KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

L–BULANIK ESNEK HALKALAR VE MODÜLLER

DOKTORA TEZİ

Yıldıray ÇELİK

ŞUBAT 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

L–BULANIK ESNEK HALKALAR VE MODÜLLER

Matematikçi Yıldıray ÇELİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21.01.2013
Tezin Savunma Tarihi : 22.02.2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sultan YAMAK

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Yıldıray ÇELİK Tarafından Hazırlanan

L-BULANIK ESNEK HALKALAR VE MODÜLLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 22 / 01 / 2013 gün ve 1490 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. Ali PANCAR**	**…..……………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV**	**…..……………………………**
Üye	**: Prof. Dr. Ekrem YANMAZ**	**……..…………………………**
Üye	**: Doç. Dr. Sultan YAMAK**	**…..……………………………**
Üye	**: Doç. Dr. Osman KAZANCI**	**……..………………………….**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, L-bulanık esnek halka ve L-bulanık esnek modül kavramları verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiştir.

Öncelikle tez konusunun belirlenmesinden çalışmanın bu hale getirilmesine kadar yardımlarını esirgemeyen, öğrenim hayatımın her aşamasında değerli bilgilerini özveriyle paylaşan sayın hocalarım Doç. Dr. Sultan YAMAK'a ve Doç. Dr. Osman KAZANCI'ya teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Tez önerisi ve raporlar aşamasında tezin şekillenmesinde emeği geçen sayın hocam Prof. Dr. Ekrem YANMAZ'a şükranlarımı sunarım. Lisansüstü öğrenimim boyunca vermiş oldukları desteklerden ötürü Ordu Üniversitesi Öğretim Üyeleri Sayın Prof. Dr. Cemil YAPAR'a, Doç. Dr. Selahattin MADEN'e ve Yrd. Doç. Dr. Erdal ÜNLÜYOL'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca KTÜ Matematik Bölümü'nün tüm hocalarına, yardımlarından dolayı başta Öğr. Gör. Mehmet KUNT ve Öğr. Gör. Dr. Murat BEŞENK olmak üzere tüm çalışma arkadaşlarıma ve hayatım boyunca desteklerini hiç esirgemeyen sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Yıldıray ÇELİK
Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "L–BULANIK ESNEK HALKALAR VE MODÜLLER" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Sultan YAMAK'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/01/2013

Yıldıray ÇELİK

İÇİNDEKİLER

Doktora Tezi

ÖZET

L–BULANIK ESNEK HALKALAR VE MODÜLLER

Yıldıray ÇELİK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Sultan YAMAK
2013, 78 Sayfa

Bu tezin amacı, L-bulanık esnek halka ve L-bulanık esnek modül yapılarını, temel özelliklerini ve bu yapılardan elde edilen sonuçlar arasındaki ilişkiyi araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda L-bulanık esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler tanımlanmış ve bunlara bağlı özellikler elde edilmiştir. İkinci kısımda, L-bulanık esnek halka kavramı verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiş, L-bulanık alt halkalarla ve esnek halkalarla arasındaki ilişkisi araştırılmıştır. Son kısımda ise L-bulanık esnek modül kavramı verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiş, L-bulanık alt modüllerle ve esnek modüllerle arasındaki ilişkisi araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Esnek küme, Esnek halka, Esnek modül, L-bulanık esnek küme, L-bulanık esnek halka, L-bulanık esnek modül

PhD. Thesis

SUMMARY

L–FUZZY SOFT RINGS AND MODULES

Yıldıray ÇELİK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sultan YAMAK
2013, 78 Pages

The aim of the present thesis is to investigate the structures of L-fuzzy soft ring and L-fuzzy soft module, the basic features of them and the relationship between the results obtained from this structures.

This study consists of two main chapters. In Chapter 1, some definitions and theorems which are crucial for our study are stated. Chapter 2 contains three parts. In the first part, some new binary relations on L-fuzzy soft sets are defined and features associated with them are obtained. In the second part, the notion of L-fuzzy soft ring is given and algebraic properties belonging to these are examined, and its relationship with subrings and L-fuzzy subrings is investigated. In the last part, the notion of L-fuzzy soft module is given and algebraic properties belonging to these are examined. Also, its relationship with submodules and L-fuzzy submodules is investigated.

Key Words: Soft set, Soft ring, Soft module, L-fuzzy soft set, L-fuzzy soft ring, L-fuzzy soft module

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\varnothing$	: Boş küme
L	: L kafesi
(L, $\leq$)	: L sıralı kümesi
$\vee$	: Supremum
$\wedge$	: İnfimum
$\prod$	: Kartezyen çarpım
$\sum$	: Toplam
A(R)	: R halkasının bütün alt halkalarının kümesi
I(R)	: R halkasının bütün ideallerinin kümesi
S(M)	: M modülünün bütün alt modüllerinin kümesi
$\cong$	: İzomorfi
$\oplus$	: Güçlü toplam
L^X	: X'in bütün L-bulanık alt kümeleri
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
μ_α	: μ ‘nün α -seviye alt kümesi
L(R)	: R halkasının bütün L-bulanık alt halkalarının kümesi
LI(R)	: R halkasının bütün L-bulanık ideallerinin kümesi
L[M]	: M modülünün bütün L-bulanık alt modüllerinin kümesi
$\odot$	: İdeal çarpımı
P(U)	: U kümesinin güç kümesi
Des(F,A)	: (F,A) esnek kümesinin desteği
Es(U)	: U kümesi üzerindeki bütün esnek kümeler
Es($\underline{U}$)	: U kümesi üzerindeki bütün güçlü esnek kümeler
$\subseteq$	: Alt küme
$\sqsubseteq$	: Daraltılmış esnek alt küme

$\bigcup$	: Esnek kümelerin birleşimi
$\bigcap$	: Esnek kümelerin arakesiti
$\sqcup$	: Esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\sqcap$	: Esnek kümelerin genişletilmiş arakesit
$\vee$	: Esnek kümelerin $\vee$-birleşimi
$\wedge$	: Esnek kümelerin $\wedge$-arakesiti
$\times$	: Esnek kümelerin kartezyen çarpımı
$+_{\cup}$	: İki esnek kümenin toplamı
$+_{\cap}$	: İki esnek kümenin daraltılmış toplamı
$+_{\times}$	: İki esnek kümenin kartezyen toplamı
(ϕ,ψ)	: Esnek fonksiyon
$\backsimeq$	: Esnek tam eşleme
Esa(R)	: R halkası üzerindeki bütün esnek halkalar
Esa($\underline{R}$)	: R halkası üzerindeki bütün güçlü esnek halkalar
Esi(R)	: R halkası üzerindeki bütün esnek idealler
Esi($\underline{R}$)	: R halkası üzerindeki bütün güçlü esnek idealler
$\cong_R$	: Esnek halka izomorfisi
Esm[M]	: M modülü üzerindeki bütün esnek modüller
Esm[$\underline{M}$]	: M modülü üzerindeki bütün güçlü esnek modüller
$\cong_M$	: Esnek modül izomorfisi
Es (U)	: U kümesi üzerindeki bütün L-bulanık esnek kümeler
Es_A (U)	: U kümesi üzerindeki A parametreli L-bulanık esnek kümeler
$\subseteq$	: L-bulanık esnek alt küme
$\sqsubseteq$	: Daraltılmış L-bulanık esnek alt küme
$\bigcup$	: L-bulanık esnek kümelerin birleşimi
$\bigcap$	: L-bulanık esnek kümelerin arakesiti
$\sqcup$	: L-bulanık esnek kümelerin daraltılmış birleşimi
$\sqcap$	: L-bulanık esnek kümelerin genişletilmiş arakesiti
$\vee$	: L-bulanık esnek kümelerin $\vee$-birleşimi
$\wedge$	: L-bulanık esnek kümelerin $\wedge$-arakesiti

$\tilde{\times}$: L-bulanık esnek kümelerin kartezyen çarpımı

$\overset{\cup}{\oplus}$: L-bulanık esnek kümelerin toplamı

$\overset{\cap}{\oplus}$: L-bulanık esnek kümelerin daraltılmış toplamı

$\overset{\tilde{\times}}{\oplus}$: L-bulanık esnek kümelerin kartezyen toplamı

$\overset{\cup}{*}$: L-bulanık esnek kümelerde “$*$” işlemi

$\overset{\cap}{*}$: L-bulanık esnek kümelerde daraltılmış “$*$” işlemi

$\overset{\tilde{\times}}{*}$: L-bulanık esnek kümelerde kartezyen “$*$” işlemi

$\backsimeq_L$: L-bulanık esnek tam eşleme

Es a(R) : R halkası üzerindeki bütün L-bulanık esnek halkalar

Es i(R) : R halkası üzerindeki bütün L-bulanık esnek idealler

Es a_A(R) : R halkası üzerindeki A parametreli L-bulanık esnek halkalar

Es i_A(R) : R halkası üzerindeki A parametreli L-bulanık esnek idealler

$\prec$: L-bulanık esnek alt halka

$\cong_{L(R)}$: L-bulanık esnek halka izomorfisi

Es m[M] : M modülü üzerindeki bütün L-bulanık esnek modüller

Es m_A[M] : M modülü üzerindeki A parametreli L-bulanık esnek modüller

$\ll$: L-bulanık esnek alt modül

$\cong_{L[M]}$: L-bulanık esnek modül izomorfisi

1. GENEL BİLGİLER

1.1.Giriş

Günlük hayatta karşılaştığımız her olayı açıklamak ve kesin tanımlamalarda bulunmak her zaman mümkün olmayabilir. Bazı olaylar belirsizlikler ve doğrusal olmama özellikleri taşır. Cismin ısısını kaybetmesi, kapasitörün şarj veya deşarj olayı bu doğrusal olmama özelliklerine birer örnek olarak gösterilebilir. Bir miktar uranyumun bozulması sırasında hangi atomun ne zaman bozulacağının bilinmemesi de belirsizlik taşıyan bir olaydır. Çevremizde buna benzer belirsizlik taşıyan birçok olay vardır. Zaman geçtikçe çevremizde bulunan belirsizliğin nesnel olarak incelenmesi için bilinen yöntemlerin dışında bilimsel yöntemlere de ihtiyaç duyulmaktadır. Belirsizliğin birçok çeşidine özellikle biyoloji, ekonomi, mühendislik, çevresel bilimler, sosyal bilimler ve tıp bilimleri gibi alanlarda sık rastlanmaktadır. Bundan dolayı bilim adamları belirsizliği anlamak ve buna uygun çözümler bulmak için birçok teori geliştirmeye başlamışlardır. Olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi [70], yaklaşımlı kümeler teorisi [55], esnek kümeler teorisi [47] en iyi bilinen ve belirsizliği modellemek için sık sık kullanılan faydalı matematiksel yaklaşımlardan bazılarıdır.

Bulanık küme teorisi ilk olarak Zadeh (1965) tarafından ortaya atılmıştır [70]. Bulanık mantığa göre evrendeki bir nesne, o evrendeki bir kümenin mutlaka elemanıdır ama eleman olma derecesi farklıdır. Bulanık mantık, dilsel değişkenler yardımıyla biraz sıcak, ılık, uzun, çok uzun, soğuk gibi günlük hayatımızda kullandığımız kelimeler yardımıyla insan mantığına en yakın doğrulukta denetimi sağlayabilir. Bulanık mantık denetleyici kullanılarak elektrikli ev aletlerinden oto elektroniğine, gündelik kullandığımız iş makinelerinden üretim mühendisliğine, endüstriyel denetim teknolojilerinden otomasyona kadar her alanda uygulama alanı bulabilir.

Bulanık küme kavramı uygulamalı bilimlerde kullanım alanı bulduğu kadar teorik bilimlerde de kullanılmaktadır. Rosenfeld [58]'de bulanık küme kavramını kullanarak bulanık grup teoriyi geliştirmiştir. Bulanık grup teorinin temel özellikleri klasik grup teorideki sonuçlar kullanılarak elde edilmiştir. Çok sayıda araştırmacı cebirsel yapıların bu yeni kavramın özelliklerini çalışmışlardır. Bulanık gruplar kullanılarak daha karmaşık bulanık cebirsel yapılar olan bulanık halkalar ve bulanık idealler Liu tarafından [39]'da çalışılmıştır. Nanda [53]'de bulanık küme kavramını cisim ve lineer uzaylara uyarlayarak yeni bir kavram ortaya atmıştır.

Belirsizliğe farklı bir yaklaşım olan esnek küme teori ise ilk olarak Molodtsov (1999) tarafından [47]'de belirsizliğe farklı bir yaklaşım olarak tanımlandı. Esnek kümeler birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan birkaç tanesi Molodtsov tarafından kendi çalışmasında incelenmiştir. Son yıllarda ise esnek kümeler üzerine yapılan çalışmalar hızlıca artmaktadır.

Molodtsov [49]'da sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teori, yöneylem araştırması, Rienmann integrali, Peron integrali, olasılık teori, ölçüm teori gibi bir çok alana esnek küme teoriyi uyguladı. Daha sonra Maji vd. [43]'de esnek küme işlemlerini tanımladı. Maji vd. [42]'de, Pawlak'ın [55]'deki yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptı ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Xiao vd. [62]'de esnek küme temelli iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine bir çalışma yaptı. Chen vd. [9, 10]'da esnek kümelerin parametre dönüşümlerini tanımladılar ve bir karar verme probleminde esnek kümelerin uygulamasını geliştirdiler. Xiao vd. [63]'de ve Pei ve Miao [56]'da esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sundular. Mushrif vd. [52]'de esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine bir makale yayınladılar. Molodtsov [48]'de esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramları formüle etti. Bu analiz, Kovkov vd. tarafından [37]'de optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uygulandı. Zou ve Xiao [73]'de tam olmayan bilgi altında esnek kümelerin veri analizi yaklaşımlarını sundular. Ali vd. [3]'de esnek kümelerde, iki esnek kümenin daraltılmış arakesiti, daraltılmış birleşimi, daraltılmış farkı ve genişletilmiş birleşimi gibi bazı yeni tanımlar verdiler.

Daha sonra esnek kümeler ve bunlara ait cebirsel özellikler de bazı araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlandı. İlk olarak Aktaş ve Çağman [2]'de esnek küme teorisinin bulanık küme teorisi ve kaba küme teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Ayrıca Molodtsov'un esnek küme tanımından yola çıkarak esnek grupları tanımladılar ve esnek grupların bazı özelliklerini incelediler. Jun [26]'da esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını ortaya atarak, onların bazı temel özeliklerini elde ettiler. Jun ve Park [28]'de esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini tartıştı. Park vd. [54]'de esnek WS-cebirleri üzerine bir çalışma yaptı. Feng vd. [16]'da esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkaları ve bunlarla ilgili bazı özelikleri incelediler. Sun vd. [60]'da esnek modülleri tanımlayarak modüller yardımıyla bazı temel özellikleri elde ettiler. Jun vd. [27]'de değişmeli esnek ideal kavramını vererek değişmeli idealistik esnek BCK cebirlerini incelediler. Jun vd. [30]'da esnek *p*-idealler ve *p*-idealistik esnek BCI-cebirleri kavramlarını ortaya koydular ve BCI-cebirlerinde *p*-ideallerin karakterizasyonunu verdiler. Jun vd. [29]'da esnek *d*-cebirler, esnek d^*-cebirler, esnek *d*-idealler, esnek d^*-idealler ve *d*-idealistik esnek *d*-cebirler kavramlarını vererek onlara ait bazı özellikleri incelediler. Jun ve Park [31]'de esnek küme kavramını hilbert cebirlerine uyguladılar ve bunlara dair bazı özellikleri incelediler. Acar vd. [1]'de esnek halkaları tanımladılar ve esnek halkaların bazı temel özelliklerini incelediler. Babitha ve Sunil [6]'da esnek küme bağıntısı kavramını ele aldılar ve bu kavramla ilgili denk esnek küme bağıntısı, bölüm, birleşim, fonksiyon gibi birçok kavramı tartıştılar. Çağman ve Enginoğlu [11]'de esnek matrisleri ve onlarla ilgili işlemleri tanımladılar. Ayrıca bir esnek maksimum-minimum karar verme metodunu oluşturdular. Feng vd. [18]'de bulanık kümeler, kaba kümeler ve esnek kümelerin hepsini birleştirmek için bir yapı oluşturdular. Gong vd. [20]'de bijektif esnek küme kavramını ortaya koydular ve onlar üzerinde bazı kavramları incelediler. Ayrıca karar verme problemi için bijektif esnek kümelerin bir uygulamasını tartıştılar. Kazancı vd. [35]'de esnek BCH-cebirlerini tanımlayarak esnek kümelerin homomorfik görüntü ve homomorfik ters görüntü teoremlerini verdiler. Majumdar ve Samanta [46]'da esnek dönüşüm kavramını verdiler ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar. Üstelik esnek dönüşüm altında bir esnek kümenin resmi ve ters resmi gibi yeni kavramlar verdiler. Liu vd. [40]'da esnek halkaların bazı sınıflarını tanımlayarak esnek halkalarda birinci, ikinci ve üçüncü izomorfi teoremlerini verdiler. Qin ve Hong [57]'de esnek kümelerin kafes yapısını inşaa ettiler, esnek eşitlik kavramını incelediler ve bunlarla ilgili bazı özellikler elde ettiler. Zhan ve Jun [71]'de bulanık kümeler üzerinde esnek BL-cebirlerini incelediler. Xu vd. [65]'de vague esnek küme kavramını vererek bunlara ait özellikleri incelediler. Atagün ve Sezgin [4]'de Molodtsov'un esnek kümelerle ilgili tanımını kullanarak bir halkanın esnek alt halkaları ve esnek idealleri üzerinde çalıştılar. Ayrıca bir cismin esnek alt cismi ve bir sol R-modülün esnek alt modüllerini ele alarak halkalar, cisimler ve modüllerin esnek alt yapıları arasındaki ilişkiyi ortaya koydular. Yamak vd. [66]'da esnek hypergrupoid kavramını verdiler ve esnek hypergrupoidlerin L-alt hypergrupoidlerle olan ilişkisini incelediler. Ayrıca esnek hypergupoidlerin bazı yeni özelliklerini elde ettiler. Çelik vd. [14]'de esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler. Türkmen ve Pancar [61]'de esnek alt modüllerin bazı özelliklerini ortaya koydular ve esnek alt modüllerin toplamı, direk toplamı gibi bazı yeni kavramları incelediler.

Bazı araştırmacılar bulanık esnek kümeler ve bunlara ait cebirsel özellikler üzerinde çalıştılar. İlk olarak Maji vd. [41]'de bulanık esnek küme kavramını verdiler ve onlar üzerinde bazı sonuçları elde ettiler. Maji vd. [44]'de sezgisel bulanık esnek küme kavramını vererek bununla ilgili özellikleri araştırdılar. Roy ve Maji [59]'da kesin olmayan çoklu gözlem bilgisinden yola çıkarak bir nesneyi tanımlamanın yeni bir metodunu sundular. Jin-liang vd. [25]'de bulanık esnek grup kavramını verdiler ve bunlarla ilgili bazı sonuçlar elde ettiler. Yang ve vd. [68]'de interval değerli bulanık kümeleri ve esnek kümeleri birleştirerek interval değerli bulanık esnek kümeleri tanımladılar. Kong vd. [36]'da bir karar verme problemi için bulanık esnek kümelere teorik bir yaklaşım sundular. Aygünoğlu ve Aygün [5]'de bulanık esnek grup yapısını inceliyerek esnek fonksiyonları ve bulanık esnek homomorfileri tanımladılar. Xiao vd. [64]'de bulanık esnek kümeler üzerinde birleştirilmiş tahmin yaklaşımları ile ilgili çalışma sundular. Çağman vd. [12]'de bulanık esnek kümeler üzerinde daha etkili karar verme metodunu inşaa etmek içim bulanık esnek birleştirme operasyonunu tanımladılar. Feng vd. [17]'de bulanık esnek kümeler üzerinde karar verme problemine uygulanabilir bir yaklaşım sundular. Jiang vd. [24]'de interval değerli sezgisel bulanık esnek kümeleri tanımladılar ve bunların bazı özelliklerini ortaya koydular. Jun vd. [32]'de bulanık esnek BCK/BCI cebirleri kavramını ortaya koyarak onların özelliklerini incelediler. Jun vd. [33]'de $(\overline{\in}, \overline{\in} \vee \overline{q})$-bulanık *p*-idealleri ve bulanık *p*-ideallerin esnek küme teorisi ile ilişkisini incelediler. Majumdar ve Samanta [45]'de genelleştirilmiş bulanık esnek kümeleri tanımladılar ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar. Aynı çalışmada karar verme probleminde ve tıbbi tanı probleminde genelleştirilmiş bulanık esnek kümelerin bir uygulamasını yaptılar. İnan ve Öztürk [22]'de bulanık esnek halka, $(\in, \in \vee q)$-bulanık esnek alt halka kavramlarını vererek onlarla ilgili bazı temel özellikleri incelediler. Yang [67]'de bulanık esnek yarı gurup ve bulanık esnek ideal kavramlarını verdi. Yin vd. [69]'da sezgisel bulanık esnek kümelerin cebirsel yapısını incelediler ve bunlara ait yeni özellikleri ortaya koydular. Çelik vd. [15]'de bulanık esnek kümelerin halka teorisindeki uygulamalarını incelediler ve bunlara ait yeni özellikleri elde ettiler. Son olarak Li vd. [38]'de daha önce Maji vd. tarafından [41]'de ortaya konulan bulanık esnek küme kavramını herhangi bir L tam boole kafesine genişleterek L-bulanık esnek küme kavramını verdiler ve L-bulanık esnek kümelerin kafes yapısını ortaya koydular.

Bu tezin amacı, L-bulanık esnek halka ve L-bulanık esnek modül yapılarını, temel özelliklerini ve bu yapılardan elde edilen sonuçlar arasındaki ilişkiyi araştırmaktır.

Bu çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Bölüm 1'de çalışmamızda temel olan bazı tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Bölüm 2 ise üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda L-bulanık esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler tanımlanmış ve bunlara bağlı özellikler elde edilmiştir. İkinci kısımda, L-bulanık esnek halka kavramı verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiş, L-bulanık alt halkalarla ve esnek halkalarla arasındaki ilişkisi araştırılmıştır. Son kısımda ise L-bulanık esnek modül kavramı verilerek bunlara ait cebirsel özellikler incelenmiş, L-bulanık alt modüllerle ve esnek modüllerle arasındaki ilişkisi araştırılmıştır.

1.2. Kafesler

Bu bölümdeki kafeslerle ilgili Tanım ve Teoremler [8]'den derlenmiştir.

Tanım 1.1. L boştan farklı bir küme ve " $\leq$ " L üzerinde bir bağıntı olsun. L'ye sıralı küme denir. $\Leftrightarrow$

i) $\forall\ a \in \mathrm{L}$ için $a \leq a$

ii) $\forall a, b \in \mathrm{L}$ için $a \leq b$ ve $b \leq a$ ise $a = b$

iii) $\forall a, b, c \in \mathrm{L}$ için $a \leq b$ ve $b \leq c$ ise $a \leq c$

L sıralı kümesi (L, $\leq$) notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.2. (L, $\leq$) bir sıralı küme olsun.

i) L'ye kafes denir $\Leftrightarrow$ $\forall\ a,b \in \mathrm{L}$ için $\mathrm{Sup}\{a,b\} = a \vee b$ ve $\mathrm{Inf}\{a,b\} = a \wedge b$ mevcuttur.

ii) L'ye zincir denir $\Leftrightarrow$ $\forall\ a,b \in \mathrm{L}$ için $a \leq b$ veya $b \leq a$.

iii) L'ye tam kafes denir $\Leftrightarrow$ $\forall \mathrm{T} \subseteq \mathrm{L}$ için SupT ve İnfT mevcuttur.

iv) L'ye modüler kafes denir $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a,b,c \in \mathrm{L}$, $a \leq b$ için

$a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$.

v) L'ye dağılımlı kafes denir $\Leftrightarrow$ L kafes ve $\forall a,b,c \in \mathrm{L}$ için

$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ ve $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Tanım 1.3. $(\mathrm{L},\leq)$ bir kafes ve $\varnothing \neq \mathrm{T} \subseteq \mathrm{L}$ olsun. T'ye alt kafes denir. $\Leftrightarrow$ $\forall a,b \in \mathrm{T}$ için $a \vee b, a \wedge b \in \mathrm{T}$ dir.

Tanım 1.4. L bir kafes, $0 \in \mathrm{L}$ ve $\forall x \in \mathrm{L}$ için $0 \leq x$ ise L'ye alttan sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L},\leq,0)$ ile gösterilir. $1 \in \mathrm{L}$ ve $\forall x \in \mathrm{L}$ için $x \leq 1$ ise L'ye üstten sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L},\leq,1)$ ile gösterilir.

L kafesi üstten ve alttan sınırlı ise L'ye sınırlı kafes denir ve $(\mathrm{L},\leq,0,1)$ ile gösterilir.

Aksi söylenmedikçe bütün kafesler sınırlı kafes olarak ele alınacaktır.

Tanım 1.5. $(\mathrm{L}_1,\leq)$, $(\mathrm{L}_2,\leq)$ sıralı kümeler ve $f : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_2$ bir fonksiyon olsun.

f **'**ye sıra korur (artan) denir. $\Leftrightarrow \forall a,\ b \in \mathrm{L}_1$ için $a \leq b$ ise $f(a) \leq f(b)$.

Tanım 1.6. $(\mathrm{L}_1,\leq)$, $(\mathrm{L}_2,\leq)$ kafesler ve $f : \mathrm{L}_1 \to \mathrm{L}_2$ bir fonksiyon olsun. f 'ye kafes homomorfisi denir. $\Leftrightarrow \forall a,\ b \in \mathrm{L}_1$ için $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ ve $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

Tanım 1.7. $(\mathrm{L},\vee,\wedge)$ bir tam kafes olsun. L'ye sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes denir. $\Leftrightarrow$

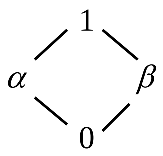
$\forall a, b_i \in L,\ i \in \Lambda$ için $a \wedge (\bigvee_{i\in\Lambda} b_i) = \bigvee_{i\in\Lambda} (a \wedge b_i)$.

Sonsuz $\vee$-dağılımlı kafeslere aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 1.1.

1) L=$\wp$(A) olsun. T, S$\in$L için T$\leq$S$\Leftrightarrow$T$\subseteq$S ise (L,$\leq$) sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

2) L=$\{0, \alpha, \beta, 1\}$ olmak üzere



Şekil 1.1. (L=$\{0, \alpha, \beta, 1\}, \leq$) kafesi

sıralaması ile (L,$\leq$) sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

3) L sonlu bir küme ve (L,$\leq$) dağılımlı kafes ise (L,$\leq$) sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

4) L=[0,1] ise (L,$\leq$) sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

5) ($L_1,\leq$) ve ($L_2,\leq$) sonsuz $\vee$-dağılımlı kafesler ise ($L_1 \times L_2, \leq$) sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir.

Burada $L_1 \times L_2$ üzerinde "$\leq$" sıralama bağıntısı $(a,b) \leq (c,d) \Leftrightarrow a \leq c$ ve $b \leq d$ olarak alınıyor. Aksi belirtilmedikçe $L_1 \times L_2$ üzerinde sıralama bağıntısı buradaki tanımlama olarak alınacaktır.

1.3. Halkalar, İdealler ve Modüller

Bu kısımda halkalar, idealler ve modüller için bilinen bazı temel tanım ve teoremler verilecektir. Bu bölümdeki tanım ve teoremler [19, 21]'den derlenmiştir.

Tanım 1.8. $\emptyset \neq$ R bir küme ve "+" ve "$\cdot$" R üzerinde tanımlı iki ikili işlem olsun. R'ye bir halka denir. $\Leftrightarrow$

R1) (R,+) değişmeli bir grup

R2) (R, $\cdot$) yarı grup

R3) $\forall\ a,b,c \in$ R için $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$ ve $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$

R bir halka olsun. Eğer $\forall a \in \mathrm{R}$ için $1_{\mathrm{R}} \cdot a = a \cdot 1_{\mathrm{R}} = a$ olacak şekilde $1_{\mathrm{R}} \in \mathrm{R}$ mevcut ise R'ye birim elemanlı halka denir ve 1_{R} elamanına da R halkasının birim elemanı denir. Eğer R halkası, $\forall\ x, y \in \mathrm{R}$ için $x \cdot y = y \cdot x$ koşulunu gerçekliyor ise R'ye değişmeli (komutatif) halka denir.

(R,+) abel grubunun birim elemanına R halkasının sıfır elemanı denir ve $0_{\mathrm{R}} = 0$ ile gösterilir. Bu çalışmada bütün halkalar en az iki elemana sahip birim elemanlı halka olarak ele alınacaktır.

Halkalara aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 1.2.

1) $\mathrm{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $(\mathbb{Z}_{\mathrm{n}}, +, \cdot)$ birim elemanlı bir halkadır.

2) $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ birim elemanlı değişmeli halkalardır.

3) $\mathrm{n} \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ için $(\mathrm{M}_{\mathrm{n \times n}}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ birim elemanlı bir halkadır.

4) $\forall\ \mathrm{n}, \mathrm{m} \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ için $(\mathbb{Z}_{\mathrm{n}} \times \mathbb{Z}_{\mathrm{m}}, +, \cdot)$ birim elemanlı değişmeli bir halkadır.

Tanım 1.9. $\{\mathrm{X}_i \mid i \in \Lambda\}$ boştan farklı kümelerin bir ailesi olsun.

$$\prod_{i \in \Lambda} \mathrm{X}_i = \{(x_i) \mid i \in \Lambda, x_i \in \mathrm{X}_i\}$$

kümesine $\{\mathrm{X}_i \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin kartezyen çarpımı denir.

Teorem 1.1. $\{\mathrm{R}_i \mid i \in \Lambda\}$ halkaların bir ailesi ise

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \text{ ve } (a_i) \cdot (b_i) = (a_i \cdot b_i)$$

ikili işlemleri ile $\prod_{i \in \Lambda} \mathrm{R}_i$ bir halkadır.

Teoremde ifade edilen $\prod_{i \in \Lambda} \mathrm{R}_i$ halkasına $\{\mathrm{R}_i \mid i \in \Lambda\}$ halkalar ailesinin kartezyen çarpımı denir.

(R,+) değişmeli bir grup ve $\{\mathrm{S}_i \mid i \in \Lambda\}$ R'nin boştan farklı alt kümelerinin bir ailesi olmak üzere $\{a_{i_1} + a_{i_2} + \ldots\ldots + a_{i_n} \mid \forall a_{i_j} \in \mathrm{S}_{i_j}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ kümesine $\{\mathrm{S}_i \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i \in \Lambda} \mathrm{S}_i$ ile gösterilir.

Tanım 1.10. (R, +, $\cdot$) bir halka ve $\varnothing \neq \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$ olsun. I'ya R'nin bir alt halkası denir $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{I}$ için $a - b \in \mathrm{I}$ ve $a \cdot b \in \mathrm{I}$.

Tanım 1.11. (R, +, $\cdot$) bir halka ve $\varnothing \neq \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$ olsun. I'ya R'nin bir sol (sağ) ideali denir $\Leftrightarrow \forall a, b \in \mathrm{I}$ için $a - b \in \mathrm{I}$ ve $r \cdot a \in \mathrm{I}$ $(a \cdot r \in \mathrm{I})$. Eğer I, R'nin sol ve sağ ideali ise

I'ya R'nin ideali denir. Açık olarak I, R'nin bir ideali ise I, R'nin bir alt halkasıdır.

{0} ve R, R'nin idealleridir ve bu ideallere R halkasının trivial idealleri denir.

I,J R nin alt kümeleri olmak üzere, $\mathrm{I}\odot\mathrm{J}=\{\sum_{i\in\Lambda}^{n} y_i z_i = x \mid y_i\in \mathrm{I},\ z_i\in \mathrm{J},\ \mathrm{n}\in \mathbb{N}\backslash\{0\}\}$ kümesine I ile J kümelerinin ideal çarpımı denir. Eğer I ve J R halkasının idealleri ise $\mathrm{I}\odot\mathrm{J}$ kümesi de R halkasının idealidir.

Açık olarak R halkasının bütün alt halkalarının ve ideallerinin kümesi "$\subseteq$" bağıntısı ile sıralı kümedir ve bu kümeler sırasıyla A(R) ve I(R) notasyonları ile gösterilecektir.

Teorem 1.2. R bir halka $\{\mathrm{S}_i \mid i\in\Lambda\}$ R'nin ideallerinin boştan farklı bir ailesi ise $\sum_{i\in\Lambda}\mathrm{S}_i$ kümesi $\{\mathrm{S}_i \mid i\in\Lambda\}$ ideallerini kapsayan en küçük idealdir.

Teorem 1.3. $\{\mathrm{S}_i \mid i\in\Lambda\}$ R'nin alt halkalarının (ideallerinin) bir ailesi olsun. Bu taktirde $\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{S}_i$, R'nin bir alt halkası (ideali) dır.

Sonuç 1.1. $\{\mathrm{S}_i \mid i\in\Lambda\}$ R'nin ideallerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\mathrm{Sup}\{\mathrm{S}_i \mid i\in\Lambda\} = \sum_{i\in\Lambda}\mathrm{S}_i$ ve $\mathrm{Inf}\{\mathrm{S}_i \mid i\in\Lambda\} = \bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{S}_i$,

ii) (I(R), $\subseteq$) tam kefestir.

Teorem 1.4. $\{\mathrm{R}_i \mid i\in\Lambda\}$ halkaların bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\forall i\in\Lambda$ için $\mathrm{S}_i\in\mathrm{A}(\mathrm{R}_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{S}_i \in\mathrm{A}(\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{R}_i)$,

ii) $\forall i\in\Lambda$ için $\mathrm{S}_i\in\mathrm{I}(\mathrm{R}_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{S}_i \in\mathrm{I}(\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{R}_i)$.

Tanım 1.12. R ve S iki halka olsun. $\phi:\mathrm{R}\to\mathrm{S}$ fonksiyonuna R'den S'ye bir halka homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ x,y\in\mathrm{R}$ için $\phi(x+y)=\phi(x)+\phi(y)$ ve $\phi(x\cdot y)=\phi(x)\cdot\phi(y)$.

Tanım 1.13. ϕ:R $\to$ S halka homomorfisi olsun.

i) Eğer ϕ birebir ise ϕ'ye bir monomorfi,

ii) Eğer ϕ örten ise ϕ'ye bir epimorfi,

iii) Eğer ϕ birebir ve örten ise ϕ'ye bir izomorfi

denir.

Eğer ϕ:R $\to$ S bir halka izomorfisi mevcut ise R ile S halkalarına izomorftur denir ve R $\cong$ S ile gösterilir.

Önerme 1.1. ϕ:R $\to$S bir halka izomorfisi ise $\phi^{-1}:\mathrm{S}\to\mathrm{R}$ bir halka izomorfisidir.

Tanım 1.14. ϕ:R $\to$ S bir halka homomorfisi olmak üzere;

Resϕ ={ $\phi(r) \mid r \in$ R } ve Çekϕ={$r \in$ R | $\phi(r) = 0_S$ } kümelerine sırasıyla ϕ 'nin görüntüsü ve çekirdeği denir.

Teorem 1.5. ϕ:R$\to$S ve θ:S$\to$T halka homomorfileri olsun. Bu takdirde;

i) Çekϕ $\in$I(R) ve Resϕ $\in$A(S),

ii) $\theta \circ \phi$:R$\to$T halka homomorfisidir.

Tanım 1.15. R bir halka ve (M,+) değişmeli grup olsun.

$$\begin{aligned} &\cdot : \mathrm{R} \times \mathrm{M} \to \mathrm{M} \\ &(r, p) \to r \cdot p \end{aligned}$$

dönüşümü $\forall r, s \in$ R ve $\forall p, q \in$ M için

$$\begin{aligned} &r \cdot (p+q) = r \cdot p + r \cdot q \\ &(r+s) \cdot p = r \cdot p + s \cdot p \\ &(r \cdot s) \cdot p = r \cdot (s \cdot p) \end{aligned}$$

koşullarını sağlıyorsa M'ye (sol) R-modül denir. Eğer R birim elemanlı bir halka ve $\forall p \in$ M için $1 \cdot p = p$ ise M'ye üniter R-modül denir.

Bu çalışmada bütün R-modüller üniter R-modül olarak alınacaktır. Ayrıca r ∈R ve m∈M olmak üzere "r .m" yerine "r m" kullanılacaktır.

Modüllere aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 1.3.

1) (G,+) değişmeli bir grup ise G bir $\mathbb{Z}$ -modüldür.

2) (R,+,$\cdot$) bir halka ise R bir R-modüldür.

3) (R,+,$\cdot$) bir halka ve I R'nin bir ideali ise I bir R-modüldür.

4) R bir halka ise $\mathrm{M}_{n \times n}(\mathrm{R})$ bir R-modüldür.

Teorem 1.6. $\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\}$ R-modüllerin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde;

$(x_i)+(y_i)=(x_i+y_i)$, $r(x_i)=(rx_i)$

işlemleri ile $\prod_{i \in \Lambda} \mathrm{M}_i$ bir R-modüldür. Bu modüle $\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\}$ R-modüller ailesinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 1.16. M bir R modül ve $\varnothing \neq$ N$\subseteq$M olsun. N'ye M'nin bir alt modülü denir $\Leftrightarrow$ $\forall a, b \in$ N ve $\forall r \in$ R için $a+b \in$ N ve $r \cdot a \in$ N dir. Açık olarak M modülünün bütün alt modüllerinin kümesi "$\subseteq$" bağıntısı ile sıralı kümedir ve bu küme S(M) ile gösterilecektir.

Örnek 1.4.

1) R bir halka ise R'nin R-modül olarak düşünüldüğünde R-alt modülleri R halkasının sol idealleridir.

2) M bir R-modül ve $x \in \mathrm{M}$ olsun. Bu takdirde $\mathrm{R}x = \{ rx \mid r \in \mathrm{R}\}$ kümesi M'nin bir R-alt modülüdür.

Teorem 1.7. M R-modül, $\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{S(M)}$ ise $\bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{M}_i \in \mathrm{S(M)}$ dir.

Teorem 1.8. M R-modül, $\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\}$ M'nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi ise $\sum_{i\in\Lambda} \mathrm{M}_i$ kümesi $\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\}$ alt modüller ailesini kapsayan en küçük alt modüldür.

Sonuç 1.2. $\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\}$ M'nin alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\mathrm{Sup}\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\} = \sum_{i\in\Lambda} \mathrm{M}_i$ ve $\mathrm{Inf}\{\mathrm{M}_i \mid i \in \Lambda\} = \bigcap_{i\in\Lambda} \mathrm{M}_i$,

ii) (S(M), $\subseteq$) tam kafestir.

Tanım 1.17. M ve N R-modüller olsun. $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ fonksiyonuna M'den N'ye bir modül homomorfisi denir. $\Leftrightarrow$ $\forall p_1, p_2 \in \mathrm{M}$ ve $r \in \mathrm{R}$ için $\phi(p_1 + p_2) = \phi(p_1) + \phi(p_2)$ ve $\phi(r \cdot p_1) = r \cdot \phi(p_1)$.

Teorem 1.9. M ve N R-modüller, ϕ :M $\to$ N bir modül homomorfisi ise Çek$\phi \in$ S(M) ve Res$\phi \in$ S(N) dir.

Teorem 1.10. ϕ :M $\to$ N bir modül homomorfisi olsun. Bu takdirde;

i) $\mathrm{A} \in \mathrm{S(M)}$ ise $\phi(\mathrm{A}) \in \mathrm{S(N)}$,

ii) $\mathrm{B} \in \mathrm{S(N)}$ ise $\phi^{-1}(\mathrm{B}) \in \mathrm{S(M)}$.

Teorem 1.11. M, N ve K R-modüller olsun. $\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $\varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $\theta : \mathrm{N} \to \mathrm{K}$ R-modül homomorfileri ise $\phi + \varphi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, $\theta \circ \phi : \mathrm{M} \to \mathrm{K}$ R-modül homomorfileridir. Eğer R değişmeli halka ve $r \in \mathrm{R}$ ise $r\phi : \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ modül homomorfisidir.

1.4. L-Bulanık Alt Kümeler

Bu bölümde aksi söylenmedikçe L sonsuz $\vee$-dağılımlı tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 1.18. [34] X bir küme olmak üzere μ:X$\rightarrow$L fonksiyonuna X'in L-bulanık alt kümesi denir. X'in bütün L-bulanık alt kümeleri L^X ile gösterilir. L=[0,1] ise L-bulanık alt küme yerine bulanık alt küme denir. Resμ={$\mu(x)$: $x \in$ X} ve μ^*={ $x \in$X: 0<μ(x)} kümelerine sırasıyla μ'nun görüntüsü ve desteği denir. Eğer 1 $\in$ Resμ ise μ'ye X'in normal veya üniter L-bulanık alt kümesi denir. μ^* sonlu küme ise μ'ye sonlu L-bulanık alt küme denir. Y$\subseteq$X ve $a \in L\setminus\{0\}$ için $a_Y \in L^X$ aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$a_Y(x)=\begin{cases} a, & x\in Y \\ 0, & x\notin Y \end{cases}$$

Özel olarak a=1 alınırsa 1_Y L-bulanık alt kümesine Y'nin karakteristik fonksiyonu denir. Bu durum χ_Y notasyonu ile gösterilir. $\alpha \in$L için $\{x\in X:\ \alpha \leq \mu(x)\}$ kümesine μ'nün α-seviye alt kümesi denir ve μ_α ile gösterilir.

Tanım 1.19. [34] $\mu,\nu \in L^X$, $\sigma \in L^Y$, $\{\mu_i : i\in\Lambda\}\subseteq L^X$ için aşağıdaki tanımları verebiliriz.

i) $\forall\ x \in$X için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν'ye μ'yü kapsar denir ve $\mu \leq \nu$ ile gösterilir.

ii) $\forall\ x \in$X için $(\mu \vee \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x)$, $(\mu \wedge \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x)$ ile tanımlanan L-bulanık alt kümelerine sırasıyla μ ile ν'nün birleşimi ve kesişimi (arakesiti) denir.

iii) $\forall\ x \in$X ve $\forall y\in$Y için $(\mu\times\sigma)(x,y)=\mu(x)\wedge\sigma(y)$ ile tanımlanan L-bulanık alt kümesine μ ve σ L-bulanık alt kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

iv) $(\bigvee_{i\in\Lambda}\mu_i)(x)=\bigvee_{i\in\Lambda}\mu_i(x)$, $(\bigwedge_{i\in\Lambda}\mu_i)(x)=\bigwedge_{i\in\Lambda}\mu_i(x)$ ile tanımlanan L-bulanık alt kümelerine sırasıyla $\{\mu_i : i\in\Lambda\}$ L-bulanık alt kümeler ailesinin birleşimi ve kesişimi denir. Λ={1,2,….,n} ise $\bigvee_{i\in\Lambda}\mu_i$, $\bigwedge_{i\in\Lambda}\mu_i$ L-bulanık alt kümeleri sırasıyla

$\bigvee_{i=1}^{n}\mu_i = \mu_1 \vee \mu_2 \vee \mu_3 \ldots \vee \mu_n$ ve $\bigwedge_{i=1}^{n}\mu_i = \mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \mu_3 \ldots \wedge \mu_n$ notasyonları ile gösterilir.

Tanım 1.20. [50] $\{X_i \mid i\in\Lambda\}$ boştan farklı kümelerin bir ailesi ve $\{\mu_i \in L^{X_i} \mid i\in\Lambda\}$ L-bulanık alt kümelerin ailesi olsun. $\mu : \prod_{i\in\Lambda} X_i \rightarrow L$, $\mu((x_i)) = \bigwedge_{i\in\Lambda}\mu_i(x_i)$ ile tanımlanan L-bulanık alt kümesine $\{ \mu_i \in \mathrm{L}^{\mathrm{X}_i} \mid i \in \Lambda \}$ L-bulanık alt kümeler ailesinin direkt çarpımı denir ve bu durum $\prod_{i\in\Lambda} \mu_i$ notasyonu ile gösterilir.

Eğer $\Lambda=\{1,2,\ldots, n\}$ ise $\prod_{i\in\Lambda}\mu_i = \underset{i\in\Lambda}{\times}\mu_i = \mu_1\times\mu_2\times.....\times\mu_n$ şeklinde gösterilir.

Teorem 1.12. [50] μ, $\nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{X}}$ için aşağıdaki özellikler gerçeklenir.

i) $\mu\leq\nu$ ve $\alpha\in\mathrm{L}$ ise $\mu_\alpha\subseteq\nu_\alpha$

ii) α, $\beta\in\mathrm{L}$ ve $\alpha\leq\beta$ ise $\mu_\beta\subseteq\mu_\alpha$

iii) $\mu=\nu \Leftrightarrow \forall\, \alpha\in\mathrm{L}$ için $\mu_\alpha=\nu_\alpha$

iv) $\mu_\alpha\cup\nu_\alpha\subseteq(\mu\vee\nu)_\alpha$

v) L bir zincir ise $\mu_\alpha\cup\nu_\alpha=(\mu\vee\nu)_\alpha$

vi) $\mu_\alpha\cap\nu_\alpha=(\mu\wedge\nu)_\alpha$

Tanım 1.21. [50] $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$ bir dönüşüm ve $\mu\in\mathrm{L}^{\mathrm{X}},\nu\in\mathrm{L}^{\mathrm{Y}}$ olsun.

$\forall y\in\mathrm{Y}$ ve $\forall x\in\mathrm{X}$ için,

$$f(\mu)(y)=\begin{cases}\bigvee\{\mu(x)\mid x\in\mathrm{X}, f(x)=y\}, & f^{-1}(y)\neq\varnothing\\ 0 & , \quad f^{-1}(y)=\varnothing\end{cases}$$

$$f^{-1}(\nu)(x)=\nu(f(x))$$

şeklinde tanımlanan $f(\mu)$ ve $f^{-1}(\nu)$ L-bulanık alt kümelerine sırasıyla μ 'nün f altındaki görüntüsü ve ν 'nün f altındaki ters-görüntüsü denir.

Önerme 1.2. [50] $f:\mathrm{X}\to\mathrm{Y}$, $\mu_1,\mu_2\in\mathrm{L}^{\mathrm{X}}$, $\nu_1,\nu_2\in\mathrm{L}^{\mathrm{Y}}$, $\{\mu_i : \mathrm{i}\in\Lambda\}\subseteq\mathrm{L}^{\mathrm{X}}$, $\{\nu_j : j\in\Lambda\}\subseteq\mathrm{L}^{Y}$ için aşağıdakiler gerçeklenir.

i) $f(\bigvee_{i\in\Lambda}\mu_i)=\bigvee_{i\in\Lambda} f(\mu_i)$,

ii) $\mu_1\leq\mu_2$ ise $f(\mu_1)\leq f(\mu_2)$,

iii) $f^{-1}(\bigvee_{j\in\Lambda}\nu_j)=\bigvee_{j\in\Lambda} f^{-1}(\nu_j)$,

iv) $f^{-1}(\bigwedge_{j\in\Lambda}\nu_j)=\bigwedge_{j\in\Lambda} f^{-1}(\nu_j)$,

v) $\nu_1\leq\nu_2$ ise $f^{-1}(\nu_1)\leq f^{-1}(\nu_2)$.

Teorem 1.13. [8] (L, $\leq$) bir sıralı küme (kafes, tam kafes, dağılımlı kafes, sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes) ise ($L^X, \leq$) de bir sıralı küme (kafes, tam kafes, dağılımlı kafes, sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes) dir.

Tanım 1.22. [7, 50] (G,+) bir grup, $\mu, \nu \in L^G$ ve $x \in G$ için

$$(\mu + \nu)(x) = \bigvee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid x = y + z\}$$

$$(\mu \oplus \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) \vee \bigvee\{\mu(y) \wedge \nu(z) \mid x = y + z\}$$

$$-\mu(x) = \mu(-x)$$

ile tanımlanan L-bulanık alt kümelerine sırasıyla μ ile ν'nün "+" toplamı, μ ile ν'nün güçlü toplamı ve μ'nün tersi denir.

Tanım 1.23. [50] (G,+) bir grup ve $\{\mu_i : i \in \Lambda\}$ L-bulanık alt kümelerin bir ailesi olsun. Her $x \in G$ için $\mu(x) = \bigvee\{\bigwedge_{k=1}^{n} \mu_{i_k}(x_{i_k}) \mid \sum_{k=1}^{n} x_{i_k} = x,\ i_k \in \Lambda,\ n \in \mathbb{N}^*\}$ ile tanımlanan L-bulanık alt kümesine $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin toplamı denir ve $\bigoplus_{i \in \Lambda} \mu_i$ notasyonu ile gösterilir.

1.5. L-Bulanık Alt Halkalar, İdealler ve Modüller

Bu bölümde R değişmeli bir halka olarak alınacaktır.

Tanım 1.24. [50] $\mu \in L^R$ olsun. μ'ye R'nin L-bulanık alt halkası denir. $\Leftrightarrow$

R1) $\forall x, y \in R$ için $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

R2) $\forall x, y \in R$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

Tanım 1.25. [50] $\mu \in L^R$ olsun. μ'ye R'nin L-bulanık ideali denir. $\Leftrightarrow$

I1) $\forall x, y \in R$ için $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

I2) $\forall x, y \in R$ için $\mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y)$

Özel olarak L=[0,1] ise μ'ye R'nin bulanık alt halkası (ideali) denir.

Bir R halkasının bütün L-bulanık alt halkalarının ve ideallerinin kümesi sırasıyla L(R) ve LI(R) notasyonları ile gösterilecektir.

Tanım 1.26. [50] $\mu, \nu \in L^R$ olmak üzere;

$$(\mu \odot \nu)(x) = \bigvee\{\bigwedge_{i=1}^{n}(\mu(y_i) \wedge \nu(z_i)) \mid 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=1}^{n} y_i z_i = x\}$$

şeklinde tanımlanan L-bulanık alt kümesine μ ile ν 'nün ideal çarpımı denir.

Teorem 1.14. [50] $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq$ L(R) (LI(R)) olsun. Bu takdirde;

i) $\bigwedge_{i\in\Lambda} \mu_i \in$ L(R) (LI(R)),

ii) $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\}$ bir zincir ise $\bigvee_{i\in\Lambda} \mu_i \in$ L(R) (LI(R)),

iii) (L(R), $\leq$) ve (LI(R), $\leq$) tam kafeslerdir.

Teorem 1.15. [50]

i) $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{L}(\mathrm{R}_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda} \mu_i \in \mathrm{L}(\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i)$.

ii) $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq \mathrm{LI}(\mathrm{R}_i)$ ise $\prod_{i\in\Lambda} \mu_i \in \mathrm{LI}(\prod_{i\in\Lambda} \mathrm{R}_i)$.

Teorem 1.16. [51] $\mu \in$ L(R) (LI(R)) $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in$ L için $\mu_\alpha (\neq \emptyset) \in$ A(R) (I(R)) dir.

Teorem 1.17. [51] $\emptyset \neq \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$ olsun. I $\in$ A(R) (I(R)) $\Leftrightarrow$ $\chi_{\mathrm{I}} \in$ L(R) (LI(R)) dir.

Teorem 1.18. [23, 50] μ, $\nu \in$ LI(R) olsun. Bu takdirde;

i) $\mu + \nu \in$ LI(R),

ii) $\mu \oplus \nu \in$ LI(R),

iii) $\mu \odot \nu \in$ LI(R).

Teorem 1.19. [23] μ, ν, $\gamma \in$ LI(R) ve $\mu \leq \nu$ ise $\mu \oplus (\nu \wedge \gamma) = \nu \wedge (\mu \oplus \gamma)$ dır.

Teorem 1.20. [50] $\mu \in$ LI(R) ve $\nu \in$ L(R) ise $\mu \odot \nu \in$ L(R) dir.

Teorem 1.21. [50] μ, ν, $\eta \in$ LI(R) ise $\mu \odot (\nu + \eta) = \mu \odot \nu + \mu \odot \eta$ dir.

Teorem 1.22. [50] $\mu, \nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{R}}$ ve $\phi : \mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_2$ bir halka homomorfisi olsun.

i) $\mu \in \mathrm{L}(\mathrm{R}_1)$, $\nu \in \mathrm{L}(\mathrm{R}_2)$ ise $\phi(\mu) \in \mathrm{L}(\mathrm{R}_2)$, $\phi^{-1}(\nu) \in \mathrm{L}(\mathrm{R}_1)$,

ii) $\mu \in \mathrm{LI}(\mathrm{R}_1)$ ve ϕ örten ise $\phi(\mu) \in \mathrm{LI}(\mathrm{R}_2)$,

iii) $\nu \in \mathrm{LI}(\mathrm{R}_2)$ ise $\phi^{-1}(\nu) \in \mathrm{LI}(\mathrm{R}_1)$.

Tanım 1.27. [50] M R-modül ve $\mu \in \mathrm{L}^{\mathrm{M}}$ olsun. μ 'ye M'nin L-bulanık alt modülü denir. $\Leftrightarrow$ $\forall\ x, y \in \mathrm{M}$ ve $\forall\ r \in \mathrm{R}$ için

M1) $\mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

M2) $\mu(rx) \geq \mu(x)$

Özel olarak L=[0,1] ise μ 'ye M'nin bulanık alt modülü denir.

Bir M R-modülünün bütün L-bulanık alt modüllerinin kümesi L[M] notasyonu ile gösterilecektir.

Tanım 1.28. [50] M bir R-modül, $\mu \in L^M$ ve $r \in R$ olsun. Bu takdirde;

$(r\mu)(x) = \bigvee\{\mu(y) \mid x = ry\}$

ile tanımlanan L-bulanık alt kümesine μ ile r ’nin çarpımı denir.

Teorem 1.23. [50] $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq L[M]$ olsun. Bu takdirde;

i) $\bigwedge_{i\in\Lambda} \mu_i \in L[M]$,

ii) $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\}$ bir zincir ise $\bigvee_{i\in\Lambda} \mu_i \in L[M]$,

iii) $\bigoplus_{i\in\Lambda} \mu_i \in L[M]$.

Teorem 1.24. [50] $\{\mu_i \mid i \in \Lambda\} \subseteq L[M_i]$ ise $\prod_{i\in\Lambda} \mu_i \in L[\prod_{i\in\Lambda} M_i]$ dir.

Teorem 1.25. [50] $\mu \in L^M$ olsun. Bu takdirde $\mu \in L[M] \Leftrightarrow \forall \alpha \in L$ için $\mu_\alpha = \varnothing$ veya $\mu_\alpha \in S(M)$ dir.

Teorem 1.26. [50] $\varnothing \neq N \subseteq M$ olsun. $N \in S(M) \Leftrightarrow \chi_N \in L[M]$ dir.

Teorem 1.27. [50] M, N R-modüller ve $\phi : M \to N$ R-modül homomorfisi olsun. Bu takdirde $\mu, \nu \in L^M$ ve $r \in R$ için aşağıdakiler sağlanır.

i) $\phi(\mu + \nu) = \phi(\mu) + \phi(\nu)$

ii) $\phi(r\mu) = r\phi(\mu)$

Teorem 1.28. [50] $\mu \in L[M_1]$, $\nu \in L[M_2]$ ve $\phi : M_1 \to M_2$ bir R-modül homomorfisi ise $\phi(\mu) \in L[M_2]$ ve $\phi^{-1}(\nu) \in L[M_1]$ dir.

1.6. Esnek Kümeler

Bu bölümde U ve E boştan farklı kümeler, $P(U)$ U ’nun güç kümesi, $A \subseteq E$ ve L bir tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 1.29. [16, 47] F: $A \to P(U)$ bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde bir esnek küme denir. Burada A kümesine esnek kümenin parametre kümesi ve $\forall x \in A$ için $F(x)$ kümesine de x -yaklaşımlı küme denir. Des(F,A) $= \{x \in A: F(x) \neq \varnothing\}$ kümesine (F,A) esnek kümesinin desteği denir. Eğer Des(F,A) $\neq \varnothing$ ise (F,A) kümesine boştan farklı esnek küme denir. $A \neq \varnothing$ ve $\forall x \in A$ için $F(x) \neq \emptyset$ ise (F,A)’ya güçlü esnek küme denir.

U kümesi üzerindek bütün esnek kümeler ailesi için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- $Es(U)=\{ (F,A) \mid A\subseteq E,\ F: A\to P(U) \}$
- $Es_A(U) =\{ (F,A) \mid F: A\to P(U) \}$
- $Es(\underline{U}) =\{ (F,A)\in Es(U) \mid (F,A)$ güçlü esnek küme$\}$
- $Es_A(\underline{U}) =\{ (F,A)\in Es_A(U) \mid (F,A)$ güçlü esnek küme$\}$.

Tanım 1.30. [43] (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki esnek küme olsun.

i) (F,A)'ya (G,B)'nin esnek alt kümesi denir $\Leftrightarrow A\subseteq B$ ve $\forall x\in A$ için $F(x) \subseteq G(x)$. Bu durum $(F,A) \subseteq (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) (F,A)'ya (G,B)'nin daraltılmış esnek alt kümesi denir $\Leftrightarrow A\subseteq B$ ve $\forall x\in A$ için $G(x) \subseteq F(x)$. Bu durum $(F,A)\sqsubseteq(G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Açık olarak "$\subseteq$" ve "$\sqsubseteq$" bağıntıları $Es(U)$, $Es_A(U)$, $Es(\underline{U})$, $Es_A(\underline{U})$ kümeleri üzerinde sıralama bağıntılarıdır.

Esnek küme kavramı ile ilgili aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 1.5.

1) $f: A\to U$ bir fonksiyon ve $F:A\to P(U)$, $F(x)=\{f(x)\}$ şeklinde tanımlanan (F,A) ikilisi U üzerinde güçlü esnek kümedir.

2) μ X'in bir L-bulanık alt kümesi ve $F_\mu : L\to P(X)$, $F_\mu(\alpha)=\mu_\alpha$ şeklinde tanımlanan (F_μ, L) ikilisi X üzerinde bir esnek kümedir. Bu esnek kümeye μ ile üretilen seviye esnek küme denir.

Tersine olarak (F,L) X üzerinde bir esnek küme ise $\mu_F : X\to L$, $\mu_F(x)=\bigvee_{x\in F(\alpha)}\alpha$ ile tanımlı X'nin bir L-bulanık alt kümesi mevcuttur.

3) $A\subseteq E$, $Y\subseteq U$ ve $\Phi_{A,Y}:A\to P(U)$ $\Phi_{A,Y}(a)=Y$ ile tanımlanan $(\Phi_{A,Y},A)$ ikilisi U üzerinde esnek kümedir.

4) $f: X\to Y$ bir fonksiyon ise $F: Y\to P(X)$ $F(y)=f^{-1}(\{y\})$ ile tanımlanan (F,Y) ikilisi X üzerinde esnek kümedir.

5) R, U üzerinde bir denklik bağıntısı ise $F:U\to P(U)$ $F(x)=[x]_R$ ile tanımlanan (F,U) ikilisi U üzerinde esnek kümedir.

6) (G,+) bir grup, $F:G\to P(G)$ $F(g)=\langle g \rangle$ ile tanımlanan (F,G) ikilisi G üzerinde güçlü esnek kümedir.

7) (G,+) bir grup, $H \leq G$ ve $F:G \rightarrow P(G)$ $F(g)=g.H$ ile tanımlanan (F,G) ikilisi G üzerinde güçlü esnek kümedir.

8) R bir halka, $F:R \rightarrow P(R)$ $F(a)=\{a \cdot r \mid r \in R\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi R üzerinde bir esnek kümedir.

9) M R-modül, $F:R \rightarrow P(M)$ $F(r)=\{r \cdot a \mid a \in M\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi M üzerinde güçlü esnek kümedir.

10) M R-modül, $F:M \rightarrow P(M)$ $F(a)=\{a \cdot r \mid a \in M,\ r \in R\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi R üzerinde güçlü esnek kümedir.

11) $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ bir fonksiyon ve (F,A), (G,B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde esnek kümeler olmak üzere;

$\varphi(F) : A \rightarrow P(U_2)$, $\varphi(F)(x) = \varphi(F(x))$

$\varphi^{-1}(G) : B \rightarrow P(U_1)$, $\varphi^{-1}(G)(y) = \varphi^{-1}(G(y))$

ile tanımlanan $(\varphi(F), A)$ ve $(\varphi^{-1}(G), B)$ ikilileri sırasıyla U_2 ve U_1 üzerinde esnek kümelerdir.

Önerme 1.3. $\varphi : U_1 \rightarrow U_2$ bir fonksiyon, (F_1, A_1), (F_2, A_2) U_1 üzerinde ve (G_1, B_1), (G_2, B_2) U_2 üzerinde tanımlı esnek kümeler olsun. Bu takdirde;

i) $(F_1, A_1) \subseteq (F_2, A_2)$ ise $(\varphi(F_1), A_1) \subseteq (\varphi(F_2), A_2)$,

ii) $(F_1, A_1) \sqsubseteq (F_2, A_2)$ ise $(\varphi(F_1), A_1) \sqsubseteq (\varphi(F_2), A_2)$,

iii) $(G_1, B_1) \subseteq (G_2, B_2)$ ise $(\varphi^{-1}(G_1), B_1) \subseteq (\varphi^{-1}(G_2), B_2)$,

iv) $(G_1, B_1) \sqsubseteq (G_2, B_2)$ ise $(\varphi^{-1}(G_1), B_1) \sqsubseteq (\varphi^{-1}(G_2), B_2)$.

Tanım 1.31. [3, 16, 43] $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ U üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun.

i) $A = \cup_{i \in \Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için, $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $F(a) = \cup_{i \in \Lambda(a)} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ esnek kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum $\bigcup_{i \in \Lambda} (F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) $A = \cap_{i \in \Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için $F(a) = \cap_{i \in \Lambda} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ esnek kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum $\bigcap_{i \in \Lambda} (F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iii) $\mathrm{A}=\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall a\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a)=\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum $\bigsqcup\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iv) $\mathrm{A}=\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall a\in\mathrm{A}$ için, $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $\mathrm{F}(a)=\bigcap\limits_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $\bigsqcap\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

v) $\mathrm{A}=\prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall(a_i)\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a_i)=\bigcup\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $\bigvee\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

vi) $\mathrm{A}=\prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall(a_i)\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a_i)=\bigcap\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $\bigwedge\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 1.32. [35] $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\in\mathrm{Es}(\mathrm{U}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümelerin bir ailesi olmak üzere, $\mathrm{A}=\prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ve $\forall(a_i)\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a_i)=\prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ esnek kümeler ailesinin kartezyen çarpımı denir. Bu durum $\bigtimes\limits_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(F,A) ve (G,B) esnek kümeleri için **y**ukarıda verilen tanımlar sırasıyla aşağıdaki şekilde gösterilecektir:

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin birleşimi: $(\mathrm{F},\mathrm{A})\bigcup(\mathrm{G},\mathrm{B})$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin arakesiti : $(\mathrm{F},\mathrm{A})\bigcap(\mathrm{G},\mathrm{B})$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi: $(\mathrm{F},\mathrm{A})\sqcup(\mathrm{G},\mathrm{B})$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti: $(\mathrm{F},\mathrm{A})\sqcap(\mathrm{G},\mathrm{B})$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin $\wedge$-arakesiti: $(\mathrm{F},\mathrm{A})\wedge(\mathrm{G},\mathrm{B})$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin $\vee$-birleşimi: $(\mathrm{F},\mathrm{A})\vee(\mathrm{G},\mathrm{B})$

(F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kartezyen çarpımı: $(\mathrm{F},\mathrm{A})\times(\mathrm{G},\mathrm{B})$

Esnek kümelerin aileleri ile ilgili aşağıdaki özellikler geçerlidir.

Önerme 1.4. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}\subseteq\mathrm{Es}(\mathrm{U})$ ve $(\mathrm{F},\mathrm{B})\in\mathrm{Es}(\mathrm{U})$ olsun. Bu takdirde;

i) $(F,B) \bigcap \left(\bigcup_{i\in\Lambda} (F_i, A_i) \right) = \bigcup_{i\in\Lambda} \left((F,B) \bigcap (F_i, A_i) \right)$,

ii) $(F,B) \bigcup \left(\bigcap_{i\in\Lambda} (F_i, A_i) \right) = \bigcap_{i\in\Lambda} \left((F,B) \bigcup (F_i, A_i) \right)$,

iii) $(F,B) \sqcap \left(\bigsqcup_{i\in\Lambda} (F_i, A_i) \right) = \bigsqcup_{i\in\Lambda} \left((F,B) \sqcap (F_i, A_i) \right)$,

iv) $(F,B) \sqcup \left(\sqcap_{i\in\Lambda} (F_i, A_i) \right) = \sqcap_{i\in\Lambda} \left((F,B) \sqcup (F_i, A_i) \right)$.

Teorem 1.29. $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ U üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özelikler sağlanır.

i) (Es(U),⊆) tam kafestir ve

Sup$\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \} = \bigcup_{i\in\Lambda} (F_i, A_i)$, Inf$\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \} = \bigcap_{i\in\Lambda} (F_i, A_i)$,

ii) (Es(U),⊑) tam kafestir ve

Sup$\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \} = \sqcap_{i\in\Lambda} (F_i, A_i)$, Inf$\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \} = \bigsqcup_{i\in\Lambda} (F_i, A_i)$,

iii) (Es(U),⊆) sonsuz ∨-dağılımlı kafestir,

iv) (Es(U),⊑) sonsuz ∨-dağılımlı kafestir,

v) $Es_A(U)$ kümesinde $\bigsqcup_{i\in\Lambda} (F_i, A_i) = \bigcup_{i\in\Lambda} (F_i, A_i)$ ve $\sqcap_{i\in\Lambda} (F_i, A_i) = \bigcap_{i\in\Lambda} (F_i, A_i)$,

vi) $Es_A(U)$ kümesinde "⊆" ve "⊑" birbirlerinin ters bağıntılarıdır.

Tanım 1.33. [14] "+" P(U) kümesi üzerinde bir ikili işlem, (F,A) ve (G,B) U üzerinde esnek kümeler olmak üzere;

i) C=A $\cup$ B ve $\forall c \in C$ için

$$H(c) = \begin{cases} F(c), & c \in A \setminus B \\ G(c), & c \in B \setminus A \\ F(c) + G(c), & c \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin toplamı denir ve $(F, A) +_{\cup} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

ii) C=A $\cap$ B ve $\forall c \in C$ için $H(c) = F(c) + G(c)$ şeklinde tanımlanan (H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin daraltılmış toplamı denir ve $(F,A) +_{\cap} (G,B)$ şeklinde gösterilir.

iii) C=AxB ve $\forall (a,b) \in C$ için $H(a,b) = F(a) + G(b)$ şeklinde tanımlanan

(H,C) esnek kümesine (F,A) ve (G,B) esnek kümelerinin kartezyen toplamı denir ve $(\mathrm{F,A}) +_{\times} (\mathrm{G,B})$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.34. [66] (F,A) U_1 üzerinde, (G,B) U_2 üzerinde esnek kümeler ve $\phi : \mathrm{U}_1 \to \mathrm{U}_2$, $\psi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ fonksiyonlar olsun. Bu takdirde (ϕ,ψ) ikilisine (F,A) 'dan (G,B) 'ye esnek fonksiyon denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\phi(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{G}(\psi(x))$. Bu durum $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{G,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Bu tanımda, eğer ϕ ve ψ bire-bir (örten) bir dönüşüm ise (ϕ,ψ) 'ye bire-bir (örten) esnek fonksiyon denir. (F,A) ve (G,B) arasındaki bire-bir ve örten esnek fonksiyona esnek tam eşleme denir. Bu durum (F,A)$\simeq$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Aşağıdaki önerme ile açık olarak " $\simeq$ " bağıntısı esnek kümeler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 1.5. [66] (F,A), (G,B), (H,C) sırasıyla U_1, U_2 ve U_3 kümeleri üzerinde esnek kümeler ve $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{G,B})$, $(\varphi,\gamma) : (\mathrm{G,B}) \to (\mathrm{H,C})$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{H,C})$,

ii) (ϕ,ψ) esnek tam eşleme ise $(\phi^{-1},\psi^{-1}) : (\mathrm{G,B}) \to (\mathrm{F,A})$ esnek tam eşlemedir,

iii) $(\mathrm{I}_{\mathrm{U}_1}, \mathrm{I}_{\mathrm{A}}) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{F,A})$ esnek tam eşlemedir.

Tanım 1.35. [14] (F,A) U_1 üzerinde, (G,B) U_2 üzerinde esnek kümeler ve $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{G,B})$ olsun. Bu takdirde $\forall x \in \mathrm{A}, y \in \mathrm{B}$ için

$$\phi(\mathrm{F})(y) = \begin{cases} \bigcup\limits_{\psi(x)=y} \phi(\mathrm{F}(x)) \ , & y \in \mathrm{Im}\psi \\ \varnothing & , \ y \notin \mathrm{Im}\psi \end{cases}$$

ve

$$\phi^{-1}(\mathrm{G})(x) = \phi^{-1}(\mathrm{G}(\psi(x)))$$

ile tanımlanan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ ve $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ esnek kümelerine sırasıyla (F,A) ve (G,B)'nin (ϕ,ψ) esnek fonksiyonu altındaki resmi ve ters- resmi denir.

Bu durumlar sırasıyla $(\phi,\psi)(\mathrm{F,A}) = (\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ ve $(\phi,\psi)^{-1}(\mathrm{G,B}) = (\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ şeklinde gösterilir.

Açık olarak $(\phi,\psi)(\mathrm{F,A}) \subseteq (\mathrm{G,B})$ ve $(\phi,\psi)^{-1}(\mathrm{G,B}) \sqsubseteq (\mathrm{F,A})$ dır.

Teorem 1.30. [13] L bir tam kafes, X bir küme, $\mu,\ \nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{X}}$ olsun. Bu takdirde;

(i) $\mu \leq \nu$ ise $(F_\mu, L) \subseteq (F_\nu, L)$,

(ii) $(F_\mu, L) \bigcup (F_\nu, L) \subseteq (F_{\mu\vee\nu}, L)$,

(iii) $(F_\mu, L) \bigcap (F_\nu, L) = (F_{\mu\wedge\nu}, L)$,

(iv) L bir zincir ise $(F_\mu, L) \bigcup (F_\nu, L) = (F_{\mu\vee\nu}, L)$.

1.7. Esnek Halkalar ve İdealler

Esnek halka kavramı ilk kez Acar vd. [1] tarafından ortaya konulmuştur. Acar vd. esnek halka tanımını vererek esnek halkaların bazı cebirsel özelliklerini incelenmişlerdir. Daha sonra Çelik vd. [14] esnek halkalar üzerinde yaptıkları çalışmada esnek halka kavramını genişleterek, bunlarla ilgili yeni özellikler elde etmişlerdir.

Bu tezin hazırlanış sürecinde yapılan araştırma ve çalışmalarda kaynak teşkil eden esnek halka ve esnek ideal yapısının temel cebirsel ifadelerine ve özelliklerine bu bölümde yer verilmiştir.

Bu bölümde, R bir halka, L bir tam kafes ve bütün esnek kümeler boştan farklı olarak alınacaktır.

Tanım 1.36. [14] (F,A) R halkası üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun. Eğer $\forall x \in$ Des(F,A) için F(x) R'nin bir alt halkası (ideali) ise (F,A)'ya R halkası üzerinde esnek halka (ideal) denir. Açık olarak R üzerinde her esnek ideal esnek halkadır. R üzerindeki bütün esnek halkalar ve idealler için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- Esa(R)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde esnek halka}
- Esi(R)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde esnek ideal}
- Esa($\underline{R}$)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde güçlü esnek halka}
- Esi($\underline{R}$)={ (F,A)| A⊆E, (F,A) R üzerinde güçlü esnek ideal}
- Esa_A(R)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde esnek halka}
- Esi_A(R)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde esnek ideal}
- Esa_A($\underline{R}$)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde güçlü esnek halka}
- Esi_A($\underline{R}$)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde güçlü esnek ideal}

(F,A), (G,B) R halkası üzerinde esnek halkalar ve (F,A) ⊆ (G,B) ise (F,A)'ya (G,B)' nin esnek alt halkası denir.

(F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ):(F,A)$\rightarrow$(G,B) olsun. Eğer ϕ:$R_1 \to R_2$ halka homomorfisi ise (ϕ,ψ)'ye esnek halka homomorfisi denir. Eğer ϕ bir izomorfi, ψ bire-bir ve örten ise (ϕ,ψ)'ye esnek halka izomorfisi denir. Bu durum (F,A)$\cong_R$(G,B) şeklinde gösterilir. Açık olarak "$\cong_R$" bağıntısı esnek halkalar üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.37. [14] (F,A) R halkası üzerinde boştan farklı bir esnek küme olsun.

i) (F,A)'ya sıfır esnek küme denir $\Leftrightarrow$ $\forall x \in$ Des(F,A) için F(x)={0},

ii) (F,A)'ya tam esnek küme denir $\Leftrightarrow$ $\forall x \in$ Des(F,A) için F(x)=R.

Açık olarak sıfır ve tam esnek kümeler R üzerinde esnek ideallerdir.

Önerme 1.6. R bir halka, $\varnothing \neq \mathrm{I} \subseteq \mathrm{R}$ ve $\varnothing \neq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$ olsun. Bu takdirde;

i) $(\Phi_{\mathrm{A,I}}, \mathrm{A})$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır. $\Leftrightarrow$ I, R'nin bir alt halkası (ideali) dır.

ii) $(\Phi_{\mathrm{A,R}}, \mathrm{A})$ A parametreli en büyük esnek idealdir.

iii) $(\Phi_{\mathrm{A,\{0\}}}, \mathrm{A})$ A parametreli en küçük esnek idealdir.

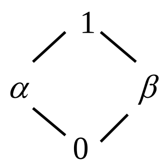
Örnek 1.6.

1) R bir halka ise F:R $\to P$(R) $\mathrm{F}(r) = \langle r \rangle$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi R üzerinde esnek idealdir.

3) R birim elemanlı bir halka ise F:R $\to P$(R) $\mathrm{F}(x) = \{r \mid rx = xr\}$ ile tanımlanan (F,R) ikilisi R üzerinde esnek halkadır. Üstelik (F,R) R üzerinde esnek idealdir $\Leftrightarrow$ R bir değişmeli halkadır.

4) $\mathrm{M}_{\mathrm{n\times n}}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ üzerindeki bütün $\mathrm{n\times n}$ tipindeki matrislerin kümesi ve F:$\mathrm{M}_{\mathrm{n\times n}}(\mathbb{R}) \to P(\mathrm{M}_{\mathrm{n\times n}}(\mathbb{R}))$ bir dönüşüm olsun. F(X)={Y.X | Y $\in \mathrm{M}_{\mathrm{n\times n}}(\mathbb{R})$} ile tanımlanan (F, $\mathrm{M}_{\mathrm{n\times n}}(\mathbb{R})$) ikilisi $\mathrm{M}_{\mathrm{n\times n}}(\mathbb{R})$ halkası üzerinde esnek halkadır, fakat esnek ideal değildir.

Örnek 1.7. L={0,α,β,1}kafesinde sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 1.2. (L={0, α, β ,1}, $\leq$) kafesi

R=$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olmak üzere, I(R)={R, $\mathbb{Z}_2 \times \{\bar{0}\}, \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_2, \{(\bar{0},\bar{0})\}$}

A(R)={ R, $\mathbb{Z}_2 \times \{\bar{0}\}, \{\bar{0}\} \times \mathbb{Z}_2, \{(\bar{0},\bar{0})\}$, $\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{0},\bar{0})\}$} şeklindedir.

$\mu : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ L-bulanık idealdir. $\Leftrightarrow$

$\mu(\bar{0},\bar{0}) \geq \mu(\bar{1},\bar{1}) = \mu(\bar{0},\bar{1}) = \mu(\bar{1},\bar{0})$.

$\mu : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to L$ L-bulanık alt halkadır. $\Leftrightarrow$

$\mu(\bar{0},\bar{0}) \geq \mu(\bar{1},\bar{1}) \geq \mu(\bar{0},\bar{1}) \wedge \mu(\bar{1},\bar{0})$,

$\mu(\bar{0},\bar{0}) \geq \mu(\bar{1},\bar{0}) \geq \mu(\bar{0},\bar{1}) \wedge \mu(\bar{1},\bar{1})$,

$\mu(\bar{0},\bar{0}) \geq \mu(\bar{0},\bar{1}) \geq \mu(\bar{1},\bar{0}) \wedge \mu(\bar{1},\bar{1})$.

Buna göre R'nin L-bulanık idealleri ve alt halkaları sırasıyla aşağıdaki tablolarla verilebilir.

Tablo 1.1. R=$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$'nin L-bulanık idealleri

$\mu(\bar{0},\bar{0})$	$\mu(\bar{1},\bar{1})$	$\mu(\bar{0},\bar{1})$	$\mu(\bar{1},\bar{0})$
0	0	0	0
α	0	0	0
α	α	α	α
β	0	0	0
β	β	β	β
1	α	α	α
1	β	β	β
1	1	1	1

Tablo 1.2. R=$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$'nin L-bulanık alt halkaları

$\mu(\bar{0},\bar{0})$	$\mu(\bar{1},\bar{1})$	$\mu(\bar{0},\bar{1})$	$\mu(\bar{1},\bar{0})$
0	0	0	0
α	0	0	0
α	α	0	0
α	0	α	0
α	0	0	α
α	α	α	α
β	0	0	0
β	β	0	0
β	0	β	0
β	0	0	β
β	β	β	β
1	0	0	0
1	0	α	β
1	α	0	β
1	β	α	0
1	α	β	0
1	β	0	α
1	0	β	α
1	1	0	0
1	1	α	α
1	1	β	β
1	0	1	0
1	α	1	α
1	β	1	β
1	0	0	1
1	α	α	1
1	β	β	1
1	1	1	1
1	α	α	α
1	β	β	β

R'nin L-bulanık alt halkalarının sayısı |L(R)|=30 dir.

R'nin L-bulanık ideallerinin sayısı |LI(R)|=8 dir.

R'nin L parametreli güçlü esnek alt halkalarının sayısı $|Esa_L(\underline{R})|$=625 dir.

R'nin L parametreli güçlü esnek ideallerinin sayısı $|Esi_L(\underline{R})|$=256 dır.

R'nin L parametreli esnek alt halkalarının sayısı $|Esa_L(R)|$=1295 dir.

R'nin L parametreli esnek ideallerinin sayısı $|Esi_L(R)|$=624 dür.

Önerme 1.7. $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ R üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) Des($\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$)= $\bigcup_{i\in\Lambda}$Des(F_i, A_i),

ii) Des($\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$)⊆ $\bigcap_{i\in\Lambda}$Des(F_i, A_i),

iii) Des($\sqcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$)= $\bigcup_{i\in\Lambda}$Des(F_i, A_i),

iv) Des($\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$)⊆ $\bigcap_{i\in\Lambda}$Des(F_i, A_i),

v) Des($\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$)⊆ $\prod_{i\in\Lambda}$Des$\left(F_i, A_i\right)$.

Teorem 1.31. [14] $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ R üzerinde esnek halkaların (ideallerin) bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

ii) $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

iii) Her $a \in \bigcup_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{ F_i(a) \mid i \in \Lambda(a) \}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

iv) $\sqcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ve $\forall a \in \bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{ F_i(a) \mid i \in \Lambda \}$ kümelerin bir zinciri ise $\sqcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

v) Her i,j∈Λ, i≠j için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

vi) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır,

vii) $A = \prod_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i)_{i\in\Lambda} \in A$ için $\{ F_i(a_i) \mid i \in \Lambda \}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigvee_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek halka (ideal) dır.

Teorem 1.31 i) ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.3. $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Bu takdirde;

i) (Esa$_A$($\underline{R}$), ⊆**)** tam kafestir,

ii) (Esi$_A$($\underline{R}$), $\subseteq$**)** tam kafestir.

Teorem 1.32. [14] Her $i \in \Lambda$ için (F_i, A_i) R_i üzerinde esnek halkalar (idealler) olsun. Bu takdirde, $\underset{i\in\Lambda}{\times}(F_i, A_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} R_i$ üzerinde bir esnek halka (ideal) dır.

Tanım 1.38. (G,+) değişmeli bir grup ve $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ G üzerinde esnek kümelerin bir ailesi olsun.

i) $A = \bigcup_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için, $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $F(a) = \sum_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ esnek kümeler ailesinin toplamı denir ve $\cup\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) $A = \bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için $F(a) = \sum_{i\in\Lambda} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ esnek kümeler ailesinin daraltılmış toplamı denir ve $\cap\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iii) $A = \prod_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i)_{i\in\Lambda} \in A$ için $F(a_i) = \sum_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) esnek kümesine $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ esnek kümeler ailesinin kartezyen toplamı denir ve $\times\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 1.33. $\{ (F_i, A_i) \mid i \in \Lambda \}$ R üzerinde esnek ideallerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\cup\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek idealdir,

ii) $\bigcap_{i\in\Lambda} A_i \neq \emptyset$ ise $\cap\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek idealdir,

iii) $\times\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde esnek idealdir.

Teorem 1.34. [14] (F,A), (G,B), (H,C) R üzerinde güçlü esnek idealler olsun. Bu takdirde;

i) $(F, A) \odot_{\cup} (G, B)$ R üzerinde esnek idealdir,

ii) $A \cap B \neq \emptyset$ ise $(F,A) \odot_{\cap} (G,B)$ R üzerinde esnek idealdir,

iii) $(F,A) \odot_{\times} (G,B)$ R üzerinde esnek idealdir,

iv) "$\subseteq$" bağıntısına göre Sup{(F,A),(G,B)}$=(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$,

v) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\emptyset$ ise "$\subseteq$" bağıntısına göre Inf{(F,A),(G,B)}= (F,A)$\bigcap$(G,B),

vi) "$\sqsubseteq$" bağıntısına göre Sup{(F,A),(G,B)}= $(\mathrm{F},\mathrm{A})\sqcap(\mathrm{G},\mathrm{B})$,

vii) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\emptyset$ ise "$\sqsubseteq$" bağıntısına göre Inf{(F,A),(G,B)}= $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$,

viii) $\mathrm{B}\cap\mathrm{C}\neq\emptyset$ ve (F,A) $\subseteq$ (G,B) ise

$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}\left[(\mathrm{G},\mathrm{B})\cap(\mathrm{H},\mathrm{C})\right]=(\mathrm{G},\mathrm{B})\cap\left[(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{H},\mathrm{C})\right]$,

ix) $\mathrm{A}\cap\mathrm{C}\neq\emptyset$ ve (F,A) $\sqsubseteq$ (G,B) ise

$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}\left[(\mathrm{G},\mathrm{B})\sqcap(\mathrm{H},\mathrm{C})\right]=(\mathrm{G},\mathrm{B})\sqcap\left[(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{H},\mathrm{C})\right]$.

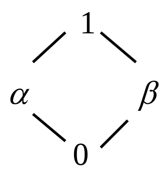
Teorem 1.35. R bir halka, L bir tam kafes ve $\alpha\in\mathrm{L}$ olsun.

i) $\mu\in\mathrm{LI(R)}$ ise (F_{μ} ,L) R üzerinde bir esnek idealdir.

ii) $\gamma:\mathrm{LI}(\mathrm{R})\rightarrow$ $\mathrm{Esi_L(R)}$ için $\gamma(\mu)=(\mathrm{F}_{\mu},\mathrm{L})$ şeklinde tanımlanan γ dönüşümü bire-bir ve artan bir fonksiyondur.

Teorem 1.35. i)'deki ifadeye benzer şekilde (F,L) R üzerinde bir esnek ideal olması halinde $\mu_{\mathrm{F}}:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{L}$ L-bulanık alt kümesi R'nin bir L-bulanık ideali olmayabilir. Bu durumu aşağıdaki örnekle açıklayabiliriz.

Örnek 1.8. L=$\{0,\alpha,\beta,1\}$kafesinde sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 1.3. (L=$\{0,\alpha,\beta,1\},\leq$) kafesi

R=$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ olmak üzere F:L$\rightarrow P(\mathrm{R})$ dönüşümü

F(0)={(0,0)}, F(α)={($\bar{1},\bar{1}$),($\bar{0},\bar{0}$)},F(β)={($\bar{1},\bar{0}$),($\bar{0},\bar{0}$)},F(1)={($\bar{1},\bar{0}$),($\bar{0},\bar{0}$)} şeklinde tanımlansın.

Bu takdirde $\mu_{\mathrm{F}}(x)=\bigvee_{\alpha\in\mathrm{F}(x)}\alpha$ ile tanımlanan $\mu_{\mathrm{F}}:\mathrm{R}\rightarrow\mathrm{L}$ dönüşümü

μ_{F} ($\bar{0},\bar{0}$)=1, μ_{F} ($\bar{0},\bar{1}$)=0, μ_{F} ($\bar{1},\bar{0}$)=1, μ_{F} ($\bar{1},\bar{1}$)= α şeklindedir. Açıkça (F,L) R üzerinde bir esnek idealdir. Fakat (μ_{F} ,R) R üzerinde L-bulanık ideal değildir.

Bu örnek gösteriyor ki R'nin L-parametreli esnek idealleri R'nin L-bulanık idealleri ile karakterize edilemez.

Önerme 1.8. [13] $\mu,\ \nu \in \mathrm{L}^{\mathrm{R}}$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $(\mathrm{F}_{\mu},\mathrm{L})+_{\cup}(\mathrm{F}_{\nu},\mathrm{L})\subseteq(\mathrm{F}_{\mu+\nu},\mathrm{L})$,

(ii) $(\mathrm{F}_{\mu},\mathrm{L})\odot_{\cup}(\mathrm{F}_{\nu},\mathrm{L})\subseteq(\mathrm{F}_{\mu\cdot\nu},\mathrm{L})$.

Örnek 1.9. R=$\mathbb{Z}$, A={ $2n \mid n\in\mathbb{Z}$ } ve B={ $3n \mid n\in\mathbb{Z}$ } olsun.

R halkası üzerinde F:A$\rightarrow P(\mathbb{Z})$ ve G:B$\rightarrow P(\mathbb{Z})$ dönüşümleri $\forall k\in\mathbb{N}$ için

$$\mathrm{F}(x)=\begin{cases}\{0\} & ,\ x=0\\ k\mathbb{Z} & ,\ x\in 2^{k}\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z}\end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathrm{G}(x)=\begin{cases}\{0\} & ,\ x=0\\ 2^{k}\mathbb{Z} & ,\ x\in 2^{k}\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z}\end{cases}$$

şeklinde tanımlasınlar.

Açık olarak (F,A) ve (G,B) R halkası üzerinde esnek ideallerdir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$=(H, A$\cup$B) olsun. $\forall x\in$ A$\cup$B için

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x) & ,2\mid x \text{ ve } 3\nmid x\\ \mathrm{G}(x) & ,3\mid x \text{ ve } 2\nmid x\\ \mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x) & ,6\mid x\end{cases}$$

$$=\begin{cases}k\mathbb{Z} & ,x\in 2^{k}\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\nmid x\\ \mathbb{Z} & ,2\nmid x \text{ ve } 3|x\\ k\mathbb{Z}+2^{k}\mathbb{Z} & ,x\in 2^{k}\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\mid x\\ \{0\} & ,x=0\end{cases}$$

şeklindedir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$=(K, A$\cap$B) olsun. $\forall x\in$ A$\cap$B={ $6n\mid n\in\mathbb{Z}$ } için

$$\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x)=\begin{cases}k\mathbb{Z}+2^{k}\mathbb{Z} & ,x\in 2^{k}\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\mid x\\ \{0\} & ,x=0\end{cases}$$

şeklindedir.

Açıkça $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek ideallerdir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})\odot_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$=(H, A$\cup$B) olsun. $\forall x\in$A$\cup$B için

$$\mathrm{H}(x)=\begin{cases}\mathrm{F}(x) & ,2\mid x \text{ ve } 3\nmid x\\ \mathrm{G}(x) & ,3\mid x \text{ ve } 2\nmid x\\ \mathrm{F}(x)\cdot\mathrm{G}(x) & ,6\mid x\end{cases}$$

$$=\begin{cases} k\mathbb{Z} & , x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\nmid x \\ \mathbb{Z} & , 2\nmid x \text{ ve } 3|x \\ k.2^k\mathbb{Z} & , x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\,|\,x \\ \{0\} & , x=0 \end{cases}$$

şeklindedir.

$(\mathrm{F},\mathrm{A})\odot_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ =(K, $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$) olsun. $\forall x\in$ $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$={ $6n\,|\,n\in\mathbb{Z}$ } için

$$\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)\odot\mathrm{G}(x)=\begin{cases} k.2^k\mathbb{Z} & , x\in 2^k\mathbb{Z}\setminus 2^{k+1}\mathbb{Z},\ k\geq 1,\ 3\,|\,x \\ \{0\} & , x=0 \end{cases}$$

şeklindedir.

Açıkça $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$, $(\mathrm{F},\mathrm{A})+_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$, $(\mathrm{F},\mathrm{A})\odot_{\cup}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})\odot_{\cap}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde esnek ideallerdir.

Teorem 1.36. [14] (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ):(F,A)$\to$(G,B) esnek halka homomorfisi olsun.

i) ψ bire-bir ve (F,A) R_1 üzerinde esnek halka ise (ϕ(F),B) R_2 üzerinde esnek halkadır.

ii) Eğer ϕ örten, ψ bire-bir ve (F,A) R_1 üzerinde esnek ideal ise (ϕ(F),B) R_2 üzerinde esnek idealdir.

iii) (G,B) R_2 üzerinde esnek halka (ideal) ve (ϕ^{-1}(G),A) boştan farklı esnek küme ise (ϕ^{-1}(G),A) R_1 üzerinde esnek halka (ideal) dır.

Teorem 1.37. ϕ :$R_1\to R_2$ halka homomorfisi, (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde esnek halkalar olsun.

i) H:A $\to P(\mathrm{R}_2)$ H(x)= ϕ (F(x)) ile tanımlanan (H,A) esnek kümesi R_2 üzerinde bir esnek halkadır ve $(\phi,\mathrm{I}_\mathrm{A})$:(F,A)$\to$(H,A) esnek halka homomorfisidir.

ii) ϕ örten homomorfi olmak üzere, K:B $\to P(\mathrm{R}_1)$ K(y)= ϕ^{-1} (G(y)) ile tanımlanan (K,B) esnek kümesi R_1 üzerinde bir esnek halkadır ve $(\phi,\mathrm{I}_\mathrm{B})$:(K,B)$\to$(G,B) esnek halka homomorfisidir.

Önerme 1.9. [14] (F,A), (G,B), (H,C) sırasıyla R_1, R_2 ve R_3 üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer (ϕ,ψ):(F,A)$\to$(G,B) ve (φ,γ):(G,B)$\to$(H,C) esnek halka homomorfileri ise $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi)$:(F,A)$\to$(H,C) esnek halka homomorfisidir.

1.8 Esnek Modüller

Esnek modül kavramı ilk kez Sun vd. tarafından [60]'da ele alınmıştır. Sun vd. Molodtsov'un esnek küme tanımından yola çıkarak esnek modüllerin bazı temel özelliklerini incelemişlerdir. Daha sonra Türkmen ve Pancar [61]'de esnek alt modüllerin bazı özelliklerini ortaya koymuşlar ve esnek alt modüllerin toplamı, direkt toplamı gibi bazı yeni kavramları incelemişlerdir.

Bu bölümde, M bir R-modül, L bir tam kafes ve bütün esnek kümeler boştan farklı olarak alınacaktır.

Tanım 1.39. (F,A) M üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer $\forall x \in$Des(F,A) için F(x) $\in$S(M) ise (F,A)'ya M üzerinde esnek modül denir. Açık olarak M üzerindeki sıfır ve tam esnek kümeler esnek modüllerdir. M üzerindeki bütün esnek modüller için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- Esm[M]={ (F,A)| A⊆E, (F,A) M üzerinde esnek modül}
- Esm[<u>M</u>]={ (F,A)| A⊆E, (F,A) M üzerinde güçlü esnek modül}
- Esm_A[M]={ (F,A)| (F,A) M üzerinde esnek modül}
- Esm_A[<u>M</u>]={ (F,A)| (F,A) M üzerinde güçlü esnek modül}

(F,A), (G,B) M üzerinde esnek modüller ve (F,A) ⊆ (G,B) ise (F,A)'ya (G,B)'nin esnek alt modülü denir.

$r \in$R ve (F,A) M üzerinde bir esnek küme olmak üzere $\forall a \in$A için G(a)= rF(a) ile tanımlı (G,A) esnek kümesine (F,A) esnek kümesinin r ile çarpımı denir ve (rF, A) ile gösterilir. Açık olarak R değişmeli bir halka ve (F,A) esnek modül ise (rF, A) esnek modüldür ve (rF, A) $\subseteq$(F,A) dır.

(F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ):(F,A$\to$(G,B) olsun. Eğerϕ:$M_1 \to M_2$ modül homomorfisi ise (ϕ,ψ)'ye esnek modül homomorfisi denir. Eğer ϕ bir izomorfi, ψ bire-bir ve örten ise (ϕ,ψ)'ye esnek modül izomorfisi denir. Bu durum (F,A)$\cong_M$(G,B) şeklinde gösterilir. Açık olarak "$\cong_M$" bağıntısı esnek modüllerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Örnek 1.10.

1) M bir modül ve N, M'nin bir alt modülü ise ($\Phi_{A,N}$,A) esnek kümesi M üzerinde bir esnek modüldür.

2) F:$\mathbb{N} \to P(\mathbb{Z})$, $F(n) = 2n\mathbb{Z}$ ile tanımlı (F, $\mathbb{N}$) ikilisi $\mathbb{Z}$ üzerinde bir esnek modüldür.

Teorem 1.38. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ M üzerinde esnek modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

ii) $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ise $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

iii) Her $a \in \cup_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda(a)\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

iv) $\sqcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ boştan farklı esnek küme ve $\forall a \in \cap_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda\}$ kümelerin bir zinciri ise $\sqcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

v) Her i,j$\in\Lambda$, i$\neq$j için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

vi) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

vii) $A = \prod_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i) \in A$ için $\{F_i(a_i) \mid i \in \Lambda\}$ kümelerin bir zinciri ise $\bigvee_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

Teorem 1.38 i) ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 1.4. $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Bu takdirde ($Esm_A[\underline{M}]$, $\subseteq$**)** tam kafestir.

Teorem 1.39. [61] $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ M üzerinde esnek modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\times_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} M_i$ üzerinde bir esnek modüldür.

Teorem 1.40. [61] $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ M üzerinde esnek alt modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\cup\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

ii) $\cap_{i\in\Lambda} A_i \neq \emptyset$ ise $\cap\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür,

iii) $\times\sum_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde esnek modüldür.

Teorem 1.41. M bir modül, L bir tam kafes ve $\alpha \in L$ olsun.

i) $\mu \in \mathrm{L[M]}$ ise (F_μ ,L) M üzerinde bir esnek modüldür.

ii) $\gamma : \mathrm{L[M]} \to \mathrm{Esm_L[M]}$ için $\gamma(\mu) = (\mathrm{F}_\mu, \mathrm{L})$ şeklinde tanımlanan γ dönüşümü bire-bir ve artan bir fonksiyondur.

Teorem 1.42. [61] (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek kümeler ve (ϕ,ψ) :(F,A)$\to$(G,B) esnek modül homomorfisi olsun.

i) ψ bire-bir ve (F,A) R_1 üzerinde esnek modül ise (ϕ(F),B) R_2 üzerinde esnek modüldür.

ii) (G,B) R_2 üzerinde esnek modül ve $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ boştan farklı esnek küme ise $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ R_1 üzerinde esnek modüldür.

Teorem 1.43. ϕ :$M_1 \to M_2$ modül homomorfisi, (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek modüller olsun.

i) H:A$\to$ $P(\mathrm{M}_2)$ H(x)=ϕ (F(x)) ile tanımlanan (H,A) kümesi M_2 üzerinde bir esnek modüldür ve $(\phi, \mathrm{I_A}) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{H,A})$ esnek modül homomorfisidir.

ii) ϕ örten ise P:B$\to$ $P(\mathrm{M}_1)$ K(y)=ϕ^{-1}(G(y)) ile tanımlanan (K,B) kümesi M_1 üzerinde bir esnek modüldür ve $(\phi, \mathrm{I_B}) : (\mathrm{K,B}) \to (\mathrm{G,B})$ esnek modül homomorfisidir.

Önerme 1.10. (F,A), (G,B), (H,C) sırasıyla M_1, M_2 ve M_3 üzerinde esnek kümeler olsun. Eğer $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{G,B})$ ve $(\varphi,\gamma) : (\mathrm{G,B}) \to (\mathrm{H,C})$ esnek modül homomorfileri ise $(\varphi \circ \phi, \gamma \circ \psi) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{H,C})$ esnek modül homomorfisidir.

Önerme 1.11. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde esnek kümeler, $(\phi,\psi) : (\mathrm{F,A}) \to (\mathrm{G,B})$ esnek modül homomorfisi ve $r \in \mathrm{R}$ olsun. Bu takdirde $(r\phi,\psi)$: (F,A)$\to$(r G,B) esnek modül homomorfisidir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. L-Bulanık Esnek Kümeler

Esnek kümeler ile bulanık alt kümeler arasındaki ilişki ilk kez [41]'de incelendi. Maji vd. [41]'de esnek küme kavramını bulanık alt kümelere uyguladılar ve bulanık esnek küme teorisini ortaya koydular. Daha sonra Li vd. [38]'de bulanık esnek kümelerin yapısını herhangi bir L tam kafesine genişleterek L-bulanık esnek küme tanımını verdiler ve L-bulanık esnek kümelerin kafes yapısını incelediler.

Bu bölümde L-bulanık esnek kümelerin bazı temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirildi. L-bulanık esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verilerek bunlara bağlı yeni özellikler elde edildi. Ayrıca L-bulanık esnek kümelerin birleşimi, daraltılmış birleşimi, arakesiti ve genişletilmiş arakesiti gibi yeni tanımlar verildi. Üstelik L-bulanık esnek fonksiyon kavramı verilerek L-bulanık esnek kümelerin bu fonksiyon altındaki görüntüsü ve ters görüntüsü ile ilgili özellikler incelendi.

Bu bölümde U bir küme, E parametreler kümesi, $A \subseteq E$ ve L bir tam kafes olarak ele alınacaktır.

Tanım 2.1. [38] $F: A \to L^U$ bir dönüşüm olmak üzere (F,A) ikilisine U üzerinde L -bulanık esnek küme denir. Eğer $L=[0,1]$ ise L-bulanık esnek küme yerine bulanık esnek küme denir.

U kümesi üzerindeki bütün L-bulanık esnek kümeler ailesi için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- $Es(U)=\{ (F,A) \mid A \subseteq E, F: A \to L^U \}$
- $Es_A(U) =\{ (F,A) \mid F: A \to L^U \}$

Tanım 2.2. (F,A) ve (G,B) U üzerinde L -bulanık esnek kümeler olsun.

i) (F,A)'ya (G,B)'nin L -bulanık esnek alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$ $A \subseteq B$ ve $\forall x \in A$ için $F(x) \leq G(x)$. Bu durum $(F,A) \subseteq (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) (F,A)'ya (G,B)'nin daraltılmış L -bulanık esnek alt kümesi denir. $\Leftrightarrow$ $A \subseteq B$ ve $\forall x \in A$ için $G(x) \leq F(x)$. Bu durum $(F,A) \sqsubseteq (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Eğer $(F,A) \subseteq (G,B)$ ve $(G,B) \subseteq (F,A)$ ise (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerine eşittir denir ve $(F,A) \cong (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Açık olarak "$\subseteq$" ve "$\sqsubseteq$" bağıntıları $Es(U)$, $Es_A(U)$ kümeleri üzerinde sıralama bağıntılarıdır.

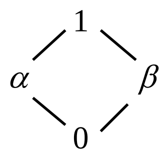
L-bulanık esnek küme kavramı ile ilgili aşağıdaki örnekleri verebiliriz.

Örnek 2.1.

1) $R \in L^{A \times U}$ ise $F : A \to L^U$, $F(x)(y) = R(x, y)$ ile tanımlanan (F,A) ikilisi U üzerinde L-bulanık esnek kümedir.

2) $F : L \to L^L$, $F(\alpha)(\beta) = \alpha \vee \beta$ ile tanımlanan (F,L) ikilisi L üzerinde L-bulanık esnek kümedir.

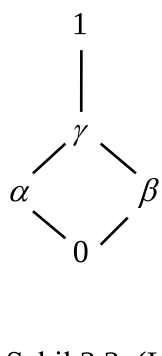
3) $L=\{0,\alpha,\beta,1\}$ kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2.1. $(L=\{0,\alpha,\beta,1\},\leq)$ kafesi

$F : \mathbb{N} \to L^{\mathbb{Z}}$, $F(n)(x) = \begin{cases} \beta, & x<n \\ \alpha, & x\geq n \end{cases}$ ile tanımlanan $(F,\mathbb{N})$ ikilisi $\mathbb{Z}$ üzerinde L-bulanık esnek kümedir.

4) $L=\{0,\alpha,\beta,\gamma,1\}$ kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2.2. $(L=\{0,\alpha,\beta,\gamma,1\},\leq)$ kafesi

$F:\mathbb{N}\to L^{\mathbb{Z}}$, $G:\mathbb{Z}\to L^{\mathbb{Z}}$ dönüşümleri

$$F(n)(x)=\begin{cases}0, & x<n\\ \alpha, & x\geq n\end{cases} \quad \text{ve} \quad G(n)(x)=\begin{cases}\beta, & x<n\\ \gamma, & x\geq n\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $(F,\mathbb{N})\subseteq(G,\mathbb{Z})$ dir.

5) L=[0,1] olmak üzere $F, G:\mathbb{R}\to L^{\mathbb{R}}$ dönüşümleri

$$F(n)(x)=\begin{cases}|\mathrm{Sin}nx|, & n\leq x\\ 0, & x<n\end{cases} \quad \text{ve} \quad G(n)(x)=\begin{cases}|x|+1, & n\leq x\\ 1, & x<n\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $(F,\mathbb{R})\subseteq(G,\mathbb{R})$ dir.

Örnek 2.2.

1) $A\subseteq E$, $Y\subseteq U$ ve $\tilde{\Phi}_{A,Y}:A\to L^U$, $\tilde{\Phi}_{A,Y}(a)=\chi_Y$ ile tanımlanan $(\tilde{\Phi}_{A,Y}, A)$ ikilisi U üzerinde L-bulanık esnek kümedir.

2) $F:A\to P(U)$ olmak üzere $\forall a\in A$ için $\tilde{F}(a)=\chi_{F(a)}$ ile tanımlanan $(\tilde{F},A)$ ikilisi U üzerinde L-bulanık esnek kümedir.

3) μ U'nun L-bulanık alt kümesi ise $\tilde{F}_\mu:L\to L^U$, $\tilde{F}_\mu(\alpha)=\chi_{\mu_\alpha}$ ile tanımlanan $(\tilde{F}_\mu, L)$ ikilisi U üzerinde L-bulanık esnek kümedir.

4) (F,A) U üzerinde L-bulanık esnek küme ve $\forall x, y\in A$ ve $\forall\alpha, \beta\in L$ için

$F_x:L\to P(R)$, $F_x(\beta)=F(x)_\beta$ ve $F_\alpha:A\to P(R)$, $F_\alpha(y)=F(y)_\alpha$

ile tanımlanan (F_x,L) ve (F_α,A) ikilileri U üzerinde esnek kümelerdir.

5) $\varphi:U_1\to U_2$ bir fonksiyon ve (F,A), (G,B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde L-bulanık esnek kümeler olmak üzere;

$\varphi(F):A\to L^{U_2}$, $\varphi(F)(x)=\varphi(F(x))$

$\varphi^{-1}(G):B\to L^{U_1}$, $\varphi^{-1}(G)(y)=\varphi^{-1}(G(y))$

ile tanımlanan $(\varphi(F),A)$ ve $(\varphi^{-1}(G),B)$ ikilileri sırasıyla U_2 ve U_1 üzerinde L-bulanık esnek kümelerdir.

Önerme 2.1. $\varphi:U_1\to U_2$ bir fonksiyon, (F_1,A_1), (F_2,A_2) U_1 üzerinde ve (G_1,B_1), (G_2,B_2) U_2 üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler olsun. Bu takdirde;

i) $(F_1,A_1)\subseteq(F_2,A_2)$ ise $(\varphi(F_1),A_1)\subseteq(\varphi(F_2),A_2)$,

ii) $(F_1,A_1)\sqsubseteq(F_2,A_2)$ ise $(\varphi(F_1),A_1)\sqsubseteq(\varphi(F_2),A_2)$,

iii) $(G_1,B_1) \subseteq (G_2,B_2)$ ise $(\varphi^{-1}(G_1),B_1) \subseteq (\varphi^{-1}(G_2),B_2)$,

iv) $(G_1,B_1) \sqsubseteq (G_2,B_2)$ ise $(\varphi^{-1}(G_1),B_1) \sqsubseteq (\varphi^{-1}(G_2),B_2)$.

İspat:

i) Açıkça $A_1 \subseteq A_2$ dir. Diğer yandan $\forall x \in A_1$ için $F_1(x) \le F_2(x)$ olduğundan $\varphi(F_1)(x) = \varphi(F_1(x)) \le \varphi(F_2(x)) = \varphi(F_2)(x)$ şeklindedir. Buradan $(\varphi(F_1),A_1) \subseteq (\varphi(F_2),A_2)$ dir.

ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

iii) Açıkça $B_1 \subseteq B_2$ dir. Diğer yandan $\forall y \in B_1$ için $G_1(y) \le G_2(y)$ olduğundan $\varphi^{-1}(G_1)(y) = \varphi^{-1}(G_1(y)) \le \varphi^{-1}(G_2(y)) = \varphi^{-1}(G_2)(y)$ şeklindedir. Buradan $(\varphi^{-1}(G_1),B_1) \subseteq (\varphi^{-1}(G_2),B_2)$ dir.

iv) iii)'ye benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.3. $\{(F_i,A_i) \mid i \in \Lambda\}$ U üzerinde L-bulanık esnek kümelerin bir ailesi olsun.

i) $A = \bigcup_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $F(a) = \bigvee_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesine (F_i,A_i) L-bulanık esnek kümeler ailesinin birleşimi denir. Bu durum $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) $A = \bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için $F(a) = \bigwedge_{i\in\Lambda} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesine (F_i,A_i) L-bulanık esnek kümeler ailesinin arakesiti denir. Bu durum $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iii) $A = \bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için $F(a) = \bigvee_{i\in\Lambda} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesine (F_i,A_i) L-bulanık esnek kümeler ailesinin daraltılmış birleşimi denir. Bu durum $\bigsqcup_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iv) $A = \bigcup_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall a \in A$ için, $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $F(a) = \bigwedge_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesine (F_i,A_i) L-bulanık esnek kümeler ailesinin genişletilmiş arakesiti denir. Bu durum $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

v) $A = \prod_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall (a_i) \in A$ için $F(a_i) = \bigvee_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesine (F_i, A_i) L-bulanık esnek kümeler ailesinin $\vee$-birleşimi denir. Bu durum $\bigvee_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

vi) $A = \prod_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall(a_i) \in A$ için $F(a_i) = \bigwedge_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesine (F_i, A_i) L-bulanık esnek kümeler ailesinin $\wedge$-arakesiti denir. Bu durum $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

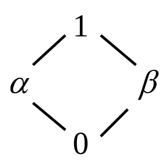
Tanım 2.4. $\{(F_i, A_i) \in Es(U_i) \mid i \in \Lambda\}$ L-bulanık esnek kümelerin bir ailesi olmak üzere, $A = \prod_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\forall(a_i) \in A$ için $F(a_i) = \prod_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesine (F_i, A_i) L-bulanık esnek kümeler ailesinin kartezyen çarpımı denir. Bu durum $\tilde{\times}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ notasyonu ile gösterilir.

(F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümeleri için yukarıda verilen tanımlar sırasıyla aşağıdaki şekilde gösterilecektir:

- (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin birleşimi: $(F, A) \bigcup (G, B)$
- (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin arakesiti: $(F,A) \bigcap (G,B)$
- (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin daraltılmış birleşimi: $(F,A) \sqcup (G,B)$
- (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin genişletilmiş arakesiti: $(F, A) \sqcap (G, B)$
- (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin $\vee$-birleşimi: $(F, A) \vee (G, B)$
- (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin $\wedge$-arakesiti: $(F,A) \wedge (G,B)$
- (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı: $(F,A) \tilde{\times} (G,B)$.

Örnek 2.3.

1) L={$0,\alpha,\beta,1$} kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2.3. (L={$0, \alpha, \beta$,1}, $\leq$) kafesi

$F:\mathbb{Z}\to L^{\mathbb{Z}}$, $G:\mathbb{Z}\to L^{\mathbb{Z}}$ dönüşümleri

$$F(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 2\mid n-x\\ \beta, & 2\nmid n-x\end{cases} \quad \text{ve} \quad G(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 4\mid n-x\\ \beta, & 4\mid n-x+1\\ 1, & 4\mid n-x+2\\ 0, & 4\mid n-x+3\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde;

$(F,\mathbb{Z})$ ve $(G,\mathbb{Z})$ L-bulanık esnek kümelerinin birleşimi ve arakesiti sırasıyla,

$(F,\mathbb{Z})\bigcup(G,\mathbb{Z})=(H,\mathbb{Z})$ olmak üzere

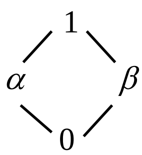
$$H(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 4\mid n-x\\ \beta, & 4\mid n-x+1 \text{ ve } 4\mid n-x+3\\ 1, & 4\mid n-x+2\end{cases}$$

$(F,\mathbb{Z})\bigcap(G,\mathbb{Z})=(H,\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$H(n)(x)=\begin{cases}\alpha, & 4\mid n-x \text{ ve } 4\mid n-x+2\\ \beta, & 4\mid n-x+1\\ 0, & 4\mid n-x+3\end{cases}$$

şeklindedir.

2) $L=\{0,\alpha,\beta,1\}$ kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2.4. $(L=\{0,\alpha,\beta,1\},\leq)$ kafesi

$F:\mathbb{N}\to L^{\mathbb{Z}}$, $G:\mathbb{Z}\to L^{\mathbb{Z}}$ dönüşümleri

$$F(a)(x)=\begin{cases}1, & x=a\\ \beta, & x\neq a\end{cases} \quad \text{ve} \quad G(b)(x)=\begin{cases}\alpha, & x=b\\ 0, & x\neq b\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde;

$(F,\mathbb{N})$ ve $(G,\mathbb{Z})$ L-bulanık esnek kümelerinin arakesiti $(F,\mathbb{N})\bigcap(G,\mathbb{Z})=(H,\mathbb{N})$ olmak üzere

$$\mathrm{H(a)}(x)=\begin{cases}\alpha, & x=\mathrm{a}\\ 0, & x\neq \mathrm{a}\end{cases}$$

şeklindedir.

3) L=[0,1] olmak üzere $\mathrm{F}:\mathbb{Z}\to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$, $\mathrm{G}:\mathbb{Z}\to \mathrm{L}^{\mathbb{Z}}$ dönüşümleri

$$\mathrm{F}(x)(a)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\mid x-a\\ \frac{1}{2}, & 2\nmid x-a\end{cases} \qquad \mathrm{G}(y)(b)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 4\mid y-b\\ \frac{1}{2}, & 4\mid y-b+1\\ 1, & 4\mid y-b+2\\ 0, & 4\mid y-b+3\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$ ve $(\mathrm{G},\mathbb{Z})$ L-bulanık esnek kümelerinin kartezyen çarpımı $(\mathrm{H},\mathbb{Z}\times\mathbb{Z})=(\mathrm{F},\mathbb{Z})\,\tilde{\times}\,(\mathrm{G},\mathbb{Z})$ olmak üzere

$$\mathrm{H}(x,y)(a,b)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\mid x-a \text{ ve } 4\mid y-b\ (4\mid y-b+1,\ 4\mid y-b+2) \text{ veya } 2\nmid x-a \text{ ve } 4\mid y-b\\ \frac{1}{2}, & 2\nmid x-a \text{ ve } 4\mid y-b+1\ (4\mid y-b+2)\\ 0, & 2\mid x-a \text{ ve } 4\mid y-b+3 \text{ veya } 2\nmid x-a \text{ ve } 4\mid y-b+3\end{cases}$$

şeklindedir.

L-bulanık esnek kümelerin aileleri ile ilgili aşağıdaki özellikler geçerlidir.

Önerme 2.2. L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes, $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}\subseteq \mathrm{Es}(\mathrm{U})$ ve $(\mathrm{F,B})\in \mathrm{Es}(\mathrm{U})$ olsun. Bu takdirde;

i) $(\mathrm{F,B})\cap\left(\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\tilde{\cap}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$,

ii) $(\mathrm{F,B})\cup\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\tilde{\bigcap}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\tilde{\cup}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$,

iii) $(\mathrm{F,B})\tilde{\sqcap}\left(\tilde{\bigsqcup}_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\tilde{\bigsqcup}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\tilde{\sqcap}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$,

iv) $(\mathrm{F,B})\sqcup\left(\tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\sqcup(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$.

İspat:

i) $(\mathrm{F,B})\cap\left(\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\left(\mathrm{K},\mathrm{B}\cap(\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)\right)$ ve

$\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\tilde{\cap}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\left(\mathrm{H},\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{B}\cap\mathrm{A}_i)\right)$ olsun.

$\Lambda(x)=\{i \mid x\in \mathrm{A}_i\}$, $\Lambda^{|}(x)=\{i\mid x\in \mathrm{B}\cap \mathrm{A}_i\}$ olmak üzere $x\in \mathrm{B}\cap(\bigcup_{i\in\Lambda} \mathrm{A}_i)=\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{B}\cap \mathrm{A}_i)$ ise

$\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)\wedge(\bigvee_{i\in\Lambda(x)}\mathrm{F}_i(x))$

$=\bigvee_{i\in\Lambda(x)}(\mathrm{F}(x)\wedge \mathrm{F}_i(x))$ (L sonsuz $\vee$ -dağılımlı kafes olduğundan)

$=\bigvee_{i\in\Lambda^{|}(x)}(\mathrm{F}(x)\wedge \mathrm{F}_i(x))$ ($\Lambda(x)=\Lambda^{|}(x)$ olduğundan)

$=\mathrm{H}(x)$ dir.

Yani $\mathrm{K}(x)=\mathrm{H}(x)$ olur. Buradan $\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\tilde{\sqcap}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=(\mathrm{F,B})\sqcap\left(\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$ dir.

ii) (F,B) $\cup\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\left(\mathrm{K},\mathrm{B}\cup(\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)\right)$ ve

$\tilde{\bigcap}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\tilde{\cup}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\left(\mathrm{H},\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{B}\cup \mathrm{A}_i)\right)$ olsun.

$x\in \mathrm{B}\cup(\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)=\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{B}\cup \mathrm{A}_i)$ olmak üzere

• Eğer $x\in \mathrm{B}\backslash\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ ise $\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)$ dir. Ayrıca $x\notin\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olduğundan $\exists i\in\Lambda$ $x\notin \mathrm{A}_i$ ve $\Lambda^{|}=\{j\mid x\in \mathrm{A}_j\}$ olmak üzere $\mathrm{H}(x)=[\bigwedge_{i\in\Lambda^{|}}(\mathrm{F}(x)\vee \mathrm{F}_i(x)]\wedge \mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x)$ dir. Yani $\mathrm{K}(x)=\mathrm{H}(x)$ olur.

• Eğer $x\in\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i\backslash \mathrm{B}$ ise $\mathrm{K}(x)=\bigwedge_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(x)$ dir. Ayrıca $\forall i\in\Lambda$ için $x\in \mathrm{A}_i\backslash \mathrm{B}$ olduğundan $\mathrm{H}(x)=\bigwedge_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(x)$ dir. Yani $\mathrm{K}(x)=\mathrm{H}(x)$ olur.

• Eğer $x\in \mathrm{B}\cap(\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ ise $\mathrm{K}(x)=\mathrm{F}(x)\wedge(\bigwedge_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(x))=\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}(x)\wedge \mathrm{F}_i(x))=\mathrm{H}(x)$ olur.

Buradan (F,B) $\cup\left(\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)=\tilde{\bigcap}_{i\in\Lambda}\left((\mathrm{F,B})\tilde{\cup}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\right)$ dir.

iii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

iv) ii)'ye benzer şekilde yapılır.

Önerme 2.3. (F,A) U üzerinde L-bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $(\tilde{\Phi}_{\mathrm{A},\varnothing},\mathrm{A})\subseteq(\mathrm{F,A})$, $(\mathrm{F,A})\subseteq(\tilde{\Phi}_{\mathrm{A,U}},\mathrm{A})$.

ii) $(\mathrm{F,A})\sqsubseteq(\tilde{\Phi}_{\mathrm{A},\varnothing},\mathrm{A})$, $(\tilde{\Phi}_{\mathrm{A,U}},\mathrm{A})\sqsubseteq(\mathrm{F,A})$.

İspat:

i) Açıkça $\mathrm{A}\subseteq \mathrm{A}$ dır. Ayrıca $\forall x\in \mathrm{A}$ için $\tilde{\Phi}_{\mathrm{A},\varnothing}(x)=\chi_{\varnothing}(x)=0_{\mathrm{U}}(0)\le \mathrm{F}(x)$ ve

$\mathrm{F}(x)\le\chi_{\mathrm{U}}(x)=\tilde{\Phi}_{\mathrm{A,U}}(x)$ dir. Buradan $(\mathrm{F,A})\subseteq(\tilde{\Phi}_{\mathrm{A,U}},\mathrm{A})$ ve $(\mathrm{F,A})\subseteq(\tilde{\Phi}_{\mathrm{A,U}},\mathrm{A})$ olur.

ii) i)’ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.1. L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes ve $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ U üzerinde L-bulanık esnek kümelerin bir ailesi olsun. Bu takdirde aşağıdaki özelikler sağlanır.

i) $(Es(U), \subseteq)$ tam kafestir ve

$Sup\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$, $Inf\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\bigcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$,

ii) $(Es(U), \sqsubseteq)$ tam kafestir ve

$Sup\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$, $Inf\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\sqcup}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$,

iii) $(Es(U), \subseteq)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir,

iv) $(Es(U), \sqsubseteq)$ sonsuz $\vee$-dağılımlı kafestir,

v) $Es_A(U)$ kümesinde “$\subseteq$” ve “$\sqsubseteq$” birbirlerinin ters bağıntılarıdır,

vi) $Es_A(U)$ kümesinde $\tilde{\sqcup}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = \tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ ve $\tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = \tilde{\bigcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$.

İspat:

i) Açık olarak $j \in \Lambda$ için $(F_j, A_j) \subseteq \tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ dir. Diğer yandan, (H,A) $\in Es(U)$ ve $\forall i \in \Lambda$ için $(F_i, A_i) \subseteq (H, A)$ ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in A$ için $A_i \subseteq A$ ve $F_i(x) \leq H(x)$ dir. Böylece $\bigcup_{i\in\Lambda} A_i \subseteq A$ ve $x \in \bigcup_{i\in\Lambda} A_i$ için $\bigvee_{i\in\Lambda(x)} F_i(x) \leq H(x)$ yani $\tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) \subseteq (H, A)$ olur. Buradan $Sup\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\bigcup}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ dir.

Açık olarak $j \in \Lambda$ için $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) \subseteq (F_j, A_j)$ dir. Diğer yandan, (H,A) $\in Es(U)$ ve $\forall i \in \Lambda$ için $(H, A) \subseteq (F_i, A_i)$ ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in A$ için $A \subseteq A_i$ ve $H(x) \leq F_i(x)$ dir. Böylece $A \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ ve $x \in A$ için $H(x) \leq \bigwedge_{i\in\Lambda} F_i(x)$ yani $(H,A) \subseteq \bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ olur. Buradan $Inf\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\bigcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ dir.

ii) Açık olarak $j \in \Lambda$ için $(F_j, A_j) \sqsubseteq \tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ dir. Diğer yandan, (H,A) $\in Es(U)$ ve $\forall i \in \Lambda$ için $(F_i, A_i) \sqsubseteq (H, A)$ ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in A$ için $A_i \subseteq A$ ve $H(x) \leq F_i(x)$ dir. Böylece $\bigcap_{i\in\Lambda} A_i \subseteq A$ ve $x \in \bigcap_{i\in\Lambda} A_i$ için $\bigwedge_{i\in\Lambda(x)} F_i(x) \leq H(x)$ yani $\tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) \sqsubseteq (H, A)$ olur. Buradan $Sup\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ dir.

Açık olarak $j \in \Lambda$ için $\underset{i\in\Lambda}{\tilde{\sqcap}}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \subseteq (\mathrm{F}_j, \mathrm{A}_j)$ dir. Diğer yandan, (H,A) $\in$ Es(U) ve $\forall i \in \Lambda$ için $(\mathrm{H},\mathrm{A}) \sqsubseteq (\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ ise $\forall i \in \Lambda$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{A}_i$ ve $\mathrm{F}_i(x) \leq \mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\mathrm{A} \subseteq \underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ ve $x \in \mathrm{A}$ için $\underset{i\in\Lambda}{\wedge}\mathrm{F}_i(x) \leq \mathrm{H}(x)$ yani $(\mathrm{H},\mathrm{A}) \subseteq \underset{i\in\Lambda}{\tilde{\sqcap}}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ olur. Buradan $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\} = \underset{i\in\Lambda}{\tilde{\sqcap}}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ dir.

iii) i) ve Önerme 2.2 i) - ii) ile ispatı açıktır.

iv) ii) ve Önerme 2.2 iii) - iv) ile ispatı açıktır.

v) Tanım 2.2 ile ispatı açıktır.

vi) Tanım 2.3 ile ispatı açıktır.

Tanım 2.5. (U,+) grup ve $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ U üzerinde L-bulanık esnek kümelerin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde,

i) $\mathrm{A} = \underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ ve $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$ için $\Lambda(\mathrm{a}) = \{ i \in \Lambda \mid \mathrm{a} \in \mathrm{A}_i \}$ olmak üzere $\mathrm{H}(\mathrm{a}) = \underset{i\in\Lambda(\mathrm{a})}{\oplus}\mathrm{F}_i(\mathrm{a})$ şeklinde tanımlanan (H,A) L-bulanık esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin toplamı denir ve bu durum $\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

ii) $\mathrm{A} = \underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{H}(\mathrm{a}) = \underset{i\in\Lambda}{\oplus}\mathrm{F}_i(\mathrm{a})$ şeklinde tanımlanan (H,A) L-bulanık esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin daraltılmış toplamı denir ve bu durum $\overset{\cap}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

iii) $\mathrm{A} = \prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\forall (\mathrm{a}_i) \in \prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{H}((\mathrm{a}_i)) = \underset{i\in\Lambda}{\oplus}\mathrm{F}_i(\mathrm{a}_i)$ şeklinde tanımlanan (H,A) L-bulanık esnek kümesine $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ ailesinin kartezyen toplamı denir ve bu durum $\overset{\tilde{\times}}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.6. "$*$" L^{U} üzerinde bir ikili işlem, (F,A) ve (G,B) U üzerinde L-bulanık esnek kümeler olsun. Bu takdirde;

i) $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ ve $\forall c \in \mathrm{C}$ için

$$\mathrm{H}(c) = \begin{cases} \mathrm{F}(c), & c \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} \\ \mathrm{G}(c), & c \in \mathrm{B} \setminus \mathrm{A} \\ \mathrm{F}(c) * \mathrm{G}(c), & c \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin "$*$" işlemi denir ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cup}{*}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

ii) C=A$\cap$B ve $\forall c\in \mathrm{C}$ için $\mathrm{H}(c)=\mathrm{F}(c)*\mathrm{G}(c)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin daraltılmış "$*$" işlemi denir ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cap}{*}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

iii) C=AxB ve $\forall\left(a,b\right)\in\mathrm{C}$ için $\mathrm{H}\left(a,b\right)=\mathrm{F}(a)*\mathrm{G}(b)$ şeklinde tanımlanan (H,C) L-bulanık esnek kümesine (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek kümelerinin kartezyen "$*$" işlemi denir ve $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\tilde{\times}}{*}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ notasyonu ile gösterilir.

Tanım 2.7. (F,A) ve (G,B) U üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler olsun. Bu takdirde (F,A), (G,B)'ye denktir denir. $\Leftrightarrow$ $\exists\psi:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ bire-bir ve örten dönüşümü, $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(\psi(x))$ dir. Bu durum (F,A)$\approx$(G,B) notasyonu ile gösterilir.

Önerme 2.4. "$\approx$" bağıntısı U üzerindeki L-bulanık esnek kümeler için bir denklik bağıntısıdır.

İspat:

(i) "$\approx$" bağıntısının $\mathrm{Es}(\mathrm{U})$ üzerinde yansıyan olduğu açıktır.

(ii) (F,A)$\approx$(G,B) olsun. Bu takdirde $\exists\psi:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$ bire-bir ve örten dönüşümü, $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(\psi(x))$ dir. Ayrıca $\psi^{-1}:\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ dönüşümü de bire-bir ve örten olduğundan $\forall y\in\mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(\psi^{-1}(y))=\mathrm{G}(\psi(\psi^{-1}(y)))=\mathrm{G}(y)$ dir. Buradan (G,B)$\approx$(F,A) denkliği elde edilir.

(iii) (F,A)$\approx$(G,B)$\approx$(H,C) olsun. Bu takdirde $\exists\psi:\mathrm{A}\to\mathrm{B}$, $\exists\gamma:\mathrm{B}\to\mathrm{C}$ bire-bir ve örten dönüşümleri öyle ki $\forall x\in\mathrm{A}$, $\forall y\in\mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(\psi(x))$ ve $\mathrm{G}(y)=\mathrm{H}(\gamma(y))$ dir. Buradan $\mathrm{F}(x)=\mathrm{G}(\psi(x))=\mathrm{H}(\gamma(\psi(x)))=\mathrm{H}(\gamma\circ\psi(x))$ dir. Ayrıca $\gamma\circ\psi:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğundan (F,A)$\approx$(H,C) denkliği elde edilir.

Dolayısıyla "$\approx$" bağıntısı L-bulanık esnek kümeler üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.5. L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir kafes, $(\mathrm{U},+)$ bir yarı grup ve (F,A), (G,B), (H,C) U üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır.

i) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\tilde{\times}}{+}[(\mathrm{G},\mathrm{B})\overset{\tilde{\times}}{+}(\mathrm{H},\mathrm{C})]\approx[(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\tilde{\times}}{+}(\mathrm{G},\mathrm{B})]\overset{\tilde{\times}}{+}(\mathrm{H},\mathrm{C})$

ii) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cup}{+}[(\mathrm{G},\mathrm{B})\overset{\cup}{+}(\mathrm{H},\mathrm{C})]=[(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cup}{+}(\mathrm{G},\mathrm{B})]\overset{\cup}{+}(\mathrm{H},\mathrm{C})$

iii) $(F,A) \overset{\cap}{+} [(G,B) \overset{\cap}{+} (H,C)] = [(F,A) \overset{\cap}{+} (G,B)] \overset{\cap}{+} (H,C)$

iv) $(F,A) \subseteq (G,B) \Rightarrow (F,A) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C) \subseteq (G,B) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C)$

v) $(F,A) \subseteq (G,B) \Rightarrow (F,A) \overset{\cap}{+} (H,C) \subseteq (G,B) \overset{\cap}{+} (H,C)$

İspat:

i) $(F,A) \overset{\tilde{\times}}{+} [(G,B) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C)] = (P, A \times (B \times C))$ ve

$[(F,A) \overset{\tilde{\times}}{+} (G,B)] \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C) = (Q, (A \times B) \times C)$ olsun.

Açık olarak $f : A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$, $f(a,(b,c)) = ((a,b),c)$ bire-bir ve örten bir dönüşümdür. Ayrıca $P(a,(b,c)) = F(a) + [G(b) + H(c)]$ olmak üzere $\forall x \in U$ için

$$[F(a) + (G(b) + H(c))](x) = \bigvee_{x=y+z} \{F(a)(y) \wedge (G(b) + H(c))(z) \mid y, z \in U\}$$

$$= \bigvee_{x=y+k+t} \{F(a)(y) \wedge G(b)(k) \wedge H(c)(t) \mid y, k, t \in U\}$$

$$= \bigvee_{x=m+t} \{(F(a) + G(b))(m) \wedge H(c)(t) \mid m, t \in U\}$$

$$= [(F(a) + G(b)) + H(c)](x)$$

eşitliği elde edilir. Yani $P(a,(b,c)) = Q(f(a,(b,c))$ ve dolayısıyla $(P,D) \approx (Q,E)$ olur. Buradan $(F,A) \overset{\tilde{\times}}{+} [(G,B) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C)] \approx [(F,A) \overset{\tilde{\times}}{+} (G,B)] \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C)$ dir.

ii) $(F,A) \overset{\cup}{+} [(G,B) \overset{\cup}{+} (H,C)] = (P, A \cup (B \cup C))$ ve

$[(F,A) \overset{\cup}{+} (G,B)] \overset{\cup}{+} (H,C) = (Q, (A \cup B) \cup C)$ olsun.

$x \in A \cup (B \cup C)$ olmak üzere;

• Eğer $x \in A \backslash (B \cup C)$ ise $x \in (A \backslash B) \backslash C$ dir. Buradan $P(x) = F(x) = Q(x)$ olur.

•• Eğer $x \in (B \cup C) \backslash A$ ise $x \in B \backslash A$ veya $x \in C \backslash A$ dır. Buradan $P(x) = G(x) + H(x)$ $= Q(x)$ olur.

••• Eğer $A \cap (B \cup C)$ ise $x \in A$ ve $x \in B \cup C$ dir.

I) Eğer $x \in B \backslash C$ ise $P(x) = F(x) + G(x) = Q(x)$

II) Eğer $x \in C \backslash B$ ise $P(x) = F(x) + H(x) = Q(x)$

III) Eğer $x \in B \cap C$ ise $P(x) = F(x) + (G(x) + H(x)) = (F(x) + G(x)) + H(x) = Q(x)$

Yani $x \in A \cup (B \cup C)$ için $P(x) = Q(x)$ olur.

Buradan $(F,A) \overset{\cup}{+} [(G,B) \overset{\cup}{+} (H,C)] = [(F,A) \overset{\cup}{+} (G,B)] \overset{\cup}{+} (H,C)$ dir.

iii) $(F,A) \overset{\cap}{+} [(G,B) \overset{\cap}{+} (H,C)] = (P, A \cap (B \cap C))$ ve

$[(F,A) \overset{\cap}{+} (G,B)] \overset{\cap}{+} (H,C) = (Q, (A \cap B) \cap C)$ olsun.

$x \in A \cap (B \cap C)$ olmak üzere;

$P(x) = F(x) + [G(x) + H(x)]$ dir ve $y \in U$ için

$$P(x)(y) = (F(x) + [G(x) + H(x)])(y) = \bigvee_{y=a \bullet b} \{F(x)(a) \wedge (G(x) + H(x))(b) \mid a, b \in U\}$$

$$= \bigvee_{y=a \bullet k \bullet t} \{F(x)(a) \wedge G(x)(k) \wedge H(x)(t) \mid a, k, t \in U\}$$

$$= \bigvee_{y=m \bullet t} \{(F(x) + G(x))(m) \wedge H(x)(t) \mid m, t \in U\}$$

$$= [(F(x) + G(x)) + H(x)](y) = Q(x)(y)$$

şeklindedir. Yani $x \in A \cap (B \cap C)$ için $P(x) = Q(x)$ olur.

Buradan $(F,A) \overset{\cap}{+} [(G,B) \overset{\cap}{+} (H,C)] = [(F,A) \overset{\cap}{+} (G,B)] \overset{\cap}{+} (H,C)$ dir.

iv) $(F,A) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C) = (K_1, A \times C)$ ve $(G,B) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C) = (K_2, B \times C)$ olsun.

Açıkça $A \subseteq B$ olduğundan $A \times C \subseteq B \times C$ dir. Ayrıca $(x,z) \in A \times C$ olmak üzere $K_1(x,z) = F(x) + H(z) \leq G(x) + H(z) = K_2(x,z)$ dir. Buradan $(F,A) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C) \subseteq (G,B) \overset{\tilde{\times}}{+} (H,C)$ dir.

v) iv)'e benzer şekilde yapılır.

Tanım 2.8. (F,A) ve (G,B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler olsun. $\phi : U_1 \to U_2$ ve $\psi : A \to B$ iki fonksiyon olmak üzere (ϕ, ψ) çiftine (F,A)'dan (G,B)'ye L-bulanık esnek fonksiyon denir. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$ için $\phi(F(x)) = G(\psi(x))$.

Bu durum $(\phi, \psi) : (F,A) \to (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Bu tanımda eğer ϕ ve ψ bire-bir (örten) ise (ϕ, ψ)'ye bire-bir (örten) L-bulanık esnek fonksiyon denir. (F,A) ve (G,B) arasındaki bire-bir ve örten L-bulanık esnek fonksiyonlara L-bulanık esnek tam eşleme denir. Bu durum $(F,A) \simeq_L (G,B)$ notasyonu ile gösterilir. Açık olarak "$\simeq_L$" bağıntısı L-bulanık esnek kümeler için bir denklik bağıntısıdır.

Önerme 2.6. (F,A) ve (G,A) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde L-bulanık esnek kümeler ve $\phi : U_1 \to U_2$ olsun. Bu takdirde $(\phi, I_A) : (F,A) \to (G,A)$ L-bulanık esnek fonksiyondur. $\Leftrightarrow$ (ϕ(F),A) = (G,A) dır.

İspat: Tanım 2.8 kullanılarak yapılır.

Önerme 2.7. (F,A), (G,B) ve (H,C) sırasıyla U_1, U_2 ve U_3 üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler, (ϕ,ψ):(F,A)$\to$(G,B) ve (φ,γ):(G,B)$\to$(H,C) olsun. Bu takdirde;

i) $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi)$:(F,A)$\to$(H,C),

ii) (ϕ,ψ):(F,A)$\to$(G,B) L-bulanık esnek tam eşleme ise (ϕ^{-1},ψ^{-1}): (G,B)$\to$(F,A) L-bulanık esnek tam eşlemedir.

İspat:

i) Açıkça $\forall x\in \mathrm{A}$ ve $\forall y\in \mathrm{B}$ için $\phi(\mathrm{F}(x))=\mathrm{G}(\psi(x))$ ve $\varphi(\mathrm{G}(y))=\mathrm{H}(\gamma(y))$ dir. Ayrıca $\varphi\circ\phi:\mathrm{U}_1\to\mathrm{U}_3$ ve $\gamma\circ\psi:\mathrm{A}\to\mathrm{C}$ olmak üzere $\forall x\in\mathrm{A}$ için $\varphi\circ\phi(\mathrm{F}(x))=$ $\varphi(\phi(\mathrm{F}(x)))=\mathrm{H}(\gamma(\psi(x)))=\mathrm{H}(\gamma\circ\psi(x))$ dir. Buradan $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi)$:(F,A)$\to$(H,C) olur.

ii) Açıkça $\forall x\in\mathrm{A}$ için ϕ (F(x)) =G($\psi(x)$) dir. Ayrıca $\phi^{-1}:\mathrm{U}_2\to\mathrm{U}_1$ ve $\psi^{-1}:\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ olmak üzere $\forall x\in$B için ϕ^{-1} (G(x))=ϕ^{-1}(ϕ(F($\psi^{-1}(x)$))=F($\psi^{-1}(x)$) dir. Yani (ϕ^{-1},ψ^{-1}): (G,B)$\to$(F,A) dır. Üstelik ϕ^{-1} ve ψ^{-1} de bire-bir ve örten dönüşümlerdir. Buradan (ϕ^{-1},ψ^{-1}): (G,B) $\to$ (F,A) L-bulanık esnek tam eşlemedir.

Tanım 2.9. (F,A) ve (G,B) sırasıyla U_1 ve U_2 üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler ve (ϕ,ψ):(F,A)$\to$(G,B) olsun. Bu takdirde,

i) $\forall y\in$B için $\phi(\mathrm{F})(y)=\begin{cases}\bigvee_{\psi(x)=y}\phi(\mathrm{F}(x)), & y\in\mathrm{Im}\psi\\ 0_{\mathrm{U}_2} \quad , & y\notin\mathrm{Im}\psi\end{cases}$

şeklinde tanımlanan L-bulanık esnek kümesine (F,A)'nın (ϕ,ψ) fonksiyonu altındaki görüntüsü denir ve bu durum (ϕ,ψ)(F,A)= (ϕ (F),B) şeklinde gösterilir.

ii) $\forall x\in$A için ϕ^{-1}(G)(x)= ϕ^{-1}(G($\psi(x)$)) şeklinde tanımlanan L-bulanık esnek kümesine (G,B)'nin (ϕ,ψ) fonksiyonu altındaki ters-görüntüsü denir ve bu durum $(\phi,\psi)^{-1}$(G,B)= (ϕ^{-1}(G), A) şeklinde gösterilir.

2.2. L-Bulanık Esnek Halkalar

Esnek halka kavramı ilk olarak Acar vd. [1] tarafından ortaya konuldu ve bazı temel özellikleri inceledi. Daha sonra Çelik vd. [14]'de esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler vererek esnek halkalar için yeni özellikler ve sonuçlar elde ettiler. İnan vd. [22]'de esnek halkalar üzerinde yapılmış çalışmaları da göz önüne alarak esnek halkaları bulanık alt kümelerle ilişkilendirdiler. Bulanık esnek halka kavramını vererek bunlara ait bazı temel özellikleri incelediler. Daha sonra Çelik vd. [15]'de bulanık esnek halkaların cebirsel yapısını detaylı bir şekilde inceleyerek bulanık esnek halkalar üzerinde yeni özellikleri ve sonuçları ortaya koydular.

Bu bölümde L-bulanık esnek kümeler yardımıyla yeni bir kavram olarak L-bulanık esnek halka, L-bulanık esnek ideal, L-bulanık esnek alt halka, L-bulanık esnek halka homomorfisi tanımları verilerek L-bulanık esnek halkaların yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir.

Bu bölümde aksi söylenmedikçe $\varnothing \neq A \subseteq E$, R birim elemanlı değişmeli bir halka ve L bir tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 2.10. (F,A) R halkası üzerinde bir L-bulanık esnek küme olmak üzere $\forall x \in A$ için $F(x)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) ise (F,A)'ya R halkası üzerinde bir L-bulanık esnek halka (ideal) denir.

Eğer $L=[0,1]$ ise (F,A)'ya R halkası üzerinde bulanık esnek halka (ideal) denir.

R üzerindeki bütün L-bulanık esnek halkalar ve idealler için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

- Es a(R)={ (F,A)| $A \subseteq E$, (F,A) R üzerinde L-bulanık esnek halka}
- Es i(R)={ (F,A)| $A \subseteq E$, (F,A) R üzerinde L-bulanık esnek ideal}
- Es a_A(R)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde L-bulanık esnek halka}
- Es i_A(R)={ (F,A)| (F,A) R üzerinde L-bulanık esnek ideal}

(F,A) ve (G,B) R halkası üzerinde L-bulanık esnek halkalar ve $(F,A) \subseteq (G,B)$ ise (F,A)'ya (G,B)'nin L-bulanık esnek alt halkası denir. Bu durum $(F,A) \prec (G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 2.6.

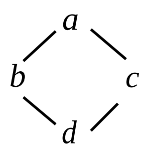
1) R bir halka ve $I \in A(R)$ (I(R)) ise ($\Phi_{A,I}$,A) L-bulanık esnek kümesi R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

2) L={ $0, \alpha, \beta, 1$ } kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı $0 < \alpha < \beta < 1$ olsun.

$F: A \to L^{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2}$, $F(a)(\bar{0},\bar{0}) = 1$, $F(a)(\bar{1},\bar{0}) = F(a)(\bar{0},\bar{1}) = \alpha$, $F(a)(\bar{1},\bar{1}) = \beta$ ile tanımlanan

(F,A) L-bulanık esnek kümesi $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ üzerinde L-bulanık esnek halkadır.

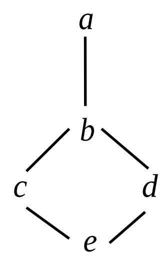
3) R=$\mathbb{Z}_3$ ve L={a,b,c,d} kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2.5. (L={a,b,c,d} , $\leq$) kafesi

F:R $\rightarrow$ L^{R} , $F(r)(x) = \begin{cases} a, & x = r \\ c, & x = r+1,\ r+2 \end{cases}$ ile tanımlanan (F,R) L-bulanık esnek kümesi R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

4) L={a,b,c,d,e} kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2.6. (L={a,b,c,d,e}, $\leq$) kafesi

$F : \mathbb{Z}_6 \rightarrow L^{\mathbb{Z}_6}$, $F(x)(y) = \begin{cases} a, & x-y \in <2> \\ b, & x-y \notin <2> \end{cases}$ ile tanımlanan (F, $\mathbb{Z}_6$) L-bulanık esnek kümesi $\mathbb{Z}_6$ üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

5) L=[0,1] olmak üzere F:$\mathbb{N} \rightarrow$ L^{R} , $F(n)(r) = \begin{cases} 1\ , & n.r = 0_R \\ \alpha, & \text{Aksi takdirde} \end{cases}$

ile tanımlanan (F,$\mathbb{N}$) bulanık esnek kümesi R üzerinde bulanık esnek halka (ideal) dır.

Teorem 2.2. μ R'nin L-bulanık alt kümesi ve (F,A) R üzerinde bir esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) μ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) ise (F_μ, L) R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

ii) (F,A) R üzerinde bir esnek halka (ideal) ise $(\tilde{F}, A)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat:

i) μ R'nin L-bulanık alt halkası olsun. $\alpha \in L$ için $\mu_\alpha = \emptyset$ veya μ_α R'nin bir alt halkasıdır. Teorem 1.17 ile χ_{μ_α} R'nin L-bulanık alt halkasıdır. Buradan (F_μ, L) R üzerinde L-bulanık esnek halkadır. Benzer şekilde μ R'nin L-bulanık ideali ise (F_μ, L) R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

ii) (F,A) R üzerinde bir esnek halka olsun. $\forall a \in A$ için $F(a) = \emptyset$ veya $F(a)$ R'nin bir alt halkasıdır. Teorem 1.17 ile $\chi_{F(a)}$ R'nin bir L-bulanık alt halkasıdır. Buradan $(\tilde{F}, A)$ R üzerinde L-bulanık esnek halkadır. Benzer şekilde (F,A) R üzerinde bir esnek ideal ise $(\tilde{F}, A)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

Teorem 2.3. (F,A) R üzerinde bir L-bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) (F,A) R üzerinde bir L-bulanık esnek halka (ideal) dır. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A$ için (F_x, L) R üzerinde esnek halka (ideal) dır.

ii) (F,A) R üzerinde bir L-bulanık esnek halka (ideal) dır. $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in L$ için (F_α, A) R üzerinde esnek halka (ideal) dır.

İspat:

i) $\forall x \in A$ ve $\forall \beta \in \mathrm{Des}(F_x, L)$ için $F_x(\beta) = F(x)_\beta$ şeklindedir. Teorem 1.16. ile $F(x)_\beta$ R'nin bir alt halkası (ideali) dır. Buradan (F_x, L) R üzerinde esnek halka (ideal) dır.

Tersine $\forall \beta \in \mathrm{Des}(F_x, L)$ için $F_x(\beta) = F(x)_\beta$ R'nin bir alt halkası (ideali) dır. Teorem 1.16 ile $F(x)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan (F,A) R üzerinde bir L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.3 ile L-bulanık esnek halkaların (ideallerin) esnek halkalar (idealler) ile karakterize edilebileceği görülüyor.

Teorem 2.4.

i) $\theta : \mathrm{LI}(\mathrm{R}) \to \mathrm{Esi}_{\mathrm{L}}(\mathrm{R})$, $\theta(\mu)$=(F_μ,L) şeklinde tanımlanan θ bire-bir ve artan bir dönüşümdür.

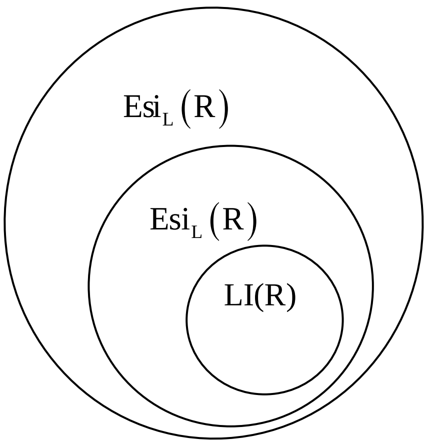
ii) $\gamma : \mathrm{Esi}(\mathrm{R}) \to \mathrm{Esi}(\mathrm{R})$, γ(F,A)=(F,A) şeklinde tanımlanan γ bire-bir ve artan bir dönüşümdür.

İspat:

i) $\mu,\ \nu \in$LI(R) ve $\theta(\mu)=\theta(\nu)$ olsun. $\alpha \in \mathrm{L}$ olmak üzere $F_\mu(\alpha) = F_\nu(\alpha)$ dır. Yani $\chi_{\mu_\alpha} = \chi_{\nu_\alpha}$ dır. Böylece $\forall \alpha \in \mathrm{L}$ için $\mu_\alpha = \nu_\alpha$ sonucu ile $\mu = \nu$ elde edilir. Buradan θ bire-bir bir dönüşümdür. Şimdi $\mu,\ \nu \in$LI(R) ve $\mu \subseteq \nu$ olsun. $\forall \alpha \in \mathrm{L}$ için $\mu_\alpha \subseteq \nu_\alpha$ dır. Buradan $\chi_{\mu_\alpha} \leq \chi_{\nu_\alpha}$, yani $F_\mu(\alpha) \leq F_\nu(\alpha)$ elde edilir. Böylece $\theta(\mu) \leq \theta(\nu)$ olur. Buradan θ artan bir dönüşümdür.

ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 1.35 ile R'nin L-bulanık idealleri L parametreli esnek ideal olarak alınabilir. Teorem 2.4 ii) ile bir esnek ideal L-bulanık esnek ideallerin içine gömülebilir. Açıkça L-bulanık esnek idealler, L-bulanık ideallerden ve esnek ideallerden daha genel bir kavram olmasının yanı sıra, esnek ideallerin sahip olduğu cebirsel özellikleri de taşımaktadır. Bu ilişki aşağıdaki şekilde sembolize edilir.



Şekil 2.7. LI(R), $\mathrm{Esi}_{\mathrm{L}}(\mathrm{R}), \mathrm{Esi}_{\mathrm{L}}(\mathrm{R})$ kümeleri

Teorem 2.5. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ R üzerinde L-bulanık esnek halkaların (ideallerin) bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

ii) $\cap_{i\in\Lambda} A_i \neq \varnothing$ ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

iii) $\forall i, j \in \Lambda$, $i \neq j$, için $A_i \cap A_j = \varnothing$ ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

iv) $\forall a \in \cup_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda(a)\}$ bir zincir ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

v) $\cap_{i\in\Lambda} A_i \neq \varnothing$ olmak üzere $\forall\, a \in \cap_{i\in\Lambda} A_i$ için $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda\}$ bir zincir ise $\sqcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat:

i) $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = (F, \cup_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. $a \in \cup_{i\in\Lambda} A_i$ olmak üzere $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ için Teorem 1.14 i) ile $\bigwedge_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Yani $F(a)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $\sqcap_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

iii) $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = (F, \cup_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. $a \in \cup_{i\in\Lambda} A_i$ ise $\exists i \in \Lambda$ öyle ki $a \in A_i$ dir. $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $F(a) = F_i(a)$ ve $F_i(a)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) olduğundan $F(a)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

iv) $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = (F, \cup_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. $a \in \cup_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $\{F_i(a) \mid i \in \Lambda(a)\}$ bir zincir olduğundan Teorem 1.14 ii) ile $\bigvee_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Yani $F(a)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

v) iv)'e benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.1. (F,A) ve (G,B) R üzerinde L-bulanık esnek halkalar (idealler) olsun. Bu takdirde;

i) $(\mathrm{F},\mathrm{A})\sqcap(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

ii) $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\neq\varnothing$ ise $(\mathrm{F},\mathrm{A})\Cap(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

iii) Eğer $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$ ise $(\mathrm{F},\mathrm{A})\Cup(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

iv) Eğer $\forall x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(x)\leq\mathrm{G}(x)$ veya $\mathrm{G}(x)\leq\mathrm{F}(x)$ ise $(\mathrm{F},\mathrm{A})\Cup(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

Genel olarak L-bulanık esnek halkaların (ideallerin) birleşimi L-bulanık esnek halka (ideal) olmayabilir. Bu durumu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek 2.7. $\mathrm{R}=\mathbb{Z}_6$ ve $\mathrm{L}=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ b \\ \uparrow \\ c \\ \uparrow \\ d \\ \uparrow \\ e \end{array}$$

Şekil 2.8. $(\mathrm{L}=\{a,b,c,d,e\},\leq)$ kafesi

$\mathrm{F}:\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{L}^{\mathbb{Z}_6}$ ve $\mathrm{G}:\mathrm{B}\rightarrow\mathrm{L}^{\mathbb{Z}_6}$ dönüşümleri

$$\mathrm{F}(x)(y)=\begin{cases} a, & x=y \\ d, & x-y\in\{1,2,4,5\} \\ c, & x-y=3 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \mathrm{G}(x)(y)=\begin{cases} b, & x=y \\ e, & x-y\in\{1,3,5\} \\ c, & x-y\in\{2,4\} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Açıkça (F,A) ve (G,B) R üzerinde L-bulanık esnek ideallerdir.

Fakat $(\mathrm{F}(x)\vee\mathrm{G}(x))_{(3-2)}=d\ngeq c=(\mathrm{F}(x)\vee\mathrm{G}(x))_{(3)}\wedge(\mathrm{F}(x)\vee\mathrm{G}(x))_{(2)}$ olduğundan dolayı

$(F,A)\bigcup(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek ideal değildir.

Teorem 2.6. $\{(F_i,A_i) \mid i\in\Lambda\}$ R üzerinde L-bulanık esnek halkaların (ideallerin) bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

ii) $\forall i\in\Lambda$, $a_i\in A_i$ için $\{F_i(a_i) \mid i\in\Lambda\}$ bir zincir ise $\bigvee_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat:

i) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)=(F,\prod_{i\in\Lambda}A_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}A_i$ için $F_i(a_i)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) olduğundan Teorem 1.14. i) ile $\bigwedge_{i\in\Lambda}F_i(a_i)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Yani $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}A_i$ için $F(a_i)$ R'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ R üzerinde L-bulanık esnek halkala (ideal) dır.

ii) Teorem 2.5 iv)'e benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.2. (F,A) ve (G,B) R üzerinde L-bulanık esnek halkalar (idealler) olsun. Bu takdirde;

i) $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır,

ii) Eğer $\forall(x,y)\in A\times B$ için $F(x)\le G(y)$ veya $G(y)\le F(x)$ ise $(F,A)\vee(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

Sonuç 2.3. (F,A) R üzerinde bir L-bulanık esnek halka ve $\{(F_i,A_i) \mid i\in\Lambda\}$, (F,A) 'nın L-bulanık esnek alt halkaları (idealleri)'nın boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}A_i\neq\varnothing$ ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ (F,A) 'nın L-bulanık esnek alt halkası (ideali) dır,

ii) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ $(F,\prod_{i\in\Lambda}A)$'nın L-bulanık esnek alt halkası (ideali) dır,

iii) Her $i,j\in\Lambda$ için $A_i\cap A_j=\varnothing$ ise $\bigvee_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$ $(F,\prod_{i\in\Lambda}A)$'nın L-bulanık esnek alt halkası (ideali) dır.

Teorem 2.7. $\{(F_i,A_i) \mid i\in\Lambda\}\subseteq \mathrm{Esi}(R)$ olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}A_i\neq\varnothing$ ise "$\subseteq$" sıralama bağıntısına göre $\mathrm{Inf}\{(F_i,A_i) \mid i\in\Lambda\}=\bigcap_{i\in\Lambda}(F_i,A_i)$,

ii) "$\sqsubseteq$" sıralama bağıntısına göre $\text{Sup}\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\} = \tilde{\sqcap}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$.

İspat:

i) Teorem 2.1 i) ile ispatı açıktır.

ii) Teorem 2.1 ii) ile ispatı açıktır.

Sonuç 2.4. $(\text{Esi}_A(R), \subseteq)$ tam kafestir.

Teorem 2.8. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ R_i üzerinde L-bulanık esnek halkaların (ideallerin) bir ailesi olsun. Bu takdirde $\tilde{\times}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} R_i$ üzerinde L-bulanık esnek halkala (ideal) dır.

İspat: $\tilde{\times}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = (F, \prod_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. $\forall (a_i) \in \prod_{i\in\Lambda} A_i$ için $F_i(a_i)$ R_i'nin L-bulanık alt halkası (ideali) olduğundan Teorem 1.15 ile $\prod_{i\in\Lambda} F_i(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} R_i$'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Yani $F(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} R_i$'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $\tilde{\times}_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ $\prod_{i\in\Lambda} R_i$ üzerinde L-bulanık esnek halkala (ideal) dır.

Sonuç 2.5. (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde L-bulanık esnek halkalar (idealler) ise $(F,A)\tilde{\times}(G,B)$ $R_1 \times R_2$ üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

Teorem 2.9. (F,A) ve (G,B) R üzerinde L-bulanık esnek idealler olsun. Bu takdirde;

i) $(F, A) \overset{\cup}{\oplus} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

ii) $A \cap B \neq \varnothing$ ise $(F, A) \overset{\cap}{\oplus} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

iii) $(F, A) \overset{\tilde{\times}}{\oplus} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

iv) $(F, A) \overset{\cup}{+} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

v) $A \cap B \neq \varnothing$ ise $(F, A) \overset{\cap}{+} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

vi) $(F, A) \overset{\tilde{\times}}{+} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

vii) $(F, A) \overset{\cup}{\odot} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

viii) $A \cap B \neq \varnothing$ ise $(F, A) \overset{\cap}{\odot} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

ix) $(F, A) \overset{\tilde{\times}}{\odot} (G, B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir,

x) "$\subseteq$" sıralama bağıntısına göre Sup{(F,A), (G,B)} = $(F,A)\overset{\cup}{\oplus}(G,B)$,

xi) $A\cap B\neq\varnothing$ ise "$\sqsubseteq$" sıralama bağıntısına göre Inf{(F,A), (G,B)} = $(F,A)\overset{\cap}{\oplus}(G,B)$.

İspat:

i) $(F,A)\overset{\cup}{\oplus}(G,B)=(H,A\cup B)$ olsun. $c\in A\cup B$ olmak üzere; eğer $c\in A\backslash B$ veya $c\in B\backslash A$ ise H(c) R'nin L-bulanık idealidir. Eğer $c\in A\cap B$ ise Teorem 1.18 ii) ile $F(c)\oplus G(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Yani $H(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Buradan $(F,A)\overset{\cup}{\oplus}(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

ii) $(F,A)\overset{\cap}{\oplus}(G,B)=(H,A\cap B)$ olsun. Açıkça $c\in A\cap B$ ise Teorem 1.18 ii) ile $F(c)\oplus G(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Yani $H(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Buradan $(F,A)\overset{\cap}{\oplus}(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

iii) $(F,A)\overset{\tilde{\times}}{\oplus}(G,B)=(H,A\times B)$ olsun. (F,A) ve (G,B) R üzerinde L-bulanık esnek idealler olduğundan $\forall(a,b)\in A\times B$ için Teorem 1.18 ii) ile F(a)$\oplus$G(b) R'nin L-bulanık idealidir. Yani $H(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Buradan $(F,A)\overset{\tilde{\times}}{\oplus}(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

iv) i)'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

v) ii)'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

vi) iii)'nin ispatına benzer şekilde yapılır.

vii) $(F,A)\overset{\cup}{\odot}(G,B)=(H,A\cup B)$ olsun. $c\in A\cup B$ olmak üzere; eğer $c\in A\backslash B$ veya $c\in B\backslash A$ ise H(c) R'nin L-bulanık idealidir. Eğer $c\in A\cap B$ ise Teorem 1.18 iii) ile $F(c)\odot G(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Yani $H(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Buradan $(F,A)\overset{\cup}{\odot}(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

viii) $(F,A)\overset{\cap}{\odot}(G,B)=(H,A\cap B)$ olsun. Açıkça $c\in A\cap B$ ise Teorem 1.18 iii) ile $F(c)\odot G(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Yani $H(c)$ R'nin L-bulanık idealidir. Buradan $(F,A)\overset{\cap}{\odot}(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

ix) $(F,A)\overset{\tilde{\times}}{\odot}(G,B)=(H,A\times B)$ olsun. (F,A) ve (G,B) R üzerinde L-bulanık esnek idealler olduğundan $\forall(a,b)\in \mathrm{A}\times\mathrm{B}$ için Teorem 1.18 iii) ile F(a) $\odot$ G(b) R'nin L-bulanık idealidir. Yani H(c) R'nin L-bulanık idealidir. Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\tilde{\times}}{\odot}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ R üzerinde L-bulanık esnek idealdir.

x) Açık olarak $(\mathrm{F,A})\subseteq(\mathrm{F,A})\overset{\cup}{\oplus}(\mathrm{G,B})$ ve $(\mathrm{G,B})\subseteq(\mathrm{F,A})\overset{\cup}{\oplus}(\mathrm{G,B})$ dir. Diğer yandan $(\mathrm{H,C})\in \mathrm{Esi}(\mathrm{R})$ için $(\mathrm{F,A})\subseteq(\mathrm{H,C})$ ve $(\mathrm{G,B})\subseteq(\mathrm{H,C})$ ise $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{C}$, $\mathrm{B}\subseteq\mathrm{C}$ ve $\mathrm{F}(x)\leq\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{G}(x)\leq\mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\subseteq\mathrm{C}$ ve $x\in\ \mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(x)\oplus\mathrm{G}(x)\leq\mathrm{H}(x)$ olur. Buradan $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cup}{\oplus}(\mathrm{G},\mathrm{B})\subseteq(\mathrm{H,C})$ dir. Dolayısıyla $\mathrm{Sup}\{(\mathrm{F,A}),(\mathrm{G,B})\} = (\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cup}{\oplus}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ olur.

xi) Açık olarak $(\mathrm{F,A})\overset{\cap}{\oplus}(\mathrm{G,B})\sqsubseteq(\mathrm{F,A})$ ve $(\mathrm{F,A})\overset{\cap}{\oplus}(\mathrm{G,B})\sqsubseteq(\mathrm{G,B})$ dir. Diğer yandan $(\mathrm{H,C})\in\mathrm{Esi}(\mathrm{R})$ için $(\mathrm{H,C})\sqsubseteq(\mathrm{F,A})$ ve $(\mathrm{H,C})\sqsubseteq(\mathrm{G,B})$ ise $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{A}$, $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{B}$ ve $\mathrm{F}(x)\leq\mathrm{H}(x)$, $\mathrm{G}(x)\leq\mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\mathrm{C}\subseteq\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ve $x\in\mathrm{C}$ için $\mathrm{F}(x)\oplus\mathrm{G}(x)\leq\mathrm{H}(x)$ olur. Buradan $(\mathrm{H,C})\sqsubseteq(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cap}{\oplus}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ dir. Dolayısıyla $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F,A}),(\mathrm{G,B})\} = (\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cap}{\oplus}(\mathrm{G},\mathrm{B})$ olur.

Örnek 2.8. R= $\mathbb{Z}$, A={1,2,3}, B={2,3,4} olsun. (F,A) ve (G,B) L-bulanık esnek idealleri R üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlansın:

A	1	2	3
F	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{4\mathbb{Z}}$	$\chi_{3\mathbb{Z}}$

B	2	3	4
G	$\chi_{6\mathbb{Z}}$	$\chi_{5\mathbb{Z}}$	$\chi_{2\mathbb{Z}}$

Eğer $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\tilde{\times}}{\odot}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\mathrm{K}_1,\mathrm{A}\times\mathrm{B})$ $\qquad$ $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\tilde{\times}}{+}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\mathrm{K}_4,\mathrm{A}\times\mathrm{B})$

$(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cup}{\odot}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\mathrm{K}_2,\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$ $\qquad$ $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cup}{+}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\mathrm{K}_5,\mathrm{AB})$

$(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cap}{\odot}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\mathrm{K}_3,\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ $\qquad$ $(\mathrm{F},\mathrm{A})\overset{\cap}{+}(\mathrm{G},\mathrm{B}) = (\mathrm{K}_6,\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$

olarak alınırsa sırasıyla aşağıdaki toplam ve çarpım tablosu elde edilir.

$\mathrm{A}\times\mathrm{B}$	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
K_1	$\chi_{6\mathbb{Z}}$	$\chi_{5\mathbb{Z}}$	$\chi_{2\mathbb{Z}}$	$\chi_{12\mathbb{Z}}$	$\chi_{20\mathbb{Z}}$	$\chi_{4\mathbb{Z}}$	$\chi_{6\mathbb{Z}}$	$\chi_{15\mathbb{Z}}$	$\chi_{6\mathbb{Z}}$

$A \cup B$	1	2	3	4
K_2	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{12\mathbb{Z}}$	$\chi_{15\mathbb{Z}}$	$\chi_{2\mathbb{Z}}$

$A \cap B$	2	3
K_3	$\chi_{12\mathbb{Z}}$	$\chi_{15\mathbb{Z}}$

$A \times B$	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
K_4	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{2\mathbb{Z}}$	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{2\mathbb{Z}}$	$\chi_{3\mathbb{Z}}$	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{\mathbb{Z}}$

$A \cup B$	1	2	3	4
K_5	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{2\mathbb{Z}}$	$\chi_{\mathbb{Z}}$	$\chi_{2\mathbb{Z}}$

$A \cap B$	2	3
K_6	$\chi_{2\mathbb{Z}}$	$\chi_{\mathbb{Z}}$

Açıkça $(F,A)\overset{\cup}{\odot}(G,B)$, $(F,A)\overset{\cap}{\odot}(G,B)$, $(F,A)\overset{\cup}{+}(G,B)$ ve $(F,A)\overset{\cap}{+}(G,B)$ R üzerinde L-bulanık esnek ideallerdir.

Önerme 2.8. (F,A), (G,B) ve (H,C) R üzerinde L-bulanık esnek idealler olsun. Bu takdirde;

i) $(F,A)\overset{\cap}{\odot}(G,B) \subseteq (F,A) \bigcap (G,B)$,

ii) $\forall x \in A \cap B$ için $G(x)(0) = F(x)(0)$ ise $(F,A) \bigcup (G,B) \subseteq (F,A)\overset{\cup}{+}(G,B)$,

iii) $B \cap C \neq \varnothing$ ve $(F,A) \subseteq (G,B)$ ise

$$(F,A)\overset{\cup}{\oplus}\left[(G,B)\bigcap(H,C)\right] = (G,B)\bigcap\left[(F,A)\overset{\cup}{\oplus}(H,C)\right],$$

iv) $A \cap C \neq \varnothing$ ve $(F,A) \sqsubseteq (G,B)$ ise

$$(G,B)\overset{\cap}{\oplus}\left[(F,A)\sqcap(H,C)\right] = (F,A)\sqcap\left[(G,B)\overset{\cap}{\oplus}(H,C)\right].$$

İspat:

i) $(F,A)\overset{\cap}{\odot}(G,B) = (H, A \cap B)$ ve $(F,A) \bigcap (G,B) = (K, A \cap B)$ olsun.

$x \in A \cap B$ için $H(x) = F(x) \odot G(x)$ ve $K(x) = F(x) \wedge G(x)$ şeklindedir. Ayrıca $b_i, c_i, a \in R$ ve $\sum_{i=1}^{p} b_i \cdot c_i = a$ olmak üzere

$$\bigwedge_{1\le i\le p} \mathrm{F}(x)(b_i) \le \bigwedge_{1\le i\le p} \mathrm{F}(x)(b_i\cdot c_i) \le \mathrm{F}(x)(\sum_{i=1}^{p} b_i\cdot c_i) = \mathrm{F}(x)(a) \quad \text{ve} \quad \bigwedge_{1\le i\le p} \mathrm{G}(x)(c_i) \le \mathrm{G}(x)(a)$$

dır. Üstelik $(\mathrm{F}(x)\odot \mathrm{G}(x))(a) = \bigvee\{\bigwedge_{1\le i\le p} \mathrm{F}(x)(b_i)\wedge \mathrm{G}(x)(c_i) \mid \sum_{i=1}^{p} b_i\cdot c_i = a,\ p\in\mathbb{N}\}$

$$\le \mathrm{F}(x)(a)\wedge \mathrm{G}(x)(a) = (\mathrm{F}(x)\wedge \mathrm{G}(x))(a).$$

Yani $\mathrm{H}(x)\le \mathrm{K}(x)$ olur. Buradan (F,A) $\overset{\cap}{\odot}$ (G,B) $\subseteq$ (F,A) $\bigcap$ (G,B) dir.

ii) Açıkça $\mathrm{A}\subseteq \mathrm{A}\cup \mathrm{B}$ dir. Ayrıca $\forall x\in \mathrm{A}$ ve $a,b,c\in \mathrm{R}$ için

$\mathrm{F}(x)(a) = \mathrm{F}(x)(a)\wedge \mathrm{G}(x)(0) \le \bigvee\{\mathrm{F}(x)(b)\wedge \mathrm{G}(x)(c) \mid b+c=a\} = (\mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x))(a)$ dır.

Yani $\mathrm{F}(x)\le \mathrm{F}(x)+\mathrm{G}(x)$ olur. Buradan (F,A) $\subseteq$ (F,A) $\overset{\cup}{+}$ (G,B) dir.

Benzer şekilde (G,B) $\subseteq$ (F,A) $\overset{\cup}{+}$ (G,B) elde edilir. Buradan (F,A) $\bigcup$ (G,B) $\subseteq$ (F,A) $\overset{\cup}{+}$ (G,B) olur.

iii) $(\mathrm{F,A})\overset{\cup}{\oplus}\left[(\mathrm{G,B})\bigcap(\mathrm{H,C})\right] = (\mathrm{P},\ \mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}))$ ve

$(\mathrm{G,B})\bigcap\left[(\mathrm{F,A})\overset{\cup}{\oplus}(\mathrm{H,C})\right] = (\mathrm{Q},\ \mathrm{B}\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{C}))$ olsun.

Açıkça $\mathrm{A}\subseteq\mathrm{B}$ olduğundan $\mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C}) = \mathrm{B}\cap(\mathrm{A}\cup\mathrm{C})$ dir.

$x\in \mathrm{A}\cup(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$ olmak üzere;

• Eğer $x\in \mathrm{A}\backslash\mathrm{B}\cap\mathrm{C}$ ise $x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ ve $x\in \mathrm{A}\backslash\mathrm{C}$ dir.

Buradan $\mathrm{P}(x)=\mathrm{F}(x)$ ve $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{G}(x)\wedge\mathrm{F}(x)=\mathrm{F}(x)$ yani $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ olur.

•• Eğer $x\in(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})\backslash\mathrm{A}$ ise $x\in\mathrm{B}\backslash\mathrm{A}$ ve $x\in\mathrm{C}\backslash\mathrm{A}$ dır.

Buradan $\mathrm{P}(x)=\mathrm{G}(x)\wedge\mathrm{H}(x)$ ve $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{G}(x)\wedge\mathrm{H}(x)$ yani $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ olur.

••• Eğer $x\in\mathrm{A}\cap(\mathrm{B}\cap\mathrm{C})$ ise

$\mathrm{P}(x)=\mathrm{F}(x)\oplus[\mathrm{G}(x)\wedge\mathrm{H}(x)]$ ve $\mathrm{Q}(x)=\mathrm{G}(x)\wedge[\mathrm{F}(x)\oplus\mathrm{H}(x)]$ dir. Teorem 1.19 ile $\mathrm{P}(x)=\mathrm{Q}(x)$ dir. Buradan $(\mathrm{F,A})\overset{\cup}{\oplus}\left[(\mathrm{G,B})\bigcap(\mathrm{H,C})\right] = (\mathrm{G,B})\bigcap\left[(\mathrm{F,A})\overset{\cup}{\oplus}(\mathrm{H,C})\right]$ olur.

iv) iii)'ye benzer şekilde yapılır.

Önerme 2.9. (F,A), (G,B), (H,C) R üzerinde L-bulanık esnek idealler ve $\forall x\in\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\cap\mathrm{C}$ için $\mathrm{H}(x)(0)=\mathrm{G}(x)(0)$ olsun. Bu takdirde (F,A) $\overset{\cap}{\odot}$ [(G,B) $\overset{\cup}{+}$ (H,C)] = [(F,A) $\overset{\cap}{\odot}$ (G,B)] $\overset{\cup}{+}$ [(F,A) $\overset{\cap}{\odot}$ (H,C)] dir.

İspat: $(F,A)\overset{\cap}{\odot}[(G,B)\overset{\cup}{+}(H,C)] = (P,\ A\cap(B\cup C))$ ve

$[(F,A)\overset{\cap}{\odot}(G,B)]\overset{\cup}{+}[(F,A)\overset{\cap}{\odot}(H,C)] = (Q,\ (A\cap B)\cup(A\cap C))$ olsun.

$x\in A\cap(B\cup C)$ olmak üzere;

• Eğer $x\in A\backslash B\cup C$ ise $P(x)=F(x)$ dir.

Ayrıca $x\notin B$ ve $x\notin C$ ise $Q(x)=F(x)\vee F(x)=F(x)$ dir. Buradan $P(x)=Q(x)$ olur.

•• Eğer $x\in(B\cup C)\backslash A$ ise $P(x)=G(x)\vee H(x)$ dir.

Ayrıca $x\in(B\backslash A)\cup(C\backslash A)$ ise $Q(x)=G(x)\vee H(x)$ dir. Buradan $P(x)=Q(x)$ olur.

••• Eğer $x\in A\cap B\cap C$ ise

$P(x)=F(x)\odot[G(x)+H(x)]$ ve $Q(x)=F(x)\odot G(x)+F(x)\odot H(x)$ dir. Teorem 1.21 ile $P(x)=Q(x)$ olur. Buradan $(F,A)\overset{\cap}{\odot}[(G,B)\overset{\cup}{+}(H,C)] = (F,A)\overset{\cap}{\odot}(G,B)\overset{\cup}{+}(F,A)\overset{\cap}{\odot}(H,C)$ dir.

Tanım 2.11. (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler ve $(\phi,\psi):(F,A)\to(G,B)$ olsun. Eğer ϕ bir halka homomorfisi ise (ϕ,ψ)'ye L-bulanık esnek halka homomorfisi denir. Eğer ϕ bir halka izmomorfisi ve ψ bire-bir, örten ise (ϕ,ψ)'ye L-bulanık esnek halka izomorfisi denir. Bu durum $(F,A)\cong_{L(R)}(G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 2.10. (F,A), (G,B) ve (H,C) sırasıyla R_1, R_2 ve R_3 üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler olsun. Eğer $(\phi,\psi):(F,A)\to(G,B)$ ve $(\varphi,\gamma):(G,B)\to(H,C)$ L-bulanık esnek halka homomorfileri ise $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(H,C)$ L-bulanık esnek halka homomorfisidir.

İspat: Önerme 2.7 i) ile $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(H,C)$ dir. Ayrıca ϕ ve φ halka homomorfisi olduklarından Teorem 1.5 ii) ile $\varphi\circ\phi:R_1\to R_3$ de bir halka homomorfisidir. Buradan $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(H,C)$ L-bulanık esnek halka homomorfisidir.

Teorem 2.10. (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde L-bulanık esnek halkalar (idealler) ve $(\phi,\psi):(F,A)\to(G,B)$ L-bulanık esnek halka homomorfisi olsun. Bu takdirde;

i) Eğer ϕ örten, ψ bire-bir ve örten ise $(\phi(F),B)$ R_2 üzerinde bir L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

ii) $(\phi^{-1}(G),A)$ R_1 üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat:

i) $y \in \mathrm{B}$ olsun. ψ örten olduğundan $\exists x \in \mathrm{A}$ öyleki $\psi(x) = y$'dir. F(x) R_1'in L-bulanık alt halkası (ideali) ve ϕ örten olduğundan Teorem 1.22 ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Ayrıca ψ bire-bir olduğundan $\phi(\mathrm{F})(y) = \phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ R_2 üzerinde bir L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

ii) $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\psi(x) \in \mathrm{B}$ ve (G,B) R_2 üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) olduğundan $\mathrm{G}(\psi(x))$ R_2'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Ayrıca Teorem 1.22 ile $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\phi^{-1}(\mathrm{G}(\psi(x)))$ R_1'in L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ R_1 üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

Teorem 2.11. (F,A) ve (G,B) sırasıyla R_1 ve R_2 üzerinde L-bulanık esnek kümeler, (F,A) R_1 üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) olsun. Eğer $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \cong_{\mathrm{L(R)}} (\mathrm{G},\mathrm{B})$ ise (G,B)'de R_2 üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

İspat: $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \cong_{\mathrm{L(R)}} (\mathrm{G},\mathrm{B})$ ise bir $(\phi,\psi):(\mathrm{F},\mathrm{A}) \to (\mathrm{G},\mathrm{B})$ L-bulanık halka izomorfisi mevcuttur. $\psi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğundan $\forall y \in \mathrm{B}$ için $\exists x \in \mathrm{A}$ öyle ki $\psi(x) = y$ ve $\phi(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{G}(\psi(x)) = \mathrm{G}(y)$ dir. Teorem 1.22 ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ R_2'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Yani $\mathrm{G}(y)$ R_2'nin L-bulanık alt halkası (ideali) dır. Buradan (G,B) R_2 üzerinde L-bulanık esnek halka (ideal) dır.

Teorem 2.12. (G,B) R_1 üzerinde L-bulanık esnek halka, $\phi : \mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_2$ bir halka homomorfisi ve $\psi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bir fonksiyon olmak üzere $\forall a \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a) = \phi(\mathrm{G}(\psi(a)))$ şeklinde tanımlanan (F,A) L-bulanık esnek kümesi R_2 üzerinde L-bulanık esnek halkadır.

İspat: Açıkça $\forall a \in \mathrm{A}$ için $\psi(a) \in \mathrm{B}$ dir. (G,B) R_1 üzerinde L-bulanık esnek halka olduğundan $\mathrm{G}(\psi(a))$ R_1'in L-bulanık alt halkasıdır. Teorem 1.22 ile $\forall a \in \mathrm{A}$ için $\phi(\mathrm{G}(\psi(a)))$ R_2'nin L-bulanık alt halkasıdır. Buradan (F,A) R_2 üzerinde L-bulanık esnek halkadır.

2.2. L-Bulanık Esnek Modüller

Esnek modül kavramı ilk olarak Sun vd. [59] tarafından ortaya konuldu ve bazı temel özellikleri incelendi. Daha sonra Türkmen ve Pancar [60]'da esnek alt modüllerin bazı özelliklerini ortaya koydular ve esnek alt modüllerin toplamı, direkt toplamı gibi bazı yeni kavramları araştırdılar.

Bu bölümde esnek modüller için yapılmış olan çalışmalar da göz önüne alınarak ve L-bulanık esnek kümeler yardımıyla yeni bir kavram olarak L-bulanık esnek modül, L-bulanık esnek alt modül, L-bulanık esnek modül homomorfisi tanımları verilerek L-bulanık esnek modüllerin yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler değerlendirilmiştir.

Bu bölümde aksi söylenmedikçe $\varnothing \neq \mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$, R birim elemanlı değişmeli bir halka, M bir R-modül ve L sonsuz $\vee$-dağılımlı bir tam kafes olarak alınacaktır.

Tanım 2.12. M bir modül ve $(\mathrm{F,A})$ M üzerinde L-bulanık esnek küme olsun. Eğer $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(x)$ M'nin L-bulanık alt modülü ise $(\mathrm{F,A})$'ya M üzerinde bir L-bulanık esnek modül denir.

M üzerindeki bütün L-bulanık esnek modüller için aşağıdaki kümeleri verebiliriz.

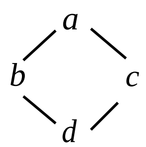
- Es m[M]={ (F,A) | $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{E}$, (F,A) M üzerinde L-bulanık esnek modül}
- Es $\mathrm{m_A}$[M]={ (F,A) | (F,A) M üzerinde L-bulanık esnek modül}

(F,A) ve (G,B) M üzerinde L-bulanık esnek modüller ve $(\mathrm{F,A}) \subseteq (\mathrm{G,B})$ ise (F,A)'ya (G,B)'nin L-bulanık esnek alt modülü denir. Bu durum $(\mathrm{F,A}) \ll (\mathrm{G,B})$ notasyonu ile gösterilir.

Örnek 2.10.

1) M bir modül ve $\mathrm{N} \in \mathrm{S(M)}$ olsun. $(\Phi_{\mathrm{A,N}}, \mathrm{A})$ L-bulanık esnek kümesi M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

2) $\mathrm{M}=\mathbb{Z}_3$ $\mathbb{Z}$-modül ve $\mathrm{L}=\{a,b,c,d\}$ kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.



Şekil 2.9. $(\mathrm{L}=\{a,b,c,d\}, \leq)$ kafesi

$\mathrm{F}:\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{L}^{\mathbb{Z}_3}$, $\mathrm{F}(x)(y) = \begin{cases} a, & x = y \\ b, & x - y \in \{1,2\} \end{cases}$ ile tanımlanan $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$ L-bulanık esnek kümesi M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

3) M= $\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$-modül ve L=$\{\alpha,\beta,\gamma\}$ kümesi üzerindeki sıralama bağıntısı aşağıdaki şekilde verilsin.

$$\begin{array}{c} \gamma \\ \uparrow \\ \beta \\ \uparrow \\ \alpha \end{array}$$

Şekil 2.10. (L=$\{\alpha,\beta,\gamma\},\leq$) kafesi

$\mathrm{F}:\mathbb{Z} \rightarrow \mathrm{L}^{\mathbb{Z}_6}$, $\mathrm{F}(x)(y) = \begin{cases} \gamma, & x = y \\ \beta, & x - y \in \{2,4\} \\ \alpha, & x - y \in \{1,3,5\} \end{cases}$ ile tanımlanan $(\mathrm{F},\mathbb{Z})$ L-bulanık esnek kümesi M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Teorem 2.13. μ M'nin L-bulanık alt kümesi ve (F,A) M üzerinde bir esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) μ M'nin L-bulanık alt modülü ise $(\mathrm{F}_\mu,\mathrm{L})$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) (F,A) M üzerinde bir esnek modül ise $(\tilde{\mathrm{F}},\mathrm{A})$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

İspat:

i) μ M'nin L-bulanık alt modülü olsun. $\alpha \in \mathrm{L}$ için $\mu_\alpha = \varnothing$ veya μ_α M'nin bir alt modülüdür. Teorem 1.26 ile χ_{μ_α} M'nin bir L-bulanık alt modülüdür. Buradan $(\mathrm{F}_\mu,\mathrm{L})$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

ii) (F,A) M üzerinde bir esnek modül olsun. $\forall a \in \mathrm{A}$ için $\mathrm{F}(a)$ M'nin bir alt modülüdür. Teorem 1.26 ile $\chi_{\mathrm{F}(a)}$ M'nin bir L-bulanık alt modülüdür. Buradan $(\tilde{\mathrm{F}},\mathrm{A})$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Teorem 2.14. (F,A) M üzerinde bir L-bulanık esnek küme olsun. Bu takdirde;

i) (F,A) M üzerinde bir L-bulanık esnek modüldür. $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathrm{A}$ için (F_x,L) M üzerinde esnek modüldür.

ii) (F,A) M üzerinde bir L-bulanık esnek modüldür. $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathrm{L}$ için (F_α,A) M üzerinde esnek modüldür.

İspat:

i) $\forall x \in \mathrm{A}$ ve $\forall \beta \in \mathrm{Des}(\mathrm{F}_x,\mathrm{L})$ için $\mathrm{F}_x(\beta) = \mathrm{F}(x)_\beta$ şeklindedir. Teorem 1.25 ile $\mathrm{F}(x)_\beta$ M'nin bir alt modülüdür. Buradan (F_x,L) M üzerinde esnek modüldür.

Tersine $\forall \beta \in \mathrm{Des}(\mathrm{F}_x,\mathrm{L})$ için $\mathrm{F}_x(\beta) = \mathrm{F}(x)_\beta$ M'nin bir alt modülüdür. Teorem 1.25 ile $\mathrm{F}(x)$ M'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan (F,A) M üzerinde bir L-bulanık esnek modüldür.

ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

Teorem 2.14 ile L-bulanık esnek modüllerin esnek modüller ile karakterize edilebileceği görülüyor.

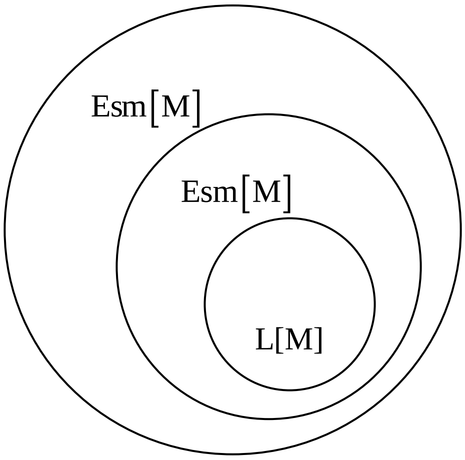
Teorem 2.15.

i) $\theta : \mathrm{L}[\mathrm{M}] \to \mathrm{Esm}_\mathrm{L}[\mathrm{M}]$, $\theta(\mu)$=(F_μ,L) şeklinde tanımlanan θ bire-bir ve artan bir dönüşümdür.

ii) $\gamma : \mathrm{Esm}[\mathrm{M}] \to \mathrm{Esm}[\mathrm{M}]$, γ(F,A)=(F,A) şeklinde tanımlanan γ bire-bir ve artan bir dönüşümdür.

İspat: Teorem 2.4.'ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 1.41 ile bir M modülünün L-bulanık alt modülleri L parametreli esnek modül olarak alınabilir. Teorem 2.15 ii) ile bir esnek modül L-bulanık esnek modüllerin içine gömülebilir. Açıkça L-bulanık esnek modüller, L-bulanık alt modüllerden ve esnek modüllerden daha genel bir kavram olmasının yanı sıra, esnek modüllerin sahip olduğu cebirsel özellikleri de taşımaktadır. Bu ilişki aşağıdaki şekilde sembolize edilir.



Şekil 2.11. L[M], $\mathrm{Esm}\left[\mathrm{M}\right]$, $\mathrm{Esm}\left[\mathrm{M}\right]$ kümeleri

Teorem 2.16. $\{(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) \mid i \in \Lambda\}$ M üzerinde L-bulanık esnek modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\underset{i\in\Lambda}{\sqcap}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) $\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i \neq \varnothing$ ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

iii) $\forall i, j \in \Lambda$, $i \neq j$, için $\mathrm{A}_i \cap \mathrm{A}_j = \varnothing$ ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

iv) $\forall a \in \underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ için $\{\mathrm{F}_i(a) \mid \mathrm{i} \in \Lambda(a)\}$ bir zincir ise $\bigcup_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

v) $\underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i \neq \varnothing$ olmak üzere $\forall\, a \in \underset{i\in\Lambda}{\cap}\mathrm{A}_i$ için $\{\mathrm{F}_i(a) \mid \mathrm{i} \in \Lambda\}$ bir zincir ise $\underset{i\in\Lambda}{\sqcup}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

İspat:

i) $\underset{i\in\Lambda}{\sqcap}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i) = (\mathrm{F}, \underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i)$ olsun. $a \in \underset{i\in\Lambda}{\cup}\mathrm{A}_i$ olmak üzere $\Lambda(a) = \{i \mid a \in \mathrm{A}_i\}$ için Teorem 1.23 i) ile $\bigwedge_{i\in\Lambda(a)}\mathrm{F}_i(a)$ R'nin L-bulanık alt modüldür. Yani $\mathrm{F}(a)$ R'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $\underset{i\in\Lambda}{\sqcap}(\mathrm{F}_i, \mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

ii) i)'ye benzer şekilde yapılır.

iii) $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = (F, \cup_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. $a \in \cup_{i\in\Lambda} A_i$ ise $\exists i \in \Lambda$ öyle ki $a \in A_i$ dir. $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $F(a) = F_i(a)$ ve $F_i(a)$ R'nin L-bulanık alt modülü olduğundan $F(a)$ R'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

iv) $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i) = (F, \cup_{i\in\Lambda} A_i)$ olsun. $a \in \cup_{i\in\Lambda} A_i$ ve $\Lambda(a) = \{i \mid a \in A_i\}$ olmak üzere $\{ F_i(a) \mid i \in \Lambda(a) \}$ bir zincir olduğundan Teorem 1.23 ii) ile $\bigvee_{i\in\Lambda(a)} F_i(a)$ R'nin L-bulanık alt modülüdür. Yani $F(a)$ R'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $\bigcup_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

v) iv)'e benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.6. (F,A) ve (G,B) R üzerinde L-bulanık esnek modüller olsun. Bu takdirde;

i) (F,A)$\sqcap$(G,B) R üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) $A \cap B \neq \varnothing$ ise (F,A)$\bigcap$(G,B) R üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

iii) Eğer $A \cap B = \varnothing$ ise (F,A)$\bigcup$(G,B) R üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

iv) Eğer $\forall x \in A \cap B$ için $F(x) \leq G(x)$ veya $G(x) \leq F(x)$ ise (F,A)$\bigcup$(G,B) R üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Genel olarak L-bulanık esnek modüllerin birleşimi L-bulanık esnek modül olmayabilir. Bu durumu aşağıdaki örnekle görebiliriz.

Örnek 2.11. M=$\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$-modül, A=B=$\mathbb{Z}$ ve $F:A \to L^{\mathbb{Z}}$ ve $G:B \to L^{\mathbb{Z}}$ dönüşümleri $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $F(x) = \chi_{2\mathbb{Z}}$ ve $G(x) = \chi_{3\mathbb{Z}}$ olarak tanımlansın. Bu takdirde (F,A)$\bigcup$(G,B) M üzerinde L-bulanık esnek modül değildir.

Teorem 2.17. $\{(F_i, A_i) \mid i \in \Lambda\}$ M üzerinde L-bulanık esnek modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) $\forall i \in \Lambda$, $a_i \in A_i$ için $\{ F_i(a_i) \mid i \in \Lambda \}$ bir zincir ise $\bigvee_{i\in\Lambda}(F_i, A_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

İspat:

i) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ R'nin L-bulanık alt modülü olduğundan Teorem 1.23 i) ile $\bigwedge_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ R'nin L-bulanık alt modülüdür. Yani $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}(a_i)$ R'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

ii) Teorem 2.16 iv)'e benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.7. (F,A) ve (G,B) M üzerinde L-bulanık esnek modüller olsun. Bu takdirde;

i) $(\mathrm{F,A})\tilde{\Lambda}(\mathrm{G,B})$ R üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) Eğer $\forall(x,y)\in\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ için $\mathrm{F}(x)\leq\mathrm{G}(y)$ veya $\mathrm{G}(y)\leq\mathrm{F}(x)$ ise $(\mathrm{F,A})\vee(\mathrm{G,B})$ R üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Sonuç 2.8. (F,A) M üzerinde bir L-bulanık esnek modül ve $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ (F,A) 'nın L-bulanık esnek alt modüllerinin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i\neq\varnothing$ ise $\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ (F,A) 'nın L-bulanık esnek alt modülüdür,

ii) $\bigwedge_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A})$'nın L-bulanık esnek alt modülüdür,

iii) Her $i,j\in\Lambda$ için $\mathrm{A}_i\cap\mathrm{A}_j=\varnothing$ ise $\bigvee_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A})$'nın L-bulanık esnek alt modülüdür.

Teorem 2.18. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}\subseteq\mathrm{Esm}[\mathrm{M}]$ olsun. Bu takdirde,

i) $\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i\neq\varnothing$ ise $\mathrm{Inf}\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}=\bigcap_{i\in\Lambda}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$,

ii) $\mathrm{Sup}\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}=\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$.

İspat:

i) Teorem 2.1 i) ile ispatı açıktır.

ii) Açık olarak $j\in\Lambda$ için $(\mathrm{F}_j,\mathrm{A}_j)\subseteq\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ dir.

Diğer yandan, $(\mathrm{H,A})\in\mathrm{Esm}[\mathrm{M}]$ ve $\forall i\in\Lambda$ için $(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\subseteq(\mathrm{H,A})$ ise $\forall i\in\Lambda$ için $\mathrm{A}_i\subseteq\mathrm{A}$ ve $\mathrm{F}_i(x)\leq\mathrm{H}(x)$ dir. Böylece $\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i\subseteq\mathrm{A}$ ve $x\in\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\bigoplus_{i\in\Lambda(x)}\mathrm{F}_i(x)\leq\mathrm{H}(x)$ yani

$\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\subseteq(\mathrm{H,A})$ olur. Buradan Sup$\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}=\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ dir.

Sonuç 2.9. $(\mathrm{Es\,m_A[M]},\subseteq)$ tam kafestir.

Teorem 2.19. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ M_i üzerinde L-bulanık esnek modüllerin bir ailesi olsun. Bu takdirde $\underset{i\in\Lambda}{\tilde{\times}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$ üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

İspat: $\underset{i\in\Lambda}{\tilde{\times}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ olsun. $\forall(a_i)\in\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ için $\mathrm{F}_i(a_i)$ R_i'nin L-bulanık alt modülü olduğundan Teorem 1.24 ile $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{F}_i(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{R}_i$'nin L-bulanık alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{R}_i$'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $\underset{i\in\Lambda}{\tilde{\times}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ $\prod_{i\in\Lambda}\mathrm{M}_i$ üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Sonuç 2.10. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde L-bulanık esnek modüller ise $(\mathrm{F,A})\tilde{\times}(\mathrm{G,B})$ $\mathrm{M}_1\times\mathrm{M}_2$ üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Teorem 2.20. $\{(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)\mid i\in\Lambda\}$ M üzerinde L-bulanık esnek modüllerin boştan farklı bir ailesi olsun. Bu takdirde;

i) $\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) $\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i\neq\varnothing$ ise $\overset{\cap}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

iii) $\overset{\tilde{\times}}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

İspat:

i) $\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ ve $a\in\bigcup_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olsun. $\Lambda(a)=\{i\mid a\in\mathrm{A}_i\}$ olmak üzere Teorem 1.23 iii) ile $\underset{i\in\Lambda(\mathrm{a})}{\oplus}\mathrm{F}_i(\mathrm{a})$ M'nin L-bulanık alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a)$ M'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $\overset{\cup}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

ii) $\overset{\cap}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)=(\mathrm{F},\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i)$ ve $a\in\bigcap_{i\in\Lambda}\mathrm{A}_i$ olsun. Teorem 1.23 iii) ile $\underset{i\in\Lambda}{\oplus}\mathrm{F}_i(\mathrm{a})$ M'nin L-bulanık alt modülüdür. Yani $\mathrm{F}(a)$ M'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $\overset{\cap}{\underset{i\in\Lambda}{\oplus}}(\mathrm{F}_i,\mathrm{A}_i)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

iii) i) ve ii)'ye benzer şekilde yapılır.

Sonuç 2.11. (F,A) ve (G,B) M üzerinde L-bulanık esnek modüller olsun. Bu takdirde;

i) $(F,A)\overset{\cup}{\oplus}(G,B)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) $A\cap B\neq\varnothing$ ise $(F,A)\overset{\cap}{\oplus}(G,B)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

iii) $(F,A)\overset{\tilde{\times}}{\oplus}(G,B)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

i) $(F,A)\overset{\cup}{+}(G,B)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

ii) $A\cap B\neq\varnothing$ ise $(F,A)\overset{\cap}{+}(G,B)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür,

iii) $(F,A)\overset{\tilde{\times}}{+}(G,B)$ M üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Tanım 2.13. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde L-bulanık esnek kümeler ve $(\phi,\psi):(F,A)\to(G,B)$ olsun. Eğer ϕ bir modül homomorfisi ise (ϕ,ψ)'ye L-bulanık esnek modül homomorfisi denir. Eğer ϕ bir modül izmomorfisi ve ψ bire-bir, örten ise (ϕ,ψ)'ye L-bulanık esnek modül izomorfisi denir ve $(F,A)\cong_{L[M]}(G,B)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 2.11. (F,A), (G,B) ve (H,C) sırasıyla M_1, M_2 ve M_3 üzerinde tanımlı L-bulanık esnek kümeler olsun. Eğer $(\phi,\psi):(F,A)\to(G,B)$ ve $(\varphi,\gamma):(G,B)\to(H,C)$ L-bulanık esnek modül homomorfileri ise $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(H,C)$ L-bulanık esnek modül homomorfisidir.

İspat: Önerme 2.7 i) ile $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(H,C)$ dir. Ayrıca ϕ ve φ modül homomorfileri olduklarından dolayı Teorem 1.11 ile $\varphi\circ\phi:M_1\to M_3$ de bir modül homomorfisidir. Buradan $(\varphi\circ\phi,\gamma\circ\psi):(F,A)\to(H,C)$ L-bulanık esnek modül homomorfisidir.

Teorem 2.21. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde L-bulanık esnek modüller ve $(\phi,\psi):(F,A)\to(G,B)$ L-bulanık esnek modül homomorfisi olsun.

Bu takdirde;

i) Eğer ϕ örten, ψ bire-bir ve örten ise $(\phi(F),B)$ M_2 üzerinde bir L-bulanık esnek modüldür.

ii) $(\phi^{-1}(G),A)$ M_1 üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

İspat:

i) $y \in \mathrm{B}$ olsun. ψ örten olduğundan $\exists x \in \mathrm{A}$ öyleki $\psi(x) = y$'dir. $\mathrm{F}(x)$ M_1'in L-bulanık alt modülü ve ϕ örten olduğundan Teorem 1.28 ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ M_2'nin L-bulanık alt modülüdür. Ayrıca ψ bire-bir olduğundan $\phi(\mathrm{F})(y) = \phi(\mathrm{F}(x))$ M_2'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan $(\phi(\mathrm{F}),\mathrm{B})$ M_2 üzerinde bir L-bulanık esnek modüldür.

ii) $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\psi(x) \in \mathrm{B}$ ve (G,B) M_2 üzerinde L-bulanık esnek modül olduğundan $\mathrm{G}(\psi(x))$ M_2'nin L-bulanık alt modülüdür. Ayrıca Teorem 1.28 ile $\forall x \in \mathrm{A}$ için $\phi^{-1}(\mathrm{G}(\psi(x)))$ M_1'in L-bulanık alt modülüdür. Buradan $(\phi^{-1}(\mathrm{G}),\mathrm{A})$ M_1 üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

Teorem 2.22. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M_1 ve M_2 üzerinde L-bulanık esnek kümeler, (F,A) M_1 üzerinde L-bulanık esnek modül olsun. Eğer $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \cong_{\mathrm{L[M]}} (\mathrm{G},\mathrm{B})$ ise (G,B)'de M_2 üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

İspat: $(\mathrm{F},\mathrm{A}) \cong_{\mathrm{L[M]}} (\mathrm{G},\mathrm{B})$ olduğundan bir $(\phi,\psi):(\mathrm{F},\mathrm{A}) \to (\mathrm{G},\mathrm{B})$ L-bulanık esnek modül izomorfisi mevcuttur. $\psi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ bire-bir ve örten bir dönüşüm olduğundan $\forall y \in \mathrm{B}$ için $\exists x \in \mathrm{A}$ öyle ki $\psi(x) = y$ ve $\phi(\mathrm{F}(x)) = \mathrm{G}(\psi(x)) = \mathrm{G}(y)$ dir. Teorem 1.28 ile $\phi(\mathrm{F}(x))$ M_2'nin L-bulanık alt modülüdür ve bundan dolayı $\mathrm{G}(y)$ M_2'nin L-bulanık alt modülüdür. Buradan (G,B) M_2 üzerinde L-bulanık esnek modüldür.

3. İRDELEME

Bu çalışmada L-bulanık esnek halka ve L-bulanık esnek modül yapılarına ait temel özellikler incelenmiş ve bu yapılardan elde edilen sonuçlar arasındaki ilişki araştırılmıştır.

İlk kısımda L-bulanık esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler ve sıralama bağıntıları tanımlanmış ve bunlara bağlı yeni özellikler elde edilmiştir. İkinci kısımda L-bulanık esnek halka, L-bulanık esnek ideal, L-bulanık esnek alt halka ve L-bulanık esnek halka homomorfisi tanımları verilerek, L-bulanık esnek halkaların yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca L-bulanık esnek halkaların L-bulanık alt halkalarla ve esnek halkalarla arasındaki ilişkisi değerlendirilmiştir. Son olarak L-bulanık esnek modül, L-bulanık esnek alt modül ve L-bulanık esnek modül homomorfisi tanımları verilerek L-bulanık esnek modüllerin yapısı, temel özellikleri ve sonuçları arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Ayrıca L-bulanık esnek modüllerin L-bulanık alt modüllerle ve esnek modüllerle arasındaki ilişkisi değerlendirilmiştir.

4. SONUÇLAR

Yaptığımız çalışmada elde edilen başlıca sonuçlar şunlardır:

1. Esnek kümeler ve L-bulanık esnek kümeler üzerinde “$\subseteq$”, “$\sqsubseteq$”, “$\subseteq$” ve “$\sqsubseteq$” sıralama bağıntıları ve ikili işlemleri verilerek bunlara ait bazı özel sonuçlar elde edilmiştir (Önerme 1.3, 1.4, 2.1, 2.2, Teorem 1.29). Özel olarak, bir U kümesi üzerinde tanımlı bütün L-bulanık esnek kümelerin ailesinin “$\subseteq$” ve “$\sqsubseteq$” bağıntılarına göre tam kafes ve sonsuz $\vee$-dağılımlı kafes yapılarına sahip olduğu gösterilmiştir (Teorem 2.1).

2. Evrensel küme üzerindeki ikili işlemler yardımıyla esnek kümeler (L-bulanık esnek kümeler) üzerinde ikili işlemler verilerek esnek idealler, halkalar ve modüller (L-bulanık esnek idealler, halkalar ve modüller) için ikili işlemlerin buradaki etkileri incelenmiştir (Teorem 1.31, 1.33, 1.34, 1.38, 1.39, 1.40, 2.5, 2.6, 2.8, 2.9, 2.16, 2.17, 2.19, 2.20).

3. Bir R halkasının L-bulanık ideallerinin R’nin L parametreli esnek idealleri içine gömülebileceği gösterilmiştir (Teorem 1.35). R halkasının L-bulanık ideallerinin ve esnek ideallerinin R’nin L-bulanık esnek idealleri olarak ele alınabileceği gösterilmiştir (Teorem 2.2.). Ayrıca bu ilişkiye ait sıralama yapısı incelenmiştir (Teorem 2.4.).

4. Bir M modülünün L-bulanık alt modüllerinin M’nin L parametreli esnek modülleri içine gömülebileceği gösterilmiştir (Teorem 1.41). M modülünün L-bulanık alt modüllerinin ve esnek modüllerinin M’nin L-bulanık esnek modülleri olarak ele alınabileceği gösterilmiştir (Teorem 2.13). Ayrıca bu ilişkiye ait sıralama yapısı incelenmiştir (Teorem 2.15).

5. Esnek ve L-bulanık esnek cebirsel yapıların kafes yapıları incelenmiştir. (Önerme 1.6, Sonuç 1.3, 1.4, 2.4, 2.9, Teorem 1.35, 1.41, 2.4, 2.15)

6. Halka ve modül teorilerine ait bazı sonuçların L-bulanık esnek yapılar içinde geçerli olduğu gösterilmiştir.

7. L-bulanık esnek fonksiyon yardımıyla görüntü ve ters-görüntü tanımlarına ait özellikler verilmiştir.

5.ÖNERİLER

1. Esnek cebirsel yapılar yardımıyla klasik cebirsel yapıların özellikleri incelenebilir.

2. L kafesi üzerinde bir t-norm alınarak L-bulanık esnek kümelerin yapısı incelenebilir.

3. L-bulanık esnek kümeler farklı cebirsel yapılar üzerinde yeniden değerlendirilip bu yapılara ait özellikleri incelenebilir. Bu şekilde birçok matematiksel yapı gerek esnek kümeler gerekse L-bulanık esnek kümeler üzerinde yeniden ele alınabilir.

4. L-bulanık esnek cebirsel yapılar, bu alanda çalışan diğer araştırmacılara tanıtılarak farklı bilim dalları ile ortak çalışmalar yapılması hedeflenebilir.

6. KAYNAKLAR

1. Acar U., Koyuncu F. and Tanay B., Soft sets and soft rings, Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 3458-3463.

2. Aktaş H. and Çağman N., Soft sets and soft groups, Information Sciences, 177, 1 (2007) 2726-2735.

3. Ali M. I., Feng F., Liu X., Min W. K. and Shabir M., On some new operations in soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 57 (2009) 1547-1553.

4. Atagün A. O. and Sezgin A., Soft substructures of rings, fields and modules, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011) 592–601.

5. Aygünoğlu A. and Aygün H., Introduction to fuzzy soft groups, Computers and Mathematics with Applications, 58 (2009) 1279-1286.

6. Babitha K. V. and Sunil J. J., Soft set relations and functions, Computers and Mathematics with Applications, 60 (2010) 1840-1849.

7. Bayrak D. and Yamak S., A note on distributivity of lattice of L-ideals of a ring, International Journal of Fuzzy Systems, (submitted).

8. Birkhoff G., Lattice Theory, American Mathematical society, Providence, Rhode Island, 1967.

9. Chen D., Tsang E. C. C. and Yeung D. S., Some notes on the parameterization reduction of soft sets, International Conference on Machine Learning and Cybernetics 3, July 2003, China, 1442-1445.

10. Chen D., Tsang E. C. C., Yeung D. S. and Wang X., The parameterization reduction of soft sets and its applications, Computers and Mathematics with Applications, 49, 1 (2005) 757-763.

11. Çağman N. and Enginoğlu S., Soft matrix theory and its decision making, Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 3308-3314.

12. Çağman N., Enginoğlu S. and Çıtak F., Fuzzy soft set theory and its applications, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 8, 3 (2011) 137-147.

13. Çelik Y., Fuzzy Soft Groups, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2009.

14. Çelik Y., Ekiz C. and Yamak S., A new view on soft rings, Hacettepe J. Math. Stat., 40, 2 (2011) 273-286.

15. Çelik Y., Ekiz C. and Yamak S., Applications of fuzzy soft sets in ring theory, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5, 3 (2013) 451-462.

16. Feng F., Jun Y. B. and Zhao X., Soft semirings, Computers and Mathematics with Applications, 56, 10 (2008) 2621-2628.

17. Feng F., Jun Y. B., Liu X. and Li L., An adjustable approach to fuzzy soft set based decision making, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234 (2010) 10-20.

18. Feng F., Li C. and Davvaz B., Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets:a tentative approach, Soft Comput., 14 (2010) 899–911.

19. Fraleigh J. B., A First Course in Abstract Algebra, Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1994.

20. Gong K., Xiao Z. and Zhang X., The bijective soft set with its operations, Computers and Mathematics with Applications, 60 (2010) 2270-2278.

21. Hungerford T. W., Algebra, Springer, New York, 1974.

22. İnan E. and Öztürk M. A., Fuzzy soft rings and fuzzy soft ideals, Neural Comput. Appl., 21 (2012) 1-8.

23. Jahan I., The lattice of L-ideals of a ring is modular, Fuzzy Sets and Systems, 199 (2012) 121-129.

24. Jiang Y., Tang Y., Chen Q., Liu H. and Tang J., Interval valued intuitionistic fuzzy soft sets and their properties, Computers and Mathematics with Applications, 60 (2010) 906-918.

25. Jin-liang L., Rui-xia Y. and Bing-xue Y., Fuzzy Soft Sets and Fuzzy Soft Groups, Chinese Control and Decision Conference, July 2008, China, 2626-2629.

26. Jun Y. B., Soft BCK/BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 56, 1 (2008) 1408-1413.

27. Jun Y. B., Lee K. J. and Park C. H., Soft set theory applied to commutative ideals in BCK-algebras, Journal of Applied Mathematics and Informatics, 26, 3-4 (2008) 707-720.

28. Jun Y. B. and Park C. H., Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, Information Sciences, 178, 1 (2008) 2466-2475.

29. Jun Y. B., Lee K. J. and Park C. H., Soft set theory applied to ideals in d-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 57 (2009) 367-378.

30. Jun Y. B., Lee K. J. and Zhan J., Soft p-ideals of soft BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 58 (2009) 2060-2068.

31. Jun Y. B. and Park C. H., Applications of soft sets in Hilbert algebras, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6, 2 (2009) 75-86.

32. Jun Y. B., Lee K. J. and Park C. H., Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 3180-3192.

33. Jun Y. B., Song S. Z. and So K. S., Soft set theory applied to p-ideals of BCI-algebras related to fuzzy points, Neural Comput. Appl., 20 (2011) 1313-1320.

34. Kaufmann A., Introduction to the Theory Of Fuzzy Subsets, Volume I, Academic Press, London, 1975.

35. Kazancı O., Yılmaz Ş. and Yamak S., Soft sets and soft BCH-algebras, Hacettepe J. Math. Stat., 39, 2 (2010) 205–217.

36. Kong Z., Gao L. and Wang L., Comment on "A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems", Journal of Computational and Applied Mathematics, 223 (2009) 540-542.

37. Kovkov D. V., Kolbanov V. M. and Molodtsov D. A., Soft Sets Theory-Based Optimization, Journal of Computer and Systems Sciences International, 46, 6 (2007) 872-880.

38. Li Z., Zheng D. and Hao J., L-fuzzy soft sets based on complete Boolean lattices, Computers and Mathematics with Applications, 64 (2012) 2558-2574.

39. Liu W. J., Operations on fuzzy ideals, Fuzzy Sets Systems, 11 (1983) 31-41.

40. Liu X., Xiang D. and Zhan J., Fuzzy isomorphism theorems of soft rings, Neural Comput. Appl., 21 (2012) 391-397.

41. Maji P. K., Biswas R. and Roy A. R., Fuzzy soft sets, Journal of Fuzzy Mathematics, 9, 3 (2001) 589-602.

42. Maji P. K., Roy A. R. and Biswas R., An application of soft sets in a decision making problem, Computers and Mathematics with Applications, 44, 1 (2002) 1077-1083.

43. Maji P. K., Bismas R. and Roy A.R., Soft set theory, Computers and Mathematics with Applications, 45, 1 (2003) 555-562.

44. Maji P. K., Roy A. R. and Biswas R., On Intuitionistic Fuzzy soft sets, J. Fuzzy Math., 12, 3 (2004) 669-683.

45. Majumdar P. and Samanta S. K., Generalised fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 1425-1432.

46. Majumdar P. and Samanta S. K., On soft mappings, Computers and Mathematics with Applications, 60 (2010) 2666-2672.

47. Molodtsov D., Soft set theory-first results, Computers and Mathematics with Applications, 37, 1 (1999) 19-31.

48. Molodtsov D., The Theory of Soft Sets, URSS Publishers, Moscow, 2004.

49. Molodtsov D. A., Leonov V. Yu. and Kovkov D. V., Soft Sets Technique and Its Application, Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1, 1 (2006) 8-39.

50. Mordeson J. N. and Malik D. S., Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., London, 1998.

51. Mukherjee T. K. and Sen M. K., On fuzzy ideals on a ring I, Fuzzy Sets and Systems, 21 (1987) 99-104.

52. Mushrif M. M., Sengupta S. and Ray A. K., Texture Classification Using a Novel, Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm. Lecture Notes In Computer Science, 3851, 246-254, 2006.

53. Nanda S., Fuzzy fields and fuzzy linear spaces, Fuzzy Sets and Systems, 19 (1986) 89-94.

54. Park C. H., Jun Y. B. and Öztürk M. A., Soft WS-algebras, Commun. Korean Math. Soc., 23, 3 (2008) 313-324.

55. Pawlak Z., Rough sets, International Journal of Information and Computer Sciences, 11, 1 (1982) 341-356.

56. Pei D. and Miao D., From Soft Sets to Information Systems, International Conference on Granular Computing, July 2005, China, 617-621.

57. Qin K. and Hong Z., On soft equality, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234 (2010) 1347-1355.

58. Rosenfeld A., Fuzzy groups, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35 (1971) 512-517.

59. Roy A. R. and Maji P. K., A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 203, 1 (2007) 412-418.

60. Sun Q-M., Zhang Z-L. and Liu J., Soft Sets and Soft Modules, Rough Sets and Knowledge Technology, Springer, China, 2008, 403-409.

61. Türkmen E. and Pancar A., On Some New Operations in Soft Module Theory, Neural Comput. Appl., (2012) doi: 10.1007/s00521-012-0893-6.

62. Xiao Z., Li Y., Zhong B. and Yang X., Research on synthetically evaluating method for business competitive capacity based on soft set, Statistical Research, 2003, 52-54.

63. Xiao Z., Chen L., Zhong B. and Ye S., Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets, International Conference on Service Systems and Services Management, June 2005, China, 1104-1106.

64. Xiao Z., Gong K. and Zou Y., A combined forecasting approach based on fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 228 (2009) 326-333.

65. Xu W., Ma J., Wang S. and Hao G., Vague soft sets and their properties, Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 787-794.

66. Yamak S., Kazancı O. and Davvaz B., Soft hyperstructure, Computers and Mathematics with Applications, 62 (2011) 797–803.

67. Yang C.F., Fuzzy soft semigroups and fuzzy soft ideals, Computers and Mathematics with Applications, 61 (2011) 255–261.

68. Yang X., Lin T. Y., Yang J., Li Y. and Yu D., Combination of interval-valued fuzzy set and soft set, Computers and Mathematics with Applications, 58 (2009) 521-527.

69. Yin Y., Li H. and Jun Y. B., On algebraic structure of intuitionistic fuzzy soft sets, Computers and Mathematics with Applications, 64 (2012) 2896-2911.

70. Zadeh L. A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8 (1965) 338-353.

71. Zhan J. and Jun Y. B., Soft BL-algebras based on fuzzy sets, Computers and Mathematics with Applications, 59 (2010) 2037-2046.

72. Zhang Q. and Meng G., On the lattice of fuzzy ideals of a ring, Fuzzy Sets and Systems, 112, 2 (2000) 349-353.

73. Zou Y. and Xiao Z., Data analysis approaches of soft sets under incomplete information, Knowledge-Based Systems, 21, 1 (2008) 941-945.

ÖZGEÇMİŞ

Yıldıray ÇELİK 1982 yılında Rize'nin Pazar ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Artvin/Arhavi'de tamamladı. 2000 yılında girdiği Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2004 yılında bitirdi. 2009 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü'nden Yüksek Lisans derecesini aldı ve aynı enstitüde Doktora eğitimine başladı. 2008 yılında Ordu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesine Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2010 yılında 2547 sayılı Yükseköğretim kanununun 35. maddesi gereğince KTÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümüne görevlendirildi. Halen bu görevini sürdürmekte olup, iyi derecede İngilizce bilmektedir.

Başlıca Eserler

1. Çelik Y., Ekiz C. and Yamak S., A new view on soft rings, Hacettepe J. Math. Stat., 40, 2 (2011) 273-286.

2. Çelik Y., Ekiz C. and Yamak S., Applications of fuzzy soft sets in ring theory, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 5, 3 (2013) 451-462.

3. Çelik Y. and Yamak S., Fuzzy soft set theory applied to medical diagnosis using fuzzy arithmetic operations, Journal of Inequalities and Applications, (2013) doi: 10.1186/1029-242X-2013-82.