YAMABE TİPLİ DENKLEM İÇİN 3. SINIF SINIR PROBLEMİNİN İNCELENMESİ

INVESTIGATION OF THE 3. TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A YAMABE TYPE EQUATION

EYLEM ÖZTÜRK

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2008

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI** 'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :..
Prof. Dr. Ağacık ZAFER

Üye (Danışman) :..
Prof. Dr. Kamal SOLTANOV

Üye :...
Doç. Dr. Emil NOVRUZOV

ONAY

Bu tez .../.../2008 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

..../..../2008

Prof. Dr. Erdem YAZGAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

YAMABE TİPLİ DENKLEM İÇİN 3. SINIF SINIR PROBLEMİNİN İNCELENMESİ

Eylem ÖZTÜRK

ÖZ

Bu çalışmada Yamabe tipli denklem için konulmuş 3. sınıf sınır değer probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini inceledik. Birinci bölümde, incelediğimiz problem tanımlanarak, son zamanlarda bu tipteki problemler üzerine yapılmış çalışmalar kısaca açıklanmıştır. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak bazı genel bilgiler ve bu çalışma için gerekli olacak özel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, gözönüne alınan problem üç ayrı alt bölümde incelenmiştir. İlk iki alt bölüm problemin doğrusal olmayan kısmında yer alan ρ üssünün kritik altı, kritik ve kritik üstü durumlarından oluşmaktadır. Her iki alt bölümde problemin çözümünün varlığı için yeterli koşullar elde edilmiş, bu koşullar altında çözümün varlığı ispatlanmıştır. Üçüncü alt bölümde ise özel bir durumda problemin çözümünün tekliği için yeterli koşullar elde edilmiş ve bu koşullar altında çözümün varsa tek olduğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Yamabe tipli denklem, 3. sınıf sınır problemi, varlık ve teklik teoremleri, kritik, kritik altı ve kritik üstü durumlar

Danışman : Prof. Dr. Kamal SOLTANOV, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

INVESTIGATION OF THE 3. TYPE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A YAMABE TYPE EQUATION

Eylem ÖZTÜRK

ABSTRACT

The existence and uniqueness of the solution of a third type boundary value problem for a Yamabe type equation is investigated in this work. In the first chapter, our problem is defined, and some recent works on this type of equations are explained shortly. In the second chapter, some preliminary information used in this work is given. In the third chapter, the problem is investigated in three sections. The first two sections are related to critical, sub critical, super critical cases of exponent ρ which is taken place in nonlinear part of the problem. In both of two these sections, sufficient conditions for existence of the solution of the problem are obtained and under these conditions the existence of the solution is proved. In the third section, sufficient conditions for the uniqueness of the solution of the problem in a special case are obtained.

Keywords: Yamabe type equations, 3. type boundary value problem, existence and uniqueness theorems, critical, sub critical and super critical cases

Advisor: Prof. Dr. Kamal SOLTANOV, Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Bu tezin yazılması süresince bana zaman ayıran ve sabırla yol gösterip destek olan kendisinden çok şey öğrendiğim değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Kamal Soltanov'a çok teşekkür ederim.

Değerli önerileri için Prof. Dr. Ağacık Zafer'e ve Doç. Dr. Emil Novruzov'a teşekkür ederim.

Bu süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan ve desteklerini hiç esirgemeyen çalışma arkadaşlarım Arş. Gör. Kerime Korkmaz ve Arş. Gör. Gamze Düzgün'e teşekkür ederim.

Ayrıca yardımlarından dolayı Arş. Gör. Özlem Tuzcuoğlu'na teşekkür ederim.

Diğer taraftan tüm bu süre zarfında yol gösterip destek olan arkadaşım Öğr. Gör. Dr. Seçil Tokgöz'e anlayışı için teşekkür ederim.

Son olarak da her an sıkıntı ve sevinçlerimi paylaşan aileme destekleri için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

1 GİRİŞ

Çalışmamızda aşağıdaki ikinci mertebeden yarı doğrusal kısmi diferansiyel denklem için konulmuş 3.sınıf sınır problemi gözönüne alınacaktır.

$$-\Delta u + u + a(x)\,|u|^{\rho}\,u - b(x)\,|u|^{\nu}\,u = h(x),\ \ x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x')u\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x'),\ \ x' \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge,

$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ $x = (x_1,\ x_2........, x_n)$ n boyutlu Laplace Operatörü ,

$\rho, \nu > -1$ olarak verilen sayılar,

$a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$, $b : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$ negatif olmayan fonksiyonlardır,

$k : \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^1$ verilmiş fonksiyondur,

h ve φ genel olarak genelleştirilmiş fonksiyonlardır,

u bilinmeyen fonksiyondur.

Bu çalışmada gözönüne alınan problemin genelleşmiş çözümünün varlığı incelenmiş bunun için yeterli koşullar elde edilmiştir, ayrıca bazı özel durumlarda çözümün tek olduğu kanıtlanmıştır.

Gözönüne alınan problemdeki (1.1) denklemi 1960 yılında H. Yamabe [21] tarafından diferansiyel geometri alanında eğriliklerin özelliklerini incelerken elde ettiği (daha sonra Yamabe Denklemi adı verilen) denkleme benzediğinden dolayı onu Yamabe tipli denklem olarak adlandırıyoruz.

Kaydedilen yayınında Yamabe aşağıdaki soruyu gözönüne almıştır:

"$n \geq 3$ olmak üzere n boyutlu kompakt Rieman (M, g) manifoldları üzerinde $R_{g'} \equiv 1$ (eğrilik derecesi) olan ve g metriğine konform olan bir g' metriği var mıdır?"

Ve göstermiştir ki bu soru aşağıda verilen (1) denkleminin pozitif çözümü var mıdır? sorusuna denktir.

$$-2c_n \Delta_g u + R_g u = u^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{1}$$

Burada $c_n = \frac{2(n-1)}{n-2}$ ve Δ_g *Laplace-Beltrami* operatör, R_g ise (M, g)'nin skaler eğrilik derecesidir.

Ve bu denkleme Yamabe denklemi adı verilmiştir. Yukarıda söylenilen denklik şu anlamdadır: eğer u (1) denkleminin pozitif çözümü ise o zaman verilen g metriğine konform olan ve eğrilik derecesini 1 yapan g' metriği $g' = u^{\frac{4}{n-2}} g$ formunda gösterilebilir.

H. Yamabe 1960 yılında yayınlanan bu çalışmasında gözönüne aldığı problemin çözümünün varlığını kanıtlamıştır. Fakat Trudinger [19] 1968' de yayınladığı makalesinde Yamabe' nin kanıtının hatalı olduğunu göstermiştir ve bu makalede R_g'nin pozitif olmaması halinde Yamabe' nin kanıtındaki hatayı düzeltebilmiştir. Bundan 8 yıl sonra Aubin [3] $n \geq 6$ olmak üzere n boyutlu yerel olmayarak yüzey manifoldlarına konform olan manifoldlar üzerinde problemi çözmüştür. 1984 yılında Schoen [16] problemi tamamıyla çözmüştür.

1996 yılında Bahri ve Brezis [4] çalışmalarında $n \geq 3$ olmak üzere n boyutlu kompakt Rieman manifoldu üzerinde aşağıdaki problemi gözönüne almışlardır.

$$-\Delta_g u + qu = u^p, u \geq 0$$

Burada Δ_g *Laplace-Beltrami* operatör ve $q \in L_\infty(M)$, u bilinmeyen fonksiyondur. Bu çalışmada $p = \frac{n+2}{n-2}$ kritik durumunda problemin pozitif çözümünün varlığı üzerine çalışmışlardır. Bu problem için gerekli çözülebilirlik koşulunun $-\Delta_g + q$'nun *coercive* olması olduğunu elde etmişlerdir. Hatta bu koşulun $n = 3, 4, 5$ için yeterli olduğunu fakat $n \geq 6$ için ek koşullar gerektiğini göstermişlerdir.

1997 yılında Gabriele Bianchi ve Xing-Bin Pan [5] ise çalışmalarında Yamabe Denklemini yarı uzaylar üzerinde incelemişlerdir. Gözönüne aldıkları problem:

$$\begin{cases} \Delta u - K(x)\, u^\tau = 0 \ , \ u > 0 \ \mathbb{R}_+^n\text{'da} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = h(x)\, u^\sigma \ , \ \ \partial\mathbb{R}_+^n\text{'da} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{n+2}{n-2} \ (\textit{kritik Sobolev üssü}) \\ \sigma &= \frac{n}{n-2} \ (\textit{sınırda kritik Sobolev üssü}) \end{aligned}$$

Burada $K(x)$ $\mathbb{R}_+^n$' da yüksek mertebeden türevlenebilir bir fonksiyon ve pozitif bir sabitle altdan sınırlandırılmış, $h(x)$ ise $\partial\mathbb{R}_+^n$' da sınırlı yüksek mertebeden türevlenebilir bir fonksiyondur. Bu çalışmada

$$H_s\left(\mathbb{R}_+^n\right) = \left\{u \in L^{\tau+1}\left(\mathbb{R}_+^n\right) : u(x) = u(|x'|, x_n) \ \text{ve} \ \nabla u \in L^2\left(\mathbb{R}_+^n\right)\right\}$$

olmak üzere $K(x)$ ve $h(x)$ üzerine yeterli koşullar alınarak incelenen problemin $H_s\left(\mathbb{R}_+^n\right)$' da minimal bir çözümünün varlığı gösterilmiştir.

1997 yılında Yadava [20] $n \geq 3$ için $B(R_1, R_2) = x \in \mathbb{R}^n; 0 < R_1 < |x| \leq R_2 \leq \infty$ bölgesi üzerinde

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^p - u,\ x \in B(R_1, R_2) \\ u &= 0,\ x \in \partial B(R_1, R_2) \\ u &> 0,\ x \in B(R_1, R_2) \end{aligned}$$

Yadava p' nin kritik ve kritik üstü $\left(p \geq \frac{n+2}{n-2}\right)$ durumlarında $0 < R_1 < R_2 < \infty$ için problemin tek bir radial çözümünün olduğunu göstermiştir.

Ayrıca

$$\begin{aligned} -\Delta u &= u^p + u^q,\ x \in B(R_1, R_2) \\ u &= 0,\ x \in \partial B(R_1, R_2) \\ u &> 0,\ x \in B(R_1, R_2) \end{aligned}$$

problemini de incelemiş ve $1 \leq q < p \leq \frac{n+2}{n-2}$, $n \geq 3$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$ için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

a) Eğer $q = 1$ ise problemin en fazla bir radial çözümü vardır.

b) Eğer $1 < p < \frac{n+2}{n-2}$ ve $q > 1$ ise $\frac{p-1}{q+1} \leq \frac{2}{n}$ olduğunda problemin tek bir radial çözümü vardır.

Soltanov [17] 2005 yılındaki çalışmasında aşağıdaki problemi gözönüne almıştır.

$$\begin{aligned} -\Delta u + u + |u|^\rho u &= h(x),\ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + |u|^\mu u\right)\Bigg|_{\partial\Omega} &= \varphi(x'),\quad x' \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ sınırı yeterince düzgün sınırlı bir bölge ve $\rho, \mu \geq 0$ olan sayılardır.

$$S_{1,\rho,2}(\Omega) = \left\{ u \in L_1(\Omega) : [u]_{S_{1,\rho,2}(\Omega)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u|^\rho |D_i u|^2 \, dx + \int_\Omega |u|^{\rho+2} \, dx < \infty \right\}$$

olmak üzere $H(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap S_{1,\rho,2}(\Omega)$ uzayını tanımlamıştır.

(i) $\rho \geq 2\mu > 0$

(ii) $h \in L_2(\Omega)$ ve $\varphi(x') \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$

koşulları altında, $1 \leq n \leq 4$ iken $\rho \geq 0$ ve $n \geq 5$ iken $0 \leq \rho \leq \frac{4}{n-2}$ olduğunda gözönüne alınan problemin $H(\Omega)$' da tek çözümü olduğunu kanıtlamıştır.

2008 yılında K. N. Soltanov [18] çalışmasında aşağıdaki problemi gözönüne almıştır. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ sınırı yeterince düzgün sınırlı bir bölge ve f sürekli fonksiyon

$$\begin{aligned} -\Delta u - f(u) &= h(x), x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

Bu problem için Pohozaev [13] problemin ürettiği operatör *coercive* olmadığında keyfi h için çözümün olmadığını göstermiştir. Soltanov ise problemin ürettiği operatörün görüntü kümesnin öyle bir alt kümesini elde etmiştir ki buradan alınan keyfi h için problemin tanım kümesinin uygun alt kümelerinde çözümün olduğunu göstermiştir.

Ayrıca problemi $f(u) = |u|^{\rho} u$ iken incelemiş. $n \geq 3$ iken $0 < \rho < \frac{4}{n-2}$ için $n = 1, 2$ iken $\forall \rho$ için $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$'nın bir alt kümesinde, $W_2^{-1}(\Omega)$'nın uygun alt kümesinden alınan keyfi h'lar için problemin çözülebilir olduğunu göstermiştir.

Bu çalışmada biz $(1.1) - (1.2)$ problemini Soltanov' un [17] makalesinde ispatladığı genel teorem ve onun sonucunu uygulayarak inceledik. Bu sonucun uygulanabilmesi için problemin verileri üzerine yeterli koşulları elde ettik ve bu koşullar altında uygun uzaylarda çözümün varlığını ispatladık. Ayrıca özel bir durumda $(1.1) - (1.2)$ probleminin çözümünün tekliği için yeterli koşulları elde ettik ve bu koşullar altında uygun uzaylarda çözümün varsa tek olduğunu ispatladık. Elde edilen sonuçlar göstermektedir ki, bu çalışmada $(1.1) - (1.2)$ problemine uygulanan sonuç problemin daha genel koşullar alınarak incelenmesine imkan sağlamıştır.

2 ÖNBİLGİLER VE GEREKLİ TEOREMLER

Bu bölümde ilerideki bölümlerde kullanılacak bazı uzaylar, tanımlar, teoremler, gösterimler ve eşitsizlikler verilecektir.

Tanım 2.1 *([6]) Tam, doğrusal normlu bir X uzayına **Banach** uzayı denir.*

Tanım 2.2 *([1]) X normlu uzayı sayılabilir yoğun alt kümeye sahipse X uzayına **ayrılabilir** uzay denir.*

Tanım 2.3 *([1]) X üzerindeki iç çarpımın ürettiği norma göre Banach uzayı ise X'e **Hilbert** uzayı denir.*

Tanım 2.4 *([9]) X normlu doğrusal uzay olsun. X üzerindeki tüm doğrusal ve sınırlı fonksiyoneller uzayına X uzayının duali denir ve X^* ile gösterilir. $x' \in X^*$ olmak üzere X^* üzerindeki norm:*

$$\|x'\|_{X^*} = \sup_{x \in X,\ x \neq 0} \frac{\langle x',\ x\rangle}{\|x\|_X}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.5 *([6]) X Banach uzayı olsun. Eğer $(X^*)^* \equiv X$ ise X' e **refleksif** uzay denir. Daha açık olarak her $u^{**} \in (X^*)^*$ için*

$$\langle u^{**},\ u^*\rangle = \langle u^*,\ u\rangle\,,\ \forall u^* \in X^*$$

*eşitliğini sağlayan $u \in X$ varsa X **refleksif** uzaydır denir.*

Tanım 2.6 *([8]) X Banach uzayı ve $\{x_n\} \subset X$ olsun. Eğer her $f \in X^*$ için $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \langle f, x_n\rangle = \langle f, x\rangle$ ise $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$'e zayıf yakınsaktır denir ve $x_n \underset{X}{\rightharpoonup} x$ biçiminde gösterilir.*

Tanım 2.7 *([8]) X, Y doğrusal normlu uzaylar ve $X \subset Y$ olsun. Her $u \in X$ için*

$$\|u\|_{\ Y} \leq c \quad \|u\|_{\ X}$$

olacak şekilde bir $c > 0$ sayısı varsa X uzayı Y uzayına sürekli gömülür denir.

Tanım 2.8 *([8])* X *Banach uzayı olmak üzere* $X \subset Y$ *olsun. Eğer* X *uzayında* $u_0 \in X$*' e zayıf yakınsayan keyfi* $\{u_n\} \subset X$ *dizisi* Y *uzayında* u_0*' a güçlü yakınsıyorsa* X *uzayı* Y *uzayına kompakt gömülür denir.*

Ayrıca X *refleksif Banach uzayı ve* Y *keyfi Banach uzayı ise* X*' in* Y*' ye kompakt gömülmesi aşağıdaki koşulların sağlanmasına denktir.*

(a) $X \subset Y$

(b) X*'den alınan keyfi sınırlı bir alt küme* Y*'de kompakt bir alt küme tarafından kapsanır.*

Teorem 2.9 *([8]) Banach uzaylarında zayıf yakınsak dizi sınırlıdır.*

Teorem 2.10 *([22])* X *refleksif Banach uzayı ve* $\{x_n\}$ *bu uzayda sınırlı bir dizi olsun. O zaman bu diziden öyle bir alt dizi seçebiliriz ki bu uzayda zayıf yakınsar.*

Tanım 2.11 *([8])* X *Banach uzayı,* X^* *onun dual uzayı olmak üzere* $f : X \longrightarrow X^*$ *operatörü* $u \in X$ *için*

$$\|u\|_X \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u \rangle}{\|u\|_X} \nearrow \infty$$

sağlarsa f *operatörüne coercive dir denir.*

Teorem 2.12 *([12])* X *ve* Y *doğrusal normlu uzaylar ve* $A : X \longrightarrow Y$ *doğrusal operatör ise* A *operatörünün sınırlılığı ve sürekliliği denktir.*

Teorem 2.13 *([12])* X *ve* Y *Banach uzaylar ve* $A : X \longrightarrow Y$ *doğrusal sürekli operatör olsun. O zaman* $A : X \longrightarrow Y$ *zayıf süreklidir.*

Lemma 2.14 (Kısmi İntegrasyon Formülü) *([6])* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *sınırlı, açık ve* $\partial\Omega$ *sınırı* C^1*'den olsun,* η^i *sınırın birim normal vektörünün* $(\eta = (\eta^1, \eta^2, ..., \eta^n))$ *i. bileşeni olmak üzere* $u, v \in C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ *olsun o zaman;*

$$\int\limits_{\Omega} u_{x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} u v_{x_i} dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v \eta^i dS$$

dir, $(i = 1...n)$.

Teorem 2.15 (Green Formülü) *([6]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı, açık ve $\partial\Omega$ sınırı C^1'den olsun. $u, \upsilon \in C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, ν $\partial\Omega$'nın dış birim normal vektörü olmak üzere aşağıdaki eşitlikler vardır.*

(i) $\int\limits_{\Omega} \Delta u dx = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS$

(ii) $\int\limits_{\Omega} D\upsilon . Du dx = - \int\limits_{\Omega} u \Delta \upsilon dx + \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} u dS$

(iii) $\int\limits_{\Omega} \left(u\Delta \upsilon - \upsilon \Delta u\right) dx = \int\limits_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial \upsilon}{\partial \nu} - \upsilon \frac{\partial u}{\partial \nu}\right) dS$

Teorem 2.16 *([17]) X, Y Banach uzayları ve X^*, Y^* onların dual uzayları $S_0 \subseteq X$ zayıf tam bir pseudo-normlu uzay olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın;*

(i) $f : S_0 \longrightarrow Y$ *zayıf kompakt (zayıf sürekli) dönüşüm olsun öyle ki S_0 "refleksif" bir pseudo-normlu uzaydır.*

(ii) X_0 *topolojik vektör uzayı ve Y_0^*, Y^*'da yoğun refleksif ayrılabilir Banach uzayı olmak üzere*

$$g : X_0 \subseteq S_0 \longrightarrow Y_0^* \subset Y^*$$

sınırlı dönüşümü vardır öyle ki $g\left(X_0\right)$, Y_0^*'da yoğun doğrusal alt küme kapsar ve g^{-1}, Y_0^*'dan S_0'a zayıf kompakt dönüşümdür.

(iii) f *ve g dönüşümleri genelleşmiş anlamda X_0 üzerinde coercive ikili oluştursun:*

$x \in X_0$ için ($[.]_{S_0}$, S_0'da pseudo-normdur)

$$[x]_{S_0} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(x), g(x) \rangle}{[x]_{S_0}} \nearrow \infty$$

dir.

O zaman

$$\langle f(x), y^* \rangle = \langle y, y^* \rangle , \; y^* \in Y^*$$

denklemi her $y \in M \subseteq Y$ için S_0'da çözülebilirdir.

Burada

$$M = \left\{ y \in Y : sup \left\{ \frac{\langle f(x), g(x) \rangle}{[x]_{S_0}} : x \in X_0 \right\} < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.17 *([1]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ve $p \geq 1$ pozitif bir gerçel sayı olmak üzere Ω üzerinde tanımlanmış*

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan, u fonksiyonlarının sınıfına, $L_p(\Omega)$ uzayı denir. Üzerindeki norm

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.18 *([1]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bölgesinde hemen hemen sınırlı fonksiyonlar uzayına $L_\infty(\Omega)$ uzayı denir. Üzerindeki norm:*

$$\|u\|_{L_\infty(\Omega)} = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)|$$

şeklindedir.

Teorem 2.19 *([1]) Eğer $1 \leq p \leq \infty$ ise $L_p(\Omega)$ Banach uzayıdır.*

Teorem 2.20 *([1]) Eğer $1 \leq p < \infty$ ise $L_p(\Omega)$ ayrılabilir uzaydır.*

Teorem 2.21 *([1]) $1 < p < \infty \Leftrightarrow L_p(\Omega)$ refleksif uzaydır.*

Tanım 2.22 *([14]) (Ω, Σ, μ) ölçü uzayı, $\{f_n\}$ ve f Ω üzerinde tanımlı, gerçel değerli Σ- ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere;*

$\forall \varepsilon > 0$ *için* $\forall n \geq N$ *için*

$$\mu \{x : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists N > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor denir ve

$$f_n \xrightarrow{\mu} f$$

olarak gösterilir.

Teorem 2.23 *([14]) $\{f_n\}$, $L_p(\Omega)$' da fonksiyonlar dizisi olsun ve $f_n \underset{L_p(\Omega)}{\longrightarrow} f$ olsun. O zaman $\{f_n\}$ fonksiyonlar dizisi f fonksiyonuna ölçüme göre yakınsar.* .

Önerme 2.24 *([14])* (Ω,Σ,μ) *ölçü uzayı,* $\mu(\Omega)<\infty$, $\{f_n\}$ *ve* f *gerçel değerli ölçülebilir fonksiyonlar,* f_n f *fonksiyonuna ölçüme göre yakınsıyor olsun. O zaman* $\{f_{n_k}\}\subseteq\{f_n\}$ *alt dizisi vardır ki* $f_{n_k}\xrightarrow{hhy} f$ *sağlanır.*

Lemma 2.25 *([11])* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ $(n\geq 1)$ *sınırlı bölge* $p>1$, $q>1$ *olmak üzere*

$$f:L_p(\Omega)\longrightarrow L_q(\Omega)$$

sınırlı bir dönüşüm ve

$$f(t,.):\mathbb{R}^1\longrightarrow\mathbb{R}^1$$

sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca $\{u_m\}\subset L_p(\Omega)$ *ve* $u_0\in L_p(\Omega)$ *için*

$$u_m \underset{L_p(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$$

ve

$$u_m \xrightarrow[\Omega]{hhy} u_0$$

olsun. O zaman $\exists\{u_{m_k}\}\subset\{u_m\}$ *vardır ki*

$$f(x,u_{m_k}) \underset{L_q(\Omega)}{\rightharpoonup} f(x,u_0)$$

sağlanır.

Tanım 2.26 (Sobolev Uzayları) *([1])* $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ *bölge,* $m>0$ *bir tamsayı ve* $1\leq p\leq\infty$ *olsun.*

$$W_p^m(\Omega)=\{u\in L_p(\Omega):D^\alpha u\in L_p(\Omega),\forall\,|\alpha|\leq m\ \}$$

biçiminde tanımlanan uzaya Sobolev uzayı denir. Burada

$$|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+..........+\alpha_n$$

ve

$$D^\alpha u(x)=\frac{\partial^\alpha u(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}............\partial_{x_n}^{\alpha_n}}$$

dir. Bu doğrusal uzay üzerindeki norm, $1\leq p<\infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)}=\left(\sum_{0\leq\ |\alpha|\leq m}\|\ D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p=\infty$ *için;*

$$\|u\|_{W_\infty^m(\Omega)}=\max_{0\leq\ |\alpha|\leq m}\|\ D^\alpha u\|_{L\infty(\Omega)}$$

şeklindedir. $m = 0$ *için* $W_p^0(\Omega) = L_p(\Omega)$ *dır.*

$p = 2$ *ise* $W_2^m(\Omega)$ *uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzay üzerindeki iç çarpım*

$$\langle u, v \rangle_m = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha u(x) \; D^\alpha v(x)\, dx$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 2.27 *([1])* $W_p^m(\Omega)$ *Banach uzayıdır.*

Teorem 2.28 *([1]) Eğer* $1 \le p < \infty$ *ise* $W_p^m(\Omega)$ *ayrılabilir uzayıdır*

Teorem 2.29 *([1]) Eğer* $1 < p < \infty$ *ise* $W_p^m(\Omega)$ *refleksif uzaydır.*

Teorem 2.30 *([10])* $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ *ya da* C^1 *sınıfına ait açık sınırlı küme olsun.Bu durumda aşağıdaki gömülmeler süreklidir.*

(i) *Eğer* $1 \le p < n$ *ise* $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right]$

(ii) *Eğer* $p = n$ *ise* $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in [1, \infty)$

(iii) *Eğer* $p > n$ *ise* $W_p^1(\Omega) \subset L_\infty(\Omega)$

Teorem 2.31 *([1])* Ω $\mathbb{R}^n$*' de uniform* C^m*-regularity özelliğine sahip olsun. Eğer* $mp < n$ *ve* $p \le q \le \frac{(n-1)p}{n-pm}$ *ise*

$$W_p^m(\Omega) \subset L_q(\partial\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır. Eğer $mp = n$ *ise* $p \le q < \infty$ *için bu gömülme vardır.*

(Uniform C^m-regularity özelliği: Eğer $\partial\Omega$ sınırının yerel bir sonlu açık örtüsü $\{U_j\}$ ve ona karşılık gelen birebir, m-smooth dönüşümlerin bir dizisi $\{\Phi_j\}$ varsa öyle ki Φ_j, U_j'yi $B = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < 1\}$ kümesine götürüyor ve şu özellikler sağlanıyor:

(i) Bazı $\delta > 0$ için, $\cup_{j=1}^{\infty} \Psi_j(\{y \in \mathbb{R}^n : |y| < \frac{1}{2}\}) \supset \Omega_\delta$, $\Psi_j = \Phi_j^{-1}$.

(ii) Bazı sonlu R için, U_j kümelerinin her $R+1$ koleksiyonu boş arakesite sahiptir.

(iii) Her j için, $\Phi_j(U_j \cap \Omega) = \{y \in B : y_n > 0\}$.

(iv) $(\Phi_{j,1}, .., \Phi_{j,n})$ ve $(\Psi_{j,1}, .., \Psi_{j,n})$, Φ_j ve Ψ_j'nin bileşenlerini temsil etmek üzere, öyle bir sonlu M sayısı vardır ki, her α için $|\alpha| \le m$, her i için $1 \le i \le n$ ve her j için, $|D^\alpha \Phi_{j,i}(x)| \le M$, $x \in U_j$ ve $|D^\alpha \Psi_{j,i}(y)| \le M$, $y \in B$'dir.

o zaman Ω, uniform C^m-regularity özelliğine sahiptir.)

Teorem 2.32 *([10]) Ω C^1 sınıfına ait açık bir küme olsun. Bu durumda aşağıdaki gömülmeler kompakttır.*

(i) *Eğer $p < n$ ise $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right)$*

(ii) *Eğer $p = n$ ise $W_p^1(\Omega) \subset L_q(\Omega)$, $p = n$, $q \in [1, \infty)$*

(iii) *Eğer $p > n$ ise $W_p^1(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right)$*

Teorem 2.33 *([6]) Ω sınırı C^1 ' e ait sınırlı bölge olsun. Öyle bir doğrusal sınırlı*

$$T : W_p^1(\Omega) \longrightarrow L_p(\partial\Omega)$$

operatörü vardır ki aşağıdakiler sağlanır.

(i) $Tu = u\mid_{\partial\Omega}, u \in W_p^1(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$

(ii) $\|Tu\|_{L_p(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_p^1(\Omega)}, \forall u \in W_p^1(\Omega), c = c(p, \Omega)$

Teorem 2.34 *([1]) Eğer $u \in W_p^m(\Omega)$ ise $v = u|_{\partial\Omega}$ $\;W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ uzayına aittir ve*

$$\|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)} \leq K_1 \|u\|_{W_p^m(\Omega)}$$

sağlanır ve tersine eğer $v \in W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)$ ise o zaman $\exists\, u \in W_p^m(\Omega)$ vardır ki $v = u|_{\partial\Omega}$ ve

$$\|u\|_{W_p^m(\Omega)} \leq K_2 \|v\|_{W_p^{m-\frac{1}{p}}(\partial\Omega)}$$

sağlanır.

Tanım 2.35 (Test Fonksiyonu) *([7]) φ, kompakt support'a sahip gerçel değerli ve her mertebeden sürekli türevi olan bir fonksiyon ise ($\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$) φ'ye test fonksiyonu denir.*

Bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemi ile test fonksiyonlar kümesi bir vektör uzayıdır (bu uzayı D ile göstereceğiz).

Tanım 2.36 (Genelleştirilmiş Fonksiyon) *([7]) f, D üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f'e genelleştirilmiş fonksiyon denir:*

(a) Her α_1 ve α_2 gerçel (veya kompleks) sayıları ve her $\varphi_1,\ \varphi_2 \in D$ için

$$\langle f, \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 \rangle = \alpha_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + \alpha_2 \langle f, \varphi_2 \rangle$$

(b) Her sıfıra yakınsayan $\{\varphi_n\} \subseteq D$ dizisi için $\{\langle f, \varphi_n \rangle\}$ dizisi sıfıra yakınsar.

Yukarıdaki tanımdan çıkar ki, integrallenebilir bir f fonksiyonu D üzerinde genelleştirilmiş fonksiyondur. Gerçekten, her $\varphi \in D$ için

$$\langle f, \varphi \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

integrali sonludur ve integralin özelliklerinden yukarıdaki tanımın koşulları sağlanır.

Tanım 2.37 (Zayıf Türev) *([6]) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık bir bölge ve $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ ($L^1_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}|$ her $V \subset\subset \Omega$ için $u \in L^1(V)\}$), α multiindex olmak üzere eğer her test fonksiyonu φ için*

$$\int\limits_{\Omega} uD^{\alpha}\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\Omega} v\varphi dx$$

eşitliği sağlanırsa v'ye u'nun $|\alpha|$. zayıf kısmi türevi denir ($D^{\alpha}u = v$).

Lemma 2.38 (Hölder Eşitsizliği) *([6]) $1 \leq p_1, ..., p_m \leq \infty$, $\frac{1}{p_1} + ... + \frac{1}{p_m} = 1$ olsun. $u_k \in L_{p_k}(\Omega)$, $k = 1, ..., m$ ise*

$$\int\limits_{\Omega} |u_1...u_m|\, dx \leq \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L_{p_k}(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.39 (Young Eşitsizliği) *([6]) $1 < p,\ q < \infty$, $1/p + 1/q = 1$ olsun. Bu durumda*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \ (a,\ b > 0)$$

veya

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)\, b^q,\ \ (\varepsilon > 0)$$

olur.

Lemma 2.40 *([1]) Eğer $1 \leq p < \infty$ ve $a \geq 0$, $b \geq 0$ ise o zaman*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}\,(a^p + b^p) \tag{2.0}$$

eşitsizliği sağlanır.

Çalışmamızda kullanacağımız sabitler aşağıdaki eşitsizliklerden gelmektedir:

c_1 **sabiti;**

Teorem 2.34' e göre keyfi $u \in W_2^1(\Omega)$ için $u|_{\partial\Omega} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$'dır, öyle c_1 sabiti vardır ki

$$\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq c_1 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

c_2 **sabiti;**

Teorem 2.30' a göre $n \geq 3$ oluğunda $1 \leq p \leq \frac{2n}{n-2}$ için

$n = 2$ olduğunda $1 \leq p < \infty$ için;

$$W_2^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$$

sürekli gömülmesi vardır. Buradan söyleyebiliriz ki öyle c_2 sabiti vardır ki

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.2}$$

eşitsizliği sağlanır.

c **sabiti;**

Teorem 2.31' e göre $p = 2$, $m = 1$ alındığında $q = \frac{2(n-1)}{n-2}$ olur ve

$n \geq 3$ için;

$$W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\partial\Omega)$$

$n = 2$ için $1 \leq q < \infty$ olduğunda

$$W_2^1(\Omega) \subset L_q(\partial\Omega)$$

sürekli gömülmesi elde edilir. Buradan söyleyebiliriz ki öyle c sabiti vardır ki

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega)} \leq c \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{2.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

c_3 **sabiti;**

Teorem 2.34' e göre keyfi $u|_{\partial\Omega} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq c_4 \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde c_4 sabiti vardır. Burada (2.3) eşitsizliğinden kullanırsak;

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega)} \leq c\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq cc_4\,\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

olur. $cc_4 = c_3$ dersek

$$\|u\|_{L_q(\partial\Omega)} \leq c_3\,\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{2.4}$$

eşitsizliği alınır.

3 BİR SINIF İKİNCİ MERTEBEDEN YARI DOĞRUSAL KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN KONULMUŞ 3. SINIF SINIR PROBLEMİ

Bu bölümde aşağıdaki problemi gözönüne alacağız.

$$-\Delta u + u + a(x)\,|u|^{\rho}\,u - b(x)\,|u|^{\nu}\,u = h(x),\ \ x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x')u\right)\bigg|_{\partial\Omega} = \varphi(x'),\ \ x' \in \partial\Omega \tag{1.2}$$

Burada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) sınırlı bölge, a, b, k, h, φ verilen fonksiyonlar, ρ, ν verilen sayılardır, u bilinmeyen fonksiyondur.

Bu problem $h \in \left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ ve $\varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ olduğunda incelenecektir.

Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim:

(3.1) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) sınırı yeterince düzgün sınırlı bölge ve ρ, $\nu > -1$'dir.

(3.2) $\forall x \in \Omega$ için $a(x) \geq 0$ ve $b(x) \geq 0$ olmak üzere $a \in L_{p_1}(\Omega)$ ve $b \in L_{r_1}(\Omega)$'dır.

Burada p_1, r_1 sayıları ρ ve ν sayılarına bağlı olarak ileride tanımlanacaktır.

(3.3) $q_1 := \begin{cases} > 1,\ \text{eğer } n = 2 \text{ ise;} \\ n-1, \text{eğer } n \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$ olmak üzere $k \in L_{q_1}(\partial\Omega)$' dır.

Tanım 3.1 *Aşağıdaki eşitliği keyfi $v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için sağlayan $u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ fonksiyonuna* (1.1) − (1.2) *probleminin genelleşmiş çözümü denir.*

$$\int\limits_{\Omega} (-\Delta u + u)\,v dx + \int\limits_{\Omega} \left(a(x)\,|u|^{\rho}\,u - b(x)\,|u|^{\nu}\,u\right) v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x')\,u\right) v dx'$$

$$= \int\limits_{\Omega} h v dx + \int\limits_{\partial\Omega} \varphi v dx' \tag{3.4}$$

Daha sonra problemin doğrusal olmayan kısmı üzerine elde edilecek olan koşullar altında (3.4) eşitliğinin tüm terimleri anlamlı olacaktır.

(1.1) − (1.2) problemini $n = 2$ olduğunda ve $n \geq 3$ olduğunda farklı koşullar altında inceleyeceğimizden bu iki durumu ayrı gözönüne alacağız. $n = 2$'den farklı olarak

$n \geq 3$ olduğunda problemi doğrusal olmayan kısmına bağlı olarak farklı bölümlerde gözönüne alacağız. Dolayısıyla problemi $n \geq 3$ olduğunda doğrusal olmayan kısmının mertebesinin Sobolev' in gömülme teoremine bağlı olarak kritik altı, kritik ve kritik üstü durumlarından oluşan bölümlerde inceleyeceğiz. Bu bölünme ise problemin doğrusal olmayan kısmının formundan yola çıkılarak ρ parametresine bağlı yapılacaktır. ν para-

metresinin ise genellikle ρ'ya bağlı olduğu kabul edilecektir.

O zaman çalışmamızda $(1.1)-(1.2)$ problemini aşağıdaki iki durumda inceleyeceğiz.

(i) kritik altı ve Kritik Durum:

$$-1 < \rho \leq \frac{4}{n-2}$$

(ii) Kritik Üstü Durum:

$$\rho > \frac{4}{n-2}$$

3.1 KRİTİK ALTI VE KRİTİK DURUMDA (1.1)-(1.2) PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu kısımda $n \geq 3$ olduğunda kritik altı durum $\left(-1 < \rho < \frac{4}{n-2}\right)$ ve kritik durum $\left(\rho = \frac{4}{n-2}\right)$ gözönüne alınacaktır. Ayrıca $n = 2$ durumu incelenecektir, bu durumda $-1 < \rho < \infty$ alınacaktır.

Burada problemi ν ve ρ parametreleri arasında aşağıdaki koşul olduğunda inceleyeceğiz.

$$\rho,\ \nu > -1 \text{ ve } 0 \leq \nu \leq \rho$$

Kaydetmek gerekir ki $-1 < \nu < 0$ olduğunda problemin incelenmesi için ν'nün ρ'ya bağlılığına gerek olmadığından ve $\nu = \rho \geq 0$ olduğunda ilave koşullar gerekli olduğundan bu durumlar üzerinde ayrı ayrı durulacaktır.

Bu kısımda kritik altı ve kritik durum incelendiğinden $-1 < \rho \leq \frac{4}{n-2}$ koşulu sağlanır. O zaman Sobolev gömülme teoreminden dolayı $W_2^1(\Omega) \subset L_{\rho+2}(\Omega)$ kapsaması sağlandığından $(1.1) - (1.2)$ probleminin genelleşmiş çözümünün tanımında yer alan $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ uzayı $W_2^1(\Omega)$ uzayına denk gelir.

Bu durumda (3.2) koşulundaki p_1, r_1 sayıları aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$n = 2$ için;

$$p_1 := \begin{cases} > 1 & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$r_1 := \begin{cases} > 1 & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho-\nu} & \text{eğer } 0 \leq \nu < \rho \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \nu = \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$n \geq 3$ için;

$$p_1 := \begin{cases} \frac{2n}{\rho(2-n)+4} & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$r_1 := \begin{cases} \frac{2n}{\nu(2-n)+4} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho-\nu} & \text{eğer } 0 \leq \nu < \rho \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \nu = \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

(3.2) koşulunu parametreleri yukarıdaki gibi olduğunda $(3.2')$ olarak adlandıracağız.

$(3.2')$ ve (3.3) koşulları altında tanımda verilen (3.4) eşitliğindeki her terim keyfi $u,\, v \in W_2^1(\Omega)$ için anlamlıdır.

Teorem 3.2 *$n=2$ olduğunda $-1<\rho,\nu<0$ ya da $-1<\nu\leq\rho<\infty$ ve $\rho\geq 0$, $n\geq 3$ olduğunda $-1<\rho,\nu<0$ ya da $-1<\nu\leq\rho\leq\dfrac{4}{n-2}$ olmak üzere (3.1), (3.2′), (3.3) koşulları sağlansın.*

İlave olarak aşağıdaki koşullar sağlansın.

(1) $\rho>\nu\geq 0$ olduğunda öyle $a_0>0$ sayısı vardır ki keyfi $x\in\Omega$ için $a(x)\geq a_0$' dır. Eğer $\nu=\rho\geq 0$ ise keyfi $x\in\Omega$ için $a(x)\geq b(x)$'dir.

(2) k fonksiyonu aşağıdaki koşullardan birini sağlasın.

(a) Keyfi $x'\in\partial\Omega$ için $k(x')\geq 0$' dır.

(b) Öyle $k_0>0$ sayısı vardır ki $\|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)}\leq k_0<\dfrac{1}{c^2}$ eşitsizliği sağlanır. (c sayısı (2.3) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

Bu taktirde $\forall h\in\left(W_2^1(\Omega)\right)^*$ ve $\forall\varphi\in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $(1.1)-(1.2)$ probleminin $W_2^1(\Omega)$'da genelleşmiş çözümü vardır.

Teorem 3.2' nin ispatı için Teorem 2.16'yı kullanacağız. Bunun için $(1.1)-(1.2)$ probleminin yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım.

$$f:\equiv\{f_1,f_2\}:S_0\longrightarrow Y \tag{3.1.1}$$

$$S_0:\equiv W_2^1(\Omega),\qquad Y:\equiv\left(W_2^1(\Omega)\right)^*\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$g:\equiv\{g_1,g_2\}:W_2^1(\Omega)\longrightarrow W_2^1(\Omega)\times W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \tag{3.1.2}$$

$$X_0\equiv S_0,Y_0^*\equiv Y^*$$

$$f_1(u):=-\Delta u+u+a(x)\,|u|^{\rho}\,u-b(x)\,|u|^{\nu}\,u$$

$$f_2(u):=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+k(x')\,u\right)\right|_{\partial\Omega}$$

$$g := Id$$

$S_0 \equiv W_2^1(\Omega)$ Sobolev uzayı olduğundan ayrılabilir *Hilbert* uzayıdır.

Gerekli uzayları ve dönüşümleri belirledik. Şimdi bu dönüşümlerin Teorem 2.16'nın koşullarını sağladığını görmek için gerekli lemmaları ispatlayacağız.

Lemma 3.3 (3.1.1) *ile tanımlamış olduğumuz f dönüşümü Teorem 3.2' nin koşulları altında $W_2^1(\Omega)$'dan $(W_2^1(\Omega))^* \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$'ya sınırlı bir dönüşümdür.*

İspat. Bu dönüşümün sınırlı olduğunu görmek için f_1 ve f_2'nin uygun uzaylarda sınırlı olduğunu tek tek gösterelim.

Önce $f_1 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^*$ sınırlı olduğunu görelim.

f_1 operatörünü değerlendirmek için $(W_2^1(\Omega))^*$'daki norm tanımını kullanacağız.

$u, v \in W_2^1(\Omega)$ olmak üzere

$$\|f_1(u)\|_{(W_2^1(\Omega))^*} \equiv \sup_{\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq 1} |\langle f_1(u), v\rangle| \tag{3.1.3}$$

şeklindedir.

$$|\langle f_1(u), v\rangle| = \left| \int_\Omega -\Delta uv dx + \int_\Omega uv dx + \int_\Omega a(x)|u|^\rho uv dx \right.$$
$$\left. - \int_\Omega b(x)|u|^\nu uv dx \right| \tag{3.1.4}$$

(3.1.4)'ün sağ kısmını üstten değerlendirelim. Bu eşitliğin 1. terimine sınır koşullarını gözönüne alarak kısmi integrasyon uygular ve değerlendirirsek;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq \int_\Omega |Du||Dv| dx + \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta} v\right| dx' + \int_\Omega |u||v| dx + \int_\Omega a(x)|u|^{\rho+1}|v| dx$$
$$+ \int_\Omega b(x)|u|^{\nu+1}|v| dx \tag{3.1.5}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.5) eşitsizliğinin 1. terimine Hölder eşitsizliğini uygularsak ve keyfi $u \in W_2^1(\Omega)$ için $\|Du\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int_\Omega |Du||Dv| dx \leq \|Du\|_{L_2(\Omega)} \|Dv\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.1.6}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.5) eşitsizliğinin 2. terimi için $\left|\frac{\partial u}{\partial \eta}v\right| \leq |Du|\,|v|$ olduğunu gözönüne alır ve $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dual uzayındaki norm tanımından yararlanırsak;

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{du}{d\eta}v\right|dx' \leq \int\limits_{\partial\Omega}|Du|\,|v|\,dx' \leq \|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

olur. Bu eşitsizlikte keyfi $u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $\|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$ olduğunu ve (2.1) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left|\frac{du}{d\eta}v\right|dx' \leq c_1^2\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.1.7}$$

eşitsizliği elde edilir.(c_1 sayısı (2.1) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

(3.1.5) eşitsizliğinin 3. terimine Hölder eşitsizliğini uygular ve $\forall u \in W_2^1(\Omega)$ için $\|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int\limits_{\Omega}|u|\,|v|\,dx \leq \|u\|_{L_2(\Omega)}\|v\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.1.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.1.5) eşitsizliğinin 4. terimine Hölder eşitsizliğini uygulayalım;

$$\int\limits_{\Omega}a(x)\,|u|^{\rho+1}\,|v|\,dx \leq \|a\|_{L_{d_1}(\Omega)}\left\||u|^{\rho+1}\right\|_{L_{d_2}(\Omega)}\|v\|_{L_{d_3}(\Omega)}$$

$n = 2$ için;

$$d_1 := p_1$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2p_1}{p_1-1} & \text{eğer } \; -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho+1} & \text{eğer } \; \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := \begin{cases} \frac{2p_1}{p_1-1} & \text{eğer } \; -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \rho+2 & \text{eğer } \; \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$n \geq 3$ için;

$$d_1 := p_1$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2n}{(n-2)(\rho+1)} & \text{eğer } \; -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho+1} & \text{eğer } \; \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & \text{eğer} \quad -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \rho + 2 & \text{eğer} \quad \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak alınmıştır. Burada $d_1, d_2, d_3 > 1$ ve

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} = 1$$

dir. Son eşitsizlikten;

$$\int_\Omega a(x) |u|^{\rho+1} |v| \, dx \leq \|a\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|u\|^{(\rho+1)}_{L_{d_2(\rho+1)}(\Omega)} \|v\|_{L_{d_3}(\Omega)}$$

alınır.

Bu eşitsizlikte $n = 2$ iken keyfi $p \geq 1$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ gömülmesini, $n \geq 3$ iken $-1 < \rho < 0$ olduğunda $d_2(\rho+1) = \frac{2n}{n-2}$, $d_3 = \frac{2n}{n-2}$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ gömülmesini ve $\rho \geq 0$ olduğunda $d_2(\rho+1) = \rho+2$, $d_3 = \rho+2$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\rho+2}(\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\int_\Omega a(x) |u|^{\rho+1} |v| \, dx \leq c_2^{\rho+2} \|a\|_{L_{p_1}(\Omega)} \|u\|^{\rho+1}_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.1.9}$$

eşitsizliği elde edilir. (c_2 sayısı(2.2) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

(3.1.5) eşitsizliğinin 5. terimine Hölder eşitsizliğini uygulayalım;

$$\int_\Omega b(x) |u|^{\nu+1} |v| \, dx \leq \|b(x)\|_{L_{d_1}(\Omega)} \left\| |u|^{\nu+1} \right\|_{L_{d_2}(\Omega)} \|v\|_{L_{d_3}(\Omega)}$$

$n = 2$ için;

$$d_1 := r_1$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2r_1}{r_1-1} & \text{eğer} \quad -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\nu+1} & \text{eğer } 0 \leq \nu < \rho \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho+1} & \text{eğer } \nu = \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := \begin{cases} \frac{2r_1}{r_1-1} & \text{eğer} \quad -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \rho + 2 & \text{eğer } 0 \leq \nu < \rho \text{ ise;} \\ \rho + 2 & \text{eğer } \nu = \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$n \geq 3$ için;

$$d_1 := r_1$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{2n}{(n-2)(\nu+1)} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\nu+1} & \text{eğer } 0 \le \nu < \rho \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho+1} & \text{eğer } \nu = \rho \ge 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_3 := \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \rho+2 & \text{eğer } 0 \le \nu < \rho \text{ ise;} \\ \rho+2 & \text{eğer } \nu = \rho \ge 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

olarak alınmıştır. Burada $d_1, d_2, d_3 > 1$ ve

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_3} = 1$$

dir. Son eşitsizlikten;

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{\nu+1}\,|v|\,dx \le \|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}\,\|u\|^{\nu+1}_{L_{d_2(\nu+1)}(\Omega)}\,\|v\|_{L_{d_3}(\Omega)}$$

alınır.

Bu eşitsizlikte $n = 2$ iken keyfi $p \ge 1$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ gömülmesini, $n \ge 3$ iken $-1 < \nu < 0$ olduğunda $d_2(\nu+1) = \frac{2n}{n-2}$, $d_3 = \frac{2n}{n-2}$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ gömülmesini ve $\nu \ge 0$ olduğunda $d_2(\nu+1) = \rho+2$, $d_3 = \rho+2$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\rho+2}(\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\int_\Omega b(x)\,|u|^{\nu+1}\,|v|\,dx \le c_2^{\nu+2}\,\|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}\,\|u\|^{\nu+1}_{W_2^1(\Omega)}\,\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.1.10}$$

eşitsizliği elde edilir. (c_2 sayısı (2.2) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

(3.1.6), (3.1.7), (3.1.8), (3.1.9), (3.1.10) eşitsizliklerini (3.1.5) eşitsizliğinde gözönüne alırsak;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \le \|v\|_{W_2^1(\Omega)}\,(2\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + c_1^2\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + c_2^{\rho+2}\,\|a\|_{L_{p_1}(\Omega)}\,\|u\|^{\rho+1}_{W_2^1(\Omega)}$$

$$+c_2^{\nu+2}\,\|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}\,\|u\|^{\nu+1}_{W_2^1(\Omega)})$$

olur. Eğer

$$\widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right) = 2\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + c_1^2\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + c_2^{\rho+2}\,\|a\|_{L_{p_1}(\Omega)}\,\|u\|^{\rho+1}_{W_2^1(\Omega)}$$

$$+c_2^{\nu+2}\,\|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}\,\|u\|^{\nu+1}_{W_2^1(\Omega)}$$

dersek

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq \widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right)\|v\|_{W_2^1(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Son eşitsizlik keyfi $u, v \in W_2^1(\Omega)$ için var olduğundan $\|v\|_{W_2^1(\Omega)} \leq 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. O zaman (3.1.3)' e göre

$$\|f_1(u)\|_{(W_2^1(\Omega))^*} \leq \widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right)$$

olur.

$\widetilde{c}(.)$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan $\forall u \in B(0,r) \subset W_2^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq r$$

iken

$$\widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}\right) \leq \widetilde{c}(r)$$

olur ve böylece

$$\|f_1(u)\|_{(W_2^1(\Omega))^*} \leq \widetilde{c}(r)$$

bulunur.

Böylece f_1 dönüşümünün $W_2^1(\Omega)$' dan $(W_2^1(\Omega))^*$' a sınırlı dönüşüm olduğunu ispatladık.

Şimdi $f_2 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dönüşümünün sınırlı olduğunu görelim. $u \in W_2^1(\Omega)$ ise $u|_{\partial\Omega} \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ olduğundan f_2 dönüşümünün sınırlılığını $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$'dan $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$'ya gösterelim. Bunun için $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$' daki norm tanımını kullanacağız.

$u, v \in W_2^1(\Omega)$ olmak üzere

$$\|f_2(u)\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \equiv \sup_{\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq 1} |\langle f_2(u), v\rangle| \tag{3.1.11}$$

şeklindedir.

$$|\langle f_2(u), v\rangle| = \left|\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v dx + \int_{\partial\Omega} k(x') uvdx'\right| \tag{3.1.12}$$

(3.1.12)'nin sağ kısmını üstten değerlendirelim:

$$|\langle f_2(u), v\rangle| \leq \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta} v\right| dx' + \int_{\partial\Omega} |k(x') uv| \, dx' \tag{3.1.13}$$

(3.1.13) eşitsizliğinin 1. terimi için $\left|\frac{\partial u}{\partial \eta} v\right| \leq |Du|\,|v|$ olduğunu gözönüne alır ve $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dual uzayındaki norm tanımından yararlanırsak;

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta} v\right| dx' \leq \int\limits_{\partial\Omega} |Du|\,|v|\,dx \leq \|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

olur. Bu eşitsizlikte keyfi $u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için

$$\|Du\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial \eta} v\right| dx' \leq \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{3.1.14}$$

elde edilir.

(3.1.13) eşitsizliğinin 2. terimine Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\int\limits_{\partial\Omega} |k(x')\,uv|\,dx' \leq \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} \|u\|_{L_{q_2}(\partial\Omega)} \|v\|_{L_{q_3}(\partial\Omega)}$$

burada

$$q_2 := \frac{2q_1}{q_1-1}, q_3 := \frac{2q_1}{q_1-1}$$

olarak alınmıştır.

Son eşitsizlikte $n=2$ iken keyfi $p \geq 1$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_p(\partial\Omega)$ gömülmesini ve $n \geq 3$ iken $q_2 = q_3 = \frac{2n-2}{n-2}$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)$ gömülmesini gözönüne alır ve (2.4) eşitsizliğini kullanırsak;

$$\int\limits_{\partial\Omega} |k(x')\,uv|\,dx' \leq c_3^2 \|k\|_{Lq_1(\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \tag{3.1.15}$$

elde edilir. (c_3 sayısı (2.4) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

(3.1.14), (3.1.15) eşitsizliklerini (3.1.13) eşitsizliğinde gözönüne alırsak;

$$|\langle f_2(u), v\rangle| \leq \|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + c_3^2 \|k\|_{Lq_1(\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Eğer

$$\approx{c}\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \right) := \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} + c_3^2 \|k\|_{Lq_1(\partial\Omega)} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

dersek

$$\left|\left\langle f_2(u), v\right\rangle\right| \le \tilde{\tilde{c}}\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right)\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}$$

olur.

Son eşitsizlik keyfi $u, v \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için var olduğundan $\|v\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. O zaman (3.1.11)' e göre

$$\|f_2(u)\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le \tilde{\tilde{c}}\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right)$$

olur.

$\tilde{\tilde{c}}(.)$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan $\forall u \in B(0, r) \subset W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için

$$\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le r$$

iken

$$\tilde{\tilde{c}}\left(\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}\right) \le \tilde{\tilde{c}}(r)$$

olur ve böylece

$$\|f_2(u)\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \le \tilde{\tilde{c}}(r)$$

bulunur.

Böylece f_2 dönüşümünün $W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$' dan $W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$' ya sınırlı dönüşüm olduğunu ispatladık. ∎

Lemma 3.4 *(3.1.1)' de tanımlanan f dönüşümü $W_2^1(\Omega)$'dan $(W_2^1(\Omega))^* \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$'ya Teorem 3.2' nin koşulları altında zayıf süreklidir.*

İspat. $f \equiv \{f_1, f_2\}$ olduğundan f_1 ve f_2 dönüşümlerinin zayıf sürekliliğine ayrı ayrı bakacağız.

Önce

$$f_1 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow \left(W_2^1(\Omega)\right)^*$$

dönüşümünün zayıf sürekli dönüşüm olduğunu görelim. Bu dönüşümün doğrusal kısmının ve doğrusal olmayan kısmının zayıf sürekliliğini sırasıyla göstereceğiz.

$$\tilde{f}_1 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow \left(W_2^1(\Omega)\right)^*$$

olmak üzere;

$$\tilde{f}_1(u) := -\Delta u + u$$

olsun. Lemma 3.3'den bu dönüşümün sınırlı olduğu elde edilir. Dönüşüm doğrusal olduğundan sınırlılığı sürekliliğine denk gelir (bknz. Teorem 2.12). Dolayısıyla dönüşüm zayıf sürekli olur (bknz. Teorem 2.13).

Şimdi doğrusal olmayan kısmın zayıf sürekliliğini gösterelim.Bunun için önce

$$\phi_1 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow \left(W_2^1(\Omega)\right)^*$$

$$\phi_1(x,u) := a(x)\,|u|^{\rho}\,u$$

ve

$$\phi_2 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow \left(W_2^1(\Omega)\right)^*$$

$$\phi_2(x,u) := b(x)\,|u|^{\nu}\,u$$

dönüşümlerinin zayıf sürekli olduğunu göstereceğiz. Burada zayıf süreklilik tanımını kullanacağız.

Bunun için $u_0 \in W_2^1(\Omega)$'ya bu uzayda zayıf yakınsayan keyfi $\{u_m\} \subset W_2^1(\Omega)$ dizisi $(u_m \underset{W_2^1(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0)$ için

$$\phi_1(x,u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*}{\rightharpoonup} \phi_1(x,u_0)$$

ve

$$\phi_2(x,u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*}{\rightharpoonup} \phi_2(x,u_0)$$

olacak şekilde $\exists\{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ bulmak yeterlidir.

Söylemek gerekir ki ρ ve ν üzerine konulan koşuldan ve Sobolev Gömülme Teoreminden dolayı aşağıdaki gömülmeler vardır.

$$W_2^1(\Omega) \subset L_{p_0}(\Omega)\,, L_{q_0}(\Omega) \subset (W_2^1(\Omega))^*$$

$n = 2$ için;

$$p_0 := \begin{cases} \geq 1 & \text{eğer } -1 < \rho, \nu < 0 \text{ ise;} \\ \rho + 2 & \text{eğer } \rho, \nu \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$q_0 := \begin{cases} \frac{p_0}{p_0 - 1} & \text{eğer } -1 < \rho, \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho+1} & \text{eğer } \rho, \nu \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$n \geq 3$ için;

$$p_0 := \begin{cases} \frac{2n}{n-2} & \text{eğer } -1 < \rho, \nu < 0 \text{ ise;} \\ \rho + 2 & \text{eğer } \rho, \nu \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$q_0 := \begin{cases} \frac{2n}{n+2} & \text{eğer } -1 < \rho, \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+2}{\rho+1} & \text{eğer } \rho, \nu \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

Bu gömülmelerden yola çıkarsak ϕ_1 ve ϕ_2 dönüşümlerinin $(W_2^1(\Omega))$'dan $L_{q_0}(\Omega)$'ya olduğunu görüyoruz. Bu yüzden önce

$$\phi_1(x, u_{m_k}) \underset{L_{q_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} \phi_1(x, u_0)$$

ve

$$\phi_2(x, u_{m_k}) \underset{L_{q_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} \phi_2(x, u_0)$$

olacak şekilde $\exists \{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ alt dizi olduğunu göstereceğiz. Bunun için Lemma 2.25'i kullanacağız. Şimdi ϕ_1 ve ϕ_2 dönüşümlerinin Lemma 2.25'in koşullarını sağladığını sırasıyla görelim:

(i) Bu dönüşümlerin $L_{p_0}(\Omega)$'dan $L_{q_0}(\Omega)$'ya sınırlı olduğunu görelim:

$\forall u \in L_{p_0}(\Omega)$ için aşağıdaki integrali değerlendirelim.

$$\int_\Omega |\phi_1(x, u)|^{q_0}\, dx = \int_\Omega (a(x))^{q_0} |u|^{q_0(\rho+1)}\, dx$$

Bu eşitliğin sağ kısmına aşağıdaki katsayılarla Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$n = 2$ için;

$$d_1 := \begin{cases} > 1 & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{h_1}{h_1-1} & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$n \geq 3$ için;

$$d_1 := \begin{cases} \frac{n+2}{\rho(2-n)+4} & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{n+2}{(n-2)(\rho+1)} & \text{eğer } -1 < \rho < 0 \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \rho \geq 0 \text{ ise;} \end{cases}$$

$$\int_\Omega |\phi_1(x, u)|^{q_0}\, dx \leq \|a^{q_0}\|_{L_{d_1}(\Omega)} \left\| |u^{q_0(\rho+1)}| \right\|_{L_{d_2}(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan

$$\int\limits_{\Omega} |\phi_1(x,u)|^{q_0}\, dx \leq \|a\|^{q_0}_{L_{d_1 q_0}(\Omega)} \|u\|^{q_0(\rho+1)}_{L_{d_2 q_0(\rho+1)}(\Omega)}$$

olur. Son eşitsizlikte d_1 ve d_2'nin tanımlarından

$$d_1 q_0 = p_1 \,,\, d_2 q_0 (\rho+1) = p_0$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\int\limits_{\Omega} |\phi_1(x,u)|^{q_0}\, dx \leq \|a\|^{q_0}_{L_{p_1}(\Omega)} \|u\|^{q_0(\rho+1)}_{L_{p_0}(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten ϕ_1 dönüşümünün $L_{p_0}(\Omega)$' dan $L_{q_0}(\Omega)$' ya sınırlı dönüşüm olduğu açıktır.

ϕ_2 dönüşümü için;

$\forall u \in L_{p_0}(\Omega)$ için aşağıdaki integrali değerlendirelim;

$$\int\limits_{\Omega} |\phi_2(x,u)|^{q_0}\, dx = \int\limits_{\Omega} b(x)^{q_0} |u|^{q_0(\nu+1)}\, dx$$

Bu eşitliğin sağ kısmına aşağıdaki katsayılarla Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$n = 2$ için;

$$d_1 := \begin{cases} > 1 & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+1}{\rho-\nu} & \text{eğer } \rho > \nu \geq 0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \nu = \rho \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{h_1}{h_1-1} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+1}{\nu+1} & \text{eğer } \rho > \nu \geq 0 \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \nu = \rho \text{ ise;} \end{cases}$$

$n \geq 3$ için;

$$d_1 := \begin{cases} \frac{n+2}{\nu(2-n)+4} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+1}{\rho-\nu} & \text{eğer } \rho > \nu \geq 0 \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \nu = \rho \text{ ise;} \end{cases}$$

$$d_2 := \begin{cases} \frac{n+2}{(n-2)(\nu+1)} & \text{eğer } -1 < \nu < 0 \text{ ise;} \\ \frac{\rho+1}{\nu+1} & \text{eğer } \rho > \nu \geq 0 \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \nu = \rho \text{ ise;} \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} |\phi_2(x,u)|^{q_0}\, dx \le \|b^{q_0}\|_{L_{d_1}(\Omega)} \left\| \left| u^{q_0(\nu+1)} \right| \right\|_{L_{d_2}(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir.

Buradan

$$\int_{\Omega} |\phi_2(x,u)|^{q_0}\, dx \le \|b\|^{q_0}_{L_{d_1 q_0}(\Omega)} \|u\|^{q_0(\nu+1)}_{L_{d_2 q_0(\nu+1)}(\Omega)}$$

olur. Son eşitsizlikte d_1 ve d_2'nin tanımlarından

$$d_1 q_0 = r_1\ ,\ \ d_2 q_0 (\nu+1) = p_0$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\int_{\Omega} |\phi_1(x,u)|^{q_0}\, dx \le \|b\|^{q_0}_{L_{r_1}(\Omega)} \|u\|^{q_0(\nu+1)}_{L_{p_0}(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikten ϕ_2 dönüşümünün $L_{p_0}(\Omega)$'dan $L_{q_0}(\Omega)$'ya sınırlı dönüşüm olduğu açıktır.

(ii) $W_2^1(\Omega) \subset L_{p_0}(\Omega)$ ve $u_m \underset{W_2^1(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$ olduğundan zayıf yakınsaklık tanımından açıktır ki $u_m \underset{L_{p_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$' dır.

(iii) $\phi_1(x,\tau) = a(x)|\tau|^{\rho}\tau$ ve $\phi_2(x,\tau) = b(x)|\tau|^{\nu}\tau$ dönüşümlerinin tanımlarından açıktır ki hemen hemen her $x \in \Omega$ için τ'ya bağlı $\mathbb{R}^1$'den $\mathbb{R}^1$'e sürekli dönüşümlerdir.

(iv) $\{u_m\}$ zayıf yakınsak dizisi $W_2^1(\Omega)$'da sınırlı olduğundan ve $n=2$ için $1 \le s < \infty$, $n \ge 3$ için $1 \le s < \frac{2n}{n-2}$ olduğunda $W_2^1(\Omega) \subset L_s(\Omega)$ kompakt gömülmesi olduğundan $\exists \left\{u_{m_j}\right\} \subseteq \{u_m\}$ vardır ki

$$u_{m_j} \xrightarrow[L_s(\Omega)]{} u_0$$

dır.

Bu yakınsama ile Teorem 2.25 ve Önerme 2.24'ü gözönüne alırsak $\exists \left\{u_{m_{j_k}}\right\} \subseteq \left\{u_{m_j}\right\}$ vardır ki

$$u_{m_{j_k}} \xrightarrow[hhy]{\Omega} u_0$$

dır.

Böylece Lemma 2.25'in tüm koşullarının sağlandığını kanıtladık. O zaman Lemma 2.25' i uygularsak $\exists \{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ vardır öyle ki

$$\phi_1(x, u_{m_k}) \underset{L_{q_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} \phi_1(x, u_0)$$

ve

$$\phi_2(x, u_{m_k}) \underset{L_{q_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} \phi_2(x, u_0)$$

zayıf yakınsamaları sağlanır. Böylece ϕ_1 ve ϕ_2 dönüşümlerinin $L_{p_0}(\Omega)$' dan $L_{q_0}(\Omega)$' ya zayıf sürekli olduğunu gördük.

$$L_{q_o}(\Omega) \subset \left(W_2^1(\Omega)\right)^*$$

olduğundan

$$\phi_1(x, u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*}{\rightharpoonup} \phi_1(x, u_0)$$

ve

$$\phi_2(x, u_{m_k}) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^*}{\rightharpoonup} \phi_2(x, u_0)$$

zayıf yakınsamaları elde edilir.

Böylece $f_1 : W_2^1(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^*$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğu ispatlanmış oldu.

Şimdi $f_2 : W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğunu ispatlayalım:

Bu dönüşümün sınırlı olduğunu Lemma 3.3'de ispatlamıştık. Ayrıca doğrusal olduğundan sınırlılığı sürekliliğine denk gelir (bknz. Teorem 2.12). Buradan zayıf sürekliliği elde edilir (bknz. Teorem 2.13). ■

Lemma 3.5 *(3.1.1)' de tanımlanan f dönüşümü ve (3.1.2)'de tanımlanan g dönüşümü Teorem 3.2' nin koşulları altında $W_2^1(\Omega)$ üzerinde coercive ikili oluşturur.*

İspat. g dönüşümü birim dönüşüm olarak alındığından *coercive* ikilik bize f dönüşümünün $W_2^1(\Omega)$'da adi coercive olmasını verir.

Şimdi $\langle\, f(u), u \,\rangle$ dual formuna bakalım.

$$\langle f(u), u\rangle = \int\limits_{\Omega} (-\Delta u) u dx + \int\limits_{\Omega} u^2 dx + \int\limits_{\Omega} a(x) |u|^{\rho+2} dx - \int\limits_{\Omega} b(x) |u|^{\nu+2} dx$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} u dx' + \int\limits_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx'$$

Bu eşitliğin 1.terimine sınır koşullarını gözönüne alarak kısmi integrasyon uygular ve gerekli sadeleştirmeleri yaparsak;

$$\langle f(u), u\rangle = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_\Omega a(x)|u|^{\rho+2}dx - \int\limits_\Omega b(x)|u|^{\nu+2}dx$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx' \qquad (3.1.16)$$

elde edilir.

Buradan sonra Lemma'nın ispatını 3 farklı hal için yapacağız. (i) $-1<\nu<0$ olduğunda, (ii) $\rho>\nu\geq 0$ olduğunda ve (iii) $\nu=\rho$ olduğunda ayrı ayrı göstereceğiz.

(i) $-1<\nu<0$ olduğunda;

(3.1.16) eşitsizliğinde $a(x)\geq 0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \int\limits_\Omega b(x)|u|^{\nu+2}dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx'$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin 2. terimine Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \|b\|_{L_{d_1}(\Omega)}\left\||u|^{\nu+2}\right\|_{L_{d_2}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx'$$

Burada

$$d_1 := r_1,\ d_2 := \frac{r_1}{r_1-1}$$

dir.

Son eşitsizlikten

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - \|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}\|u\|^{\nu+2}_{L_{\frac{r_1}{r_1-1}(\nu+2)}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx'$$

elde edilir.

Bu eşitsizliğin 2. teriminde $n=2$ iken keyfi $p\geq 1$ için $W_2^1(\Omega)\subset L_p(\Omega)$ gömülmesini, $n\geq 3$ iken $-1<\nu<0$ olduğunda $\frac{r_1}{r_1-1}(\nu+2)=\frac{2n}{n-2}$ olduğundan $W_2^1(\Omega)\subset L_{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ gömülmesini, $\nu\geq 0$ olduğunda $\frac{r_1}{r_1-1}(\nu+2)=\rho+2$ olduğundan $W_2^1(\Omega)\subset L_{\rho+2}(\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c_2^{\nu+2}\|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}\|u\|^{\nu+2}_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx'$$

olur.(c_2 sayısı (2.2) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

Son eşitsizliğin 2. terimine $-1 < \nu < 0$ olduğunu gözönüne alarak $\frac{2}{\nu+2}$ ve $\frac{-2}{\nu}$ katsayıları ile ε-Young eşitsizliğini uygularsak ;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}} - \varepsilon \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx' \qquad (3.1.17)$$

elde edilir.

Burada

$$\frac{\nu+2}{2} - \frac{\nu}{2} = 1, \; B := c_2^{\nu+2} \|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}$$

dır.

$k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (a) durumu sağlanıyor ise (3.1.17)'den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\langle f(u), u\rangle \geq (1-\varepsilon) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}}$$

Son eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ 'ya bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \geq (1-\varepsilon) \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \frac{c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}}}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \qquad (3.1.18)$$

elde edilir.

$k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (b) durumu sağlanıyor ise 3.1.17 eşitsizliğinin son terimine Hölder eşitsizliğini uygular ve farka geçersek;

$$\langle\ f(u), u\ \rangle \geq\ (1-\varepsilon) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}} - \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{L_{\frac{2q_1}{q_1-1}}(\partial\Omega)}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizliğin son terimi için $n = 2$ iken keyfi $p \geq 1$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_p(\partial\Omega)$ gömülmesini, $n \geq 3$ iken $\frac{2q_1}{q_1-1} = \frac{2n-2}{n-2}$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq (1-\varepsilon) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}} - c^2 \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

olur. (c sayısı (2.3) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

Buradan

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(1 - c^2 \|k\|_{Lq_1(\partial\Omega)} - \varepsilon\right) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}}$$

elde edilir.

Bu eşitsizlikte $\|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} \leq k_0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(1 - c^2 k_0 - \varepsilon\right) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}}$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ 'ya bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \geq \left(1 - c^2 k_0 - \varepsilon\right) \|u\|_{W_2^1(\Omega)} - \frac{c(\varepsilon) B^{-\frac{2}{\nu}}}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \tag{3.1.19}$$

olur.

3.1.18 eşitsizliğinde ki ε'u $0 < \varepsilon < 1$ olacak şekilde ve 3.1.19 eşitsizliğinde ki ε'u Teorem 3.2'nin (2)-b koşulunu gözönüne alarak $0 < \varepsilon < 1 - c^2 k_o$ olacak şekilde aldığımızda; (3.1.18) ve (3.1.19) eşitsizliklerinden açıktır ki

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle\, f(u), u\,\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olur.

(ii) $0 \leq \nu < \rho$ olduğunda;

(3.1.16) eşitsizliğinde $a(x) \geq a_0 > 0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + a_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - \int\limits_{\Omega} b(x) |u|^{\nu+2} dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx'$$

olur. Bu eşitsizliğin 3. terimine Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + a_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - \|b\|_{L_{d_1}(\Omega)} \left\||u|^{\nu+2}\right\|_{L_{d_2}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx'$$

olur. Burada

$$d_1 := r_1,\ d_2 := \frac{\rho+2}{\nu+2}, \left(\frac{1}{r_1} + \frac{\nu+2}{\rho+2} = 1\right)$$

dir. Son eşitsizlikten;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + a_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - \|b\|_{L_{r_1}(\Omega)} \|u\|^{\nu+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx'$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin 3. terimine $\frac{\rho+2}{\rho-\nu}$ ve $\frac{\rho+2}{\nu+2}$ katsayıları ile $\varepsilon < a_0$ olacak şekilde Young eşitsizliğini uygularsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')\,u^2 dx'$$

$$a_0 - \varepsilon > 0$$

olduğundan

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')\,u^2 dx' \qquad (3.1.20)$$

olur.

$k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (a) durumu sağlanıyor ise 3.1.20' den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)}$$

Son eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ 'ya bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \geq \|u\|_{W_2^1(\Omega)} - \frac{c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)}}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \qquad (3.1.21)$$

elde edilir.

$k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (b) durumu sağlanıyor ise 3.1.20 eşitsizliğinin son terimine Hölder eşitsizliğini uygular ve farka geçersek;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2q_1}{q_1-1}}(\partial\Omega)}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizliğin son terimi için $n = 2$ iken keyfi $p \geq 1$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_p(\partial\Omega)$ gömülmesini, $n \geq 3$ iken $\frac{2q_1}{q_1-1} = \frac{2n-2}{n-2}$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - c^2\|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

olur.(c sayısı (2.3) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

Buradan

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(1 - c^2\|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)}\right)\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ 'ya bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \geq \left(1 - c^2 \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)}\right) \|u\|_{W_2^1(\Omega)} - \frac{c(\varepsilon)\|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \tag{3.1.22}$$

olur.

Teorem 3.2' nin koşullarını da gözönüne alırsak (3.1.21) ve (3.1.22) eşitsizliklerinden açıktır ki

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olur.

(iii) $\nu = \rho$ olduğunda;

(3.1.16) eşitsizliğinde $\nu = \rho$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle = \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} (a(x) - b(x)) |u|^{\rho+2} dx + \int_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx'$$

olur.

Burada $a(x) - b(x) \geq 0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx' \tag{3.1.23}$$

olur.

$k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (a) durumu sağlanıyor ise 3.1.23'den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2$$

olur. Son eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$' ya bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \geq \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.1.24}$$

elde edilir.

$k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (b) durumu sağlanıyor ise 3.1.23 eşitsizliğinin son terimine Hölder eşitsizliğini uygular ve farka geçersek;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 - \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} \|u\|_{L_{\frac{2q_1}{q_1-1}}(\partial\Omega)}^2$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Bu eşitsizliğin son terimi için $n = 2$ iken keyfi $p \geq 1$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_p(\partial\Omega)$ gömülmesini, $n \geq 3$ iken $\frac{2q_1}{q_1-1} = \frac{2n-2}{n-2}$ olduğundan $W_2^1(\Omega) \subset L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)$ gömülmesini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c^2 \|k\|_{Lq_1(\partial\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

olur.(c sayısı (2.3) eşitsizliğindeki katsayıdır.)

Buradan

$$\langle f(u), u\rangle \geq \left(1 - c^2 \|k\|_{Lq_1(\partial\Omega)}\right) \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

elde edilir. Son eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ 'ya bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \geq \left(1 - c^2 \|k\|_{Lq_1(\partial\Omega)}\right) \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \tag{3.1.25}$$

olur.

Teorem 3.2'nin koşullarını da gözönüne alırsak (3.1.24) ve (3.1.25) eşitsizliklerinden açıktır ki

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olur.

Böylece f dönüşümünün Teorem 3.2'nin koşulları altında $W_2^1(\Omega)$'da *coercive* olduğunu ispatladık. ■

Not 3.6 (3.1.2)*' de tanımlanan g dönüşümü sınırlıdır ve g^{-1} dönüşümü zayıf süreklidir.*

g dönüşümü birim dönüşüm olarak alındığından sınırlıdır, tersi vardır ve o da sınırlıdır. Ayrıca g^{-1} doğrusal olduğundan sınırlılığından sürekliliği buradan da zayıf sürekliliği elde edilir.

Teorem 3.2'nin ispatı.

Lemma 3.3, Lemma 3.4, Lemma 3.5, ve Not 3.6'dan görülmektedir ki (3.1.1)'de tanımlanan f dönüşümü ile (3.1.2)'de tanımlanan g dönüşümü Teorem 2.16'nın tüm koşullarını sağlar. O halde Teorem 2.16'yı $(1.1)-(1.2)$ problemine uygularsak;

$$\int\limits_{\Omega}\left(-\Delta u+u+a\left(x\right)\left|u\right|^{\rho}u-b\left(x\right)\left|u\right|^{\nu}u\right)vdx+\int\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+k\left(x'\right)u\right)vdx'$$

$$=\int\limits_{\Omega}hvdx+\int\limits_{\partial\Omega}\varphi vdx',\forall v\in W_2^1\left(\Omega\right)$$

denkleminin

$$M=\left\{(h,\varphi)\in\left(W_2^1(\Omega)\right)^*\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega):\sup\left\{\frac{\langle h,u\rangle+\langle\varphi,u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}}:u\in W_2^1(\Omega)\right\}<\infty\right\}$$

olmak üzere keyfi $(h,\varphi)\in M$ için $W_2^1(\Omega)$'da çözümü vardır.

$$\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^*}=\sup\left\{\frac{\langle h,u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)}}:u\in W_2^1(\Omega)\right\}$$

$$\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}=\sup\left\{\frac{\langle\varphi,u\rangle}{\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}}:u\in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right\}$$

olduğundan

$$M=\left\{(h,\varphi)\in\left(W_2^1(\Omega)\right)^*\times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega):\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^*}+\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}<\infty\right\}$$

olur. O halde Teorem 2.16'yı $(1.1)-(1.2)$ problemine uygulayarak elde ediyoruz ki Teorem 3.2 'nin koşulları altında $\forall h\in(W_2^1(\Omega))^*$, $\forall\varphi\in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $(1.1)-(1.2)$ probleminin $W_2^1(\Omega)$'da genelleşmiş çözümü vardır. ∎

3.2 KRİTİK ÜSTÜ DURUMDA (1.1)-(1.2) PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI

Bu kısımda $\rho > \frac{4}{n-2}$ $(n \geq 3)$ kritik üstü durumu gözönüne alınacaktır. Bu durumda (3.2) koşulundaki p_1, r_1 parametreleri aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

$$p_1 := \infty, \; r_1 := \begin{cases} \frac{\rho+2}{\rho-\nu}, & \text{eğer } \nu < \rho \text{ ise;} \\ \infty, & \text{eğer } \nu = \rho \text{ ise;} \end{cases}$$

(3.2) koşulunu yukarıdaki parametrelerle birlikte $(3.2'')$ olarak adlandıracağız.

$(3.2'')$ ve (3.3) koşulları altında Tanımda verilen (3.4) eşitliğindeki her terim keyfi $u, v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için anlamlıdır.

Teorem 3.7 *$\rho > \dfrac{4}{n-2}$, $-1 < \nu \leq \rho$ ve $n \geq 3$ olmak üzere* (3.1), $(3.2'')$, (3.3) *koşulları sağlansın.*

İlave olarak aşağıdaki koşullar sağlansın.

(1) *$\rho > \nu > -1$ olduğunda öyle $a_0 > 0$ sayısı vardır ki keyfi $x \in \Omega$ için $a(x) \geq a_0$'dır. Eğer $\nu = \rho$ ise öyle $b_0 > 0$ sayısı vardır ki keyfi $x \in \Omega$ için $a(x) - b(x) \geq b_0$ 'dır.*

(2) *k fonksiyonu aşağıdaki koşullardan birini sağlasın.*

- *(a)* *Keyfi $x' \in \partial\Omega$ için $k(x') \geq 0$' dır.*
- *(b)* *Öyle $k_0 > 0$ sayısı vardır ki $\|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} \leq k_0 < \dfrac{1}{c^2}$ eşitsizliği sağlanır.*
  (c sayısı (2.3) *eşitsizliğindeki katsayıdır.)*

Bu taktirde $\forall h \in (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ ve $\forall \varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $(1.1) - (1.2)$ *probleminin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da genelleşmiş çözümü vardır.*

Teorem 3.7'nin ispatı için Teorem 2.16'yı kullanacağız. Bunun için $(1.1) - (1.2)$ probleminin yarattığı dönüşümleri ve uygun uzayları tanımlayalım.

$$f :\equiv \{f_1, f_2\} : S_0 \longrightarrow Y \tag{3.2.1}$$

$$S_0 :\equiv W_2^1(\Omega) \cap \; L_{\rho+2}(\Omega), \qquad Y :\equiv ((W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \;) \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

$$g :\equiv \{g_1, g_2\} : W_2^1(\Omega) \cap\ L_{\rho+2}(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega) \cap\ L_{\rho+2}(\Omega)) \times W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \qquad (3.2.2)$$

$$X_0 \equiv S_0,\ Y_0^* \equiv Y^*$$

$$f_1(u) := -\Delta u + u + a(x)|u|^\rho u - b(x)|u|^\nu u$$

$$f_2(u) := \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x')u\right)\Big|_{\partial\Omega}$$

$$g := Id$$

$W_2^1(\Omega)$ ve $L_{\rho+2}(\Omega)$ refleksif, ayrılabilir, *Banach* uzayları olduğundan Teorem 2.16'nın koşulları için uygundur. Gerekli uzayları ve dönüşümleri belirledik. Şimdi bu dönüşümlerin Teorem 2.16'nın koşullarını sağladığını görmek için gerekli lemmaları ispatlayacağız.

Lemma 3.8 (3.2.1) *'de tanımlanan f dönüşümü $W_2^1(\Omega) \cap\ L_{\rho+2}(\Omega)$ ' dan $((W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)\ ) \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ' ya Teorem 3.7' nin koşulları altında zayıf sürekli bir dönüşümdür.*

İspat. $f \equiv \{f_1, f_2\}$ olduğundan f_1 ve f_2 dönüşümlerinin zayıf sürekliliğine ayrı ayrı bakacağız.

Önce

$$f_1 : W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$$

dönüşümünün zayıf sürekli dönüşüm olduğunu görelim. Bu dönüşümün doğrusal kısmının ve doğrusal olmayan kısmının zayıf sürekliliğini sırasıyla göstereceğiz.

$$\widetilde{f_1} : W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega) \longrightarrow (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$$

olmak üzere;

$$\widetilde{f_1}(u) := -\Delta u + u$$

olsun. Önce bu dönüşümün sınırlı olduğunu görelim. $\widetilde{f_1}$ operatörünü değerlendirmek için $(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$'daki norm tanımını kullanacağız.

$u, v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ olsun;

$$\|f_1(u)\|_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)} \equiv \sup_{\|v\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} \leq 1} |\langle f_1(u), v\rangle| \tag{3.2.3}$$

şeklindedir.

3.1 Bölümündeki değerlendirmelerden;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq \left(2 + c_1^2\right) \|u\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}$$

alınır. $\forall u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için $\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq \left(2 + c_1^2\right) \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$$

olur. Eğer

$$\widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}\right) := \left(2 + c_1^2\right) \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$$

dersek

$$|\langle f_1(u), v\rangle| \leq \widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}\right) \|v\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$$

olur.

Son eşitsizlik keyfi $u, v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için var olduğundan $\|v\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} \leq 1$ üzerinde supremum için de geçerlidir. O zaman (3.2.3)' e göre

$$\|f_1(u)\|_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)} \leq \widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}\right)$$

olur.

$\widetilde{c}(.)$ monoton artan, sürekli fonksiyon olduğundan
$\forall u \in B(0, r) \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için;

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} \leq r$$

iken

$$\widetilde{c}\left(\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}\right) \leq \widetilde{c}(r)$$

olur ve böylece

$$\|f_1(u)\|_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)} \leq \widetilde{c}(r)$$

bulunur.

Böylece $\widetilde{f_1}$ dönüşümünün verilen uzaylarda sınırlı bir dönüşüm olduğunu ispatladık. Ayrıca bu dönüşüm doğrusal olduğundan sınırlılığı sürekliliğine denk gelir. Buradan zayıf sürekliliği elde edilir.

Şimdi doğrusal olmayan kısmın zayıf sürekliliğini görelim. Burada zayıf süreklilik tanımını kullanacağız. Bunun için $u_0 \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'ya bu uzayda zayıf yakınsayan keyfi $\{u_m\} \subset W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ dizisi ($u_m \underset{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$) için

$$a(x)|u_{m_k}|^{\rho} u_{m_k} - b(x)|u_{m_k}|^{\nu} u_{m_k} \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}{\rightharpoonup} a(x)|u_0|^{\rho} u_0 - b(x)|u_0|^{\nu} u_0 \qquad (*)$$

olacak şekilde $\exists \{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ bulmak yeterlidir.

$[W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)] \subset L_{\rho+2}(\Omega)$ ve $L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \subset [(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)]$ olduğundan (*) zayıf yakınsamasının önce $L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$'da sağlandığını göstereceğiz. Bunun için Lemma 2.25'i kullanacağız. Şimdi uygun dönüşümü tanımlayıp dönüşüme Lemma 2.25'i uygulayalım.

$$\phi : [W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)] \subset L_{\rho+2}(\Omega) \longrightarrow L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega) \subset [(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)]$$

$$\phi(x,u) = a(x)|u|^{\rho} u - b(x)|u|^{\nu} u$$

Bu dönüşüm için Lemma 2.25'in koşullarının sağlandığını sırasıyla görelim.

(i) $\phi : [W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)] \subset L_{\rho+2}(\Omega) \longrightarrow L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$ dönüşümünün sınırlı olduğunu görelim:

$\forall u \in L_{\rho+2}(\Omega)$ için aşağıdaki integrali değerlendirelim.

$$\int_{\Omega} |\phi(x,u)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx = \int_{\Omega} \left|a(x)|u|^{\rho} u - b(x)|u|^{\nu} u\right|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx$$

$$\leq \int_{\Omega} 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \left(\left|a(x)|u|^{\rho} u\right|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} + \left|b(x)|u|^{\nu} u\right|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}}\right) dx$$

buradan

$$\int_{\Omega} |\phi(x,u)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx \leq 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \left[\int_{\Omega} (a(x))^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} |u|^{\rho+2} dx + \int_{\Omega} (b(x))^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} |u|^{\frac{(\rho+2)(\nu+1)}{\rho+1}} dx\right]$$

Bu eşitsizliğin 1.terimi için $d_1 := \infty$, $d_2 := 1$ olacak şekilde Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\int_{\Omega} |\phi(x,u)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx \leq 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|a\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \int_{\Omega} (b(x))^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} |u|^{\frac{(\rho+2)(\nu+1)}{\rho+1}} dx$$

olur. 2. terim için de

$$d_1 := \begin{cases} \frac{\rho+1}{\rho-\nu} & \text{eğer } \nu < \rho \text{ ise;} \\ \infty & \text{eğer } \nu = \rho \text{ ise;} \end{cases}$$

ve

$$d_2 := \begin{cases} \frac{\rho+1}{\nu+1} & \text{eğer } \nu < \rho \text{ ise;} \\ 1 & \text{eğer } \nu = \rho \text{ ise;} \end{cases}$$

olacak şekilde Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\int\limits_{\Omega} |\phi(x,u)|^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} dx \leq 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|a\|_{L_{p_1}(\Omega)}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)}^{\rho+2} + 2^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}^{\frac{\rho+2}{\rho+1}} \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)}^{\frac{(\rho+2)(\nu+1)}{\rho+1}}$$

olur. Bu eşitsizlikten ϕ dönüşümünün sınırlı olduğu açıktır.

(ii) $\phi(x,\tau) = a(x)|\tau|^{\rho}\tau + b(x)|\tau|^{\nu}\tau$ dönüşümünün tanımından açıktır ki hemen hemen her $x \in \Omega$ için τ'ya bağlı $\mathbb{R}^1$'den $\mathbb{R}^1$'e süreklidir.

(iii)

$$u_m \underset{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$$

olduğundan ve $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega) \subset L_{\rho+2}(\Omega)$ olduğundan

$$u_m \underset{L_{\rho+2}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$$

olur.

(iv) $u_m \underset{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$ olduğundan ve $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ olduğundan;

$$u_m \underset{W_2^1(\Omega)}{\rightharpoonup} u_0$$

olur.

$\{u_m\}$ zayıf yakınsak dizisi $W_2^1(\Omega)$'da sınırlı olduğundan ve $1 \leq s < \frac{2n}{n-2}$ için $W_2^1(\Omega) \subset L_s(\Omega)$ kompakt gömülmesi olduğundan $\exists \left\{u_{m_j}\right\} \subseteq \{u_m\}$ vardır ki

$$u_{m_j} \underset{L_s(\Omega)}{\longrightarrow} u_0$$

dır.

Bu yakınsama ile Teorem 2.25 ve Önerme 2.24'ü gözönüne alırsak

$\exists \left\{ u_{m_{j_k}} \right\} \subseteq \{u_{m_j}\}$ vardır ki

$$u_{m_{j_k}} \xrightarrow[hhy]{\Omega} u_0$$

dır.

Böylece Lemma 2.25'in tüm koşullarının sağlandığını kanıtladık. O zaman Lemma 2.25' i uygularsak $\exists \{u_{m_k}\} \subseteq \{u_m\}$ vardır öyle ki

$$\phi\left(x, u_{m_k}\right) \underset{L_{q_0}(\Omega)}{\rightharpoonup} \phi_1\left(x, u_0\right)$$

$$L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}\left(\Omega\right) \subset \left(W_2^1\left(\Omega\right)\right)^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}\left(\Omega\right)$$

olduğundan;

$$\phi\left(x, u_{m_k}\right) \underset{\left(W_2^1(\Omega)\right)^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)}{\rightharpoonup} \phi\left(x, u_0\right)$$

olur. Böylece $f_1 : W_2^1\left(\Omega\right) \cap L_{\rho+2}\left(\Omega\right) \longrightarrow \left(W_2^1\left(\Omega\right)\right)^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}\left(\Omega\right)$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğu ispatlanmış oldu.

Şimdi $f_2 : W_2^1\left(\Omega\right) \cap L_{\rho+2}\left(\Omega\right) \longrightarrow W_2^{-\frac{1}{2}}\left(\partial\Omega\right)$ dönüşümünün zayıf sürekli olduğunu görelim.

Bunun için önce dönüşümün verilen uzaylarda sınırlı olduğunu göstereceğiz.

$u \in W_2^1\left(\Omega\right) \cap L_{\rho+2}\left(\Omega\right)$ ise $u|_{\partial\Omega} \in W_2^{\frac{1}{2}}\left(\partial\Omega\right)$ olduğundan f_2 dönüşümünün sınırlılığını $W_2^{\frac{1}{2}}\left(\partial\Omega\right)$'dan $W_2^{-\frac{1}{2}}\left(\partial\Omega\right)$'ya gösterelim.

Bu dönüşümün sınırlı olduğunu Lemma 3.3'de ispatlamıştık. Ayrıca doğrusal olduğundan sınırlılığı sürekliliğine denk gelir (bknz. Teorem 2.12). Buradan zayıf sürekliliği elde edilir (bknz. Teorem 2.13). ■

Lemma 3.9 *(3.2.1)'de tanımlanan f dönüşümü ve (3.2.2)'de tanımlanan g dönüşümü Teorem 3.7'nin koşulları altında* $W_2^1\left(\Omega\right) \cap L_{\rho+2}\left(\Omega\right)$ *üzerinde coercive ikili oluşturur.*

İspat. g dönüşümü birim dönüşüm olarak alındığından coercive ikilik bize f dönüşümünün $W_2^1\left(\Omega\right) \cap L_{\rho+2}\left(\Omega\right)$'da adi anlamda *coercive* olmasını verir.

Şimdi $\langle\, f\left(u\right), u\,\rangle$ dual formuna bakalım.

$$\langle f\left(u\right), u\rangle = \int_{\Omega} (-\Delta u) u dx + \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} a\left(x\right) |u|^{\rho+2} dx - \int_{\Omega} b\left(x\right) |u|^{\nu+2} dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} u dx' + \int_{\partial\Omega} k\left(x'\right) u^2 dx'$$

Bölüm 3.1' den

$$\langle f(u), u\rangle = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_\Omega a(x)|u|^{\rho+2}dx - \int\limits_\Omega b(x)|u|^{\nu+2}dx$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx' \tag{3.2.3}$$

olduğunu biliyoruz.

Buradan sonra Lemma'nın ispatını 2 farklı hal için yapacağız. (i) $-1<\nu<\rho$ olduğunda ve (ii) $\nu=\rho$ olduğunda ayrı ayrı göstereceğiz.

(i) $-1<\nu<\rho$ olduğunda;

(3.2.3) eşitsizliğinde $a(x)\geq a_0>0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + a_0\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - \int\limits_\Omega b(x)|u|^{\nu+2}dx$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx' \tag{3.2.4}$$

olur. Bu eşitsizliğin 3.terimi için

$$d_1 := r_1 \text{ ve } d_2 := \frac{\rho+2}{\nu+2}$$

olacak şekilde Hölder eşitsizliğini uygularsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + a_0\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - \|b\|_{L_{r_1}(\Omega)}\|u\|^{\nu+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx'$$

burada

$$\frac{1}{r_1}+\frac{\nu+2}{\rho+2}=1$$

dir.

Yine bu eşitsizliğin 3.terimi için

$$d_1 := r_1,\ d_2 := \frac{\rho+2}{\nu+2} \text{ ve } \varepsilon<a_0$$

olacak şekilde Young eşitsizliğini uygularsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)}$$
$$+\int\limits_{\partial\Omega} k(x')u^2dx' \tag{3.2.5}$$

olur. $k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (a) durumu sağlanıyor ise (3.2.5) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)}$$

$\forall u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için:

$$\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} \geq \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - 1$$

olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

olur. Eğer

$$\theta := \min\{a_0-\varepsilon, 1\}$$

dersek

$$\langle f(u), u\rangle \geq \theta(\ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)}) - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

olur. Bu eşitsizliğin 1. terimi için (2.0) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

buradan

$$\langle f(u), u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$'a bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \geq \frac{\theta}{2}(\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}) - \frac{c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \tag{3.2.6}$$

olur.

$k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (b) durumu sağlanıyor ise (3.2.5) eşitsizliğinin son terimine Hölder eşitsizliğini uygular ve farka geçersek;

$$\langle f(u), u\rangle \geq\ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin son terimi için (2.3) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq\ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - c^2\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

olur. Buradan

$$\langle f(u),u\rangle \geq (1-c^2\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)})\ \|u\|^{\rho+2}_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)}$$

olur. $\forall u \in W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için

$$\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} \geq \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - 1$$

olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u),u\rangle \geq (1-c^2\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)})\ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)\|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

Eğer

$$\theta := \min\left\{a_0-\varepsilon, 1-c^2\|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right\}$$

dersek

$$\langle f(u),u\rangle \geq \theta(\ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)}) - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

olur. Bu eşitsizliğin 1. terimi için (2.0) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u),u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

buradan

$$\langle f(u),u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} - (a_0-\varepsilon)$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$'a bölersek;

$$\frac{\langle f(u),u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \geq \frac{\theta}{2}\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} - \frac{c(\varepsilon)\|b\|^{\frac{\rho+2}{\rho-\nu}}_{L_{r_1}(\Omega)} + (a_0-\varepsilon)}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \tag{3.2.7}$$

Teorem 3.7'nin koşullarını da gözönüne alırsak (3.2.6) ve (3.2.7) eşitsizliklerinden açıktır ki

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u),u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olur.

(ii) $\nu = \rho$ olduğunda;

(3.2.3) eşitliğinde $\nu = \rho$ alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle = \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\Omega} (a(x) - b(x)) |u|^{\rho+2} dx + \int\limits_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx'$$

olur.

Burada $a(x) - b(x) \geq b_0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + b_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x') u^2 dx' \qquad (3.2.8)$$

Eğer $k(x')$ fonksiyonu için (2) koşulunun (a) durumu sağlanıyor ise (3.2.8) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir.

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + b_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}$$

$\forall u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için:

$$\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} \geq \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - 1$$

olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + b_0 \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - b_0$$

olur. Eğer

$$\theta := \min\{b_0, 1\}$$

dersek

$$\langle f(u), u\rangle \geq \theta(\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)}) - b_0$$

olur. Bu eşitsizliğin 1. terimi için (2.0) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - b_0$$

buradan

$$\langle f(u), u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - b_0$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$'a bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \geq \frac{\theta}{2} \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} - \frac{b_0}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \qquad (3.2.9)$$

olur.

(3.2.8) eşitsizliğinin son terimi için (2) koşulunun (b) durumu sağlanıyor ise bu eşitsizliğin son terimi için Hölder eşitsizliğini uygular ve farka geçersek;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + b_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{L_{\frac{2n-2}{n-2}}(\partial\Omega)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin son terimi için (2.3) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + b_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} - c^2 \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

olur. Buradan

$$\langle f(u), u\rangle \geq (1 - c^2 \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}) \ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + b_0 \|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)}$$

olur. $\forall u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$ için:

$$\|u\|^{\rho+2}_{L_{\rho+2}(\Omega)} \geq \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - 1$$

olduğunu gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \ (1 - c^2 \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}) \ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + b_0 \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)} - b_0$$

olur. Eğer

$$\theta := \min\left\{b_0, 1 - c^2 \|k\|_{L_{n-1}(\partial\Omega)}\right\}$$

dersek

$$\langle f(u), u\rangle \geq \theta(\ \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|^2_{L_{\rho+2}(\Omega)}) - b_0$$

olur. Bu eşitsizliğin 1. terimi için (2.0) eşitsizliğini gözönüne alırsak;

$$\langle f(u), u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|u\|_{L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - b_0$$

buradan

$$\langle f(u), u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\ \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)})^2 - b_0$$

olur. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}$'a bölersek;

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \geq \frac{\theta}{2} \|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} - \frac{b_0}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \tag{3.2.10}$$

olur.

Teorem 3.7'nin koşullarını da gözönüne alırsak (3.2.9) ve (3.2.10) eşitsizliklerinden açıktır ki

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)} \nearrow \infty$$

iken

$$\frac{\langle f(u), u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} \nearrow \infty$$

olur.

Böylece f dönüşümünün Teorem 3.7'nin koşulları altında $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da *coercive* olduğunu ispatladık. ■

Not 3.10 (3.2.2)*' de tanımlanan g dönüşümü sınırlıdır ve g^{-1} dönüşümü zayıf süreklidir.*

g dönüşümü birim dönüşüm olarak alındığından sınırlıdır, tersi vardır ve o da sınırlıdır. Ayrıca g^{-1} doğrusal olduğundan sınırlılığından sürekliliği buradan da zayıf sürekliliği elde edilir.

Teorem 3.7'nin ispatı.

Lemma 3.8, Lemma 3.9, ve Not 3.10'dan görülmektedir ki (3.2.1)'de tanımlanan f dönüşümü ile (3.2.2)'de tanımlanan g dönüşümü Teorem 2.16'nın tüm koşullarını sağlar. O halde Teorem 2.16'yı $(1.1)-(1.2)$ problemine uygularsak;

$$\int_\Omega \left(-\Delta u + u + a(x)|u|^\rho u - b(x)|u|^\nu u\right) v dx + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x')u\right) v dx'$$

$$= \int_\Omega h v dx + \int_{\partial\Omega} \varphi v dx', \forall v \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$$

denkleminin

$$M = \{(h,\varphi) \in (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)) \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) :$$
$$\sup\{\frac{\langle h,u\rangle + \langle \varphi, u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} : u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)\} < \infty\}$$

olmak üzere keyfi $(h,\varphi) \in M$ için $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da çözümü vardır.

$$\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)} = \sup\left\{\frac{\langle h,u\rangle}{\|u\|_{W_2^1(\Omega)\cap L_{\rho+2}(\Omega)}} : u \in W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)\right\}$$

$$\|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} = \sup\left\{\frac{\langle \varphi,u\rangle}{\|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)}} : u \in W_2^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)\right\}$$

olduğundan

$$M = \{(h, \varphi) \in ((W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)) \times W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) :$$

$$\|h\|_{(W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} < \infty\}$$

olur. O halde Teorem 2.16'yı $(1.1) - (1.2)$ problemine uygulayarak elde ediyoruz ki Teorem 3.7'nin koşulları altında $\forall h \in (W_2^1(\Omega))^* + L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}(\Omega)$,$\forall \varphi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ için $(1.1) - (1.2)$ probleminin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'da genelleşmiş çözümü vardır. ■

3.3 (1.1)-(1.2) PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN TEKLİĞİ ÜZERİNE

Bu kısımda (1.1)-(1.2) probleminin $n \geq 2$ için $\nu = \rho > -1$ olduğunda $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'dan olan çözümünün varsa tek olduğunu göstereceğiz.

Teorem 3.11 (1.1).(1.2) *probleminin* $\nu = \rho > -1$ *olduğunda* $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$*'dan olan çözümü aşağıdaki koşullar sağlandığında varsa tektir.*

(1) $\forall x \in \Omega$ *için* $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq 0$ *olmak üzere* $a(x) \geq b(x)$*'dir.*

(2) $q_1 := \begin{cases} > 1, & \text{eğer } n = 2 \text{ ise;} \\ n-1, & \text{eğer } n \geq 3 \text{ ise;} \end{cases}$ *olmak üzere* $k \in L_{q_1}(\partial\Omega)$ *fonksiyonu aşağıdaki koşullardan birini sağlasın.*

(a) $\forall x' \in \partial\Omega$ *için* $k(x') \geq 0$*' dır.*

(b) $\|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} < \dfrac{1}{c^2}$ *eşitsizliği sağlanır.*
(c sayısı (2.3) *eşitsizliğindeki katsayıdır.)*

İspat. Kabul edelim ki u, v fonksiyonları $(1.1)-(1.2)$ probleminin iki farklı çözümü olsunlar. O zaman

$$-\Delta u + u + a(x)\,|u|^\rho\, u - b(x)\,|u|^\rho\, u = h(x) \tag{3.2.11}$$

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x')u\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x') \tag{3.2.12}$$

ve

$$-\Delta v + v + a(x)\,|v|^\rho\, v - b(x)\,|v|^\rho\, v = h(x) \tag{3.2.13}$$

$$\left.\left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + k(x')v\right)\right|_{\partial\Omega} = \varphi(x') \tag{3.2.14}$$

eşitlikleri sağlanır. O zaman aşağıdaki eşitlikler vardır.

$$-\Delta u + u + a(x)\,|u|^\rho\, u - b(x)\,|u|^\rho\, u = -\Delta v + v + a(x)\,|v|^\rho\, v - b(x)\,|v|^\rho\, v$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} + k(x')u = \frac{\partial v}{\partial \eta} + k(x')v$$

Eğer

$$w = u - v$$

dersek bu iki eşitlikten aşağıdaki problemi elde ederiz.

$$-\Delta w + w + (a(x) - b(x))(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) = 0 \tag{3.2.15}$$

$$\left.\left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + k(x')w\right)\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{3.2.16}$$

Şimdi bu problemin sıfırdan farklı bir çözümü olamayacağını gösterelim. Kabul edelim ki w bu problemin sıfırdan farklı bir çözümü olsun.

(3.2.15)'ten;

$$\langle -\Delta w + w + (a(x) - b(x))(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v), w\rangle = 0$$

ve

$$\int\limits_{\Omega} (-\Delta w) w dx + \int\limits_{\Omega} w^2 dx + \int\limits_{\Omega} (a(x) - b(x))(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) w dx = 0$$

olur.

Bu eşitliğin 1.terimine kısmi integrasyon uygularsak;

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla w)^2 dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} w dx' + \int\limits_{\Omega} w^2 dx + \int\limits_{\Omega} (a(x) - b(x))(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) w dx = 0 \tag{3.2.17}$$

olur.

(3.2.16)'dan dolayı

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} = -k(x')w$$

olur. Bu eşitliği (3.2.17)'de gözönüe alırsak;

$$\int\limits_{\Omega} (\nabla w)^2 dx + \int\limits_{\Omega} w^2 dx + \int\limits_{\partial\Omega} k\left(x'\right) w^2 dx' + \int\limits_{\Omega} (a(x) - b(x))(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) w dx = 0 \tag{3.2.18}$$

elde edilir.

(3.2.18) eşitliğinin 4. teriminde $a\left(x\right) - b\left(x\right) \geq 0$ ve $(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v)w \geq 0$ olduğunu gözönüne alırsak;

$$\int\limits_{\Omega} (a(x) - b(x))(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) w dx \geq 0$$

olur. O zaman

$$\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k\left(x'\right) w^2 dx + \int\limits_{\Omega} (a(x) - b(x))(|u|^{\rho} u - |v|^{\rho} v) w dx$$

$$\geq \|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')\, w^2 dx \tag{3.2.19}$$

elde edilir. Eğer $k(x')$ fonksiyonu Teorem 'in (2)-(a) koşulunu sağlıyorsa:

$$\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')\, w^2 dx > 0 \tag{3.2.20}$$

olur. Eğer $k(x')$ fonksiyonu Teorem 'in (2)-(b) koşulunu sağlıyorsa (3.2.19) eşitliğinin 2. terimine Hölder eşitsizliğini uygulayıp farka geçer ve (2.3) eşitsizliğini kullanırsak:

$$\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')\, w^2 dx \geq \|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} - c^2 \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)} \|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \left(1 - c^2 \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)}\right) \|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}$$

olur .

$$\frac{1}{c^2} > \|k\|_{L_{q_1}(\partial\Omega)}$$

olduğundan

$$\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)} + \int\limits_{\partial\Omega} k(x')\, w^2 dx > 0 \tag{3.2.21}$$

olur.

(3.2.20) ve (3.2.21) eşitsizlikleri (3.2.17) eşitliğinin sıfır olması ile çelişir. O zaman $(3.2.15) - (3.2.16)$ probleminin sıfırdan farklı çözümü olamaz. O halde $w = 0$ olmalıdır. Bu da gözönüne alınan durumda $(1.1) - (1.2)$ probleminin $W_2^1(\Omega) \cap L_{\rho+2}(\Omega)$'dan olan çözümünün varsa tek olduğunu gösterir. ∎

KAYNAKLAR

[1] R. A. Adams ; *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975

[2] B. Amman, E. Humbert ; *The second Yamabe invariant*, Journal of Functional Analysis 235 (2006) 377-412

[3] T. Aubin ; *Equations differentielles non-lineaires et problemede Yamabe concernant la courbere scalaire*, J. Math. Pures Appl. (9) 55 (1976) 269-296

[4] A. Bahri, H. Brezis ; *Non-linear Elliptic equations on Riemannian manifolds with the Sobolev critical exponent*, Topics in Geometry, 1-100, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl. , 20, 1996

[5] G. Bianchi, Xing-Bin Pan ; *Yamabe equations on half-spaces*, Nonlinear Analysis 37 (1999) 161-186

[6] L. C. Evans ; *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, AMS 1998

[7] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov ; *Generalized Functions*, vol I, Academic Press, 1964

[8] S. Fucik, A. Kufner ; *Nonlinear Differential Equations*, Elsevier, New York, 1980

[9] D. Gilbarg,N.S. Trudinger ; *Elliptic Partial Differential Equations of Second order*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, 1983

[10] S. Kesavan ; *Topics in Functional Analysis And Applications*, John Wiley & Sons, India,1989

[11] J. L. Lions ; *Quelques méthodes de resolution des problémes aux Limities non linéaires*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris 1969

[12] L. A. Lusternik and V. J. Sobolev ; *Elements of Functional Analysis*, John Wiley & Sons, New York, 1961

[13] S. I. Pohozaev ; *Equations of the Type* $\Delta u = f(x, u, Du)$, Math. S. 1980 v113.n2

[14] M. M. Rao ; *Measure Theory And Integration*, John Wiley & Sons, New York,1984

[15] M. Rigoli, S. Zamperlin ; *"A priori" estimates, uniquness and existence of positive solutions of Yamabe type equations on complete manifolds*, Journal of Functional Analysis 245 (2007) 144-176

[16] R. Schoen ; *Conformal Deformation of a Riamannian Metric to Constant Scalar Curvature*, J. Differential Geometry 20 (1984) 479-495

[17] K. N. Soltanov ; *Some Boundary Problem for Emden-Fowler Type Equations, Function Spaces*, Differential Operators and Nonlinear Analysis, (FSDONA, 2004) May

27-June 2, 2004, Svratka, Czech Republic, 2005, 311-318

[18] K. N. Soltanov ; *On noncoercive semilinear equations*, Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, Volume 2, Issue 2, June 2008, Pages 344-358

[19] N. S Trudinger ; *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. Fis. Mat (3) 22 (1968) 265-274

[20] S. L. Yadava ; *Uniqueness of Positive Radial Solutions of the Dirichlet Problems* $-\Delta u = u^p \pm u^q$ *in an Annulus*, Journal of Differential Equations 139 (1997) 194-217

[21] H. Yamabe ; *On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960) 21-37

[22] K. Yosida ; *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg New York, 1980

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Eylem ÖZTÜRK

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1983

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 1997-2000 Aydınlıkevler İnönü Lisesi, Ankara

Lisans : 2001-2005 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi :

2005- Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi