\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) \\
&\quad - 2(1-\delta_h)p_h V\left(\overline{y}_h\right) + 2p_h Cov\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}, \overline{y}_h\right) - 2p_h\delta_h Cov\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}, \overline{y}_h\right) \\
&\quad - 2(1-\delta_h)p_h^2 Cov\left(\overline{y}_h, \overline{y}_{Rh}^{*(1)}\right) + 2p_h^2\delta_h(1-\delta_h)Cov\left(\overline{y}_h, \overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) - 2p_h^2\delta_h Cov\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}, \overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) \\
&= \left(1-(1-\delta_h)p_h\right)^2 HKO\left(\overline{y}_h\right) + p_h^2 HKO\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}\right) + p_h^2\delta_h^2 HKO\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) \\
&\quad + 2p_h Cov\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}, \overline{y}_h\right) - 2p_h\delta_h Cov\left(\overline{y}_{Rh}^{*(2)}, \overline{y}_h\right) - 2(1-\delta_h)p_h^2 Cov\left(\overline{y}_h, \overline{y}_{Rh}^{*(1)}\right) \\
&\quad + 2p_h^2\delta_h(1-\delta_h)Cov\left(\overline{y}_h, \overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) - 2p_h^2\delta_h Cov\left(\overline{y}_{Rh}^{*(1)}, \overline{y}_{Rh}^{*(2)}\right) \qquad (2.277)
\end{aligned}
$$

Eşitlik (2.277)'de

$$HKO(\bar{y}_h) = \lambda_h \bar{Y}_h^2 C_{hy}^2 \tag{2.278}$$

$$HKO\left(\bar{y}_{Rh}^{*(1)}\right) = HKO\left(\bar{y}_{Rh}^{*(2)}\right) = Cov\left(\bar{y}_{Rh}^{*(1)}, \bar{y}_{Rh}^{*(2)}\right) = \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left[C_{yh}^2 + G_h C_{xh}^2 (G_h - 2K_h)\right] \tag{2.279}$$

$$Cov\left(\bar{y}_h, \bar{y}_{Rh}^{*(1)}\right) = Cov\left(\bar{y}_h, \bar{y}_{Rh}^{*(2)}\right) = \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left[C_{hy}^2 - G_h C_{hx}^2 K_h\right] \tag{2.280}$$

yukarıda tanımlanan eşitlikler yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}_{Rh}^{(u)}\right) &\cong (1-(1-\delta_h)p_h)^2 \lambda_h \bar{Y}_h^2 C_{hy}^2 + p_h^2 \bar{Y}_h^2 \lambda_h (1-\delta_h)^2 \left[C_{yh}^2 + G_h C_{xh}^2 (G_h - 2K_h)\right] \\
&\quad + 2p_h (1-\delta_h)(1-(1-\delta_h)p_h)\lambda_h \bar{Y}_h^2 \left[C_{hy}^2 - G_h C_{hx}^2 K_h\right] \\
&= \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 + p_h^2 (1-\delta_h)^2 \left[G_h C_{xh}^2 (G_h - 2K_h)\right]\right. \\
&\quad \left. - 2p_h (1-\delta_h)(1-(1-\delta_h)p_h) G_h C_{hx}^2 K_h\right\} \\
&= \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 + p_h^2 (1-\delta_h)^2 G_h^2 C_{xh}^2 - 2p_h^2 (1-\delta_h)^2 G_h C_{xh}^2 K_h\right. \\
&\quad \left. - 2p_h (1-\delta_h) G_h C_{hx}^2 K_h + 2p_h^2 (1-\delta_h)^2 G_h C_{hx}^2 K_h\right\} \\
&= \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 + p_h^2 (1-\delta_h)^2 G_h^2 C_{xh}^2 - 2p_h (1-\delta_h) G_h C_{hx}^2 K_h\right\} \\
&= \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 + p_h (1-\delta_h) G_h C_{hx}^2 (p_h (1-\delta_h) G_h - 2K_h)\right\}
\end{aligned} \tag{2.281}$$

olarak bulunur. Eşitlik (2.271)'de tanımlanan tahmin edicinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned}
HKO\left(\bar{y}_{RS}^{(u)}\right) &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 HKO\left(\bar{y}_{Rh}^{(u)}\right) \\
&\cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \bar{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 + p_h (1-\delta_h) G_h C_{hx}^2 (p_h (1-\delta_h) G_h - 2K_h)\right\}
\end{aligned} \tag{2.282}$$

olarak bulunur. Bu hata kareler ortalamasını minimum yapan p_h değeri,

$$\frac{\partial HKO\left(\bar{y}_{Rh}^{(u)}\right)}{\partial (p_h)} = 0$$

$$p_h (1-\delta_h)^2 G_h^2 C_{xh}^2 - (1-\delta_h) G_h C_{hx}^2 K_h = 0$$

$$p_h^* = \frac{K_h}{(1-\delta_h)G_h} \tag{2.283}$$

biçiminde bulunur. Eşitlik (2.284)'de bulunan p_h^* değeri Eşitlik (2.283)'te yerine koyulursa minimum hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO_{min}\left(\overline{y}_{RS}^{(u)}\right) &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 - K_h^2 C_{hx}^2\right\} \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 - \left(\frac{\rho_h C_{yh}}{C_{xh}}\right)^2 C_{hx}^2\right\} \\ &= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 C_{hy}^2 \left\{1-\rho_h^2\right\} \end{aligned} \tag{2.284}$$

olarak bulunur.

Bu tahmin edici oransal ayrı tahmin edici ile karşılaştırıldığında,

$$HKO\left(\overline{y}_{RS}^{(u)}\right) < HKO\left(\overline{y}_{Rs}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 + p_h(1-\delta_h)G_h C_{hx}^2 \left(p_h(1-\delta_h)G_h - 2K_h\right)\right\} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 \left(C_{yh}^2 + C_{xh}^2(1-2K_h)\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 p_h(1-\delta_h)G_h C_{hx}^2 \left(p_h(1-\delta_h)G_h - 2K_h\right) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 C_{xh}^2 (1-2K_h)$$

$$p_h^2(1-\delta_h)^2 G_h^2 - 2K_h p_h(1-\delta_h)G_h < (1-2K_h)$$

(Eşitsizliğin her iki tarafına K_h^2 terimi eklenirse)

$$\left[p_h(1-\delta_h)G_h - K_h\right]^2 - (1-K_h)^2 < 0$$

$$\left[p_h(1-\delta_h)G_h - 1\right]\left[p_h(1-\delta_h)G_h + 1 - 2K_h\right] < 0$$

$$\left[p_h(1-\delta_h)G_h - 1\right] > 0 \Rightarrow p_h > \frac{1}{(1-\delta_h)G_h} \quad \text{ise}$$

$$\left[p_h(1-\delta_h)G_h + 1 - 2K_h\right] < 0 \Rightarrow p_h < \frac{2K_h - 1}{(1-\delta_h)G_h}$$

$$\frac{1}{(1-\delta_h)G_h} < p_h < \frac{2K_h - 1}{(1-\delta_h)G_h} \tag{2.285}$$

$$[p_h(1-\delta_h)G_h - 1] < 0 \Rightarrow p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)G_h} \text{ ise}$$

$$[p_h(1-\delta_h)G_h + 1 - 2K_h] > 0 \Rightarrow p_h > \frac{2K_h - 1}{(1-\delta_h)G_h}$$

$$\frac{2K_h - 1}{(1-\delta_h)G_h} < p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)G_h} \tag{2.286}$$

koşulu elde edilir. Eşitlik (2.285) veya Eşitlik (2.286)'da verilen koşulların sağlanması durumunda $\overline{y}_{RS}^{(u)}$ tahmin edicisi klasik oransal ayrı tahmin edicisinden daha etkindir.

Bu tahmin edici Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey (1990) tahmin edicisi I ile karşılaştırıldığında,

$$HKO\left(\overline{y}_{RS}^{(u)}\right) < HKO\left(\overline{y}_{RS}^{*}\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 \left\{C_{hy}^2 + p_h(1-\delta_h)G_h C_{hx}^2 (p_h(1-\delta_h)G_h - 2K_h)\right\} < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \overline{Y}_h^2 \lambda_h \left(C_{yh}^2 + G_h C_{xh}^2 (G_h - 2K_h)\right)$$

$$\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 G_h C_{hx}^2 p_h (1-\delta_h)(p_h(1-\delta_h)G_h - 2K_h) < \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h \overline{Y}_h^2 G_h C_{xh}^2 (G_h - 2K_h)$$

$$p_h^2(1-\delta_h)^2 G_h^2 - 2K_h p_h (1-\delta_h) G_h < G_h^2 - 2K_h G_h$$

(Eşitsizliğin her iki tarafına K_h^2 terimi eklenirse)

$$[p_h(1-\delta_h)G_h - K_h]^2 - [G_h - K_h]^2 < 0$$

$$[p_h(1-\delta_h)G_h - G_h][p_h(1-\delta_h)G_h + G_h - 2K_h] < 0$$

$$[p_h(1-\delta_h)G_h - G_h] > 0 \Rightarrow p_h > \frac{1}{(1-\delta_h)} \text{ ise}$$

$$[p_h(1-\delta_h)G_h + G_h - 2K_h] < 0 \Rightarrow p_h < \frac{2K_h - G_h}{(1-\delta_h)G_h}$$

$$\frac{1}{(1-\delta_h)} < p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)}\left(\frac{2K_h}{G_h}-1\right) \tag{2.287}$$

$$[p_h(1-\delta_h)G_h - G_h] < 0 \Rightarrow p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)} \text{ ise}$$

$$[p_h(1-\delta_h)G_h + G_h - 2K_h] > 0 \Rightarrow p_h > \frac{2K_h - G_h}{(1-\delta_h)G_h}$$

$$\frac{1}{(1-\delta_h)}\left(\frac{2K_h}{G_h}-1\right) < p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)} \tag{2.288}$$

koşulları elde edilir. Eşitlik (2.287) veya Eşitlik (2.288)'de verilen koşulların sağlanması durumunda $\bar{y}_{RS}^{(u)}$ tahmin edicisi $\bar{y}_{RS}^{*}$ tahmin edicisinden daha etkindir.

2.1.16. Diana Tahmin Edicisi

Diana (1993)'nın tabakalı rasgele örnekleme için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{CST} = \bar{y}_{ST}\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\delta}\left[w + (1-w)\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right]^{\eta} \tag{2.289}$$

şeklindedir. Burada $\delta, \varepsilon, \eta$ ve w herhangi bir sonlu değer alabilmektedir. Yeni tahmin ediciler türetmek için dört parametreden üç tanesine uygun değerler verilmektedir. Aynı tahmin edicileri elde etmemek için;

$$\begin{cases} \varepsilon * \eta * (1-w) \neq 0 & w > 0,5 \\ \delta = 0, \eta = 1 & w = 0 \end{cases} \tag{2.290}$$

varsayımları sağlanmalıdır.

$\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\delta}$ terimi Eşitlik (2.3)'de tanımlanan e'li terimler cinsinden yazılıp, MacLaurin Serisine açılırsa,

$$\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\delta}=\left(\frac{\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}}\right)^{\delta}=(1+e_1)^{\delta}$$

$$=1+\delta e_1+\frac{\delta(\delta-1)}{2!}e_1^2+\frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{3!}e_1^3+\ldots \qquad (2.291)$$

elde edilir. Burada $\alpha_i=\frac{\delta(\delta-1)\ldots(\delta-i+1)}{i!}$ olarak tanımlanırsa $\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\delta}$ terimindeki $(e_1)^i$ katsayıları,

$$\alpha_0=1,\ \alpha_1=\delta,\ \alpha_2=\frac{\delta(\delta-1)}{2},\ \alpha_3=\frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{3!} \qquad (2.292)$$

şeklinde elde edilir.

k. dereceden yaklaştırma için eşitlik

$$\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\delta}=\sum_{i=0}^{2k}\alpha_i(e_1)^i+O_p\left(n^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right) \qquad (2.293)$$

şeklinde yazılabilir.

$\left[w+(1-w)\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right]^{\eta}$ terimi Eşitlik (2.3)'de tanımlanan e'li terimler cinsinden yazılıp MacLaurin Serisine açılırsa,

$$\left[w+(1-w)\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right]^{\eta}=\left[w+(1-w)(1+e_1)^{\varepsilon}\right]^{\eta}$$

$$=\left[w+(1-w)\left(1+\varepsilon e_1+\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}e_1^2+\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{3!}e_1^3+\ldots\ldots..\right)\right]^{\eta}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[1+(1-w)\varepsilon e_1+(1-w)\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}e_1^2+(1-w)\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{3!}e_1^3+.......\right]^{\eta}\\
&=\left[1+\eta\left\{(1-w)\varepsilon e_1+(1-w)\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}e_1^2+(1-w)\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{3!}e_1^3+......\right\}\right.\\
&+\frac{\eta(\eta-1)}{2!}\left\{(1-w)\varepsilon e_1+(1-w)\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}e_1^2+(1-w)\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{3!}e_1^3+......\right\}^2\\
&\left.+\frac{\eta(\eta-1)(\eta-2)}{3!}\left\{(1-w)\varepsilon e_1+(1-w)\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}e_1^2+......\right\}^3+..\right] \qquad (2.294)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\left[w+(1-w)\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right]^{\eta}$ terimi için $(e_1)^i$ katsayıları b_i ile gösterirsek,

$$
\begin{aligned}
b_0 &= 1\\
b_1 &= \varepsilon\eta(1-w)\\
b_2 &= \left[\varepsilon^2\eta_1(1-w)+\varepsilon_1\eta\right](1-w)/2\\
b_3 &= \left[\varepsilon^2\eta_2(1-w)^2+3\varepsilon\varepsilon_1\eta_1(1-w)+\varepsilon_2\eta\right](1-w)/6\\
b_4 &= \left[\varepsilon^4\eta_3(1-w)^3+6\varepsilon^2\varepsilon_1\eta_2(1-w)^2+\varepsilon\varepsilon_1\eta_1(7\varepsilon-11)(1-w)+\varepsilon_3\eta\right](1-w)/24\\
b_5 &= \left[\varepsilon^5\eta_4(1-w)^4+10\varepsilon^3\varepsilon_1\eta_3(1-w)^3+5\varepsilon^2\varepsilon_1\eta_2(5\varepsilon-7)(1-w)^2\right.\\
&\quad\left.+5\varepsilon\varepsilon_2\eta_1(3\varepsilon-5)(1-w)+\varepsilon_4\eta\right](1-w)/120\\
b_6 &= \left[\varepsilon^6\eta_5(1-w)^5+15\varepsilon^4\varepsilon_1\eta_4(1-w)^4+5\varepsilon^3\varepsilon_1\eta_3(13\varepsilon-17)(1-w)^3\right.\\
&\quad+15\left(\varepsilon_1^3+\varepsilon^2\varepsilon_3+4\varepsilon\varepsilon_1\varepsilon_2\right)\eta_2(1-w)^2\\
&\quad\left.+\left(15\varepsilon_1\varepsilon_3+10\varepsilon_2^2+6\varepsilon\varepsilon_4\right)\eta_1(1-w)+\varepsilon_5\eta\right](1-w)/720 \qquad (2.295)
\end{aligned}
$$

şeklinde verilir. Bu tanımlamada $\eta_i=\eta(\eta-1)...(\eta-i)$ ve $\varepsilon_i=\varepsilon(\varepsilon-1)...(\varepsilon-i)$'dir.

k. dereceden yaklaştırma için eşitlik,

$$
\left[w+(1-w)\left(\frac{\bar{x}_{ST}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right]^{\eta}=\sum_{i=0}^{2k}b_i(e_1)^i+O_p\left(n^{-\left(\frac{k+1}{2}\right)}\right)
$$

$$b_i = \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial(e_1)^i}\left[w + (1-w)(1+e_1)^{\varepsilon}\right]^{\eta}\Big|_{e_1=0} \tag{2.296}$$

şeklinde yazılabilir.

$\bar{y}_{CST}$ tahmin edicisinde $(e_1)^i$ katsayıları

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} \alpha_j b_{i-j} \tag{2.297}$$

eşitliği ile elde edilebilir.

k. dereceden yaklaştırma ile $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesi için yan,

$$Yan_k(\bar{y}_{CST}) = \bar{Y}\left[\sum_{i=1}^{2k-1} c_i\left(V_{i,0} + V_{i,1}\right) + c_{2k}V_{2k,0}\right] \tag{2.298}$$

eşitliği ile bulunabilir. Yan k=1. dereceden yaklaştırma ile,

$$Yan_1(\bar{y}_{CST}) = \bar{Y}\left[c_1\left(V_{1,0} + V_{1,1}\right) + c_2V_{2,0}\right]$$

Eşitlik (2.82)'de verilen tanımlamadan yararlanarak $V_{1,0} = 0$ 'dır ve yan

$$Yan_1(\bar{y}_{CST}) = \bar{Y}\left[c_1V_{1,1} + c_2V_{2,0}\right] \tag{2.299}$$

k=2. dereceden yaklaştırma ile

$$\begin{aligned} Yan_2(\bar{y}_{CST}) &= \bar{Y}\left[\sum_{i=1}^{3} c_i\left(V_{i,0} + V_{i,1}\right) + c_4V_{4,0}\right] \\ &= \bar{Y}\left[c_1\left(V_{1,0} + V_{1,1}\right) + c_2\left(V_{2,0} + V_{2,1}\right) + c_3\left(V_{3,0} + V_{3,1}\right) + c_4V_{4,0}\right] \\ &= Yan_1(\bar{y}_{CST}) + \bar{Y}\left[c_2\left(V_{2,1}\right) + c_3\left(V_{3,0} + V_{3,1}\right) + c_4V_{4,0}\right] \end{aligned} \tag{2.300}$$

k=3. dereceden yaklaştırma ile

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Yan}_3(\bar{y}_{CST}) &= \overline{Y}\left[\sum_{i=1}^{5} c_i\left(V_{i,0}+V_{i,1}\right)+c_6 V_{6,0}\right] \\
&= \overline{Y}\left[c_1\left(V_{1,0}+V_{1,1}\right)+c_2\left(V_{2,0}+V_{2,1}\right)+c_3\left(V_{3,0}+V_{3,1}\right)\right. \\
&\quad \left.+c_4\left(V_{4,0}+V_{4,1}\right)+c_5\left(V_{5,0}+V_{5,1}\right)+c_6 V_{6,0}\right] \\
&= \mathrm{Yan}_2(\bar{y}_{CST})+\overline{Y}\left[c_4 V_{4,1}+c_5\left(V_{5,0}+V_{5,1}\right)+c_6 V_{6,0}\right] \qquad (2.301)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

k. dereceden yaklaştırma ile hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HKO}_k(\bar{y}_{CST}) &= \overline{Y}^2\left[V_{0,2}+\sum_{i=1}^{k} c_i^2 V_{2i,0}+\sum_{i=1}^{k-1} c_i^2\left(2V_{2i,1}+V_{2i,2}\right)\right. \\
&\quad +2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j>i}^{2k-i} c_i c_j V_{i+j,0}+4\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j>i}^{2k-1-i} c_i c_j V_{i+j,1} \\
&\quad \left.+2\sum_{i}^{k-2}\sum_{j>i}^{2k-2-i} c_i c_j V_{i+j,2}+2\sum_{i=1}^{2k-1} c_i V_{i,1}+2\sum_{i=1}^{2k-2} c_i V_{i,2}\right] \qquad (2.302)
\end{aligned}
$$

eşitliği ile bulunabilir.

Hata kareler ortalaması k=1. dereceden yaklaştırma ile,

$$
\mathrm{HKO}_1(\bar{y}_{CST}) = \overline{Y}^2\left[V_{0,2}+c_1^2 V_{2,0}+2c_1 V_{1,1}\right] \qquad (2.303)
$$

k=2. dereceden yaklaştırma ile

$$
\begin{aligned}
\mathrm{HKO}_2(\bar{y}_{CST}) &= \overline{Y}^2\left[V_{0,2}+\sum_{i=1}^{2} c_i^2 V_{2i,0}+c_1^2\left(2V_{2,1}+V_{2,2}\right)+2\sum_{i=1}^{1}\sum_{j>i}^{4-i} c_i c_j V_{i+j,0}\right. \\
&\quad \left.+4\sum_{i=1}^{1}\sum_{j>i}^{3-i} c_i c_j V_{i+j,1}+2\sum_{i=1}^{3} c_i V_{i,1}+2\sum_{i=1}^{2} c_i V_{i,2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= HKO_1(\overline{y}_{CST}) + \overline{Y}^2\Big[c_2^2 V_{4,0} + c_1^2(2V_{2,1} + V_{2,2}) \\
&+ 2(c_1 c_2 V_{3,0} + c_1 c_3 V_{4,0}) + 4c_1 c_2 V_{3,1} \\
&+ 2(c_2 V_{2,1} + c_3 V_{3,1}) + 2(c_1 V_{1,2} + c_2 V_{2,2})\Big] \\
&= HKO_1(\overline{y}_{CST}) + \overline{Y}^2\Big[(c_2^2 + 2c_1 c_3)V_{4,0} + 2c_1 c_2 V_{3,0} + 2(2c_1 c_2 + c_3)V_{3,1} \\
&+ 2(c_1^2 + c_2)V_{2,1} + (c_1^2 + 2c_2)V_{2,2} + 2c_1 V_{1,2}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.304}
$$

k=3. dereceden yaklaştırma ile

$$
\begin{aligned}
HKO_3(\overline{y}_{CST}) = \overline{Y}^2\Bigg[& V_{0,2} + \sum_{i=1}^{3} c_i^2 V_{2i,0} + \sum_{i=1}^{2} c_i^2 (2V_{2i,1} + V_{2i,2}) \\
& + 2\sum_{i=1}^{2}\sum_{j>i}^{6-i} c_i c_j V_{i+j,0} + 4\sum_{i=1}^{2}\sum_{j>i}^{5-i} c_i c_j V_{i+j,1} \\
& + 2\sum_{i}^{1}\sum_{j>i}^{4-i} c_i c_j V_{i+j,2} + 2\sum_{i=1}^{5} c_i V_{i,1} + 2\sum_{i=1}^{4} c_i V_{i,2} \Bigg] \\
= \overline{Y}^2\Big[& V_{0,2} + c_1^2 V_{2,0} + c_2^2 V_{4,0} + c_3^2 V_{6,0} + c_1^2(2V_{2,1} + V_{2,2}) + c_2^2(2V_{4,1} + V_{4,2}) \\
& + 2(c_1 c_2 V_{3,0} + c_1 c_3 V_{4,0} + c_1 c_4 V_{5,0} + c_1 c_5 V_{6,0} + c_2 c_3 V_{5,0} + c_2 c_4 V_{6,0}) \\
& + 4(c_1 c_2 V_{3,1} + c_1 c_3 V_{4,1} + c_1 c_4 V_{5,1} + c_2 c_3 V_{5,1}) \\
& + 2(c_1 V_{1,1} + c_2 V_{2,1} + c_3 V_{3,1} + c_4 V_{4,1} + c_5 V_{5,1}) \\
& + 2(c_1 V_{1,2} + c_2 V_{2,2} + c_3 V_{3,2} + c_4 V_{4,2})\Big]
\end{aligned}
\tag{2.305}
$$

olarak bulunur. Birinci dereceden yaklaştırmaya göre hata kareler ortalamasını minimum yapan değer,

$$
\frac{\partial HKO_1(\overline{y}_{CST})}{\partial c_1} = 0
$$

$$
\overline{Y}^2\left[2c_1 V_{2,0} + 2V_{1,1}\right] = 0
$$

$$
c_1^* = -\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = -\frac{\beta_c}{R}
\tag{2.306}
$$

olarak bulunur. Bu değer Eşitlik (2.303)'de yerine koyulursa minimum hata kareler ortalaması,

$$
\begin{aligned}
HKO_{1min}(\bar{y}_{CST}) &= \bar{Y}^2\left[V_{0,2} + \left(-\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}\right)^2 V_{2,0} - 2\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}V_{1,1}\right] \\
&= \bar{Y}^2\left[V_{0,2} - \frac{V_{1,1}^2}{V_{2,0}}\right] \\
&= \bar{Y}^2 V_{0,2}\left[1-\rho_c^2\right] \\
&= \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 \left\{1-\rho_c^2\right\} = HKO(\bar{y}_{lrc})
\end{aligned}
\qquad (2.307)
$$

bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

Bu tahmin edici bileşik oransal tahmin edici ile karşılaştırıldığında,

$$HKO_1(\bar{y}_{CST}) < HKO(\bar{y}_{RC})$$

$$\bar{Y}^2\left[V_{0,2} + c_1^2 V_{2,0} + 2c_1 V_{1,1}\right] < \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + V_{2,0} - 2V_{1,1}\right)$$

$$c_1^2 V_{2,0} + 2c_1 V_{1,1} < V_{2,0} - 2V_{1,1}$$

$$V_{2,0}\left(c_1^2 - 1\right) < -2V_{1,1}(1+c_1)$$

$$V_{2,0}(c_1 - 1)(c_1 + 1) < -2V_{1,1}(1+c_1)$$

$$(1+c_1) > 0 \Rightarrow c_1 > -1 \text{ ise,}$$

$$V_{2,0}(c_1 - 1) < -2V_{1,1}$$

$$c_1 < \frac{-2V_{1,1} + V_{2,0}}{V_{2,0}}$$

$$-1 < c_1 < 1 - 2\frac{\beta_c}{R} \qquad (2.308)$$

$$(1+c_1) < 0 \Rightarrow c_1 < -1$$

$$1 - 2\frac{\beta_c}{R} < c_1 < -1 \qquad (2.309)$$

koşulları bulunur. Eşitlik (2.308) veya Eşitlik (2.309)'un sağlanması durumunda $\bar{y}_{CST}$ tahmin edicisi $\bar{y}_{RC}$ tahmin edicisinden daha etkindir.

Bu tahmin edici bileşik çarpımsal tahmin edici ile karşılaştırıldığında,

$$HKO_1(\bar{y}_{CST}) < HKO(\bar{y}_{PC})$$

$$\bar{Y}^2\left[V_{0,2} + c_1^2 V_{2,0} + 2c_1 V_{1,1}\right] < \bar{Y}^2\left(V_{0,2} + V_{2,0} + 2V_{1,1}\right)$$

$$c_1^2 V_{2,0} + 2c_1 V_{1,1} < V_{2,0} + 2V_{1,1}$$

$$V_{2,0}\left(c_1^2 - 1\right) < 2V_{1,1}(1 - c_1)$$

$$V_{2,0}(c_1 - 1)(c_1 + 1) < -2V_{1,1}(c_1 - 1)$$

$$(c_1 - 1) > 0 \Rightarrow c_1 > 1 \text{ ise,}$$

$$V_{2,0}(c_1 + 1) < -2V_{1,1}$$

$$c_1 < \frac{-2V_{1,1} - V_{2,0}}{V_{2,0}}$$

$$1 < c_1 < -\left(2\frac{\beta_c}{R} + 1\right) \qquad (2.310)$$

$$(c_1 - 1) < 0 \Rightarrow c_1 < 1$$

$$-\left(2\frac{\beta_c}{R} + 1\right) < c_1 < 1 \qquad (2.311)$$

koşulları elde edilmektedir. Eşitlik (2.310) veya Eşitlik (2.311)'in sağlanması durumunda $\bar{y}_{CST}$ tahmin edicisi $\bar{y}_{PC}$ tahmin edicisinden daha etkindir.

2.1.17. Diana Tahmin Edicisi Ailesine Ait Bazı Tahmin Ediciler

Tahmin Ediciler	δ	ε	η	w	Yan ve Hata Kareler Ortalaması
$\bar{y}_{st}=\sum_{h=1}^{L} W_h\bar{y}_h$	0	0	1	0	$Yan_1(\bar{y}_{st})=0$ $HKO_1(\bar{y}_{st})=\bar{Y}^2V_{0,2}$
$\bar{y}_{RC}=\frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{X}$	-1	0	0	1	$Yan_1(\bar{y}_{RC})=\bar{Y}(V_{2,0}-V_{1,1})$ $HKO_1(\bar{y}_{RC})=\bar{Y}^2(V_{0,2}+V_{2,0}-2V_{1,1})$
$\bar{y}_{PC}=\frac{\bar{y}_{st}\bar{x}_{st}}{\bar{X}}$	1	0	0	0	$Yan_1(\bar{y}_{PC})=\bar{Y}V_{1,1}$ $HKO_1(\bar{y}_{PC})=\bar{Y}^2(V_{0,2}+V_{2,0}+2V_{1,1})$
$d_\alpha=\bar{y}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right)^\alpha$	0	α	1	0	$Yan_1(d_\alpha)=\bar{Y}\left[\alpha V_{1,1}+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}V_{2,0}\right]$ $HKO_1(d_\alpha)=\bar{Y}^2\left[V_{0,2}+\alpha^2V_{2,0}+2\alpha V_{1,1}\right]$

2.1.17.1. Diana Tahmin Edicisi I

Reddy (1973;1974) ve Walsh (1970)'ın basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{RW}=\bar{y}\frac{\bar{X}}{w\bar{x}+(1-w)\bar{X}}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta=-1$, $\varepsilon=-1$ ve $\eta=-1$ değerleri ile $\bar{y}_{RW}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{RW(st)}=\bar{y}_{st}\frac{\bar{X}}{w\bar{x}_{st}+(1-w)\bar{X}} \tag{2.312}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\bar{y}_{RW(st)} &= \bar{Y}(1+e_0)\frac{\bar{X}}{w\bar{X}(1+e_1)+(1-w)\bar{X}} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)\frac{1}{w+we_1+1-w} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)(1+we_1)^{-1}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. Burada $(1+we_1)^{-1}$ terimi MacLaurin Serisine açılırsa

$$
\begin{aligned}
(1+we_1)^{-1} &= 1-we_1+\frac{2(we_1)^2}{2!}-\frac{6(we_1)^3}{3!}+.... \\
&= 1-we_1+w^2e_1^2-w^3e_1^3
\end{aligned}
$$

olur ve bu durumda c_i katsayıları,

e_1 terimi için katsayı:-w

e_1^2 terimi için katsayı: w^2

e_1^3 terimi için katsayı: $-w^3$

$c_i = e_1^i$ terimi için katsayı: $(-w)^i$ (2.313)

olarak bulunur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{RW(st)}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$\mathrm{Yan}_1(\bar{y}_{RW(st)}) = \bar{Y}\left[-wV_{1,1}+w^2V_{2,0}\right] \tag{2.314}$$

$$\mathrm{HKO}_1(\bar{y}_{RW(st)}) = \bar{Y}^2\left[V_{0,2}+w^2V_{2,0}-2wV_{1,1}\right] \tag{2.315}$$

şeklinde elde edilir. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri ise

$$\frac{\partial HKO_1\left(\bar{y}_{RW(st)}\right)}{\partial(w)}=0$$

$$w^*=\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}=\frac{\beta_c}{R} \tag{2.316}$$

biçimindedir.

2.1.17.2. Diana Tahmin Edicisi II

Gupta (1978)'nın basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{Gu}=\bar{y}\left[w\frac{\bar{X}}{\bar{x}}+(1-w)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^2\right]$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta=-1$, $\varepsilon=-1$ ve $\eta=1$ değerleri ile $\bar{y}_{Gu}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{Gu(st)}=\bar{y}_{st}\left[w\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}}+(1-w)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}}\right)^2\right] \tag{2.317}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{Gu(st)}&=\bar{Y}(1+e_0)\left[w\frac{\bar{X}}{\bar{X}(1+e_1)}+(1-w)\left(\frac{\bar{X}}{\bar{X}(1+e_1)}\right)^2\right]\\&=\bar{Y}(1+e_0)\left[w(1+e_1)^{-1}+(1-w)(1+e_1)^{-2}\right]\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Burada $(1+e_1)^{-1}$ ve $(1+e_1)^{-2}$ terimleri MacLaurin Serisine açılırsa

$$\bar{y}_{Gu(st)} = \bar{Y}(1+e_0)\left[w\left(1-e_1+e_1^2-e_1^3.....\right)+(1-w)\left(1-2e_1+3e_1^2-4e_1^3+....\right)\right]$$

olur ve bu durumda c_i katsayıları,

e_1 terimi için katsayı: $-w-2(1-w)=-[(1-w)+1]$

e_1^2 terimi için katsayı: $w+3(1-w)=2(1-w)+1$

e_1^3 terimi için katsayı: $-w-4(1-w)=-[3(1-w)+1]$

$c_i = e_1^i$ terimi için katsayı: $(-1)^i[i(1-w)+1]$ (2.318)

olarak bulunur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{Gu(st)}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$\begin{aligned} \text{Yan}_1\left(\bar{y}_{Gu(st)}\right) &= \bar{Y}\left[-\{(1-w)+1\}V_{1,1}+\{2(1-w)+1\}V_{2,0}\right] \\ &= \bar{Y}\left[\{w-2\}V_{1,1}+\{3-2w\}V_{2,0}\right] \end{aligned} \tag{2.319}$$

$$\begin{aligned} \text{HKO}_1\left(\bar{y}_{Gu(st)}\right) &= \bar{Y}^2\left[V_{0,2}+[(1-w)+1]^2V_{2,0}-2[(1-w)+1]V_{1,1}\right] \\ &= \bar{Y}^2\left[V_{0,2}+[2-w]^2V_{2,0}-2[2-w]V_{1,1}\right] \end{aligned} \tag{2.320}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri ise

$$\frac{\partial \text{HKO}_1\left(\bar{y}_{Gu(st)}\right)}{\partial(w)} = 0$$

$$w^* = 2-\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = 2-\frac{\beta_c}{R} \tag{2.321}$$

biçimindedir.

2.1.17.3. Diana Tahmin Edicisi III

Ray ve Sahai (1979) ve Chakrabarty (1979)'nin basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{RS} = \bar{y}\left[\frac{(1-w)\bar{x} + w\bar{X}}{\bar{x}}\right]$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta = -1$, $\varepsilon = 1$ ve $\eta = 1$ değerleri ile $\bar{y}_{RS}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{RS(st)} = \bar{y}_{st}\left[\frac{(1-w)\bar{x}_{st} + w\bar{X}}{\bar{x}_{st}}\right] \tag{2.322}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{RS(st)} &= \bar{Y}(1+e_0)\left[\frac{(1-w)\bar{X}(1+e_1) + w\bar{X}}{\bar{X}(1+e_1)}\right] \\ &= \bar{Y}(1+e_0)\left[(1-w) + w(1+e_1)^{-1}\right]\end{aligned}$$

biçiminde ifade edilebilir. $(1+e_1)^{-1}$ terimi MacLaurin Serisine açılırsa

$$\bar{y}_{RS(st)} = \bar{Y}(1+e_0)\left[(1-w) + w\left(1 - e_1 + e_1^2 - e_1^3 + \ldots\right)\right]$$

olur ve bu durumda c_i katsayıları,

e_1 terimi için katsayı:-w

e_1^2 terimi için katsayı:w

e_1^3 terimi için katsayı:-w

$c_i = e_1^i$ terimi için katsayı: $(-1)^i w$ (2.323)

olarak bulunur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{RS(st)}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$\text{Yan}_1\left(\bar{y}_{RS(st)}\right) = \bar{Y}\left[-wV_{1,1} + wV_{2,0}\right] \tag{2.324}$$

$$\text{HKO}_1\left(\bar{y}_{RS(st)}\right) = \bar{Y}^2\left[V_{0,2} + w^2V_{2,0} - 2wV_{1,1}\right] \tag{2.325}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri ise

$$\frac{\partial \text{HKO}_1\left(\bar{y}_{RS(st)}\right)}{\partial(w)} = 0$$

$$w^* = -\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = -\frac{\beta_c}{R} \tag{2.326}$$

biçimindedir.

2.1.17.4. Diana Tahmin Edicisi IV

Sahai ve Ray (1980)'ın basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{SR} = \bar{y}\left[2 - \left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right]$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta = 0$, $\eta = 1$ ve $w = 2$ değerleri ile $\bar{y}_{SR}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{SR(st)} = \bar{y}_{st}\left[2-\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right] \tag{2.327}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{SR(st)} &= \bar{Y}(1+e_0)\left[2-\left(\frac{\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right] \\ &= \bar{Y}(1+e_0)\left[2-(1+e_1)^{\varepsilon}\right]\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. $(1+e_1)^{\varepsilon}$ terimi MacLaurin Serisine açılırsa

$$\bar{y}_{SR(st)} = \bar{Y}(1+e_0)\left[2-\left\{1+\varepsilon e_1+\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}e_1^2+\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{3!}e_1^3+\ldots\right\}\right]$$

olur ve bu durumda c_i katsayıları,

e_1 terimi için katsayı: $-\varepsilon$

e_1^2 terimi için katsayı: $-\dfrac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}$

e_1^3 terimi için katsayı: $-\dfrac{\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-2)}{3!}$

$c_i = e_1^i$ terimi için katsayı: $\dfrac{\varepsilon(\varepsilon-1)\ldots(\varepsilon-i+1)}{(-1)i!}$ (2.328)

olarak bulunur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{SR(st)}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$Yan_1(\bar{y}_{SR(st)}) = \bar{Y}\left[-\varepsilon V_{1,1}-\frac{\varepsilon(\varepsilon-1)}{2!}V_{2,0}\right] \tag{2.329}$$

$$HKO_1(\bar{y}_{SR(st)}) = \bar{Y}^2\left[V_{0,2}+\varepsilon^2 V_{2,0}+2\varepsilon V_{1,1}\right] \tag{2.330}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan ε değeri ise

$$\frac{\partial HKO_1\left(\bar{y}_{SR(st)}\right)}{\partial(\varepsilon)} = 0$$

$$\varepsilon^* = -\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = -\frac{\beta_c}{R} \tag{2.331}$$

biçimindedir.

2.1.17.5. Diana Tahmin Edicisi V

Tripathi (1980)'nin basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{TR} = \bar{y}\frac{(1-w)\bar{X}+w\bar{x}}{\bar{X}}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta = 1$, $\varepsilon = -1$ ve $\eta = 1$ değerleri ile $\bar{y}_{SR}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{TR(st)} = \bar{y}_{st}\frac{(1-w)\bar{X}+w\bar{x}_{st}}{\bar{X}} \tag{2.332}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{TR(st)} &= \bar{Y}(1+e_0)\frac{(1-w)\bar{X}+w\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}} \\ &= \bar{Y}(1+e_0)\{1-w+w+we_1\} \\ &= \bar{Y}(1+e_0)(1+we_1)\end{aligned}$$

olur ve bu durumda

$$c_i = \begin{cases} w & i=1 \\ 0 & i=2,... \end{cases} \tag{2.333}$$

olur. 1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{TR}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla,

$$Yan_1\left(\bar{y}_{TR(st)}\right) = \bar{Y}wV_{1,1} \tag{2.334}$$

$$HKO_1\left(\bar{y}_{TR(st)}\right) = \bar{Y}^2\left[V_{0,2} + w^2V_{2,0} + 2wV_{1,1}\right] \tag{2.335}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri ise

$$\frac{\partial HKO_1\left(\bar{y}_{TR(st)}\right)}{\partial(w)} = 0$$

$$w^* = -\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = -\frac{\beta_c}{R} \tag{2.336}$$

biçimindedir.

2.1.17.6. Diana Tahmin Edicisi VI

Adhvaryu ve Gupta (1983)'nın basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{sr} = w\bar{y} + (1-w)\bar{y}\frac{\bar{x}}{\bar{X}}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta = 0$, $\varepsilon = -1$ ve $\eta = 1$ değerleri ile $\bar{y}_{sr}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede,

$$\bar{y}_{sr(st)} = \bar{y}_{st}\left[w + (1-w)\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}}\right] \tag{2.337}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{sr(st)} &= \bar{Y}(1+e_0)\left[w+(1-w)\frac{\bar{X}}{\bar{X}(1+e_1)}\right]\\ &= \bar{Y}(1+e_0)\left[w+(1-w)(1+e_1)^{-1}\right]\\ &= \bar{Y}(1+e_0)\left[w+(1-w)(1-e_1+e_1^2-e_1^3)\right]\end{aligned}$$

olur ve bu durumda c_i katsayıları,

e_1 terimi için katsayı: $-(1-w)$

e_1^2 terimi için katsayı: $(1-w)$

e_1^3 terimi için katsayı: $-(1-w)$

$c_i = e_1^i$ terimi için katsayı: $(-1)^i(1-w)$ (2.338)

olarak bulunur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{sr}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$Yan_1(\bar{y}_{sr(st)}) = \bar{Y}\left[-(1-w)V_{1,1}+(1-w)V_{2,0}\right] \tag{2.339}$$

$$HKO_1(\bar{y}_{sr(st)}) = \bar{Y}^2\left[V_{0,2}+(1-w)^2V_{2,0}-2(1-w)V_{1,1}\right] \tag{2.340}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri ise

$$\frac{\partial HKO_1(\bar{y}_{sr(st)})}{\partial(w)} = 0$$

$$w^* = 1-\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = 1-\frac{\beta_c}{R} \tag{2.341}$$

biçimindedir.

2.1.17.7. Diana Tahmin Edicisi VII

Adhvaryu ve Gupta (1983)'nın basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{sp} = w\bar{y} + (1-w)\bar{y}\frac{\bar{x}}{\bar{X}}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta = 0$, $\varepsilon = 1$ ve $\eta = 1$ değerleri ile $\bar{y}_{sp}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{sp(st)} = \bar{y}_{st}\left[w + (1-w)\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right] \tag{2.342}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{sp(st)} &= \bar{Y}(1+e_0)\left[w + (1-w)\frac{\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}}\right] \\ &= \bar{Y}(1+e_0)[1+(1-w)e_1]\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda c_i katsayıları,

$$c_i = \begin{cases} 1-w & i=1 \\ 0 & i=2... \end{cases} \tag{2.343}$$

olur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{sp(st)}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$Yan_1(\bar{y}_{sp(st)}) = \bar{Y}(1-w)V_{1,1} \tag{2.344}$$

$$HKO_1\left(\bar{y}_{sp(st)}\right)=\bar{Y}^2\left[V_{0,2}+(1-w)^2V_{2,0}+2(1-w)V_{1,1}\right] \tag{2.345}$$

biçiminde elde edilir. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri

$$\frac{\partial HKO_1\left(\bar{y}_{sp(st)}\right)}{\partial(w)}=0$$

$$w^*=1+\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}=1+\frac{\beta_c}{R} \tag{2.346}$$

olarak bulunur.

2.1.17.8. Diana Tahmin Edicisi VIII

Adhvaryu ve Gupta (1983)'nın basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{rp}=w\bar{y}\frac{\bar{X}}{\bar{x}}+(1-w)\bar{y}\frac{\bar{x}}{\bar{X}}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta=-1$, $\varepsilon=2$ ve $\eta=1$ değerleri ile $\bar{y}_{rp}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{rp(st)}=\bar{y}_{st}\left[w\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}}+(1-w)\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right] \tag{2.347}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{rp(st)}&=\bar{Y}(1+e_0)\left[w\frac{\bar{X}}{\bar{X}(1+e_1)}+(1-w)\frac{\bar{X}(1+e_1)}{\bar{X}}\right]\\&=\bar{Y}(1+e_0)\left[w(1+e_1)^{-1}+(1-w)(1+e_1)\right]\\&=\bar{Y}(1+e_0)\left[w\left(1-e_1+e_1^2-e_1^3+....\right)+(1-w)(1+e_1)\right]\end{aligned}$$

olur ve bu durumda c_i katsayıları,

e_1 terimi için katsayı: $-w+(1-w)=1-2w$

e_1^2 terimi için katsayı: w

e_1^3 terimi için katsayı: $-w$

$$c_i=\begin{cases}1-2w & i=1\\ (-1)^i w & i=2,\dots\end{cases} \tag{2.348}$$

olarak bulunur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{rp(st)}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$\text{Yan}_1\left(\bar{y}_{rp(st)}\right)=\bar{Y}\left[(1-2w)V_{1,1}+wV_{2,0}\right] \tag{2.349}$$

$$\text{HKO}_1\left(\bar{y}_{rp(st)}\right)=\bar{Y}^2\left[V_{0,2}+(1-2w)^2V_{2,0}+2(1-2w)V_{1,1}\right] \tag{2.350}$$

biçiminde olur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri ise

$$\frac{\partial \text{HKO}_1\left(\bar{y}_{rp(st)}\right)}{\partial(w)}=0$$

$$w^*=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\beta_c}{R} \tag{2.351}$$

biçimindedir.

2.1.17.9. Diana Tahmin Edicisi IX

Mohanty ve Sahoo (1987)'nun basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{MS} = \bar{y}\frac{\bar{x}}{(1-w)\bar{x}+w\bar{X}}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta=1$, $\varepsilon=1$ ve $\eta=-1$ değerleri ile $\bar{y}_{MS}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{MS(st)} = \bar{y}_{st}\frac{\bar{x}_{st}}{(1-w)\bar{x}_{st}+w\bar{X}} \tag{2.352}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{MS(st)} &= \bar{Y}(1+e_0)\frac{\bar{X}(1+e_1)}{(1-w)\bar{X}(1+e_1)+w\bar{X}} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)(1+e_1-we_1)^{-1} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)(1+(1-w)e_1)^{-1} \\
&= \bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)\left[1-(1-w)e_1+(1-w)^2e_1^2-(1-w)^3e_1^3+\ldots\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda c_i katsayıları

e_1 terimi için katsayı: $1-(1-w)=w$

e_1^2 terimi için katsayı: $(1-w)^2-(1-w)=w(w-1)$

e_1^3 terimi için katsayı: $-(1-w)^3+(1-w)^2=(1-w)^2(-1+w+1)=w(w-1)^2$

$c_i = e_1^i$ terimi için katsayı: $w(w-1)^{i-1}$ (2.353)

olur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\bar{y}_{MS(st)}$ tahmin edicisinin yanıve hata kareler ortalaması sırasıyla

$$\text{Yan}_1\left(\bar{y}_{MS(st)}\right) = \bar{Y}\left[wV_{1,1}+w(w-1)V_{2,0}\right] \tag{2.354}$$

$$HKO_1\left(\bar{y}_{MS(st)}\right)=\bar{Y}^2\left[V_{0,2}+w^2V_{2,0}+2wV_{1,1}\right] \tag{2.355}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri

$$\frac{\partial HKO_1\left(\bar{y}_{MS(st)}\right)}{\partial(w)}=0$$

$$w^*=-\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}}=-\frac{\beta_c}{R} \tag{2.356}$$

biçimindedir.

2.1.17.10. Diana Tahmin Edicisi X

Mohanty ve Sahoo (1987)'nun basit rasgele örneklemede kitle ortalaması için önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_{SM}=\bar{y}\,\frac{\bar{X}^2}{w\bar{x}\bar{X}+(1-w)\bar{x}^2}$$

şeklindedir. $\bar{y}_{CST}$ tahmin edici ailesinde $\delta=-1$, $\varepsilon=1$ ve $\eta=-1$ değerleri ile $\bar{y}_{SM}$ tahmin edicisi tabakalı rasgele örneklemede

$$\bar{y}_{SM(st)}=\bar{y}_{st}\,\frac{\bar{X}^2}{w\bar{x}_{st}\bar{X}+(1-w)\bar{x}_{st}^2} \tag{2.357}$$

şeklinde elde edilir. Tahmin edici Eşitlik (2.2) ve Eşitlik (2.3)'de verilen e'li terimler cinsinden yazılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{y}_{SM(st)}&=\bar{Y}(1+e_0)\frac{\bar{X}^2}{w\bar{X}^2(1+e_1)+(1-w)\bar{X}^2(1+e_1)^2}\\&=\bar{Y}(1+e_0)(1+e_1)^{-1}\left[w+(1-w)(1+e_1)\right]^{-1}\end{aligned}$$

$$= \overline{Y}(1+e_0)(1+e_1)^{-1}[1+(1-w)e_1]^{-1}$$

$$= \overline{Y}(1+e_0)\left(1-e_1+e_1^2-e_1^3+\ldots\right)$$

$$* \left[1-(1-w)e_1+(1-w)^2 e_1^2-(1-w)^3 e_1^3+\ldots\right]$$

olur bu durumda c_i katsayıları,

e_1 terimi için katsayı: $-1-(1-w)$

e_1^2 terimi için katsayı: $(1-w)^2+(1-w)+1$

e_1^3 terimi için katsayı: $-(1-w)^3-(1-w)^2-(1-w)-1$

$$c_i = e_1^i \text{ terimi için katsayı:} (-1)^i\left[1+\sum_{j=1}^{i}(1-w)^j\right] \tag{2.358}$$

olarak bulunur.

1. dereceden yaklaşıma göre $\overline{y}_{SM(st)}$ tahmin edicisinin yanı ve hata kareler ortalaması sırasıyla,

$$Yan_1\left(\overline{y}_{SM(st)}\right) = \overline{Y}\left[(w-2)V_{1,1}+\left\{(1-w)^2+(2-w)\right\}V_{2,0}\right] \tag{2.359}$$

$$HKO_1\left(\overline{y}_{SM(st)}\right) = \overline{Y}^2\left[V_{0,2}+(w-2)^2 V_{2,0}+2(w-2)V_{1,1}\right] \tag{2.360}$$

olarak bulunur. Hata kareler ortalamasını minimum yapan w değeri ise

$$\frac{\partial HKO_1\left(\overline{y}_{SM(st)}\right)}{\partial(w)} = 0$$

$$w^* = 2-\frac{V_{1,1}}{V_{2,0}} = 2-\frac{\beta_c}{R} \tag{2.361}$$

biçimindedir.

2.2. Tabakalı Rasgele Örneklemede Varyans Tahmin Edicileri

2.2.1. Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicileri

Oransal tahmin ediciler, ilgilenilen değişken ile yardımcı değişken bilgisi arasında bulunan pozitif korelasyon bilgisini kullanmaktadır. Bu nedenle kitle ortalaması, çarpıklık ve basıklık katsayısı gibi yardımcı değişken bilgisi elde edilebildiği durumda kitle ortalaması için oransal tahminler kullanılmaktadır. Benzer şekilde Kadılar ve Çıngı (2006), kitle bilgisini kitle varyans tahminini geliştirmek için kullanmışlardır.

Tabakalı rasgele örneklemede kitle varyansı,

$$(N-1)S_{st,y}^2 = \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi}-\overline{Y}\right)^2 = \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\left(y_{hi}-\overline{Y}_h\right)+\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)\right]^2$$

($N \cong N-1$ ve $N_h \cong N_h-1$ varsayımı altında)

$$NS_{st,y}^2 \cong \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi}-\overline{Y}\right)^2 = \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left[\left(y_{hi}-\overline{Y}_h\right)^2+2\left(y_{hi}-\overline{Y}_h\right)\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)+\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L}\left[\sum_{i=1}^{N_h}\left(y_{hi}-\overline{Y}_h\right)^2+N_h\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)^2\right]$$

$$= \sum_{h=1}^{L}N_hS_{yh}^2+\sum_{h=1}^{L}N_h\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)^2$$

$$S_{st,y}^2 \cong \sum_{h=1}^{L}W_hS_{yh}^2+\sum_{h=1}^{L}W_h\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)^2 \qquad (2.362)$$

biçiminde yazılabilmektedir. Buradan kitle varyansı $S_{st,y}^2$ 'nin tahmini

$$s_{st,y}^2 \cong \sum_{h=1}^{L}\hat{w}_hs_{yh}^2+\sum_{h=1}^{L}\hat{w}_h\left(\overline{y}_h-\overline{y}_{st}\right)^2 \qquad (2.363)$$

şeklindedir. Burada $\hat{w}_h = \frac{n_h}{n}, \frac{n_h}{n} = \frac{N_h}{N} \Rightarrow \hat{w}_h = W_h$ olarak varsayılırsa

$$s_{st,y}^2 \cong \sum_{h=1}^{L} W_h s_{yh}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h (\bar{y}_h - \bar{y}_{st})^2 = \sum_{h=1}^{L} W_h \left(s_{yh}^2 + (\bar{y}_h - \bar{y}_{st})^2\right)$$

şeklinde de verilebilir. Bu tahmin edicinin hata kareler ortalaması Taylor yönteminden,

$$HKO\left(s_{st,y}^2\right) \cong \sum_{h=1}^{L} d_h \Sigma_h d_h^{'} \qquad (2.364)$$

olmaktadır. Burada

$$d_h = \left[\left.\frac{\partial h(a,b,c)}{\partial a}\right|_{S_{yh}^2, \bar{Y}_h, \bar{Y}} \quad \left.\frac{\partial h(a,b,c)}{\partial b}\right|_{S_{yh}^2, \bar{Y}_h, \bar{Y}} \quad \left.\frac{\partial h(a,b,c)}{\partial c}\right|_{S_{yh}^2, \bar{Y}_h, \bar{Y}} \right] \qquad (2.365)$$

$$\left(h(a,b,c) = h\left(s_{yh}^2, \bar{y}_h, \bar{y}_{st}\right) = s_{st,y}^2 \right) \qquad (2.366)$$

(Eşitlik (2.365)'ten)

$$d_h = \left[W_h \quad 2W_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) \quad -2W_h\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)\right] \qquad (2.367)$$

$$\Sigma_h = \begin{bmatrix} V\left(s_{yh}^2\right) & cov\left(s_{yh}^2, \bar{y}_h\right) & cov\left(s_{yh}^2, \bar{y}_{st}\right) \\ cov\left(\bar{y}_h, s_{yh}^2\right) & V(\bar{y}_h) & cov(\bar{y}_h, \bar{y}_{st}) \\ cov\left(\bar{y}_{st}, s_{yh}^2\right) & cov(\bar{y}_{st}, \bar{y}_h) & V(\bar{y}_{st}) \end{bmatrix} \qquad (2.368)$$

biçiminde tanımlanmaktadır. Eşitlik (2.364)'ten hata kareler ortalaması,

$$HKO\left(s_{st,y}^2\right) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 V\left(s_{yh}^2\right) + 4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)^2 V(\bar{y}_h) + 4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)^2 V(\bar{y}_{st})$$
$$+ 4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) cov\left(\bar{y}_h, s_{yh}^2\right) - 4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) cov\left(\bar{y}_{st}, s_{yh}^2\right)$$

$$-8\sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)^2 \operatorname{cov}(\overline{y}_h,\overline{y}_{st})$$

$$=\sum_{h=1}^{L} W_h^2 V\left(s_{yh}^2\right)+4\sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)\left[\operatorname{cov}\left(\overline{y}_h,s_{yh}^2\right)-\operatorname{cov}\left(\overline{y}_{st},s_{yh}^2\right)\right]$$

$$+4\sum_{h=1}^{L} W_h^2\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)^2\left[V(\overline{y}_h)+V(\overline{y}_{st})-2\operatorname{cov}(\overline{y}_h,\overline{y}_{st})\right] \qquad (2.369)$$

şeklinde bulunur. Kadılar ve Çıngı (2006)'nın tabakalı rasgele örneklemede kitle varyansı için önerdiği oransal tahmin edici,

$$s_{rc}^2=\frac{s_{st,y}^2}{s_{st,x}^2}S_x^2 \qquad (2.370)$$

şeklindedir. Burada $s_{st,x}^2=\sum_{h=1}^{L} W_h s_{xh}^2+\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\overline{x}_h-\overline{x}_{st}\right)^2$ tabakalı rasgele örneklemede yardımcı değişkenin kitle varyansı, s_{xh}^2 h. tabakada yardımcı değişkenin örneklem varyansıdır. Bu durumda,

$$s_{rc}^2=\frac{\sum_{h=1}^{L} W_h s_{yh}^2+\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\overline{y}_h-\overline{y}_{st}\right)^2}{\sum_{h=1}^{L} W_h s_{xh}^2+\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\overline{x}_h-\overline{x}_{st}\right)^2}S_x^2$$

$$\delta=\sum_{h=1}^{L} W_h S_{xh}^2+\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\overline{X}_h-\overline{X}_{st}\right)^2 \qquad (2.371)$$

$$v=\sum_{h=1}^{L} W_h S_{yh}^2+\sum_{h=1}^{L} W_h\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}_{st}\right)^2 \qquad (2.372)$$

olarak tanımlanırsa Eşitlik (2.365)'ten d_h

$$d_h=\frac{S_x^2}{\delta}\left[W_h \quad 2W_h\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right) \quad -2W_h\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)\right.$$

$$\left.\frac{-W_h v}{\delta} \quad \frac{-2W_h\left(\overline{X}_h-\overline{X}\right)v}{\delta} \quad \frac{2W_h\left(\overline{X}_h-\overline{X}\right)v}{\delta}\right] \tag{2.373}$$

olarak bulunur. Burada

$$\Sigma_h=\begin{bmatrix} V\left(s_{yh}^2\right) & cov\left(s_{yh}^2,\overline{y}_h\right) & cov\left(s_{yh}^2,\overline{y}_{st}\right) & cov\left(s_{yh}^2,s_{xh}^2\right) & cov\left(s_{yh}^2,\overline{x}_h\right) & cov\left(s_{yh}^2,\overline{x}_{st}\right) \\ cov\left(\overline{y}_h,s_{yh}^2\right) & V\left(\overline{y}_h\right) & cov\left(\overline{y}_h,\overline{y}_{st}\right) & cov\left(\overline{y}_h,s_{xh}^2\right) & cov\left(\overline{y}_h,\overline{x}_h\right) & cov\left(\overline{y}_h,\overline{x}_{st}\right) \\ cov\left(\overline{y}_{st},s_{yh}^2\right) & cov\left(\overline{y}_{st},\overline{y}_h\right) & V\left(\overline{y}_{st}\right) & cov\left(\overline{y}_{st},s_{xh}^2\right) & cov\left(\overline{y}_{st},\overline{x}_h\right) & cov\left(\overline{y}_{st},\overline{x}_{st}\right) \\ cov\left(s_{xh}^2,s_{yh}^2\right) & cov\left(s_{xh}^2,\overline{y}_h\right) & cov\left(s_{xh}^2,\overline{y}_{st}\right) & V\left(s_{xh}^2\right) & cov\left(s_{xh}^2,\overline{x}_h\right) & cov\left(s_{xh}^2,\overline{x}_{st}\right) \\ cov\left(\overline{x}_h,s_{yh}^2\right) & cov\left(\overline{x}_h,\overline{y}_h\right) & cov\left(\overline{x}_h,\overline{y}_{st}\right) & cov\left(\overline{x}_h,s_{xh}^2\right) & V\left(\overline{x}_h\right) & cov\left(\overline{x}_h,\overline{x}_{st}\right) \\ cov\left(\overline{x}_{st},s_{yh}^2\right) & cov\left(\overline{x}_{st},\overline{y}_h\right) & cov\left(\overline{x}_{st},\overline{y}_{st}\right) & cov\left(\overline{x}_{st},s_{xh}^2\right) & cov\left(\overline{x}_{st},\overline{x}_h\right) & V\left(\overline{x}_{st}\right) \end{bmatrix} \tag{2.374}$$

olduğundan bu tahmin edicinin hata kareler ortalaması Eşitlik (2.364)'ten

$$HKO\left(s_{rc}^2\right)\cong\frac{S_x^4}{\delta^2}\left\{\sum_{h=1}^{L}W_h^2V\left(s_{yh}^2\right)+4\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)\left[cov\left(\overline{y}_h,s_{yh}^2\right)-cov\left(\overline{y}_{st},s_{yh}^2\right)\right]\right.$$

$$+4\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)^2\left[V\left(\overline{y}_h\right)-2cov\left(\overline{y}_{st},\overline{y}_h\right)+V\left(\overline{y}_{st}\right)\right]-2\frac{v}{\delta}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\,cov\left(s_{yh}^2,s_{xh}^2\right)$$

$$-4\frac{v}{\delta}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\overline{X}_h-\overline{X}\right)\left[cov\left(\overline{x}_h,s_{yh}^2\right)-cov\left(\overline{x}_{st},s_{yh}^2\right)-\frac{v}{\delta}cov\left(\overline{x}_h,s_{yh}^2\right)+\frac{v}{\delta}cov\left(\overline{x}_{st},s_{xh}^2\right)\right]$$

$$-4\frac{v}{\delta}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)\left[cov\left(\overline{y}_h,s_{xh}^2\right)-cov\left(\overline{y}_{st},s_{xh}^2\right)\right]+\frac{v^2}{\delta^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2V\left(s_{xh}^2\right)$$

$$-8\frac{v}{\delta}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\overline{X}_h-\overline{X}\right)\left(\overline{Y}_h-\overline{Y}\right)\left[cov\left(\overline{y}_h,\overline{x}_h\right)-cov\left(\overline{y}_{st},\overline{x}_h\right)-cov\left(\overline{y}_h,\overline{x}_{st}\right)+cov\left(\overline{y}_{st},\overline{x}_{st}\right)\right]$$

$$\left.+4\frac{v^2}{\delta^2}\sum_{h=1}^{L}W_h^2\left(\overline{X}_h-\overline{X}\right)^2\left[V\left(\overline{x}_h\right)-2cov\left(\overline{x}_{st},\overline{x}_h\right)+V\left(\overline{x}_{st}\right)\right]\right\}$$

olarak bulunur. Burada

$$V\left(s_{yh}^2\right)=\lambda_h^*S_{yh}^4\left[\beta_2\left(y_h\right)-1\right],\ cov\left(\overline{y}_h,s_{yh}^2\right)=\lambda_h^*\mu_{30h},\ cov\left(\overline{y}_{st},s_{yh}^2\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h\lambda_h^*\mu_{30h}$$

$$V\left(\overline{y}_h\right)=\lambda_h^*S_{yh}^2,\ cov\left(\overline{y}_{st},\overline{y}_h\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h\lambda_h^*S_{yh}^2,\ V\left(\overline{y}_{st}\right)=\sum_{h=1}^{L}W_h^2\lambda_h^*S_{yh}^2$$

$$\mathrm{cov}\left(s_{yh}^2, s_{xh}^2\right) = \lambda_h^* S_{yh}^2 S_{xh}^2 (\theta_h - 1),\ \mathrm{cov}\left(\bar{x}_h, s_{yh}^2\right) = \lambda_h^* \mu_{21h},\ \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, s_{yh}^2\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* \mu_{21h}$$

$$\mathrm{cov}\left(\bar{x}_h, s_{xh}^2\right) = \lambda_h^* \mu_{03h},\ \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, s_{xh}^2\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* \mu_{03h},\ \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, s_{xh}^2\right) = \lambda_h^* \mu_{12h}$$

$$\mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, s_{xh}^2\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* \mu_{12h},\ V\left(s_{xh}^2\right) = \lambda_h^* S_{xh}^4 \left[\beta_2(x_h) - 1\right],\ \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{x}_h\right) = \lambda_h^* S_{yxh}$$

$$\mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{x}_h\right) = \mathrm{cov}\left(\bar{y}_h, \bar{x}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* S_{yxh},\ \mathrm{cov}\left(\bar{y}_{st}, \bar{x}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{yxh}$$

$$V\left(\bar{x}_h\right) = \lambda_h^* S_{xh}^2,\ \mathrm{cov}\left(\bar{x}_{st}, \bar{x}_h\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* S_{xh}^2,\ V\left(\bar{x}_{st}\right) = \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{xh}^2$$

$$\mu_{rsh} = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} \left(y_{hi} - \bar{Y}_h\right)^r \left(x_{hi} - \bar{X}_h\right)^s,\ \theta_h = \frac{\mu_{22h}}{\mu_{20h}\mu_{02h}},\ \lambda_h^* = \frac{1}{n_h} \tag{2.375}$$

olmaktadır. Bu tanımlanan eşitliklerden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\mathrm{HKO}\left(s_{rc}^2\right) \cong \frac{S_x^4}{\delta^2} \Bigg\{ & \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{yh}^4 \left[\beta_2(y_h) - 1\right] + 4 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) \left[\lambda_h^* \mu_{30h} - \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* \mu_{30h}\right] \\
& + 4 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right)^2 \left[\lambda_h^* S_{yh}^2 - 2 \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* S_{yh}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{yh}^2\right] - 2 \frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{yh}^2 S_{xh}^2 (\theta_h - 1) \\
& - 4 \frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{X}_h - \bar{X}\right) \left[\lambda_h^* \mu_{21h} - \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* \mu_{21h} - \frac{v}{\delta} \lambda_h^* \mu_{03h} + \frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* \mu_{03h}\right] \\
& - 4 \frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) \left[\lambda_h^* \mu_{12h} - \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* \mu_{12h}\right] + \frac{v^2}{\delta^2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{xh}^4 \left[\beta_2(x_h) - 1\right] \\
& - 8 \frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{X}_h - \bar{X}\right)\left(\bar{Y}_h - \bar{Y}\right) \left[\lambda_h^* S_{yxh} - 2 \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* S_{yxh} + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{yxh}\right] \\
& + 4 \frac{v^2}{\delta^2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\bar{X}_h - \bar{X}\right)^2 \left[\lambda_h^* S_{xh}^2 - 2 \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h^* S_{xh}^2 + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h^* S_{xh}^2\right] \Bigg\}
\end{aligned} \tag{2.376}$$

olarak bulunur. Kadılar ve Çıngı (2006) tarafından önerilen diğer tahmin ediciler,

$$s_{repr1}^2 = \frac{s_{st,y}^2}{s_{st,x}^2 + C_x} \left(S_x^2 + C_x\right) \tag{2.377}$$

$$s^2_{repr2} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x} + \beta_2(x)}\left(S^2_x + \beta_2(x)\right) \tag{2.378}$$

$$s^2_{repr3} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x}\beta_2(x) + C_x}\left(S^2_x\beta_2(x) + C_x\right) \tag{2.379}$$

$$s^2_{repr4} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x}C_x + \beta_2(x)}\left(S^2_xC_x + \beta_2(x)\right) \tag{2.380}$$

şeklindedir. Eşitlik (2.377) ve Eşitlik (2.378)'de verilen tahmin edicilerin hata kareler ortalaması için Eşitlik (2.376)'da S^2_x ve δ terimleri yerine sırasıyla $S^2_x + C_x$, $\delta + C_x$ ve $S^2_x + \beta_2(x)$, $\delta + \beta_2(x)$ terimleri gelmektedir. Eşitlik (2.379)'da verilen tahmin edici için ise S^2_x ve δ terimleri yerine $S^2_x\beta_2(x) + C_x$ ve $\delta\beta_2(x) + C_x$ terimleri gelir ve v terimi $\beta_2(x)$ ile çarpılır. Eşitlik (2.380)'de verilen tahmin edici için ise S^2_x ve δ terimleri yerine $S^2_xC_x + \beta_2(x)$ ve $\delta C_x + \beta_2(x)$ terimleri gelir ve v terimi C_x ile çarpılır. Eşitlik (2.373) ve Eşitlik (2.374)'de bu değerler yerine koyularak benzer şekilde hata kareler ortalaması hesaplanabilir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. SAYISAL ÖRNEK

Bu bölümde konu ile ilgili sayısal bir örnek vermek amacıyla Türkiye'de bulunan 923 ilçedeki ilk ve ortaöğretimde okuyan öğrenci sayısı (x) yardımcı değişken, öğretmen sayısı (y) ilgilenilen değişken olarak alınmıştır. Bu veriler 2006-2007 öğretim yılı için Milli Eğitim Bakanlığı'ndan elde edilmiştir. Öğretmen sayısı ile öğrenci sayısı değişkenleri arasında ilişki katsayısı Çizelge (3.1)'de verildiği gibi $\rho_{xy} = 0{,}954$ olarak bulunmuş ve bu iki değişken arasındaki pozitif ve yüksek ilişkiden dolayı kitle ortalaması ve varyansının tahmininde kullanılan oransal tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları ve yanları hesaplanmıştır. Türkiye'nin farklı bölgelerinde bulunan ilçelerdeki öğretmen ve öğrenci sayıları değişkenlik göstereceği düşünülerek Türkiye'nin coğrafi bölgelerine göre kitle tabakalara ayrılmıştır. Burada Doğu Anadolu ve Güneydoğu Anadolu Bölgeleri'nin benzer özellik gösterdiği düşünülmüş ve iki bölge bir tabaka olarak alınmıştır. Kitle,

1. tabaka :Marmara Bölgesi
2. tabaka : Ege Bölgesi
3. tabaka : Akdeniz Bölgesi
4. tabaka : İç Anadolu Bölgesi
5. tabaka : Karadeniz Bölgesi
6. tabaka : Doğu Anadolu ve Güneydoğu Anadolu Bölgesi

olmak üzere tabakalara ayrılmıştır. Tabakalara ait kitle bilgileri Çizelge (3.2)'de verilmiştir. Örneklem büyüklüğünün tahmininde,

$$V = \left(\frac{d}{t}\right)^2, \; n = \frac{\left(\sum_{h=1}^{L} W_h S_{yh}\right)^2}{V + \frac{1}{N}\sum_{h=1}^{L} W_h S_{yh}^2} \tag{3.1}$$

eşitlikleri kullanılabilir (Çıngı,1994). Bu eşitliklerden yararlanarak, $1-\alpha = 0{,}95$ güvenilirlikle, tahmin için hoş görülebilecek hata miktarı (d), yaklaşık olarak 95 alındığında örneklem büyüklüğü n=180 olarak tahmin edilmiştir.

Örneklem büyüklüğünün tabakalara dağıtımı, birimlere ulaşma maliyetinin tabakadan tabakaya değişmediği varsayımı yapılarak aşağıdaki eşitlikte verilen Neyman Dağıtımına göre yapılmıştır.

$$n_h = n \frac{N_h S_{yh}}{\sum_{h=1}^{L} N_h S_{yh}} \tag{3.2}$$

$N_1=127$, $N_2=117$, $N_3=103$, $N_4=170$, $N_5=205$, $N_6=201$ tabaka genişlikleri olmak üzere tabaka örneklem büyüklükleri

$n_1=31$	$n_2=21$	$n_3=29$	$n_4=38$	$n_5=22$	$n_6=39$	$\sum_{h=1}^{6} n_h = n = 180$

şeklinde elde edilmiştir. Çizelge (3.3)'te tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları ve yanları kitle bilgileri kullanılarak hesaplanmıştır. Öğretmen sayısı ile öğrenci sayısı değişkenleri arasındaki ilişkinin pozitif olmasından dolayı çarpımsal tahmin ediciler için hata kareler ortalaması ve yan hesaplanmamıştır

Çizelge (3.1). Öğretmen Sayısı (y) ve Öğrenci Sayısı (x) Değişkenlerine Ait Kitle Bilgileri

N=923	$\overline{Y}$=436,434
$\overline{X}$=11440,498	S_y^2=562409,283
S_x^2=455017171,8	$\beta_2(x)$=21,613
R=0,038	$C_{x(st)}$=1,705
$\beta_{2(x)st}$=18,943	$\left(\overline{X}\beta_{2(x)}\right)_{st}$=198233,970
$\left(\overline{X}C_x\right)_{st}$=19465,624	β_c=0,035
ρ_c^2=0,913	ψ=0,99985
δ=0,99835	ρ_{xy}=0,954

Çizelge (3.2). Öğretmen Sayısı (y) ve Öğrenci Sayısı (x) Değişkenlerine Ait Kitle Tabaka Bilgileri

S_{y1} =883,835	S_{y2} =644,922	S_{y3} =1033,467
S_{y4} =810,585	S_{y5} =403,654	S_{y6} =711,723
$\overline{Y}_1$=703,74	$\overline{Y}_2$ =413	$\overline{Y}_3$ =573,17
$\overline{Y}_4$ =424,66	$\overline{Y}_5$ =267,03	$\overline{Y}_6$ =393,84
C_{y1}=1,256	C_{y2} =1,562	C_{y3} =1,803
C_{y4} =1,909	C_{y5} =1,512	C_{y6} =1,807
S_{x1} =30486,751	S_{x2} =15180,769	S_{x3} =27549,697
S_{x4} =18218,931	S_{x5} =8497,776	S_{x6} =23094,141
$\overline{X}_1$ =20804,59	$\overline{X}_2$ =9211,79	$\overline{X}_3$ =14309,30
$\overline{X}_4$ =9478,85	$\overline{X}_5$ =5569,95	$\overline{X}_6$ =12997,59
C_{X1} =1,465	C_{X2} =1,648	C_{X3} =1,925
C_{X4} =1,922	C_{X5} =1,526	C_{X6} =1,777
S_{xy1} =25237153,52	S_{xy2} =9747942,85	S_{xy3} =28294397,04
S_{xy4} =14523885,53	S_{xy5} =3393591,75	S_{xy6} =15864573,97
ρ_{xy1} =0,936	ρ_{xy2} =0,996	ρ_{xy3} =0,994
ρ_{xy4} =0,983	ρ_{xy5} =0,989	ρ_{xy6} =0,965
$\beta_2(x_1)$=7,367	$\beta_2(x_2)$=20,709	$\beta_2(x_3)$=17,648
$\beta_2(x_4)$=12,830	$\beta_2(x_5)$=24,386	$\beta_2(x_6)$=25,513
$\beta_2(y_1)$=5,027	$\beta_2(y_2)$=18,649	$\beta_2(y_3)$=17,204
$\beta_2(y_4)$=14,777	$\beta_2(y_5)$=23,548	$\beta_2(y_6)$=22,724
w_1 =0,138	w_2 =0,127	w_3 =0,112
w_4 =0,184	w_5 =0,222	w_6 = 0,218

Çizelge (3.3) Kitle Ortalaması Tahminlerinin Hata Kareler Ortalaması ve Yanı

Tahmin Ediciler	**Yan**	**HKO**	**HKO Sıralaması**
Singh ve Singh'ın Tahmin Edicisi $\bar{y}_{RS}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left(W_1^*\bar{y}_h+W_2^*\bar{y}_{Rh}^{*(1)}+W_3^*\bar{y}_{Rh}^{*(2)}\right)$	Yansız	106,427	1
Singh ve Vishwakarma Tahmin Edicisi I $\bar{y}_{ms}=\sum_{h=1}^{L}W_h\bar{y}_h\dfrac{\left(\bar{x}_h+\theta_h\bar{X}_h\right)}{\left(\bar{X}_h+\theta_h\bar{x}_h\right)}$	0,911	106,427	1
Ayrı Regresyon Tahmin Edicisi $\bar{y}_{lrs}=\sum_{h=1}^{L}W_h\left[\bar{y}_h+b_h\left(\bar{X}_h-\bar{x}_h\right)\right]$	1,552	106,427	1
Oransal Ayrı Tahmin Edicisi $\bar{y}_{Rs}=\sum_{h=1}^{L}W_h\dfrac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}\bar{X}_h$	2,072	128,812	2
Singh ve Diğerleri Tahmin Edicisi II $\bar{y}_{R(\delta_{st})}=\bar{y}_{st}\left(\dfrac{\left(\bar{X}C_x\right)_{st}+\beta_{2(x)st}}{\left(\bar{x}C_x\right)_{st}+\beta_{2(x)st}}\right)^{\delta_{st}}$	0,257	184,507	3
Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi IV $\bar{y}^*_{st(US2)}=K_1\bar{y}_{st}+K_2\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}C_x\right)_{st}+\beta_{2(x)st}}{\left(\bar{x}C_x\right)_{st}+\beta_{2(x)st}}$	0,514	184,507	3
Kaur Tahmin Edicisi III $d=\dfrac{\bar{y}_{st}\bar{X}}{\bar{X}+\delta\left(\bar{x}_{st}-\bar{X}\right)}$	Yansız	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi I $\bar{y}_{RW(st)}=\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}}{w\bar{x}_{st}+(1-w)\bar{X}}$	Yansız	194,283	4

Çizelge (3.3) Devamı

Kaur Tahmin Edicisi I $d_\alpha = \bar{y}_{st}\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right)^{\alpha}$	0,243	194,283	4
Singh ve Vishwakarma Tahmin Edicisi II $\bar{y}_{mc} = \bar{y}_{st}\frac{(\bar{x}_{st}+\theta\bar{X})}{(\bar{X}+\theta\bar{x}_{st})}$	0,243	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi IV $\bar{y}_{SR(st)} = \bar{y}_{st}\left[2-\left(\frac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}\right)^{\varepsilon}\right]$	-0,243	194,283	4
Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi II $\bar{y}^{*}_{st(SK)} = K_1\bar{y}_{st} + K_2\bar{y}_{st}\frac{\bar{X}_{st}+\beta_{2(x)st}}{\bar{x}_{st}+\beta_{2(x)st}}$	0,478	194,283	4
Kaur Tahmin Edicisi II $d_{(s)} = \beta d_s + (1-\beta)d_{s+1}$	0,486	194,283	4
Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi I $\bar{y}^{*}_{st(SD)} = K_1\bar{y}_{st} + K_2\bar{y}_{st}\frac{\bar{X}_{st}+C_{x(st)}}{\bar{x}_{st}+C_{x(st)}}$	0,486	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi VI $\bar{y}_{sr(st)} = w\bar{y}_{st} + (1-w)\bar{y}_{st}\frac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}}$	0,486	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi III $\bar{y}_{RS(st)} = \bar{y}_{st}\left[\frac{(1-w)\bar{x}_{st}+w\bar{X}}{\bar{x}_{st}}\right]$	-0,486	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi X $\bar{y}_{SM(st)} = \bar{y}_{st}\frac{\bar{X}^2}{w\bar{x}_{st}\bar{X}+(1-w)\bar{x}^2_{st}}$	0,537	194,283	4

Çizelge (3.3) Devamı

Diana Tahmin Edicisi VIII $\bar{y}_{rp(st)} = w\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}} + (1-w)\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}$	0,755	194,283	4
Bileşik Regresyon Tahmin Edicisi $\bar{y}_{lrc} = \bar{y}_{st} + b_c(\bar{X} - \bar{x}_{st})$	1,774	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi V $\bar{y}_{TR(st)} = \bar{y}_{st}\dfrac{(1-w)\bar{X} + w\bar{x}_{st}}{\bar{X}}$	-4,663	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi VII $\bar{y}_{sp(st)} = w\bar{y}_{st} + (1-w)\bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}}{\bar{X}}$	-4,663	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi IX $\bar{y}_{MS(st)} = \bar{y}_{st}\dfrac{\bar{x}_{st}}{(1-w)\bar{x}_{st} + w\bar{X}}$	5,149	194,283	4
Diana Tahmin Edicisi II $\bar{y}_{Gu(st)} = \bar{y}_{st}\left[w\dfrac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}} + (1-w)\left(\dfrac{\bar{X}}{\bar{x}_{st}}\right)^2\right]$	-5,199	194,283	4
Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi V $\bar{y}_M = \lambda\{\bar{y}_{st} + b(\bar{X} - \bar{x}_{st})\}\left(\dfrac{\bar{z}_{st}}{\bar{Z}}\right)$	-0,445 $Yan^*(\bar{y}_M)$ =-0,44471	194,681 $HKO^*(\bar{y}_M)$ =194.088	5
Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi IV $\bar{y}_{st(US2)} = \bar{y}_{st}\dfrac{(\bar{X}C_x)_{st} + \beta_{2(x)st}}{(\bar{x}C_x)_{st} + \beta_{2(x)st}}$	0,570	209,118	6
Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi V $\bar{y}_{stp} = \lambda\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\bar{X}$	-0,493 $Yan^*(\bar{y}_{stp})$ =0.041	215,355 $HKO^*(\bar{y}_{stp})$ =216,172	7

Çizelge (3.3) Devamı

Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi II $\bar{y}_{st(SK)} = \bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}_{st} + \beta_{2(x)st}}{\bar{x}_{st} + \beta_{2(x)st}}$	0,527	215,650	8
Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi I $\bar{y}_{st(SD)} = \bar{y}_{st}\dfrac{\bar{X}_{st} + C_{x(st)}}{\bar{x}_{st} + C_{x(st)}}$	0,536	216,349	9
Bileşik Oransal Tahmin Edici $\bar{y}_{RC} = \left(\dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}\right)\bar{X}$	0,537	216,418	10
Shabbir ve Gupta Tahmin Edicisi III $\bar{y}^{*}_{st(US1)} = K_1\bar{y}_{st} + K_2\bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}$	1,216	430,220	11
Singh ve Diğerleri Tahmin Edicisi I $\bar{y}_{R(\alpha_{st})} = \bar{y}_{st}\left(\dfrac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}\right)^{\alpha_{st}}$	0,608	430,220	11
Kadılar ve Çıngı Tahmin Edicisi III $\bar{y}_{st(US1)} = \bar{y}_{st}\dfrac{\left(\bar{X}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}{\left(\bar{x}\beta_{2(x)}\right)_{st} + C_{x(st)}}$	1,574	586,651	12
Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey Tahmin Edicisi I $\bar{y}^{*}_{RS} = \sum_{h=1}^{L} W_h\bar{y}_h\left(\dfrac{\bar{x}^{*}_h}{\bar{X}_h}\right)$	-8,246	1209,531	13
Klasik Tabakalı Tahmin Edicisi $\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h\bar{y}_h$	Yansız	2229,266	14
Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey Tahmin Edicisi II $\bar{y}^{*}_{c} = \dfrac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}^{*}_{st}}\bar{X}$	-0,933	3650,847	15

Çizelge (3.3)'te verilen hata kareler ortalaması sıralaması incelendiğinde aşağıdaki koşulların sağlandığı görülmektedir.

Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi I ile klasik oransal tahmin edici karşılaştırıldığında $HKO(\bar{y}_{st(SD)}) < HKO(\bar{y}_{RC})$ eşitsizliğinin sağlanması için $2\frac{\beta_c}{R} - 1 < \psi < 1$ veya $2\frac{\beta_c}{R} - 1 < \psi < 1$ koşullarının sağlanması gerekir. $2\frac{\beta_c}{R} - 1 = 0{,}811 < \psi = 0{,}99985 < 1$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle $HKO(\bar{y}_{st(SD)}) = 216{,}349$ $< HKO(\bar{y}_{RC}) = 216{,}418$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi I klasik oransal tahmin ediciden daha etkindir.

Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi II ile klasik oransal tahmin edici karşılaştırıldığında $HKO(\bar{y}_{st(SK)}) < HKO(\bar{y}_{RC})$ eşitsizliğinin sağlanması için $1 < \delta < 2\frac{\beta_c}{R} - 1$ veya $2\frac{\beta_c}{R} - 1 < \delta < 1$ koşullarının sağlanması gerekir. $2\frac{\beta_c}{R} - 1 = 0{,}811 < \delta = 0{,}99835 < 1$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle $HKO(\bar{y}_{st(SK)}) = 215{,}650$ $< HKO(\bar{y}_{RC}) = 216{,}418$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi II klasik oransal tahmin ediciden daha etkindir.

Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I ile klasik oransal tahmin edici karşılaştırıldığında $HKO_{min}(\bar{y}^*_{st(SD)}) < HKO(\bar{y}_{RC})$ eşitsizliğinin sağlanması için $\rho_c^2 > \frac{2V_{1,1} - V_{2,0}}{V_{0,2}}$ koşulunun sağlanması gerekir. $\rho_c^2 = 0{,}913 > \frac{2V_{1,1} - V_{2,0}}{V_{0,2}} = 0{,}903$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle $HKO_{min}(\bar{y}^*_{st(SD)}) = 194{,}283 < HKO(\bar{y}_{RC}) = 216{,}418$ olduğu görülmektedir. Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I, klasik oransal tahmin ediciden daha etkindir. Bu çoklu karşılaştırma aynı zamanda bileşik regresyon tahmin edicisi ile klasik oransal tahmin edicisinin karşılaştırılmasını vermektedir. Çünkü $HKO_{min}(\bar{y}^*_{st(SD)})$ değeri bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I ile Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi I karşılaştırıldığında ise $HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(SD)}\right) < HKO\left(\bar{y}_{st(SD)}\right)$ eşitsizliğinin sağlanması için $\rho_c^2 > \dfrac{2\psi V_{1,1} - \psi^2 V_{2,0}}{V_{0,2}}$ koşulunun sağlanması gerekir. $\rho_c^2 = 0{,}913 > \dfrac{2\psi V_{1,1} - \psi^2 V_{2,0}}{V_{0,2}}$ $= 0{,}903$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle $HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(SD)}\right) = 194{,}283$ $< HKO\left(\bar{y}_{st(SD)}\right) = 216{,}349$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I, Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi I'den daha etkindir.

Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II ile klasik oransal tahmin edici karşılaştırıldığında ise, Shabbir ve Gupta tahmin edicisi I ile klasik oransal tahmin edici karşılaştırıldığındaki sonuca ulaşılmaktadır. Çünkü $HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(SK)}\right)$ değeri bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır.

Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II ile Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi II karşılaştırıldığında ise $HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(SK)}\right) < HKO\left(\bar{y}_{st(SK)}\right)$ eşitsizliğinin sağlanması için $\rho_c^2 > \dfrac{2\delta V_{1,1} - \delta^2 V_{2,0}}{V_{0,2}}$ koşulunun sağlanması gerekir. $\rho_c^2 = 0{,}913 > \dfrac{2\delta V_{1,1} - \delta^2 V_{2,0}}{V_{0,2}}$ $= 0{,}903$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle $HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(SK)}\right) = 194{,}283$ $< HKO\left(\bar{y}_{st(SK)}\right) = 215{,}650$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Shabbir ve Gupta tahmin edicisi II Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi II'den daha etkindir.

Singh ve diğerleri tahmin edicisi I, Kadılar ve Çıngı III tahmin edicisiyle karşılaştırıldığında her koşulda Singh tahmin edicisinin daha etkin olduğu sonucu bulunmuştu. Uygulamada da $HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}\right) = 430{,}220 < HKO\left(\bar{y}_{st(US1)}\right) = 586{,}651$ olarak bulunmuştur. Benzer sonuçlar $HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\alpha_{st})}\right) = HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(US1)}\right)$ eşitliğinden dolayı Shabbir ve Gupta tahmin edicisi III için de söylenebilir.

Singh ve diğerleri tahmin edicisi II, Kadılar ve Çıngı IV tahmin edicileriyle karşılaştırıldığında her koşulda Singh tahmin edicisinin daha etkin olduğu sonucu bulunmuştu. Uygulamada da $HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\delta_{st})}\right) = 184{,}507 < HKO\left(\bar{y}_{st(US2)}\right) = 209{,}118$

olarak bulunmuştur. Benzer sonuçlar $HKO_{min}\left(\bar{y}_{R(\delta_{st})}\right) = HKO_{min}\left(\bar{y}^{*}_{st(US2)}\right)$ eşitliğinden dolayı Shabbir ve Gupta tahmin edicisi IV için de söylenebilir.

Kadılar ve Çıngı V tahmin edicisi klasik oransal tahmin edici ile karşılaştırıldığında $HKO(\bar{y}_{stp}) < HKO(\bar{y}_{RC})$ eşitsizliğinin sağlanması için $\dfrac{1 - V_{0,2} - V_{2,0} + 2V_{1,1}}{1 + V_{0,2} + 3V_{2,0} + 2V_{1,1}} < \kappa < 1$ veya $1 < \kappa < \dfrac{1 - V_{0,2} - V_{2,0} + 2V_{1,1}}{1 + V_{0,2} + 3V_{2,0} + 2V_{1,1}}$ koşullarının sağlanması gerekir.

$\dfrac{1 - V_{0,2} - V_{2,0} + 2V_{1,1}}{1 + V_{0,2} + 3V_{2,0} + 2V_{1,1}} = 0{,}930 < \kappa = 0{,}998 < 1$ olduğundan koşul sağlanır. Bu nedenle $HKO(\bar{y}_{stp}) = 215{,}355 < HKO(\bar{y}_{RC}) = 216{,}418$ olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, Kadılar ve Çıngı V tahmin edicisi klasik oransal tahmin ediciden daha etkindir.

Singh ve Vishwakarma tahmin edicisi I sırasıyla oransal ayrı tahmin edicisi ve çarpımsal ayrı tahmin edicisi ile karşılaştırıldığında aşağıdaki koşullar bulunmuştur:

$$(ii)\left|D_h - D_h^{*}\right| < \left|1 + D_h^{*}\right|, \qquad \left(\rho_{hxy}, -D_h^{*} > 0\right)$$

$$(iii)\left|D_h - D_h^{*}\right| < \left|1 - D_h^{*}\right|, \qquad \left(\rho_{hxy}, -D_h^{*} < 0\right)$$

Burada hata kareler ortalamasını minimum yapan D_h değeri D_h^{*}'a eşit olarak bulunduğundan her koşulda Singh ve Vishwakarma tahmin edicisi karşılaştırma yapılan iki tahmin ediciden daha etkin olacaktır. Aynı zamanda bu hata kareler ortalaması ayrı regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır. Uygulamada da $HKO(\bar{y}_{ms}) = 106{,}427 < HKO(\bar{y}_{Rs}) = 128{,}812$ olarak bulunduğundan Singh ve Vishwakarma tahmin edicisi daha etkindir.

Singh ve Vishwakarma tahmin edicisi II tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ise bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olarak bulunmuştur. Dolayısıyla hata kareler ortalaması, bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olan diğer tahmin edicilerle benzer koşullar elde edilecektir.

Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicisi I ile oransal ayrı tahmin edicisi karşılaştırıldığında $HKO\left(\bar{y}_{RS}^{*}\right) < HKO\left(\bar{y}_{Rs}\right)$ eşitsizliğinin sağlanması için $\rho_{hxy} < \frac{(G_h + 1)C_{xh}}{2 * C_{yh}}$ koşulu sağlanmalıdır.

	1.tabaka	2.tabaka	3.tabaka	4.tabaka	5.tabaka	6.tabaka
$\frac{(G_h + 1)C_{xh}}{2 * C_{yh}}$	0,772	0,643	0,743	0,648425	0,565	0,61
ρ_{hxy}	0,937	0,996	0,994	0,9834707	0,989	0,9652

Karşılaştırmada verilen koşul sağlanmadığından ayrı oransal tahmin edicisi, Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicisi I'den daha etkindir.

Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicisi II ile klasik oransal tahmin edici karşılaştırıldığında $HKO\left(\bar{y}_{c}^{*}\right) < HKO(\bar{y}_{RC})$ eşitsizliğinin sağlanması için $\frac{(1 - G_h)}{2} > \frac{\beta_{xyh}}{R}$ koşulunun sağlanması gerekir.

	1.tabaka	2.tabaka	3.tabaka	4.tabaka	5.tabaka	6.tabaka
$(1 - G_h)/2$	0,339	0,391	0,304	0,356	0,4399	0,3796
β_{xyh}/R	0,712	1,109	0,977	1,147	1,2319	0,7797

$HKO\left(\bar{y}_{c}^{*}\right) = 3650,847 > HKO(\bar{y}_{RC}) = 216,418$ olduğu görülmektedir. Koşul sağlanmadığından klasik oransal tahmin edici, Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicisi II'den daha etkindir.

Singh ve Singh tahmin edicisi, oransal ayrı tahmin edici ile karşılaştırıldığında $\frac{1}{(1-\delta_h)G_h} < p_h < \frac{2K_h - 1}{(1-\delta_h)G_h}$ veya $\frac{2K_h - 1}{(1-\delta_h)G_h} < p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)G_h}$ koşulunun sağlanması durumunda;

	1.tabaka	2.tabaka	3.tabaka	4.tabaka	5.tabaka	6.tabaka
$\frac{2K_h - 1}{(1-\delta_h)G_h}$	0,19	0,19	0,33	0,27	0,11	0,23
p_h^*	2,55	4,49	2,44	3,46	8,50	4,16
$\frac{1}{(1-\delta_h)G_h}$	3,17	4,76	2,62	3,55	8,67	4,24

Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicisi I ile karşılaştırıldığında ise $\frac{1}{(1-\delta_h)} < p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)}\left(\frac{2K_h}{G_h} - 1\right)$ veya $\frac{1}{(1-\delta_h)}\left(\frac{2K_h}{G_h} - 1\right) < p_h < \frac{1}{(1-\delta_h)}$ koşulunun sağlanması durumunda karşılaştırma yapılan tahmin edicilerden daha etkindir.

	1.tabaka	2.tabaka	3.tabaka	4.tabaka	5.tabaka	6.tabaka
$\frac{1}{(1-\delta_h)}$	1,03	1,04	1,03	1,02	1,04	1,02
p_h^*	2,55	4,49	2,44	3,46	8,50	4,16
$\frac{1}{(1-\delta_h)}\left(\frac{2K_h}{G_h} - 1\right)$	4,07	7,94	3,85	5,91	15,96	7,31

$p_h^* = \frac{K_h}{(1-\delta_h)G_h}$ değeri için Singh ve Singh tahmin edicisini minimum hata kareler ortalaması regresyon ayrı tahmin edicisinin hata kareler ortalamasına eşit olmaktadır ve yansız bir tahmin edicidir. Uygulamada $HKO(\bar{y}_{RS}) = 106,427$ olarak bulunmuştur.

Diana tahmin edici ailesinden türetilen tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları birinci dereceden yaklaştırma ile bileşik regresyon tahmin edicisi hata kareler ortalaması ile aynıdır ama farklı yana sahiptirler. Bu tahmin edicilerden Diana I tahmin edicisi yansızdır.

Çizelge (3.4) Kitle Varyansı Tahminlerinin Hata Kareler Ortalaması

Tahmin Edici	**HKO**	**HKO Sıralaması**
Klasik Tabakalı Varyans Tahmin Edicisi $s^2_{st,y} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} W_h \left(\bar{y}_h - \bar{y}_{st}\right)^2$	26.657.023.932	6
Bileşik Oransal Tahmin Edici $s^2_{rc} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x}} S^2_x$	7.702.744.351	5
Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisi I $s^2_{repr1} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x} + C_x}\left(S^2_x + C_x\right)$	7.702.744.302	3
Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisi II $s^2_{repr2} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x} + \beta_2(x)}\left(S^2_x + \beta_2(x)\right)$	7.702.743.788	1
Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisi III $s^2_{repr3} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x}\beta_2(x) + C_x}\left(S^2_x\beta_2(x) + C_x\right)$	7.702.744.349	4
Kadılar ve Çıngı Varyans Tahmin Edicisi IV $s^2_{repr4} = \frac{s^2_{st,y}}{s^2_{st,x}C_x + \beta_2(x)}\left(S^2_x C_x + \beta_2(x)\right)$	7.702.744.049	2

Çizelge (3.4)'te tabakalı rasgele örneklemede önerilen varyans tahmin edicilerinin hata kareler ortalaması hesaplanmıştır. Varyans tahminlerinde oransal tahmin edicilerin hata kareler ortalaması klasik varyans tahmin edicisinin yaklaşık 1/3 'ü kadardır. Kadılar ve Çıngı tarafından önerilen varyans tahmin edicilerinde en küçük hata kareler ortalamasına sahip olan tahmin edici Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi II tahmin edicisidir. Dolayısıyla en etkin varyans tahmin edicisinin Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicisi II olduğu söylenebilir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

İstatistikçiler oransal tahmin edicilerle ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken arasındaki korelasyon bilgisini kullanarak tahmin edicilerin duyarlılıklarını artırırlar. Oransal tahmin edicilerin kullanılması için yardımcı değişkene ait kitle ortalamasının bilinmesi gerekmektedir. Birçok istatistikçi yardımcı değişkene ait kitle bilgisini maksimum düzeyde kullanarak bu oransal tahmin edicilerin duyarlılığını artırmak için yeni tahmin ediciler geliştirmişlerdir. Bu tahmin ediler koşullar sağlandığı durumlarda regresyon tahmin edicileri kadar iyi sonuç vermektedir. Bu çalışmada kitleden tabakalı rasgele örnekleme yöntemi ile örneklem seçilmesi durumunda geliştirilen tahmin ediciler ayrıntılı olarak incelenmiş ve bu tahmin edicilere ilişkin yan ve hata kareler ortalamaları hesaplanmıştır.

İlgilenilen değişken ile yardımcı değişken arasındaki ilişki pozitif olduğunda oransal tahmin ediciler, negatif bir ilişki olduğunda ise çarpımsal tahmin ediciler kullanılmaktadır.

Yardımcı değişkene ilişkin sadece kitle ortalamasının bilinmesi durumunda çeşitli tahmin ediciler incelenmiştir. Yardımcı değişkene ilişkin kitle ortalaması ve basıklık katsayısının bilinmesi durumunda Kadılar ve Çıngı II ile Shabbir ve Gupta II tahmin edicileri kullanılabilir. Yardımcı değişkene ilişkin kitle ortalaması ve değişim katsayısının bilinmesi durumunda Kadılar ve Çıngı I ile Shabbir ve Gupta I tahmin edicileri kullanılabilir. Eğer yardımcı değişken için kitle ortalaması, değişim katsayısı ve basıklık katsayısının her üçü de biliniyorsa, Singh ve diğerleri I ve II tahmin edicileri, Shabbir ve Gupta III ve IV tahmin edicileri ile Kadılar ve Çıngı III ve IV tahmin edicileri ortalama tahmini için kullanılabilir.

Kushwaha, Upadhyaya ve Dubey tahmin edicileri ile Singh ve Singh tahmin edicisinde daha önce önerilen oransal tahmin edicilere alternatif olarak örneklem oranının %50 'den az olduğu durumlarda tahminlerde yardımcı değişken için örnekleme alınmayan yardımcı değişken ortalaması kullanılmaktadır. Bu tahmin edicilerde hata kareler ortalaması örneklem oranına da bağlıdır.

Diana tahmin edici ailesine ait olup herhangi bir parametreye bağlı olan tahmin edicilerde yardımcı değişkene ilişkin kitle ortalamasının bilinmesi gerekir. Bu tahmin edilerin etkinliği c_1 katsayısına ve β_c / R bilgisine bağlıdır. Bu tahmin edicilerin minimum hata kareler ortalaması ise bileşik regresyon tahmin edicisinin hata kareler ortalaması ile aynı olmaktadır. $-1 < c_1 < 1 - 2\frac{\beta_c}{R}$ veya $1 - 2\frac{\beta_c}{R} < c_1 < -1$ koşullarının sağlanması durumunda Diana tahmin edici ailesine ait tahmin ediciler klasik oransal tahmin ediciden daha etkin olup $HKO_1(\bar{y}_{CST}) < HKO(\bar{y}_{RC})$ eşitsizliğini sağlarlar. $1 < c_1 < -\left(2\frac{\beta_c}{R} + 1\right)$ veya $-\left(2\frac{\beta_c}{R} + 1\right) < c_1 < 1$ koşullarının sağlanması durumunda bu tahmin ediciler klasik çarpımsal tahmin edicisinden daha etkindir ve $HKO_1(\bar{y}_{CST}) < HKO(\bar{y}_{PC})$. eşitsizliğini sağlar. $0 < c_1 < -2\frac{\beta_c}{R}$ koşulunun sağlanması durumunda ise bu tahmin ediciler klasik tabakalı tahmin edicisinden daha etkindir ve $HKO_1(\bar{y}_{CST}) < HKO(\bar{y}_{st})$ eşitsizliğini sağlamaktadır. Tezde Diana tahmin edici ailesi için sadece birinci dereceden yaklaştırma ele alınmıştır. Dolayısıyla bunların HKO'ları eşit olarak bulunmuştur. İkinci ve üçüncü dereceden yaklaştırma ele alınsaydı bu tahmin edicilerin HKO'ları değişecekti.

Varyans tahminlerinde de yardımcı değişken için sadece kitle varyansı biliniyorsa oransal varyans tahmin edicisi; kitle varyansı ve değişim katsayısı biliniyorsa Kadılar ve Çıngı I varyans tahmin edicisi; kitle varyansı ve basıklık katsayısı biliniyorsa Kadılar ve Çıngı II varyans tahmin edicisi; eğer yardımcı değişken için her üçü de biliniyorsa, Kadılar ve Çıngı III ve IV tahmin edicileri kullanılabilmektedir.

Uygulamada ortalama tahmininde yapılan ayrı tahmin ediciler bileşik tahmin edicilere göre daha etkindir. Ayrı Regresyon Tahmin Edicisi, Singh ve Vishwakarma Tahmin Edicisi I, Singh ve Singh'ın Tahmin Edicisi en etkin tahmin edicilerdir. Ayrı Regresyon Tahmin Edicisi β_h değerlerinin bilinmesi durumunda yansızdır. Singh ve Singh'ın tahmin edicisi ile Singh ve Vishwakarma Tahmin Edicisi I'in etkinliği ise $K_h = \frac{C_{hxy}}{C_{hx}^2} = \rho_{hxy} \frac{C_{hy}}{C_{hx}}$ değerinin bilinmesine bağlıdır. Varyans tahminlerinde oransal tahmin ediciler klasik tahmine göre daha etkindirler. Kadılar ve Çıngı varyans tahmin edicileri için hesaplanan hata kareler ortalamaları birbirine çok yakındır. Bu tahmin edicilerden Kadılar ve Çıngı II varyans tahmin edicisi diğerlerinden etkindir.

Uygulamada elde edilen sonuçlar sadece bu sayısal örnekle sınırlıdır. Diğer uygulamalar için genelleme yapmak doğru değildir. Başka koşulların sağlanması durumunda tahmin edicilerin etkinlik sıralaması değişecektir.

Bu uygulamada ayrı tahmin edicilerin bileşik tahmin edicilerden daha iyi sonuç verdiği görülmektedir. Dolayısıyla Diana tahmin edicisine ait tahmin edicilerin ayrı versiyonları önerilirse bu uygulama için daha etkin tahmin ediciler elde edilmesi beklenir. Benzer şekilde Diana tahmin edici ailesine alternatif bir tahmin edici ailesi örneklem oranı %50 'den küçük varsayımı yapılarak tahmin edicilerde örnekleme alınmayan yardımcı değişken ortalamasının kullanılması önerilebilir. Aynı zamanda bu çalışmada tabakalara sadece basit rasgele örnekleme yöntemi uygulanmıştır. Yapılacak olan başka çalışmalarda önerilen tahmin ediciler farklı örnekleme yöntemlerine uyarlanabilir.

KAYNAKLAR

Adams, R.A., 1999, Calculus: A Complete Course, Addison Wesley Longman Ltd., Canada.

Adhvaryu, D., Gupta, P.C., 1983, On some alternative sampling strategies using auxiliary information, Metrika, 30, 217-226.

Bedi, P.K., 1996, Efficient utilization of auxiliary information at estimation stage, Biometrical Journal, 38, 8, 973-976.

Ceccon, C., Diana, G., Salvan, A., 1991, Approccio classico al campionamento da popolazioni finite: alcuni risultati recenti, CLEUP, Padova.

Chakrabarty, R.P., 1979, Some ratio-type estimators, Journal of Indian Society Agricultural Statistics, 31, 49-62.

Çıngı, H., 1994, Örnekleme Kuramı, H.Ü. Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe.

Çıngı, H., 2005, Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü Lisansüstü Eğitimi Örnekleme Ders Notları.

Diana, G., 1992, A study of k-th order approximation of some ratio type strategies, Metron, 1, 2, 19-32.

Diana, G., 1993, A class of estimators of the population mean in stratified random sampling, Statistica, 1, 59-66.

Gupta, P.C., 1978, On some quadratic and higher degree ratio and product estimator, Journal of Indian Society Agricultural Statistics, 30, 71-80.

Hansen, M.H., Hurwitz, W.N., Gurney M., 1946, Problems and methods of the sample survey of business, Journal of American Statistical Association, 41, 173-189.

Kadılar, C., Çıngı, H., 2003, Ratio estimator in stratified sampling, Biometrical Journal, 45, 2, 218-225.

Kadılar, C., Çıngı, H., 2004, Ratio Estimators in Simple Random Sampling, Applied Mathematics and Computation, 151, 3, 893-902.

Kadılar, C., Çıngı H., 2005, A new estimator in stratified random sampling, Communications in Statistics: Theory and Methods, 34, 597-602.

Kadılar, C., Çıngı, C., 2006, Ratio estimators for the population variance in simple and stratified random sampling, Applied Mathematics and Computation, 173, 2, 1047-1059.

Karakülah, Ü.H., 2006, Basit rasgele örnekleme yönteminde oransal tahmin ediciler, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 152s.

Kaur, P., 1985, On the estimation of population mean in stratified sampling, Biometrical Journal, 27, 1, 101-105.

Kushwaha K.S., Upadhyaya L.N., Dubey, S.P., 1990, A dual to ratio estimator in stratified random sampling, Proceedings of the Mathematical Society, 6, 11-15.

Mohanty, S., Sahoo, L.N., 1987, A class of estimators based on mean per unit ratio estimators, Statistica, 47, 473-477.

Öztoprak, D., 1997, Tabakalı rasgele örneklemede birden çok değişkene göre çeşitli dağıtım yöntemleri, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 132s.

Prasad, B., 1989, Some improved ratio type estimators of population mean and ratio in finite population sample surveys, Communications in Statistics: Theory and Methods, 18, 1, 379-392.

Ray, S.K., Sahai, A., 1979, A note on ratio and product-type estimators, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 31, 141-144.

Ray, S.K., Singh, R.K., 1981, Difference cum product type estimators, Journal of Indian Statistics Association, 19, 147-151.

Reddy, V.N., 1973, On ratio and product method of estimation, Sankhya, B, 35, 307-316.

Reddy, V.N., 1974, On a transformed ratio method of estimation, Sankhya, C, 36, 59-70.

Sahai, A., 1979, An efficient variant of the product and ratio estimators, Statistica Neerlandica, 33, 27-35.

Sahai, A., Ray, S.K., 1980, An efficient estimator using auxiliary information, Metrika, 27, 271-275.

Shabbir, J., Gupta, S., 2005, Improved ratio estimators in stratified sampling, American Journal of Mathematical and Management Sciences, 25, 3-4, 293-311.

Shabbir, J., Gupta, S., 2006, A new estimator of population mean in stratified sampling, Communications in Statistics: Theory and Methods, 35, 1201-1209.

Singh, H.P., Kakran, M.S., 1993, A modified ratio estimator using known coefficient of kurtosis of an auxiliary character, (unpublished).

Singh, H.P., Singh, V.P., 1995, A class of unbiased dual to ratio estimator in stratified sampling, Journal of Indian Society Agricultural Statistics, 47, 2, 168-175.

Singh, H.P., Vishwakarma, G.K., 2006, An efficient variant of the product and ratio estimators in stratified random sampling, Statistics in Transition, 7, 6, 1311-1325.

Singh, H.P., Tailor, R., Singh, S., Kim, J.M., 2007, A modified estimator of population mean using power transformation, Statistical Papers, (accepted).

Singh, R., Mangat, N.S., 1996, Elements of Survey Sampling, Kluwer Academic Publishers.

Singh, S., 2003, Advanced Sampling Theory with Applications, ”How Michael ‘selected’ Amy”, Kluwer Academic Publishers.

Sisodia, B.V.S., Dwivedi, V.K., 1981, A modified ratio estimator using coefficient of variation of auxiliary variable, Journal of Indian Society Agricultural Statistics, 33, 13-18.

Srivastava, S.K., 1967, An estimator using auxiliary information, Calcutta Statistical Association Bulletin, 16,121-132.

Srivenkataramana, T., 1980, A dual to ratio estimator in sample surveys, Biometrika, 67, 199-204.

Sukhatme, P.V., Sukhatme, B.V., 1984, Sampling Theory of Survey with Application, Iowa State University Press.

Tripathi T.P., 1980, A general class of estimators for population ratio, Sankhya, C, 42, 63-75.

Upadhyaya, L.N., Singh, H.P., 1999, Use of transformed auxiliary variable in estimating the finite population mean, Biometrical Journal, 41, 5, 627-636.

Vos, J.W.E., 1980, Mixing of direct, ratio and product method estimators, Statistica Neerlandica, 33, 209-218.

Walsh, J. E., 1970, Generalization of ratio estimate for population total, Sankhya, A, 33, 99-106.

Yan, Z., Ma, J., 2001, Separate product estimator and combined product estimator under stratified sampling, Chinese Journal of Engineering Mathematics, 18, 3,133-135.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Nursel Koyuncu

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1984

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1997-2001 Rauf Denktaş Lisesi

Lisans 2001-2005 Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü

Yabancı Dil: İngilizce

İş Tecrübesi:

2005-2006: TKGM, Programcı.

2006- : Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü.