HASAR ORANI FAZLASI REASÜRANS ANLAŞMALARINDA PRİMİN BELİRLENMESİ

CALCULATION OF PREMIUM FOR STOP LOSS REINSURANCE TREATIES

GÖKYAY YAVAN

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim-Öğretim Ve Sınav Yönetmeliğinin

AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2008

HASAR ORANI FAZLASI REASÜRANS ANLAŞMALARINDA PRİMİN BELİRLENMESİ

Gökyay Yavan

ÖZ

Bu çalışmanın amacı hasar oranı fazlası reasürans anlaşmalarında saklama payının belirlenmesine etki eden faktörleri ve belirlenen saklama payına ilişkin reasürans priminin hesaplanmasında kullanılan yöntemleri incelemektir.

Sigorta şirketleri üzerlerinde tuttukları riskin bir kısmını hasar sayısında veya hasar büyüklüğündeki beklenmedik dalgalanmalara karşı reasürans şirketlerine devrederler. Çalışmanın ilk bölümünde beklenmedik bu dalgalanmalara karşı uygulanan farklı reasürans yöntemleri genel özellikleriyle ele alınmıştır.

Hasar oranı fazlası reasürans anlaşmaları için toplam hasar dağılımının tahmini önemli bir problemdir. Bu nedenle çalışmanın ikinci bölümde toplam hasar dağılımının tahmininde kullanılan istatistiksel dağılımlar ve kullanılan yöntemler incelenmiştir.

Toplam hasar dağılımı belirlenen bir portföy için reasürans priminin ne olacağı sedanın üzerinde tuttuğu saklama payına göre değişiklik göstereceğinden saklama payının ne olduğu reasürans priminin belirlenmesinde önemli bir parametredir. Çalışmanın üçüncü bölümünde saklama payına etki eden faktörlere değinilmiştir.

Çalışmanın uygulama bölümünde ise özel bir sigorta şirketinin hayat sigortası branşına ait verileri kullanılarak hasar oranı fazlası reasürans anlaşması için farklı saklama paylarına göre reasürans primleri belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Reasürans, hasar oranı fazlası reasürans anlaşması, toplam hasar dağılımı

Danışman: Doç. Dr. Meral SUCU, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı

CALCULATION OF PREMIUM FOR STOP LOSS REINSURANCE TREATIES

Gökyay Yavan

ABSTRACT

The aim of this study is to determine the factors affecting the retention limit of a reinsurance treaty and examine the methods used in the calculation of the reinsurance premium.

Insurance companies cede the risk they took over to reinsurance companies against unexpected fluctuations in the claim frequencies and claim amounts. The first part in this study, examines the different reinsurance types used against these fluctuations.

The determination of the aggregate claim distribution is an important point for stop loss reinsurance treaties. Therefore, in the second part of the study, statistical distributions and methods which are used in the estimation of aggregate claim distributions are analyzed.

For the portfolio which have been estimated the aggregate claim distribution, determination of the reinsurance premium is directly related with the retention limit. In the third part of this study, factors affecting the retention limit are identified.

In the application part of the study, for different retention levels reinsurance premiums are determined by using the data of life insurance portfolio of a private life insurance company.

Keywords: Reinsurance, stop loss reinsurance treaties, aggregate claim distribution

Advisor: Meral SUCU, Assoc. Prof., Hacettepe University, Department of Actuarial Science

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde,

Yardımlarını hiç esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Meral Sucu'ya (tez danışmanı),

çalışmanın her aşamasında bilgi ve görüşlerini hiç esirgemeyen değerli çalışma arkadaşım Utku Birdal'a, bu çalışmayı tamamlamamda gerekli sabrı gösteren Sayın Burak Sayın'a ve değerli çalışma arkadaşlarıma,

ve beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan ailem'e

SONSUZ TEŞEKKÜRLER...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

μ_x : X Rastlantı Değişkeninin Ortalaması

σ_x^2 : X Rastlantı Değişkeninin Varyansı

P : Yazılan Toplam Prim

P_S : Yazılan Primde Sedanın Payı

P_R : Yazılan Primde Reasürörün Payı

£(M) : M Noktasındaki Limitli Beklenen Değer

δ_x : Çarpıklık Katsayısı

k_x : Basıklık Katsayısı

$\mu_k^{'}(x)$: X Rastlantı Değişkeninin k'ıncı Momenti

$\mu_k(x)$: X Rastlantı Değişkeninin k'ıncı Merkezi Momenti

$C_k(x)$: X Rastlantı Değişkeninin k'ıncı Kümülantı

1 GİRİŞ

Son yıllarda, ilerleyen teknoloji, gelişen ekonomi ve sosyal yaşamdaki değişimlerin de etkisiyle sigortacılık sektörü giderek büyümektedir. Bu değişimler sonucunda, sigortalanan risk grupları çeşitlenerek, sigorta şirketlerinin iş hacimlerinin artması ve dolayısıyla da sigorta şirketlerinin aldıkları riskler itibariyle kapasitelerinin yetersiz kalması gündeme gelmiştir. Bu aşamada, reasürans, önemli bir risk transferi mekanizması olarak, sigorta şirketlerinin ihtiyaç duydukları korumayı sağlamak amacıyla devreye girmiştir. Bununla birlikte, küreselleşmenin de etkisiyle, sigorta ve reasürans piyasasında reasürans işlemleri ve faaliyetlerinin hacmi giderek arttığı ve geliştiği için, bu piyasalarda reasüröre devredilen işlerde kullanılan yöntemler de gelişerek, değişiklik ve çeşitlilik arz etmeye başlamıştır.

Sigorta şirketleri ve reasürör şirketler oluşabilecek hasarların tahmininde gelişmiş teknikler kullanarak daha uygun modellemeler yapmaya başlamışlardır. İlk başlarda sigorta şirketleri üstlendiği risklerden elde ettiği primleri, riski devrettiği oranda reasürör şirketle paylaşırken şimdilerde ise bu gelişen modellemelere ve tekniklere bağlı olarak elde ettiği primleri, riskleri belli özelliklerine bağlı olarak sınıflandırıp tahmin ederek, aralarında oransal olmayan yöntemler ile paylaşma yoluna gitmektedir.

Bu çalışmada reasürans çeşitleri, genel teorisi ve uygulamalı örnekleri ile ele alınmıştır.

İkinci Bölüm'de genel olarak risk, sigorta, sigortanın tarihteki gelişimi ile reasürans kavramı ve uygulamadaki reasürans yöntemlerine ilişkin bilgilere yer verilecektir.

Üçüncü Bölüm'de ise bölüşmesiz reasüransda kullanılmakta olan toplam hasar dağılımının tahmini ve modellemesinde kullanılan istatistiksel yöntemler ele alınacaktır.

Dördüncü Bölüm'de reasürans priminin belirlenmesinde en önemli kalemlerden biri olan saklama payının belirlenmesine etki eden faktörler ele alınacaktır.

Tezin uygulama bölümünde ise, özel bir sigorta şirketinin banka kredisi kullanmış kişilere düzenlenen hayat sigortası poliçelerinden elde edilen veri kümesi için hasar oranı fazlası reasürans yöntemi ile değişik saklama payı değerlerine göre reasürans primi belirlenecektir.

2 GENEL SİGORTA VE REASÜRANS KAVRAMI

Bu bölümde genel olarak risk, sigorta ve reasürans kavramları ile reasürans modelleri ele alınacaktır.

2.1 Risk ve Sigortanın Tanımı ve Tarihteki Gelişimi

Risk, genel anlamda zarar verici bir aktiviteye açık olma potansiyeli olarak tanımlanabilir. Diğer bir ifade ile kayıpla sonuçlanabilecek belirsizlik olarak da özetlenebilir. Tehditler, zayıflıklar, etkiler ve olabilirlik riskin bileşenleridir.

Günlük hayat önceden tahmin edilemeyen rizikolarla (yangın, sel, hırsızlık, makine bozulması, hastalık vs.) doludur. Bu tür rizikoların ortadan kaldırılmaları mümkün olmadığından insanlar, en azından bu rizikoların ekonomik etkilerini ortadan kaldırabilmek veya hafifletebilmek için girişimlerde bulunmuşlar ve bir rizikonun gerçekleşmesi halinde meydana gelebilecek ekonomik kayıpları aralarında bölüşmek suretiyle sigorta kavramının temelini atmışlardır.

Sigorta bir risk transfer mekanizmasıdır. Daha açık bir deyişle, gelecekteki belirsizliğe karşılık kişilerin ya da kurumların üzerinde tuttuğu riski, bir sözleşme ile belirli bir prim karşılığında sigorta şirketine devretmesidir. Burada gelecekteki belirsizlik sigortalanan kişiye ya da mala göre değişiklik gösterir ve yapılan sözleşmede sigortanın konusu olan riskler açıkça belirtilir. Yapılan bu sözleşmeye poliçe denir.

Sigorta kişilerin ya da kurumların mevcut finansal durumlarını ileride oluşabilecek beklenmedik risklere karşı korumak amacıyla yapılır. Sigortanın ana konusu risktir. Hayatta geleceğe yönelik her şey belirsizliklerle doludur. Bu nedenle insanlar riski yönetmek amacıyla riskin sigorta şirketine devredilmesini bir yöntem olarak kullanmışlardır. Sigorta şirketleri de poliçe düzenleyerek oluşabilecek bu riskler karşılığında prim alarak bu riskleri üstlenmişlerdir.

Genel olarak "sigorta; istatistik yöntemler ile gerçekleşme olasılığı saptanabilen ve gerçekleşmesi halinde ekonomik sonuçlarının para ile ölçülmesi veya belirlenmesi mümkün olan rizikoların tehdidi altında bulunan çok sayıdaki benzer birimlerin, bu sonuçları karşılayabilmek üzere bir fon yaratacak şekilde bir araya getirilmesidir"[7].

Sigorta beklenen kaybın olasılığı göz önünde bulundurularak genellikle kötümser bir yaklaşımla yaptırılır. İnsanların mesleki kariyerleri, fiziki durumları, coğrafi koşulları ve bunun gibi sayılamayan birçok nedenden dolayı maruz kalacağı riskler birbirleri arasında farklılık gösterir.

Risk doğası ve içerilen riskin önemine göre

- Gerçek ve spekülatif riskler
- Temel ve özel riskler

olmak üzere sınıflandırılabilirler.

Gerçek riskler herhangi bir kazanç olasılığı içermezler. En iyi olasılıkla mevcut koşulların korunduğu durumlardır (yangın, sel, kaza, vb.). Dolayısıyla bu tür riskler sigortanın konusunu oluştururlar. Buna karşın spekülatif riskler ise kazanç olasılığı içeren risklerdir ve bu nedenle sigortalanabilir risk grubuna girmezler. Borsada hisse senedi alım satımı sırasında oluşabilecek kayıplar bu risk grubuna girer.

Temel ve özel risklere bakıldığında ise; özel riskler belirli bir kişinin kendine özgü koşullarından dolayı ortaya çıkabilecek riskler olarak tanımlanabilir. Temel riskleri ise toplumun önemli bir bölümünü aynı anda etkileyen riskler olarak tanımlanabilir. Katastrofik riskler (deprem, sel) temel risklere örnek teşkil ederler. Tüm sigortalanabilir riskler ise özel riskler gurubuna girer.

Ancak riskin temel ve gerçek risk gurubuna girmesi onun sigortalanabilir risk olduğu anlamına gelmez. Sigortalanabilir riskin sağlaması gereken belirli koşullar vardır. Bu koşullar şu şekilde özetlenebilir.

- Sigortalanabilir bir menfaat olmalı,
- Finansal bir değeri olmalı,
- Çok sayıda benzer risk olmalı,
- Beklenen kayıp hesaplanabilmeli,
- Meydana gelme olasılığı rastlantısal olmalı ve olasılığı 0 ya da 1 olmamalı.

Bu şartları sağlayan riskler sigortalanabilir risk grubuna girer.

Dünyada sigortacılığın temelleri bundan yaklaşık 4000 yıl önce Babiller tarafından atılmıştır. Zamanın ticaret merkezi olan Babil'de, kervan tüccarlarına borç veren sermayedarlar, kervanların soyulması veya fidye ödeme durumuyla karşılaşmaları halinde tüccarların borçlarını silmekte, buna karşılık borcu tüccarlardan geri aldıkları zaman, taşıdıkları riskin karşılığı olarak ana borç miktarı üzerinden bir miktar para almaktaydılar. Bu olay daha sonra Kral Hammurabi tarafından yasallaştırıldı. Hammurabi Kanunlarının en büyük özelliği haydutların saldırısına uğrayan kervanların zararlarının bütün diğer kervanlar arasında paylaşılmasını öngörmeseydi. Bu, tehlike paylaşmasının kara taşımacılığındaki ilk örneğidir [16].

M.Ö. 600 yıllarında Hindu' lar sigorta özelliği taşıyan kredi anlaşmaları yapmaya başlamıştır. Basit içerikli bu anlaşmalar, toplumlardaki sigorta düşüncesini geliştirerek sigortacılıkta ilk adımları ortaya koyması bakımından önem taşımaktadır. Bu tür kredi anlaşmaları ortaçağda da gelişerek nakliyat sigortalarının temelini oluşturmuştur.

Daha sonra sigortaya daha yakın uygulamalar özellikle deniz ticaretinin yapıldığı toplumlarda görülmeye başlandı. Denizcilikle ilk olarak uğraşan uluslardan Kartacalılar, Romalılar ve Yunanlılar, geminin taşıdığı yük üzerine borç verip, geminin limana varamaması riskine karşılık da faiz niteliğinde önemli paylar almaktaydı. Alınan bu faizlerin yüksekliği kilise tarafından hoş karşılanmayıp, bir süre sonra da yasaklandı. Bu yasak, olabilecek tehlikelere karşı önceden bir prim alma biçimine, dolayısıyla sigorta fikrinin doğmasına yol açtı.

Prim esaslı ilk sigorta sözleşmesi yaklaşık M.S. 1250 yıllarında Venedik, Floransa ve Cenova şehirlerinde görüldü. Ancak bugünkü anlamda sigorta tanımına ulaşabilmek için 14. yy'ı beklemek gerekti. Ekonomik koşulların değişmesi ile ticaret, 14. yy' dan başlayarak çok önemli gelişmeler gösterdi. O devirde deniz ticaretinde en ileride bulunan İtalya' da sigortaya gereksinim duyuldu ve deniz sigortası kavramı da ilk kez burada ortaya çıktı. İlk sigorta poliçesi olarak kabul edilen sözleşme 23 Ekim 1347 tarihini taşımaktaydı ve İtalya' nın Cenova Limanından Mayorka' ya "Santa Clara" adlı geminin yükünü temin etmek amacıyla düzenlendi. İlk sigorta şirketi de 1424 yılında, yine Cenova şehrinde kuruldu.

Sigorta konusunda ilk yasal mevzuat ise 1435 yılında yayınlanan Barselona Fermanı' ydı. İtalya' daki başlangıçtan sonra, deniz sigortalarının 18. yy'da İngiltere' de geliştiği görülmektedir [12].

Denizde başlayıp gelişen sigortacılık, daha sonraları hayat sigortası fikrinin doğmasına neden oldu. Gemi ve yükünün sigorta edilebilmesi, kaptan, yolcular ve tayfaların da sigorta edilebilmesi düşüncesini doğurdu. 17.yy.'da bir İtalyan bankeri olan Tonti'nin getirdiği "Tontines" denilen sistemde, belirli kişiler biraraya gelerek, belirlenen bir süre için ortaya belirli bir para koymakta, süre sonunda hayatta kalanlar parayı aralarında paylaşmaktaydı. İnsanların çoğu, kendilerinin başkalarından daha çok yaşayacaklarına inandıklarından epey rağbet gören bu sistemde ölenlerin maddi kayba uğradıkları düşünülerek, öngörülen süreden önce ölenler için de, ölüm rizikosu karşılığı prim ödenmesi öngörüldü. Ve hayat sigortalarına geçiş de bu şekilde başladı.

17.yy.'ın ikinci yarısı sigortacılığın gelişmesine yol açan iki önemli olaya sahne oldu. Bunlardan ilki sigortacılıkta olasılık hesapları ve istatistiksel yöntemlerin uygulanmaya başlaması, ikincisi ise 2 Eylül 1666 tarihinde Londra'da meydana gelen ve dört gün sürerek 13.000 evle 100 kilisenin kül olmasına yol açan büyük Londra yangınıydı. Kara sigortalarının doğmasına neden olan bu olay, halk üzerinde büyük etki yaratarak böyle felaketlerin sonuçlarına karşı önlem alınması fikrini doğurdu. Bu düşünceden hareketle 1667 yılında " Fire Office " (yangın bürosu) kurulmasından sonra 1684 yılında buna rakip bir ortaklık şeklinde ortaya çıkan ilk yangın sigorta şirketi " Friendly Society " faaliyete geçti. 1688 yılında İngiltere'de Lloyds'un temellerinin atılmasıyla sigortacılıkta yeni bir dönem başlamış oldu [12].

2.2 Reasürans Kavramı

Reasürans kısaca sigorta şirketinin kendini sigortalamasıdır. Diğer bir ifade ile, sigorta şirketinin üzerinde tuttuğu yükümlülüğünü azaltmak için başvurduğu en önemli kaynaktır. Tekrar sigorta anlamına da gelen reasürans, sigortacının yazdığı her yeni iş için saklama payı (konservasyon) limitine kadar olan kısmı üstlendikten sonra arta kalan sigorta tutarını diğer bir sigortacıya aktarması (sigortalaması) olarak da ifade edilir. Burada saklama payı; herhangi bir sigorta şirketinin, teminat altına almış olduğu riskin, mali gücünü dikkate alarak, üzerinde tuttuğu kısmına denir [7].

Üzerinde tutuğu riskin bir kısmını veya tamamını devreden sigortacıya “sedan şirket”, riskin devredildiği sigortacıya da “reasürans şirket” denir.

Reasüransın sigorta şirketinin mali yükümlülüğünü azaltmasının yanında sağladığı belli başlı ek faydalar da vardır.

Reasürans, aynı zamanda, sigorta şirketine mali destek de sağlamaktadır. Hasar ödemelerinde devredilen riskin hasarının karşılanmasının yanısıra, reasürans şirketlerine götürdükleri iş karşılığında sağladıkları komisyonlar yoluyla da sigorta şirketleri mali açıdan desteklenmektedir [7].

Reasüransın sigorta şirketine sağlayacağı bir diğer fayda ise gerçekleşebilecek büyük hasarlara karşın hasar/prim oranında istikrar sağlayabilmesine yardımcı olmaktır. Örneğin, yangın ve deprem gibi tek bir olay sonucu zararların çok büyük olması halinde (katastrofik rizikolarda) ödenecek sigorta tutarını bir sigortacı, hatta o ülkedeki bütün sigortacılar dahi karşılayamayabilir. Katastrofik zararlar, uluslararası reasürans anlaşmaları yoluyla sigortacıların iflasına neden olmayacak şekilde dağıtılır. Böylece hasar/prim oranında beklenmedik dalgalanmalara karşı sedan kendini koruma altına almış olur. Reasüransın çok farklı uygulamaları mevcuttur.

2.3 Reasürans Çeşitleri

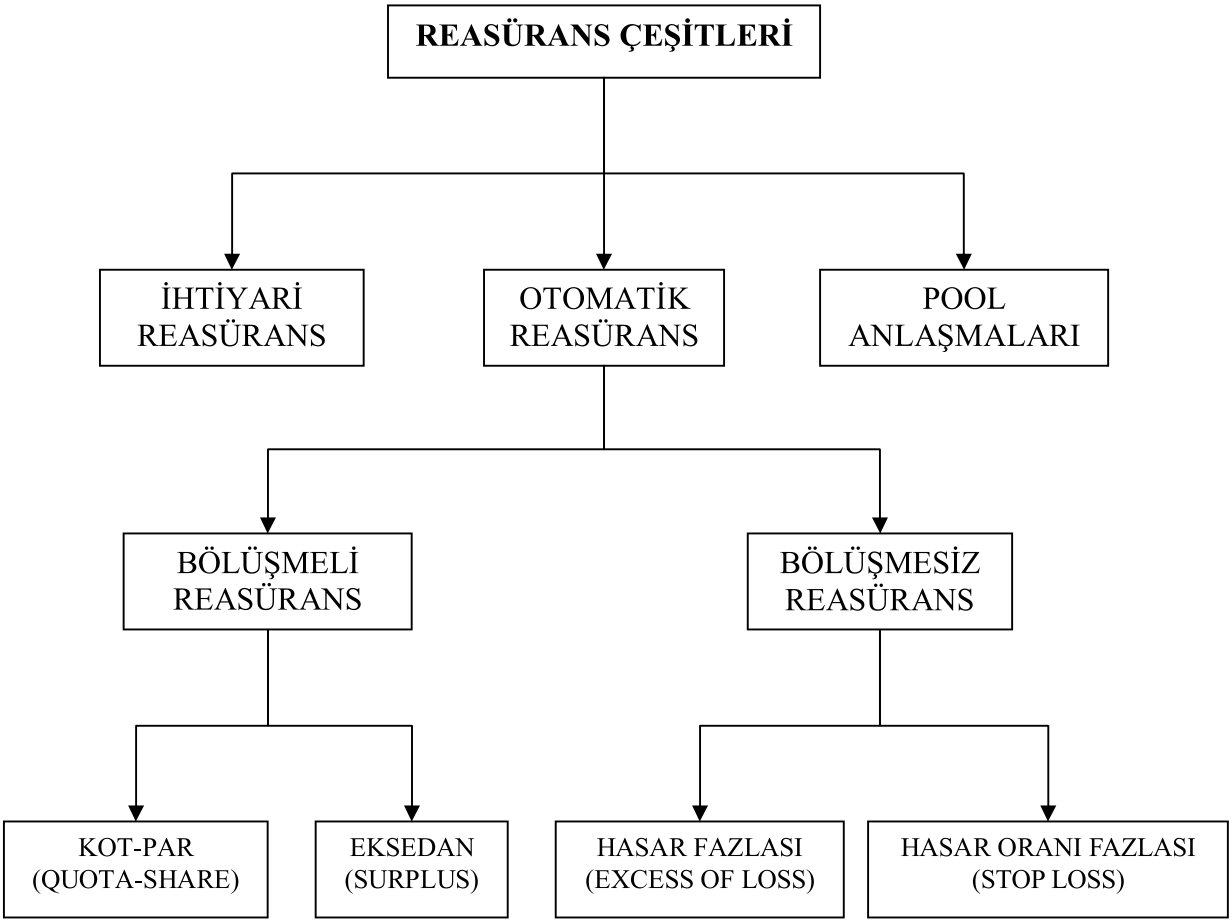
Sigorta şirketleri, yazdıkları işlerin saklama payını aşan kısmını başlıca üç yolla reasürans şirketlerine dağıtmaktadır. Bunlar da sırasıyla;

i. İhtiyari (Fakültatif) reasürans,

ii. Otomatik reasürans anlaşmaları (Trete reasürans).

iii. Pool anlaşmaları

olarak adlandırılmaktadır.



Şekil 2-1: Reasürans Çeşitleri

İhtiyari reasürans ile sedan, işin ne kadarlık bölümünü hangi reasüröre vereceği konusunda; reasürör ise, kendisine teklif edilen işi kabul edip etmemekte ya da hangi oranda kabul edeceği konusunda tamamen serbesttir. Her iki taraf kendi menfaatlerine uygun şekilde hareket etmektedir [7].

Anlaşmalı Reasürans (Trete reasürans), ileride yapılacak sigorta sözleşmelerinin reasüransına ilişkin önceden sedan şirket ile reasürör arasında yapılmış bir ön anlaşmadır. Buna göre anlaşma sınırları içerisinde kalmak şartı ile sedan devretme, reasürör ise kendisine devredilen işleri kabul etme taahhütlerini karşılıklı olarak bir sözleşmede belirtirler. Yasal olarak tarafları bağlayıcı niteliği olan anlaşmalı reasüans, belirli bir tür sigorta için yapılır.

Anlaşmalı reasüransı iki gruba ayrılır :

Birinci grup, “*bölüşmeli reasürans*” olmakla birlikte bu da kendi içinde;

I. Kotpar anlaşmaları

II. Eksedan anlaşmaları

biçiminde sınıflandırılır.

İkinci grup ise, “*bölüşmesiz reasürans*” anlaşmalarıdır. Bu anlaşmalar ise;

I. Hasar fazlası (excess of loss)

II. Hasar oranı fazlası (stop loss)

biçiminde iki gruba ayrılır [12].

Bölüm 1.4’de bölüşmeli ve bölüşmesiz raesürans anlaşmaları ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

Genellikle sigorta bedeli yüksek ve hasar olasılığı büyük olan rizikolarda, sigorta şirketlerinin bir araya gelip aralarından birini lider (jeran) seçerek ve saklama paylarını bir araya getirerek reasürans piyasasına daha güçlü çıkmalarına olanak sağlayan üyelik sistemine “pool” adı verilir.

Pool’ün yaptığı işlerde sigorta poliçesi pool adına düzenleneceği gibi, ilk sigortacı durumunda olan şirket adına da düzenlenebilir.

2.4 Reasürans Modelleri

Bölüm 1.3’te değinildiği üzere anlaşmalı reasürans, bölüşmeli ve bölüşmesiz olmak üzere ikiye ayrılır. Bu bölümde bölüşmeli ve bölüşmesiz reasürans türleri daha ayrıntılı olarak ele alınacaktır.

2.4.1 Bölüşmeli reasürans

Bölüşmeli reasürans kotpar ve eksedan olmak üzere ikiye ayrılır. Bölüşmeli reasürans ile hasarlar sedan ve reasürör arasında anlaşmada belirtilen oranda paylaşılır ve reasürör şirket sedan şirketin ortağı gibi davranır. Bu nedenle bölüşmeli reasüransda reasürans priminin hesaplanması bölüşmesiz reasüransa göre çok daha kolaydır. Sedanın devrettiği teminat oranında reasüröre risk primi devredilir. Ancak bu devretme işleminde teminat büyüklüğünün önemi olmadığı için yani küçük teminatlarla büyük teminatlar aynı şekilde devredildiği için sedanın elde ettiği net risk prim hacmi bölüşmesiz reasüransa göre daha küçüktür. Bu sorun eksedan anlaşmalarda teminat büyüklüğüne göre devir oranı belirleyerek kısmi bir çözüm olanağı sağlamaktadır [12].

2.4.1.1 Kotpar model

Kotpar (Quato-Share) reasüransda hasarlar sedan şirket ile reasürör şirket arasında önceden anlaşmada belirtilmiş oranda tazminat büyüklüğünden bağımsız olarak paylaşılır. Kotpar anlaşmasında, sedan şirketin riskleri bir ayrıma tabi tutma yetkisi yoktur. Aldığı bütün işleri belirli bir oran ve sabit bir limite göre reasüröre devretmek zorundadır. Kotpar anlaşmanın en önemli özelliği, yeterli mali güce kavuşmamış şirketlere büyük yararlar sağlamasıdır.

Kotpar reasürans ile her bir hasarın ve primin önceden belirlenmiş bir oranda paylaşılacağı belirtilmişti, dolayısıyla:

(1-α) sedanın devretme oranı ise,

Y = αX sedanın saklama payı olacaktır.

Bunun sonucunda sedanın üzerinde tuttuğu teminatın olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu sırasıyla;

$$f_Y(y) = \frac{1}{\alpha} f_X(\frac{y}{\alpha}) \tag{1.1}$$

$$F_Y(y) = F_X(\frac{y}{\alpha}) \tag{1.2}$$

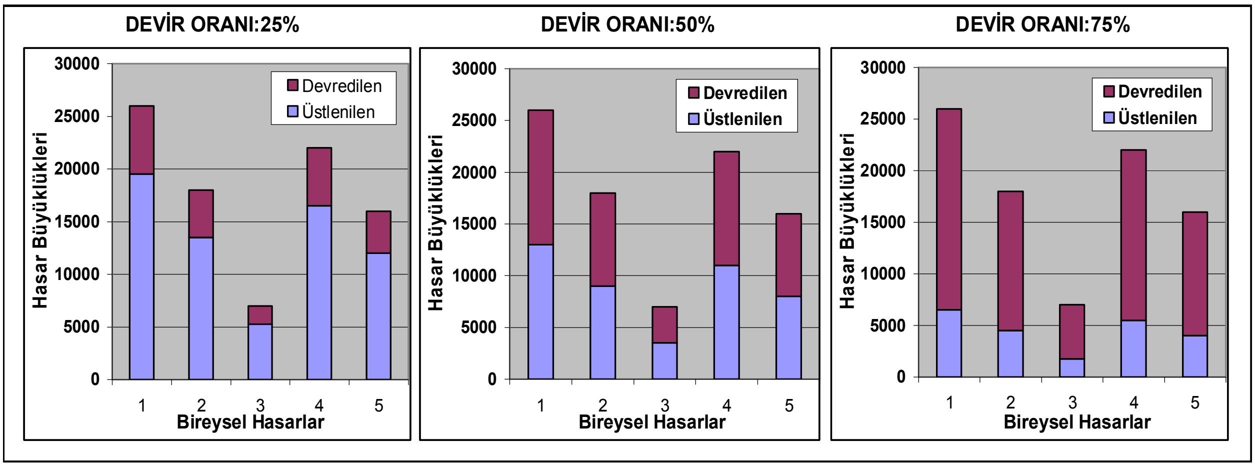
eşitlikleri ile, sedanın üstleneceği beklenen tazminat ödemesi ve varyansı ise sırasıyla

$$E(Y) = E(\alpha X) = \alpha\mu \tag{1.3}$$

$$VAR(Y) = VAR(\alpha X) = \alpha^2\sigma^2 \tag{1.4}$$

eşitlikleri ile yazılır [12].

Şekil 2.2'de sedan ile reasürör arasında 5 farklı hasar büyüklüğü için sırasıyla %25, %50 ve %75 devretme oranı ile kotpar reasürans anlaşmaları uygulanmıştır.



Şekil 2-2: Kotpar Reasürans Anlaşmaları

Şekil 2.2'de görüldüğü üzere sedanın devretme oranı arttıkça her bir hasar ve portföyde oluşan toplam hasar o oranda reasürör şirkete devredilmektedir.

2.4.1.2 Eksedan model

Kotpar reasürans anlaşmalarında olduğu gibi bu reasürans türünde de belli bir oran dahilinde sorumluluk, prim ve hasarlar sedan ile reasürör arasında paylaşılmaktadır. Ancak, kotpar anlaşmalarında her bir poliçe üzerinden devir mecburiyeti varken, eksedan anlaşmalarında devirler sedanın saklama payını aşan kısım üzerinden yapılmaktadır. Özellikle, güçlü sigorta şirketlerinin başvurduğu bu anlaşmada; sedan şirketi rizikonun saklama payını aşan kısımlarını kendi eşiti veya dilimleri oranında reasürörlere devreder. Kotpar anlaşması gibi bütün rizikoları reasüröre devretme zorunluluğu yoktur. Şirket, ilk önce rizikoları kendine göre iyi veya kötü ayırımına tabi tutabilir. Kendince yüksek rizikoları tespit ettikten sonra bunlar üzerinde saklama payını daha düşük tutabilir. Bu anlaşmanın işleyişinde azami kapasite unsuru çok önemlidir. Bir eksedan anlaşmasının azami kapasitesi sedanın saklama payına eşit meblağların adedi ile ölçülür. Buna "dilim" ya da "plen" adı verilir ve reasürörlere yüklenebilecek azami sorumluluk miktarı, bu plenin katları olarak ifade edilir.

Buna rağmen fazlalık olursa, yapacağı ikinci veya üçüncü eksendan anlaşmaları yoluyla veya ihtiyari reasürans yoluyla bu fazlalığı tümüyle dağıtabilir.

Eksedan anlaşmasının en önemli özelliği, sedanı saklama payı tutma konusunda serbest bırakmasıdır. Küçük işlerin tamamının saklama payının altında tutulup eksedan anlaşmaya devir yapılmaması da mümkündür.

Eksedan anlaşmada devredilen hasar ve saklama payı miktarları;

M: sedanın saklama payı

L: devredilen maksimum tabaka (layer) sayısı olsun, buna bağlı olarak,

α: devretme oranı

olmak üzere

LxM: Reasüröre devredilen maksimum teminat tutarını

(1+L)xM: Toplam teminat tutarını gösterir.

Bu gösterimlere bağlı olarak devredilen teminat oranı;

$$\alpha = \frac{LM}{(1+L)M} = \frac{L}{1+L} \tag{1.5}$$

eşitliği ile, üstlenilen teminat oranı ise;

$$(1-\alpha) = \frac{M}{(1+L)M} = \frac{1}{1+L} \tag{1.6}$$

olarak ifade edilir [12].

Ancak burada E toplam hasarı için (E < (1+L) x M) sedan şirket üzerinde tuttuğu teminat miktarı tutarını sabitlemek için α' yı sabit almak yerine her bir teminat için farklı α değerleri kullanabilir.

Bu durumda;

$$\alpha = \frac{M}{E} \tag{1.7}$$

$$(1-\alpha) = \frac{E-M}{E} \tag{1.8}$$

şeklinde ifade edilir.

Sedanın üzerinde tuttuğu ve devrettiği teminatın dağılım fonksiyonu sırasıyla;

$$Y = \alpha_j X = Min\left(1, \frac{M}{E_j}\right) X \ , \tag{1.9}$$

$$F_Y(x) = F_X\left(\frac{x}{\alpha_j}\right), \tag{1.10}$$

$$Z = (1-\alpha_j) X = Max\left(0, \frac{E_j - M}{E_j}\right) X \ , \tag{1.11}$$

$$F_Z(x) = F_X\left(\frac{x}{1-\alpha_j}\right) \tag{1.12}$$

olarak ifade edilir.

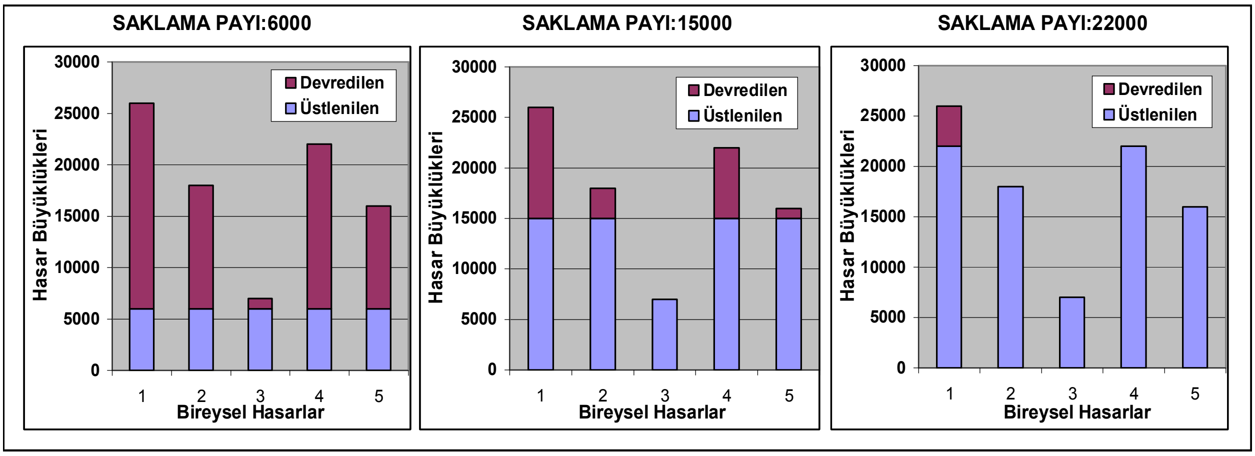
Sedanın saklama payının beklenen değeri ve varyansı ise,

$$E(Y) = Min\left(1, \frac{M}{E}\right) E(X) \tag{1.13}$$

$$Var\ (Y) = Min\left(1, \frac{M}{E}\right)^2 Var\ (X) \tag{1.14}$$

şeklinde ifade edilir [12].

Şekil 2.3'de sedan ile reasürör arasında 5 farklı hasar büyüklüğü için sırasıyla 5000, 16000 ve 22000 YTL saklama payına sahip eksedan reasürans anlaşmaları uygulanmıştır.



Şekil 2-3: Eksedan Reasürans Anlaşmaları

Şekil 2.3'de görüldüğü üzere eksedan anlaşmalarında devirler sedanın saklama payını aşan kısım üzerinden yapılmaktadır.

2.4.2 Bölüşmesiz Reasürans

Bölüşmesiz bir reasürans anlaşmasında hasarlar ve primler bölüşmeli reasüransda olduğu gibi sedan ile reasürör şirket arasında aynı oranda paylaşılmaz. Reasürans primi, belirli istatistiksel dağılımlar kullanılarak ya da geçmiş yıllarda elde edilen veriler ışığında meydana gelecek hasarların büyüklüğünün belirlenen saklama payının üzerinde olma olasılığına bağlı olarak hesaplanır. Bölüşmesiz reasürans da reasürör şirket, sedanın müşterisi rolündedir. Bölüşmesiz reasüransın birçok farklı uygulaması söz konusudur. Bunlar aralarında hasar fazlası ve hasar oranı fazlası olmak üzere temelde ikiye ayrılır. Bu iki model arasındaki temel fark hasar fazlasının risk başına uygulanması, hasar oranı fazlasının ise toplam beklenen hasara göre uygulanmasıdır. Bölüşmesiz reasüransın uygulamaları son yıllarda artış göstermiştir. Bunun ana nedeni uygulamasının giderek kolaylaşması, sedan açısından bölüşmeli reasüransa göre daha ucuz olması ve reasüröre bölüşmeli reasüransdan farklı olarak istediği oranda prim uygulama olanağı sunmasıdır. Bunun yanında bölüşmesiz reasüransda reasürör priminin hesaplanması bölüşmeli reasüransda olduğu gibi kolay olmamaktadır. Bölüşmesiz reasüransı bölüşmeli reasüransdan ayıran en temel özellik, özel olarak sedanı bireysel büyük risklere karşı koruması veya tek bir olaya bağlı oluşan (deprem, sel, yangın vb.) kümül risklere karşı koruması olarak açıklanabilir [8;12].

2.4.2.1 Hasar Fazlası

Hasar fazlası anlaşmaları (Excess Of Loss), ihtiyari reasürans yöntemleri ile eksedan ve kotpar gibi reasürans anlaşmalarının yeterli olmadığı işlerde, sigorta şirketlerinin ihtiyaçlarına daha iyi cevap verdiği için yaygınlaşmıştır. Hasar fazlası reasüransda hasarlar reasürör ile sedan arasında her bir risk veya her bir olay başına bölüşülür. Her iki durumda da reasürör her bir hasar için önceden belirlenmiş olan saklama payı “M” yi aşan ve maksimum “D” kadarını ödemekle yükümlüdür. Burada M her bir risk grubu için ayrı ayrı belirlenir ve reasürör bu limiti aşan kısmı ödemekle yükümlüdür. Diğer bir deyişle, reasürörün hasarla ilgisi ancak hasarın belli bir miktarı (sedanın hasardaki saklama payını) aşması halinde başlar ve reasürör anlaşmada belirlenmiş olan alt ve üst limit arasında kalan hasarlardan sorumludur. Burada M saklama payından M+D üst limitine kadar olan kısım tabaka olarak adlandırılır. Genel olarak hasar fazlası reasürans M saklama payını geçen D (M xs D) olarak adlandırılır. Bu türde yapılan bir reasürans anlaşmasında reasürörün primi orijinal primden bağımsız olarak hesaplanır. Bazı durumlarda tabaka sayısı sonsuz olabilir yani reasürör firma üst limit olmaksızın M saklama payının üstündeki bütün hasarları teminat altına almakla yükümlü olabilir. Reasürör ve sedan arasında teminat paylaşımı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$X_R = (X_0 - M) - (X_0 - D - M) \tag{1.15}$$

$$X_S = X_0 - X_R \tag{1.16}$$

Tablo 2-1: Hasar Fazlası Anlaşmalarda Teminat Paylaşımı

HASAR	SEDANIN PAYI	REASÜRÖRÜN PAYI
$0 \leq X \leq M$	X	0
$M \leq X \leq M+D$	M	X – M
$M+D \leq X$	X –D	D

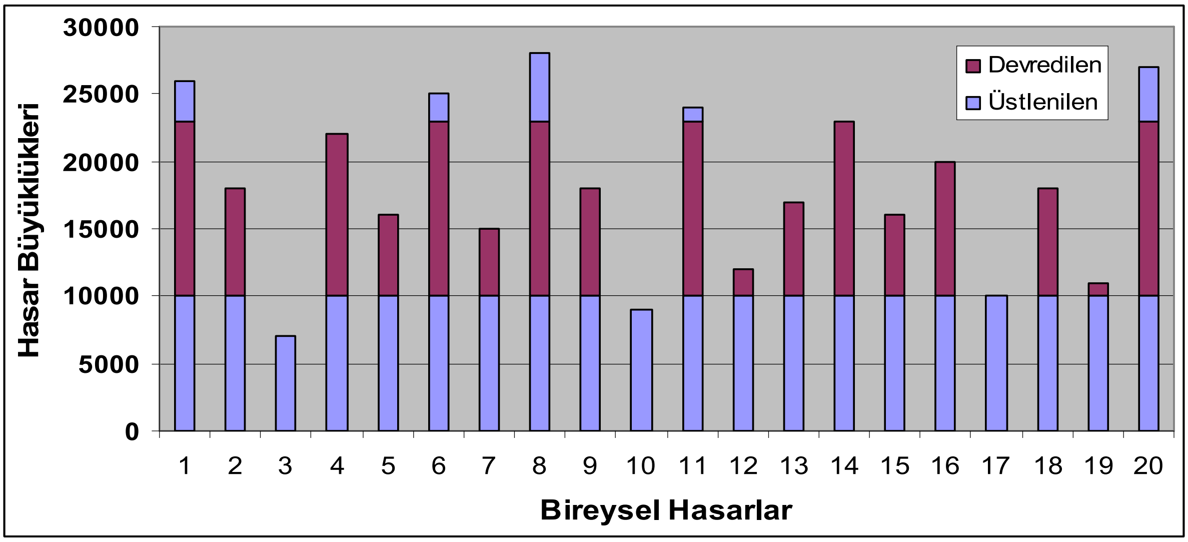
Hasar fazlası resasürans da kendi içinde iki ana gruba ayrılır. Bu iki grup

- Çalışan Hasar Fazlası
- Katastrofik Hasar Fazlası

biçiminde sınıflandırılır [1].

Çalışan hasar fazlası reasüransda sedan şirket her bir risk için üzerinde M saklama payı tutarken katastrofik hasar fazlasında sedan şirket olay başına (deprem, sel, fırtına vb.) saklama payı belirler ve bu limiti karşılamakla yükümlüdür. Katastrofik hasar fazlası anlaşmalar bir çok riskin ya da hasarın tek bir olay sonucu meydana gelmesi durumuna karşı kullanılmaktadır [1].

Şekil 2.4'de sedan ile reasürör arasında 20 farklı hasar büyüklüğü için 10000 YTL saklama payı olan ve 13000YTL devredeni bulunun hasar fazlası reasürans anlaşmasında hasarların dağılımı gösterilmiştir.



Şekil 2-4: Hasar Fazlası Reasürans Anlaşması

Şekil 2.4’de görüldüğü üzere 10000 YTL saklama payı olan 13000 YTL devretme limiti bulunan hasar fazlası reasürans anlaşmasında sedan şirket 23000 YTL üst limitini geçen hasarlar için riski ya kendi üzerinde tutar yada başka bir reasüröre devredebilir.

Hasar fazlası reasüransda reasürörün devretme limitinin sonsuz olduğu durum için reasürörün payı

$$Z_R = (X - M)^+ = X - Min\ (M, X) \tag{1.17}$$

olarak ifade edilir.

Buna bağlı olarak reasürörün ödemesi beklenen değer de

$$E(Z_R) = E(X) - E\ [Min(M, X)] \tag{1.18}$$

$$= £(\infty) - £(\mathrm{M})$$

eşitliği ile yazılır. Burada £, $F_x(x)$ dağılım fonksiyonunun sınırlı beklenen değerini gösterir [12].

Sedanın ödemesi beklenen değer ise,

$$E(Z_S) = £(\mathrm{M}) = E[Min(M, X)] = \int_0^M x dF_x(x) + \int_M^\infty M dF_x(x) \tag{1.19}$$

$$= \int_0^M x dF_x(x) + M[1 - F_x(M)]$$

biçiminde ifade edilir. n beklenen hasar sayısı olmak üzere M saklama payına göre P_R reasürans primi,

$$P_R = n[£(\infty) - £(\mathrm{M})] \tag{1.20}$$

eşitliği ile hesaplanır. Tabakanın D ile sınırlı olduğu yani reasüröre devredilen kısmın sınırlandığı durumda ve M saklama paylı anlaşma için reasürörün hasar payı,

$$Z_R = Min\left[D, (X - M)^+\right]$$

$$= Min\left[(M + D), X\right] - Min\left[M, X\right], \quad \text{X>M ise} \qquad (1.21)$$

eşitliği yardımıyla hesaplanır. M saklama payı D devredeni olan bir reasürans anlaşmasında n toplam beklenen hasar sayısı için reasürör pirimi ise,

$$P_R = nE(Z_R) = n\left[\ E\left[Min(M + D, X)\right] - E\left[Min(M, X)\right]\ \right] \qquad (1.22)$$

$$= n\left[£(\mathrm{M} + \mathrm{D}) - £(M)\right], \quad \text{X>M}$$

biçiminde ifade edilir [12]

2.4.2.2 Hasar Oranı Fazlası

Sigorta şirketinin yıl boyunca ödediği hasarları karşılamak üzere yapılan bir anlaşmadır. Hasar oranı fazlası (Stop Loss) reasürans anlaşmasında hasarlar sedan ile reasürör arasında risk başına değil toplam hasar üzerinden paylaşılır. Hasar oranı fazlası reasürans modelini hasar fazlası reasürans modelinden ayıran en temel özellik reasürör ile sedan arasındaki paylaşımın belirli bir zaman aralığında toplam hasar üzerinden yapılmasıdır. Bu nedenle hasar oranı fazlası reasürans modelinde sedan sadece büyük bireysel hasarlara karşı korunmuş olmaz, hasar sayısındaki beklenmedik dalgalanmalara karşı da korunmuş olur.

Hasar oranı fazlası reasürans anlaşmasında toplam hasar dağılımının tahmin edilebilmesi için hasar sıklığı ve hasar büyüklüğü dağılımlarının uygun bir şekilde modellenmesi gerekir. Burada hasar sıklığı dağılımı belirlenirken hayat ve hayat dışı sigortalar için uygun dağılımlar kullanılabilir. Hayat sigortalarında herbir poliçe için meydana gelebilecek hasar sayısı 1 ya da 0 iken, hayat dışı sigortalarda birden fazla olabilir.

S portföyün toplam hasar miktarını, N toplam hasar sayısını, X_i i. hasarın büyüklüğünü göstermek üzere toplam hasar,

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \qquad (1.23)$$

eşitliği ile ifade edilir. Toplam hasarda M saklama payına göre reasürörün payı Z_R ,

$$Z_R = (S - M)^+ \text{, S<M ise} \qquad (1.24)$$

olarak ve sedanın payı Z_S ise,

$$Z_S = \min(S, M) \qquad (1.25)$$

şeklinde ifade edilir [12].

Hasar oranı fazlası reasürans modelinde oluşan toplam hasar, reasürör ile sedan arasında paylaşılırken, hasar fazlasında bireysel hasarların paylaşımında kullanılan yöntem uygulanır. Bu nedenle hasar fazlası reasürans modelinde uygulanan formül kullanılabilir. Üstlenilen toplam hasarlardan elde edilen primler P olmak üzere, sedan ile reasürörün elde edecekleri risk primleri sırasıyla şu şekilde ifade edilir:

$$P = E(S) = E(X)E(N) \qquad (1.26)$$

$$P_S = E(Z_S) = £_{\mathrm{F_S}}(M) = \int_0^M x dF_S(x) + M[1 - F_S(M)] \qquad (1.27)$$

$$P_R = E(Z_R) = £_{\mathrm{F_S}}(\infty) - £_{\mathrm{F_S}}(M) = \int_M^\infty [1 - F_S(x)]\, dx \qquad (1.28)$$

Reasürörün kendisini hasar sayısındaki beklenmedik artışlara karşı korumak amacıyla hasar ödemelerini sınırlandırması durumunda reasürürün payı, M saklama payı, D ödenen hasarlardaki maksimum reasürör limiti olmak üzere, alınan primlerde reasürör payı,

$$P_R = £_{F_S}(M+D) - £_{F_S}(M) = \int_M^{M+D} (x-M)\ dF_S(x) + D \int_{M+D}^{\infty} dF_S(x) \tag{1.29}$$

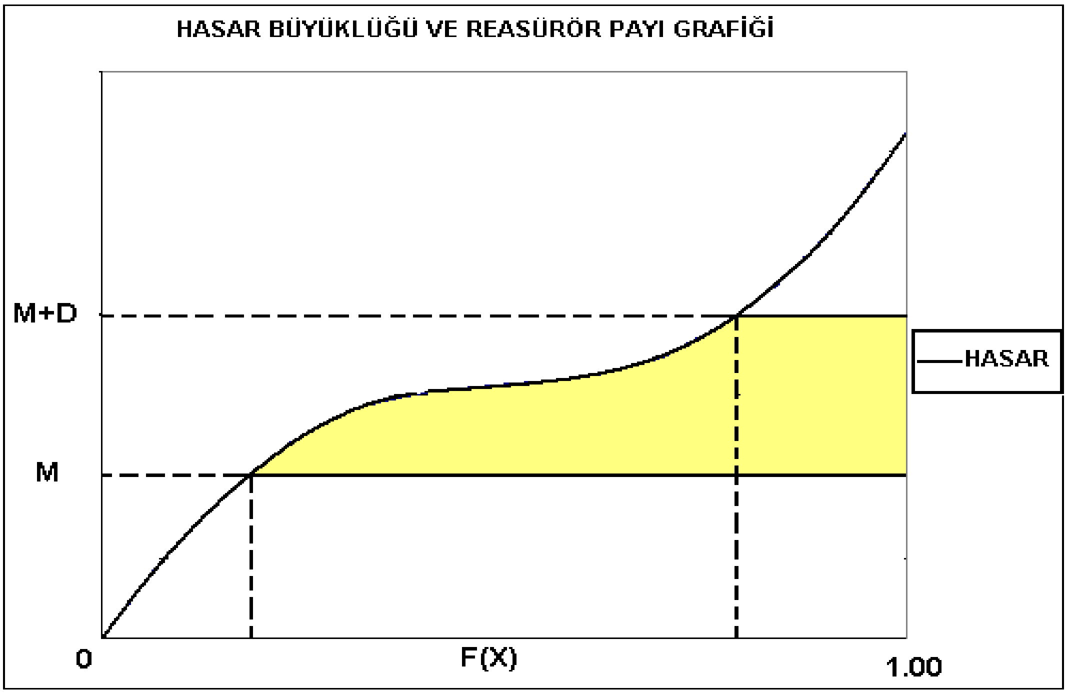
biçiminde ifade edilir [14].

Bu integral çözümlenirse,

$$P_R = £_{F_S}(\mathrm{M+D}) - \int_M^{M+D} F_S(x)\ dx + D - £_{F_S}(\mathrm{M+D}) \tag{1.30}$$

$$P_R = \int_M^{M+D} [1 - F_S(x)]\ dx$$

biçimde ifade edilir [10;14].



Şekil 2-5: Toplam Hasarda Reasürör Payı Grafiği

3 TOPLAM HASAR DAĞILIMININ BELİRLENMESİ

Bu Bölüm'de genel olarak hasar sıklığı, hasar büyüklüğü, toplam hasar dağılımının belirlenmesinde kullanılan yöntemler ele alınacaktır. Aktüeryal modellerde ödeme yapılmasına neden olan olayın ortaya çıkma olasılığı ve ödeme sıklığı ile ödeme tutarının büyüklüğü ayrı stokastik süreçlerde ele alınmaktadır. Her iki süreçte kullanılan modeller (hasar büyüklüğü modeli ve hasar sıklığı modeli) toplam hasar modeli altında bir araya getirilmekte ve toplam hasar dağılımına ulaşılmaktadır. Bu bölümde uygun hasar sıklığı ve hasar büyüklüğü dağılımlarının belirlenmesi ve en uygun toplam hasar dağılımın elde edilmesinde kullanılan dağılımlara ve yöntemlere değinilecektir.

3.1 Hasar Sıklığı, Hasar Büyüklüğü ve Toplam Hasar Dağılımı

Toplam hasar dağılımı, aktüeryal hesaplamalarda sigorta kapsamına alınan risklerden tazmin edilmesini gerektiren (gerçekleşen) olayın ortaya çıkma olasılığının, gerçekleşen riskler nedeniyle yapılan ödemelerin tutarlarının ve zamanlamalarının belirlenmesi amacıyla kullanılan matematiksel modellere dayanmaktadır.

Toplam hasar dağılımının modellenmesi üç aşamada ele alınmaktadır:

1. Aşama: Hasar büyüklüğünün modellenmesi,

2. Aşama: Hasar sıklığının modellenmesi,

3. Aşama: Toplam hasar dağılımının modellenmesi.

Hasarın hangi sıklıkla gerçekleştiğinin ve gelecekte ne şekilde bir eğilim göstereceğinin belirlenmesi amacıyla risklerin gerçekleşme sıklığını ortaya koyan "sıklık modeli" oluşturulmaktadır. Sıklık modeli kısaca, hasarın meydana gelme sıklığına ilişkin davranışı belirleyerek, gelecekte kayıp olaylarının hangi sıklıkla gerçekleşebileceğine ilişkin ipuçlarını ortaya koymaktadır. Kesikli bir stokastik süreç olarak ifade edilen sıklık modelindeki temel varsayım, hasarların ortaya çıkma sıklığı değişkeninin rasgele bir değişken olduğu ve kayıp olayına ait büyüklük sürecinden bağımsız olduğu varsayımıdır [11].

Sigortacılıkta belirli bir zaman aralığında kaç adet hasar geleceği ve bu hasarların büyüklüklerinin ne olacağının tahmin edilmesi çok önemlidir. Belirli bir zaman aralığında gerçekleşen hasarların sayısı N olmak üzere hasar sıklığının olasılık fonksiyonu,

$$p_k = P(N = k), \quad k=0,1,2,... \tag{2.1}$$

eşitliği ile yazılır. N'nin kesikli bir rasgele değişken olmasından dolayı hasar sıklığının dağılımı için genel olarak hayat dışı sigortalarda Poisson, Binom, Negatif Binom dağılımları kullanılırken hayat sigortaları için Bernoulli dağılımı kullanılmaktadır.

Toplam hasar miktarının tahmini sırasında birbirinden bağımsız olarak modellenmesi gereken iki stokastik süreçten ikincisi hasar olaylarına ilişkin büyüklük modelinin oluşturulması sürecidir. Büyüklük modeli, bağımsız ve aynı dağılımlı (iid) olan ve meydana gelme sıklığından bağımsız dağılma özelliği gösteren hasar risklerinin büyüklüklerinin sistematik bir şekilde ifade edilmesi olarak tanımlanabilir.

Belirli bir zaman aralığında gerçekleşen bireysel hasarların büyüklüğünü gösteren hasar büyüklüğünün dağılım fonksiyonu ise,

$$F_x(x) = P (X \leq x), \qquad x \geq 0, \tag{2.2}$$

biçiminde gösterilir. Burada X bireysel hasar büyüklüğünü ifade etmektedir.

Hasar büyüklüğünün dağılımının tahmininde eğer yeteri kadar veri varsa kullanılabilecek en temel yöntem ampirik (emprical) dağılım yöntemidir. Ampirik dağılım fonksiyonu şu şekilde ifade edilmektedir;

$$Fn(x) = \frac{\text{Hasar Büyüklüklerinin Sayısı} \leq x}{\text{Toplam Hasar Sayısı}} \tag{2.3}$$

Bu yöntem sadece yeteri kadar büyük hasar sayısı varsa uygulanabilmektedir. Ancak bu durumda bile dağılımın kuyruk uzunluğu tam olarak belirlenemeyebilir. Bu nedenle hasar büyüklüğü dağılımını tahmin etmek için uzun kuyruklu dağılım ailesinden olan Gamma, Weibull ya da Lognormal dağılım gibi sürekli dağılımlar kullanılabilmektedir.

N, şirketin belirli bir zaman aralığındaki (genellikle bir yıl) hasar sayısı ve X_i bu zaman aralığında meydana gelen i. hasarın büyüklüğü olmak üzere bu zaman aralığındaki toplam hasar miktarı S, Eş(1.23) ile tanımlanır.

Burada her bir X_i nin birbirinden ve hasar sayısı N'den bağımsız ve aynı dağıldığı varsayılmaktadır.

Hasar büyüklüğü dağılımı bilinen ve dağılım fonksiyonu $F_x(x)$ ile gösterilen, yine hasar sıklığı dağılımı bilinen ve olasılık yoğunluk fonksiyonu $p_k = P(N = k)$ ile gösterilen bir portföy için toplam hasarın dağılım fonksiyonu ise,

$$F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_X^{*k}(x) \quad , \qquad x \geq 0 \qquad (2.4)$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Burada $F_X^{*k}(x)$ $F_x(x)$'in k. dereceden konvolüsyonunu, p_k ise k tane hasar gelme olasılığını göstermektedir [4;9;12].

3.2 Hasar Sıklığı ve Hasar Büyüklüğü İçin Kullanılan İstatistiksel Dağılımlar

Bu kesimde hasar sıklığının ve büyüklüğünün tahmininde kullanılabilecek farklı istatistiksel dağılımlar ile bu dağılımların momentleri hakkında kısa bilgiler verilecektir.

Bireysel hasar büyüklüklerinin ve hasar sıklığının modellenmesinde kullanılabilecek dağılımların sigortalanan risklerin niteliğinden kaynaklanan kendine özgü bazı özellikleri taşımaları gerekmektedir. Bu özelliklerden başlıcaları şu şekilde sıralanabilir;

- ✓ Dağılımlarda yalnızca pozitif sayılara olasılık değeri verilmeli diğer bir deyişle dağılımın değer aralığı 0 ile +∞ arasında olmalıdır (0 ≤ x ≤ +∞).
- ✓ Dağılımlarda mevcut veriler içerisinde bulunmamasına rağmen yüksek miktarlı hasar olaylarına da olasılık değeri verilmelidir (diğer bir ifadeyle, dağılımların kuyruk kısımlarına da olasılık değeri vermek suretiyle kalın veya ince kuyruk özellikleri taşımalıdır).

Büyüklük modelinde kullanılabilecek sürekli dağılımlar şu şekilde sıralanabilir:

- Gamma Dağılımı
- Weibull Dağılımı
- Lognormal Dağılım
- Pareto Dağılımı
- Üstel Dağılım
- Ters Gaussian Dağılımı

Gamma Dağılımının α>0,β>0 parametreleri ile olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = x^{\alpha-1} \frac{e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} , \quad x > 0 \tag{2.5}$$

biçiminde ifade edilmektedir. Orjine göre ilk dört momenti aşağıdaki eşitlikler ile verilmektedir: [15]

$$\mu_1^{'}(x) = \alpha\beta \ , \tag{2.6}$$

$$\mu_2^{'}(x) = (\alpha^2 + \alpha)\beta^2 \ , \tag{2.7}$$

$$\mu_3^{'}(x) = (\alpha^3 + 3\alpha^2 + 2\alpha)\beta^{3}, \tag{2.8}$$

$$\mu_4^{'}(x) = (\alpha^4 + 6\alpha^3 + 11\alpha^2 + 6\alpha)\beta^4 \tag{2.9}$$

Weibull Dağılımının α>0,β>0 parametreleri ile olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^{\alpha}} \quad , \quad x > 0 \qquad (2.10)$$

eşitliği ile verilir. k. momenti de,

$$\mu_k^{'}(x) = \frac{\Gamma(1+\frac{k}{\alpha})}{\beta^{\frac{k}{\alpha}}} \quad , \quad k = 1,2,... \qquad (2.11)$$

olarak yazılır [15].

Lognormal Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu μ ve σ parametreleri ile,

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad , \quad x > 0 \qquad (2.12)$$

biçimindedir ve k. momenti aşağıdaki eşitlikteki gibi gösterilmektedir: [15]

$$\mu_k^{'}(x) = e^{k\mu + \frac{k^2\sigma^2}{2}} \quad , \qquad k = 1,2,... \qquad (2.13)$$

Pareto Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu a ve b parametreleri ile aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$f_X(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}} \ , \quad x > b \ , \quad a > 0 \tag{2.14}$$

k. momenti ise,

$$\mu'_k(x) = \frac{ab^k}{a-k} \ , \qquad k = 1,2,... \tag{2.15}$$

eşitliği ile ifade edilir [15].

Üstel Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu λ parametresi ile,

$$f_X(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda} \ , \quad x > 0 \tag{2.16}$$

biçiminde yazılabilir ve k. momenti de,

$$\mu'_{Xk} = \lambda^k k! \ , \qquad k = 1,2,... \tag{2.17}$$

olarak verilebilir.

Ters Gaussian Dağılımının dağılım fonksiyonu m ve b parametreleri ile

$$F_X(x) = \Phi\left[(bx)^{-\frac{1}{2}}(x-m) \right] + e^{\frac{2m}{b}} \Phi\left[-(bx)^{-\frac{1}{2}}(x+m) \right], \quad x > 0 \tag{2.18}$$

biçimindedir. Burada $\Phi(.)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonunu göstermektedir. Ters Gaussian Dağılımının ilk dört momenti de aşağıdaki eşitlikler ile ifade edilir:

$$\mu_1^{'}(x) = m \tag{2.19}$$

$$\mu_2^{'}(x) = m^2 + mb \tag{2.20}$$

$$\mu_3^{'}(x) = m^3 + 3m^2b + 3mb^2 \tag{2.21}$$

$$\mu_4^{'}(x) = m^4 + 6m^3b + 15m^2b^2 + 15mb^3 \tag{2.22}$$

Sıklık modelinde kullanılabilecek kesikli dağılımlar şu şekilde sıralanabilir:

- Poisson Dağılımı
- Binom Dağılımı
- Negatif Binom Dağılımı
- Bernoulli Dağılımı

Poisson Dağılımının olasılık fonksiyonu λ parametresi ile

$$p(n) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \quad , \qquad n = 0,1,2,... \tag{2.23}$$

biçiminde ifade edilir ve ilk dört momenti aşağıda verilmiştir:

$$\mu_1^{'}(N) = \lambda \tag{2.24}$$

$$\mu_2^{'}(N) = \lambda(\lambda + 1) \tag{2.25}$$

$$\mu_3^{'}(N) = \lambda^2(\lambda + 2) + \lambda(\lambda + 1) \tag{2.26}$$

$$\mu_4^{'}(N)=\lambda^3(\lambda+3)+3\lambda^2(\lambda+2)+\lambda(\lambda+1) \tag{2.27}$$

Binom Dağılımın olasılık fonksiyonu N ve p parametreleri ile

$$p(n)=\binom{N}{n}p^n q^{N-n} \quad , \quad n=0,1,2,\ldots N \tag{2.28}$$

eşitliği ile ifade edilir. İlk dört momenti aşağıdaki eşitliklerdeki gibi ifade edilir:

$$\mu_1^{'}(N)=Np \tag{2.29}$$

$$\mu_2^{'}(N)=\mu_1^{'2}(N)+\mu_1^{'}(N)q \tag{2.30}$$

$$\mu_3^{'}(N)=\mu_1^{'3}(N)-3\mu_1^{'2}(N)p+2\mu_1^{'}(N)p^2+3\mu_1^{'2}(N)-3\mu_1^{'}(N)p+\mu_1^{'}(N) \tag{2.31}$$

$$\begin{aligned}\mu_4^{'}(N)=&\mu_1^{'4}(N)-6\mu_1^{'3}(N)p+11\mu_1^{'2}(N)p^2-6\mu_1^{'}(N)p^3+6\mu_1^{'3}(N)\\&-18\mu_1^{'2}(N)p+12\mu_1^{'}(N)p^2+7\mu_1^{'2}(N)-7\mu_1^{'}(N)p+\mu_1^{'}(N)\end{aligned} \tag{2.32}$$

Negatif Binom Dağılımının olasılık fonksiyonu r ve β parametreleri ile

$$P(n)=\binom{r}{n}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^r\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^n \quad , \quad n=0,1,2,\ldots \tag{2.33}$$

eşitliği ile ifade edilir. İlk dört momenti aşağıdadır:

$$\mu_1^{'}(N)=r\beta \tag{2.34}$$

$$\mu_2^{'}(N)=\mu_1^{'2}(N)+\mu_1^{'}(N)(1-\beta) \tag{2.35}$$

$$\mu_3^{'}(N)=\mu_1^{'3}(N)+3\mu_1^{'2}(N)\beta+2\mu_1^{'}(N)\beta^2+3\mu_1^{'2}(N)+3\mu_1^{'}(N)\beta+\mu_1^{'}(N) \tag{2.36}$$

$$\mu_4'(N) = \mu_1'^4(N) + 6\mu_1'^3(N)\beta + 11\mu_1'^2(N)\beta^2 + 6\mu_1'(N)\beta^3 + 6\mu_1'^3(N)$$

$$+18\mu_1'^2(N)\beta + 12\mu_1'(N)\beta^2 + 7\mu_1'^2(N) + 7\mu_1'(N)\beta + \mu_1'(N) \qquad (2.37)$$

Bernoulli Dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu p parametresi ile

$$p(n) = p^n q^{1-n} \;, \qquad n = 0{,}1 \qquad (2.38)$$

olarak ve k. momentleri,

$$\mu_k'(n) = p \qquad (2.39)$$

eşitliği ile yazılabilir.

3.3 Toplam Hasar Dağılımının Tahmini ve Kullanılan Yöntemler

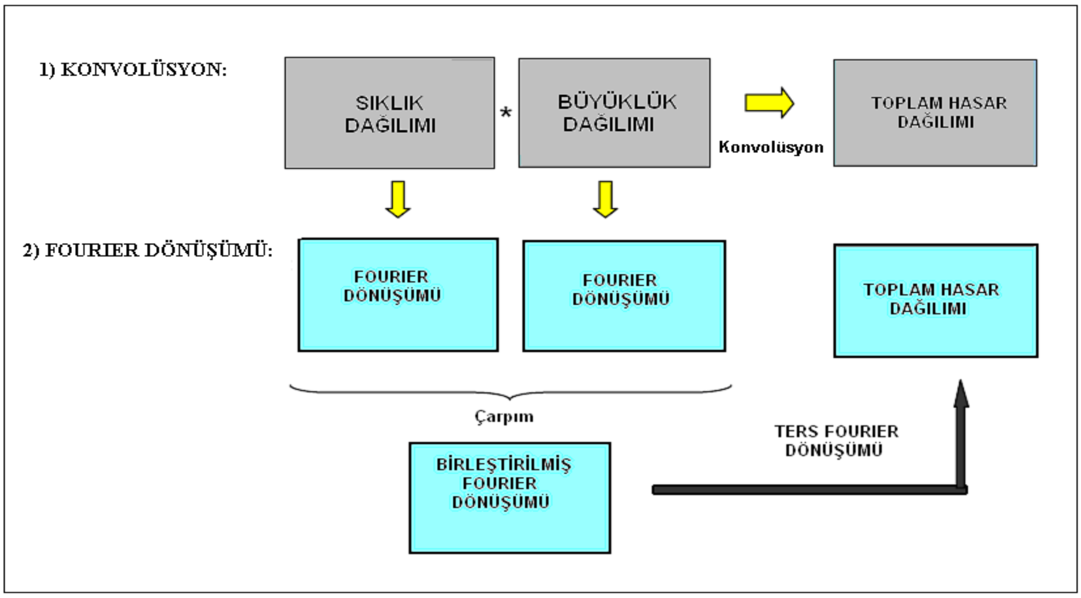
Toplam hasar dağılımının modellenmesinde temel sorun, mevcut veriler ışında elde edilen hasar sıklığı dağılımının ve hasar büyüklüğü dağılımının kullanılarak toplam hasar dağılımının elde edilmesidir. Bölüm 2.1'de de söz edildiği gibi her iki dağılımın karakteristiği birbirinden tamamıyla farklıdır. Birinci dağılım kesikli bir dağılım olup belirli bir zaman aralığında meydana gelen hasar sayısını gösterirken ikinci dağılım sürekli bir dağılım olup parasal bir büyüklüğü ifade eder. Bu nedenle bu iki dağılım birbiri ile doğrudan toplanamaz veya çarpılamaz. Bunun yerine bu iki dağılımın birleştirmesinde kullanılan iki temel yaklaşım mevcuttur [3]. Bunlar;

- Kapalı Form (Closed Form)
- Açık Form (Open Form)

çözümleridir.

Kapalı form yaklaşımı $F_S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F_X^{*k}(x)$ eşitliğinin çözümünü gerektirmektedir. Bilinen en yaygın kapalı form çözümü, teorik bir matematiksel yöntem olan konvolüsyon yöntemidir. Bu yöntem karmaşık integrallerin çözümünü gerektirmektedir. En basit istatistiksel dağılımlar için bile Konvolüsyon yönteminin bugünkü bilgisayarlarla ve çözümü oldukça zor ve uzun sürmektedir. Bu yönteme alternatif diğer bir kapalı form yaklaşımı ise Hızlı Fourier Dönüşümüdür. Fourier Dönüşümü ile sıklık ve büyüklük dağılımları üzerinde dönüşüm yaparak toplam hasar dağılımına ulaşılmaktadır. Hızlı Fourier Dönüşümünün uygulaması Konvolüsyon yönteminden daha basit olmakla birlikte uygulanmasında trigonometrik fonksiyonlar ve karmaşık sayılar kullanılmaktadır [11].

Şekil 3.1 de Konvolüsyon ve Hızlı Fourier Dönüşümünün süreci karşılaştırmalı olarak gösterilmiştir.



Şekil 3-1: Konvolüsyon ve Fourier Dönüşümünün Karşılaştırılması

Teorik formül ve eşitliklerin çözümünü gerektiren kapalı form yaklaşımından farklı olarak açık form yaklaşımı uygulaması daha kolay ve zaman kazandırıcıdır.

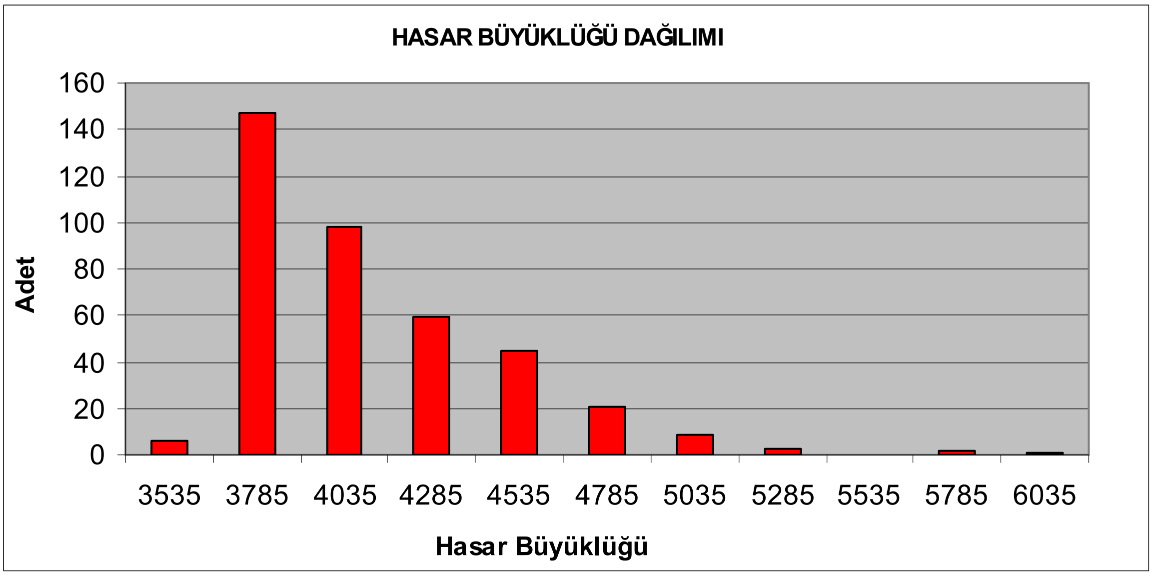
Monte Carlo Simülasyonu bu yöntemlerden biridir. Simülasyon tekniği ile değişik istatistik dağılımları kullanılarak hasar sıklığı ve hasar büyüklüğü dağılımı için farklı senaryolar elde edilmektedir. Geçmiş senelerin verileri ışığında simülasyon tekniği ile toplam hasar dağılımı diğer iki yönteme göre daha basit bir şekilde elde edilmektedir.

Simülasyon tekniğini bir örnek ile açıklayacak olursak, kasko sigortası yapan bir sigorta şirketinin 1999 yılı içinde ödediği hasarların sayısı ve hasarların büyüklüğü ile ilgili bir veri kümesi olduğunu varsayalım. Bu şirketin portföyü için 1999 yılı içerisinde gerçekleşen toplam hasar sayısı 391 olsun. Hasar tarihleri ve ilgili tarihlerdeki hasar büyüklükleri Tablo 3.1'deki gibi olsun, buna bağlı olarak hasar büyüklüğünün dağılımı da Şekil 3.2'deki gibi olacaktır.

Tablo 3-1: Hasar Büyüklüğü

HASAR TARİHİ	HASAR BÜYÜKLÜĞÜ (YTL)
01.01.1999	3.490,00
15.05.1999	5.025,00
20.03.1999	4.850,00
11.07.1999	3.900,00
15.06.1999	4.055,00
08.08.1999	5.200,00
04.01.1999	4.010,00
31.08.1999	3.780,00
06.09.1999	3.950,00
20.08.1999	4.385,00
06.12.1999	4.050,00
28.02.1999	3.700,00

N:	391
ORTALAMA:	4.125,56



Şekil 3-2: Hasar Büyüklüğü Dağılımı

Şekil 3.2'deki hasarlar parasal bir büyüklüğü ve aynı zamanda sürekli bir değer olan hasar miktarını gösterdiğinden beklenen hasar miktarının tahmininde sürekli bir dağılım kullanmak uygun olacaktır. Buna bağlı olarak hasar büyüklüğünün a=7 ve b=3535 parametresi ile Pareto dağılımından geldiği varsayılmıştır.

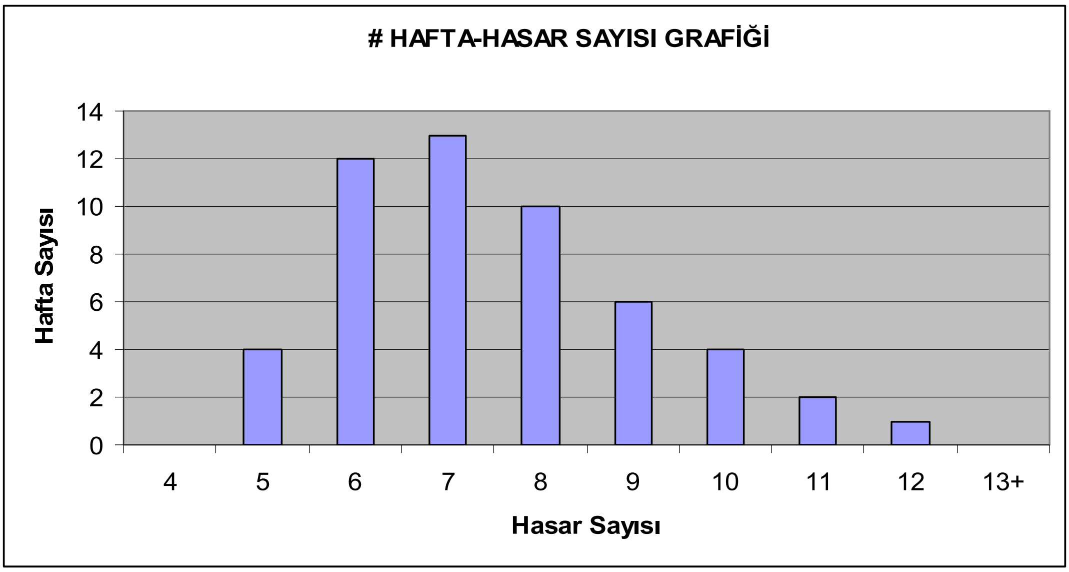
Dolayısıyla hasar büyüklüğünün simülasyonunda kullanılacak parametreler ve hasar sıklığı dağılımı belirlenerek toplam hasar tahmini için gerekli olan ilk parça belirlenmiştir.

Benzer bir şekilde bu süre içerisinde gerçekleşen haftalık hasar sayısının grafiği Tablo 3.2'deki gibi olsun;

Tablo 3-2: Hasar Sıklığı

	HAFTALIK HASAR SAYISI	# HAFTA
	k	n(k)
	4	0
	5	4
	6	12
	7	13
	8	10
	9	6
	10	4
	11	2
	12	1
	13+	0
TOPLAM :	391	52

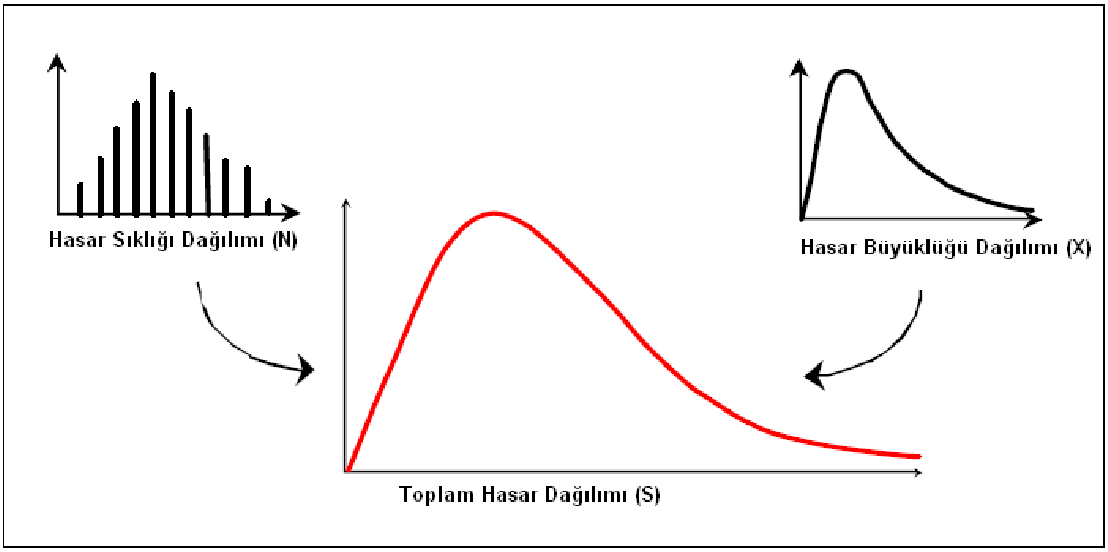
# HASAR	391
# HAFTA	52
λ	7.52



Şekil 3-3: Hasar Sıklığı Dağılımı

Tablo 3.2'ye bağlı olarak Şekil 3.3 1999 yılı içerisinde haftalara göre meydana gelen hasar sayılarının dağılımını göstermektedir (4 haftada 5 hasar, 12 haftada 6 hasar, vb.). Şekil 3.3 hasar sayılarını gösterdiğinden haftalık beklenen hasar sayılarının tahmininde kesikli bir dağılım kullanmak daha uygun olacaktır. Bu örnek için hasar sıklığının λ=7.52 parametresi ile Poisson dağıldığı varsayılmıştır.

Her iki dağılım ve parametreleri belirlendikten sonra Monte Carlo Simülasyonu kullanılarak beklenen hasar sıklığı ve hasar büyüklüğü değerleri için farklı senaryolar üretilebilir.



Şekil 3-4: Simülasyon Grafiği

Simülasyon sonucunda sıklık ve büyüklük dağılımlarından elde edilen değerler ile Eş. (1.26) eşitliği kullanılarak beklenen toplam hasar değerine ulaşılır.

Pareto dağılımı için beklenen değer;

$$E(X) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - 1} \tag{2.40}$$

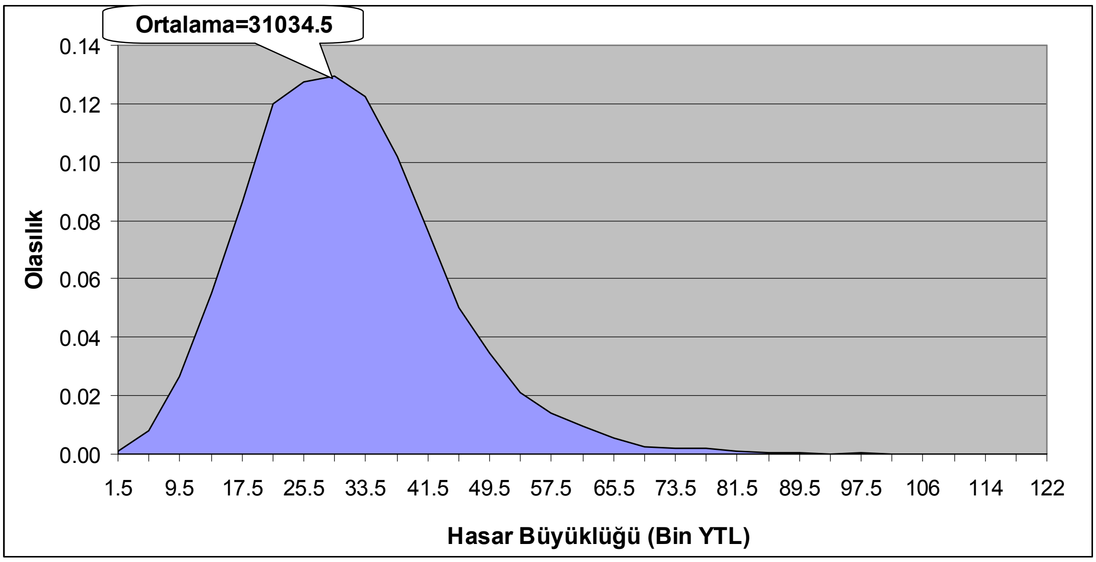
eşitliği ile ifade edilir. Buna bağlı olarak büyüklük dağılımının beklenen değeri 4124,17 YTL olarak hesaplanır.

Poisson dağılımın beklenen değeri ise

$$E(N) = \lambda \tag{2.41}$$

eşitliği ile ifade edilmektedir. Bu eşitliğe bağlı olarak hasar sıklığının beklenen değeri de 7,52 olarak belirlenmektedir.

Pareto ve Poisson dağılımından elde edilen beklenen değerle Eş. (1.26)' da yerine konulursa sigorta şirketinin haftalık beklenen toplam hasar tutarı 31013,7 YTL olarak belirlenmektedir. Şekil 2.5'te ise 15000 kez simüle edilmiş sıklık ve büyüklük dağılımlarından elde edilen değerlerin çarpımlarının dağılımı görülmektedir. Dikkat edileceği üzere teoride belirtilen eşitlikten elde edilen beklenen değer ile simülasyon sonucu elde edilen beklenen değerler birbirlerine oldukça yakındır.



Şekil 3-5: Toplam Hasar Dağılımı Grafiği

Şekil 3.5 ile gösterilen ve simülasyon sonucu elde edilen toplam hasar dağılımının fonksiyonunu ve buna bağlı olarak parametrelerini belirlenmesinde iki temel yöntem kullanılır. Bunlar;

- Denklemler kullanılarak yapılan hesaplamalar,
- Optimizasyon yöntemleri kullanılarak yapılan hesaplamalar

olmak üzere başlıca iki grupta ele alınabilmektedir.

Denklem sistemleri kullanılarak yapılan tahminlerde, Momentler Yöntemi (MM),Yüzdeliklerin (PM) Eşleştirilmesi Yöntemi ve Olasılıkla Ağırlıklandırılmış Momentler Yönteminden (PWM) yararlanılmaktadır. Optimizasyona dayalı parametre tahmin yöntemlerinden en çok kullanılanı En Çok Olabilirlik Yöntemi (Maximum Likelihood Estimation, MLE)'dir. Uygulamada yöntemin uygulanabilirliği ve sonuçlarının güvenilirliği göz önünde bulundurularak momentler yöntemi kullanılmıştır.

Bir dağılımın, ilgili rastlantı değişkeninin çeşitli kuvvetlerinin beklenen değerine o dağılımın momenti denir.

Negatif olmayan bir rastlantı değişkeninin 0 etrafındaki j. momenti $\mu_j^{'}$ aşağıdaki eşitlik ile ifade edilmektedir;

$$\mu_j^{'} = \begin{cases} E(X^j) = \int_0^{\infty} x^j dF_X(x) & X \ sürekli \ ise \\ E(N^j) = \sum_{k=0}^{\infty} kP(N=k) & N \ kesikli \ ise \end{cases} \tag{2.42}$$

Negatif olmayan bir rastlantı değişkeninin ortalaması etrafındaki j. momenti μ_j (merkezi moment) ise şu şekilde ifade edilmektedir;

$$\mu_j = \begin{cases} E((X-E(X))^j) = \int_0^{\infty} (x-\mu)^j dF_X(x) & X \ sürekli \ ise \\ E((N-E(N))^j) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (-1)^{j-k} \mu_k^{'} \mu_1^{'\,j-k} N \ kesikli \ ise \end{cases} \tag{2.43}$$

Herhangi bir rastlantı değişkeninin momentleri ve merkezi momentleri arasındaki ilişki ise,

$$\mu_2(x) = \mu_2^{'}(x) - \mu_1^{'2}(x) \tag{2.44}$$

$$\mu_3(x) = \mu_3^{'}(x) - 3\mu_1^{'}(x)\mu_2^{'}(x) + 2\mu_1^{'3}(x) \tag{2.45}$$

$$\mu_4(x) = \mu_4^{'}(x) - 4\mu_1^{'}(x)\mu_3^{'}(x) + 6\mu_1^{'2}(x)\mu_2^{'}(x) - 3\mu_1^{'4}(x) \tag{2.46}$$

eşitlikleri ile ifade edilir. Olasılık kuramında, bir X rastlantı değişkeni için, eğer beklenen değer varsa, moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_X(t) = E(e^{tx}) \tag{2.47}$$

biçiminde yazılabilir. Burada X rastlantı değişkeninin k. momenti, moment çıkaran fonksiyonunda k. dereceden türevinde t yerine 0 konularak hesaplanmaktadır.

Ancak orijine göre hesaplanan momentler rastlantı değişkeninin genel özellikleri hakkında tek başına bilgi vermekte yetersiz kalmaktadırlar. Bu nedenle dağılımın bütün özelliklerini açıklamak için kümülantlarına (C_j) gerek duyulur. Kümülantlar ise momentlerin bir fonksiyonu olup kümülant çıkaran fonksiyonu aşağıdaki eşitlik ile ifade edilmektedir.

$$g(t) = \log(E(e^{tx})) \tag{2.48}$$

Momentlerin hesabına benzer şekilde X rastlantı değişkeninin k. kümülantı, kümülant çıkaran fonksiyonunun k. dereceden türevinde t yerine 0 konularak hesaplanmaktadır.

Ancak momentleri hesaplanmış bir rastlantı değişkeninin kümülantlarını hesaplarken, kümülant çıkaran fonksiyonuna gerek duymadan, momentlerinin bir fonksiyonu şeklinde de hesaplanabilmektedir. Aşağıda 0 etrafındaki momentleri bilinen bir rastlantı değişkeninin ilk dört kümülantının eşitlikleri verilmiştir:

$$C_1(x) = \mu_1^{'}(x) \tag{2.49}$$

$$C_2(x) = \mu_2^{'}(x) - \mu_1^{'2}(x), \tag{2.50}$$

$$C_3(x) = \mu_3^{'}(x) - 3\mu_1^{'}(x)\mu_2^{'}(x) + 2\mu_1^{'3}(x), \tag{2.51}$$

$$C_4(x) = \mu_4^{'}(x) - 4\mu_1^{'}(x)\mu_3^{'}(x) - 3\mu_2^{'2}(x) + 12\mu_1^{'2}(x)\mu_2^{'}(x) - 6\mu_1^{'4}(x) \ , \tag{2.52}$$

Eş. (2.49)-Eş. (2.52) ile kümülantları hesaplanan X rastlantı değişkeninin ortalama, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları aşağıdaki gibi ifade edilir:

Ortalama $$E(X) = C_1(x) = \mu_1^{'}(x) = \mu \quad , \tag{2.53}$$

Varyans $$VAR(X) = C_2(x) = \mu_2(x) = \sigma_x^2 \quad , \tag{2.54}$$

Çarpıklık $$\delta_x = \frac{C_3(x)}{\sqrt{C_2^3(x)}} = \frac{\mu_3(x)}{\sigma_x^3} \quad , \tag{2.55}$$

Basıklık $$k_x = \frac{C_4(x)}{C_2^2(x)} = \frac{\mu_4(x)}{\sigma_x^4} - 3 \quad , \tag{2.56}$$

Eş. (2.49)- Eş. (2.52)’ den de görüldüğü üzere X rastlantı değişkeninin

- Birinci kümülantı; birinci momentine (ortalama)
- İkinci kümülantı; ikinci merkezi momentine (varyans)
- Üçüncü kümülantı; üçüncü merkezi momentine
- Dördüncü kümülantı; dördüncü merkezi moment – varyansının karesine eşittir.

Uygun sıklık ve büyüklük dağılımının parametreleri, momentleri ve kümülantları belirlendikten sonra toplam hasar dağılımı S’nin kümülantları ise,

$$C_1(s) = C_1(N)C_1(x) \tag{2.57}$$

$$C_2(s) = C_2(N)C_1^2(x) + C_1(N)C_2(x) \tag{2.58}$$

$$C_3(s) = C_3(N)C_1^3(x) + 3C_2(N)C_1(x)C_2(x) + C_1(N)C_3(x) \tag{2.59}$$

$$C_4(s) = C_3(N)C_1^4(x) + 6C_3(N)C_1^2(x)C_2(x) + 3C_2(N)C_2^2(x)$$
$$+ 4C_2(N)C_1(x)C_3(x) + C_1(N)C_4(x) \tag{2.60}$$

eşitlikleri ile belirlenmektedir. Yukarıda $C_k(N)$ ve $C_k(x)$ ile gösterilen parametreler sıklık ve büyüklük dağılımlarının Eş. (2.49) - Eş. (2.52)'deki eşitlikler yardımıyla bulunan kümülantlarını ifade etmektedir [13].

Hesaplanan toplam hasar dağılımının kümülantları ile toplam hasar dağılımının karakteristik özellikleri yani; ortalama, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları elde edilmiş olmaktadır.

Ancak bu yöntem genel olarak hayat dışı sigortalarda (yangın, kasko, vb.) uygulanmaktadır. Hayat sigortaları için toplam hasar dağılımının daha iyi tahmin edilmesini sağlayan ve sadece sıklık dağılımı ile hasar büyüklüklerinin doğrudan kullanıldığı moment eşitleme yöntemi kullanılmaktadır.

Bu yöntemde her bir poliçe için hasar gelme olasılığı q_x olduğu varsayımı altında bu poliçelerin Bernoulli dağılımından geldiği varsayılmaktadır. Buna bağlı olarak;

N_j = j. poliçe için rastlantı değişkeni, N=0,1

q_j = j. poliçe için hasar getirme olasılığı (vefat olasılığı) ,

A_j = j. poliçenin teminat tutarı,

m = portföydeki poliçe sayısı,

L = hayat portföyü için beklenen toplam hasar değeri

olsun.

Bu değişkenlere bağlı olarak hayat portföyünün toplam hasar değeri L,

$$L = \sum_{j=1}^{m} A_j N_j \qquad N=0,1 \tag{2.61}$$

biçiminde ifade edilir [6].

$\mu'(N_j)$ hasar gösterge fonksiyonunun beklenen değeri olsun, buna bağlı olarak poliçe bazlı hasar sıklığını gösteren Bernoulli dağılımının kümülantları, moment ve merkezi momentlerine bağlı olarak sırasıyla şu şekilde ifade edilmektedir;

$$C(N_j) = \mu'(N_j) = q_j \tag{2.62}$$

$$C_2(N_j) = \mu_2(N_j) = q_j(1-q_j) \tag{2.63}$$

$$C_3(N_j) = \mu_3(N_j) = q_j(1-q_j)(1-2q_j) \tag{2.64}$$

$$C_4(N_j) = \mu_4(N_j) = q_j(1-q_j)(1-3q_j+3q_j^2) \tag{2.65}$$

$\mu'(L)$ toplam hasarın (L) beklenen değerini gösteren birinci momenti olsun. Buna bağlı olarak toplam hasar dağılımının kümülantları, moment ve merkezi momentlerine bağlı olarak sırasıyla şu şekilde ifade edilmektedir;

$$C(L) = \mu'(L) = \sum_{j=1}^{m} A_j q_j \tag{2.66}$$

$$C_2(L) = \mu_2(L) = \sum_{j=1}^{m} A_j^2 \, \mu_2(n_j) \tag{2.67}$$

$$C_3(L) = \mu_3(L) = \sum_{j=1}^{m} A_j^3 \, \mu_3(n_j) \tag{2.68}$$

$$C_4(L) = \mu_4(L) = \sum_{j=1}^{m} A_j^4 \, \mu_4(n_j) + 3\left[\left(\sum_{j=1}^{m} A_j^2 \, \mu_2(n_j)\right)^2 - \sum_{j=1}^{m} A_j^4 \, \mu_2^2(n_j)\right] \tag{2.69}$$

Eş. (2.68) - Eş. (2.69)'dan da görüldüğü üzere toplam hasar dağılımının kümülantları doğrudan bireysel hasar sıklığı dağılımının merkezi momentleri ve her bir poliçenin teminatları toplanarak elde edilmiştir [6].

Yaşa bağlı olarak belirlenen q_x değerleri ve teminat değerleri kullanılarak oluşturulan veri kümesinin kümülantları ile uygunluğu düşünülen istatistiksel dağılımların kümülantları eşitlenerek toplam hasar dağılımının fonksiyonu ve parametreleri belirlenmektedir.

Sigorta verisinin genel bir özelliği olarak L toplam hasar değeri, 0'dan küçük olamaz ve ayrıca portföydeki kişi sayısı arttıkça toplam hasar değerinin 0 olması olasılığının (L= 0) 0'a yakınsadığı bilinmektedir. Bunun yanında hayat ve hayat dışı branşlarda bugüne kadar kullanılan veri kümelerinin dağılımları gözlemlendiğinde toplam hasar dağılımının pozitif çarpık olduğu görülmüştür. Bu nedenle L toplam hasar dağılımından elde edilen kümülantlar ile Gamma, Üstel ve karma (Gamma+Üstel) dağılımlar gibi sağa çarpık sürekli dağılımların kümülantlarına eşitlemek daha uygun olacaktır.

4 SAKLAMA PAYININ BELİRLENMESİ

Bu Bölüm'de saklama payının tanımı ve belirlenmesinde etkili olan faktörlere değinilecektir.

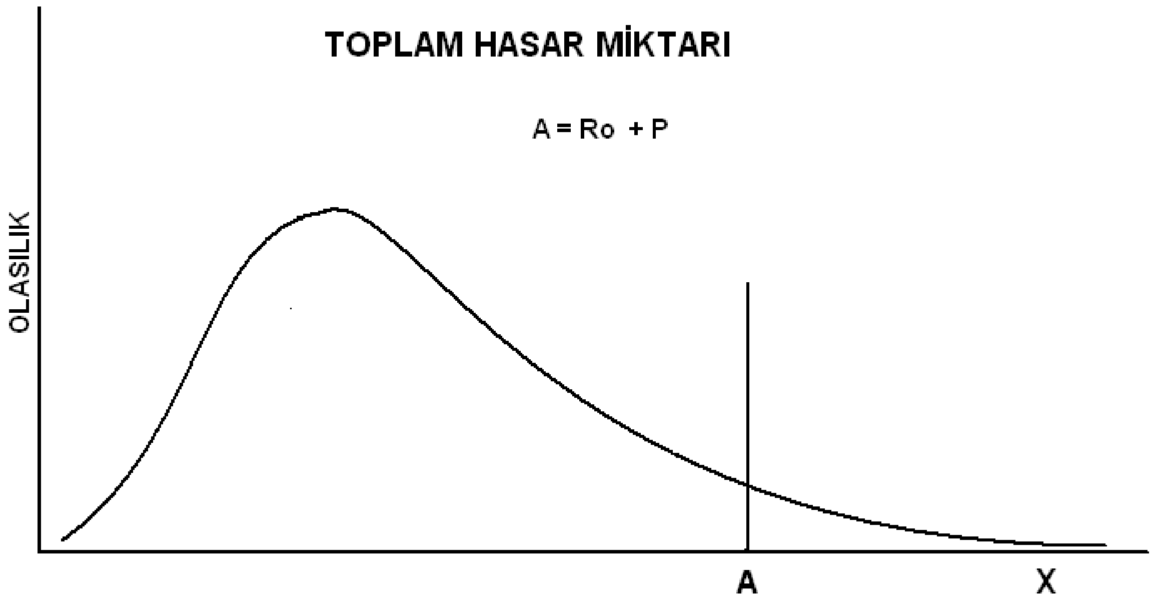
4.1 Saklama Payının Tanımı

Saklama payı sigorta şirketinin üzerinde tutmaya çekindiği maksimum kayıp miktarı olarak özetlenebilir. Daha düzgün bir ifade ile sigorta şirketinin tek bir riski veya bir grup riskini üstlenirken üzerinde tutabileceği veya tutmak isteyeceği miktara saklama payı denir [2].

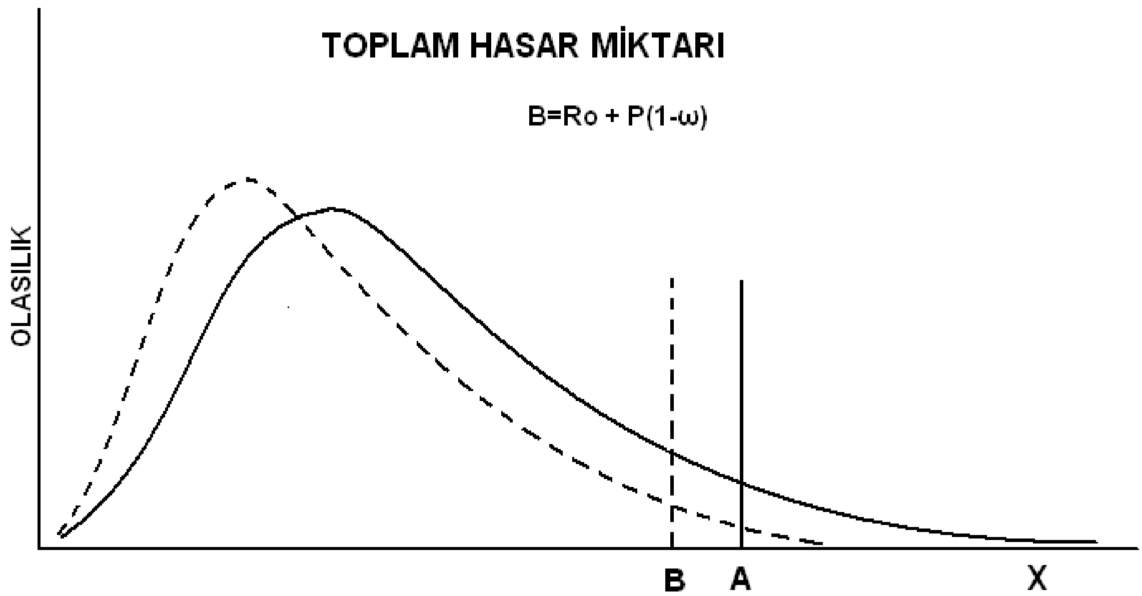
Bölüşmesiz reasürans anlaşmaları için muhtemelen en zor bölüm saklama payının belirlendiği kısımdır. Bunun nedeni optimal saklama payını belirlemede etkili çok sayıda parametrenin olmasıdır. Bir sigorta şirketinin geçmiş yıllara ait çok iyi veri kümesinin olması veya toplam hasarının tahmininde çok teknik bir altyapısının olması en uygun limitin belirlenmesinde yeterli olmamaktadır. Sigorta şirketi farklı saklama payları için, reasürans maliyeti ve üzerinde tuttuğu kısmın maliyetini, beklenen kaybı ve onun varyansını da göz önünde bulundurarak iyi bir şekilde dengelemesi gerekmektedir.

4.2 Saklama Payının Belirlenmesi ve Etkili Olan Faktörler

Saklama payının belirlenmesindeki temel amaç, sedan şirket açısından iflas olasılığının ve yıllık hasarlardaki dalgalanmaların kendisine olan etkisini minimize etmek bunun yanında karlılığını maksimize etmektir. Sedan iflas olasılığını minimize ederek hasarda meydana gelebilecek beklenmedik dalgalanmalara karşı kendini koruma altına almaktadır. Bir şirketin reasüransa başvurmadan önce bu dalgalanmalara karşı kendini koruyabileceği limit değeri, kısaca o branştaki önceki rezervleri ve o branştan yazdığı primlerin toplamı ile belirlenmektedir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2 de reasürans yapmadan önce ve reasürans sonrası sigorta şirketinin iflas olasılıkları ve kazandıkları pimler gösterilmiştir. Şekil 4.1 de reasürans öncesinde sedan şirketin yazdığı primlerin (P) tamamı kendine kalırken; beklenen toplam hasarın, yazdığı prim ve rezerv toplamını (R_0) geçme olasılığı, A noktasının sağ tarafında kalan alan olarak gösterilmiştir. Şekil 4.2 de ise toplam hasarın bir kısmını ve primleri ω oranında reasüransa devrettikten sonra iflas olasılığı, B noktasının sağında kalan kesikli alan olarak görülmektedir. Burada şirket yazdığı primlerden bir kısmını reasüröre devrederken iflas olasılığını azaltmaktadır [2;5].



Şekil 4-1: Reasürans Öncesi Toplam Hasar Dağılımı ve İflas Olasılığı



Şekil 4-2: Reasürans Sonrası Toplam Hasar Dağılımı ve İflas Olasılığı

Asıl soru buradaki devretme oranının nasıl belirleneceğidir. Sedan şirket saklama payını belirlerken ölçülebilen ve sübjektif birçok faktörü hesaba katmalıdır. Bu bölümde bu faktörlerin neler olduğu açıklanacaktır.

Teorik olarak bilinen bir şey var ki o da sedan şirketin ekonomik gücü, yıllık prim geliri, kapital ve rezervleri toplamı ile saklama payı arasında doğrudan bir ilişki olduğudur. Ancak şu anda bile sigorta şirketlerinin yazdıkları işlere ve sahip oldukları ekonomik güce oranla doğru saklama payını belirleyip belirlemedikleri tartışma konusudur. Bunun kontrolünü ya da doğruluğunu tespit edecek herhangi bir teorik ya da pratik uygulama mevcut değildir. Ancak sedan şirketlerin bu limiti belirlemede genel olarak kullandıkları belirli oranlar da mevcuttur. Bu oranlar şu şekilde özetlenebilir:

- Risk ya da olay başına yapılan anlaşmalarda şirketin kapital ve rezerv toplamının %1'i ile %5'i aralığında olması
- Belirli bir branşta yazılan işler için şirketin o branştan yazdığı risk primi gelirlerinin %1' i ile %10'u arasında olması
- Toplam hasar üzerinden yapılan anlaşmalarda yani hasar oranı fazlası reasürans anlaşmaları için ise şirketin aktif varlıklarının 5 katına kadar bir limit belirlenebilmektedir [2].

Burada üst limitler yeni kurulmuş ve yeterli mali güce kavuşmamış şirketler için verilirken alt sınırlar ise mali yönden güçlü şirketler için belirtilmiştir. Ancak bu limitler normal şartlar altında belirlenmiş limitler olup, saklama payının belirlenmesine etki eden diğer faktörlere bağlı olarak bu limitler dışında da belirlenebilir.

Saklama payının belirlenmesine etki eden diğer faktörler ise şu şekilde özetlenebilir;

$$R_t = f\,(\,N,\ p(x),\ C(z),\ A,\ r,\ \lambda,\ P_t,\ W,\ I,\ T\,)$$

Burada,

R_t = Saklama payı

n = Portföy büyüklüğü

P(x) = X Büyüklükteki hasarın gerçekleşme olasılığı

C(z) = Hasar gerçekleşmiş ise gerçekleşen “z” hasarının büyüklüğü

A = Kapital ve rezervin n’ye oranı

r = İçsel getiri oranı

λ = Prim yüklemesi

P_t = Kabul Edilen iflas olasılığı

W = Reasürans maliyeti

I = Sedanın yatırım politikası

T = Reasürans türünü

göstermektedir.

Yukarıda bahsedilen on faktör reasürans limitinin belirlenmesinde ayrı ayrı etkili olup sigorta şirketleri saklama payının belirlenmesinde son kararı ilgili mevzuat çerçevesinde kendileri vermektedir [2].

5 UYGULAMA

Bu bölümde tezin amacı doğrultusunda özel bir sigorta şirketinin 2006 yılı içinde bankadan kredi almış kişiler için tanzim ettiği bir yıllık hayat sigortası verisi kullanılacak olup, hasar oranı fazlası reasürans anlaşmasının farklı saklama paylarına göre reasürans primleri belirlenecektir. Reasüransa konu poliçeler bankadan kredi almış kişilerden oluştuğundan grup sigortası kapsamına girmektedir ve teminat tutarları bankadan alınan kredi miktarı kadardır. Poliçeler yalnızca vefat teminatı içermekte, başka ek teminat içermemektedir.

Uygulamada 2006 yılı içerisinde tanzim edilmiş 49334 poliçe için toplam hasar dağılımının tahmini ve farklı saklama payı değerleri için reasürans primi belirlenecektir.

İkinci Bölümde toplam hasar dağılımının tahmininde kullanılan yöntemlere değinilmişti. Bu yöntemlerden hayat sigortaları için kullanılan momentler yöntemi bu uygulamada kullanılmıştır.

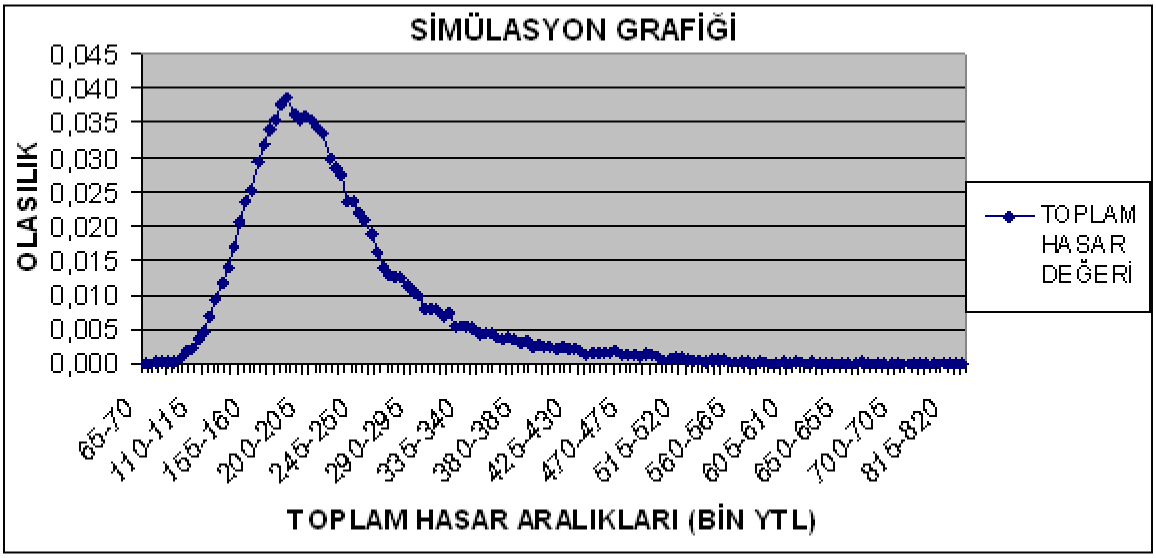
Uygulamada kullanılacak olan q_x değerleri, C.S.O. 1953-58 tablosundaki q_x değerlerinin, şirketin yaş ve cinsiyet kırılımında mortalite karı oranları ile çarpılması sonucu elde edilmiştir. Bu oranlar ise geçmiş beş yılın verileri kullanılarak elde edilmiştir.

Tablo 5.1'de şirketin bankadan kredi almış kişilere yaptığı 49334 hayat poliçesinin yaş, cinsiyet kırılımında teminat ve beklenen ölüm olasılıklarının değerleri vermektedir.

Tablo 5-1: Yaş ve Cinsiyet Bazlı Portföy Verisi

	CİNSİYET	YAŞ	q_x	TEMİNAT (A_j)
1	E	28	0,00208	2.000,00
2	E	51	0,00996	3.000,00
3	E	27	0,00203	1.000,00
4	K	49	0,00832	5.000,00
5	K	31	0,00225	1.500,00
6	E	35	0,00264	4.000,00
7	E	36	0,0028	1.500,00
8	E	43	0,00492	2.000,00
9	E	40	0,00384	3.000,00
10	E	39	0,00353	2.500,00
11	E	39	0,00353	2.500,00
12	E	35	0,00264	2.500,00
13	E	42	0,00453	1.500,00
14	E	30	0,00219	2.000,00
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
49332	E	32	0,00232	10.000,00
49333	K	35	0,00264	2.600,00
49334	E	27	0,00203	3.000,00

Mevcut veriye uygulanan simülasyon sonucunda toplam hasarın dağılımı Şekil 5.1'deki gibi elde edilmiştir. Şekildeki grafik 49334 adet poliçe için 0 ile 1 arasında ayrı ayrı rasgele değişken atayarak q_x olasılığının altında kalan değerler için ilgili poliçenin teminat değerlerini yazıp, diğerleri için ise 0 atayarak elde edilen teminat toplamının 40,000 defa tekrarlanması sonucunda elde edilmiştir.



Şekil 5-1: Portföy Simülasyon Grafiği

Şekil 5.1'de de görüldüğü üzere toplam hasarın beklenen değeri 229,140 YTL olup 68,750 YTL ile 841,000 YTL arasında değişen değerler aldığı görülmektedir. Grafikte de görüldüğü üzere toplam hasar dağılımı sağa çarpık ve uzun kuyruklu bir dağılıma sahip olduğu görülmektedir.

Toplam hasar dağılımı Şekil 5.1'deki gibi olan bir veri setine uygun olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için momentler yöntemi kullanılmıştır.

İkinci bölümdeki Eş. 2.66 – Eş. 2.69 nolu eşitlikler kullanılarak portföy verisinin ortalaması ve merkezi momentleri Tablo 5.2 deki gibi hesaplanmıştır. Tablo 5.2 de **μ(L)** ile gösterilen değer, toplam hasar dağılımının birinci momentini yani ortalamasını göstermektedir. **μ_k(L)** ile gösterilen değerler ise toplam hasar dağılımının k. merkezi momentlerini göstermektedir.

Tablo 5-2: Portföyün Moment Değerleri

μ (L)	μ_2 (L)	μ_3 (L)	μ_4 (L)
229.370	6.530.417.606	903.987.645.546.379	314.187.853.536.192.000.000

Tablo 5.2'deki veriler ışığında hayat portföyünün toplam hasar dağılımının karakteristik özellikleri şu şekilde olacaktır:

$$E(L) = \mu'(L) = \mu(L) = 229{,}370 \quad ,$$

$$VAR(L) = \mu_2(L) = \sigma_L^2 = 6{,}530{,}417{,}606 \quad ,$$

$$\delta_L = \frac{\mu_3(L)}{\sqrt{\mu_2(L)^3}} = 1.7129 \quad ,$$

$$k_L = \frac{\mu_4(L)}{\mu_2(L)^2} - 3 = 4{,}3673$$

Uygulamada toplam hasar dağılımının tahmininde, dağılımının sağa çarpık ve uzun kuyruklu bir dağılıma sahip olması nedeniyle Gamma ve Karma (Gamma + Üstel) dağılımları kullanılacaktır. Burada toplam hasarın dağılımının tahmininde karma dağılım kullanılmasınındaki temel mantık momentler yöntemine göre eşitleme yaparken, iki parametreli bir dağılım ile ancak ortalama ve varyans değerlerini eşitleme imkanının olması, ancak dağılımın şekli hakkında herhangi bir bilgi verememesidir. Bu nedenle üç parametreli karma dağılım kullanılarak dağılımların şekli hakkında önemli bir gösterge olan çarpıklık katsayısının belirlenmesi ve eşitlenmesi de sağlanmıştır. Bunun yanında simetrik dağılım olan Normal dağılım da toplam hasar dağılımının çarpıklığını karşılaştırmalı olarak görebilmemiz açısından uygulamada kullanılmıştır.

Toplam hasarların Normal dağıldığı varsayımı ile parametrelerini belirlemek için, Normal dağılımın ortalaması ve merkezi momentlerini portföyün ortalaması ve merkezi momentlerine eşitlenirse;

$\mathrm{X} \sim N(\mu, \sigma)$ için,

$$\mu = \mu(L) \Rightarrow \mu = 229{,}370$$

$$\sigma = \sqrt{\mu_2(L)} \Rightarrow \sigma = 80{,}811$$

olarak belirlenir. Parametreleri belirlenen Normal dağılımın ortalama, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları ise dağılımın parametrelerine bağlı olarak aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\mu_x = 229.370 \qquad \sigma_x^2 = 6{,}530{,}417{,}606$$
$$\delta_x = 0 \qquad k_x = 0$$

Toplam hasarın Gamma dağıldığı varsayımı ile parametrelerini belirlemek için, Gamma dağılımın ortalama ve merkezi momentlerini portföyün ortalaması ve merkezi momentlerine eşitlenirse;

$X \sim \mathrm{Gamma}\,(\alpha, \beta)$ için

$\alpha\beta = \mu(L)$ ve $\alpha\beta^2 = \mu_2(L)$ ise

$$\alpha = 8.6$$

$$\beta = 28{,}471.07$$

olarak bulunur.

Parametreleri belirlenen Gamma dağılımının ortalama, varyans, çarpıklık ve basıklık katsayıları ise dağılımın parametrelerine bağlı olarak;

$\mu_x = 229.370 \qquad \sigma_x^2 = 6{,}530{,}417{,}606$
$\delta_x = 0.7046 \qquad k_x = 0.7448$

biçiminde hesaplanmıştır.

Toplam hasarın karma (Gamma +Üstel) dağıldığı varsayımı ile parametrelerini belirlemek için, Karma dağılımın ortalama ve merkezi momentlerini portföyün ortalama ve merkezi momentlerine eşitlenirse;

$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) + \text{Üstel}(\lambda)$ için

$$\alpha\beta + \frac{1}{\lambda} = \mu(L)$$
$$\alpha^2\beta + \frac{1}{\lambda^2} = \mu_2(L)$$
$$2\alpha^3\beta + \frac{2}{\lambda^3} = \mu_3(L) \quad ise$$

$\alpha = 4{,}359.10$

$\beta = 35.05$

$\lambda = 0.0000131$

olarak bulunmuştur. Yukarıda verilen denklemin sisteminin kökleri Mathematica programı kullanılarak hesaplanmıştır.

$\mu_x = 229.370 \qquad \sigma_x^2 = 6{,}530{,}417{,}606$
$\delta_x = 1.7129 \qquad k_x = 7.2908$

Karma dağılım ile portföyün karakteristik özellikleri karşılaştırıldıklarında ortalama, varyans, ve çarpıklık katsayısında eşitlik, basıklık katsayısında ise çok yakın değerler gözlemlenmiştir.

Yukarıda parametreleri bulunan karma dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonunu belirlemek için ise Gamma ve Üstel dağılımın konvolüsyonunun hesaplanması gerekmektedir.

f(t) ve g(t) iki sürekli olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. Bu iki dağılımın konvolüsyonu aşağıdaki eşitlik ile hesaplanmaktadır;

$$\mathrm{f} * \mathrm{g}\,(\mathrm{t}) = \int_0^{\mathrm{t}} f(z)g(t-z)dz \qquad 4.1$$

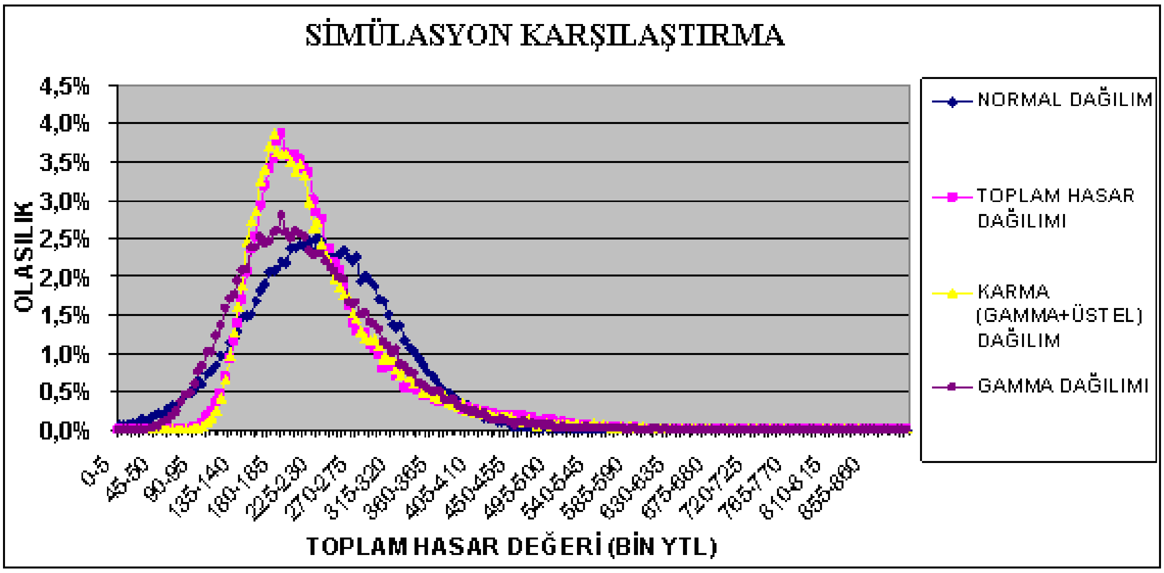
Bu formüle bağlı olarak parametreleri bilinen Gamma ve Üstel dağılımlarının konvolüsyonu aşağıdaki gibidir;

$$h(t) = f * g(t) = \int_0^t \frac{z^{35.51-1} e^{-\frac{z}{4359.1}}}{4359.1^{35.051}\Gamma(35.051)} x\ 0,0000131\, e^{-0.0000131\ (z-t)} dz$$

Bu eşitliğin sonucu da Mathematica programının yardımı ile şu şekilde elde edilir,

$$h(t) = e^{0.0000131\ t}(0.000102883 - 2.90838x10^{-43}\,\Gamma(35.051, 0.000216305t)$$

Karakteristik özellikleri karşılaştırılan bu üç dağılımın Şekil 5.2 de olasılık yoğunluk foksiyonları gösterilmiştir. Şekil 5.22'deki grafik, parametreleri bilinen olasılık yoğunluk fonksiyonlarının 40000 defa simüle edilmesi sonucunda elde edilmiştir. Grafikte de görüldüğü üzere Karma dağılımın toplam hasar dağılımını en iyi şekilde açıkladığı görülmektedir.



Şekil 5-2: Simüle Edilmiş Dağılımların Karşılaştırılması

Simülasyon grafiğinden elde edilen sonuçlar Khi Kare testi ile de karşılaştırdığımızda benzer sonuçlar elde edilmektedir..

Tablo 4.3'te Khi Kare testinin sonuçları verilmiştir.

H_0 : Toplam hasar dağılımı Gamma+Üstel dağılmıştır.

H_1 : Toplam hasar dağılımı Gamma+Üstel dağılmamıştır.

$\alpha = 0.005$ için $\chi^2_{(0.995,26)}$ = 48.289 kritik değeri iken test istatistiği değeri,

χ^2 = 41.67 < 48.289

olduğu görülmektedir.

Tablo 5.3'de de görüldüğü gibi Khi Kare test istatistiği de benzer sonuçları verdiğinden toplam hasar dağılımının Gamma(4359.1, 35.05) + Üstel(0.0000131) dağılımından geldiği söylenebilir.

Tablo 5-3: Khi Kare Testi Sonuçları

TOPLAM HASAR ARALIKLARI	GÖZLENEN TOPLAM HASAR DEĞERİ O_i	BEKLENEN TOPLAM HASAR DEĞERİ E_i	$(O_i-E_i)^2/E_i$
80000-110000	202	186,95	1,21
110000-140000	2026	2.057,56	0,48
140000-170000	6614	6.666,60	0,42
170000-200000	8768	8.682,88	0,83
200000-230000	7276	7.153,94	2,08
230000-260000	5114	5.019,37	1,78
260000-290000	3316	3.403,75	2,26
290000-320000	2261	2.298,42	0,61
320000-350000	1498	1.551,53	1,85
350000-380000	977	1.047,33	4,72
380000-410000	671	706,97	1,83
410000-440000	495	477,23	0,66
440000-470000	358	322,14	3,99
470000-500000	241	217,46	2,55
500000-530000	162	146,79	1,58
530000-560000	101	99,09	0,04
560000-590000	61	66,89	0,52
590000-620000	35	45,15	2,28
620000-650000	25	30,48	0,98
650000-680000	18	20,57	0,32
680000-710000	16	13,89	0,32
710000-740000	3	9,37	4,33
740000-770000	4	6,33	0,86
770000-800000	2	4,27	1,21
800000-830000	1	2,88	1,23
830000-860000	2	1,95	0,00
860000-889999	0	1,31	1,31
890000-920000	2	0,89	1,40
TOPLAM	**40249**	**40.241,98**	**41,67**

Toplam hasar dağılımı belirlenen hayat portföyünün reasürans limitinin ne olacağı, sedanın üzerinde tutacağı saklama payına göre değişiklik göstereceği ve belirlenmesinde etkili olan faktörlere Bölüm 3'te değinilmişti. Şirketin kendi risk politikasına göre belirleyeceği saklama payı limitine göre reasüröre devredeceği risk priminin hesabına ikinci bölümde değinilmişti. Örneğin 150000 YTL saklama payı belirleyen bir sigorta şirketinin reasüröre devredeceği risk primi şu şekilde hesaplanır;

$$P_S = E(Z_S) = \pounds_{F_S}(M) = \int_0^M x dF_S(x) + M\left[1 - F_S(M)\right]$$

ise

$$= \int_{0}^{150000} xe^{0.0000131x}(0.000102883 - 2.90838x10^{-43}\Gamma(35.051, 0.000216305x))dx$$

$$+150000\left[1 - \int_{0}^{150000} e^{0.0000131\,x}(0.000102883 - 2.90838x10^{-43}\Gamma(35.051, 0.000216305x))dx\right]$$

=13058+135518

$P_S =$ 148576 YTL

ise reasürörün payı;

$$P_R = E(Z_R) = £_{F_S}(\infty) - £_{F_S}(M) = \int_{M}^{\infty} [1 - F_S(x)]\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} xe^{0.0000131x}(0.000102883 - 2.90838x10^{-43}\Gamma(35.051, 0.000216305x))\, dx - 148576$$

=80196.34 YTL

olarak bulunur.

Farklı saklama payları için reasürör ve sadanın prim paylaşımı ise Tablo 5.4'deki gibidir.

Tablo 5-4: Saklama Payına Bağlı Reasürans Primleri

SAKLAMA PAYI	SEDANIN PRİMİ	REASÜRÖRÜN PRİMİ
50,000 TL	50,000.00 TL	178,772.34 TL
100,000 TL	99,995.37 TL	128,776.97 TL
150,000 TL	148,576.00 TL	80,196.34 TL
200,000 TL	185,608.29 TL	43,164.05 TL
250,000 TL	206,491.14 TL	22,281.20 TL
300,000 TL	217,317.77 TL	11,454.57 TL
350,000 TL	222,857.88 TL	5,914.46 TL
400,000 TL	225,710.07 TL	3,062.27 TL
450,000 TL	227,195.05 TL	1,577.29 TL
500,000 TL	227,956.15 TL	816.19 TL
550,000 TL	228,345.73 TL	426.61 TL
600,000 TL	228,550.22 TL	222.12 TL
650,000 TL	228,654.54 TL	117.80 TL
700,000 TL	228,714.28 TL	58.06 TL
750,000 TL	228,745.71 TL	26.63 TL
800,000 TL	228,762.12 TL	10.22 TL
850,000 TL	228,768.53 TL	3.81 TL
900,000 TL	228,769.77 TL	2.57 TL
950,000 TL	228,771.01 TL	1.33 TL

6 SONUÇ VE ÖNERİLER

Reasürans, sigortacılık ve reasürans piyasası için önemli bir risk transfer yöntemi olduğundan, bu piyasalarda faaliyet gösteren şirketlerin karlılıklarını arttırmak ve birtakım olumsuzluklara maruz kalmalarının önlenmesi amacıyla, üstlendikleri riskin özelliklerini olası kötü senaryolara karşı prim hesabını doğru bir şekilde yapmaları gerekmektedir.

Sigorta şirketleri için belirli zaman aralığında kaç adet hasar geleceği ve bu hasarların büyüklüklerinin ne olacağı çok önemlidir. Bu çerçevede rezerv ayırır, yatırım politikalarını belirler ve reasürans anlaşmasına bağlı olarak saklama payını belirlerler.

Bu çalışmada belirli bir branş için hasar oranı fazlası reasürans anlaşmasına sahip bir sigorta şirketinin beklenen toplam hasarının ne olduğu ve nasıl dağıldığı bulunmak istenmiş, bulunan toplam hasar dağılımına ve farklı saklama payı değerlerine bağlı olarak ta reasürans primi hesabı yapılmıştır. Çalışmada hasar oranı fazlası reasürans anlaşması için uygulama alanı geniş olmayan yıllık hayat sigortası portföyü kullanılmıştır. Uygulamada toplam hasarın dağılımını belirlemede Normal, Gamma ve Karma dağılımları kullanılmış ve bu dağılımlar için moment eşitleme yöntemi kullanılmıştır. Hayat portföyü için toplam hasarların dağılımını en iyi şekilde açıklayan dağılımın Karma dağılım olduğu görülmüş. Ancak burada elimizde yeterli sayıda toplam hasar verisi olmadığı için, similasyon tekniğiyle toplam hasar dağılımının uygunluğu test edilmiştir. Daha sonra toplam hasar dağılımı bulunan hayat portföyü için farklı saklama payı değerlerine bağlı olarak reasürans primleri hesaplanmıştır.

Edwalds [6] yıllık hayat verisi için toplam hasar dağılımının karma dağılımından geldiğini göstermişti. Tezin uygulama bölümünde de görüldüğü üzere karma dağılım hasar oranı fazlası reasürans primlerinin belirlenmesinde de makul sonuçlar verdiği görülmüştür.

Bunun yanında yapılan literatür araştırmasında yıllık hayat sigortası verisi için Beta ve Beta Üstü dağılımlarının toplam hasarların dağılımını belirlemede iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

7 KAYNAKLAR

[1] Antal, P. 2003, Quantitative methods in reinsurance. Lecture notes, Department of Mathematics, ETH Zürich.

[2] Carter,R. L., 1979, Reinsurance, Kluwer, London, 313-318, 321.

[3] Chaubey Y P,Garrido J,Trudeau S. 1998, On the Computation of Aggregate Claims Distributions,Some New Approximations,Insurance:Mathematics and Economics.

[4] Daykin, C. D., Pentikäinen, T. and Pesonen, M. 1994, Practical Risk Theory for Actuaries. Chapman & Hall, London, 55, 58, 79-80, 100-103.

[5] Dickson, D. 2006, Aggregate Claims, Solvency And Reinsurance, University of Melbourne.

[6] Edwalds, T. 2003, The Distribution of Aggregate Life Insurance Claims, Actuarial Research Conference ,Munich American Reassurance Co.

[7] Genç, Ö. 2002, Sigortacılık Sektörü Ve Türkiye'de Sigorta Sektörünün Fon Yaratma Kapasitesi, Türkiye Kalkınma Bankası Yayını., Ankara.

[8] Guaschi, F.E. 1968, Non-Proportional Reinsurance, A paper discussed by the Society, 55-61.

[9] Klugman, S. A., Panjer, H., H. and Willmot, G. E. 1998, Loss Models. John Wiley and Sons, New York, 295-297.

[10] Lee, Y., S., The Mathematics of Excess of Loss Coverages and Retrospective Rating-A GraphicalApproach, Proceedings of the CAS (PCAS) LXXV.

[11] Mazıbaş, M., 2005, VII. Ulusal Ekonometri ve İstatistik Sempozyumu Bildiriler Kitabı, İstanbul.

[12] Mesa, Y. 2002, Approximate Reinsurance Premiums, M.S. Thesis, Concordia University.

[13] Panjer, H. H. and Willmot, G. E. 1992, Insurance Risk Models. Society of Actuaries, Schaumburg, 167.

[14] Rytgaard, M., M., 2004, Stop Loss Reinsurance.

[15] Mathworld, 2008., http://mathworld.wolfram.com/search/index.html?query=distributions&collection=mathworld

[16] TSEV, 2008., http://www.tsev.org.tr/tr/default.asp?PID={CA02DDDD-AC56-4F94-9137-396FC1342D2A})

8 EKLER

Çalışmada Kullanılan VBA Kodları

Portföyün Toplam Hasar Dağılımı Simülasyonu

```
Sub Portföy_Simülasyon()

Sheets(1).Name = "Portföy_Simülasyonu"
'A2 kolonuna poliçenin yaş ve cinsiyetine bağlı qx olasılıkları
'B2 kolonuna poliçe bazlı teminatlar girilmeli
Range("A1") = "qx"
Range("B1") = "Aj"
Range("C1") = "Rassal Olasılık Değeri"
Range("D1") = "Hasar Simülasyonu"
Range("F1") = "Toplamı Hasar Değeri"
Range("H1") = "Toplam Hasar Dağılımı"

Range("A1:H1").Font.Bold = True
Columns.AutoFit

For i = 1 To 49000
    Sheets(1).Name = "Portföy_Simülasyon"
    Range("C2") = "=RAND()"
    Range("D2") = "=+IF(C[-1]<C[-3],C[-2],0)"
    Range("D2:D2").Select
    Selection.Copy
    Range("C2:D49335").PasteSpecial xlPasteFormulas
    Range("C2:D49335").Copy
    Range("C2:D49335").PasteSpecial xlPasteValues
    Range("F2") = "=SUM(C[-2]:R[49333]C[-2])"
    Range("H" & i + 1) = Range("F2")
Next i

End Sub
```

Toplam Hasar Dağılımına Uyan İstatistiksel Dağılımların Simülasyonu

```
Sub Dağılım_Simülasyon()

Sheets(2).Name = "Dağılım_Simülasyonu"

Range("A1") = "Rassal Olasılık Değeri"
Range("B1") = "Normal(229370.28 , 80811.00)"
Range("C1") = "Gamma(8.06 , 28471.07)"
Range("D1") = "Gamma(35.05 , 4359.10)"
Range("E1") = "Üstel(0.0000131)"
Range("F1") = "Gamma(35.05 , 4359.10)+Üstel(0.0000131)"

Range("A1:F1").Font.Bold = True
Columns.AutoFit


Range("A2") = "=RAND()"
Range("A2").Select
Selection.Copy
'simülasyon sayısı=49000
Range("A2:A49001").PasteSpecial xlPasteFormulas
Range("A2:A49001").Select
Selection.Copy
Selection.PasteSpecial xlPasteValues

Range("B2") = "=NormInv(C[-1], 229370.28 , 80811.00)"
Range("C2") = "=GammaInv(C[-2], 8.06, 28471.07)"
Range("D2") = "=GammaInv(C[-3], 35.05, 4359.10)"
Range("E2") = "=-LN(1-C[-4])/0.0000131"
Range("F2") = "=C[-2]+C[-1]"
Range("B2:F2").Select
Selection.Copy
Range("B2:F49001").PasteSpecial xlPasteFormulas

End Sub
```

9 ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : GÖKYAY YAVAN

Doğum Yeri : ADANA

Doğum Yılı : 1983

Medeni Hali : BEKAR

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1997-1999 ADAPAZARI ATATÜRK LİSESİ

Lise 1999-2000 ADANA GÜNDOĞDU KOLEJİ

Lisans2000-2005 ORTADOĞU TEKNİK ÜNİVERSİTESİ İSTATİSTİK BÖLÜMÜ

Yabancı Dil: İNGİLİZCE

İş Tecrübesi:

20.11.2006- Yapı Kredi Emeklilik A.Ş. İstanbul

Araştırma ve Geliştirme Müdürlüğü'nde hayat sigortası ve bireysel emeklilik ürün tasarımı, sistem geliştirme ve analizi.