BAĞIMLI RİSKLERİN ÇOKLU ZAMAN SERİSİ MODELİ

MULTIVARIATE TIME SERIES MODEL OF DEPENDENT RISKS

Selim DAĞLIOĞLU

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

2008

BAĞIMLI RİSKLERİN ÇOKLU ZAMAN SERİSİ MODELİ

Selim DAĞLIOĞLU

ÖZ

Aktüeryal risk modelleri genellikle bağımsızlık varsayımları altında kurulur. Ancak bu varsayımlar, çeşitli sebeplerle poliçeler arasında bağımlılık oluşması ya da herhangi bir dönemdeki hasarlar ile geçmiş dönemlerde gerçekleşmiş hasarlar arasında ilişki oluşması gibi durumlarda sağlanmaz. Bu çalışmada, herhangi bir dönemdeki hasarlar ile geçmiş dönemlerde gerçekleşmiş hasarlar arasında oluşan ilişkinin modellenmesinde kullanılan zaman serileri modelleri ele alınmıştır.

Çalışmada yıllık kazançları (herhangi bir yılda toplanan primler eksi aynı yılda ödenen hasarlar) ve bağımsız sigorta kollarından oluşan portföylerde hasar ve prim süreçlerini modellemekte kullanılan tek değişkenli zaman serisi modelleri ile bağımlı sigorta kollarından oluşan portföylerde bağımlı sınıfların prim ve hasar süreçlerinin birlikte modellendiği çok değişkenli zaman serisi modelleri ve bu modellerin kullanılabilmesi için gerekli koşullar incelenmiştir. Ayrıca kullanılan bu modellerde düzeltme katsayısının ve iflas olasılıkları için üst sınırların nasıl hesaplanacağı da gösterilmiştir. Sayısal örneklerde bu modeller ele alınarak faiz oranlarının, başlangıç sermayelerinin, bağımlılığın, hata terimlerinin ortalamasındaki değişimin ve hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi sayısal olarak incelenmiştir.

Çalışmanın sonucunda bağımlılığın iflas olasılıklarının üst sınırlarını arttırdığı görülmüştür. Ayrıca hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıkları üzerinde önemli bir etkisinin olduğu da görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Bağımlı riskler, Lundberg tipi eşitsizlikler, tek değişkenli ve çok değişkenli zaman serileri, net-kar şartı, iflas olasılığı, düzeltme katsayısı

Danışman: Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü

MULTIVARIATE TIME SERIES MODEL OF DEPENDENT RISKS

Selim DAĞLIOĞLU

ABSTRACT

Actuarial risk models are generally constructed within the framework of independency assumptions. But these assumptions do not hold in many situations like as because of many reasons there is the correlation between lines of business or between the current claim and previous claims. In this study, time series models used for modeling the correlation between the current claim and previous claims are reviewed.

In the study, univariate time series models used for modeling the annual gains and modeling both premiums and claims processes in the independent class of business and multivariate time series models modeling claim process and premium process of a portfolio which has dependent classes of business together and conditions which are necessary to use these models are examined. Furthermore, it is also stated how adjustment coefficients and upper bounds for ruin probability can be calculated when these models are used. In numerical examples, effects of interest rates, initial surplus, dependency and distributions of error terms on the ruin probability are invested.

In the conclusion of the study, it is seen that dependency increase the ruin probabilities and it is also seen that the effects of distributions of error terms are very important on the ruin probabilities, too.

Keywords: dependent risks, Lundberg-type inequality, univariate and multivariate time series, net-profit condition, ruin probability, adjustment coefficient

Advisor: Prof. Dr. Cenap ERDEMİR, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences

TEŞEKKÜR

Tez konusunun seçiminde beni teşvik eden, çalışma süresince karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında ve çalışmanın sonlandırılmasında yol gösterici olan danışmanım Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR'e,

Bu noktaya gelebilmemde büyük emekleri olan, beni her zaman destekleyen ve yanımda olan aileme,

Çalışma süresince hiçbir yardımı ve hoşgörüyü esirgemeyen ve her zaman yanımda olan eşim Hatice DAĞLIOĞLU'na,

Çalışma süresince bana çalışma ortamımda sağladıkları hoşgörüden ve yardımlardan ötürü amirlerime ve çalışma arkadaşlarıma,

Teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Aktüeryal risk teorisinde birçok model bağımsızlık varsayımı altında kurulur.

Örneğin,
Bireysel risk modelleri sigorta şirketlerinin portföyündeki her bir poliçenin tek tek ele alınarak sigorta şirketinin toplam hasarlarının istatistiksel olarak ifade edilmesidir. Bireysel risk modelleri kısa dönem için oluşturulurken aşağıdaki varsayımlar yapılır:

a) Bireysel risk modelleri paranın zaman değerini içermez (faiz yoktur; $r = 0$);

b) $i.$ poliçede meydana gelen hasar miktarını gösteren X_i'ler birbirinden bağımsız rastlantı değişkenleridir;

c) Model kapalıdır [portföye giriş ve çıkış yoktur; yani sigorta şirketinin portföyündeki poliçe sayısını gösteren n, dönemin başında belirlenmiş (bilinen) sabit bir sayıdır ve dönem boyunca değişmez].

Yukarıdaki varsayımlar altında sigorta şirketinin portföyünde meydana gelen toplam hasar miktarını gösteren S bir rastlantı değişkeni olmak üzere

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

şeklinde tanımlanır.

Kollektif risk modelinde ise hasarların bütün portföy için oluştuğu düşünülür. Portföydeki hasarlar bütün olarak değerlendirildiği için kollektif risk modelleri her bir poliçede meydana gelen hasarları ayrı ayrı değerlendiren bireysel risk modellerinden daha etkindir. N, verilen bir zaman aralığında portföy tarafından üretilen hasarların sayısını; X_1, ilk hasar miktarını; X_2, ikinci hasar miktarını ve bu şekilde devam ederek X_N, $N.$ hasar miktarını göstersin. İncelenen dönem için portföy tarafından üretilen toplam hasar miktarını gösteren kollektif risk modeli,

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_N$$

şeklinde tanımlanır.

Kollektif risk modeli kurulurken iki temel varsayım yapılır:

1. $X_1, X_2,...$'ler bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenlerdir;

2. $N, X_1, X_2,...$ rastlantı değişkenleri karşılıklı olarak bağımsızdır (Bowers et. al., 1997).

Klasik modeller bağımsızlık varsayımları altında kurulmasına rağmen sigorta ve reasurans ürünlerinin artan karmaşıklığı ve pek çok durumda bu varsayımların sağlanmaması nedeniyle aktüerya literatürü üzerinde çalışan araştırmacılar arasında bağımlı risklerin modellenmesine ilgi her geçen gün artmaktadır. Literatürde risklerin bağımlılığına sebep olan iki tür ilişki vardır. Birincisi, portföyde bulunan poliçeler arasındaki ilişkiler ya da farklı sigorta kollarının arasındaki ilişki şeklindedir. İkinci tür ilişki ise mevcut hasar ile eski hasarlar arasındaki ilişkidir.

Birinci tür ilişkiye aşağıdaki örnekler verilebilir:

- Portföyde aynı kişiye ait çeşitli poliçeler olabilir. Bu durumda poliçe sayısı sigortalı kişilerin sayısına eşit değildir. Örneğin, portföyde aynı kişiye ait sağlık sigortası poliçesi olabileceği gibi motorlu araç sigortası poliçesi de olabilir. Bu durumda kişi aracıyla büyük bir kaza yaptığında her iki poliçede de hasar oluşur,
- Aynı portföyde bir çifte (karı koca) ait poliçeler olabilir. Çiftlerin ölümlülükleri arasında bağımlılık olması gerektiği açıktır. Her ikisi de daha fazla ya da daha az aynı riske maruz kalır,
- Bir emeklilik fonu aynı şirket için çalışan kişilerin poliçelerini kapsayabilir; böylece onların ölümlülüğü belirli bir ölçüde bağımlıdır,
- Eğer belirli bir bölgede ya da kuruluştaki sigortalı kişilerin oranı yeteri kadar fazla ise fırtınalar, patlamalar, depremler, salgın hastalıklar gibi felaketler sigortacı için hasarların birikimine neden olabilir. Meydana gelen bir felaketten sonra portföyde bulunan birçok poliçede hasar oluşabilir (Dhaene and Goovaerts,1997).
- Kaza sigortasındaki (casualty insurance) çeşitli süreçler ilişkili rastlantı değişkeni içerir. Örnek olarak, aşağıda belirtilen hasarları içeren seyahat sigortası poliçeleri ele alınsın. Bu sigorta poliçesinin kapsadığı birçok hasar birbiri ile ilişkilidir. Örneğin, tıbbi bedeller, geri dönme bedelleri, ölüm durumunda toptan ödenen bedel, sakatlık durumundaki tazminat (maluliyet derecesine orantılı olarak), bagaj

kaybı, farklı seyahat yardımları v.b. sigorta türleri altındaki hasarların bazıları açık bir şekilde pozitif ilişkili iken (tıbbi bedeller ve sakatlık ödemeleri) diğerleri ise negatif ilişkilidir (ölüm ve maluliyet ödemeleri). Araba sigortasında tipik bir kontrat mekanik hasarlar, beden yaralanmaları ve hatta avukat ücretleri gibi iki ya da daha fazla sigorta türünü içerir. Bu tip bir durumda tek bir kazanın farklı sigorta türleriyle ilişkili hasarlar üretmesi olasıdır: mekanik hasar onarma bedeli, vücut yaralanmaları durumunda tıbbi ve hastaneye yatırma ücretleri için ödeme ve mahkemede savunma ücreti v.b.(Cossette et. al., 2000).

Poliçeler arasında ilişki olması ya da farklı sigorta kolları arasında ilişki olması sonucu bağımlı risklerin olduğu bir portföydeki bağımlı risklerin modellenmesinde kullanılan bağımlı yapılı risk modelleri üzerinde son yıllarda pek çok araştırma yapılmıştır.

Dhaene ve Goovaerts (1997), bağımlılık ilişkilerinin hangi durumlarda ortaya çıkacağını belirterek en büyük hasar oranı fazlası (stop-loss) primlerine neden olan bireyler arasındaki bağımlılık türlerini araştırmışlardır. Ayrıca yalnızca çiftlerin (karı koca) riskleri arasındaki bağımlılığın olduğu hayat sigortası portföyünü incelemişler ve çiftin bireysel riskleri arasındaki ilişkinin değişiminin hasar oranı fazlası primleri üzerindeki etkisini araştırmışlardır.

Ambagaspitiya (1998), her birinin toplam dağılıma sahip olduğu ilişkili farklı sigorta kollarının birleşiminden oluşan bir portföyde hasar sayıları dağılımı belli bir biçimde olduğunda toplam dağılımı hesaplamak için gerekli formülleri ortaya koymuştur ve özel bir durum olarak hasar sayılarının dağılımı çoklu poisson'a uyduğunda bütün portföy için toplam dağılımın bileşik poisson olduğunu göstermiştir. Daha sonra Ambagaspitiya (1999), çok değişkenli toplam hasarların iki sınıfını göz önünde bulundurmuştur. Birçok hasarın bir kazadan oluştuğu durumlarda ortaya çıkan ilk sınıf için bir model ortaya koymuştur. Modeli kolay uygulanır hale getirmek için hasarın sıfır olmayan bileşenlerin belirli sayılı rastgele vektörü olduğu bir hasar olduğunu varsaymıştır. Çok değişkenli hasar sayıları ve tek değişkenli hasar büyüklüğü ile ikinci sınıf için bir model de ortaya koymuştur.

Wang (1998), ilişkili riskleri modellemek ve birleştirmek için çeşitli araçlar sunmuştur. Çeşitli ilişki yapılarını copula, ortak karma (common mixture), bileşen (component) ve çarpıklık (distortion) modelleri kullanarak oluşturmuştur. Bu ilişki yapılarını bileşik birikimli dağılım fonksiyonu ya da birleşik karakteristik fonksiyon açısından belirlenmiş ve onları Monte Carlo simülasyon ya da doğru Fourier dönüşümü kullanarak etkili birleştirme yöntemleri ile vermiştir. Keyfi marjinaller ve herhangi (pozitif tanımlı) ilişki katsayıları matrisi (ya da Kendall tau) ile ilişkili risklerin birleştirilmesi için basit ama genel yöntemler önermiştir.

Denuit ve diğerleri (1999), bireysel kontratların keyfi n sayısı için S toplam hasarın dağılımı üzerinde sınırlar belirlemişlerdir, özellikle $n = 2$ ve $n \geq 3$ durumları için sınırlar vermişlerdir.

Cossette, Denuit ve Marceau (2000), toplam hasarın birikimli dağılım fonksiyonu üzerinde sınırlar elde etmişlerdir. Bu sınırları, hasar miktarlarının marjinal dağılımları bilindiğinde ya da kısmi bilgiler mümkün olduğunda türetmişlerdir; diğer bir ifadeyle marjinal dağılımları bilindiğinde, tek bir hasar miktarı üzerindeki stokastik sınırlar ile marjinal dağılımları bilinmediğinde tek bir hasar miktarı üzerindeki stokastik sınırları elde etmişlerdir.

Cossette ve Marceau (2000), ilişkili sigorta kolları için kesikli (kesikli zamanlı) risk modelini incelemişlerdir. Bağımlılığın iki farklı şekilde olduğu durumda, bağımlılığın sonlu zamanlı iflas olasılıkları ve düzeltme katsayısı üzerindeki etkisini de incelemişlerdir. Sigorta kolları arasında bağımlılığın ilişki yapılarını geliştirmek için Wang (1998) tarafından önerilen Poisson Ortak Şok Modelini (Poisson Common Shock Model) ve Negatif Binom modelini kullanmışlardır.

Müller ve Pflug (2001), bağımlı artışlı (increment) bir risk süreci durumunda asimptotik iflas olasılıkları için Lundberg tipi sonuçlar türetmişlerdir. Sadece olasılık çıkaran fonksiyonun olduğu ve onların logaritmik ortalamalarının bir noktada birleştiği varsayımı altında yalnızca basit üstel eşitsizlikleri kullanan ve büyük sapma teorisi sonuçlarına dayanmayan Lundberg tipi limit sonucunun temel bir ispatını vermişlerdir. Dahası Lundberg katsayısını etkileyen hasarlar arasında nasıl bir bağımlılık olduğunu araştırmak için bağımlı sıralamayı kullanarak

Gaussian, AR(1) süreçleri ve uyarlanmış prim kuralları ile risk sürecini içeren birçok örnek vermişlerdir.
Ribas ve diğerleri (2003), bağımlı risklerin bağımsız çiftlerine (karı koca) ait poliçelerden oluşan bir portföyde bireysel hasar modelindeki birleşik hasarların dağılımının hesaplanmasıyla ilgilenmişlerdir. Çiftlerin ölümlülüklerinin bağımlı (pozitif ya da negatif) olduğu varsayımı altında, her bir çifte ait iki değişkenli olasılıklarının, her zaman bağımsız ve karşılıklı olarak özel olanlarının (komonotoik) arasındaki konveks doğrusal birleşimi olarak yazılabileceğini göstermişlerdir. İki değişkenli olasılıklar için bu yapıyı göz önünde bulundurarak portföyün toplam (aggregate) hasarlarının dağılımını hesaplamak için iki özyineli (recursive) model elde etmişlerdir. Bu özyineli modeller yardımıyla özellikle bağımlı çiftlerin birleşiminden oluşan hayat sigortası alt portföylerinin toplam hasar dağılımının hesaplanması ve ilişkili hasar oranı fazlası (stop-loss) primlerinin üzerindeki bağımlılığın etkisinin açıklanmasını büyük ölçüde kolaylaştırmışlardır.

Wu ve diğerleri (2003), ilişki modeli (IR) olarak bilinen sigorta sınıflarının bağımlı olduğu kesikli risk modelini önermişlerdir. Model, bir sınıftaki hasar sayısının yalnızca kendi sınıfının riskini yönetmediği ayrıca diğer sınıflardaki riskleri de yönettiğini varsaymışlardır. Hasar sayısı dağılımlarının bir ailesi için IR modelini incelemişlerdir. Cossette ve Marceau (2000)'nun bağımlılık yapısını modellemek için önerdiği Poisson Ortak Şok Modeli (Poisson Common Shock Model) ve kesikli durumda Ortak Bileşenli Negatif Binom Modeli (Negative Binomial Model with Common Component) gibi diğer ilişkili birleşik hasar modelleriyle ilişki modelinin sonlu zamanlı iflas olasılıkları için bu modellere göre elde edilen düzeltme katsayıları açısından makaleler arasındaki karşılaştırmayı da yapmışlardır.

Daha öncede belirtildiği gibi, risklerin bağımlılığına neden olan ikinci tür ilişki biçiminin, son döneme ait mevcut hasar ile önceki dönemlere ait hasarlar arasındaki ilişki şeklindedir. Bu türdeki ilişkiler genel olarak geçmiş dönemlerde portföyde bulunan poliçelerin mevcut dönemde de portföyde kalmasından kaynaklanır ve bir poliçeye ait geçmiş dönemlerde gerçekleşen bir hasarın gelecek dönemlerde gerçekleşecek hasarların meydana gelmesini etkileyeceği düşüncesine dayanır. Bu türdeki ilişkilerin modellenmesinde zaman serileri yaklaşımı kullanılır ve iflas olasılıklarının gösteriminde martingale kuramından

yararlanılır. Literatürde, zaman serileri yaklaşımı kullanılarak risklerin bağımlılık yapısı üç şekilde modellenmektedir:
İlk şekil olarak, sigorta şirketinin n. yılda topladığı primlerden aynı yılda ödediği hasarların çıkarılmasıyla elde ettiği kazancı gösteren $\{G_n\}$ sürecinin, otoregresif hareketli ortalama modeli ile ya da bu modelde çeşitli dönüşümler yapılarak elde edilen otoregresif model ya da hareketli ortalama modeli yardımıyla modellenmesidir. $\{G_n\}$ sürecinin modellenmesini ilk olarak Gerber (1982) incelemiştir. Gerber (1982), sigorta şirketinin yıllık kazançlarının bağımlı rastlantı değişkenleri olduğu bu modellerde iflas olasılıklarını da incelemiştir. Ayrıca Gerber (1982), özel durum olarak doğrusal otoregresif ve hareketli ortalama modellerini incelemiştir. Daha sonra, Promislow (1991), doğrusal modeldeki iflas olasılıklarıyla ilgili Gerber'in bazı sonuçlarını genellemiştir. Özellikle Promislow (1991), kazanç modellerinde X_n hata terimlerinin dağılımı için sınırlılık kısıtlamasını kaldırarak modelin durağanlık gerekliliklerini yumuşatmıştır. Bununla birlikte Christ ve Steinebach (1995), Gerber(1982) tarafından açıklanan ARMA(p,q) risk modelinde düzeltme (adjustment) katsayısının tahminini incelemiş ve basit moment çıkaran fonksiyon tipi tahmin edici önermişlerdir. Son olarak Zhang (2005), sürekli zamanlı durum için benzer eşitsizlikleri incelemiştir. Ayrıca Zhang (2005), Gerber (1982)'in kullandığı benzer teknikleri kullanarak iflas olasılığı için hem üstel hem de üstel olmayan üst sınırların elde edildiği iflas olasılıkları için bazı sonuçlar vermiştir.

İkinci tür modelleme kesikli sigorta risk modelleri için Bowers ve diğerleri tarafından 1986 yılında önerilmiştir (Promislow, 1991). Bowers ve diğerleri, hasar sürecinin otoregresif bir modele uyduğu ve primlerin sabit miktarlarla toplandığı varsayımıyla iflas olasılıkları için üst sınır bulmuşlardır. Daha sonra Yang ve Zhang (2003), hasar sürecinin otoregresif bir modele uyduğu varsayımıyla birlikte prim sürecinin de otoregresif bir modele uyduğunu varsaymıştır. Yang ve Zhang (2003), hasar ve prim süreçlerinin sabit faiz oranı ile otoregresif modele uyduğu varsayımıyla kesikli sigorta risk modeli için hem üstel hem de üstel olmayan üst sınırları elde etmek için martingale eşitsizliklerini kullanmışlardır.

Üçüncü ve son tür model Zhang ve diğerleri (2007) tarafından önerilmiştir. Zhang ve diğerleri (2007), her sınıftaki primlerin ve hasarların birinci derece çoklu otoregresif zaman serisi modeline uyduğunu varsaymışlardır. Bu varsayımla birlikte sabit faiz oranı ile geliştirilmiş artık süreci tanımlayarak birinci derece çoklu otoregresif model ve martingale eşitsizlikleri yardımıyla üstel sınırları elde etmişlerdir. Ayrıca sabit primler ve sabit faiz oranı ile iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföydeki iki hasar süreci için iki değişkenli birinci derece otoregresif model önermişler ve bu model için geliştirilmiş artık süreci oluşturarak iflas olasılıkları için üstel üst sınırlar elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, ikinci tür ilişki yapısına uygun olarak, kesikli risk modellerinde bağımlılığın mevcut hasarlar ile eski hasarlar arasındaki ilişkiden kaynaklandığı varsayılarak oluşturulan üç tür model incelenmiştir:

- İlk model, Bowers ve diğerleri (1997) tarafından primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasar süreçlerinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu varsayımıyla oluşturulmuş modeldir. Daha sonra Yang ve Zhang (2003), bu modele paranın zaman değerini eklemiş ve hasar süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu varsayımına ek olarak prim süreçlerinin de birinci derece otoregresif modele uyduğu varsayımını eklemiştir.

- İkinci model, Gerber (1982) tarafından önerilen $\{G_n\}$ kazaç süreci (n. yılda toplanan primler eksi aynı yılda ödenen hasar miktarları) modelleridir. Daha sonra Promislow (1991), bu modelden hata terimlerinin dağılımının sınırlı olduğu kısıtını çıkarmış ve Christ ve Steinebach (1995) bu bağımlı risk modelleri geçerli olduğunda düzeltme katsayısının tahmin edilebilmesi için tahmin ediciler önermişlerdir. Son olarak Zhang (2005), Gerber (1982) tarafından önerilen bu modelin sürekli zamanlı durumlarda da kullanılabileceğini göstermiştir.

- Son model ise Zhang ve diğerleri (2007) tarafından önerilen prim ve hasar süreçlerinin çok değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu model ile primlerin sabit miktarlarla toplandığı iki bağımlı sigorta koluna ait poliçelerden oluşan bir portföydeki iki sigorta koluna ait hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modeldir.

Bu çalışmada, yukarıda üç farklı model olarak belirtilen modelleri incelemek amacıyla ikinci bölümde, ilk olarak bu modellerde kullanılan zaman serisi modellerine ilişkin genel bilgiler verilmiştir. Daha sonra bağımlı risk modelleri ve bu modellerin sağlanması için gerekli koşullar incelenmiştir. Üçüncü bölümde, bağımlı yapılı kesikli risklerin bu modellere uyduğu durumlarda artık süreçleri ile net-kar şartının nasıl oluşturulduğu ve düzeltme katsayısının nasıl hesaplandığı incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise, ilk olarak her bir model için düzeltme katsayılarının hesaplanmasında kullanılan hata terimlerinin dağılımının normal ve üstel dağılıma uyduğu durumlar için düzeltme katsayısının nasıl hesaplandığı açık bir şekilde gösterilmiştir. Daha sonra faiz oranlarının, başlangıç sermayesinin, modellerde bağımlılığın derecesini gösteren katsayıların ve primler sabit miktarlarla toplandığında, primlerin toplandığı bu miktarların iflas olasılıkları üzerindeki etkisi ve hata terimlerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde ise çalışmanın sonucunda elde edilen bulgular tartışılmıştır.

İKİNCİ BÖLÜM

2. GENEL BİLGİLER VE BAĞIMLI RİSKLERİN ZAMAN SERİSİ MODELLERİ

Sigortacılıkta genellikle aynı portföyde bulunan poliçelerde oluşan hasarların karşılıklı olarak bağımsız oldukları varsayılır. Ancak bu bağımsızlık varsayımının gerçeği her zaman yansıtmayacağı açıktır. Şöyleki;

- Portföyde aynı kişiye ait çeşitli poliçeler olabilir. Bu durumda poliçe sayısı sigortalı kişilerin sayısına eşit değildir. Örneğin, portföyde aynı kişiye ait sağlık sigortası poliçesi olabileceği gibi motorlu araç sigortası poliçesi de olabilir. Bu durumda kişi aracıyla büyük bir kaza yaptığında her iki poliçede de hasar oluşur,
- Aynı portföyde bir çifte ait poliçeler olabilir. Çiftlerin aynı ortamda yaşamaları, aynı beslenme alışkanlıklarının olması, çeşitli felaketlerde, kazalarda ya da hastalıklarda birlikte olmaları v.b. nedenlerle çiftlerin ölümlülükleri arasında bağımlılık vardır. Çeşitli olaylarda her ikisi de daha fazla ya da daha az aynı riske maruz kalır,
- Bilindiği gibi bazı meslek kollarında çalışanların ortalama ölüm yaşları, işin niteliğinden kaynaklanan nedenlerden (sağlıksız çalışma ortamı, stres, kaza riskinin fazla olması, v.b.) dolayı düşüktür. Bu nedenle, bir emeklilik fonu aynı meslek kolunda çalışan kişilerin poliçelerini kapsadığında poliçeler arasında bağımlılık oluşur,
- Eğer belirli bir bölgedeki ya da kuruluştaki sigortalı kişilerin oranı yeteri kadar fazla ise fırtınalar, patlamalar, depremler, salgın hastalıklar gibi felaketler sigortacı için hasarların birikimine neden olabilir. Meydana gelen bir felaketten sonra portföyde bulunan birçok poliçede hasar oluşabilir (Dhaene and Goovaerts,1997).

Bir portföydeki poliçelerde oluşan hasarlar arasında yukarıda bahsedilen ilişkilerden başka, genel olarak geçmiş dönemde portföyde bulunan poliçelerin bir kısmının mevcut dönemde de portföyde kalmasından kaynaklanan, poliçelerde geçmiş dönemde oluşan hasarlar ile mevcut dönem hasarı arasındaki ilişki ve p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar ve prim süreçlerinin çok değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu ilişki türleri de vardır. Bu bölümde, zaman serilerinde kullanılan bazı temel kavramlar incelendikten sonra bağımlı risklerin tek değişkenli ve çok değişkenli zaman serisi modelleri incelenmiştir.

2.1. Tanım ve Kavramlar

Stokastik Süreç: Z_t rastlantı değişkenlerinin dizinlenmiş kümesi olup $\{Z_t\}$ ile gösterilir. t, T dizin kümesinin bir öğesidir. T'nin kesikli ve sürekli olup olmadığına bağlı olarak süreçler kesikli veya sürekli olarak sınıflandırılabilir.

Zaman Serisi : Z_t stokastik sürecinin gerçekleşmesi olup z_t ile gösterilir. T dizin kümesinin özelliğine bağlı olarak zaman serileri sürekli veya kesikli olabilir: t, $t = 1,2,...,n$ şeklinde sonlu veya sayılabilir sonsuzlukta değerler aldığında z_t zaman serisi kesikli; t, $m < t < n$ şeklinde bir aralıktaki her bir değeri alabildiğinde z_t zaman serisi süreklidir.

Gecikmeli Seriler: Zaman serileri verilerinin dönem kaydırılması ile elde edilen serilerdir. Eğer orijinal zaman serisi trende sahip ise bu serinin k gecikmeli serisi orijinal seriyi k dönem sonrasından takip ederek yine trende sahip olacaktır. Aynı şekilde, mevsimselliğe sahip serilerin gecikmeleri de yine mevsimselliğe sahip olacaktır. Sonuç olarak, gecikmeli seriler orijinal seriyle aynı yapıya sahiptir ve bu serilerde orijinal seriye göre yapısal bir değişiklik görülmez.

Karma modellerde işlemlerin kolay yapılabilmesi bakımından $Bz_t = z_{t-1}$ biçiminde tanımlanan B gecikme işlemcisi kullanılmaktadır. Buradan, k gecikmeli serinin $B^k z_t$ şeklinde gösterilir.

Otokorelasyon (özilişki) Fonksiyonu: Zaman serisiyle bu serinin gecikmeli serileri arasındaki ilişkileri verir. Örneğin, z_t ile z_{t+k} arasındaki otokorelasyon $(Z_1, Z_{1+k}), (Z_2, Z_{2+k}),...,(Z_{T-k}, Z_T)$ veri çiftleri arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu ilişki k'ıncı gecikmeye ait otokorelasyon olmaktadır. Tüm gecikmelere ait otokorelasyon katsayısı değerleri otokorelasyon fonksiyonunu (ACF) oluşturmaktadır. Bu durumda otokorelasyon katsayısı,

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{T-k}(z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z})}{\sum_{t=1}^{T}(z_t - \bar{z})^2} \qquad (k = 1,2,...,(T-2)) \tag{2.1}$$

formülü yardımıyla hesaplanmaktadır. r_k otokorelasyon katsayısı $[-1,1]$ aralığında değer alır. Gecikme sayılarına (k) karşılık otokorelasyon değerlerinin yer aldığı grafiğe otokorelasyon fonksiyonu grafiği ya da korelogram adı verilir. Bu grafikte x ekseninde gecikmeler, y ekseninde ise otokorelasyon değerleri yer almaktadır.

Kısmi Otokorelasyon Fonksiyonu: Diğer değişkenler sabit iken iki değişken arasındaki ilişkinin miktarını gösterir. Diğer bir deyişle, kısmi otokorelasyon katsayısı diğer gecikmeli serilerin ($z_{t-1}, z_{t-2},..., z_{t-k+1}$) etkileri ihmal edildiğinde z_t ile z_{t+k} serileri arasındaki ilişki miktarını verir. Kısmi otokorelasyon katsayısı,

$$r_{kk} = \frac{r_k - \sum_{j=1}^{k-1}(r_{k-1,j})(r_{k-j})}{1 - \sum_{j=1}^{k-1}(r_{k-1,j})(r_j)} \tag{2.2}$$

formülünden elde edilmektedir. Burada

r_k : k gecikmeli otokorelasyon katsayısı,

r_{kj}: j. gecikmeli serinin etkisi yok edildiğinde k gecikmeli kısmi otokorelasyon katsayısıdır; yani $r_{kj} = r_{k-1,j} - (r_{kk})(r_{k-1,k-j})$

Her zaman birinci gecikmeye ait otokorelasyon katsayısının değeri ile kısmi otokorelasyon katsayısının değeri birbirine eşittir; yani $r_{11} = r_1$, şeklindedir. Tüm gecikmelere ait kısmi otokorelasyon katsayısı değerleri kısmi otokorelasyon fonksiyonunu (PACF) oluşturur.

Fark İşlemleri: Zaman serisinin son değerinden belli bir dönem önceki değerinin çıkarılması işlemine fark işlemi denlir. Fark işlemlerinden serideki değişimin yönünü ve büyüklüğünü görebilmek amacıyla yararlanılır. Ayrıca fark işlemleriyle serideki trend ya da mevsimsel dalgalanmaları yok etmek mümkündür.

Zaman serisinin k . farkları,

$$\Delta^k z_t = z_t - z_{t-k} \tag{2.3}$$

işlemiyle elde edilir. Zaman serilerinde fark işlemlerine birinci fark alma işlemiyle başlanır ve serideki trendin etkisi ya da mevsimsel serilerde mevsimselliğin etkisi yok edilene kadar fark alma işlemlerine devam edilir.

Durağanlık: Serinin dağılım fonksiyonu zaman içinde değişmiyor ise, yani

$$F(z_{t_1}, z_{t_2}, ..., z_{t_T}) = F(z_{t_{1+k}}, z_{t_{2+k}}, ..., z_{t_{T+k}}) \tag{2.4}$$

eşitliği sağlanıyorsa zaman serisinin durağan olduğu söylenir. Burada k gecikme sayısını göstermektedir. Eğer bir seri durağan ise bu serinin beklenen değeri ve varyansı sabit, kovaryansı zamandan bağımsız sadece gecikme sayısına bağlıdır. Dolayısıyla $E[Z_t] = \mu$, $V(Z_t) = \sigma^2$ ve $\text{cov}(Z_t, Z_{t+k}) = \gamma_k$ eşitliklerinin hepsi sağlanmalıdır.

Akgürültü Süreci: $E[Z_t] = \mu$, $V(Z_t) = \sigma^2$ ve $\text{cov}(Z_t, Z_{t+k}) = 0$ koşullarını sağlayan serilere akgürültü süreci denir. Akgürültü serisi rastlantısal hareketlere sahip modellenemez bir seri iken durağan serilerin hareketlerinin belli bir sistematiği vardır. Bu nedenle, durağan seriler modellenebilmektedir. Akgürültü serisinin tüm gecikmelerindeki otokorelasyon ve kısmi otokorelasyon değerleri önemsizdir. Bir modelin ele alınan seriye uygun olup olmadığının tespiti hata teriminin incelenmesi ile yapılabilmektedir. Bir modelin doğruluğu modelden elde edilen tahmin değerleri ile gerçek değerler arasındaki farkın, yani $e_t = z_t - \hat{z}_t$ bir başka deyişle hata teriminin küçüklüğü ile doğru orantılı olmaktadır. Hata serisi akgürültü serisi olmadığı takdirde model istatistiksel olarak yanlıştır ve bu model ile yapılan tahmin ve öngörülere güvenilmez. Hata terimleri rastgele hareketlere sahip olmalı ve ele alınan zaman serisi ile ilgili herhangi bir bilgi taşımamalıdır; yani hata terimleri modellenememelidir.

2.2. Zaman Serisi Modelleri

Bu bölümde, tek değişkenli ve çok değişkenli zaman serisi modelleri incelenmiştir.

2.2.1. Tek Değişkenli Modeller

Bu bölümde, bir değişkene ait süreçlerin modellenmesinde kullanılan tek değişkenli zaman serisi modelleri incelenmiştir.

2.2.1.1. Otoregresif Modeller

Bir sürecin otoregresif gösteriminde yalnızca π ağırlıklarının sonlu sayıda ve sıfır olmayan değerleri için; yani $\pi_1 = \phi_1,\ \pi_2 = \phi_2,\ \ldots, \pi_p = \phi_p$ ve $k > p$ için $\pi_k = 0$ ise sürecin p. derece otoregresif süreç (model) olduğu söylenir ve bu süreç $AR(p)$ ile gösterilir. Otoregresif model,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + e_t \tag{2.5}$$

ya da

$$\phi_p(B) Z_t = e_t$$

şeklinde gösterilir; burada $\phi_p(B) = \left(1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p\right)$'dir.

$\sum_{j=1}^{\infty} \left|\pi_j\right| = \sum_{j=1}^{p} \left|\phi_j\right| < \infty$ olduğundan süreç her zaman tersinirdir. Sürecin durağan olması için $\phi_p(B) = 0$ denkleminin köklerinin birim çemberin dışında olması gerekir. $AR(p)$ modelleri zaman serisinin bugünkü değerinin geçmiş değerler artı rastlantı hareketlerine bağlı olduğu durumları modellemede kullanılır.

$AR(p)$ modelinde otokorelasyon fonksiyonu için ilişki,

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \ldots + \phi_p \rho_{k-p} \qquad (k > 0)$$

eşitliği ile yazılabilir. Buradan ACF ρ_k, $k > 0$ için

$$\phi_p(B)_{\rho_k} = \left(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-...-\phi_p B^p\right)_{\rho_k} = 0$$

fark denklemi ile hesaplanır. Bunun sonucunda,

$$\phi_p(B) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-G_i B\right)^{d_i} \tag{2.6}$$

eşitliği yazılabilir; burada $\sum_{i=1}^{m} d_i = p$ ve G_i^{-1} $(i=1,...,m)$, $\phi_p(B)=0$ denkleminin d_i çok katlılığının kökleridir. Buradan ACF ρ_k, $\phi_p(B)=0$ denkleminin köklerine bağlı olarak üstel azalışların ve sönük sinüs dalgalarının karışımıdır. Ayrıca $AR(p)$ modelinde PACF ϕ_{kk}, p. gecikmeden sonra sıfır olur.

$AR(p)$ süreci için durağanlık koşulu $\left|G_i^{-1}\right|>1$ ve $\left|G_i\right|<1$ şeklindedir.

$AR(p)$ sürecinde $p=1$ olduğu durumda modele, birinci derece otoregresif model denir ve $AR(1)$ ile gösterilir. $AR(1)$ modeli,

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t \tag{2.7}$$

ya da

$$\left(1-\phi_1 B\right)Z_t = e_t$$

şeklindedir. $AR(1)$ süreci de $AR(p)$ süreci gibi daima tersinirdir. Sürecin durağan olması için $(1-\phi_1 B)=0$ denkleminin köklerinin birim çemberin dışında olması gerekir. Bunun için $\left|\phi_1\right|<1$ olması yeterlidir.

AR (1) sürecinin ACF'si: Durağan AR(1) sürecinde $\left|\phi_1\right|<1$ olduğundan ACF ϕ_1' in işaretine bağlı olarak iki şekilden birine benzer biçimde üstel olarak azalır. Eğer $0<\left|\phi_1\right|<1$ ise bütün otokorelasyon pozitif, $-1<\left|\phi_1\right|<0$ ise otokorelasyon negatif değerle başlamak üzere bir negatif bir pozitif değerleri alarak birbirini takip ederek azalan dalgalar şeklindedir; yani otokorelasyon değerlerin mutlak değerleri üstel olarak azalır.

AR(1) sürecinin PACF'si: AR(1) sürecinin için PACF

$$\phi_{kk} = \begin{Bmatrix} P_1 = \phi_1 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{Bmatrix}$$

şeklindedir. Bunun sonucunda PACF ϕ_1' in işaretine bağlı olarak birinci gecikmede pozitif ya da negatif artış gösterir. Diğer gecikmelerde ise sıfırdır.

$AR(p)$ sürecinde $p = 2$ olduğu durumda modele, ikinci derece otoregresif model denir ve $AR(2)$ ile gösterilir. $AR(2)$ modeli,

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) Z_t = e_t$$

ya da

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-2} + \phi_2 Z_{t-2} + e_t \tag{2.8}$$

şeklindedir.

AR(2) süreci sonlu otoregresif modelde olduğu gibi her zaman tersinirdir. $AR(2)$ sürecinin durağan olması için $\phi(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin dışında olmalıdır. Diğer bir deyişle,

$$\begin{aligned} &\phi_2 + \phi_1 < 1 \\ &\phi_2 - \phi_1 < 1 \\ &-1 < \phi_2 < 2 \end{aligned}$$

şeklindeki bütün koşulların sağlanması gerekir.

AR(2) sürecinin ACF' si: Eğer $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$ denkleminin kökleri gerçek ise (kökleri varsa) ACF üstel olarak azalır ancak $(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2) = 0$ denkleminin kökleri gerçek sayı değil ise (kompleks) ACF sönük sinüs dalgaları şeklindedir.

AR(2) sürecinin PACF'si: İlk iki gecikmeden sonra AR(2) sürecinin PACF'si sıfırdır (Wei, 1990).

2.2.1.2. Harekeli Ortalama Modelleri

Süreçlerin hareketleri ortalama gösteriminde yalnızca ψ ağırlıklarının sonlu sayısı sıfır değerlerini almıyorsa; yani $\psi_1 = -\theta_1$, $\psi_2 = -\theta_2, ...,$ $\psi_q = -\theta_q$ ve $k > q$ için $\psi_k = 0$ ise sürecin hareketli ortalama süreci olduğu ya da q. derece hareketli ortalama modeli olduğu söylenir ve MA(q) şeklinde gösterilir. Hareketli ortalama süreci MA(q),

$$Z_t = e_t - \theta_1 e_{t-1} - ... - \theta_q e_{t-q} \tag{2.9}$$

ya da

$$Z_t = \theta(B) e_t$$

şeklindedir; burada $\theta(B) = (1 - \theta_1 B - ... - \theta_q B^q)$ 'dir.

$1 + \theta_1^2 + ... + \theta_q^2 < \infty$ olduğundan sonlu hareketli ortalama süreci daima durağandır. Eğer $\theta(B) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin dışında ise bu hareketli ortalama süreci tersinirdir. MA(q) sürecinin otokorelasyon fonksiyonu q. gecikmeden sonra sıfır değerini alır.

Hareketli ortalama süreçleri kısa zaman aralıklarında ani etkiler üreten olayları tanımlamakta kullanılır.

MA(q) Hareketli Ortalama sürecinde $q = 1$ olduğu durumda modele birinci derece hareketli ortalama modeli denir ve $MA(1)$ ile gösterilir. $MA(1)$ modeli,

$$\theta(B) = (1 - \theta_1 B)$$

ya da

$$\begin{aligned} Z_t &= e_t - \theta_1 e_{t-1} \\ &= (1 - \theta_1 B) e_t \end{aligned} \tag{2.10}$$

şeklinde gösterilir; burada $\{e_t\}$, σ_e^2 sabit varyansı ile sıfır ortalamalı akgürültü süreçtir.

MA(1) sürecinin PACF' si: MA(1) modelinin PACF'si θ_1'in işaretine bağlı olarak iki şekilden birine göre üstel olarak azalır. Eğer işaretler birbirini izleyen şekilde ise pozitif değerle başlar; aksi taktirde negatif değerler alarak azalır. Ayrıca $|\theta_{kk} < 1/2|$ şeklindedir.

MA(1) sürecinin ACF' si: MA(1) sürecinin otokorelasyon fonksiyonu,

$$P_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{1+\theta_1^2} & k = 1 \\ 0 & k > 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Bunun sonucunda ACF birinci gecikmeden sonra sıfır olur.

$1+\theta_1^2$ her zaman sınırlı olduğundan MA(1) süreci daima durağandır. Ancak sürecin tersinir olması için $(1-\theta_1 B) = 0$ denkleminin kökü birim çemberin dışında olmalıdır. Tersinir MA(1) süreci için $B = 1/\theta_1$ olduğundan $|\theta_1| < 1$ olması gerekir. Ayrıca MA(1) sürecinin otokorelasyon fonksiyonundan $2|\rho_k| < 1$ olduğu kolaylıkla görülür. Bunun sonucunda $|\rho_k| < 0.5$'dir.

MA(q) Hareketli Ortalama sürecinde $q = 2$ olduğu durumda modele ikinci derece hareketli ortalama modeli denir ve $MA(2)$ ile gösterilir. $MA(2)$ modeli,

$$\theta(B) = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)$$

ya da

$$Z_t = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)e_t \tag{2.11}$$

şeklinde gösterilir; burada $\{e_t\}$ sıfır ortalamalı akgürültü süreçtir. Sonlu derece hareketli ortalama modelindeki gibi MA(2) süreci daima durağandır. Tersinirlik için $(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2) = 0$ denkleminin kökleri birim çemberin dışındadır. Bunun sonucunda modeldeki katsayıların,

$$\theta_2 + \theta_1 < 1$$
$$\theta_2 - \theta_1 < 1$$

$-1 < \theta_2 < 1$

koşullarının her birini sağlaması gerekir.

MA(2) Sürecinin ACF' si: Otokorelasyon fonksiyonu ikinci gecikmeden sonra sıfır değerini alır.

MA(2) sürecinin PACF'si: MA(2) süreci özel durum olarak MA(1) sürecini içerir. Bunun sonucunda PACF, θ_1 ve θ_2'nin işaretleri ve önemlerine bağlı olarak ya da $(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2)=0$ denklemlerinin köklerine benzer şekilde üstel olarak azalır. Sönük sinüs dalgaları şeklindedir (Wei, 1990).

2.2.1.3. Otoregresif Hareketli Ortalama Modelleri

Bir durağan ve tersinir süreç, MA hareketli ortalama şeklinde ya da otoregresif şekilde gösterilebilir. Ancak her iki gösterimdeki problem ikisinin de çok fazla parametre içermesidir. Bu, hem sonlu derece hareketli ortalama modeli hem de sonlu derece otoregresif model için doğrudur. Genel olarak parametre sayısının çok olması tahminin etkinliğini azaltır. Bu nedenle model oluşturmada modelde hem otoregresif hem de hareketli ortalama terimlerini içermek gerekebilir. Bu durumda karma otoregresif hareketli ortalama (ARMA) süreci kullanılır. ARMA(p,q) süreci;

$$\phi_p(B)Z_t = \theta_q(B)e_t \qquad (2.12)$$

şeklindedir; burada

$\phi_p(B)=1-\phi_1 B-...-\phi_p B^p$ ve $\phi_q(B)=1-\phi_1 B-...-\phi_q B^q$'dır.

Tersinir olan süreç için $\theta_q(B)$'nin köklerinin birim çemberin dışında olması gerekir. Durağan olması için de $\theta_p(B)=0$' ın köklerinin birim çemberin dışında olması gerekir. Ayrıca $\theta_q(B)$, $\theta_p(B)=0$ 'nin köklerinin aynı olmadığı varsayıldığında bu süreç p ve q'nun sırasıyla otoregresif ve hareketli ortalama polinomlarına ilişkin dereceleri gösterdiğinde p,q derece hareketli ortalama modeli ya da karma model olarak adlandırılır ve ARMA(p,q) şeklinde gösterilir. Durağan ve tersinir ARMA süreci yalnızca otoregresif model olarak yazılabilir. Bu durumda,

$$\pi(B)Z_t = e_t$$

şeklinde yazılır; burada

$$\pi(B) = \frac{\phi_p(B)}{\phi_q(B)} = (1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ...)$$

şeklindedir.

Bu süreç yalnızca hareketli ortalama gösterimi şeklinde de yazılabilir. Bu durumda,

$$Z_t = \psi(B)e_t$$

şeklinde yazılır; burada

$$\psi(B) = \frac{\theta_q(B)}{\theta_p(B)} = (1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...)$$

şeklindedir.

ARMA (p,q) sürecinin ACF'si: ARMA (p,q) modelinin otokorelasyon fonksiyonu q gecikmeden sonra modeldeki otoregresif parametrelere bağlı olarak AR(p) sürecine benzer şekilde yazılır; ancak ilk q otokorelasyon $P_q, P_{q-1}, ..., P_1$ modeldeki hem otoregresif hem de hareketli ortalama parametrelerine bağlıdır ve örnek için başlangıç değerleri olarak verilir. Bu fark model tanımlamasında önemlidir.

ARMA(p,q) sürecinin PACF'si: ARMA süreci özel durum olarak MA sürecini içerdiği için onun PACF'si $\phi(B) = 0$ ve $\phi(B) = 0$'ın köklerine bağlı olarak üstel azalışlar ya da sönük sinüs dalgalarının karması olur.

$ARMA(p,q)$ sürecinde $p = 1$ ve $q = 1$ şeklinde olduğunda süreç birinci derece karma model ya da birinci derece otoregresif hareketli ortalama modeli olarak adlandırılır ve $ARMA(1,1)$ şeklinde gösterilir. $ARMA(1,1)$ modeli,

$$(1 - \phi_1 B)Z_t = (1 - \theta_1 B)e_t$$

ya da

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + e_t - \theta_1 e_{t-1} \qquad (2.13)$$

şeklinde yazılır. Serinin durağan olması için $|\phi_1| < 1$ olması ve tersinir olması için $|\theta_1| < 1$ olması gerekir.

(2.13) eşitliği ile verilen modelde $\phi_1 = 0$ olduğunda model, MA(1) sürecine indirgenir ve $\theta_1 = 0$ olduğunda AR(1) sürecine indirgenir, bunun sonucunda ARMA(1,1) sürecinin özel bir süreci olarak AR(1) ve MA(1) süreçleri incelenebilir.

ARMA(1,1) Sürecinin ACF'si: ARMA(1,1) modeli aşağıdaki otokorelasyon fonksiyonuna sahiptir:

$$P_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \dfrac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1} & k = 1 \\ \phi_1 P_{k-1} & k \geq 2 \end{cases}$$

ARMA(1,1) modelinin otokorelasyon fonksiyonu hem AR(1) hem de MA(1) süreçlerinin özelliklerine sahiptir. Hareketli ortalama parametresi θ_1, ϕ_1'in hesaplanmasında kullanılır.

ARMA(1,1) sürecinin PACF'si: Karma modelin PACF'sinin genel şekli oldukça karmaşıktır ve gerekli değildir. Özel durum olarak ARMA(1,1) süreci MA(1) sürecini içerdiği için ARMA(1,1) sürecinin PACF'si de ϕ_1 ve θ_1'in işaretlerine ve önemlerine bağlı olan şekliyle ACF'ye benzer şekilde azalır (Wei, 1990).

2.2.2. Çok Değişkenli Modeller

Bu bölümde, birden fazla değişkene ait süreçlerin modellenmesinde kullanılan çok değişkenli zaman serisi modelleri incelenmiştir.

2.2.2.1. Kovaryans ve Korelasyon Matris Fonksiyonu

$Z_t = [Z_{1,t}, Z_{2,t}, ..., Z_{m,t}]'$; $t = 0, \pm 1, \pm 2, ...$ için m boyutlu birleşik olarak durağan gerçek değerli süreçtir; böylece ortalama $E(Z_{1,t}) = \mu_i$ her $i = 1,2,...,m$ için sabittir ve her $i = 1,2,...,m$ ve $j = 1,2,...,m$ için $Z_{i,t}$ ve $Z_{j,s}$ arasındaki çapraz-kovaryans yalnızca $(s-t)$ zaman aralığının fonksiyonudur. Bunun sonucunda ortalama vektörü,

$$E(Z_t) = \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{bmatrix}$$

şeklinde ve kovaryans matrisi,

$$\begin{aligned} \Gamma(k) &= \operatorname{cov}\{Z_t, Z_{t+k}\} = E[(Z_t - \mu)(Z_{t+k} - \mu)'] \\ &= E\begin{bmatrix} Z_{1,t} - \mu_1 \\ Z_{2,t} - \mu_2 \\ \vdots \\ Z_{m,t} - \mu_m \end{bmatrix} [Z_{1,t+k} - \mu_1, Z_{2,t+k} - \mu_2, ..., Z_{m,t+k} - \mu_m] \\ &= \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \gamma_{12}(k) & \cdots & \gamma_{1m}(k) \\ \gamma_{21}(k) & \gamma_{22}(k) & \cdots & \gamma_{22}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{m1}(k) & \gamma_{m2}(k) & \cdots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix} = \operatorname{cov}\{Z_{t-k}, Z_t\} \end{aligned}$$

şeklindedir; ayrıca burada

$k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ i = 1,2,...,m\ \ ve\ \ j = 1,2,...,m$ için

$$\gamma_{ij}(k) = E[(Z_{i,t} - \mu_i)(Z_{j,t+k} - \mu_j)] = E[(Z_{i,t-k} - \mu_i)(Z_{j,t} - \mu_j)]$$

şeklindedir. Ayrıca k'nın bir fonksiyonu olarak $\Gamma(k)$, Z_t vektör süreci için kovaryans matris fonksiyonu olarak adlandırılır. $i = j$ için $\gamma_{ii}(k)$, i'inci birleşen $Z_{i,t}$ süreci için otokovaryans fonksiyonudur; $i \neq j$ için $\gamma_{ij}(k)$, $Z_{i,t}$ ve $Z_{j,t}$ arasındaki çapraz kovaryans fonksiyonudur. $\Gamma(0)$ matrisi kolaylıkla sürecin varyans-kovaryans matrisi olarak görülür. Bu çok değişkenli durağan bir süreçte her bir değişkene ait sürecin durağan olduğu anlamına gelir. Ancak tek değişkenli durağan süreçlerin bir vektörünün birleşik durağan vektör süreci olması gerekli değildir.

Vektör süreci için korelasyon matris fonksiyonu $i = 1,2,...,m \;\; ve \;\; j = 1,2,...,m$ için

$$\rho(k) = D^{1/2}\Gamma(k)D^{1/2} = \left[\rho_{ij}(k)\right]$$

şeklindedir; burada D, $i.$ köşegenin elemanı $i.$ sürecin varyansı olduğunda köşegen matristir ve

$$D = diag\left[\gamma_{11}(0), \gamma_{22}(0), ..., \gamma_{mm}(0)\right]$$

şeklindedir. Açık bir şekilde; $\rho(k)$'nın $i.$ köşegen elemanı $\rho_{ii}(k)$, $i.$ birleşen seriler $Z_{i,t}$ için otokorelasyon fonksiyonudur; burada $\rho(k)$'nın $i.$ köşegen olmayan elemanı $\rho_{ij}(k)$, $Z_{i,t}$ ve $Z_{j,t}$ arasındaki çapraz korelasyon fonksiyonunu gösterirken

$$\rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\left[\gamma_{ii}(0)\gamma_{jj}(0)\right]^{1/2}}$$

eşitliği ile elde edilir. Tek değişkenli otokovaryans ve otokorelasyon fonksiyonları gibi çok değişkenli kovaryans ve korelasyon matris fonksiyonları da $t_1, t_2, ..., t_n$ zaman noktalarının herhangi kümesi ve $\alpha_1, \alpha_2, ...ve\; \alpha_n$ gerçek vektörlerinin herhangi kümesi için $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i'\Gamma(t_i - t_j)\alpha_j \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i'\rho(t_i - t_j)\alpha_j \geq 0$ olan bir anlamda pozitif yarı tanımlanmıştır. $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i'Z_{t,i}$'nin varyansını ve onun standardizasyonunu hesaplayarak sonuca hemen ulaşılır. Ancak $i \neq j$ için $\gamma_{ij}(k) \neq \gamma_{ij}(-k)$ olduğuna ve ayrıca $\Gamma(k) \neq \Gamma(-k)$ olduğuna dikkat etmek gerekir. Bunun yerine

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(k) &= E\left[(Z_{i,t} - \mu_i)(Z_{j,t+k} - \mu_j)\right] \\ &= E\left[(Z_{j,t+k} - \mu_j)(Z_{i,t} - \mu_i)\right] = \gamma_{ji}(-k)\end{aligned}$$

olduğu için aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{cases} \Gamma(k) = \Gamma'(-k) \\ \rho(k) = \rho'(-k) \end{cases}$$

Bazen kovaryans ve korelasyon matris fonksiyonları otokovaryans ve otokorelasyon matris fonksiyonları olarak da adlandırılır (Wei, 1990).

2.2.2.2. Vektör Hareketli Ortalama Modeli ve Vektör Otoregresif Model

Vektör otoregresif modeli, her bir değişkenin kendi gecikmeli değerleri ve sistemdeki tüm diğer değişkenlerin gecikmeli değerleri ile açıklanan çok değişkenli bir modeldir. Vektör hareketli ortalama modeli ise bir değişkenin kendi sınıfına ait hata terimleri ve sistemdeki tüm diğer değişkenlerin sınıfına ait hata terimleri ile bu hata terimlerinin gecikmeli değerleriyle açıklanan çok değişkenli bir modeldir.

Bir m boyutlu durağan vektör süreci Z_t, m boyutlu akgürültü rastlantı değişkeni vektörlerinin (hata terimlerinin) bir dizisinin doğrusal kombinasyonu olarak,

$$\begin{aligned} Z_t &= \mu + a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \ldots \\ &= \mu + \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s a_{t-s} \end{aligned} \tag{2.14}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda, Z_t'nin bir doğrusal süreç ya da saf olarak deterministik olmayan vektör süreci olduğu söylenir. Burada $\Psi_0 = \mathrm{I}$, $m \times m$ boyutlu tanımlayıcı matris; Ψ_j'ler, $m \times m$ boyutlu katsayı matrisleri ve a_t'ler sıfır ortalamalı ve aşağıda verilen kovaryans matris yapılı m boyutlu akgürültü rastlantı değişkeni vektörleridir:

$$E[a_t a'_{t+k}] = \begin{cases} \Sigma & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

burada Σ, herhangi keyfi $m \times m$ boyutlu simetrik pozitif belli bir matristir. Buradan farklı zamanlarda meydana gelen a_t'nin elemanları ilişkili olmamasına rağmen aynı zamanda olanlar ilişkili olabilir. Benzer şekilde $B^s a_t = a_{t-s}$ gecikme sayısı kullanılarak

$$Z_t = \Psi(B)a_t \tag{2.15}$$

şeklindeki eşitlik yazılabilir; burada $Z_t = Z_t - \mu$ ve $\Psi(B) = \sum_{s=0}^{\infty} \Psi_s B^s$ şeklindedir. Yukarıdaki gösterime hareketli ortalama ya da Word gösterimi denir.

$i = 1,2,...,m$ ve $j = 1,2,...,m$ için $\Psi_s = [\psi_{ij,s}]$ olsun; burada $i = j$ ise $\psi_{ij,0} = 1$ ve $i \neq j$ ise $\psi_{ij,0} = 0$ şeklindedir. Ayrıca $\Psi(B) = [\psi_{ij}(B)]$ olarak yazılabilir; burada $\psi_{ij}(B) = \sum_{s=0}^{\infty} \psi_{ij,s} B^s$ dir. Bir sürecin durağan olması için katsayı matrisleri Ψ_s'nin kareleri toplanabilir olması gerekir; yani $m \times m$ boyutlu $\psi_{ij,s}$ dizisinin her birinin karesinin toplanabilir olması gerekir $(\sum_{s=0}^{\infty} \psi_{ij,s}^2 < \infty;\ i = 1,2,...,m \ ve \ j = 1,2,...,m)$. Bunun sonucunda (2.14) ya da (2.15)'teki m boyutlu durağan Z_t vektör süreci

$$n \to \infty \text{ iken } E\left[\left(Z_t - \sum_{j=0}^{n} \Psi_s a_{t-j}\right)'\left(Z_t - \sum_{j=0}^{n} \Psi_j a_{t-j}\right)\right] \to 0$$

şeklinde tanımlanır.

Bir vektör sürecini açıklamak için diğer kullanışlı bir şekil t anındaki Z'nin değerinin onun geçmiş değerleri artı rastlantı şoklarının bir vektörü ile tahmin edildiği otoregresif gösterimdir; yani

$$\begin{aligned} Z_t &= \Pi_1 Z_{t-1} + \Pi_2 Z_{t-2} + \cdots + a_t \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \Pi_s Z_{t-s} + a_t \end{aligned} \tag{2.16}$$

ya da gecikme işlemcisi açısından

$$\Pi(B)Z_t = a_t$$

şeklindedir; burada $\Pi(B) = \mathrm{I} - \sum_{s=1}^{\infty} \Pi_s B^s$ ve Π_s, $m \times m$ boyutlu otoregresif katsayı matrisleridir. $i = 1,2,...,m \ ve \ j = 1,2,...,m$ için $\Pi_s = [\Pi_{ij,s}]$ olsun. Ayrıca $i = j$ ise

$\Pi_{ij,0} = 1$ ve $i \neq j$ ise $\Pi_{ij,0} = 0$ şeklindedir; yani $\Pi_0 = \mathrm{I}$. $\Pi(B) = [\Pi_{ij}(B)]$ olacak şekilde elde edilir; burada

$$\Pi_{ij}(B) = \Pi_{ij,0} - \sum_{s=1}^{\infty} \Pi_{ij,s} B^s$$

şeklindedir.

Eğer otoregresif katsayı matrisleri Π_s kesinlikle toplanabilir ise (yani her i ve j için $\sum_{s=0}^{\infty} |\Pi_{ij,s}| < \infty$) vektör sürecinin tersinir olduğu söylenir.

Tersinir süreçlerin durağan olması gerekmediğine dikkat edilmelidir. Durağan olması gereken ve tersinir otoregresif gösterimi ile vektör süreci için $|\Pi(B)|$ ile gösterilen otoregresif matris karesel determinantının kökleri birim çemberin içindedir (yani $|B| \leq 1$ için $|\Pi(B)| \neq 0$). Benzer bir şekilde durağan bir sürecin tersinir olması gerekli değildir.

Vektör otoregresif modellerde her bir değişken kendi birinci gecikmeli değeri ve sistemdeki tüm diğer değişkenlerin birinci gecikmeli değerleri ile açıklandığında model Vektör AR(1) modeli ya da birinci derece çok değişkenli otoregresif model olarak adlandırılır ve

$$(\mathrm{I} - \Phi_1 B) Z_t = a_t$$

ya da

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \qquad (2.17)$$

şeklinde yazılır.

Vektör AR(1) süreci açık bir şekilde tersinirdir. Sürecin durağan olması için denklemin determinatının $|\mathrm{I} - \Phi_1 B|$ kökleri birim çemberin dışında olmalıdır. $\lambda = B^{-1}$ olsun. Buradan $|\mathrm{I} - \Phi_1 B| = 0 \leftrightarrow |\lambda \mathrm{I} - \Phi_1| = 0$ elde edilir. Bunun sonucunda $|\mathrm{I} - \Phi_1 B|$'nin kökleri Φ_1'in özdeğerleri ile ilişkilidir.

$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ özdeğerler olsun ve $h_1, h_2, ..., h_m$, Φ'nın ilişkili özdeğerleri olsun; böylece $i = 1,2,...,m$ için $\Phi_1 h_i = \lambda_i h_i$ şeklinde elde edilir. Daha basit gösterim için özvektörlerinin doğrusal olarak bağımsız olduğu varsayılır ve $\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m]$ ve $\mathrm{H} = [h_1, h_2, ..., h_m]$ şeklinde yazılır. Buradan

$$\Phi_1 \mathrm{H} = \mathrm{H}\Lambda$$

ve

$$\Phi_1 = \mathrm{H}\Lambda\mathrm{H}^{-1}$$

olarak elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{I} - \Phi_1 B\right| &= \left|\mathrm{I} - \mathrm{H}\Lambda\mathrm{H}^{-1}B\right| = \left|\mathrm{I} - \Pi\Lambda B\mathrm{H}^{-1}\right| = \left|\mathrm{I} - \Lambda B\right| \\ &= \prod_{i=1}^{m}\left(\mathrm{I} - \lambda_i B\right)\end{aligned}$$

şeklinde olur. Bunun sonucunda yalnız ve yalnız bütün özdeğerler λ_i birim çemberin içinde ise $\left|\mathrm{I} - \Phi_1 B\right|$'nin kökleri birim çemberin dışındadır.

Vektör AR(1) sürecinin durağanlığı için aynı koşul Φ'nın bütün özdeğerlerinin birim çemberin içinde olduğu anlamına gelir; yani $i = 1,2,...,m$ için $\left|\lambda_i\right| < 1$ şeklindedir. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda^n = \lim_{n\to\infty} diag\left[\lambda_1^n, \lambda_2^n, ..., \lambda_m^n\right] = 0$$

ve

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Phi_1^n &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}\Lambda\mathrm{H}^{-1}.\mathrm{H}\Lambda\mathrm{H}^{-1}....\mathrm{H}\Lambda\mathrm{H}^{-1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}\Lambda^n\mathrm{H}^{-1} = 0\end{aligned}$$

şeklinde olur.

Vektör AR(1) modelinde $m = 2$ olduğunda model, iki değişkenli AR(1) modeline olarak adlandırılır ve

$$\begin{bmatrix} Z_{1,t} \\ Z_{2,t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{1,t} \\ e_{2,t} \end{bmatrix}$$

ya da

$$\begin{aligned} Z_{1,t} &= \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + e_{1t} \\ Z_{2,t} &= \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{212} Z_{2,t-1} + e_{2t} \end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklinde gösterilir. Model, mevcut şokların dışında her $Z_{i,t}$, sadece $Z_{i,t}$'nin gecikme değerlerini içermez ayrıca diğer $Z_{j,t}$ değişkenlerinin gecikme değerlerini de içerir (Wei, 1990).

2.3. Bağımlı Risklerin Tek Değişkenli Zaman Serisi Modelleri

Bu bölümde, primlerin ve hasarların modellenmesinde kullanılan tek değişkenli birinci derece otoregresif modeller ve bir sigorta şirketinin kazanç (bir dönemde toplanan primler eksi aynı dönemde ödenen hasarlar) modelleri incelenmiştir.

2.3.1. Prim ve Hasar Süreçlerine ilişkin Otoregresif Modeller

Bu bölümde, öncelikle Bowers ve diğerleri (1996) tarafından primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasarların birinci derece otoregresif modele uyduğu durum için önerilen model incelenmiştir. Daha sonra bu modelde prim süreçlerinin de hasar süreçleri gibi birinci derece otoregresif modele uyduğu varsayılan model incelenmiştir.

2.3.1.1. Hasar Süreçlerinin Birinci Derece Otoregresif Modeli

Z_n, $[n-1, n]$ aralığı boyunca ya da $n.$ yılda gerçekleşen hasarları göstermek üzere, $\{Z_1, Z_2, ...\}$ hasar sürecinin bir negatif olmayan rastlantı değişkenler dizisi olduğu ve

$$\begin{aligned} Z_n &= X_n + aZ_{n-1} , \qquad n = 1,2,3,... \\ Z_0 &= z_0 \end{aligned} \tag{2.19}$$

şeklindeki birinci derece otoregresif modele uyduğu varsayılır. Burada $\{X_n\}$, bağımsız ve aynı dağılımlı (i.i.d) negatif olmayan rastlantı değişkenler dizisidir ve $0 \le a < 1$ şeklindedir. Bu modeldeki a parametresi ilişkinin derecesini ölçer. Eğer $a = 0$ ise hasar süreci bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisi olur ve herhangi zaman aralığında meydana gelen hasarlar eski hasarlardan bağımsızdır. Eğer $a \cong 1$ ise süreç çok bağımlı olur. Başlangıç hasar miktarı bilinen bir sabit sayıdır ve z_0 ile gösterilir.

Bağımsız ve aynı dağılımlı X_n hata terimleri, n. dönemde portföye katılan poliçelerde oluşan hasar miktarı olarak yorumlanabilir.

X_n' nin genel dağılım fonksiyonu $F(x) = P(X \le x)$ olsun; burada keyfi bir X_n, X ile gösterilir ve $E(X) < +\infty$ olduğu varsayılır (Yang and Zhang, 2003).

2.3.1.2. Prim Süreçlerinin Birinci Derece Otoregresif Modeli

Prim süreçleri de Eş.(2.19) ile verilen modele benzer şekilde,

$$\begin{aligned} W_n &= Y_n + bW_{n-1}, \qquad \mathrm{n} = 1,2,... \\ W_0 &= w_0 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Eş.(2.20) ile verilen birinci derece otoregresif modele uysun. Bu modelde $\{Y_1, Y_2, ...\}$ bağımsız ve aynı dağılımlı negatif olmayan rastlantı değişkenleri dizisidir. Y_n, Y ile gösterildiğinde Y_n' nin genel dağılım fonksiyonu $G(x) = P(Y \le x)$ ve $E(Y) < \infty$ olmak üzere prim sürecini gösteren $\{W_1, W_2, ...\}$ negatif olmayan rastlantı değişkenleri dizisidir. Burada $0 \le b < 1$' dir. Bu modelde W_n'nin, $[n-1, n]$ zaman aralığında ya da n. yıl boyunca toplanan primlerin son yılın primi artı hata rastlantı değişkeni (hata terimleri bağımsız ve aynı dağılımlıdır) olduğu varsayılır. Bu modelde b parametresi geçmiş dönemden kalan poliçelerin mevcut portföydeki oranı olarak yorumlanabilir. Diğer bir deyişle b parametresi mevcut dönemde toplanan primler ile geçmiş dönemde toplanan primler arasındaki ilişkinin derecesini ölçer. Eğer b sıfır ise prim süreci bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisi olur ve herhangi zaman aralığında toplanan prim eski bilgilerden bağımsızdır. Eğer b, 1' e yakınsa süreç çok bağımlı olur. Bu durumda 'eski müşterilerin büyük bir kısmı yeni zaman diliminde portföyde kalacaktır' denilebilir. Ayrıca bu modelde; Y_n, n. yılda portföye katılan poliçelerin prim geliri olarak yorumlanabilir. Başlangıç priminin belli olduğu varsayılır ve w_0 ile gösterilir (Yang and Zhang, 2003).

Uyarı: Birinci derece otoregresif model ilk olarak Bowers ve diğerleri (1997) tarafından primlerin sabit miktarlar ile toplandığı portföylerde hasar süreçleri için önerilmiştir ve a parametresinin $(-1,1)$ aralığında olduğunu varsaymışlardır. Yang ve Zhang (2003), Bowers ve diğerlerinin (1997) önerdiği modele ek olarak prim rastlantı değişkeninin de birinci derece otoregresif modele uyduğunu varsaymıştır ve eğer hem prim rastlantı değişkeninin hem de hasar rastlantı değişkenin negatif olmaması isteniyor ise modellerde $a \geq 0$ ve $b \geq 0$ şeklinde olması gerektiğini belirtmişlerdir.

2.3.2. Yıllık Kazancın Zaman Serisi Modelleri

Bu bölümde, bir sigorta şirketinin belli bir dönemde (genellikle bir yıl) topladığı primlerden o dönemde ödediği hasarların çıkarılması ile elde edilen kazanç sürecine ilişkin modeller incelenmiştir.

2.3.2.1. Otoregresif Hareketli Ortalama Modeli

G_n, sigorta şirketinin n. yılda elde ettiği kazancı (n. yılda topladığı primlerden aynı yılda ödediği hasar miktarları) olsun. Gerber(1982), $\{G_n\}$ sürecinin,

$$G_n = a_1 G_{n-1} + ... + a_p G_{n-p} + X_n + b_1 X_{n-1} + ... + b_q X_{n-q} \tag{2.21}$$

şeklindeki ARMA (p,q) modeline uyduğunu varsaymıştır. Burada $a_1,...,a_p$ ve $b_1,...,b_q$'ler aşağıda belirtilen şartları sağlayan kesin sabitler ve burada $X_1, X_2,...$'ler $E(X) > 0$ olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleridir. Bu modelin başlangıç değerleri $g_0,...,g_{-p+1}$ ve $x_0,...,x_{-q+1}$ bilinen sabit sayılardır.

Burada $G_n = g_n \quad (n = 0,1,...,-p+1)$, $X_n = x_n \quad (n = 0,1,...,-q+1)$ şeklindedir. $\alpha = 1 - a_1 - ... - a_p$; $\beta = 1 + b_1 + ... + b_q$ ve B, G_j zaman serisi üzerinde gecikme sayacı ($BG_j = G_{j-1}$; $\mathrm{j} = 0 \pm 1,....$),

$$P(z) = 1 - a_1 z - ..... - a_p z^p \quad , \tag{2.22}$$

$$Q(z) = 1 + b_1 z + ... + b_q z^q \quad , \tag{2.23}$$

olmak üzere (2.21) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$P(B)G_n = Q(B)X_n \tag{2.24}$$

Ayrıca $a_1,...,a_p$ ve $b_1,...,b_q$ katsayıları hakkında varsayımlar aşağıdaki gibidir:

A1. $\beta = Q(1) > 0$;

A2. $P(z) = 0$ denkleminin her çözümü kompleks düzlemin birim çemberinin dışındadır;

A3. $P(z)$ ve $Q(z)$ herhangi genel faktöre sahip değildir.

$P(0) = 1$ olduğundan **A2** $\alpha = P(1) > 0$ olduğu anlamına gelir (Gerber, 1982; Christ and Steinebach, 1995; Zhang, 2005).

Örnek: (2.21) modelinde $(p = q = 1)$ olduğu özel durum da ($ARMA(1,1)$)

$$G_n = a_1 G_{n-1} + X_n + b_1 X_{n-1}$$

şeklindedir. Bu durumda a ve b için koşullar,

B1: $1 + b > 0$, **B2:** $|a| < 1$ ve **B3:** $a + b \neq 0$

şeklinde yazılır (Gerber, 1982).

Uyarı: Gerber (1982), kullandığı modelde X_n'lerin genel dağılımının sonlu aralıkta toplandığını yani bazı d sayısı için $|X_n| \leq d$ olduğunu varsaymıştır. Bu bakış açısıyla, X_n'ler katı bir şekilde sınırlıdır. Böylece Gerber (1982), X_n'lerin ortalamasının pozitif olduğunu ancak negatif değerleri de alabileceğini varsayarak düzeltme katsayısı R tanımlanmış ve düzeltme katsayısı yardımı ile iflas olasılıkları için üst sınırların nasıl elde edileceğini göstermiştir. Ayrıca Gerber (1982) çalışmasında, iflas olasılıkları ile ilgili verilen teoremlerin X_n'lerin sınırlılığı koşulu olmadığında da elde edilmesinin daha ileri bir araştırma olarak ele alınması gerektiğini belirtmiştir. Daha sonra Promislow (1991), doğrusal modeldeki iflas olasılıklarıyla ilgili Gerber (1982)'in bazı sonuçlarını genellemiştir. Ayrıca Promislow (1991), bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkeni X_n'lerin katı bir şekilde sınırlılığı koşulunun pratik bakış açısı ile makul olabileceğini ancak üstel dağılımda olduğu gibi hasarları modellemek için sık sık sınırsız rastlantı değişkenlerinin kullanıldığını belirterek sınırlılık koşulunun iflas olasılıkları ile ilgili teoremlerden çıkarılması gerektiğini belirtmiştir. Daha sonra sınırlılık koşulunun iflas olasılıkları ile ilgili teoremlerden çıkarılabileceğini göstermiştir.

2.3.2.2. Hareketli Ortalama Modeli

Eş. (2.21) ile verilen sigorta şirketinin n. yılda elde ettiği kazancının (n. yıldaki primler eksi hasarlar) ARMA(p,q) modelinde G_n' ler tekrarlı bir şekilde yerine koyularak ($n-1, n-2,...$ için formülü kullanarak) sağ taraftaki G'leri yok edebilir ve (2.21) eşitliğindeki G_n; $X_n, X_{n-1}, X_{n-2},....$ terimleri ile açıklanabilir. Bu yolla karma ($ARMA(p,q)$) model, hareketli ortalama modeline indirgenir. Bir başka deyişle, eşitlik (2.21)'de $p=0$ olduğu özel duruma dönüşür. Bu durumda (2.21),

$$G_n = X_n + b_1 X_{n-1} + ... + b_q X_{n-q} \tag{2.25}$$

şeklinde yazılır (Gerber, 1982).

$n \to \infty$ iken $U_n \to \infty$ olduğundan emin olmak için $\beta = 1 + b_1 + ... + b_q$ olmak üzere $\beta > 0$ koşulu burada da geçerlidir.

Genişleme katsayısını gösteren b'_k,

$$\left(\frac{Q(z)}{P(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k z^k \right) \tag{2.26}$$

şeklinde olmak üzere $\{G_n\}$ süreci hareketli ortalama $(MA(\infty))$ süreci olarak,

$$G_n = P(B)^{-1}Q(B)X_n = X_n + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k X_{n-k} \qquad (2.27)$$

şeklinde de yazılabilir.

Eş. (2.27) ile verilen model, $j \le -p-q$ için $X_j = 0$ kuralını sağlar ve bu modelde $x_{-q},.....,x_{-q-p+1}$ başlangıç değerleri uygun bir şekilde seçilir. b'_k'nın $\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| < \infty$ ve $\beta = (1+b_1+...+b_q) > 0$ koşullarını sağladığının gösterilmesi gerekir.

b'_k üstel olarak (A2 kullanılarak Eş.(2.26)'daki genişlemeden görülebildiği gibi) sıfıra yaklaşır. Bunun sonucunda $\sum_{k=1}^{\infty} k|b_k| < \infty$ koşulu sağlanır ve buradan β,

$$\beta' - 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b'_k = \frac{Q(1)}{P(1)} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (2.28)$$

şeklindeki eşitliği sağlar; böylece

$$g_j = x_j + \sum_{k=0}^{p+q+j-1} b'_k x_{j-k} \qquad (j = 0,1,...,-p+1) \qquad (2.29)$$

şeklinde yazılır (Gerber,1982; Christ and Steinebach, 1995).

2.4. Bağımlı Risklerin Çok Değişkenli Zaman Serisi Modelleri

Bu bölümde, p bağımlı sigorta koluna ait prim ve hasar süreçlerinin birlikte gösterildiği vektör sürecinin birinci derece çok değişkenli otoregresif modeli ile bu modelde özel bir durum olarak primlerin sabit miktarlarla toplandığı iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durum için kullanılan model incelenmiştir.

2.4.1. Çok Değişkenli Birinci Derece Otoregresif Model

p, sigorta şirketinin portföyündeki poliçelerin bağımlı sınıf sayısı olmak üzere herhangi $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})$ ve $\mathrm{n} \ge 1$ için W_{in} ve Z_{in} negatif olmayan rastlantı değişkenleridir. Ayrıca hasarların $\{Z_{in},\ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$, n. dönemin sonunda ödendiği varsayılırken, primlerin $\{W_{in},\ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$, n. dönemin başında toplandığı varsayılır.

Herhangi $\mathrm{n} \ge 1$ olmak üzere p bağımlı sigorta kolundan oluşan portföyde p sınıfta toplanan primleri gösteren prim vektörü $W_n = (W_{1n},...,W_{pn})'$ ve p sınıfta gerçekleşen hasarı gösteren hasar vektörü $Z_n = (Z_{1n},...,Z_{pn})'$ şeklinde yazılır. Ayrıca 1_k, k boyutlu 1'lerden oluşan sütün vektörü ve $v = (1+i)^{-1}$ iskonto vektörü olmak üzere; W_n prim vektörü ve Z_n hasar vektörü için negatif olmayan sabit sütun vektör süreci G_n, $G_0 = (w_1,....,w_p, z_1,....,z_p)' = (w', z')'$ başlangıç değerler vektörü ile her $\mathrm{n} \ge 0$ için $G_n = (W_n', Z_n')'$ şeklinde tanımlanır ve negatif olmayan rastlantı vektör süreci

$$G_n = AG_{n-1} + V_n\,, \quad n \ge 1 \tag{2.30}$$

şeklindeki çok değişkenli birinci derece otoregresif modele uyar. Burada $A = (a_{ij})$, $2p$ boyutlu negatif olmayan matris ve $\{V_n,\ n \ge 1\}$ bağımsız ve aynı dağılımlı (F dağılımlı) negatif olmayan rastgele vektörler dizisidir. Ayrıca her $\mathrm{n} \ge 1$ olmak üzere keyfi bir $V_n = (X_n', Y_n')'$, $V = (X', Y')'$ ile gösterilir ve V_n;

$$V_n = (X_n', Y_n')' = (X_{1n},...,X_{pn}, Y_{1n},...,Y_{pn})' \tag{2.31}$$

şeklindedir.

Eş.(2.30) ile verilen birinci derece çok değişkenli otoregresif modelde, zaman sonsuza giderken modelin tutarlılığı için A'nın bütün özdeğerlerinin kesinlikle 1'den daha küçük değerler olması gerekir. Bunun için

$$h(\lambda) \equiv \det(\lambda I_{2p} - A) = 0 \tag{2.32}$$

şeklinde verilen denklemdeki λ'nın bütün köklerinin kesinlikle 1'den daha küçük değerlere sahip olması gerekir. Burada I_{2p}, $2p$ boyutlu birim matrisi gösterir. Eğer her $1 \le i \le 2p$ için

$$\sum_{j=1}^{2p} \left| a_{ij} \right| < 1 \tag{2.33}$$

eşitsizliği sağlanırsa A'nın bütün özdeğerleri kesinlikle 1'den küçük değerler alır. Zaman serilerinde durağanlık varsayımı olarak bilinen bu varsayım altında $h(1) > 0$ olur.

A matrisi,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

şekilde de ifade edilebilir. Burada $A_1 = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i, j \le p}$, $A_2 = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i \le p; p+1 \le j \le 2p}$, $B_1 = \left(a_{ij}\right)_{p+1 \le i \le 2p; 1 \le j \le p}$ ve $B_2 = \left(a_{ij}\right)_{p+1 \le i, j \le 2p}$ şeklindeki alt matrislerdir.

p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için Eş. (2.30) ile verilen model her bir sigorta koluna ait prim ve hasar değişkenlerinin kendi gecikmeli değerleri ve sistemdeki tüm diğer değişkenlerin gecikmeli değerleri ile açıklanan çok değişkenli bir model olarak yorumlanabilir. Eğer $p = 1$ ve $A_2 = B_1 = 0$ ise buradan (2.30) eşitliği ile verilen model, Yang ve Zang (2003) tarafından incelenen hasar ve prim süreçlerinin sırasıyla (2.19) ve (2.20) eşitliği ile verilen her bir sigorta kolunda hasar ve prim süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu duruma dönüşür (Zhang et. al., 2007).

2.4.2. İki Değişkenli Birinci Derece Otoregresif Model

(2.30) eşitliği ile verilen p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için tanımlanan çok değişkenli zaman serisi modelinde $p = 2$ olduğu durumda model, iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için iki değişkenli birinci derece otoregresif modele dönüşür. Bu modelde primlerin sabit miktarlarla toplandığı varsayıldığında (2.30) eşitliği ile verilen p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için çok değişkenli zaman serisi modelinin özel bir şekli olan iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasar süreçlerinin ise iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu model tanımlanmış olur.

İki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir porföyde primlerin sabit miktarla toplandığı durumda iki bağımlı sınıfta n. dönemde gerçekleşen hasarlar, (Z_{1n}, Z_{2n}) şeklinde tanımlansın. Ayrıca $\{(Z_{1n}, Z_{2n})\}$ hasar süreçlerinde her bir bağımlı sınıf için başlangıç değerleri $Z_{10} = z_1$ ve $Z_{20} = z_2$ şeklinde tanımlansın. (Z_{1n}, Z_{2n}) hasar süreçleri

$$\begin{aligned} Z_{1n} &= a_1 Z_{1(n-1)} + a_2 Z_{2(n-1)} + X_n, \\ Z_{2n} &= b_1 Z_{1(n-1)} + b_2 Z_{2(n-1)} + Y_n, \end{aligned} \quad n \geq 1 \tag{2.35}$$

şeklindeki iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyar. Burada a_i ve b_i negatif olmayan sabit sayılar ve $\{(X_n, Y_n)\}$ süreçleri bağımsız ve aynı dağılımlı negatif olmayan rastgele vektör süreçleridir.

(2.35) eşitliği ile verilen zaman serisi modeli için durağanlık şartı, aşağıdaki denklemdeki λ'nın bütün köklerinin 1'den daha küçük değerler (belli değerler) almasıdır:

$$h(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} \lambda - a_1 & -a_2 \\ -b_1 & \lambda - b_2 \end{vmatrix} = (\lambda - a_1)(\lambda - b_2) - a_2 b_1 = 0$$

a_i ve b_i negatif olmayan değerler olduğundan bu durağanlık koşulu,

$$a_1 + b_2 - a_1 b_2 + a_2 b_1 < 1 \tag{2.36}$$

eşitsizliği ile ifade edilir (Zhang et. al., 2007).

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. RİSK SÜREÇLERİ VE İFLAS OLASILIĞI

Bu bölümde, kesikli risk modellerinde bağımlı risklerin modellenmesinde kullanılan zaman serileri modelleri geçerli olduğunda artık süreçlerinin ve net-kar şartının nasıl olduğu ile düzeltme katsayısının ve iflas olasılıkları için üst sınırların nasıl hesaplanacağı incelenmiştir.

3.1. Artık Süreçleri

Bu bölümde, bir veya birden fazla bağımsız sigorta kolundan ya da birden fazla bağımlı sigorta kolundan oluşan portföyler için artık süreçleri incelenmiştir.

3.1.1. Bir Sigorta Kolundan Oluşan Portföy İçin Artık Süreci

Aktüerya literatüründe bir sınıf için artık süreci (risk rezervi) genellikle

$$U_n = u + cn - S_n \ , \qquad n = 0,1,2,... \qquad (3.1)$$

biçiminde tanımlanır. Burada

U_n : Sigorta şirketinin n anındaki risk rezervini,

u : Sigorta şirketinin başlangıç sermayesini,

c : Her dönemde alınan sabit prim miktarını,

S_n : n dönem boyunca poliçede oluşan toplam hasar miktarını

gösterir. Ayrıca n dönem boyunca oluşan toplam hasar miktarını gösteren S_n,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Z_i$$

şeklindedir ve paranın zaman değerinin olmadığı varsayılır ($r = 0$). Burada Z_i, i. dönemdeki hasarların toplamıdır ve Z_i'ler $\mu = E[\mu_i] < c$ ile bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenlerdir. Başka bir gösterimle artık süreci

$$U_n = u + (c - Z_1) + (c - Z_2) + ... + (c - Z_n)$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan G_n, n yılda elde edilen kazanç olmak üzere artık süreci

$$U_n = u + G_1 + ... + G_n = u + \sum_{i=1}^{n} G_i \qquad (3.2)$$

şeklinde tanımlanır (Gerber, 1982).

(3.2) eşitliği ile verilen artık sürecindeki kazanç süreci (sigorta şirketinin herhangi bir yılda topladığı primler eksi aynı yılda ödediği hasarlar) için Gerber (1982), çeşitli zaman serisi modelleri önermiştir.

(3.1) eşitliği ile verilen artık sürecine paranın zaman değeri eklendiğinde; yani faiz olmaması kısıtı kaldırıldığında bir sigorta şirketinin bir sınıf için kesikli artık süreci

$$U_n = u(1+r)^n + \sum_{i=1}^{n} W_i (1+r)^{n-i+1} - \sum_{i=1}^{n} Z_i (1+r)^{n-i} \qquad (3.3)$$

şeklinde tanımlanır. Burada U_n, n anındaki artık değeri; u, sigorta şirketinin başlangıç sermayesi ve r bileşik faiz oranı olmak üzere sabit faiz oranının $r \geq 0$ şeklinde olduğu, Z_i hasarının dönemin sonunda ödendiği ve W_i priminin dönemin başında ödendiği varsayılır.

3.1.2. p Bağımlı Sigorta Kolundan Oluşan Portföy İçin Artık Süreci

Bir sigorta şirketinin portföyünde $i.$ $(1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{p})$ sigorta kolu için $U_{i0} = u_i > 0$, başlangıç sermayesi olmak üzere $\{U_{in}, \mathrm{n} \geq 0\}$, n anındaki ya da n. yılın sonundaki artık değerini göstersin. Buradan U_n artık süreci,

$$U_n = U_{1n} + U_{2n} + ... + U_{pn}, \quad n \geq 0 \qquad (3.4)$$

şeklinde tanımlanır. Burada U_n, n anındaki sigorta şirketinin toplam artık değeri ve $U_0 = u = u_1 + ... + u_p$ toplam başlangıç sermayesidir. Her i $(1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{p})$ için W_{in}, n. dönemde toplanan primleri ve Z_{in} de aynı dönemde ödenen hasar miktarını göstersin. Herhangi $(1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})$ ve $\mathrm{n} \ge 1$ için W_{in} ve Z_{in} negatif olmayan rastlantı değişkenleridir. Ayrıca hasarlar $\{Z_{in}, \ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$ n. dönemin sonunda ödenirken, primlerin $\{W_{in}, \ (1 \le \mathrm{i} \le \mathrm{p})\}$ n. dönemin başında toplandığı varsayılır. r sabit faiz oranı olmak üzere toplam artık süreci,

$$U_n = u(1+r)^n + \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} W_{ik}(1+r)^{n-k+1} - \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} Z_{ik}(1+r)^{n-k}$$

eşitliği ile elde edilir. Aynı eşitlik,

$$U_n = U_{n-1}(1+r) + \sum_{i=1}^{p} W_{in}(1+r) - \sum_{i=1}^{p} Z_{in} \ , \qquad n \ge 1 \tag{3.5}$$

şeklinde de yazılabilir (Zhang et. al., 2007).

3.1.3. p Bağımlı Sınıflı Portföy İçin Artık Sürecinin Matrisler ile Gösterimi

Herhangi $n \ge 1$ için p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde n. dönemin başında toplanan primleri gösteren sabit sütun vektörü W_n, $W_n = (W_{1n}, ..., W_{pn})'$ şeklinde ve n. dönemin sonunda ödenen hasarları gösteren sabit sütun vektörü Z_n, $Z_n = (Z_{1n}, ..., Z_{pn})'$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca 1_k, k boyutlu 1'lerden oluşan sütun vektörü ve $v = (1+r)^{-1}$ iskonto vektörü olsun. Bu durumda artık süreci $\{U_n\}$,

$$U_n = v^{-1}U_{n-1} + v^{-1}1'_p W_n - 1'_p Z_n \ , \quad n \ge 1 \tag{3.6}$$

şeklinde yazılır (Zhang et. al., 2007).

3.2. Net-Kâr Şartı ve Düzeltme Katsayısı

Bir risk modeli için iflas olasılıkları göz önünde tutulduğunda net-kar şartı, ortalama olarak, her sigorta döneminde prim gelirinin hasar ödemelerini aşacağını ifade eder; yani her $i = 1,2,...$ için $E[W_i] > E[Z_i]$ şeklinde olduğu varsayılır. Ancak zaman serileri yaklaşımı ile modellenen bağımlı risklerde prim ve hasar süreçlerinin dağılımları genellikle bilinmediği için net-kar şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimleri (akgürültü rastlantı değişkenleri) açısından yazılır. Bunun sonucunda düzeltme katsayısı R de hata terimlerinin dağılımları yardımıyla elde edilir. Ayrıca hata terimleri bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri olduğundan birinci hata teriminin dağılımı ile düzeltme katsayısını elde etmek yeterlidir.

3.2.1. Otoregresif Modelde Net-Kâr Şartı ve Düzeltme Katsayısı

Hasar ve prim süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu durum için (yani hasar süreci Eş. (2.19)'u ve prim süreci Eş. (2.20)'yi sağladığında) net-kar şartı,

$$\frac{1-a^i}{1-a}E[X]+a^i z_0 < \frac{1-b^i}{1-b}E[Y]+b^i w_0 \qquad (3.7)$$

şeklindedir. Burada $E[Y] > E[X]$ ve $1 \geq b \geq a$ olur.

Eş. (3.7) ile verilen net-kar şartı 1'den küçük iflas olasılıkları için yeterli bir şarttır ancak 1'den daha küçük iflas olasılıkları için gerekli koşul $n \to \infty$ iken,

$$\frac{E[X]}{1-av}\left[\frac{(1+r)^n-1}{r}-va\frac{1-a^n}{1-a}\right]-\frac{E[Y]}{1-bv}\left[(1+r)\frac{(1+r)^n-1}{r}-bv\frac{1-b^n}{1-b}\right]<\infty \qquad (3.8)$$

şeklindeki gibidir; burada $v=(1+r)^{-1}$ iskonto faktörüdür.

X'in moment çıkaran fonksiyonunun uygun bölgede olduğu, $1+a<(1+bv^2)/v$, $E[Y] > E[X]$ olduğu ve $R > 0$ şeklinde bir düzeltme katsayısı R olduğu varsayıldığında R aşağıdaki eşitlik yardımıyla elde edilir:

$$E\left[\exp\left(-\frac{R}{1-bv}Y\right)\right]E\left[\exp\left(\frac{RvX}{1-av}\right)\right]=1 \qquad (3.9)$$

(3.9) eşitliği ile verilen R, düzeltme katsayısı olarak adlandırılır. (3.9) eşitliğinin çözülmesi ile birden fazla R elde edilirse en küçük pozitif sayı R düzeltme katsayısı olarak alınır. Ayrıca Bowers ve diğerleri (1997) tarafından önerilen otoregresif süreç yardımıyla sigortacının hasar süreci modellenir ve primin farklı aralıklar üzerinde sabit olabileceği varsayılırsa; yani $b=0$ (örneğin

$W_i = Y_i$, $i = 1,2,...$'ler bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleridir) ve X'in moment çıkaran fonksiyonunun uygun bölgede olduğu varsayıldığında düzeltme katsayısı R,

$$E[\exp(-RW)]E\left[\exp\left(\frac{RvX}{1-av}\right)\right] = 1 \tag{3.10}$$

eşitliğinin çözülmesi ile elde edilir (Yang and Zhang, 2003).

3.2.2. Yıllık Kazanç Modelinde Net-Kâr Şartı ve Düzeltme Katsayısı

Sigorta şirketinin n yılda elde ettiği kazancın **ARMA(p,q)** modeline uyduğu durumda net-kar şartı, ortalama olarak, her sigorta döneminde prim gelirinin hasar ödemelerini aşacağı; yani her $i = 1,2,...$ için $E[W_i] > E[Z_i]$ şeklinde olduğu varsayımına uyar. Bununla birlikte zaman serileri yaklaşımı ile modellenen bağımlı risklerde primlerin ve hasarların dağılımları genellikle bilinmediği için net-kar şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimleri açısından yazılır. Ancak yıllık kazanç modelinde sigorta şirketinin n. yılda topladığı primlerden aynı yılda ödediği hasarların çıkarılmasıyla elde ettiği kazancı modellendiğinden ve bu modelde primlerin sabit miktarlarla toplandığı ve hasar dağılımları bilindiğinden yıllık kazanç modelinde net-kar şartı diğer zaman serisi modellerinden farklı olarak hasar değişkeni ve prim açısından yazılır. Bu durumda net-kar şartı, c dönemsel olarak toplanan primler ve Z_i hasar süreci rastlantı değişkeni olmak üzere her $n > 0$ için

$$E\left(cn - \sum_{i=1}^{n} Z_i\right) > 0 \tag{3.11}$$

şeklindedir (Zhang, 2005).

Net-kar şartının sağlandığı varsayıldığında düzeltme katsayısı R hata terimlerinin dağılımları yardımıyla

$$E[\exp(-RX)] = 1$$

eşitliğinin çözülmesi ile elde edilir. Burada $\alpha = 1 - a_1 - ... - a_p$ ve $\beta = 1 + b_1 + ... + b_q$ olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı X_n hata terimlerinin dağılımı,

$$X_n = \frac{\alpha}{\beta} c - Y_n \tag{3.12}$$

eşitliği yardımıyla elde edilir; yani $E(X_n) = \frac{\alpha}{\beta} c - E(Y_n) > 0$ şeklindedir. Buradan $E[\exp(-RX)] = 1$ eşitliği,

$$E\left[\exp\left(-R\left(\frac{\alpha}{\beta} c - Y\right)\right)\right] = 1 \tag{3.13}$$

şeklinde yazılabilir (Christ and Steinebach, 1995).

Uyarı: $\{G_n\}$ sürecinde n. yılda elde edilen kazancı gösteren G_n rastlantı değişkeni, her dönem ödenen sabit c primi eksi n. dönemde ödenen hasarları gösteren bağımsız ve aynı dağılımlı Y_n rastlantı değişkeni olduğundan; yani $G_n = c - Y_n$ şeklinde olduğu için X_n hata terimleri $X_n = \lambda c - Y_n$ şeklinde tanımlanır. Bu eşitlikte λ'nın değerinin bulunması gerekmektedir. λ'nın değeri (2.21) ve (2.27) eşitlikleri ile verilen modeller yardımıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$G_n = \lambda c\left(1 + \sum_{k \geq 1} b'_k\right) - Y_n - \sum_{k \geq 1} b'_k Y_{n-k} \ ,$$

$$E(G_n) = \lambda c(\beta / \alpha) - E(Y)(\beta / \alpha),$$

$\alpha = 1 - a_1 - a_2 - ... - a_p$ ve $\beta = 1 + b_1 + b_2 + ... + b_q$ şeklindedir. Buradan $\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$ olur (Christ and Steinebach, 1995).

3.2.3. Çok Değişkenli Modelde Net-Kâr Şartı ve Düzeltme Katsayısı

p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde prim ve hasar süreçlerinin birlikte modellendiği Eş. (2.30) ile verilen birinci derece çok değişkenli otoregresif model geçerli olduğu durumda net-kar şartı,

$$v^{-1}E\left[\sum_{i=1}^{p} W_{ik}\right] > E\left[\sum_{i=1}^{p} Z_{ik}\right], \quad k \geq 1 \tag{3.14}$$

şeklindeki gibidir. Ancak W_{ik} ve Z_{ik}'nın dağılımları bilinmediği için net-kar şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimlerini gösteren V açısından

$$(v^{-1}1'_{p'} - 1'_{p})\left[\frac{I_{2p} - A^{k}}{I_{2p} - A}\begin{pmatrix} E(X) \\ E(Y) \end{pmatrix} + A^{k}\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}\right] > 0, \quad k \geq 1 \tag{3.15}$$

şeklinde yazılır. Burada $V_n = (X'_n, Y'_n)' = (X_{1n}, ..., X_{pn}, Y_{1n}, ..., Y_{pn})'$ şeklindedir. Ayrıca X_{pn} ve Y_{pn}'ler p bağımlı sigorta kolundaki prim ve hasar süreçlerine ait hata terimleridir.

Net-kar şartı (3.15) yalnızca 1'den daha küçük olan iflas olasılıkları için yeterli bir koşuldur. Eş. (2.30) ile verilen çok değişkenli model için birden daha küçük olan iflas olasılıkları için gerekli şart,

$$E\left[\left(v^{-1}1_p + a\right)' X - \left(1_p + b\right)' Y\right] > 0 \tag{3.16}$$

şeklindedir. Burada $a = (\alpha_1, ..., \alpha_p)'$ ve $b = (\beta_1, ..., \beta_q)'$,

$$(a', -b') = (1'_p, -v1'_p) A (\mathrm{I}_{2p} - vA)^{-1}$$

eşitliği ile verilen iki sabit vektördür.

Eş. (3.16) ile verilen koşulun sağlandığı varsayıldığında,

$$\varepsilon_n = \left(v^{-1}1_p + a\right)' X_n - \left(1_p + b\right)' Y_n, \quad n \geq 1 \tag{3.17}$$

şeklinde $\{\varepsilon_n\}$ süreci tanımlanır. Burada $\{\varepsilon_n\}$; A katsayılar matrisi, r faiz oranı ve F dağılım fonksiyonu ile tek bir şekilde tanımlanan genel dağılım fonksiyonu ile bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisidir. (3.16) koşulu altında $E[\varepsilon_n] > 0$ olur. Buradan düzeltme katsayısı R,

$$E[\exp(-R\varepsilon_1)] = 1 \tag{3.18}$$

eşiliğinin çözülmesiyle elde edilir. Eğer (3.18) eşitliği ile verilen denklemin birden fazla pozitif çözümü varsa en küçük pozitif sayı olan R seçilir. Buradanda anlaşılacağı gibi, eğer $E[\exp(-R'\varepsilon_1)] \geq 1$ şeklinde pozitif sabit R' varsa burada düzeltme katsayısı olmalıdır (Zhang et. al., 2007).

3.2.4. İki Değişkenli Modelde Net-Kâr Şartı ve Düzeltme Katsayısı

(Z_{1n}, Z_{2n}) hasar süreçleri Eş. (2.35) ile verilen iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu durumda Eş. (2.36) ile verilen durağanlık koşulunun sağlandığı, $E(X_1) < \infty$ ve $E(Y_1) < \infty$ olduğu varsayılsın. Bu durumda, her $x \geq 1$ olduğunda $h(x) > 0$ olmak üzere $x \in [1, \infty)$ için x'in iki fonksiyonu $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ sırasıyla

$$\alpha(x) = \frac{x(a_1 + b_1) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{h(x)}, \qquad \beta(x) = \frac{x(a_2 + b_2) - (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{h(x)} \tag{3.19}$$

şeklinde olsun. Buradan başlangıç primini gösteren c_0,

$$c_0 = \lim_{n \to \infty} E(Z_{1n} + Z_{2n}) = E[(1 + \alpha(1))X_1 + (1 + \beta(1))Y_1] < \infty \tag{3.20}$$

şeklinde elde edilir. Burada z_1 ve z_2 başlangıç hasarları sıfır ise her $n \geq 1$ için $E(Z_{1n} + Z_{2n}) < c_0$ olur.

İki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde, primlerin sabit c miktarıyla toplandığı ve hasarların iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda net-kar şartı,

$$c_0 \leq cv^{-1} \tag{3.21}$$

koşulunu sağlar. Ayrıca Eş. (3.21) ile verilen koşul, prim ve hasar süreçlerinin çok değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durum için net-kar şartını gösteren Eş. (3.14) ve Eş. (3.16) koşullarını sağlar. Burada Eş. (3.21) ile verilen koşulu sağlayan $cv^{-1} - c_0$ şartı, net-kar (beklenen) şartını ve $\delta \equiv \frac{cv^{-1}}{c_0} - 1$ ise güvenlik yüklemesini gösterir.

İki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit c miktarıyla toplandığı ve hasarların iki değişkenli otoregresif modele uyduğu durumda hasar süreçlerine ilişkin hata terimi,

$$\begin{aligned}\xi_k &= [1+\alpha(v^{-1})]X_k + [1+\beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})}\end{aligned} \tag{3.22}$$

şeklinde tanımlanır; burada $\{\xi\}$, bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisidir. Eğer $a_1 \le 1$ ve $b_2 \le 1$ ise ξ_k negatif değerler almaz. R düzeltme katsayısı olduğunda, Eş. (2.35) ile verilen iki değişkenli birinci derece otoregresif model için R düzeltme katsayısı,

$$E[\exp(-R(cv^{-1}-\xi_1))] = 1 \tag{3.23}$$

eşitliğinin çözülmesi ile elde edilir. Bu eşitlik çözüldüğünde birden fazla pozitif sayı varsa R düzeltme katsayısı, Eş. (3.23)'ü sağlayan pozitif en küçük sabit sayı olarak seçilir (Zhang et. al., 2007).

3.3. İflas Olasılıkları

Bu bölümde, buraya kadar incelenen modeller için iflas olasılıklarının nasıl hesaplanacağı gösterilmiştir.

3.3.1. Prim ve Hasar Süreçlerine İlişkin Otoregresif Modeller İçin İflas Olasılıkları

Teorem 3.1: R düzeltme katsayısının olduğu, hasar süreçlerinin (2.19) eşitliğini ve prim süreçlerinin ise (2.20) eşitliğini sağladığı varsayılsın. Bu durumda iflas olasılığı için üst sınır (her $x \ge 0$ için),

$$\varphi(x, y_0, x_0) \le \frac{\exp(-R\hat{x})}{E\left[\exp\left(-Rv^T\hat{U}_T\right) \,\middle|\, T < \infty\right]} \tag{3.24}$$

eşitsizliği yardımıyla elde edilir. Burada ,

$$\hat{U}_n = U_n - \frac{av}{1-av} W_n + \frac{b}{1-bv} Z_n,$$

$$T = \inf\{n : U_n \leq 0\},$$
$$\hat{x} = \hat{U}_0$$

şeklindedir. Faiz oranı $r = 0$ şeklinde olduğunda (3.24) eşitsizliği eşitliğe dönüşür (Yang and Zhang, 2003).

Eş. (3.24)'de verilen teoremin ispatı Yang ve Zhang (2003)'da açık şekilde verildiğinden burada verilmeyecektir. Ayrıca primlerin sabit miktarla toplandığı hasar sürecinin ise Bowers ve diğerleri tarafından önerilen birinci derece otoregresif modele uyduğu durum için Eş. (3.24)'te verilen Teorem 3.1 (her $x \geq 0$ için),

$$\varphi(x, y_0, x_0) \leq \frac{\exp(-R\hat{x})}{E[\exp(-Rv^T \hat{U}_T) \mid T < \infty]} \tag{3.25}$$

şekline dönüşür. Burada,

$$\hat{U}_n = U_n - \frac{av}{1-av} W_n,$$

$$T = \inf\{n : U_n \leq 0\},$$

$$\hat{x} = \hat{U}_0$$

şeklindedir. $r = 0$ olduğunda (3.24) eşitsizliği eşitliğe dönüşür (Yang and Zhang, 2003).

3.3.2. Yıllık Kazanç Modelleri İçin İflas Olasılıkları

Bu bölümde, bir sigorta şirketinin n. yılda topladığı primlerden aynı yıl ödediği hasarların çıkarılmasıyla elde ettiği kazanç modelleri incelenmiştir.

3.3.2.1. Otoregresif Hareketli Ortalama Modeli İçin İflas Olasılığı

$T = \inf(n : U_n \leq 0)$ iflas anını (her n için eğer $\mathrm{U}_\mathrm{n} > 0 \; ise \; T = \infty$) ve $\varphi(u; g_0,....,g_{-p+1}; x_0,....,x_{-q+1}) = P(T < \infty)$ iflas olasılığını göstersin. Gerber (1982), Martingale teknikleri sayesinde iflas olasılığı için aşağıda verilen teoremdeki "üstel özdeşliği" türetmiştir:

Teorem 3.2: R $(R > 0)$ düzeltme katsayısı olmak üzere Eş. (2.21)'de verilen model için iflas olasılığı,

$$\varphi(u; g_0,....,g_{-p+1}; x_0,....,x_{-q+1}) = \frac{v(u; g_0,....,g_{-p+1}; x_0,.....,x_{-q+1})}{E[v(U_n; G_n,....,G_{n-p+1}) \mid T < \infty]} \quad (3.26)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$v(u; g_0,....,g_{-p+1}; x_0,....,x_{-q+1}) = \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} R\tilde{u} \right) ,$$

$$\alpha = 1 - a_1 - ... - a_p \,, \quad \beta = 1 + \mathrm{b}_1 + ... + b_q \,,$$

$$\tilde{u} = u + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{p-1} \left(a_{k+1} + ... + a_p\right) g_k + \frac{1}{\alpha} \sum_{k=0}^{q-1} \left(b_{k+1} + ... + b_q\right) x_{-k}$$

şeklindedir. Eş. (3.26) ile verilen teoremin ispatı Gerber (1982)'de açık bir şekilde verilmiştir. Bu nedenle teoremin ispatı burada verilmeyecektir (Gerber, 1982; Christ and Steinebach, 1995).

3.3.2.2. Hareketli Ortalama Modeli İçin İflas Olasılığı

Teorem 3.3: $T = \inf(n : U_n \leq 0)$ iflas anını (her n için eğer $\mathrm{U}_\mathrm{n} > 0 \; ise \; T = \infty$), $\varphi(u; g_0,....,g_{-p+1}; x_0,....,x_{-q+1}) = P(T < \infty)$ iflas olasılığını ve R $(R > 0)$ düzeltme katsayısını göstermek üzere Eş. (2.25) ile verilen model için iflas olasılığı,

$$\varphi(u; x_0,....,x_{-q+1}) = \frac{v(u; x_0,.....,x_{-q+1})}{E[v(U_n; X_n,....,X_{n-q+1}) \mid T < \infty]} \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$v(u; x_0, \ldots\ldots, x_{-q+1}) = \exp\left(-\frac{R}{\beta}\tilde{u}\right),$$

$$\beta = 1 + \mathrm{b}_1 + \ldots. + b_q,$$

$$\tilde{u} = u + \sum_{k=0}^{q-1} (b_{k+1} + \ldots + b_q) x_{-k}$$

şeklindedir. Eş. (3.27) ile verilen teoremin ispatı Gerber (1982)'de açık bir şekilde verilmiştir. Bu nedenle teoremin ispatı burada verilmeyecektir (Gerber, 1982).

3.3.3. Çok Değişkenli Model İçin İflas Olasılıkları

Bir sigorta şirketinin n. dönemdeki risk rezervinin negatif ($U_n < 0$) olduğu zaman T iflas anını ve (yani $\min \varnothing = +\infty$ ile $T = \min\{n \geq 0 : U_n < 0\}$ iflas anını) $\varphi(u, w, z) = P(T < \infty | U_0 = u, W_0 = w, Z_0 = z)$ iflas olasılıklarını gösterir. Burada u, w ve z sırasıyla başlangıç sermayesi, başlangıç primi ve başlangıç hasarıdır.

Teorem 3.4: R düzeltme katsayısının olduğu varsayılsın. Buradan Eş.(2.30)'da verilen model için iflas olasılığı aşağıdaki gibi elde edilir (Zhang et. al., 2007):

$$\varphi(u, w, z) \leq \frac{\exp(-R\hat{u})}{E[\exp(-Rv^T \hat{U}_T) | T < \infty]} \qquad (3.28)$$

burada $a = (\alpha_1, \ldots., \alpha_p)'$ ve $b = (\beta_1, \ldots\ldots, \beta_q)'$ vektörleri $(a', -b') = (1'_p, -v1'_p)A(\mathrm{I}_{2p} - vA)^{-1}$ şeklinde olmak üzere,

$$\hat{U}_n = U_n + a'W_n - b'Z_n, \quad n \geq 0$$

$$U_0 = \hat{u} = u + a'w - b'z$$

şeklindedir.

Eş. (3.28) ile verilen teoremin ispatı, Zhang ve diğerleri (2007)'nde açık bir şekilde verilmektedir.

Sonuç 3.1 : Düzeltme katsayısı R'nin olduğu durumda, eğer faiz oranı $r=0$ ve $Var(\varepsilon_1)=\sigma^2<\infty$ ise Teorem (3.4), Eş. (3.29) ile verilen eşitliğe dönüşür (Zhang et. al., 2007):

$$\varphi(u,w,z)=\frac{\exp(-R\hat{u})}{E[\exp(-R\hat{U}_T)\big|T<\infty]} \tag{3.29}$$

p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için çok değişkenli modelde $p=2$ ve primlerin sabit c miktarı ile toplandığında iki hasar sürecinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda (yani Z_1 ve Z_2 hasar rastlantı değişkenlerinin (2.35) eşitliği ile verilen modeli sağladıkları ve Eş. (2.32) ve Eş. (3.20) koşullarının sağlandığı varsayıldığında), iflas olasılığı için üst sınır aşağıda verilen Teorem 3.5 yardımıyla elde edilir:

Teorem 3.5: R düzeltme katsayısının olduğu varsayılsın. Eğer $Var(\xi_1)<\infty$ ise buradan iflas olasılığı için üst sınırlar,

$$\varphi(u,z_1,z_2)\le\frac{\exp(-R\hat{u})}{E[\exp(-Rv^T\hat{U}_T)\big|T<\infty]} \tag{3.30}$$

eşiliği ile elde edilir. Burada $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$, Eş. (3.19)'da verildiği gibi olmak üzere

$$\hat{U}_n=U_n-\alpha(v^{-1})Z_{1n}-\beta(v^{-1})Z_{2n},\quad n\ge 0$$

$$\hat{U}_0=u=u-\alpha(v^{-1})z_1-\beta(v^{-1})z_2$$

şeklindedir ve eğer $r=0$ ise Eş. (3.30) ile verilen eşitsizlik eşitliğe dönüşür (Zhang et. al., 2007).

Bu teoremin ispatı Zhang ve diğerleri (2007)'nde açık bir şekilde verilmiştir.

Sonuç 3.2: Eş. (3.30) ile verilen Teorem (3.5) sağlandığında $a_1\le 1$ ve $b_1\le 1$ ise

$$\varphi(u,z_1,z_2)\le\exp(-R\hat{u}) \tag{3.31}$$

olarak elde edilir.

İspat: Eğer $a_1 \leq 1$ ve $b_1 \leq 1$ ise buradan $\alpha\left(v^{-1}\right) \geq 0$ ve $\beta\left(v^{-1}\right) \geq 0$ olur. Sonuç olarak, T sonlu olduğunda $\hat{U}_T = U_T - \alpha\left(v^{-1}\right)Z_{1T} - \beta\left(v^{-1}\right)Z_{2T} \leq U_T < 0$ olur ve bunun sonucunda Eş. (3.30)'daki payda 1'den büyük olur ve böylece Eş. (3.31) sağlanır (Zhan et. al., 2007).

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu bölümde, buraya kadar incelenen modellere ilişkin örnekler verilmiştir. Örneklerde iflas olasılıklarını hesaplamada yaşanan zorluklar nedeniyle iflas olasılıkları yerine iflas olasılıkları için elde edilen üstel üst sınırlar veren Lundberg tipi eşitsizliklerden yararlanılmıştır. Lundberg tipi eşitsizlikler,

$$\varphi(u, w, z) \leq \exp(-Ru)$$

eşitsizliği ile elde edilir. İflas olasılıkları için üst sınır hesaplanmasında kullanılan eşitsizliklerin paydaları birden daha büyük olduğu için Lundberg tipi eşitsizlikler sağlanır; bu çalışmada yararlanılan makaleler incelendiğinde bu makalelerde benzetim çalışmalarıyla elde edilen iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar ile Lundberg tipi eşitsizlikler ile iflas olasılıkları için elde edilen üstel üst sınırlar karşılaştırıldığında benzetim çalışmalarıyla elde edilen iflas olasılıklarının Lundberg tipi eşitsizlikler ile iflas olasılıkları için elde edilen bu üst sınırlardan iki veya beş kat daha küçük olduğu görülmektedir. Lundberg tipi eşitsizlikler ve teoremler yardımıyla elde edilen üst sınırlar, iflas olasılıklarının çeşitli durumlarda (bağımlılık arttığında, faiz oranları arttığında v.b) nasıl bir davranış gösterdiğine ilişkin bilgi verdiği için önemlidir.

Örneklerde genel olarak hasar ve prim süreçlerinin daha önce verilen modellere uyduğu durumlarda faiz oranlarının, başlangıç sermayesinin, ilişki katsayılarının, buna bağlı olarak bağımlılığın iflas olasılıkları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Zaman serileri yaklaşımı ile modellenen bağımlı risklerde primlerin ve hasarların dağılımları genellikle bilinmediği için net-kar şartı bağımsız ve aynı dağılımlı hata terimleri açısından yazılır. Bunun sonucunda düzeltme katsayısı R de hata terimlerinin dağılımları yardımıyla elde edilir. Bu nedenle hata terimlerinin dağılımlarının ve hata terimlerinin ortalamasındaki değişimin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi de araştırılmıştır.

Örneklerde, Christ ve Steinebach (1995); Yang ve Zhang (2003) ve Zhang ve diğerleri (2007)'nin hata terimlerinin dağılımları ve modelde kullanılan parametreler için yaptıkları varsayımlar sonucunda elde ettikleri modeller kullanılmıştır. Bu modeller kullanılırken modellerin sağlanması için gerekli durağanlık koşulları ve net-kar şartları göz önünde bulundurularak hata terimlerinin dağılımları ve modellere ilişkin parametrelerde değişiklik yapılarak her bir model için ilgili araştırmacının çalışmasında incelemediği durumlar ele alınmıştır. Bunun sonucunda modellerde faiz oranlarının, başlangıç sermayesinin, primlerin sabit miktarlarla toplandığı modellerde prim miktarlarının, bağımlılığın ve hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkileri incelenmiştir.

4.1. Prim ve Hasar Süreçlerine İlişkin Otoregresif Süreçler İçin Sayısal Örnekler

Bu bölümde, bir sigorta kolundan ya da birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan bir portföydeki prim ve hasar süreçlerinin uyduğu birinci derece otoregresif modellere ilişkin sayısal örnekler ve bir sigorta kolundan ya da birden fazla bağımsız sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasar süreçlerinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu duruma ilişkin sayısal örnekler verilmiştir. Bu örnekler yardımıyla faiz oranlarının, başlangıç sermayesindeki değişimin, primlerin sabit miktarlarla toplandığı modellerde bu oranlardaki değişimin, primlerin ve hasarların stokastik süreç olduğu durumlarda hata terimlerinin ortalamasındaki değişimin ve hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

4.1.1. Prim ve Hasar Süreçleri İçin Sayısal Örnekler

Bu bölümde verilen örneklerde hasar ve prim süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu (yani hasar sürecinin (2.19) eşitliği ile verilen modele, prim sürecinin ise (2.20) eşitliği ile verilen modele uyduğu) varsayılmıştır.

Bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenlerinden X, (2.19) eşitliğindeki hata terimi ve Y, (2.20) eşitliğindeki hata terimi olmak üzere X ve Y'nin moment çıkaran fonksiyonlarının uygun bölgede olduğu, $1+a<\left(1+bv^2\right)/v$, $E[Y]>E[X]$ olduğu ve $R>0$ şeklinde aşağıdaki eşitliği sağlayan bir R olduğu varsayılsın. Bu durumda R,

$$E\left[\exp\left(-\frac{R}{1-bv}Y\right)\right]E\left[\exp\left(\frac{RvX}{1-av}\right)\right]=1$$

eşitliği ile elde edilir. Bu eşitlik daha basit olarak,

$$M_Y\left(-\frac{R}{1-bv}\right)M_X\left(\frac{Rv}{1-av}\right)=1 \tag{4.1}$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda R düzeltme katsayısı hata terimlerinin dağılımlarına bağlı olarak hata terimlerinin moment çıkaran fonksiyonları yardımıyla elde edilir. Hata terimlerinin dağılımlarının normal dağılıma ya da üstel dağılıma uyduğu durumlarda R düzeltme katsayısı aşağıdaki gibi elde edilir:

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ ve $Y\sim N\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ şeklinde olduğunda,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{Ry}{1-bv}}\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-(y-\mu_2)^2/2\sigma_2^2}dy\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{Rxv}{1-av}}\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-(x-\mu_1)^2/2\sigma_1^2}dx = 1$$

olur. Buradan

$$\begin{gathered}e^{-\mu_2\frac{R}{1-bv}+\sigma_2^2\left(-\frac{R}{1-bv}\right)^2/2}\,e^{\mu_1\frac{Rv}{1-av}+\sigma_1^2\left(\frac{Rv}{1-av}\right)^2/2}=e^{\mu_1\frac{Rv}{1-av}-\mu_2\frac{R}{1-bv}+\sigma_2^2\left(-\frac{R}{1-bv}\right)^2/2+\sigma_1^2\left(\frac{Rv}{1-av}\right)^2/2}=1\\ \Rightarrow \mu_1\frac{Rv}{1-av}-\mu_2\frac{R}{1-bv}+\sigma_2^2\left(-\frac{R}{1-bv}\right)^2/2+\sigma_1^2\left(\frac{Rv}{1-av}\right)^2/2=0\end{gathered} \tag{4.2}$$

X ve Y'nin dağılımları ile dağılım parametreleri, faiz oranı r, a ve b katsayıları bilinen sabitler olduğundan bu değerler Eş. (4.2) ile verilen eşitlikte yerine koyularak denklem çözüldüğünde R düzeltme katsayısı elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X\sim\exp(\lambda)$ ve $Y\sim\exp(\beta)$ şeklinde üstel dağılıma sahip olduğunda R,

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda y}\lambda e^{y\left(-\frac{R}{1-bv}\right)}dy\int_0^{\infty} e^{-\beta x}\beta e^{x\left(\frac{Rv}{1-av}\right)}=1$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. İntegrallerin alınmasıyla eşitlik,

$$\frac{\lambda}{\lambda+\frac{R}{1-bv}}\frac{\beta}{\beta-\frac{Rv}{1-av}}=1$$

şeklinde olur. Buradan

$$R=\frac{\beta(1-av)-\lambda v(1-bv)}{v} \tag{4.3}$$

olur. Bu eşitlikte bilinen sabitler olan dağılımın parametreleri (λ ve β), r faiz oranı ile a ve b katsayıları yerlerine koyulduğunda R düzeltme katsayısı elde edilir.

Örnek 4.1: Eş. (2.19) ve Eş. (2.20) ile verilen modellerdeki parametreler, $b=0{,}5$; $r=0{,}08$ ($v=(1+r)^{-1}=0{,}926$) ve $a=0{,}2$ ($1+a<(1+bv^2)/v$ olduğundan $a<0{,}543$) olsun. Ayrıca u: başlangıç sermayesi, w: başlangıç prim miktarı ($w=0$) ve z: başlangıç hasar miktarı ($z=0$) olmak üzere,

$\varphi_1(u,w,z)$: $X \sim N(10{,}9)$ ve $Y \sim N(20{,}9)$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_2(u,w,z)$: $X \sim N(5{,}4)$ ve $Y \sim N(20{,}9)$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_3(u,w,z)$: $X \sim N(10{,}9)$ ve $Y \sim N(11{,}9)$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı göstersin. Bunun sonucunda

$$\mu_1\frac{Rv}{1-av}-\mu_2\frac{R}{1-bv}+\sigma_2^2\left(-\frac{R}{1-bv}\right)^2/2+\sigma_1^2\left(\frac{Rv}{1-av}\right)^2/2=0$$

eşitliği yardımıyla $X \sim N(10{,}9)$ ve $Y \sim N(20{,}9)$ olduğunda $R=1{,}208$, $X \sim N(5{,}4)$ ve $Y \sim N(20{,}9)$ olduğunda $R=1{,}735$ ve $X \sim N(10{,}9)$ ve $Y \sim N(11{,}9)$ olduğunda $R=0{,}426$ olarak elde edilir. Elde edilen düzeltme katsayıları ve başlangıç sermayesi (u) yardımıyla Çizelge 4.1 ile verilen iflas olasılıkları için üst sınırlar elde edilir.

Çizelge 4.1. Otoregresif modelde hata terimlerinin ortalamalarının ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$
2	0,0890000	0,031000000	0,427000000
3	0,0270000	0,005490000	0,279000000
9	0,0000190	0,000000165	0,022000000
10	0,0000057	0,000000000	0,014000000

Çizelge 4.1 incelendiğinde, başlangıç sermayeleri arttıkça üst sınırların azaldığı görülür. Ancak başlangıç sermayelerindeki artış oranları ile iflas olasılıklarındaki azalış oranları aynı büyüklükte değildir. Başlangıç sermayelerindeki küçük bir artış iflas olasılıklarında büyük bir azalışa neden olur. Ayrıca $Y \sim N(20,9)$ iken $X \sim N(10,9)$'dan $X \sim N(5,4)$'e azaltıldığında; yani prim sürecine ait ortalama sabit olduğunda hasar sürecine ait ortalama küçültüldüğünde iflas olasılıklarına ait üst sınırların da azaldığı ve $X \sim N(10,9)$ iken $Y \sim N(20,9)$'den $Y \sim N(11,9)$'e azaltıldığında; yani hasar sürecine ait ortalama sabit olduğunda prim sürecine ait ortalama düşürüldüğünde, iflas olasılıkları için üst sınırların arttığı görülür.

Yukarıda belirtildiği gibi başlangıç sermayeleri arttığında iflas olasılıkları azalır. Başlangıç sermayelerindeki küçük bir artış iflas olasılıklarını oldukça etkilemektedir. Ayrıca prim ve hasar süreçlerine ilişkin modellerdeki hata terimlerinin ortalaması arttığında ya da azaldığında, dolaylı olarak prim ve hasar süreçlerinin ortalaması da artmakta ya da azalmaktadır. Bunun sonucunda hata terimlerinin ortalamasının değişim yönüne bağlı olarak iflas olasılıkları artar yada azalır. Prim süreçlerinin ortalaması arttığında iflas olasılıkları azalırken hasar sürecine ait ortalama arttığında iflas olasılıkları ise artmaktadır. Prim ve hasar süreçlerinin otoregresif modele uyduğu durumda başlangıç sermayesi arttığında iflas olasılıklarının azaldığı Yang ve Zhang (2003) tarafından X ve Y rastlantı değişkenlerinin weibull dağılımına uyduğu durum için gösterilmiştir. Ayrıca primlerin c gibi bir sabit ile toplandığı ve iki bağımlı poliçeden oluşan bir portföyde hasarların iki değişkenli otoregresif modele uyduğu durum için c miktarı arttığında iflas olasılıklarının azaldığı Zhang ve diğerleri (2007) tarafından gösterilmiştir. Benzer sonuçlar bu çalışmada da elde edilmekle birlikte primlerin belli bir modele uyacak şekilde toplandığı durumda da prim sürecine ait ortalamalar arttığında iflas olasılıklarının azaldığı gösterilmiştir.

Örnek 4.2: (2.19) ve (2.20) eşitlikleri ile verilen modellerdeki parametreler $b = 0{,}5$; ($1 + a < \left(1 + bv^2\right)/v$ olduğundan $a < 0{,}543$), $u = 3$ ve $X \sim \exp(4)$ ve $Y \sim \exp(4)$ olsun. Ayrıca r : faiz oranlarını, w : başlangıç prim miktarını ($w = 0$) ve z : başlangıç hasar miktarını ($z = 0$) göstermek üzere,

$\varphi_1(u, w, z)$: $a = 0{,}2$ olduğunda iflas olasılıkları için üst sınırı,

$\varphi_2(u, w, z)$: $a = 0{,}3$ olduğunda iflas olasılıkları için üst sınırı,

$\varphi_3(u, w, z)$: $a = 0{,}5$ olduğunda iflas olasılıkları için üst sınırı göstersin. Bunun sonucunda

$$R = \frac{4(1 - av) - 4v(1 - bv)}{v}$$

eşitliği yardımıyla $a = 0{,}2$, $a = 0{,}3$ ve $a = 0{,}5$ olduğunda çeşitli faiz oranları için düzeltme katsayılarının değerleri ve iflas olasılıkları için üst sınırlar Çizelge 4.2'deki gibi olur:

Çizelge 4.2. Otoregresif modelde bağımlılığın ve faiz oranlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

r	R_1	$\varphi_1(3,0,0)$	R_2	$\varphi_2(3,0,0)$	R_3	$\varphi_3(3,0,0)$
0	1,20000	0,027	0,80000	0,091	0	1
0,025	1,25124	0,023	0,85124	0,078	0,05124	0,859
0,05	1,30472	0,020	0,90472	0,066	0,10472	0,730
0,08	1,37200	0,016	0,97200	0,054	0,17200	0,597

Çizelge 4.2 incelendiğinde faiz oranları arttıkça iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların azaldığı; yani iflas olasılıklarının azaldığı görülür. Bununla birlikte Çizelge 4.2'den de görüleceği gibi düzeltme katsayısı ile iflas olasılıkları arasında ters bir orantı vardır. Ayrıca içinde bulunulan yılda toplanacak primler ile geçmiş yıllarda toplanan primler arasındaki ilişkinin derecesini gösteren b parametresi sabit tutulup eski dönemde gerçekleşen hasarlar ile mevcut hasarlar arasındaki ilişkinin

oranını gösteren a parametresi arttırıldığında; yani bağımlılık arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar artmaktadır. Buradan da anlaşıldığı gibi bağımlılığın iflas olasılıkları üzerinde olumsuz bir etkisi vardır; yani bağımlılığın artması iflas olasılıklarını arttırmaktadır.

İlişkinin derecesini gösteren parametrenin arttırılmasıyla bağımlılık arttırılarak bağımlılığın iflas olasılıkları üzerindeki etkisini göstermek için Yang ve Zhang (2003), (2.19) eşitliği ile verilen modelde hata terimlerinin normal dağılıma uyduğu ve primleri sabit c miktarıyla toplandığı durumda a parametresi arttırıldığında iflas olasılıklarının da arttığını gösterdiler. Bu çalışmada ise hasar ve prim süreçlerinin birinci derece otoregresif modele uyduğu duruma da geçmiş dönem hasarları ile mevcut dönem hasarları arasındaki ilişkinin derecesini gösteren parametre a arttığında iflas olasılıklarının üst sınırlarının da arttığı gösterilmiştir. Diğer bir deyişle bağımlılık arttığında iflas olasılıklanın üst sınırlarının arttığı gösterilmiştir. Ayrıca Zhang ve diğerleri (2007), primlerin sabit c miktarıyla toplandığı iki değişkenli birinci derece otoregresif modeli sağlayan iki bağımlı hasar sınıfı olduğunda da benzer sonuçları elde etmişlerdir.

4.1.2. Primler Sabit Olduğunda Hasar Süreci için Sayısal Örnekler

Bu bölümdeki sayısal örnekler ile Bowers ve diğerleri (1997) tarafından önerilen model incelenmiştir. Primlerin pozitif sabit c miktarıyla düzenli olarak dönem başında ödendiği, hasar süreçlerinin (2.19) eşitliği ile verilen birinci derece otoregresif modele uyduğu, X'in moment çıkaran fonksiyonunun uygun bölgede olduğu, net-kar şartının sağlandığı ve $R > 0$ şeklinde aşağıdaki eşitliği sağlayan bir R olduğu varsayılsın. Bu durumda R,

$$E[\exp(-Rc)]E\left[\exp\left(\frac{RvX}{1-av}\right)\right]=1$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Bu eşitlik

$$\exp(-Rc)M_X\left(\exp\left(\frac{Rv}{1-av}\right)\right)=1 \qquad (4.4)$$

şeklinde de yazılabilir. Bu eşitlikten anlaşılacağı gibi R düzeltme katsayısı X'in dağılımına bağlı olarak X'in moment çıkaran fonksiyonu yardımıyla yukarıda verilen eşitliklerin çözülmesi ile elde edilir.

X'in dağılımı $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde olduğunda (4.4) eşitliği

$$\exp(-Rc)\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{Rxv}{1-av}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = 1$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı,

$$R = \frac{2(c - [\mu v/(1-av)])}{\sigma^2 (v/(1-av))^2} \tag{4.5}$$

şeklinde elde edilir.

X'in dağılımı $X \sim \exp(\lambda)$ şeklinde olduğunda (4.4) eşitliği

$$\exp(-Rc)\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda x} \lambda e^{x\left(\frac{Rv}{1-av}\right)} = 1$$

şeklinde yazılır. Daha basit bir şekilde

$$\exp(-Rc)\frac{\lambda}{\lambda - \frac{Rv}{1-av}} = 1 \tag{4.6}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı elde edilir.

Örnek 4.3: Primlerin pozitif c sabiti ile dönem başında toplandığı hasar süreçlerinin ise Eş. (2.19) ile verilen birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda $c = 20$, $a = 0{,}5$ ve $X \sim N(10,9)$ olsun. Ayrıca z: başlangıç hasar miktarı ($z = 0$) olmak üzere

$\varphi_1(10, w, z)$: $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_2(10, w, z)$: $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_3(10, w, z)$: $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı göstersin. Bunun sonucunda

$$R = \frac{2(c - [\mu v/(1-av)])}{\sigma^2 (v/(1-av))^2}$$

eşitliği yardımıyla $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda $R = 0{,}0703$, $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda $R = 0{,}1233$ ve $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda $R = 0{,}206$ olur. Böylece Çizelge 4.3 ile verilen iflas olasılıkları için üst sınırlar elde edilir:

Çizelge 4.3. Primlerin sabit miktarla toplandığı hasar süreçlerinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda faiz oranlarının ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$
2	0,869	0,781	0,662
3	0,81	0,691	0,539
9	0,531	0,33	0,157
10	0,495	0,291	0,127

Çizelge 4.3 incelendiğinde başlangıç sermayeleri arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların azaldığı görülmektedir. Ayrıca faiz oranları arttığında da iflas olasılıkları için üst sınırlar azalmaktadır; yani başlangıç sermayelerinin ya da faiz oranlarının artışı iflas olasılıklarını azaltır.

Örnek 4.4: Primlerin pozitif c sabiti ile dönem başında toplandığı hasar süreçlerinin ise Eş. (2.19) ile verilen otoregresif modele uyduğu durumda $c = 20$, $a = 0{,}5$ ve $X \sim \exp(0{,}1)$ olsun. Ayrıca z: başlangıç hasar miktarı ($z = 0$) olmak üzere

$\varphi_1(10, w, z)$: $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_2(10, w, z)$: $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı,

$\varphi_3(10, w, z)$: $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda iflas olasılığı için üst sınırı göstersin. Bunun sonucunda,

$$\exp(20R) = \frac{\lambda}{\lambda - \frac{Rv}{1 - av}}$$

eşitliği yardımıyla $r = 0{,}03$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}971$) olduğunda $R \cong 0{,}00000$ ve bu durumda $\varphi_1(10{,}0{,}0) \cong 1$; $r = 0{,}05$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}952$) olduğunda $R \cong 0{,}00000$ ve bu durumda $\varphi_2(10{,}0{,}0) \cong 1$ ve $r = 0{,}08$ ($v = (1+r)^{-1} = 0{,}926$) olduğunda $R \cong 0{,}00000$ ve bu durumda $\varphi_3(10{,}0{,}0) \cong 1$ olur.

Yukarda verilen $\varphi_1(10{,}0{,}0) \cong 1$, $\varphi_2(10{,}0{,}0) \cong 1$ ve $\varphi_3(10{,}0{,}0) \cong 1$ iflas olasılıkları için üst sınırlar ile Örnek 4.3'te verilen iflas olasılıkları için üst sınırlar incelendiğinde primlerin sabit c ile toplandığı hasar süreçlerinin ise Eş. (2.19) ile verilen birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda Eş. (2.19) ile verilen modeldeki hata terimleri normal dağılıma uyduğu durumda, iflas olasılıklarının hata terimleri aynı ortalama ile üstel dağılıma uyduğu duruma göre çok daha küçük olduğu görülür.

4.2. Yıllık Kazanç için Sayısal Örnekler

Bu bölümde, bir sigorta şirketinin bir dönemde topladığı primlerden aynı dönemde ödediği hasar miktarlarının çıkarılmasıyla elde ettiği kazancına ilişkin modeller için sayısal örnekler verilmiştir.

Yıllık kazanç modellerinin sağlandığı, X hata terimlerinin moment çıkaran fonksiyonunun uygun bölgede olduğu, Eş. (3.11) ile verilen net-kar şartının sağlandığı ve $R > 0$ şeklinde bir düzeltme katsayısının olduğu varsayıldığında düzeltme katsayısı R hata terimlerinin dağılımları yardımıyla,

$$E[\exp(-RX)] = 1$$

eşitliğinin çözülmesi ile elde edilir; burada bağımsız ve aynı dağılımlı X_n hata terimlerinin dağılımı $\alpha = 1 - a_1 - \ldots - a_p$ ve $\beta = 1 + b_1 + \ldots + b_q$ olmak üzere $X_n = \frac{\alpha}{\beta} c - Y_n$ eşitliği yardımıyla elde edilir; yani $EX_n = \frac{\alpha}{\beta} c - EY_n > 0$ şeklindedir. Buradan $E[\exp(-RX)] = 1$ eşitliği,

$$E\left[\exp\left(-R\left(\frac{\alpha}{\beta}c-Y\right)\right)\right]=\exp\left(-R\frac{\alpha}{\beta}c\right)E[\exp(RY)]=1$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikten de görülebileceği gibi düzeltme katsayısı R,

$$M_{Y_1}(R)=\exp\left(R\frac{\alpha}{\beta}c\right) \tag{4.7}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir; yani n. yılda elde edilen kazancı gösteren G_n rastlantı değişkenin modellendiği durumda, G_n her dönem ödenen c primi eksi n. dönemde ödenen hasarları gösteren bağımsız ve aynı dağılımlı Y_n rastlantı değişkeni olduğundan (yani $G_n = c - Y_n$ şeklinde olduğundan) düzeltme katsayısı, n. dönemde ödenen hasarları gösteren bağımsız ve aynı dağılımlı Y_n rastlantı değişkeninin dağılımına göre elde edilen Y_n rastlantı değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu yardımıyla elde edilir. Y_n rastlantı değişkenleri bağımsız ve aynı dağılımlı olduğundan her bir Y'nin dağılımıyla elde edilen moment çıkaran fonksiyonu aynıdır.

Y'in dağılımı $Y \sim N(\mu,\sigma^2)$ şeklinde olduğunda (4.7) eşitliği,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Ry}\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-(y-\mu_y)^2/2\sigma_y^2}dy=\exp\left(R\frac{\alpha}{\beta}c\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı,

$$R=2\left(c\frac{\alpha}{\beta}-\mu\right)/\sigma^2 \tag{4.8}$$

şeklinde elde edilir.

Y'in dağılımı $Y \sim \exp(\lambda)$ şeklinde olduğunda (4.7) eşitliği

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda.y}\lambda e^{yR}=\exp\left(Rc\frac{\alpha}{\beta}\right)$$

şeklinde yazılır. Daha basit bir şekilde

$$\exp\left(Rc\frac{\alpha}{\beta}\right)=\frac{\lambda}{\lambda-R} \tag{4.9}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin çözülmesiyle R düzeltme katsayısı elde edilir.

Örnek 4.5: Crist ve Steinebach (1995), yaptıkları benzetim çalışmasıyla, n**.** yılda elde edilen kazancı gösteren $\{G_n\}$ sürecinin çeşitli zaman serileri modelleri ile modellendiği durumlarda R düzeltme katsayısının çeşitli örneklem büyüklüklerine göre tahminini vermişlerdir. Bu örneklerde, Christ ve Steinebach (1995)'in Y_n hasarlarının dağılımının üstel ve normal dağılıma uyduğu durumlar için yaptıkları benzetim çalışmaları ile elde ettikleri verilere uyan modeller ele alınarak bu modeller geçerli olduğu durumda iflas olasılıkları için üst sınırlar elde edilmiştir. Ayrıca Y_n hasarlarının dağılımının iflas olasılıkları üzerinde nasıl bir etkisinin olduğu tartışılmıştır. Burada,

$\varphi_1(u)$: Y_n hasarlarının dağılımı $Y_n \sim \exp(1/2)$ şeklinde olduğunda, $\{G_n\}$ sürecinin $G_n = 0{,}2G_{n-1} + X_n$ modeline uyduğu ve $c=3$ olduğu durumda düzeltme katsayısı yardımıyla elde edilen iflas olasılığı için üst sınır olsun. Buradan $R = 0{,}1568$ ve $\varphi_1(10) = 0{,}2085$ şeklinde elde edilir.

$\varphi_2(u)$: Y_n hasarlarının dağılımı $Y_n \sim N(2{,}1)$ şeklinde olduğunda, $\{G_n\}$ sürecinin $G_n = 0{,}2G_{n-1} + X_n$ modeline uyduğu ve $c=3$ olduğu durumda düzeltme katsayısı yardımıyla elde edilen iflas olasılığı için üst sınır olsun. Buradan $R = 0{,}8$ ve $\varphi_2(10) = 0{,}00034$ şeklinde elde edilir.

$\varphi_3(u)$: Y_n hasarlarının dağılımı $Y_n \sim \exp(1/2)$ şeklinde olduğunda, $\{G_n\}$ sürecinin $G_n = X_n - 0{,}8X_{n-1}$ modeline uyduğu ve $c = 0{,}5$ olduğu durumda düzeltme katsayısı yardımıyla elde edilen iflas olasılığı için üst sınır olsun. Buradan $R = 0{,}1857$ ve $\varphi_3(10) = 0{,}156$ şeklinde elde edilir.

$\varphi_4(u)$: Y_n hasarlarının dağılımı $Y_n \sim N(2,1)$ şeklinde olduğunda, $\{G_n\}$ sürecinin $G_n = X_n - 0{,}8X_{n-1}$ modeline uyduğu ve $c = 0{,}5$ olduğu durumda düzeltme katsayısı yardımıyla elde edilen iflas olasılığı için üst sınır olsun. Buradan $R = 1$ olur ve $\varphi_4(10) = 0{,}000045$ şeklinde elde edilir.

$\varphi_5(u)$: Y_n hasarlarının dağılımı $Y_n \sim \exp(1/2)$ şeklinde olduğunda, $\{G_n\}$ sürecinin $G_n = -0{,}5G_{n-1} - 0{,}2X_{n-1} + X_n$ modeline uyduğu ve $c = 1{,}5$ olduğu durumda düzeltme katsayısı yardımıyla elde edilen iflas olasılığı için üst sınır olsun. Buradan $R = 0{,}2580$ ve $\varphi_5(10) = 0{,}076$ şeklinde elde edilir.

$\varphi_6(u)$: Y_n hasarlarının dağılımı $Y_n \sim N(2,1)$ şeklinde olduğunda, $\{G_n\}$ sürecinin $G_n = -0{,}5G_{n-1} - 0{,}2X_{n-1} + X_n$ modeline uyduğu ve $c = 1{,}5$ olduğu durumda düzeltme katsayısı yardımıyla elde edilen iflas olasılığı için üst sınır olsun. Buradan $R = 1{,}625$ ve $\varphi_6(10) = 0{,}000000088$ şeklinde elde edilir.

İflas olasılıkları için elde edilen $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, $\varphi_3(u)$, $\varphi_4(u)$, $\varphi_5(u)$ ve $\varphi_6(u)$ üst sınırları incelendiğinde sigorta şirketinin n. yılda elde ettiği kazancını gösteren $\{G_n\}$ sürecinin uyduğu model ($AR(1), MA(1)\ ve\ ARMA(1,1)$) ve bir dönemde toplanan primlerin miktarı sabit olduğunda iflas olasılıkları, aynı ortalamalı Y_n hasarlarının dağılımının üstel ya da normal dağılımlı olmasına bağlı olarak değişmektedir.

Y_n hasarlarının dağılımı normal dağılım olduğu durumda iflas olasılıkları, Y_n hasarlarının dağılımı üstel dağılım olduğu durumdaki iflas olasılıklarına oranla çok daha düşüktür. Buradan da anlaşılacağı gibi hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları üzerinde önemli bir etkisi vardır.

4.3. İki Değişkenli Otoregresif Modele ilişkin Sayısal Örnekler

Bu bölümde öncelikle primlerin pozitif sabit c miktarıyla dönem başında toplandığı ve iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin birinci derece iki değişkenli otoregresif modele uyduğu durumda Eş. (2.35) ile verilen modelde hata terimlerinin dağılımına göre R düzeltme katsayısının nasıl hesaplanancağı incelenmiştir. Daha sonra bu modele ilişkin sayısal örnekler verilmiştir.

Zhang ve diğerleri (2007), primlerin sabit c miktarıyla toplandığı iki bağımlı sigorta koluna ait poliçelerin bulunduğu bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda modelden kaynaklanan bağımlılığın etkisini ve hata terimlerinin arasındaki ilişkinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Ancak bütün katsayıları birlikte değiştirmeleri nedeniyle iflas olasılıklarındaki artışın hangi katsayıların değişiminden kaynaklandığı tam olarak görülmemektedir. Ayrıca Zhang ve diğerleri (2007) çalışmalarında X ve Y hata terimleri arasındaki ilişkinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisinin modelden kaynaklanan bağımlılığın etkisinden daha önemli olduğunu göstermişlerdir. Bu çalışmada ise Zhang ve diğerleri (2007)'nden farklı olarak her bir katsayıdaki artışın iflas olasılıkları üzerindeki etkisi araştırılmış ve bağımlılığın etkisi daha açık şekilde gösterilmiştir. Ayrıca hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi de araştırılmıştır.

İki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföydeki Z_1 ve Z_2 hasar süreçlerinin $Z_{10} = z_1$ ve $Z_{20} = z_2$ başlangıç değerleri ile iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu varsayılsın. Diğer bir deyişle Z_1 ve Z_2 hasar süreçleri, (2.35) eşitliklerini ve bu eşitlikle ilgili gerekli koşulları sağlamaktadır. Bu durumda, Eş. (2.35) ile verilen model için düzeltme katsayısı R, $R > 0$ olmak üzere

$$E[\exp(-R(cv^{-1} - \xi_1))] = 1 \tag{4.10}$$

koşulunu sağlayan en küçük sabit sayıdır: (4.10) eşitliği,

$$\begin{aligned} E\left[\exp\left(R\xi_1 - Rcv^{-1}\right)\right] &= \exp\left(-Rcv^{-1}\right)E\left[\exp\left(R\xi_1\right)\right] \\ &= \exp\left(-Rcv^{-1}\right)M_{\xi}(R) = 1 \end{aligned} \tag{4.11}$$

şeklinde de yazılabilir. Eş. (4.11)'den de anlaşılacağı gibi R düzeltme katsayısı,

$$\begin{aligned} \xi_k &= [1+\alpha(v^{-1})]X_k + [1+\beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})} \end{aligned}$$

olmak üzere bağımsız ve aynı dağılımlı rastlantı değişkenleri dizisi olan $\{\xi\}$' nin dağılımına bağlı olarak elde edilen moment çıkaran fonksiyon yardımıyla, $M_{\xi}(R) = \exp\left(Rcv^{-1}\right)$ eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim \exp(\alpha)$ ve $Y \sim \exp(\beta)$ şeklinde ise

$E(X) = \frac{1}{\alpha}$ ve $E(Y) = \frac{1}{\beta}$

şeklinde olur. Bunun sonucunda

$$\begin{aligned}\xi_k &= [1+\alpha(v^{-1})]X_k + [1+\beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}E(\xi_k) &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]\frac{1}{\alpha} + [v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]\frac{1}{\beta}}{h(v^{-1})}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $E(\xi_k) = \frac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp\left(Rcv^{-1}\right) = \frac{\lambda}{\lambda - R} \tag{4.12}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim Gamma(n,\lambda)$ ve $Y \sim Gamma(n,\lambda)$ şeklinde ve

$$\begin{aligned}\xi_k &= [1+\alpha(v^{-1})]X_k + [1+\beta(v^{-1})]Y_k \\ &= \frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})}\end{aligned}$$

olmak üzere

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})}$$
$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]\mu_1 + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]\mu_2}{h(v^{-1})}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $E(\xi_k) = \alpha\beta$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rcv^{-1}) = (1 - \beta R)^{-\alpha} \tag{4.13}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

X ve Y'nin dağılımları sırasıyla $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ve $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ şeklinde ve

$$\xi_k = [1 + \alpha(v^{-1})]X_k + [1 + \beta(v^{-1})]Y_k$$
$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]X_k + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]Y_k}{h(v^{-1})}$$

şeklinde olmak üzere

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})}$$
$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]\mu_1 + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]\mu_2}{h(v^{-1})}$$

ve

$$Var(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]^2 Var(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]^2 Var(Y_k)}{[h(v^{-1})]^2}$$
$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]^2 \sigma_1^2 + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]^2 \sigma_2^2}{[h(v^{-1})]^2}$$

şeklinde elde edilir. $E(\xi_k) = \mu_*$ ve $Var(\xi_k) = \sigma_*^2$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$Rcv^{-1} = R\mu_* + R^2\sigma_*^2 / 2$$
$$\Rightarrow R = \frac{2[cv^{-1} - \mu_*]}{\sigma_*^2} \tag{4.14}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir.

Örnek 4.6: Z_1 ve Z_2 hasar süreçlerinin iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu, ayrıca bağımsız ve aynı dağılımlı X_k ve Y_k rastlantı değişkenlerinin ortalaması 1,01 olan bir üstel dağılıma uyduğu varsayılsın. Bu modelde paranın zaman değerinin olmadığı ($r=0$) varsayılsın ve $c=7$ olsun.

$\varphi_1(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.35) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}3$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}1$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}48$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 3{,}367$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{0{,}297}{0{,}297 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}24255$ olur.

$\varphi_2(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.35) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}4$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}1$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}35$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 4{,}04$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}2475}{0{,}2475 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}17458$ olur.

$\varphi_3(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.35) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}4$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}2$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}32$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 5{,}05$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}198}{0{,}198 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}09899$ olur.

$\varphi_4(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.35) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}5$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}2$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 6{,}73$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}1485}{0{,}1485 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}01120$ olur.

$\varphi_5(u, z_1, z_2)$: Eş. (2.35) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}5$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}3$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}16$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 10{,}1$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}099}{0{,}099 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R \cong 0{,}00001$ olur.

Çizelge 4.4. Primlerin sabit miktarlarla toplandığı iki bağımlı hasar sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde bağımlılığın ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$	$\varphi_4(u,0,0)$	$\varphi_5(u,0,0)$
2	0,61564	0,70528	0,81889	0,97785	1,00000
3	0,48304	0,52374	0,74104	0,96696	1,00000
9	0,11271	0,20779	0,40694	0,90411	1,00000
10	0,08843	0,17451	0,36825	0,89404	1,00000
20	0,00782	0,03045	0,13561	0,79932	1,00000
40	0,00006	0,00093	0,01839	0,63890	1,00000
100	0,00000	0,00000	0,00005	0,32628	1,00000

Çizelge 4.4 incelendiğinde başlangıç sermayeleri arttıkça iflas olasılıkları için üst sınırların azaldığı açıkça görülür. Ayrıca primlerin sabit c miktarıyla toplandığı iki bağımlı sigorta koluna ait poliçelerin bulunduğu bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda modeldeki katsayılardan herhangi biri arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların arttığı görülür. Buradan da anlaşılacağı gibi bağımlılık arttıkça iflas olasılıkları artmaktadır.

Örnek 4.7: Z_1 ve Z_2 hasar süreçlerinin iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu ve (2.35) modelinde $a_1 = b_2 = 0,4$ ve $a_2 = b_1 = 0,2$ olduğu varsayılsın. Ayrıca X_n ve Y_n rastlantı değişkenleri bağımsız ve ortalaması 1,01 olan bir üstel dağılıma uysun ve $u = 10$ olsun.

$\varphi_1(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.7'nin varsayımları altında $r = 0$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0,32$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 5,05$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.5'teki gibidir:

Çizelge 4.5. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r = 0$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,09899
10	0,15667
20	0,19391

$\varphi_2(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.7'nin varsayımları altında $r = 0,0025$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1,0025) = 0,323$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k)=\frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]E(X_k)+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})}=5{,}0313$$

olur. Burada $E(\xi_k)=\dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc)=\frac{\lambda}{\lambda-R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.6'daki gibidir:

Çizelge 4.6. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r=0{,}0025$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,10019
10	0,15772
20	0,19471

$\varphi_3(u,z_1,z_2)$: Örnek 4.7'nin varsayımları altında $r=0{,}005$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1})=(v^{-1}-a_1)(v^{-1}-b_2)-a_2b_1 \Rightarrow h(1{,}005)=0{,}326$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k)=\frac{[v^{-2}+(b_1-b_2)v^{-1}]E(X_k)+[v^{-2}-(a_1-a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})}=5{,}01298$$

olur. Burada $E(\xi_k)=\dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc)=\frac{\lambda}{\lambda-R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.7'deki gibidir:

Çizelge 4.7. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r = 0{,}005$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,10136
10	0,15867
20	0,19548

$\varphi_4(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.7'nin varsayımları altında $r = 0{,}03$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1{,}03) = 0{,}3569$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 4{,}8386$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(Rc) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. %0,0001 hata ile çeşitli c değerleri için R düzeltme katsayısının değerleri Çizelge 4.8'deki gibidir:

Çizelge 4.8. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde $r = 0{,}03$ olduğunda prim miktarlarına göre elde edilen düzeltme katsayıları

c	R
7	0,11290
10	0,16825
20	0,20311

Çeşitli c değerleri için $r = 0$, $r = 0{,}0025$, $r = 0{,}005$ ve $r = 0{,}03$ olduğunda hesaplanan düzeltme katsayıları yardımıyla yukarıda belirtilen $\varphi_1(u, z_1, z_2)$,

$\varphi_2(u,z_1,z_2)$, $\varphi_3(u,z_1,z_2)$ ve $\varphi_4(u,z_1,z_2)$ iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar Çizelge 4.9'daki gibidir:

Çizelge 4.9. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde faiz oranlarının ve prim miktarlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

c	$\varphi_1(10,0,0)$	$\varphi_2(10,0,0)$	$\varphi_3(10,0,0)$	$\varphi_4(10,0,0)$
7	0,372	0,367	0,363	0,323
10	0,209	0,207	0,205	0,186
20	0,134	0,143	0,142	0,131

Çizelge 4.9 incelendiğinde prim miktarlarını gösteren c miktarları arttığında iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların azaldığı görülmektedir. Ayrıca r faiz oranları arttığında da iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar azalmaktadır. Yani prim miktarlarını gösteren c ve faiz oranlarını gösteren r oranları arttığında iflas olasılıkları azalmaktadır. Benzer sonuçlar Zhang ve diğerleri (2007) tarafından da elde edilmiştir. Zhang ve diğerleri (2007); iflas olasılıklarının, başlangıç sermayesindeki değişime göre sabit prim miktarındaki değişime daha duyarlı olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada ise iflas olasılıklarının, faiz oranındaki değişime göre sabit prim miktarlarındaki değişime daha duyarlı olduğu; yani prim miktarlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisinin, faiz oranlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisinden daha önemli olduğu gösterilmiştir.

Örnek 4.8: Z_1 ve Z_2 hasar süreçlerinin (2.35) eşitliği ile verilen iki değişkenli $AR(1)$ zaman serisi modeline uyduğu ve bu modelde $a_1 = b_2 = 0{,}5$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}2$ olduğu varsayılsın. Ayrıca bu modelde paranın zaman değerinin olmadığı ($r = 0$) varsayılsın ve $c = 7$ olsun.

$\varphi_1(u,z_1,z_2)$: Örnek 4.8'in varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri, 1,01 ortalama ve 0,5 varyans ile normal dağılıma sahip olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})}$$

$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]\mu_1 + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]\mu_2}{h(v^{-1})}$$

ve

$$Var(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]^2 Var(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]^2 Var(Y_k)}{[h(v^{-1})]^2}$$

$$= \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]^2 \sigma_1^2 + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]^2 \sigma_2^2}{[h(v^{-1})]^2}$$

eşitlikleri yardımıyla $E(\xi_k) = \mu_* = 6{,}73$ ve $Var(\xi_k) = \sigma_*^2 = 11{,}11$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$Rcv^{-1} = R\mu_* + R^2\sigma_*^2 / 2$$

$$\Rightarrow R = \frac{2\left[cv^{-1} - \mu_*\right]}{\sigma_*^2}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}04860$ olur.

$\varphi_2(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.8'in varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri, 1,01 ortalama ile üstel dağılıma sahip olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 6{,}73$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \dfrac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}01120$ olur.

$\varphi_3(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.8'in varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri $n = 2$ ve $\lambda = 0{,}505$ parametreleri ile gamma dağılımına sahip olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}21$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 6{,}73$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \alpha\beta$ ve $\alpha = 2$ olmak üzere $\beta = 3{,}365$ olur ve buradan R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = (1 - \beta R)^{-\alpha}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R \cong 0{,}00000$ olur.

$\varphi_4(u, z_1, z_2)$: Örnek 4.8'in varsayımları altında bağımsız ve aynı dağılımlı X_n ve Y_n hata terimleri 1,01 ortalamalı üstel dağılıma sahip olduğunda Eş. (2.35) ile verilen modelde $a_1 = b_2 = 0{,}4$ ve $a_2 = b_1 = 0{,}1$ olduğunda iflas olasılığı için üst sınır olsun. Bu durumda,

$$h(v^{-1}) = (v^{-1} - a_1)(v^{-1} - b_2) - a_2 b_1 \Rightarrow h(1) = 0{,}35$$

olmak üzere,

$$E(\xi_k) = \frac{[v^{-2} + (b_1 - b_2)v^{-1}]E(X_k) + [v^{-2} - (a_1 - a_2)v^{-1}]E(Y_k)}{h(v^{-1})} = 4{,}04$$

olur. Burada $E(\xi_k) = \frac{1}{\lambda}$ olmak üzere R düzeltme katsayısı,

$$\exp(7R) = \frac{\lambda}{\lambda - R} = \frac{0{,}2475}{0{,}2475 - R}$$

eşitliğinin çözülmesiyle elde edilir. Buradan $R = 0{,}17458$ olur.

Çizelge 4.10. İki bağımlı sınıflı iki değişkenli birinci derece otoregresif modelde hata terimlerinin dağılımlarının ve başlangıç sermayelerinin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi

u	$\varphi_1(u,0,0)$	$\varphi_2(u,0,0)$	$\varphi_3(u,0,0)$	$\varphi_4(u,0,0)$
2	0,907	0,978	1	0,81889
3	0,864	0,967	1	0,74104
9	0,646	0,904	1	0,40694
10	0,615	0,894	1	0,36825
20	0,378	0,799	1	0,13561
40	0,143	0,639	1	0,01839
100	0,008	0,326	1	0,00005

Çizelge 4.10 incelendiğinde primlerin sabit c miktarıyla toplandığı iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğunda X_n ve Y_n hata terimleri normal dağılıma sahip olduğu durumda elde edilen iflas olasılıkları için üst sınırların, hata terimlerinin aynı ortalama ile üstel ya da gamma dağılımına sahip olduğu durumlarda elde edilen iflas olasılıkları için üst sınırlardan daha küçük olduğu görülür. Ayrıca hata terimleri üstel dağılıma sahip olduğunda elde edilen iflas olasılıkları hata terimleri gamma dağılıma sahip olduğunda elde edilen iflas olasılıklarından daha küçüktür. Buradan anlaşılacağı gibi hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları üzerinde büyük bir etkisi vardır. Ayrıca $\varphi_1(u,0,0)$ ile $\varphi_4(u,0,0)$ iflas olasılıları için üst sınırlar karşılaştırıldığında bağımlılığın da iflas olasılıkları üzerinde önemli bir etkisinin olduğu görülür.

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Aktüeryal risk teorisinde bireysel risk modelleri ve kollektif risk modeleri gibi pek çok model bağımsızlık varsayımı altında kurulmaktadır. Ancak bağımsızlık varsayımının klasik modellerde bu kadar önemli rol oynamasına rağmen, sigorta ve reasurans ürünlerinin artan karmaşıklığı ve pek çok durumda bağımsızlık varsayımının sağlanmaması nedeniyle aktüerya literatüründe bağımlı risklerin modellenmesine ilgi her geçen gün artmaktadır.

Literatürde iki tür bağımlılık vardır. İlk tür bağımlılık, portföyde bulunan poliçeler arasındaki ilişkiden ya da farklı sigorta kollarının arasındaki ilişkiden kaynaklanan bağımlılık şeklindedir. İkinci tür bağımlılık ise hasar ve/veya prim süreçlerinin geçmiş dönemde gerçekleşen hasar miktarı ve/veya prim miktarı ile arasındaki ilişkilerinden kaynaklanan bağımlılıktır.

Mevcut hasar ile eski hasarlar arasındaki bağımlılık genel olarak geçmiş dönemde portföyde bulunan bazı poliçelerin gelecek dönemde de portföyde kalacak olmasından kaynaklanır. Bu türde ilişkilerin modellenmesinde ise zaman serileri yaklaşımı kullanılır ve iflas olasılıklarının gösteriminde martingale kuramından yararlanılır. Literatürde zaman serilerinden yararlanılan bu tür bağımlılıkların modellenmesi üç şekilde yapılmaktadır.

İlk modelleme sigorta şirketinin n. yılda elde ettiği kazancı gösteren $\{G_n\}$ süreci, primler eksi hasarlar, otoregresif hareketli ortalama modeli ile ya da bu modelde çeşitli dönüşümler yapılarak elde edilen otoregresif model ya da hareketli ortalama modelleri ile modellenir. Bu türde çalışmayı ilk olarak Gerber (1982) yapmıştır. Daha sonra aynı modeller üzerinde Promislow, (1991), Christ ve Steinebach, (1995) ve Zhang (2005)'de çalışmalar yapmıştır.

İkinci modelleme, Bowers ve diğerleri tarafından 1986 yılında önerilen hasar sürecinin otoregresif bir modele uyduğu ve primlerin periyodik olarak sabit bir şekilde toplandığı varsayımı altında, kesikli sigorta risk modellerinin modellenmesi şeklinde başlamıştır. Daha sonra Yang ve Zhang (2003), hasar sürecinin otoregresif bir modele uyduğu varsayımıyla birlikte prim sürecinin de otoregresif bir modele uyduğunu varsaymıştır. Yang ve Zhang (2003), hasarların ve primlerin sabit faiz oranı ile otoregresif modele uyduğu varsayımıyla, kesikli sigorta risk modeli için hem üstel hem de üstel olmayan üst sınırları elde etmek için martingale eşitsizliklerini kullanmışlardır.

Üçüncü ve son modelleme ise Zhang ve diğerleri tarafından 2007 yılında önerilmiştir. Zhang ve diğerleri, p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde her sınıftaki prim ve hasar süreçlerinin bir vektör süreci ile gösterilip bu vektör sürecinin birinci derece çok değişkenli otoregresif zaman serisi modeline uyduğunu varsaymıştır. Bu varsayım ve faiz oranının sabit olduğu varsayımı ile geliştirilmiş artık süreci tanımlanarak birinci derece çoklu otoregresif model ve martingale eşitsizlikleri yardımıyla iflas olasılıkları için üstel sınırlar elde etmişlerdir. Ayrıca Zhang ve diğerleri (2007) tarafından p bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföy için önerilen çok değişkenli modelin özel bir durumu olarak iki bağımlı sınıftan oluşan bir portföyde primlerin sabit miktarlarla toplandığı ve sabit faiz oranı ile iki hasar süreci için iki değişkenli birinci derece otoregresif model önermişler ve bu model için gelişmiş artık süreci oluşturarak risk modeli için üstel sınırlar elde etmişlerdir.

Bu çalışmada, mevcut hasar ile eski hasarlar arasındaki ilişkiden kaynaklanan bağımlı risklerin modellenmesinde kullanılan yukarıda bahsedilen üç model incelemiştir. Bu incelemeler yapılarak aşağıda belirtilen sonuçlara ulaşılmıştır:

Bir sigorta şirketinin n. yılda topladığı primlerden aynı yılda ödediği hasarların çıkarılmasıyla elde edilen kazancını gösteren $\{G_n\}$ süreci için kullanılan modeller incelenirken, Christ ve Steinebach (1995)'in benzetim çalışmaları ile elde ettikleri verilerden yararlanılmıştır. Bu verilerden yararlanarak tek değişkenli $AR(1)$, $AR(2)$, $MA(1)$, $MA(2)$ ve $ARMA(1,1)$ modelleri geçerli olduğu durumlarda, elde edilen iflas olasılıkları için üst sınırlar incelendiğinde, hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu durumdaki iflas olasılıklarının, hata terimleri üstel dağılıma sahip olduğu durumdaki iflas olasılıklarından çok daha küçük olduğu görülmüştür. Böylece bağımlı risklerin zaman serileri ile modellendiği durumlarda, hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları üzerinde önemli bir etkisinin olduğu görülmüştür.

Yang ve Zhang (2003)'in çalışmasında kullandıkları modeller ele alınmıştır. Bu çalışmada onlardan farklı olarak prim ve hasar süreçlerinin hata terimlerinin üstel ya da normal dağılıma sahip oldukları varsayılarak, hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi ve hata terimlerinin ortalamasındaki değişimlerin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Ayrıca başlangıç sermayelerindeki ve faiz oranlarındaki değişimin iflas olasılıkları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bununla birlikte, hasar süreçlerine ilişkin modellerde mevcut dönemdeki hasarlarla geçmiş dönemde gerçekleşmiş hasarlar arasındaki ilişkinin derecesini; yani bağımlılığı gösteren katsayıların iflas olasılıkları üzerindeki etkisi de araştırılmıştır. Son olarak, primlerin sabit miktarlarla toplandığı hasar süreçlerinin ise birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda, başlangıç sermayelerinin ve faiz oranlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi ve hasar süreçlerinin uyduğu modeldeki hata terimlerinin dağılımının iflas olasılıkları üzerindeki etkisi de araştırılmıştır. Bu sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Prim süreçleri ve hasar süreçleri ayrı ayrı birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda (yani hasar süreçleri (2.19) eşitliğindeki modele, prim süreçleri ise (2.20) eşitliğindeki modele uyduğu durumda) prim süreçlerine ilişkin hata terimlerinin ortalaması sabit iken, hasar süreçlerine ilişkin hata terimlerinin ortalaması arttığında da iflas olasılıkları için üst sınırların arttığı görülmüştür. Ayrıca hasar süreçlerine ilişkin hata terimlerinin ortalaması sabit iken, prim süreçlerine ilişkin hata terimlerinin ortalaması arttığında ise iflas olasılıkları için üst sınırların azaldığı görülmüştür. Bilindiği gibi hasar süreçlerine ilişkin modellerdeki hata terimlerinin ortalamasındaki artış, hasar süreçlerinin ortalamasını arttırmaktadır. Ayrıca prim süreçlerine ilişkin modellerdeki hata terimlerinin ortalamasındaki artış ise prim süreçlerinin ortalamasını arttırmaktadır. Böylece prim süreçlerinin ortalamasındaki artışın, iflas olasılıklarını azalttığı hasar süreçlerindeki artışın ise iflas olasılıklarını arttırdığı görülmüştür. Ayrıca aynı modellerde başlangıç sermayesi arttığında, iflas olasılıkları azalmakta ve faiz oranını gösteren r arttıkça da iflas olasılıkları azalmaktadır. Bununla birlikte prim süreçlerinin uyduğu (2.20) eşitliğinde b katsayısı sabit tutulduğunda, mevcut dönemdeki hasarlar ile geçmiş dönemlerdeki hasarlar arasındaki ilişkinin derecesini; yani bağımlılığın derecesini gösteren a katsayısı büyüdüğünde (bağımlılık arttığında) iflas olasılıkları da artmaktadır.

- Primlerin sabit c miktarı ile toplandığı hasar süreçlerinin ise (2.19) eşitliği ile verilen modele uyduğu durumda, başlangıç sermayeleri ya da faiz oranları arttığında iflas olasılığı için elde edilen üst sınırların azaldığı görülmüştür. Ayrıca (2.19) eşitliği ile verilen modeldeki hata terimlerinin normal dağılıma sahip olduğu durumda elde edilen iflas olasılıklarının üst sınırlarının, aynı modeldeki hata terimlerinin aynı ortalama ile üstel dağılıma sahip olduğu durumda elde edilen iflas olasılıklarının üst sınırlarından çok daha küçük olduğu görülmüştür.

Zhang ve diğerleri (2007), çalışmalarında iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde primlerin sabit c miktarıyla toplandığını ve (Z_1, Z_2) gibi iki hasar sürecini modellemek için kullandıkları iki değişkenli birinci derece otoregresif modeli kullanılarak hata terimlerinin dağılımlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkisini araştırmışlardır. Ayrıca başlangıç sermayelerinin, prim miktarlarının ve faiz oranlarının iflas olasılıkları üzerindeki etkilerini de araştırmışlardır. Ancak Zhang ve diğerleri (2007), çalışmalarında bağımlılığın etkisini araştırırken modelden kaynaklanan ilişkinin artışının hangi katsayıdaki değişimden kaynaklandığını açık bir şekilde göstermemişlerdir. Bu çalışmada, bağımlılığın hangi katsayılardan kaynaklandığı ve bu katsayıların iflas olasılıkları üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Primlerin sabit miktarla toplandığı iki bağımlı sigorta kolundan oluşan bir portföyde hasar süreçlerinin iki değişkenli birinci derece otoregresif modele uyduğu durumda, modeldeki katsayılardan herhangi biri büyüdüğünde iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırlar artmaktadır. Ayrıca bütün koşullar aynı iken bu modellerdeki hata terimlerinin dağılımları normal dağılım, üstel dağılım ya da gamma dağılımına uyduğu durumda iflas olasılıkları için elde edilen üst sınırların, hata terimlerinin dağılımına bağlı olarak değiştiği görülmüştür. Hata terimleri normal dağılıma sahip olduğunda iflas olasılıklarının en küçük gamma dağılımına sahip olduğunda ise en büyük olduğu görülmüştür.

Son olarak, çalışmada elde edilen sonuçları özetlemek gerekirse başlangıç sermayeleri ya da faiz oranları arttıkça iflas olasılıkları da azalmaktadır. Ayrıca primlerin sabit miktarlarla toplandığı modellerde primlerin toplandığı miktarlar arttığında iflas olasılıkları azalmaktadır. Bununla birlikte, prim süreçlerinin belli bir modele uyduğu durumda ise primlerin uyduğu modellerdeki hata terimlerinin ortalaması arttığında (dolaylı olarak prim süreçlerinin ortalaması arttığından) iflas olasılıkları azalmaktadır. Ancak iflas olasılıkları, primlerin sabit miktarlarla toplandığı modellerde prim miktarlarındaki değişime, primlerin stokastik süreç olduğu modellerde ise hata terimlerinin ortalamasındaki değişim sonucu prim sürecinin ortalamasındaki değişime, başlangıç sermayeleri ve faiz oranlarındaki değişime göre daha duyarlıdır. Bununla birlikte hasar süreçlerinde mevcut dönemde gerçekleşmesi beklenen hasarlar ile geçmiş dönemde gerçekleşmiş hasarlar arasındaki bağımlılık arttıkça iflas olasılıkları da artmaktadır. Ayrıca hasar ve/veya prim süreçlerinin uyduğu modellerdeki hata terimlerinin dağılımının, iflas olasılıkları üzerinde önemli bir etkisi vardır.

Çalışmada elde edilen sonuçlar doğrultusunda, önceki dönemde portföyde bulunan bazı poliçelerin mevcut dönemde de portföyde kalması sonucu, mevcut dönemde oluşan hasarlar ile geçmiş dönemde oluşmuş hasarlar arasında bağımlılık oluşması nedeniyle bağımlı risklerin bulunduğu portföylerde bağımlı risklerin modellenmesinde zaman serisi modellerinin kullanıldığı durumlarda ilişkili sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasında modelden kaynaklanan bağımlılığın etkisi göz önünde bulundurulmalıdır. Ayrıca ilişkili hasar sınıflarının hata terimleri arasındaki ilişkilerin, hata terimlerinin dağılımlarının ve hata terimlerinin ortalamasının iflas olasılıkları üzerindeki etkilerinin de göz önünde bulundurulması bağımlı risklerden oluşan portföylerdeki riski minimize etmek açısından önemlidir. Bu nedenle bağımlı risklerin bulunduğu portföylerde risk analizi çalışmalarında bağımlılığın iflas olasılıkları üzerindeki etkisini ve hata terimlerinin dağılımının etkisini göz önünde bulundurmak gerekir.

KAYNAKLAR

Ambagaspitiya, R.S., 1998, On the distribution of a sum of correlated aggregate claims, Insurance: Matematics and Economics 23, 15-19.

Ambagaspitiya, R.S., 1999, On the distributions of two classes of correlated aggregate claims, Insurance: Matematics and Economics 24, 301-308.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., Nesbitt, C.J., 1997, Aktuarial Mathematics, Society of Actuaries, Schaumburg, IL., 753 p.

Christ, R. and Steinebach, J., 1995, Estimating the adjustment coefficient in an ARMA(p,q) risk model, Insurance: Mathematics and Economics 17, 149-161.

Cossette, H., Denuit, M., Marceau, E., 2000, Impact of dependence among multiple claims in a single loss, Insurance: Matematics and Economics 26, 213-222.

Cossette, H., Marceau, E., 2000, The discrete-time risk model with correlated classes of business, Insurance: Mathematics and Economics 26, 133-149.

Denuit, M., Genest, C., Marceau, E, 1999, Stochastic bounds on sums of dependent risks, Insurance: Matematics and Economics 25, 85-104.

Dhaene, J., Goovaerts, M.J., 1997, On the dependency of risks in the individual life model, Insurace: Mathematics and Economics 19, 243-253.

Gerber, H.U., 1982, Ruin theory in the linear model, Insurance: Mathematics and Economics 1, 177-184.

Müller, A., Pflug, G., 2001, Asymptotic ruin probabilities for risk processes with dependent increments, Insurance: Matematics and Economics 28, 381-392.

Promislow, S.D., 1991, The probability of ruin in a process with dependent increments, Insurance: Matematics and Economics 10, 99-107.

Ribas, C., Marin-Solano, J., Alegre, A, 2003, On the computation of the aggregate claims distribution in the individual life model with bivariate dependencies, Insurance: Matematics and Economics 32, 201-215.

Wang, S., 1998, Aggregation of correlated risk portfolios: Models and algorithms, In: Proceedings of the Casualty Actuarial Society, pp. 848-939.

Wei, W.W.S., 1990, Time Series Analysis, Addison-Wesley Publishing Company, 478 p.

Wu, X., Yuen, K.C., 2003, A discrete-time risk model with interaction between classes of business, Insurance: Matematics and Economics 33, 117-133.

Yang, H., Zhang, L., 2003, Martingale method for ruin probability in an autoregressive model with constant interest rate, Probability in the engineering and informational sciences 17, 183-198.

Zhang, L., 2005, Ruin probability in linear time series model, Tsınghua Scıence And Technology 2, 259-264.

Zhang, Z., Yuen, K.C., Li, W.K., 2007, A time-series risk model with constant interest for dependent classes of business, Insurance: Matematics and Economics 41, 32-40.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Selim DAĞLIOĞLU

Doğum Yeri: Kadıköy/İSTANBUL

Doğum Yılı: 1983

Medeni Hali: Evli

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise: 1997-2001 General Ali Rıza Ersin Süper Lisesi, İstanbul

Lisans: 2003-2006 Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü, İzmir

Yabancı Dil: İngilizce

İş Tecrübesi: Temmuz, 2007-… T.C. Kültür ve Turizm Bakanlığı, Strateji Geliştirme Başkanlığı, Kültür ve Turizm Uzman Yardımcısı