BAZI ÖRNEKLEME TASARIMLARINDA VARYANS TAHMİN YÖNTEMLERİ

VARIANCE ESTIMATION METHODS IN SOME SAMPLING DESIGNS

YEŞİM ÜNYAZICI

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim Sınav Yönetmeliği'nin İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü DOKTORA TEZİ olarak hazırlanmıştır.

2008

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan :…………………………………………
Prof. Dr. Alptekin Esin

Üye (Danışman) :…………………………………………..
Prof. Dr. Hülya Çıngı

Üye :…………………………………………..
Prof. Dr. Öztaş Ayhan

Üye :…………………………………………..
Prof. Dr. Ceyhan İnal

Üye :…………………………………………..
Doç. Dr. Cem Kadılar

ONAY

Bu tez …/…/… tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Erdem YAZGAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

BAZI ÖRNEKLEME TASARIMLARINDA VARYANS TAHMİN YÖNTEMLERİ

Yeşim Ünyazıcı

Öz

Bu çalışmada, üç farklı örnekleme yönteminde (basit rasgele örnekleme, tabakalı rasgele örnekleme, sıralı küme örneklemesi), kitle varyansı tahmini için kullanılan çeşitli tahmin ediciler incelenmiştir. Bu tahmin edicilerin yan ve hata kareler ortalamaları çıkarsanmıştır. Tahmin ediciler birbirleriyle karşılaştırılmış ve hangi koşullar altında etkin olacakları incelenmiştir. Ayrıca kitle varyansı tahmini için genel sınıflar tanımlanmıştır. Genel sınıflardaki tahmin edicilerin, kitle varyansına uyarlanması yapılmıştır.

Çalışmanın Üçüncü Bölümü'nde, basit rasgele örnekleme ve tabakalı rasgele örnekleme yöntemleri için, kitle varyansı tahmin edicileri önerilmiştir. Bu tahmin ediciler klasik tahmin edicilerle karşılaştırılarak, önerilen tahmin edicilerin üstün olma koşulları bulunmuştur.

Sayısal örnekte, Biyoloji Bölümü Ekoloji Ana Bilim Dalı Lisansüstü öğrencisi Savcı (2007) tarafından yapılan Yüksek Lisans tez verileri kullanılmıştır. Çiçek boyu yardımcı değişken, çiçek pappus uzunluğu ilgilenilen değişken olmak üzere tahmin ediciler için farklı örnekleme yöntemlerinde, yan ve hata kareler ortalamaları hesaplanmıştır.

Çalışmanın son bölümünde ise, sayısal örneklerde elde edilen sonuçlara bağlı olarak önerilen tahmin edicilerin etkinlikleri incelenmiştir. Tahmin edicilerin duyarlılıkları tartışılıp yorumlanmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Basit rasgele örnekleme, tabakalı rasgele örnekleme, sıralı küme örneklemesi, varyans tahmini, yan, hata kareler ortalaması, oransal tahmin edici, yardımcı bilgi.

Danışman: Prof. Dr. Hülya Çıngı, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü.

VARIANCE ESTIMATION METHODS IN SOME SAMPLING DESIGNS

Yeşim Ünyazıcı

ABSTRACT

In this study, various kinds of estimators which are used to estimate population variance in three different sampling methods (simple random sampling, stratified random sampling, ranked set sampling) are studied. Bias and mean square errors of these estimators are obtained. The estimators are compared with each other and the conditions for being efficient are examined. General classes for the population variance are also defined. The estimators in general classes are adapted to variance estimators.

In the third section of this study, variance estimators for simple random sampling and stratified random sampling are suggested. These estimators are compared with the classical estimators and the superiority conditions are found.

In numerical example, the master thesis data of Savcı (2007), who was a master student in Department of Biology in Hacettepe University, are used. For different sampling methods, bias and mean square errors of the estimators are calculated considering the length of the flower as the auxiliary variable and the length of pappus of the flower as the variable of interest.

In the last section of the study, according to the results obtained in numerical example, the efficiencies of the estimators are examined. The precisions of the estimators are discussed.

KEY WORDS: Simple random sampling, stratified random sampling, ranked set sampling, variance estimation, bias, mean square error, ratio estimator, auxiliary information.

Advisor: Prof. Dr. Hülya Çıngı, Hacettepe University, Department of Statistics.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince, değerli katkı ve eleştirileriyle çalışmama yön veren, güleryüzü, bilgisi ve desteği ile her zaman yanımda olan değerli danışmanım Sayın Prof. Dr. Hülya ÇINGI'ya,

Önemli yorumları ve değerlendirmeleriyle çalışmama katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Ceyhan İNAL ve Sayın Doç. Dr. Cem KADILAR'a,

Çalışmanın uygulama aşamasında yardımlarını esirgemeyen Sayın Prof. Dr. Ayşe Boşgelmez ve Sayın Ar. Gör. Ayşegül Elif SAVCI'ya,

Çalışmam boyunca her zaman yanımda bana destek olan AİLEME ve EŞİME

içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

Sayfa

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam ediyor)

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

N: Kitle büyüklüğü

n : Örneklem büyüklüğü

f: Örnekleme oranı

λ : Düzeltme terimi

BRÖ : Basit rasgele örnekleme

TRÖ : Tabakalı rasgele örnekleme

SKÖ : Sıralı küme örneklemesi

HKO : Hata kareler ortalaması

DKO: Deneme kareler ortalaması

AGD: Asimtotik göreli duyarlılık

S_y^2 : y değişkeni kitle varyansı

s_y^2 : y değişkeni için örneklem varyansı

C_x : x değişkeninin değişim katsayısı

C_y : y değişkeninin değişim katsayısı

β_x : x değişkeninin basıklık katsayısı

β_y : y değişkeninin basıklık katsayısı

L: tabaka sayısı

N_h : h. tabaka büyüklüğü

n_h : h. tabaka örneklem büyüklüğü

W_h : h. tabaka ağırlığı

f_h : h. tabaka örnekleme oranı

λ_h : h. tabaka düzeltme terimi

y_{hi} : h. tabaka i. birim değeri

$\overline{Y}_h$: y değişkeni için h. tabaka ortalaması

$\overline{X}_h$: x değişkeni için h. tabaka ortalaması

$\overline{y}_h$: y değişkeni için h. tabaka örneklem ortalaması

$\overline{x}_h$: x değişkeni için h. tabaka örneklem ortalaması

S_{yh}^2 : y değişkeni için h. tabakada varyans

s_{yh}^2 : y değişkeni için h. tabakada örneklem varyansı

S^2_{xh} : x değişkeni için h. tabakada varyans

s^2_{xh} : x değişkeni için h. tabakada örneklem varyansı

S_{yxh} : h. tabakada x ve y değişkenleri arası kovaryans

s_{yxh} : h. tabakada x ve y değişkenleri arası örneklem kovaryansı

β_{yh} : h. tabakada y değişkeninin basıklık katsayısı

β_{xh} : h. tabakada x değişkeninin basıklık katsayısı

$X_{[r]}$: r. kümedeki r. sıralı birim

$X_{[r]i}$: i. tekrarda r. kümedeki r. sıralı birim

$\mu_{[r]}$: r. küme r. sıralı birim kitle ortalaması

$\sigma^2_{[r]}$: r. küme r. sıralı birim varyansı

$\hat{S}^2_i$: BRÖ'de kitle varyansı oransal tahmin edicisi , i=1,2,…15

$\overline{y}_{tb}$: y değişkeni için TRÖ ile kitle ortalaması tahmin edicisi

$\overline{x}_{tb}$: x değişkeni için TRÖ ile kitle ortalaması tahmin edicisi

$\hat{S}^2_{tb,y}$: y değişkeni için TRÖ'de kitle varyansı klasik tahmin edicisi

$\hat{S}^2_{tb,x}$: x değişkeni için TRÖ'de kitle varyansı klasik tahmin edicisi

$\hat{S}^2_{ob}$: y değişkeni için TRÖ'de kitle varyansı oransal birleşik tahmin edicisi

$\hat{S}^2_{obkci}$: y değişkeni için TRÖ'de kitle varyansı Kadılar ve Çıngı tahmin edicisi,i=1,…4

$\hat{\sigma}^2_S$: SKÖ'nde kitle varyansı Stokes tahmin edicisi

$\hat{\sigma}^2_{Mc}$ SKÖ'nde kitle varyansı MacEachern tahmin edicisi

$\tilde{\sigma}^2_S$: SKÖ'nde sonlu kitleler için kitle varyansı Stokes tahmin edicisi

$\tilde{\sigma}^2_{Mc}$ SKÖ'nde sonlu kitleler için kitle varyansı MacEachern tahmin edicisi

d_1 : Das ve Tripathi genel sınıf tahmin edicisi

d_2 ,d_3 : Srivastava genel sınıf tahmin edicisi

d^*_g : İki bilinen parametre için genel sınıf tahmin edicisi

e_i : d^*_g'ın alt sınıf tahmin edicisi , i=1,…9

$\hat{S}^2_{öneri(i)}$:BRÖ'de kitle varyansı için bu çalışmada önerilen tahmin edici, i=1,…14

$\hat{S}^2_{ötbi}$:TRÖ'de kitle varyansı için bu çalışmada önerilen tahmin edici, i=1,…11

BİRİNCİ BÖLÜM

1. GİRİŞ

Örnekleme yöntemlerinin teori ve uygulamaları son 40 yılda büyük bir gelişme göstermiştir. Örneklemenin kullanımı arttıkça ortaya çıkan verileri analiz edip yorumlamak için yöntemlere ihtiyaç duyulmuştur. Hemen hemen tüm analizlerde, iyi bir örnekleme yapabilmek için, verilerden elde edilen her bir parametrenin iyi bir tahmini yapılması gerekir. Örnekleme kuramında iki süreçten bahsedilir. İlk süreç, seçim sürecidir. Kitleden bir örneklem seçilerek kitlenin en iyi şekilde temsil edilebilmesi önemlidir. Kitlenin yapısı düşünülerek, en uygun örnekleme yöntemi ile örneklem seçilir. Örneklem seçiminde, maliyet, zaman ve emek etkenleri bir arada düşünülür ve en aza indirilmeye çalışılır. İkinci süreç ise, tahmin sürecidir. Seçim sürecinde kullanılan yönteme göre parametreler tahmin edilir. Örneklemden doğan hatalar belirlenir. Ne kadarlık bir hata ile parametrelerin tahmin edilebileceği, parametrelerin içinde bulundukları sınırlar belirlenebilir. Başlıca ihtiyaç, örneklem verisi ile elde edilen tahminler yardımıyla öngörüler yapmaktır. Örneklemden yapılacak olan tahminlerin bazı özellikleri sağlaması istenir. Tutarlılık, yansızlık, en küçük varyanslılık özelliklerini sağlayan tahmin ediciler tercih edilir. Ortalama, varyans, iki değişkenin birbirine oranı gibi kitle parametrelerinin tahminleri, seçilen örneklemden yararlanılarak yapılabilir.

En çok tahmin edilmek istenen parametrelerden biri de kitlenin S^2 varyansıdır. Genellikle varyans bilinmez ve örneklem verisinden tahmin edilir. Varyans, hem tahmine hem de örnekleme tasarımının yapısına bağlıdır. Bu nedenle varyans tahmini, hem tahmin ediciye hem de örnekleme tasarımına bağlı olarak ele alınmalıdır. Çeşitli örnekleme tasarımları için kitle varyansının tahmini klasik ve oransal ya da regresyon yöntemle yapılabilmektedir. Sadece örneklem verisi ile klasik tahminler yapılabileceği gibi, yardımcı bir değişkene ait ek bilgiler kullanılarak da oransal tahminler yapılmaktadır. Bu tahminler, istenen özellikleri de sağlamaktadır. Varyans tahminleri birbirleriyle karşılaştırılarak, üstün olma koşulları tartışılabilir.

KLasik olarak varyans tahminini örneklem verilerinden yararlanarak yapmışlardır. Daha sonra basit rasgele örnekleme yöntemi için çeşitli varyans tahmin edicileri geliştirilmiştir. Hirano(1973), bir sabit sayı düşünerek yeni bir varyans tahmin edicisi geliştirmiştir. 1978'de Das ve Tripathi yardımcı bir değişkenin kitle parametrelerinin bilindiğini varsayarak dört yeni tahmin edici önermişlerdir. 1983'te Isaki yine yardımcı bir değişkenin kitle parametreleri yardımıyla fark tahmin edicileri bulmuştur. Prasad ve Singh (1990), Hirano tahmin edicisi ile Das ve Tripathi tahmin edicilerini bir arada düşünerek, yeni tahmin ediciler önermişlerdir. 1999'da Upadhyaya ve Singh kitlede yardımcı değişkene ait basıklık katsayısının bilinmesi durumunda, tahmin ediciler önermişlerdir. 2005'te Chandra ve Singh, yine tahmin edicilerinde basıklık katsayısından yararlanmışlardır. Kadılar ve Çıngı (2006b;2007) ise, ağırlıklandırma yaparak yeni varyans tahmin edicileri geliştirmişlerdir. Önerilen bu tahmin edicilerin hata kareler ortalamaları elde edilerek karşılaştırılmalar yapılmıştır.

Tabakalı rasgele örneklemede (TRÖ) ise ilk çalışma Kadılar ve Çıngı (2006a) tarafından yapılmıştır. TRÖ'de kitle varyansı için klasik tahmin edici önermişlerdir. TRÖ'de birleşik oransal tahmin ediciler de yine Kadılar ve Çıngı (2006a) tarafından, yardımcı değişkene ait çeşitli kitle parametrelerinden yararlanılarak yapılmıştır.

Sıralı küme örneklemesinde 1980 yılında Stokes, kitle varyansını tahmin etmiştir. Daha sonra 2002 yılında MacEachern vd. yeni bir varyans tahmin edicisi önermiştir.

Bu çalışmada, İkinci Bölüm'de, çeşitli örnekleme tasarımları için (BRÖ, TRÖ, SKÖ), S^2 varyansının tahmin yöntemleri tanıtılacaktır. Bu varyans tahmin edicilerinin de raslantı değişkeni olması nedeniyle istenen özelliklere sahip olup olmadıkları incelenecektir. Bu özellikler yansızlık, tutarlılık ve küçük varyanslı olmasıdır. Ayrıca daha sonra yöntemler birbirleriyle karşılaştırılarak üstün olma koşulları bulunacaktır. Çalışmanın özgün kesimini oluşturan Üçüncü Bölüm'de, en küçük HKO'na sahip varyans tahmin edicileri önerilecektir. Varyans tahmini konusunda çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Oysa ki ortalama tahmin edicileri ile ilgili çok fazla çalışma yapılmış ve klasik oransal ortalama tahmin edicisinden daha küçük HKO'na sahip tahmin ediciler bulunmuştur. Bu durumdan yola çıkarak, varyans için de tahmin edicilerin önerilebileceği ve böylece klasik oransal varyans tahmin edicisinden daha küçük HKO'na sahip varyans tahmin edicilerine ulaşılabileği düşünülmüştür. BRÖ ve TRÖ'de çeşitli varyans tahmin edicileri önerilecektir. Bu varyans tahmin edicilerinin hangi koşullar altında klasik oransal varyans tahmin edicisinden küçük HKO'na sahip olacakları belirlenecektir. Dördüncü Bölüm'de bir çiçek için toplanan verilerle yapılacak uygulama ile önerilen tahmin edicilerin uygulamada da diğer tahmin edicilerden belirli koşullar altında etkin olup olmadıkları incelenecektir. Beşinci Bölüm'de ise elde edilen sonuçlar tartışılacak ve öneriler yapılacaktır.

İKİNCİ BÖLÜM

2.GENEL BİLGİLER

2.1. Basit Rasgele Örneklemede Varyans Tahmin Edicileri

Basit rasgele örnekleme (BRÖ), olasılıksal örneklemenin en basit ve temel yöntemidir. Yöntem pratikte çok fazla kullanılmasa da, diğer yöntemlerin temelini oluşturması bakımından önemlidir. Örneklem uzayında her bir birimin her bir çekilişte eşit seçilme şansına sahip olacak şekilde N birimden n birimi seçme yöntemine BRÖ adı verilir (Esin vd., 2001). BRÖ'de kitle varyansının tahmin edicisi bulunabilir.

y ilgilenilen değişken olmak üzere,

$$S_y^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(y_i - \overline{Y}\right)^2 \qquad (2.1)$$

kitle varyansının tahmin edicisi elde edilmek istenmektedir.

Burada $\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$, y değişkeninin kitle ortalaması ve N kitle büyüklüğüdür.

2.1.1. Klasik Tahmin Ediciler

Örnekleme kuramında seçim sürecinden sonra tahmin süreci gelir. Seçim sürecinde kullanılan yönteme göre parametreler tahmin edilir. BRÖ'de S_y^2 parametre değeri tahmin edilebilir. Varyans hesabı bakımından diğer tahminlere göre daha kolaydır.

S_y^2'nin klasik yansız tahmin edicisi aşağıdadır:

$$s_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \tag{2.2}$$

Burada $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, y değişkeninin örneklem ortalaması ve n örneklem büyüklüğüdür.

Eş. (2.2)'de verilen tahmin edici de bir raslantı değişkeni olduğundan varyansı Kendall ve Yule (1977)'den elde edilebilir. Kendall ve Yule varyans için,

$$\mathrm{Var}(m_r) = \frac{1}{n}\left(\mu_{2r} - \mu_r^2 + r^2\mu_2\mu_{r-1}^2 - 2\mu_{r-1}\mu_{r+1}\right) \tag{2.3}$$

biçiminde genel bir eşitlik elde etmiştir. Burada

$$\mu_{rs} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^r(x_i - \bar{X})^s}{N}, \quad \mu_r = \frac{\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^r}{N}, \quad \mu_s = \frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{X})^s}{N} \tag{2.4}$$

biçimindedir. Örneklem için de benzer şekilde,

$$m_{rs} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^r(x_i - \bar{x})^s}{n}, \quad m_r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^r}{n}, \quad m_s = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^s}{n} \tag{2.5}$$

olur.

Ortalamaya göre ikinci momenti (r=2) için,

$$m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}{n-1} = s_y^2$$

yazılabilir. Eş. (2.3)'te yerine yazılırsa,

$$Var\left(s_y^2\right) = Var\left(m_2\right) = \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \mu_2^2 + 4\mu_2\mu_1^2 - 4\mu_1\mu_3\right) \tag{2.6}$$

elde edilir. Üçüncü ve dördüncü terimler sıfır olduğundan,

$$\begin{aligned} Var\left(s_y^2\right) &= \frac{1}{n}\left(\mu_4 - \mu_2^2\right) \\ &= \frac{\mu_2^2}{n}\left(\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 1\right) \\ &= \lambda S_y^4(\beta_y - 1) \end{aligned} \tag{2.7}$$

elde edilir. Burada $\lambda = \frac{1}{n}$ ve $\beta_y = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, y değişkenine ait basıklık katsayısıdır (Çıngı, 2004).

S_y^2'nin bir başka tahmin edicisi Hirano (1973) tarafından aşağıdaki gibi bulunmuştur:

$$s_y^{2'} = As_y^2. \tag{2.8}$$

Burada s_y^2, Eş. (2.2)'de verilmiştir. Yanlı bir tahmin edici olduğundan hata kareler ortalaması,

$$HKO(s_y^{2'}) = E(s_y^{2'} - S_y^2)^2 \tag{2.9}$$

eşitliği ile elde edilir

Eş. (2.9)'da parantez içine AS_y^2 terimi bir kez eklenip bir kez de çıkartılırsa,

$$HKO(s_y^{2'}) = E\left[A^2(s_y^2 - S_y^2)^2 + 2(A-1)AS_y^2(s_y^2 - S_y^2) + (A-1)^2 S_y^4\right]$$

elde edilir. Beklenen değer alındığında, s_y^2 yansız bir tahmin edici olduğundan,

$$HKO(s_y^{2'}) = A^2 Var(s_y^2) + (A-1)^2 S_y^4$$

bulunur. Varyans Eş. (2.7)'den yerine yazıldığında,

$$HKO(s_y^{2'}) = S_y^4\left[A^2(1+\lambda(\beta_y - 1)) - 2A + 1\right] \qquad (2.10)$$

elde edilir.

A'nın optimal değerini bulmak için HKO eşitliğinin A'ya göre türevi alınarak sıfıra eşitlenir :

$$\frac{\partial HKO(s_y^{2'})}{\partial A} = 0 \quad ,$$

$$A_{opt} = \frac{1}{1+\lambda(\beta_y - 1)} \quad . \qquad (2.11)$$

A_{opt} değeri Eş. (2.10)'daki HKO'da yerine yazılarak,

$$HKO_{min}(s_y^{2'}) = S_y^4\left[\frac{\lambda(\beta_y - 1)}{1+\lambda(\beta_y - 1)}\right] \qquad (2.12)$$

elde edilir.

Hirano'nun basit tahmin edicisi ile klasik basit tahmin edici karşılaştırıldığında,

$$HKO_{min}(s_y^{2'}) < Var(s_y^2),$$

$$S_y^4\left[\frac{\lambda(\beta_y-1)}{1+\lambda(\beta_y-1)}\right] < \lambda S_y^4(\beta_y-1)$$

koşulu elde edilir. Buradan Hirano'nun tahmin edicisinin daha küçük HKO'na sahip olduğu görülmektedir (Çıngı, 2004).

2.1.2. Taylor Serisi Yöntemi

Örnekleme kuramında çoğu zaman gözlemlerin doğrusal olmayan tahminleri ile karşılaşılır. Oran tahmini, oranların farkı tahmini, korelasyon katsayısının tahmini, regresyon katsayısının tahmini gibi tahmin ediciler en sık kullanılanlardır. Doğrusal olmayan tahmin edicilerin tam olarak varyanslarını hesaplamak genellikle mümkün değildir.

Doğrusal olmayan bir tahmin edicinin varyansını hesaplamak için en çok kullanılan yöntemlerden biri, tahmin ediciyi, gözlemlerin doğrusal bir fonksiyonuna yaklaştırmaktır. Daha sonra bu doğrusal yaklaşıma örnekleme tasarımına uygun bir varyans formülü uygulanabilir. Bu durumda bir miktar yanlılık ortaya çıkar. Ancak doğrusal olmayan tahmin edicinin tutarlı bir varyansı bulunabilir.

Bu doğrusallaştırma yöntemi genellikle Taylor serisi yöntemi ile yapılır. N sonlu kitle ve **Y**$=(Y_1,...,Y_p)'$, p boyutlu kitle parametreleri vektörü olsun. $\hat{\mathbf{Y}}=(\hat{Y}_1,...,\hat{Y}_p)'$, n birimli bir örneklemde kitle parametrelerinin tahmin edicileri olsun.

İlgilenilen kitle parametresi $\theta = g(Y)$ ve tahmin edicisi $\hat{\theta} = g(\hat{Y})$ ile gösterilsin. İki farklı problem ortaya çıkabilir:

i) $\hat{\theta}$ 'nın tasarım varyansının yaklaşık değerini bulmak,

ii) $\hat{\theta}$ 'nın varyansı için uygun bir tahmin edici elde edebilmek.

Eğer g(Y) sürekli ve türevlenebilir bir fonksiyon ise,

$$\hat{\theta}-\theta=\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}(\hat{Y}_j-Y_j)+R(\hat{Y},Y) \tag{2.13}$$

yazılabilir. Burada,

$$R(\hat{Y},Y)=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 g(Y)}{\partial y_j \partial y_i}(\hat{Y}_j-Y_j)(\hat{Y}_i-Y_i) \tag{2.14}$$

biçimindedir. Sonlu kitlelerde genellikle $\hat{R}(\hat{Y},Y)$ kalanı ihmal edilir. O halde $\hat{\theta}$ için HKO,

$$(\hat{\theta}-\theta)^2=\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}(\hat{Y}_j-Y_j)\right]^2+2\sum_j\sum_i\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}(\hat{Y}_j-Y_j)\right]\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_i}(\hat{Y}_i-Y_i)\right]$$

olur. Eşitliğin her iki yanının beklenen değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}HKO(\hat{\theta}) &\cong \sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}\right]^2 E\left[(\hat{Y}_j-Y_j)^2\right]+2\sum_j\sum_i\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}\right]\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_i}\right]E\left[(\hat{Y}_j-Y_j)(\hat{Y}_i-Y_i)\right]\\ &=\sum_{j=1}^{p}\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}\right]^2 Var\left(\hat{Y}_j\right)+2\sum_j\sum_i\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}\right]\left[\frac{\partial g(Y)}{\partial y_i}\right]Cov\left(\hat{Y}_j,\hat{Y}_i\right)\\ &=\mathbf{d\Sigma d}' \end{aligned} \tag{2.15}$$

elde edilir. Burada,

$$
\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} Var(\hat{Y}_1) & Cov(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2) & ... & .... & Cov(\hat{Y}_1, \hat{Y}_p) \\ & Var(\hat{Y}_2) & ... & ... & Cov(\hat{Y}_2, \hat{Y}_p) \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ simetrik & ... & ... & ... & Var(\hat{Y}_p) \end{bmatrix},
$$

$$
\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g(Y)}{\partial y_1} & ... & \frac{\partial g(Y)}{\partial y_p} \end{bmatrix}
$$

biçimindedir. **Σ,** $\hat{\mathbf{Y}}$ 'nın pxp boyutlu varyans- kovaryans matrisidir. **d** ise, elemanları $d_j = \frac{\partial g(Y)}{\partial y_j}$ olan 1xp boyutlu vektördür.

2.1.3.Oransal (Ratio) Tahmin Ediciler

Kitlede, x_i ve y_i kitle birimlerinin iki ölçümü olsun. Değişkenlerin biri yardımıyla (bilgisiyle) diğeri tahmin edilebilir. Bu şekilde yapılan tahmine oransal tahmin adı verilir.

Kitleden BRÖ yöntemi ile n büyüklüğünde bir örneklem seçilmiş olsun. Örneklem birimlerine ait x_i ve y_i ölçümleri elde edilsin ve yardımcı değişken *x* değişkeni olarak alındığında bu değişkene ait kitle bilgisine ulaşılabiliyor olsun.

S_y^2 parametresinin tahmini bu bölümde anlatılan çeşitli yöntemlerle yapılmıştır.

Kitle varyansı için aşağıdaki tahmin ediciler Das ve Tripathi tarafından 1978 yılında önerilmiştir:

$$\hat{S}_1^2 = s_y^2 \left(\frac{\overline{X}}{\overline{x}} \right)^{\alpha} , \tag{2.16}$$

$$\hat{S}_2^2 = s_y^2 \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)^{\alpha} , \tag{2.17}$$

$$\hat{S}_3^2 = \frac{\overline{X} s_y^2}{\overline{X} + \alpha(\overline{x} - \overline{X})} , \tag{2.18}$$

$$\hat{S}_4^2 = \frac{s_y^2 S_x^2}{S_x^2 + \alpha(s_x^2 - S_x^2)} . \tag{2.19}$$

Bu tahmin edicilerde yardımcı değişkene ait $\overline{X}$ kitle ortalaması ya da S_x^2 kitle varyansının bilinmesi gerekir. Tahmin ediciler yanlıdır. Hata kareler ortalamaları ise Taylor serisi açılımından yararlanılarak bulunur.

Eş. (2.16) ile verilen tahmin edici için de Taylor serisi açılımından yararlanılır :

$$\text{HKO}(\hat{S}_1^2) \cong \mathbf{d \Sigma d'} . \tag{2.20}$$

Burada

$$\mathbf{d} = \left[\left. \frac{\partial h(a,\ b)}{\partial a} \right|_{s_y^2, \overline{X}} \quad \left. \frac{\partial h(a,\ b)}{\partial b} \right|_{s_y^2, \overline{X}} \right] , \tag{2.21}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} Var(s_y^2) & Cov(\overline{x}, s_y^2) \\ Cov(\overline{x}, s_y^2) & Var(\overline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda S_y^4(\beta_y - 1) & \lambda \mu_{21} \\ \lambda \mu_{21} & \lambda S_x^2 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

biçimindedir. Eş. (2.16)'da verilen tahmin edici için $h(a,b) = h(s_y^2, \overline{x}) = \hat{S}_1^2$'dir. Bu tanımlara göre Eş. (2.16)'daki varyans tahmin edicisi için **d** vektörü aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \dfrac{S_y^2}{\overline{X}} \end{bmatrix} . \tag{2.23}$$

Eş. (2.22) ve Eş. (2.23)'teki değerler Eş. (2.20)'de yerlerine yazılırsa,

$$HKO(\hat{S}_1^2) = \lambda \left[S_y^4 (\beta_y - 1) - 2\alpha \frac{S_y^2 \mu_{21}}{\overline{X}} + \alpha^2 \frac{S_y^4 S_x^2}{\overline{X}^2} \right] \tag{2.24}$$

bulunur. HKO'nın α'ya göre türevi alınarak sıfıra eşitlendiğinde optimal değeri elde edilir:

$$\frac{\partial HKO(\hat{S}_1^2)}{\partial \alpha} = 0 ,$$

$$\alpha_{opt} = \frac{\overline{X}\mu_{21}}{S_y^2 S_x^2} . \tag{2.25}$$

Bulunan optimal değer Eş. (2.24)'te yerine yazılırsa, minimum HKO aşağıdaki gibi elde edilir:

$$HKO_{min}(\hat{S}_1^2) = \lambda \left[S_y^4 (\beta_y - 1) - \frac{\mu_{21}^2}{S_x^2} \right] . \tag{2.26}$$

Eş. (2.17) ile verilen ikinci tahmin edici için de Taylor serisi yönteminden yararlanılarak türevlerden oluşan vektör ve varyans-kovaryans matrisi bulunur. Eş. (2.17)'de verilen tahmin edici için $h(a,b) = h(s_y^2, s_x^2) = \hat{S}_2^2$'dir. Bu tanımlara göre **d** vektörü ve **Σ** varyans-kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \dfrac{S_y^2}{S_x^2} \end{bmatrix} , \tag{2.27}$$

$$\mathbf{\Sigma}=\begin{bmatrix} Var(s_y^2) & Cov(s_x^2,s_y^2) \\ Cov(s_x^2,s_y^2) & Var(s_x^2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda S_y^4(\beta_y-1) & \lambda S_y^2 S_x^2(\theta-1) \\ \lambda S_y^2 S_x^2(\theta-1) & \lambda S_x^4(\beta_x-1) \end{bmatrix}. \tag{2.28}$$

Burada $Var(s_y^2)=\lambda S_y^4(\beta_y-1)$, $Var(s_x^2)=\lambda S_x^4(\beta_x-1)$ ve $Cov(s_y^2,s_x^2)=\lambda S_y^2 S_x^2(\theta-1)$'dir.

$HKO(\hat{S}_2^2)=\mathbf{d\Sigma d}'$ yazılırsa,

$$HKO(\hat{S}_2^2)=\lambda S_y^4\left[(\beta_y-1)-2\alpha(\theta-1)+\alpha^2(\beta_x-1)\right] \tag{2.29}$$

elde edilir. Burada β_x ve β_y sırasıyla x ve y değişkenlerine ait basıklık katsayıları ve $\theta=\dfrac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}}$'dir.

HKO'nın α'ya göre türevi alınarak sıfıra eşitlendiğinde optimal değeri elde edilir:

$$\frac{\partial HKO(\hat{S}_1^2)}{\partial\alpha}=0,$$

$$\alpha_{opt}=\frac{(\theta-1)}{(\beta_x-1)}. \tag{2.30}$$

Bulunan optimal değer HKO'nda yerine yazılırsa,

$$HKO_{min}(\hat{S}_2^2)=\lambda S_y^4\left[(\beta_y-1)-\frac{(\theta-1)^2}{(\beta_x-1)}\right] \tag{2.31}$$

elde edilir.

Tanımlanan üçüncü ve dördüncü tahmin edicilerin de hata kareler ortalamaları benzer biçimde elde edilir .

$HKO(\hat{S}_3^2)=HKO(\hat{S}_1^2)$'dir ve Eş. (2.26)'da verilmiştir. $HKO(\hat{S}_4^2)=HKO(\hat{S}_2^2)$'dir ve Eş. (2.31)'de verilmiştir.

Bu tahmin edicilerden yola çıkarak Isaki 1983 yılında aşağıdaki tahmin edicileri önermiştir:

$$\hat{S}_5^2 = W_1 s_y^2 - W_2(\bar{x} - \bar{X}), \tag{2.32}$$

$$\hat{S}_6^2 = W_1^* s_y^2 - W_2^*(s_x^2 - S_x^2). \tag{2.33}$$

Burada W_1^*, W_2^*, W_1 ve W_2 tahmin edicilerin hata kareler ortalamasını minimum yapacak şekilde bulunan sabit ağırlıklardır (Arcos vd., 2005).

Beşinci tahmin edici için, birinci türevlerden oluşan vektör aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} W_1 & -W_2 \end{bmatrix}. \tag{2.34}$$

Varyans-kovaryans matrisi Eş. (2.22)'de verilmiştir. Buna göre,

$$\begin{aligned} HKO(\hat{S}_5^2) &= W_1^2 Var(s_y^2) - 2W_1W_2 Cov(\bar{x}, s_y^2) + W_2^2 Var(\bar{x}) \\ &= W_1^2 \lambda S_y^4(\beta_y - 1) - 2W_1W_2\lambda\mu_{21} + W_2^2 \lambda S_x^2 \end{aligned} \tag{2.35}$$

elde edilir. $\hat{S}_6^2$ için, türevlerden oluşan vektör,

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} W_1^* & -W_2^* \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

olarak bulunur. Varyans-kovaryans matrisi Eş. (2.28)'de verilmiştir:

$$HKO(\hat{S}_6^2) = \lambda\left[W_1^{*2} S_y^4(\beta_y - 1) - 2W_1^* W_2^* S_y^2 S_x^2(\theta - 1) + W_2^{*2} S_x^4(\beta_x - 1)\right]. \tag{2.37}$$

Ayrıca S_x^2 bilgisinden yararlanarak yine Isaki (1983), S_y^2 için oransal tahmin ve fark tahmin edicileri önermiştir:

$$\hat{S}_7^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2, \tag{2.38}$$

$$\hat{S}_8^2 = s_y^2 + w(S_x^2 - s_x^2). \qquad (2.39)$$

Burada $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, S_x^2'nin yansız tahmin edicisidir. Ancak $\hat{S}_7^2$ yanlı bir tahmin edicidir.

Yedinci tahmin edici için, hata kareler ortalaması aşağıdaki gibi elde edilir:

$$HKO(\hat{S}_7^2) = E\left[(\hat{S}_7^2 - S_y^2)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{s_y^2}{s_x^2}S_x^2 - S_y^2\right)^2\right]. \qquad (2.40)$$

$\hat{V}_R = \frac{s_y^2}{s_x^2}$ ve $V_R = \frac{S_y^2}{S_x^2}$ olarak tanımlanırsa, $\hat{S}_7^2 = \hat{V}_R S_x^2$ ile ifade edilebilir. Bu durumda $HKO(\hat{S}_7^2) = S_x^4 HKO(\hat{V}_R)$,

$$HKO(\hat{V}_R) = E\left[(\hat{V}_R - V_R)^2\right],$$

$$HKO(\hat{V}_R) = HKO\left(\frac{s_y^2}{s_x^2} - V_R\right)^2$$

olur. $\frac{1}{s_x^4} \cong \frac{1}{S_x^4}$ varsayılırsa,

$$HKO(\hat{V}_R) \cong \frac{1}{S_x^4}E\left[(s_y^2 - V_R s_x^2)^2\right]$$

elde edilir. $S_y^2 = V_R S_x^2$'dir. Parantez içinden S_y^2 çıkartılır, $V_R S_x^2$ eklenir ve beklenen değer alınırsa,

$$HKO(\hat{V}_R) \cong \frac{1}{S_x^4} E\left(\left[\left(s_y^2 - S_y^2\right) - V_R\left(s_x^2 - S_x^2\right)\right]^2\right)$$

$$\cong \frac{1}{S_x^4}\left[Var(s_y^2) - 2V_R Cov(s_y^2, s_x^2) + V_R^2 Var(s_x^2)\right]$$

bulunur.

Varyans ve kovaryans değerleri Kendall ve Yule (1977)'den yerlerine yazılırsa,

$$Cov(s_y^2, s_x^2) = \lambda S_y^2 S_x^2(\theta - 1),\ Var(s_y^2) = \lambda S_y^4(\beta_y - 1),\ Var(s_x^2) = \lambda S_x^4(\beta_x - 1), \qquad (2.41)$$

$$HKO(\hat{V}_R) \cong \lambda \frac{S_y^4}{S_x^4}(\beta_y + \beta_x - 2\theta)$$

olur. Burada

$$HKO(\hat{S}_7^2) = S_x^4 HKO(\hat{V}_R)$$

olduğundan,

$$HKO(\hat{S}_7^2) = \lambda S_y^4\left(\beta_y + \beta_x - 2\theta\right) \qquad (2.42)$$

elde edilir.

Isaki'nin Eş. (2.38)'de verilen oransal tahmin edicisi ile Eş. (2.1)'de verilen klasik basit tahmin edici karşılaştırılabilir. Burada

$$HKO(\hat{S}_7^2) < Var(s_y^2),$$

$$\lambda S_y^4\left(\beta_y + \beta_x - 2\theta\right) < \lambda S_y^4(\beta_y - 1),$$

$$\frac{1 + \beta_x}{2} < \theta \qquad (2.43)$$

olduğunda, $\hat{S}_7^2$ oransal tahmin edici, s_y^2 tahmin edicisinden daha duyarlıdır (Çıngı, 2004).

Sekizinci tahmin edici olan ve Eş. (2.39)'da verilen fark tahmin edicisi için de Taylor serisi yönteminden yararlanılarak HKO'na ulaşılabilir. Tahmin edici için, kısmi türevlerden oluşan **d** vektörü,

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & -w \end{bmatrix} \tag{2. 44}$$

olur. Varyans-kovaryans matrisi de Eş. (2.28)'de verilmiştir :

$$HKO(\hat{S}_8^2) \cong \lambda\left[S_y^4(\beta_y - 1) - 2wS_y^2S_x^2(\theta - 1) + w^2S_x^4(\beta_x - 1)\right] . \tag{2.45}$$

HKO'nın w'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$w_{opt} = \frac{S_y^2(\theta - 1)}{S_x^2(\beta_x - 1)} \tag{2.46}$$

bulunur. Bulunan optimal değer HKO'nda yerine yazılırsa, minimum HKO elde edilir:

$$HKO_{min}(\hat{S}_8^2) \cong \lambda S_y^4\left[(\beta_y - 1) - \frac{(\theta - 1)^2}{(\beta_x - 1)}\right]. \tag{2.47}$$

(2.47)'deki fark tahmin edicisi ile Eş.(2.1)'de verilen klasik basit tahmin edici karşılaştırılabilir. Eğer,

$HKO(\hat{S}_8^2) < Var(s_y^2)$,

$$\lambda S_y^4\left[(\beta_y - 1) - \frac{(\theta - 1)^2}{(\beta_x - 1)}\right] < \lambda S_y^4(\beta_y - 1),$$

$$\frac{(\theta-1)^2}{(\beta_x-1)}>0 \quad \text{yani } \beta_x>1$$

ise, $\hat{S}_8^2$ oransal tahmin edici, s_y^2 tahmin edicisinden daha duyarlıdır.

Oransal bir başka tahmin edici, Prasad ve Singh (1990) tarafından önerilmiştir.

Eş. (2.38)'de verilen tahmin edicisinde, s_y^2 yerine Hirano (1973) tarafından önerilen $s_y^{2'}$ kullanılmıştır :

$$\hat{S}_9^2=\frac{s_y^{2'}}{s_x^2}S_x^2$$

$$=\frac{A_1 s_y^2}{s_x^2}S_x^2.$$

A yerine de Eş. (2.11)'de bulunan optimal A değeri yazılırsa,

$$\hat{S}_9^2=\frac{(1+\lambda(\beta_y-1))^{-1}s_y^2}{s_x^2}S_x^2 \tag{2.48}$$

bulunur. Yukarıda önerilen tahmin edici, yanlı bir tahmin edicidir.

$\frac{s_y^{2'}}{s_x^2}=\hat{V}_R{'}$ ve $V_R=\frac{S_y^2}{S_x^2}$ ile gösterilirse, hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{S}_9^2)=S_x^4 HKO(\hat{V}_R{'}) \tag{2.49}$$

olur. Öncelikle $HKO(\hat{V}_R{'})$ bulunur ve eşitlikte yerine yazılır:

$$HKO(\hat{V}_R{}') = E\left[\left(\frac{s_y^{2'}}{s_x^2} - V_R\right)^2\right].$$

$\dfrac{1}{s_x^4} \cong \dfrac{1}{S_x^4}$ olarak varsayıldığında,

$$HKO(\hat{V}_R{}') \cong \frac{1}{S_x^4} E\left[(s_y^{2'} - V_R s_x^2)^2\right]$$

elde edilir. Parantez içinden S_y^2 çıkartılır ve $V_R S_x^2$ eklenirse,

$$HKO(\hat{V}_R{}') \cong \frac{1}{S_x^4}\left\{E\left[(s_y^{2'} - S_y^2)^2\right] - 2V_R E\left[(s_y^{2'} - S_y^2)(s_x^2 - S_x^2)\right] + V_R^2 E\left[(s_x^2 - S_x^2)^2\right]\right\}$$

bulunur. Burada

$$E\left[(s_y^{2'} - S_y^2)^2\right] = Var(s_y^{2'}) = A_{opt}\lambda S_y^4(\beta_y - 1),$$

$$E\left[(s_y^{2'} - S_y^2)(s_x^2 - S_x^2)\right] = Cov(s_y^{2'}, s_x^2) = A_{opt}\lambda S_y^2 S_x^2(\theta - 1), \qquad (2.50)$$

$$E\left[(s_x^2 - S_x^2)^2\right] = Var(s_x^2) = \lambda S_x^4(\beta_x - 1)$$

biçimindedir. O halde hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{V}_R{}') \cong \frac{\lambda S_y^4}{S_x^4}\left[(A_{opt}(\beta_y - 2\theta + 1) + \beta_x - 1)\right] \qquad (2.51)$$

elde edilir. $A_{opt} = \left(1 + \lambda(\beta_y - 1)\right)^{-1}$ değeri, eşitlikte yerine yazıldığında,

$$\mathrm{HKO}(\hat{V}_R{}') \cong \frac{\lambda S_y^4}{S_x^4}\left[\frac{(\beta_y - 2\theta + 1)}{1+\lambda(\beta_y - 1)} + (\beta_x - 1)\right] \tag{2.52}$$

bulunur ve

$$\mathrm{HKO}(\hat{S}_9^2) = S_x^4 \mathrm{HKO}(\hat{V}_R{}')$$

olduğundan,

$$\mathrm{HKO}(\hat{S}_9^2) \cong \lambda S_y^4\left[\frac{(\beta_y - 2\theta + 1)}{1+\lambda(\beta_y - 1)} + (\beta_x - 1)\right] \tag{2.53}$$

elde edilir.

Önerilen tahmin edici Eş. (2.38)'deki oransal tahmin edici ile karşılaştırılırsa,

$$\mathrm{HKO}(\hat{S}_9^2) < \mathrm{HKO}(\hat{S}_7^2),$$

$$\lambda S_y^4\left[\frac{(\beta_y - 2\theta + 1)}{1+\lambda(\beta_y - 1)} + (\beta_x - 1)\right] < \lambda S_y^4(\beta_y + \beta_x - 2\theta),$$

$$\theta < \frac{\beta_y + 1}{2} \tag{2.54}$$

bulunur. Bu koşul altında $\hat{S}_9^2$, $\hat{S}_7^2$'den daha duyarlıdır (Çıngı, 2004).

Bir başka oransal tahmin edici yine Prasad ve Singh (1990) tarafından önerilmiştir:

$$\hat{S}_{10}^2 = \frac{A s_y^2}{s_x^2} S_x^2 . \tag{2.55}$$

Yukarıda önerilen tahmin edici yine yanlı bir tahmin edicidir. Burada Eş. (2.49)'daki tahmin edicisinden farklı olarak, Hirano (1973) tarafından bulunan A sabiti kullanılmamıştır. A herhangi bir sabit değerdir.

$\hat{V}_R = \dfrac{As_y^2}{s_x^2}$ ve $V_R = \dfrac{S_y^2}{S_x^2}$ ile gösterilirse, hata kareler ortalaması,

$$HKO(\hat{S}_{10}^2) = S_x^4 HKO(\hat{V}_R) \tag{2.56}$$

olur. O halde öncelikle $HKO(\hat{V}_R)$ bulunmalıdır:

$$HKO(\hat{V}_R) = E\left[(\hat{V}_R - V_R)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{As_y^2}{s_x^2} - V_R\right)^2\right].$$

Burada $\dfrac{1}{s_x^4} \cong \dfrac{1}{S_x^4}$ olarak varsayıldığında,

$$HKO(\hat{V}_R) \cong \frac{1}{S_x^4}\left[A^2E(s_y^4) - 2AV_RE(s_y^2s_x^2) + V_R^2E(s_x^4)\right]$$

olur. Beklenen değerler yerlerine yazıldığında,

$$HKO(\hat{V}_R) \cong \frac{S_y^4}{S_x^4}\left[A^2(1+\lambda(\beta_y - 1)) - 2A(1+\lambda(\theta - 1)) + \lambda(\beta_x - 1) + 1\right] \tag{2.57}$$

bulunur ve

$$HKO(\hat{S}_{10}^2) = S_x^4 HKO(\hat{V}_R)$$

olduğundan,

$$HKO(\hat{S}_{10}^2) \cong S_y^4\left[A^2(1+\lambda(\beta_y-1))-2A(1+\lambda(\theta-1))+\lambda(\beta_x-1)+1\right] \tag{2.58}$$

elde edilir. A için optimal değeri bulabilmek amacıyla, HKO'nın A'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$A = A_{opt2} = \frac{1+\lambda(\theta-1)}{1+\lambda(\beta_y-1)} \tag{2.59}$$

optimal değeri bulunur. Bu değer HKO'nda yerine yazılırsa, minimum HKO aşağıdaki gibi elde edilir:

$$HKO_{min}(\hat{S}_{10}^2) \cong \lambda S_y^4\left[\beta_x-1+\frac{\beta_y-1-(\theta-1)(\lambda(\theta-1)+2)}{1+\lambda(\beta_y-1)}\right]. \tag{2.60}$$

Eş. (2.38)'de verilen HKO ile Eş (2.60)'da verilen HKO karşılaştırılabilir. Eğer,

$HKO\ (\hat{S}_{10}^2) < HKO\ (\hat{S}_7^2)$,

$$\lambda S_y^4\left[\beta_x-1+\frac{\beta_y-1-(\theta-1)(\lambda(\theta-1)+2)}{1+\lambda(\beta_y-1)}\right] < \lambda S_y^4\left(\beta_y+\beta_x-2\theta\right),$$

$$\theta < \frac{\beta_y-1}{2} \tag{2.61}$$

ise, $\hat{S}_{10}^2$ oransal tahmin edicisi, $\hat{S}_7^2$ tahmin edicisinden daha duyarlıdır (Çıngı, 2004).

Eş. (2.43) ve Eş. (2.54) birlikte düşünüldüğünde, $\hat{S}_7^2$, $\hat{S}_9^2$ ve s_y^2 tahmin edicileri için aşağıdaki sonuca ulaşılır :

$HKO(\hat{S}_9^2) < HKO(\hat{S}_7^2) < Var\ (s_y^2)$,

$$\frac{1+\beta_x}{2} < \theta < \frac{1+\beta_y}{2} \ . \qquad (2.\ 62)$$

Bu koşul sağlanırsa, $\hat{S}_9^2$ tahmin edicisi, $\hat{S}_7^2$'den ve s_y^2'den daha duyarlıdır.

Dağılım bilindiğinde x değişkeninin basıklık katsayısı da bilinir. Hem S_x^2 hem de β_x bilgileri kullanılarak Upadhyaya ve Singh (1999), aşağıdaki oransal tahmin ediciyi önermişlerdir:

$$\hat{S}_{11}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 + \beta_x}(S_x^2 + \beta_x)\ . \qquad (2.63)$$

Bu yanlı bir tahmin edicidir ve Taylor serisinden yararlanılarak hata kareler ortalaması bulunur:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{S_y^2}{S_x^2 + \beta_x} \end{bmatrix}. \qquad (2.64)$$

Varyans-kovaryans matrisi Eş. (2.28)'de verilmiştir. Hata kareler ortalaması,

$$\text{HKO}(\hat{S}_{11}^2) \cong \lambda S_y^4\left[(\beta_y - 1) + A^2(\beta_x - 1) - A(\theta - 1)\right] \qquad (2.65)$$

olur. Burada A bir sabit sayı olup,

$$A = \frac{S_x^2}{S_x^2 + \beta_x}$$

biçiminde tanımlanır.

Klasik oransal tahmin edici ile karşılaştırılırsa,

$$\text{HKO}(\hat{S}_{11}^2) < \text{HKO}(\hat{S}_7^2)\ ,$$

$$\theta < \frac{\beta_x(\beta_x + 2S_x^2 + 1)}{2(S_x^2 + \beta_x)} \tag{2.66}$$

olduğunda, Eş. (2.63) ile verilen tahmin edici klasik oransal tahmin ediciden daha duyarlıdır.

Eş.(2.63)'teki tahmin ediciye benzer tahmin ediciler de geliştirilmiştir:

$$\hat{S}_{11\text{-}1}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 + C_x}(S_x^2 + C_x),$$

$$\hat{S}_{11\text{-}2}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 C_x + \beta_x}(S_x^2 C_x + \beta_x),$$

$$\hat{S}_{11\text{-}3}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 \beta_x + C_x}(S_x^2 \beta_x + C_x).$$

Bu tahmin ediciler için de HKO benzer biçimde elde edilir :

$$HKO(\hat{S}_{11\text{-}i}^2) \cong \lambda S_y^4\left[(\beta_y - 1) + A_i^2(\beta_x - 1) - A_i(\theta - 1)\right], \text{ i=1,2,3.}$$

Burada $A_1 = \dfrac{S_x^2}{S_x^2 + C_x}$, $A_2 = \dfrac{S_x^2 C_x}{S_x^2 C_x + \beta_x}$, $A_3 = \dfrac{S_x^2 \beta_x}{S_x^2 \beta_x + C_x}$'dir (Çıngı, 2004).

Chandra ve Singh (2005) tarafından oransal tahmin ediciler ağırlıklandırma yapılarak üç farklı şekilde önerilmiştir :

$$\hat{S}_{12}^2 = s_y^2 \frac{\beta_x + S_x^2}{\alpha(\beta_x + s_x^2) + (1-\alpha)(\beta_x + S_x^2)}, \tag{2.67}$$

$$\hat{S}_{13}^2 = s_y^2\left(\frac{S_x^2 + \beta_x}{s_x^2 + \beta_x}\right)^{\delta}, \tag{2.68}$$

$$\hat{S}_{14}^2 = s_y^2\left[2-\left(\frac{s_x^2+\beta_x}{S_x^2+\beta_x}\right)^{\varphi}\right] \quad . \tag{2.69}$$

Tahmin ediciler S_y^2'nin yanlı tahmin edicileridir.Tahmin edicilerin yanı yine Taylor Serisi Yöntemiyle bulunmuştur :

$$\mathrm{Yan}(\hat{S}_{12}^2) = \lambda S_y^2\left[\alpha A\left(\alpha A(\beta_x - 1) - (\theta - 1)\right)\right] \tag{2.70}$$

Hata kareler ortalaması da Taylor serisi yönteminden yaralanılarak elde edilir :

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha S_y^2}{S_x^2+\beta_x} \end{bmatrix}.$$

$\boldsymbol{\Sigma}$, Eş. (2.28)'de verilmiştir. Hata kareler ortalaması, Eş.(2.29) kullanılarak,

$$\mathrm{HKO}(\hat{S}_{12}^2) = \lambda S_y^4(\beta_y - 1) + \alpha A\left[\alpha A(\beta_x - 1) - 2(\theta - 1)\right] \tag{2.71}$$

elde edilir. Varyansın α'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde optimal α değeri bulunur :

$$\alpha_{opt} = \frac{\theta - 1}{A(\beta_x - 1)}\,. \tag{2.72}$$

Bulunan optimal değer, Eş. (2.71)'de yerine yazılırsa, minimum HKO elde edilebilir.

Eş.(2.68) ve Eş. (2.69)'daki tahmin ediciler için de minimum HKO aynıdır:

$$\mathrm{HKO}_{min}(\hat{S}_{12}^2) = \mathrm{HKO}_{min}(\hat{S}_{13}^2) = \mathrm{HKO}_{min}(\hat{S}_{14}^2) = \lambda S_y^4\left[(\beta_y - 1) - \frac{(\theta-1)^2}{(\beta_x - 1)}\right] \tag{2.73}$$

ve

$$\alpha_{opt} = \delta_{opt} = \varphi_{opt} = \frac{(\theta-1)(S_x^2+\beta_x)}{S_x^2(\beta_x-1)} = \frac{(\theta-1)}{A(\beta_x-1)}. \tag{2.74}$$

Kadılar ve Çıngı, 2006b'de, basit rasgele örneklemede, yardımcı değişken kitle bilgisi kullanılarak, kitle varyansı için yeni bir tahmin edici önermişlerdir. Bu tahmin edici, Shabbir ve Yaab'ın 2003 yılında önerdiği kitle ortalaması tahmin edicisinin, kitle varyansına uyarlaması biçimindedir:

$$\hat{S}_{15}^2 = W_1 s_y^2 + W_2 \frac{s_y^2}{s_x^2}\tau S_x^2. \tag{2.75}$$

Burada W_1 ve W_2 ağırlıklardır öyle ki W_1 + W_2=1'dir. $\tau = \dfrac{1+\lambda C_{xy}}{1+\lambda C_x^2}$ ise, bir sabit değerdir. Önerilen tahmin edici için hata kareler ortalaması, Taylor serisi yöntemi ile elde edilmiştir.

$$HKO(\hat{S}_{15}^2) \cong \mathbf{d\Sigma d}'$$

Tanımlara göre önerilen tahmin edici için, birinci türevlerden oluşan vektör,

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} W_1 + W_2\tau & -\dfrac{W_2 S_y^2 \tau}{S_x^2} \end{bmatrix}$$

olur.

Varyans-kovaryans matrisi ise, Eş. (2.28)'de verilmiştir.

HKO,

$$HKO(\hat{S}_{15}^2) \cong \lambda S_y^4\left[(W_1+W_2\tau)^2(\beta_y-1) - 2(W_1+W_2\tau)W_2\tau(\theta-1) + W_2^2\tau^2(\beta_x-1)\right] \tag{2.76}$$

elde edilmiştir.

Minimum HKO'nı bulabilmek amacıyla, W_1'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$W_1^* = \frac{\tau\left(\beta_y^* + \beta_x^* - 2\theta^*\right) + \theta^* - \beta_y^*}{\tau\left(\beta_y^* + \beta_x^* - 2\theta^*\right) + 2\theta^* - 2\beta_y^* + \beta_y^*/\tau}, \tag{2.77}$$

$$W_2^* = 1 - W_1^*$$

elde edilir. Burada, $\beta_y^* = \beta_y - 1$, $\beta_x^* = \beta_x - 1$, $\theta^* = \theta - 1$ olarak kabul edilebilir ve

$$HKO_{min}(\hat{S}_{15}^2) \cong \lambda S_y^4\left[(W_1^* + W_2^*\tau)^2\beta_y^* - 2(W_1^* + W_2^*\tau)W_2^*\tau\theta^* + W_2^{*2}\tau^2\beta_x^*\right] \tag{2.78}$$

elde edilir.

Tahmin edici, klasik oransal tahmin edici ile ve regresyon tahmin edicisi ile karşılaştırılmıştır. Eğer,

$$HKO_{min}(\hat{S}_{15}^2) < HKO(\hat{S}_7^2),$$

$$\lambda S_y^4\left(W^2\beta_y^* - 2W\,W_2^*\tau\theta^* + W_2^{*2}\tau^2\beta_x^*\right) < \lambda S_y^4\left(\beta_y + \beta_x - 2\theta\right),$$

$$\left(W^2\beta^*{}_y - 2W\,W_2^*\tau\theta^* + W_2^{*2}\tau^2\beta_x^*\right) - \left(\beta_y + \beta_x - 2\theta\right) < 0 \tag{2.79}$$

eşitsizliği sağlanırsa, önerilen tahmin edici, klasik tahmin ediciye göre daha duyarlı olacaktır. $W = W_1^* + W_2^*\tau$ olarak alınmıştır.

Aynı şekilde regresyon tahmin edicisi ile de karşılaştırma yapılmıştır. Eğer,

$$HKO_{min}(\hat{S}_{15}^2) < HKO(\hat{S}_8^2),$$

$$\lambda S_y^4\left(W^2\beta_y^* - 2W\,W_2^*\tau\theta^* + W_2^{*2}\tau^2\beta_x^*\right) < \lambda S_y^4\left(\beta_y^* - \frac{\theta^{*2}}{\beta_x^*}\right)$$

$$\left[(W-1)^2\beta_y^* - 2W\,W_2^*\tau\theta^* + W_2^{*2}\tau^2\beta_x^*\right] + \left(\frac{\theta^{*2}}{\beta_x^*}\right) < 0 \qquad (2.80)$$

eşitsizliği sağlanırsa, önerilen tahmin edici, regresyon tahmin edicisine göre daha duyarlı olacaktır.

$\tau = 1$ olduğunda, eşitsizliğin sol yanı da 0 olacağından, iki tahmin edici arasında bir fark olmayacaktır (Kadılar ve Çıngı, 2006b).

2.2. Tabakalı Rasgele Örneklemede Varyans Tahmin Edicileri

N büyüklüğünde bir kitle, $N_1, N_2, ..., N_L$ büyüklüklerinde homojen alt parçalara ayrılarak uygulanan örnekleme yöntemine tabakalı örnekleme (TÖ) adı verilir. Her tabaka ayrı bir kitle olarak düşünülür ve her tabakaya en uygun gelen örnekleme yöntemi uygulanabilir. Her tabakaya basit rasgele örnekleme yönteminin uygulandığı tabakalı örnekleme yöntemine tabakalı rasgele örnekleme (TRÖ) adı verilir (Çıngı, 1994).

2.2.1. Klasik Tahmin Ediciler

TRÖ'de kitle varyansının tahmini yapılabilir. Tabakalama yapılmış bir kitle için, kitle varyansı h. tabakada i. birimin ortalamadan ayrılışı kareler toplamı olarak tanımlanabilir:

$$(N-1)S_{tb,y}^2 = \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}(y_{hi}-\overline{Y})^2 = \sum_{h=1}^{L}\sum_{i=1}^{N_h}\left[(y_{hi}-\overline{Y}_h)+(\overline{Y}_h-\overline{Y})\right]^2 \qquad (2.81)$$

Eşitlikte L, tabaka sayısı; N_h, h. tabakanın kitle büyüklüğü ve $\overline{Y}_h$ da h. tabakada ilgilenilen y değişkenine ait kitle ortalamasıdır. N_h çok büyük ise, $N \cong N-1$ ve $N_h \cong N_h - 1$ olarak alınır ve Eş. (2.81) aşağıdaki gibi elde edilir (Çıngı, 1994) :

$$NS^2_{tb,y} \cong \sum_{h=1}^{L} N_h S^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} N_h (\overline{Y}_h - \overline{Y})^2 \ , \tag{2.82}$$

$$S^2_{tb,y} \cong \sum_{h=1}^{L} W_h S^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} W_h (\overline{Y}_h - \overline{Y})^2 . \tag{2.83}$$

Burada $W_h = \frac{N_h}{N}$ h. tabaka ağırlığı ve S^2_{yh}, h. tabakada ilgilenilen değişkene ait kitle varyansıdır. $n \cong n-1$ ve $n_h \cong n_h - 1$ varsayıldığında Eş.(2.83) ile verilen varyansın tahmin edicisi,

$$\hat{S}^2_{tb,y} \cong \sum_{h=1}^{L} \hat{W}_h s^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} \hat{W}_h (\overline{y}_h - \overline{y}_{tb})^2 \tag{2.84}$$

olarak elde edilir. Burada $\hat{W}_h = \frac{n_h}{n}$, s^2_{yh} ve $\overline{y}_h$ sırasıyla h. tabakada ilgilenilen değişkene ait örneklem varyansı ve örneklem ortalamasıdır. $\overline{y}_{tb} = \sum_{h=1}^{L} W_h \overline{y}_h$ ise tabakalı rasgele örneklemede ilgilenilen değişken için kitle ortalaması tahmin edicisidir. $\frac{N_h}{N} = \frac{n_h}{n}$ orantılı olduğundan, $\hat{W}_h = W_h$ olarak alınabilir. Eş. (2.84) ile verilen varyans tahmin edicisinin hata kareler ortalaması,

$$\begin{aligned} HKO(\hat{S}^2_{tb,y}) \cong & \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^2_{yh} \left(\beta_{yh} - 1 \right) + 4 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \left(\overline{Y}_h - \overline{Y} \right) \left(\lambda_h \mu_{30h} - \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h \mu_{30h} \right) \\ & + 4 \sum_{h=1}^{L} W_h^2 (\overline{Y}_h - \overline{Y})^2 \left(\lambda_h S^2_{yh} - 2 \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h S^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^2_{yh} \right) \end{aligned} \tag{2.85}$$

elde edilir. Burada $\lambda_h = \frac{1}{n_h}$, $\mu_{rsh} = \frac{1}{N_h} \sum_{i=1}^{N_h} \left(y_{hi} - \overline{Y}_h \right)^r (x_{hi} - \overline{X}_h)^s$'dir ve β_{yh}, h. tabakada ilgilenilen değişkenin basıklık katsayısıdır. n_h, h. tabaka örneklem büyüklüğü ; $\overline{X}_h$ ise h. tabakada yardımcı değişkene ait kitle ortalamasıdır ve

$$V(s_{yh}^2) = \lambda_h S_{yh}^2 \left(\beta_{yh} - 1\right),$$

$$V(\bar{y}_h) = \lambda_h S_{yh}^2 ,$$

$$V(\bar{y}_{tb}) = \sum_{h=1}^{l} W_h^2 \lambda_h S_{yh}^2 ,$$

$$Cov(\bar{y}_{tb,} s_{yh}^2) = \sum_{h=1}^{l} W_h \lambda_h \mu_{30h} ,$$

$$Cov(\bar{y}_{tb,} \bar{y}_h) = \sum_{h=1}^{l} W_h \lambda_h S_{yh}^2 ,$$

$$Cov(\bar{y}_{h,} s_{yh}^2) = \lambda_h \mu_{30h}$$

olarak tanımlanmıştır (Kadılar ve Çıngı, 2006b).

2.2.2 Oransal (Ratio) Tahmin Ediciler

Tabakalı rasgele örneklemede her bir tabaka ayrı bir kitle olarak düşünülebildiğinden, bu tabakalardan basit rasgele örneklem yöntemiyle örneklem çekildiğinde, kitle varyansının oransal yolla tahmini yapılabilir.

Tahmin için iki farklı yol vardır. Bunlardan biri ayrı tahmin diğeri ise birleşik tahmindir.

Kadılar ve Çıngı (2006a), kitle varyansı için TRÖ'de birleşik tahmin edici önermişlerdir:

$$\hat{S}_{ob}^2 = \frac{\hat{S}_{tb,y}^2}{\hat{S}_{tb,x}^2} S_x^2 . \tag{2.86}$$

Burada $\hat{S}^2_{tb,x} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{xh} + \sum_{h=1}^{L} W_h (\bar{x}_h - \bar{x}_{tb})^2$, tabakalı rasgele örneklemede yardımcı değişkenin kitle varyansının tahmin edicisidir ve

$$
\begin{aligned}
HKO(\hat{S}^2_{ob}) \cong \frac{S_x^4}{\delta^2} \Bigg\{ & \sum_{i=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^2_{yh} \left[\beta_2(y_h) - 1\right] + 4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 (\bar{Y}_h - \bar{Y})\big(\lambda_h \mu_{30h} \\
& - \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h \mu_{30h}) + 4\sum_{h=1}^{L} W_h^2 (\bar{Y}_h - \bar{Y})^2 (\lambda_h S^2_{yh} - 2\sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h S^2_{yh} \\
& + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^2_{yh}) - 2\frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^2_{yh} S^2_{xh} (\theta_h - 1) - 4\frac{v}{\delta} \\
& \sum_{h=1}^{L} W_h^2 (\bar{X}_h - \bar{X})\big(\lambda_h \mu_{21h} - \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h \mu_{21h} - \frac{v}{\delta} \lambda_h \mu_{03h} \\
& + \frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h \mu_{03h}) - 4\frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 (\bar{Y}_h - \bar{Y})(\lambda_h \mu_{12h} \\
& - \sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h \mu_{12h}) + \frac{v^2}{\delta^2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^2_{xh} \left[\beta_2(x_h) - 1\right] - 8\frac{v}{\delta} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \\
& (\bar{X}_h - \bar{X})(\bar{Y}_h - \bar{Y}) \left(\lambda_h S_{yxh} - 2\sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h S_{yxh} + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S_{yxh} \right) \\
& + 4\frac{v^2}{\delta^2} \sum_{h=1}^{L} W_h^2 (\bar{X}_h - \bar{X})^2 \left(\lambda_h S^2_{xh} - 2\sum_{h=1}^{L} W_h \lambda_h S^2_{xh} + \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^2_{xh} \right) \Bigg\}
\end{aligned}
\tag{2.87}
$$

elde edilmiştir. Burada $\theta_h = \dfrac{\mu_{22h}}{\mu_{20h}\mu_{02h}}$, $v = \sum_{h=1}^{L} W_h S^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} W_h (\bar{Y}_h - \bar{Y})$ ve $\delta = \sum_{h=1}^{L} W_h S^2_{xh} + \sum_{h=1}^{L} W_h (\bar{X}_h - \bar{X})$'dir.

Kadılar ve Çıngı (2006a), 2003 yılında, ortalama için yapmış oldukları $\bar{y}_{st,KC}$ tahmin edicilerine benzer olarak ve Eş.(2.86)'daki tahmin ediciden yola çıkarak aşağıdaki tahmin edicileri önermişlerdir:

$$\hat{S}^2_{obkc1} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x} + C_x}(S^2_x + C_x), \tag{2.88}$$

$$\hat{S}^2_{obkc2} = \frac{s^2_{tb,y}}{s^2_{tb,x} + \beta_x}(S^2_x + \beta_x), \tag{2.89}$$

$$\hat{S}^2_{obkc3} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x}\beta_x + C_x}(S^2_x\beta_x + C_x) \quad , \tag{2.90}$$

$$\hat{S}^2_{obkc4} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x}C_x + \beta_x}(S^2_x C_x + \beta_x). \tag{2.91}$$

Burada C_x, x değişkeninin değişim katsayısı, β_x ise x değişkeninin basıklık katsayısıdır.

Bu tahmin ediciler için de hata kareler ortalaması Eş. (2.87)'ye benzer biçimde bulunur. Ancak Eş. (2.88)'de verilen tahmin edici için HKO'nda Eş. (2.87)'de, δ ve S^2_x değerlerine C_x eklenerek yazılır. Eş. (2.89) için de Eş. (2.87)'de, δ ve S^2_x değerlerine β_x eklenmelidir. Eş. (2.90) için ise, δ yerine $\delta\beta_X + C_X$, S^2_x yerine de $S^2_x\beta_x + C_x$ yazılmalıdır. Ayrıca v de β_x ile çarpılmalıdır. Son tahmin için de Eş. (2.87)'deki hata kareler ortalamasında δ yerine $\delta C_X + \beta_X$, S^2_x yerine de $S^2_x C_x + \beta_x$ yazılmalıdır ve v de C_x ile çarpılmalıdır.

2.3. Sıralı Küme Örneklemesinde Varyans Tahmin Edicileri

Sıralı küme örneklemesi (SKÖ), çevresel araştırmalarda, tarımda, ekolojide sıkça uygulanan bir yöntemdir. Sonsuz büyüklüklü kitlelerde kullanılabilir olması ve seçilen örneklemdeki tüm birimlerin ölçülmesine gerek duymaması yöntemin avantajlarından bazılarıdır.

McIntyre (1952), mera hasılası ortalamasının tahmininde sıralı küme örneklemesini kullanmıştır. BRÖ'ye göre daha duyarlı bulunan bu yöntem, daha sonra Halls ve Dell (1966) tarafından, bir ormandaki bitkilerin ve otların ağırlıkları ortalamasını tahmin etmek amacıyla kullanılmıştır. Takahashi ve Wakimoto (1968), SKÖ ile bulunan kitle ortalaması tahmininin yansız olduğunu ve varyansının BRÖ ile elde edilen varyanstan daha küçük olduğunu göstermişlerdir. Ancak sıralamada hata yapılmadığını varsaymışlardır. Dell ve Clutter (1972), sıralamada hata olsa da SKÖ ile bulunan kitle ortalaması tahmininin yansız olduğunu ve varyansının BRÖ'ye göre daha küçük elde edilebileceğini göstermişlerdir.

Araştırmacıların büyük çoğunluğu, kitle ortalamasının tahmini üzerinde çalışmışlardır. Kitle varyansının tahmini konusunda ise çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Stokes (1980), SKÖ için kitle varyansı tahmini önermiş ve bu tahminin asimtotik olarak yansız olduğunu ve yine asimtotik olarak BRÖ ile bulunan kitle varyansı tahmininden daha duyarlı olduğunu göstermiştir. Ancak önerilen tahmin, küçük örneklemlerde iyi sonuç vermemektedir. MacEachern vd. (2002) tarafından, SKÖ'nde, kitle varyansı için yeni bir tahmin önerilmiştir. Bu tahmin, sıralama hatalarına ve dağılımın normal olup olmamasına bakılmaksızın, Stokes tahminine göre daha duyarlıdır.

Klasik dengeli Sıralı Küme Örneklemesi'nde, sonsuz büyüklüklü bir kitleden, n büyüklüklü n küme seçilir. n büyüklüğündeki her küme kendi içinde, gerçekten ölçüm yapmanın gerekmeyeceği bir şekilde, küçükten büyüğe doğru sıralanır. Bu sıralama, gözlemsel olarak, bir yardımcı değişkenden yararlanılarak ya da ölçüm yapmayı gerektirmeyecek başka bir yöntemle yapılabilir.

Daha sonra, 1 kümedeki en küçük sıralı birim seçilerek ölçülür. 2. kümedeki 2. en küçük sıralı birim seçilerek ölçülür. Bu işlemler, n. kümedeki en büyük sıralı birim seçilip ölçülene kadar devam eder. Bu şekilde SKÖ'nin bir tekrarı yapılmış olur. m kez tekrar yapılarak, SKÖ oluşturulur. Kitleden mn^2 birim seçilmiş ancak sadece mn tanesi ölçülmüştür. Birimlerin seçilmesi ve sıralanması için maliyet göz ardı edilir. O halde BRÖ ile SKÖ, aynı sayıda birim örnekleme seçilmiş gibi düşünülerek karşılaştırılır.

Örneğin m tekrar sayısı 3, n küme büyüklüğü ve n küme sayısı 4 olsun. Bu durumda kitleden mn^2 =48 birim seçilecektir. Bu gözlemlerin görsel olarak sıralamaları yapılacak ancak ilgilenilen değişkenle ilgili bir ölçüm yapılmayacaktır. Daha sonra 1. kümedeki 1. en küçük sıralı birim seçilerek ölçülür. 2. kümedeki 2. en küçük sıralı birim seçilerek ölçülür. Bu işlemler, 4. kümedeki 4. sıralı birim seçilip ölçülene kadar devam eder. 3 kez tekrar yapılarak, SKÖ oluşturulur. Kitleden mn^2 =48 birim seçilmiş ancak sadece mn =12 tanesi ölçülmüştür (Çizelge 2.1).

Çizelge 2.1. n=4, m=3 için Sıralı Küme Örneklemesi ile Örneklem Seçimi

	1	2	3	4
	Δ	ο	ο	ο
m=1	ο	Δ	ο	ο
	ο	ο	Δ	ο
	ο	ο	ο	Δ
	1	2	3	4
	Δ	ο	ο	ο
m=2	ο	Δ	ο	ο
	ο	ο	Δ	ο
	ο	ο	ο	Δ
	1	2	3	4
	Δ	ο	ο	ο
m=3	ο	Δ	ο	ο
	ο	ο	Δ	ο
	ο	ο	ο	Δ

Δ : Ölçümü yapılan gözlemler

ο : Sadece görsel olarak sıralama yapılan ancak gerçek ölçümlerin yapılmadığı gözlemler

2.3. 1. Stokes Varyans Tahmin Edicisi

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ bağımsız raslantı değişkenlerinin oluşturduğu bir örneklem olsun. Y_i, μ ortalama ve σ^2 varyansına sahip olsun. r. kümedeki r. sıralı birim $Y_{[r]}$ ile gösterilirse, sıralı istatistiklerden,

$$\sum_{r=1}^{n}\left(Y_{[r]}-c\right)^k=\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-c\right)^k \text{ , c ve k sabitler}$$

ve,

$$\sum_{r=1}^{n} E\left[\left(Y_{[r]}-c\right)^{k}\right]=nE\left[(Y-c)^{k}\right] \tag{2.92}$$

yazılabilir.

Eş. (2.92)'de c=0, k=1 alınırsa,

$$\sum_{r=1}^{n} \mu_{[r]}=n\mu$$

elde edilir.

Eş. (2.92)'de c=μ, k=2 alınırsa,

$$\sum_{r=1}^{n} E\left[\left(Y_{[r]}-\mu\right)^{2}\right]=nE\left[(Y-\mu)^{2}\right]$$

bulunur. Eşitliğin sol yanına $\mu_{[r]}$ eklenip çıkartılırsa,

$$\sum_{r=1}^{n} E\left[\left(\left(Y_{[r]}-\mu_{[r]}\right)+\left(\mu_{[r]}-\mu\right)\right)^{2}\right]=nE\left[(Y-\mu)^{2}\right]$$

$$\sum_{r=1}^{n} E\left[\left(Y_{[r]}-\mu_{[r]}\right)^{2}\right]+\sum_{r=1}^{n} E\left[\left(\mu_{[r]}-\mu\right)^{2}\right]=n\sigma^{2},$$

$$\sum_{r=1}^{n} \sigma_{[r]}^{2}+\sum_{r=1}^{n} \tau_{[r]}^{2}=n\sigma^{2} \tag{2.93}$$

olur. Burada $\mu_{[r]}=E\left(Y_{[r]}\right)$, $\sigma_{[r]}^{2}=\operatorname{Var}\left(Y_{[r]}\right)$ ve $\tau_{[r]}=\mu_{[r]}-\mu$'dir.

SKÖ, mn tane bağımsız birimden oluşur öyle ki her bir n. sıralı kümeden n birim ölçülmüş ve m tekrar yapılmıştır. Bu birimler, $Y_{[r]i}$ (r=1,…,n ; i=1,…,m) ile gösterilsin. BRÖ ile karşılaştırma yapabilmek için aynı sayıda birimin BRÖ ile seçildiğini varsayalım.

$Y_1,\ldots,Y_{mn}$ de mn birimden oluşan ve aynı kitleden seçilen bir BRÖ olsun.

Kitle dağılımı bilinmiyorsa, kitle varyansının tahmini için,

$$s^2 = \frac{1}{mn-1}\sum_{j=1}^{mn}\left(Y_j - \mu\right)^2 \tag{2.94}$$

örneklem varyansı kullanılır.

SKÖ'ne dayalı olarak varyans aşağıdaki gibi tahmin edilmiştir (Stokes, 1980):

$$\hat{\sigma}_S^2 = \frac{1}{mn-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - \hat{\mu}\right)^2 \tag{2.95}$$

Burada $\hat{\mu} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} Y_{[r]i}$, SKÖ'nde kitle ortalamasının yansız tahmin edicisidir.

Stokes tarafından önerilen varyans tahmin edicisi için beklenen değer bulunabilir:

$$E\left(\hat{\sigma}_S^2\right) = \frac{1}{mn-1}E\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - \hat{\mu}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{mn-1}E\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} Y_{[r]i}^2 - 2\hat{\mu}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} Y_{[r]i} + mn\hat{\mu}^2\right)$$

$$= \frac{1}{mn-1}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} E\left(Y_{[r]i}^2\right) - mnE\left(\hat{\mu}^2\right)\right]$$

Burada,

$$E\left(Y_{[r]}^2\right) = V\left(Y_{[r]}\right) + \left(E\left(Y_{[r]}\right)\right)^2 = \sigma_{[r]}^2 + \mu_{[r]}^2$$

ve

$$E(\hat{\mu}^2) = Var(\hat{\mu}) + (E(\hat{\mu}))^2 = Var(\hat{\mu}) + \mu^2$$

olarak yazılırsa,

$$E(\hat{\sigma}_S^2) = \frac{1}{mn-1}\left\{ m\sum_{r=1}^{n}\left(\sigma_{[r]}^2 + \mu_{[r]}^2\right) - mn\left[Var(\hat{\mu}) + \mu^2\right]\right\}$$

olur. $Var(\hat{\mu}^2) = \frac{1}{mn}\left(\sigma^2 - \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\tau_{[r]}^2\right)$ değeri de yerine yazılırsa aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$E(\hat{\sigma}_S^2) = \frac{1}{mn-1}\left[m\sum_{r=1}^{n}\left(\sigma_{[r]}^2 + \mu_{[r]}^2\right) - mn\left(\frac{1}{mn^2}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2 + \mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{1}{mn-1}\left[\left(m - \frac{1}{n}\right)\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2 + m\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]}^2 - mn\mu^2\right].$$

Eşitliğin ikinci kesiminde karesel bir ifade elde edebilmek için $2\mu^2$ ve $2\mu\mu_{[r]}$ ifadeleri bir kez eklenip bir kez de çıkartılır :

$$E(\hat{\sigma}_S^2) = \frac{1}{n}\left(n\sigma^2 - \sum_{r=1}^{n}\tau_{[r]}^2\right) + \frac{m}{mn-1}\left[\sum_{r=1}^{n}\left(\mu_{[r]} - \mu\right)^2 - 2n\mu^2 + 2\mu\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]}\right]$$

$$= \sigma^2 + \frac{1}{n(mn-1)}\sum_{r=1}^{n}\tau_{[r]}^2 \; . \qquad (2.96)$$

Bu yanlı bir tahmin edicidir ancak m tekrar sayısı ya da n küme büyüklüğü arttıkça asimtotik olarak yansız olur.

SKÖ ile yapılan varyans tahmin edicisi, küçük örneklemlerde her zaman duyarlı sonuçlar vermeyebilir.

Stokes'un varyans tahmin edicisinin varyansı,

$$Var(\hat{\sigma}_S^2)=\frac{m}{(mn-1)^2}\left[\left(\frac{mn-1}{mn}\right)^2\sum_r \mu_{4[r]}+4\sum_r \tau_{[r]}^2\sigma_{[r]}^2+4\left(\frac{mn-1}{mn}\right)\sum_r \tau_{[r]}\mu_{3[r]}\right.$$

$$\left.+\frac{4m}{(mn)^2}\sum\sum_{r<s}\sigma_{[r]}^2\sigma_{[s]}^2+\frac{2(m-1)-(mn-1)^2}{(mn)^2}\sum_r \sigma_{[r]}^4\right] \tag{2.97}$$

biçiminde elde edilir (Stokes, 1980). Burada $\mu_{k[r]}=E\left[Y_{[r]}-\mu_{[r]}\right]^k$,sıralı gözlemler için k. momenttir.

Eğer SKÖ, rasgele bir örneklem ise (görsel sıralama rasgele yapıldıysa), o halde herhangi bir sıralama bilgisi söz konusu olmaz ve $\mu_{k[r]}=E(Y-\mu)^k=\mu_k$ olur. O halde varyans da BRÖ için Eş. (2.94) tahmin edicisinin varyansına eşit olur (Stokes, 1980).

2.3.2. MacEachern Varyans Tahmin Edicisi

Kitle varyansı için yansız ve Stokes'un tahmin edicisinden daha etkin, normal dağılımlarda da uygulanabilecek bir varyans tahmin edicisi 2002 yılında, MacEachern vd. tarafından önerilmiştir.

Stokes tarafından önerilen ve Eş. (2.95) ile verilen tahmin edici, küçük örneklemlerde başarılı değildir. Gözlemlerin hangi kümeden alındığına bakılmaz ve gözlemler eşit kabul edilir. Yani Stokes tahmin edicisinde her ölçümü yapılan birimin, kitle ortalaması tahmin edicisinden farkı alınmaktadır. Küme içi veya kümeler arası gibi herhangi bir ayrım düşünülmemektedir. Kitle varyansının tahminini olduğundan büyük yapar. Asimtotik olarak yansız bir tahmin edicidir. Bu tür olumsuzluklar, SKÖ'nde kitle varyansının geliştirilmesinde açık kapı olduğu sonucunu doğurur.

Stokes tarafından verilen Eş. (2.93)'ten yola çıkılarak, Eş.(2.93)'te eşitliğin her iki yanını da n'ye bölüp σ^2 için eşitlik yazılırsa,

$$\sigma^2 = \sum_{r=1}^{n}(\mu_{[r]} - \mu)^2/n + \sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2/n \tag{2.98}$$

elde edilir. Bu eşitlikteki ilk terim küme ortalamasının kitle ortalamasından ayrılışı yani kümeler arasına ait terim, ikinci terim ise her bir küme içindeki birimin, kendi küme ortalamasından ayrılışına ait yani küme içine ait terimdir.

Eş. (2.98)'deki varyans ile Stokes'un tahmin edicisi arasında bir varyans tahmin edicisi bulunmak istenmiştir. Küme içi tahmin edici ve kümeler arası tahmin edici öyle birleştirilmelidir ki, sonuçta bulunacak tahmin edici, kitle varyansının yansız tahmin edicisi olsun. Bu tür bir tahmin edici elde edebilmek için, $Y_{[r]i}$, i. tekrarda r. kümedeki r. sıralı birim ve $Y_{[s]j}$, j. tekrarda, s. kümedeki s. sıralı birim olsun. $(Y_{[r]i}, Y_{[s]j})$ gözlem çifti kullanılarak tahmin edici önerilmiştir (MacEachern vd., 2002):

$$\hat{\sigma}_{Mc}{}^2 = \frac{\sum_{r\neq s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2}{2n^2m^2} + \frac{\sum_{r=s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2}{2m(m-1)n^2}. \tag{2.99}$$

Burada ilk terim farklı kümedeki birimlerin birbirlerinden ayrılışı, ikinci terim ise aynı küme içi birimlerin birbirlerinden ayrılışıdır. Bu tahmin edicinin beklenen değerini ve varyansını bulmak için aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

$$E\left[\left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2\right] = \begin{cases} \sigma_{[r]}^2 + \sigma_{[s]}^2 + (\mu_{[r]} - \mu_{[s]})^2, & r \neq s \\ 2\sigma_{[r]}^2, & r = s \end{cases} \tag{2.100}$$

$E\left[(Y_{[r]i} - Y_{[s]j})^2\right]$ ifadesine $\mu_{[r]}$ ve $\mu_{[s]}$ terimleri bir kez eklenip bir kez çıkartılırsa,

$$E\left[(Y_{[r]i}-Y_{[s]j})^2\right]=E\left[\left(\left(Y_{[r]i}-\mu_{[r]}\right)-\left(Y_{[s]j}-\mu_{[s]}\right)+\left(\mu_{[r]}-\mu_{[s]}\right)\right)^2\right]$$

$$=E\left[\left(Y_{[r]i}-\mu_{[r]}\right)^2\right]+E\left[\left(Y_{[s]j}-\mu_{[s]}\right)^2\right]+E\left[\left(\mu_{[r]}-\mu_{[s]}\right)^2\right]$$
$$-2E\left[\left(Y_{[r]i}-\mu_{[r]}\right)\left(Y_{[s]j}-\mu_{[s]}\right)\right]+2E\left[\left(Y_{[r]i}-\mu_{[r]}\right)\left(\mu_{[r]}-\mu_{[s]}\right)\right]-2E\left[\left(Y_{[s]j}-\mu_{[s]}\right)\left(\mu_{[r]}-\mu_{[s]}\right)\right]$$

bulunur. Son üç terim sıfır olduğundan,

$$E\left[(Y_{[r]i}-Y_{[s]j})^2\right]=E\left[\left(Y_{[r]i}-\mu_{[r]}\right)^2\right]+E\left[\left(Y_{[s]j}-\mu_{[s]}\right)^2\right]+E\left[\left(\mu_{[r]}-\mu_{[s]}\right)^2\right]$$

$$=\sigma^2_{[r]}+\sigma^2_{[s]}+(\mu_{[r]}-\mu_{[s]})^2 \tag{2.101}$$

yazılabilir.

Tahmin ediciye ait beklenen değer ve varyans elde edilebilmesi için, $(Y_{[r]i}-Y_{[s]j})^2$ toplamının beklenen değeri düşünülmelidir:

$$E(\hat{\sigma}_{Mc}{}^2)=E\left[\frac{\sum\limits_{r\neq s}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i}-Y_{[s]j}\right)^2}{2n^2m^2}+\frac{\sum\limits_{r=s}\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i}-Y_{[s]j}\right)^2}{2m(m-1)n^2}\right]$$

Beklenen değeri elde etmek için öncelikle ilk terimi ele alalım. Bu terim farklı kümedeki gözlemler içindir. i= j=1 alındığında, Eş. (2.100)'den,

$$\sum_{r\neq s}E\left[(Y_{[r]1}-Y_{[s]1})^2\right]=\sum_{r\neq s}\left[\sigma^2_{[r]}+\sigma^2_{[s]}+(\mu_{[r]}-\mu_{[s]})^2\right]$$

ve

$$E\left[\sum_{r\neq s}(Y_{[r]1}-Y_{[s]1})^2\right]=\sum_{r\neq s}\sigma^2_{[r]}+\sum_{r\neq s}\sigma^2_{[s]}+\sum_{r\neq s}(\mu_{[r]}-\mu_{[s]})^2$$

yazılabilir. Son parantez içine μ eklenip çıkartılırsa,

$$E\left[\sum_{r\neq s}(Y_{[r]1}-Y_{[s]1})^2\right]=\sum_{r\neq s}\sigma^2_{[r]}+\sum_{r\neq s}\sigma^2_{[s]}+\sum_{r\neq s}\left[(\mu_{[r]}-\mu)-(\mu_{[s]}-\mu)\right]^2 \tag{2.102}$$

elde edilir.

Toplamlar, 1'den n'ye kadar düşünüldüğünde, r=s olması durumu toplam ifadesinden çıkartılmalıdır. Aynı zamanda Eş. (2.93)'te kullanılırsa,

$$\sum_{r\neq s}\sigma^2_{[r]}=\sum_{r=1}^{n}\sigma^2_{[r]}-\sum_{r=s}\sigma^2_{[r]}=\left(n\sigma^2-\sum_{r=1}^{n}\tau^2_{[r]}\right)-\sum_{r=s}\sigma^2_{[r]}\ ,$$

$$\sum_{r\neq s}\sigma^2_{[s]}=\sum_{s=1}^{n}\sigma^2_{[s]}-\sum_{r=s}\sigma^2_{[s]}=\left(n\sigma^2-\sum_{s=1}^{n}\tau^2_{[s]}\right)-\sum_{r=s}\sigma^2_{[s]}\ ,$$

$$\sum_{r\neq s}\left[\left(\mu_{[r]}-\mu\right)-\left(\mu_{[s]}-\mu\right)\right]^2=\sum_{r=1}^{n}\left[\left(\mu_{[r]}-\mu\right)-\left(\mu_{[s]}-\mu\right)\right]^2-\sum_{r=s}\left[\left(\mu_{[r]}-\mu\right)-\left(\mu_{[s]}-\mu\right)\right]^2$$

bulunur. Toplam ifadeleri 1'den n'ye kadar düşünülürse, $\sigma^2_{[r]}$ ifadesinde 2n-2 terim, $\left(\mu_{[r]}-\mu^2\right)$ ifadesinde ise 2n terim olacaktır. Bu durumda,

$$E\left[\sum_{r\neq s}(Y_{[r]1}-Y_{[s]1})^2\right]=2(n-1)\sum_{r=1}^{n}\sigma^2_{[r]}+2n\sum_{r=1}^{n}(\mu_{[r]}-\mu)^2 \tag{2.103}$$

elde edilir.

Farklı tekrarlar düşünüldüğünde, her bir r ve s küme çifti için, bu şekilde m^2 birim olacaktır :

$$E\left[\frac{1}{2m^2n^2}\sum_{r\neq s}\sum_{i}\sum_{j}\left(Y_{[r]i}-Y_{[s]j}\right)^2\right]=\frac{1}{2m^2n^2}2m^2\left[(n-1)\sum_{r}\sigma^2_{[r]}+n\sum_{r}\left(\mu_{[r]}-\mu\right)^2\right]$$

$$=\left[\frac{(n-1)}{n^2}\sum_{r}\sigma^2_{[r]}+\frac{1}{n}\sum_{r}\left(\mu_{[r]}-\mu\right)^2\right]. \tag{2.104}$$

Aynı küme içi birimler için ise, Eş. (2.100)'e göre, $E\left[(Y_{[r]i} - Y_{[r]j})^2\right] = 2\sigma_{[r]}^2$'dir. Her bir kümede bu biçimde m(m-1) terim olduğundan,

$$E\left[\frac{1}{2mn^2(m-1)}\sum_r\sum_i\sum_j\left(Y_{[r]i} - Y_{[r]j}\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum\sigma_{[r]}^2 \tag{2.105}$$

elde edilir.

Küme içi ve kümeler arası bulunan bu beklenen değerler birleştirilerek, Eş.(2.99)'da verilen tahmin edici, kitle varyansının yansız tahmin edicisi olarak önerilmiştir (MacEachern vd., 2002).

Eş. (2.99)'da, ilk bölüm kümeler arası varyans, ikinci bölüm küme içi varyanstır. Küme içi birimlerin ağırlığı, kümeler arasına göre biraz daha büyüktür.

Önerilen bu tahmin edici için varyans elde edilerek, duyarlılık yönünden diğer tahmin edicilerle karşılaştırılabilir:

$$Var(\hat{\sigma}_{Mc}{}^2) = E\left[(\hat{\sigma}_{Mc}{}^2 - \sigma^2)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{\sum_{r\neq s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2}{2m^2n^2} + \frac{\sum_{r=s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i} - Y_{[r]j}\right)^2}{2m(m-1)n^2}\right)^2\right]$$

$$= E\left[\left(\frac{\sum_{r\neq s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i}-Y_{[s]j}\right)^2}{2m^2n^2}\right)^2\right] + E\left[\left(\frac{\sum_{r=s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i}-Y_{[r]j}\right)^2}{2m(m-1)n^2}\right)^2\right]$$

$$+2E\left[\left(\frac{\sum_{r\neq s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i}-Y_{[s]j}\right)^2}{2m^2n^2}\right)\left(\frac{\sum_{r=s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i}-Y_{[r]j}\right)^2}{2m(m-1)n^2}\right)\right] \tag{2.106}$$

$\tau_{rs}^2 = E\left[\left(Y_{[r]i}-Y_{[s]j}\right)^2\right]$ ve $T_{rs} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left[\left(Y_{[r]i}-Y_{[s]j}\right)^2-\tau_{rs}^2\right]$ olsun. Bu durumda tahmin edicinin varyansı,

$$Var(\hat{\sigma}^2) = E\left[\left(\frac{1}{2m^2n^2}\sum_{r\neq s}T_{rs} + \frac{1}{2m(m-1)n^2}\sum_{r=1}^{n}T_{rr}\right)^2\right] \tag{2.107}$$

$$= E\left[\left(\frac{1}{2m^2n^2}\sum_{r\neq s}T_{rs}\right)^2\right] + E\left[\left(\frac{1}{2m(m-1)n^2}\sum_{r=1}^{k}T_{rr}\right)^2\right] + E\left[\frac{1}{2m^3n^4(m-1)}\sum_{t=1}^{n}T_{tt}\sum_{r\neq s}T_{rs}\right] \tag{2.108}$$

$$=E(A+B+C)$$

yazılabilir. Q(rst)={(r,s,t): r ≠ s, r ≠ t, s ≠ t } ve $X_{[rs]ij} = (Y_{[r]i}-Y_{[s]j})^2-\tau_{rs}^2$ varsayılır.

Bazı sadeleştirmelerden sonra, aşağıdaki beklenen değerler elde edilir:

$$E(A) = \frac{1}{4m^4n^4}\left[2\sum_{r\neq s}E(T_{rs}^2) + 4\sum_{Q(rst)}E(T_{rs}T_{ts})\right]$$

$$= \frac{1}{2m^4n^4}\sum_{r\neq s}\left[m^2E(X_{[rs]12}^2) + 2m^2(m-1)E(X_{[rs]12}X_{[rs]13})\right] + \frac{1}{mn^4}\sum_{Q(rst)}E(X_{[rs]12}X_{[ts]12})$$

$$=\frac{(n-2)(n-1)}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}(\mu_{[r]4}-\sigma_{[r]}^4)+\frac{4(n-2)}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]3}\tau_{[r]}$$

$$+\frac{4(n-1)}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\tau_{[r]}^2-\frac{4}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\sum_{s=1}^{n}\tau_{[s]}^2\ , \qquad (2.109)$$

$$E(B)=\frac{1}{4(m-1)^2m^2n^4}\sum_{r=1}^{n}E(T_{rr}^2)$$

$$=\frac{1}{2(m-1)mn^4}\sum_{r=1}^{n}E(X_{[rr]12}^2)+\frac{m-2}{m(m-1)n^4}\sum_{r=1}^{n}E(X_{[rr]12}X_{[rr]23})$$

$$=\frac{1}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]4}-\frac{m-3}{m(m-1)n^4}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^4\ , \qquad (2.110)$$

$$E(C)=\frac{1}{2m^3n^4(m-1)}\sum_{r\neq s}E(T_{rs}T_{rr})$$

$$=\frac{2}{mn^4}\sum_{r\neq s}E(X_{[rs]12}X_{[rr]13})$$

$$=\frac{2(n-1)}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}(\mu_{[r]4}-\sigma_{[r]}^4)+\frac{4}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]3}\tau_{[r]}\,. \qquad (2.111)$$

Bulunan beklenen değerler yerlerine yazıldığında, tahmin edicinin varyansı,

$$Var(\hat{\sigma}_{Mc}^2)=E(A+B+C)$$

$$=\frac{n-1}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\left(\mu_{[r]4}-\sigma_{[r]}^4\right)+\frac{4}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]3}\tau_{[r]}+\frac{4}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\tau_{[r]}^2$$

$$+\frac{4}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\sum_{s=1}^{n}\tau_{[s]}^2+\frac{4}{m^2n^4}\sum_{r,s=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\sigma_{[s]}^2+\frac{(n-1)(n-2)}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\left(\mu_{[r]4}-\sigma_{[r]}^4\right)$$

$$+\frac{4(n-2)}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]3}\tau_{[r]}+\frac{4(n-1)}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\tau_{[r]}^2-\frac{4}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\sum_{s=1}^{n}\tau_{[s]}^2$$

$$+\frac{1}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]4}-\frac{m-3}{m(m-1)n^4}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^4+\frac{2(n-1)}{mn^4}\sum_{r=1}^{n}\left(\mu_{[r]4}-\sigma_{[r]}^4\right)+\frac{4}{mn^3}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]3}\tau_{[r]}$$

$$=\frac{1}{mn^2}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]4}+\frac{4}{mn^2}\sum_{r=1}^{n}\mu_{[r]3}\tau_r+\frac{4}{mn^2}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^2\tau_r^2$$

$$+\frac{4}{m^2n^4}\sum_{r<s}\sigma_{[r]}^2\sigma_{[s]}^2-\frac{n^2(m-1)-2}{mn^4(m-1)}\sum_{r=1}^{n}\sigma_{[r]}^4 \qquad (2.112)$$

elde edilir. Buradaki varyans kümeler içi dağılım momentlerine bağlıdır ki bu değerler de çoğu zaman bilinmez. Ancak eğer görsel sıralama hatasız yapılmışsa ya da tamamen rasgele ise, momentler hesaplanabilir ve önerilen varyans tahmin edicisi Stokes'un varyans tahmin edicisi ile karşılaştırılabilir (MacEachern vd., 2002). Eğer görsel sıralama hatalı ise, sıralı gözlemlerin momentleri, $Var(\hat{\sigma}^2_{Mc})$ hesaplanmadan önce belirlenmelidir.

2.3.3. Varyans Analizi ile Benzerlik

Alt Bölüm 2.3.2'de verilen hesaplamalardan dolayı, MacEachern vd. (2002) tarafından önerilen varyans tahminin edicisinin hesaplanmasının zor olacağı düşünülebilir. Ancak, varyans tahmin edicisi ile tek yönlü varyans analizi arasında bir benzerlik kurulabilir. Tek yönlü varyans analizinde de kümeler arası ve küme içi değişim düşünülmektedir. O halde, MacEachern vd. (2002) tarafından önerilen tahmin edici için de, tek yönlü varyans analizinde kullanılan istatistiksel paket programlar kullanılarak kolaylıkla çözümler elde edilebilir. MacEachern vd. varyans tahmin edicisine denk aşağıdaki ifadeyi vermişlerdir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{nm}\left[(m-1)DKO + (m-n+1)HKO\right]. \qquad (2.113)$$

Burada, DKO, deneme kareler ortalamasıdır. Burada SKÖ'nde kümeler deneme olarak düşünülmüş ve tek yönlü varyans analizi ile SKÖ birlikte düşünülerek, varyans tahmin edicisi yapılmıştır. Bu durumda,

$$DKO = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - \hat{\mu}\right)^2 - \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - \overline{Y}_{[r]}\right)^2, \qquad (2.114)$$

$$HKO = \frac{1}{n(m-1)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - \overline{Y}_{[r]}\right)^2 \qquad (2.115)$$

olur. Burada $\hat{\mu} = \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n} Y_{[r]i}$ ve $\overline{Y}_{[r]} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} Y_{[r]i}$ 'dir.

2.3.4. Stokes'un Varyans Tahmin Edicisi ile MacEachern Varyans Tahmin Edicisinin Karşılaştırılması

Sıralama hatasız olarak yapıldıysa ve dördüncü moment $\mu_{[r]4}$ sonlu ise Stokes tahmin edicisinin, önerilen tahmin ediciye göre asimtotik göreli duyarlılığı (AGD), 1'e eşittir. Burada

$$AGD(\hat{\sigma}_S^{\,2}, \hat{\sigma}_{Mc}^{\,2}) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{HKO(\hat{\sigma}_S^{\,2})}{Var(\hat{\sigma}_{Mc}^{\,2})}\right] \qquad (2.116)$$

ve $HKO(\hat{\sigma}_S^{\,2}) = Var(\hat{\sigma}_S^{\,2}) + \left[Yan(\hat{\sigma}_S^{\,2})\right]^2$ olduğundan,

$$AGD(\hat{\sigma}_S^2, \hat{\sigma}_{Mc}^2) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{Var(\hat{\sigma}_S^{\,2})}{Var(\hat{\sigma}_{Mc}^{\,2})}\right] + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{Yan^2(\hat{\sigma}_S^2)}{Var(\hat{\sigma}_{Mc}^{\,2})}\right]$$

yazılabilir.

Stokes tahmin edicisi için Eş. (2.96)'da verilen yan, $\lim\limits_{m\to\infty}(mn-1)=mn$ ve $\lim\limits_{m\to\infty}(m-1)=m$ olduğunda,

$$\text{Yan}(\hat{\sigma}_S^2)=E(\hat{\sigma}_S^2)-\sigma^2=\frac{1}{mn^2}\sum_{r=1}^{n}\tau_{[r]}^2\cong 0$$

olur. Varyansı ise Eş. (2.97)'den yine $\lim\limits_{m\to\infty}(mn-1)=mn$ ve $\lim\limits_{m\to\infty}(m-1)=m$ olduğunda,

$$\text{Var}(\hat{\sigma}_S^2)=\frac{1}{mn^2}\left[\sum_r \mu_{4[r]}+4\sum_r \tau_{[r]}^2\sigma_{[r]}^2+4\sum_r \tau_{[r]}\mu_{3[r]}\right.$$
$$\left.+\frac{4}{mn^2}\sum\sum_{r<s}\sigma_{[r]}^2\sigma_{[s]}^2+\frac{2m-(mn)^2}{(mn)^2}\sum_r \sigma_{[r]}^4\right]+\frac{1}{n^2(mn)^2}\left(\sum_{r=1}^{n}\tau_{[r]}^2\right)^2 \qquad (2.117)$$

elde edilir.

Son terim sıfıra gideceğinden, Eş. (2.117), Eş. (2.112) ile verilen varyansa eşit olur. $\text{Var}(\hat{\sigma}_{Mc}^2)\cong\text{Var}(\hat{\sigma}_S^2)$ ve $\text{Yan}(\hat{\sigma}_{Mc}^2)\cong 0$'dır. Göreli duyarlılıkların oranı da asimtotik olarak 1'e yaklaşır.

Sıralamanın rasgele olup olmadığının belirlenmesi için hipotez testi yapılması gereklidir.

H_0 :Görsel sıralama tamamen rasgeledir

H_1 : Görsel sıralama rasgele değildir.

Hipotez testi için $V=\dfrac{DKO}{HKO}$ değeri hesaplanır.

Yokluk hipotezi doğru olduğunda, $\mu_{[r]}=\mu$ ve E(DKO)=E(HKO) olur. O halde, V değerinin 1'e yaklaşması, yokluk hipotezinin kabul edildiğini gösterir. V büyük değerler aldığında ise, gözlemlerin homojen kümelere ayrılmalarında, sıralama başarılıdır ve H_1 hipotezi kabul edilir. Eğer dağılım normalse, yokluk hipotezi altında, V~ $F_{n; (mn-n)}$ dağılımı gösterir (MacEchern vd. ,2002).

SKÖ'nde n birimden oluşan n küme olduğu düşünülürse ve her kümede eşit sayıda birim olduğundan, bu örneklemeye "Dengeli Sıralı Küme Örneklemesi" adı verilir. MacEchern vd. (2002), "Dengeli Olmayan SKÖ" için de varyans tahmininin kolaylıkla önerilebileceğini göstermişlerdir. Dengeli olmayan SKÖ'nde kitleden seçilen n_r büyüklüklü n tane küme vardır. Eş. (2.99)'a benzer şekilde Eş. (2.118)'de farklı küme büyüklükleri düşünülerek, varyans tahmini benzer biçimde önerilmiştir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{2n^2}\sum_{r\neq s}\frac{1}{m_r m_s}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2 + \frac{1}{2n^2}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{m_r(m_r - 1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - Y_{[r]j}\right)^2 \tag{2.118}$$

Dengeli olmayan SKÖ için de benzer biçimde beklenen değer ve varyans elde edilebilir.

2.3.5. Sonlu Kitlelerde MacEachern Varyans Tahmin Edicisi

Birçok araştırmada, araştırmacılar, zaman alıcı, pahalı ve hatasız gözlemlerle mi yoksa hızlı elde edilebilen, pahalı olmayan ancak hatalı olabilecek gözlemlerle mi çalışacaklarına karar vermede zorlanırlar. Genellikle, maliyet ön planda düşünülerek, hatalı olabilecek gözlemlerle çalışmak tercih edilir. Öte yandan, bir istatistiksel modelde hata ile ilgili çeşitli varsayımlar bulunmaktadır. Yani hem maliyeti düşürmek için hatalı gözlemler kabul edilmeli hem de hataya ait varsayımlar sağlanabilmelidir. Bu iki durum arasında bir denge sağlanmalıdır. Model varsayımları minimumda olmalı ya da hiç olmamalıdır ve örnekleme maliyetinde de gerekli azalmalar olmalıdır. Bu denge ancak SKÖ ile sağlanabilir. SKÖ'nde pahalı birimlerin toplanıp ölçümlerinin yapılmasından önce, örneklem birimlerinin maliyet gerektirmeyen bir yöntemle seçilip sıralanması gereklidir. Sıralama bilgisi gözlemlerin tam ölçümlerini yapmadan elde edilebildiği için, örnekleme maliyeti de artmayacaktır. Öte yandan, her bir kümedeki homojen gözlemler, örneklemdeki varyansı azaltacak ve daha küçük örneklemlerle çalışma olanağı tanıyacaktır (Öztürk vd., 2005).

McIntyre'nin (1952) makalesine bağlı olarak, çoğu araştırmacı sonsuz büyüklükteki kitleler üzerinde çalışmışlardır. mn büyüklüğündeki bir örneklem için, sonsuz büyüklükteki kitleden örnekleme yapıldığında, göreli duyarlılık sadece n küme büyüklüğüne bağlıdır. Ancak sonlu bir kitleden yerine koymadan örneklem seçildiğinde, göreli duyarlılık n küme büyüklüğüne ve m tekrar sayısına bağlıdır.

SKÖ çiftlik hayvanları ile ilgili süt, et, yün miktarı gibi ölçümlerinin yapılmasında kullanılmıştır. Bu tür ölçümler, belirli aralıklarla yapılır ve kitlenin sağlıklı gelişmesi için stratejiler belirlenir. Bu tür araştırmalarda, hayvanların fiziksel özellikleri ve büyüklüklerinden dolayı laboratuar çalışmaları yapmak zaman alıcı olur.

Varyans ve ortalama tahmini, sonlu bir koyun kitlesi üzerinde uygulanmıştır. Atatürk Üniversitesi, Araştırma Çiftliği'ndeki 224 koyun ile çalışma yapılmıştır. (Öztürk vd., 2005). Amaç, yerli koyun kitlesinin özelliklerini bozmadan üretimin ve et kalitesinin arttırılmasıdır. Çitlikte yaklaşık olarak 500 Awassi ve Morkaraman koyunu bulunmaktadır. Bu koyunlardan periyodik olarak örneklemler seçilmekte ve biyolojik gelişimleri incelenmektedir. Genç koyunlar çok aktif olduklarından, ölçümleri alınana kadar koyunları tutmak zor olacaktır ve hatalara neden olabilir. Bu etkileri önlemek amacıyla SKÖ yapılması önerilmiştir (Öztürk vd., 2005).

Kitleye SKÖ uygulanarak, koyunların ağırlıkları ölçülebilir. Örnekleme, her bir kümedeki koyunların ölçüm yapılmadan gözle sıralanmasıyla yapılır. Ağırlık belirlemek için, annenin çiftleştirilme esnasındaki ağırlığı ya da koyunların doğum ağırlıkları da kullanılabilir. Bu veriler, arşivlerden elde edilebilmektedir. İlgilenilen değişkenle yüksek korelasyon olan ve elde edilmesi ucuz olan bu tür değişkenlere "yardımcı değişkenler" denilmektedir.

Yapılan çalışmada, annenin çiftleştirilme esnasındaki ağırlığı, doğum ağırlığı ve koyunların 7. aydaki ağırlıklarına ait değişkenlerinin dağılımları, yaklaşık olarak simetrik bir dağılım göstermektedirler. 7. ay ağırlığı ve doğum ağırlığı arasındaki korelasyon $\rho = 0{,}79$, 7. ay ağırlığı ve annenin çiftleştirilme esnasındaki ağırlığı arasındaki korelasyon $\rho = 0{,}43$'tür.

Y, koyunların 7. ay ağırlıkları için raslantı değişkenidir. $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$ sonlu kitleyi göstermektedir. Bu kitle için, μ = 28,111 kg. , σ^2 = 15,140 kg^2'dir.

Y raslantı değişkeni için, kitleden, n büyüklüğünde bir örneklem BRÖ yöntemiyle çekilsin. Tüm örneklem birimleri yerine koymadan seçilmişlerdir. Kitle ortalaması μ ve kitle varyansı σ^2 için tahmin ediciler, $\overline{Y}_{BRÖ}$ ve S^2 ile gösterilebilirler. Bu tahmin ediciler yansız tahmin edicilerdir.

Ancak Var $(\hat{\overline{Y}}_{BRÖ})$ = $\left(1 - \frac{n}{N}\right)\frac{\hat{S}^2}{n}$ 'dir ve sonlu kitle düzeltme terimi f=1- n/N içermektedir.

Kitle varyansının tahmininde iki farklı parametrik olmayan tahmin edici kullanılmıştır. Bu tahmin edicilere ait özellikler sonlu kitlelerde daha önce hiç uygulanmamıştır.

$Y_{[r]i}$ (r=1,2,…,n ; i=1,2,…,m), N büyüklüklü sonlu kitleden yerine koymadan seçilen SKÖ birimleri olsun. Stokes tarafından önerilen ve Eş. (2.95)'te verilen varyans tahmin edicisi ile MacEachern vd. (2002)'in Eş. (2.99)'da verilen varyans tahmin edicisi için, sonlu kitle olduğunda, beklenen değerler,

$$E(\hat{\sigma}_S^2) = \sigma^2\left[\frac{nmN - (N-1)}{(mn-1)(N-1)}\right] + \frac{1}{n(mn-1)}\left[\sum_{r=1}^{n}(\mu_{[r]} - \mu)^2 + \sum_{r=1}^{n}\sigma_{[rr]}\right] \tag{2.119}$$

ve

$$E(\hat{\sigma}_{Mc}^2) = \frac{N}{N-1}\sigma^2 \tag{2.120}$$

olarak verilmiştir (Öztürk vd., 2005). Burada $\sigma_{[rr]}$ =Cov ($X_{[r]i}$, $X_{[r]j}$) 'dır.

Stokes tahmin edicisi için yan, kitle parametrelerine bağlıdır. Döngü sayısı m ya da n küme büyüklüğü sonsuza giderken, varyans tahmin edicisinin beklenen değeri de σ^2 N / (N-1)'e yaklaşır ki yansız olabilmesi için, sonlu kitlede (N-1)/N düzeltme faktörü gerekmektedir. Düzeltme faktörü ile yeni Stokes'un varyans tahmin edicisi,

$$\tilde{\sigma}_S^2 = \frac{N-1}{N}\hat{\sigma}_S^2 \tag{2.121}$$

olur. Ancak kitle çok büyük olduğunda tahmin edici yansız olacaktır ve Eş.(2.96)'da verilen sonuçlar elde edilecektir.

$\hat{\sigma}_{Mc}^2$ varyans tahmin edicisi ise, kitle sonlu olduğunda kitle varyansını olduğundan büyük tahmin etmektedir (Özturk vd., 2005). Ancak yan Stokes tarafından önerilen tahmin edicinin yanından daha küçüktür. Bu tahmin edici için yan, kitle parametrelerine, küme büyüklüğüne ya da döngü sayısına bağlı değildir. O halde kolayca yansız olması için düzeltme yapılabilir. Kitle varyansının sonlu kitleden yapılacak tahmini için,

$$\tilde{\sigma}_{Mc}^2 = \frac{N-1}{N}\hat{\sigma}_{Mc}^2 \tag{2.122}$$

önerilmiştir (Öztürk vd., 2005).

Önerilen tahminler ile simulasyon çalışması yapılarak, sonlu kitlelerde, SKÖ uygulanmasının örneklem büyüklüğünde önemli bir azalma sağladığı görülmüştür. Zaman ve maliyetler de azalacağından özellikle kitlenin sonlu olduğu tarımsal araştırmalarda, tercih edilecek bir yöntem olduğu sonucuna varılmıştır (Öztürk vd., 2005).

2.4. Genelleştirilmiş Tahmin Edici Sınıf Yöntemi

Tripathi vd. (2002) herhangi bir θ_0 parametresini, yardımcı değişkene ait θ_1, θ_2 ile gösterilen iki parametre kullanarak tahmin edebilmek amacıyla genel bir tahmin edici sınıfı geliştirmiştir. Kitle parametresinin tahmininde yardımcı değişken kullanılması uzun senelerdir literatürde yer almaktadır. Belirli bir kitle parametresi olan θ_0 (örneğin kitle ortalaması, kitle varyansı, kitle değişim katsayısı gibi), yardımcı değişkene ait tek bir kitle parametresi θ_1 bilinirken yapılabildiği gibi, θ_1,θ_2 yardımcı değişkene ait iki parametre bilinirken de çeşitli tahmin ediciler yapılmıştır.

2.4.1. Tek Bilinen Parametre İçin Genelleştirilmiş Tahmin Edici Sınıfı

N büyüklüklü P kitlesinden n büyüklüklü p örneklemi, **herhangi bir örnekleme yöntemiyle** seçilsin. Genel tahmin edici sınıfı, örnekleme yöntemine bağlı değildir. y, çalışmada ilgilenilen değişken olsun. Amaç, kitlede ilgilenilen değişkene ilişkin θ_0 parametresini tahmin etmektir. Bu parametrenin tahmini yapılırken, diğer bir değişkene ait bir tek parametrenin kitle bilgisi θ_1 bilinmektedir. Bu durum için Das ve Tripathi (1980) tarafından bir genel tahmin edici sınıfı önerilmiştir :

$$d_1 = \frac{\left(\hat{\theta}_0 - t_1(\hat{\theta}_1 - \theta_1)\right)}{\left(\hat{\theta}_1 - t_2(\hat{\theta}_1 - \theta_1)\right)}(\theta_1)^{\alpha} \quad . \tag{2.123}$$

Burada t_1 ve t_2, uygun olarak seçilmiş istatistikler ; α bir sabittir. $\hat{\theta}_0$ ve $\hat{\theta}_1$ ise, herhangi örneklem tasarımına göre, θ_0 ve θ_1 parametrelerinin tahmin edicileridir. Daha sonra Srivastava (1971,1980) tarafından θ_0 tahmin edicisi için genel olarak daha başka tahmin edici sınıfları önerilmiştir:

$$d_2 = \hat{\theta}_0 h(u_1) \ , \tag{2.124}$$

$$d_3 = g(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1, \theta_1) . \tag{2.125}$$

Burada, $u_1 = (\hat{\theta}_1/\theta_1)$, h(.) ve g(.) türevlenebilir, sürekli fonksiyonlardır.

Eğer $\hat{\theta}_0$ ve $\hat{\theta}_1$ yansız tahmin ediciler ise, d_1, d_2, d_3 sınıfları için minimum hata kareler ortalaması (HKO_{min}), aşağıdaki gibi Taylor serisi yöntemine göre bulunur:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g(.)}{\partial \hat{\theta}_0}\Big|_{\theta_0,\theta_1} & \dfrac{\partial g(.)}{\partial \hat{\theta}_1}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \end{bmatrix} , \tag{2.126}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}_0) & Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) \\ Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) & Var(\hat{\theta}_1) \end{bmatrix} , \tag{2.127}$$

HKO (d_i) = $\mathbf{d}' \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{d}$,

$$HKO(d_i) = \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_0}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right)^2 Var(\hat{\theta}_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_1}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right)^2 Var(\hat{\theta}_1)$$

$$+ 2\left[\frac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_0}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right]\left[\frac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_1}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right] Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) \tag{2.128}$$

bulunur. Bu eşitlikte $\left[\dfrac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_0}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right] = 1$' dir. Yani genelleştirilmiş sınıf yönteminin uygulanabilmesi için, ilgilenilen değişkene ait tahmin edicinin türevi 1 olmalıdır. (2.128) eşitliğinin $\left(\dfrac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_1}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right)$'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$2\left(\frac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_1}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right) Var(\hat{\theta}_1) + 2Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) = 0$$

elde edilir. Buradan,

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \hat{\theta}_1}\Big|_{\theta_0,\theta_1} \right) = \frac{-Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)}{Var(\hat{\theta}_1)} \tag{2.129}$$

bulunur. Bu değer Eş. (2.128)'de yerine yazılırsa, HKO_{min} (d_i) elde edilir:

$$HKO_{min}(d_i) = Var(\hat{\theta}_0) - \frac{\left[Cov(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1\right]^2}{Var(\hat{\theta}_1)} \tag{2.130}$$

$$= Var\left(\hat{\theta}_0\right) - \frac{\rho_{01}^2 Var\left(\hat{\theta}_0\right) Var\left(\hat{\theta}_1\right)}{Var\left(\hat{\theta}_1\right)}$$

$$= (1-\rho_{01}^2)V(\hat{\theta}_0), \qquad i= 1,2,3. \tag{2.131}$$

ρ_{01}, $\hat{\theta}_0$ ve $\hat{\theta}_1$ arasındaki korelasyon katsayısıdır. Eşitlikte verilen minimum HKO, regresyon tahmin edicisi için verilen HKO'na eşittir. Regresyon tahmin edicisi,

$$d_0 = \hat{\theta}_0 - \hat{\beta}_{01}(\hat{\theta}_1 - \theta_1) \tag{2.132}$$

biçiminde gösterilir. Burada $\hat{\beta}_{01}$, $\hat{\theta}_0$ ile $\hat{\theta}_1$ arasındaki regresyon katsayısıdır. Bir örnek üzerinde gösterelim.

Tek bilinen kitle parametresi için, 1978 yılında, Das ve Tripathi tarafından Eş. (2.16)'da verilen tahmin edici ele alınmıştır. Hem Taylor Serisi ile hem de genelleştirilmiş sınıf yöntemi ile sonuçlar bulunmuştur. y ilgilenilen değişken olmak üzere, y'ye ait kitle varyansının tahmini yapılmaya çalışılmıştır. Bunun için, yardımcı x değişkeninden yararlanılmaktadır. x değişkeninin ise, kitle ortalaması bilinmektedir. Bundan başka, kitleye ilişkin herhangi bir değer bilinmemektedir.

Taylor serisi yöntemi ile HKO_{min} Eş. (2.26)'da verilmiştir.

Minimum HKO genelleştirilmiş sınıf yöntemi ile Eşitlik (2.130)‘a göre de tek bir aşamada bulunabilir. Burada

$$\hat{\theta}_0 = s_y^2 \qquad , \ \hat{\theta}_1 = \bar{x}, \qquad \theta_1 = \bar{X}$$

olarak tanımlandığında,

$$HKO_{min}(t_1) = Var(s_y^2) - \frac{\left[cov(s_y^2, \bar{x})\right]^2}{Var(\bar{x})}$$

$$= \lambda S_y^4(\beta_y - 1) - \frac{[\lambda \mu_{21}]^2}{\lambda S_x^2}$$

$$= \lambda S_y^4(\beta_y - 1) - \lambda \frac{\mu_{21}^2}{S_x^2} \tag{2.133}$$

elde edilir. Burada, $\mu_{rs} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \bar{Y})^r(x_i - \bar{X})^s$, $\beta_y = \frac{\mu_{40}}{\mu_{20}^2}$ $Var(s_y^2) = \lambda S_y^4(\beta_y - 1)$ ve $Var(\bar{x}) = \lambda S_x^2$ ‘dir.

Bu sonucun, Eş. (2.26) ile aynı olduğu görülür. Ancak sonuca çok daha kısa sürede ulaşılmış olur.

O halde, genelleştirilmiş tahmin edici sınıfı yöntemine göre, S_y^2’nin tahmin edicisi için eğer sadece $\bar{x}$ ve yardımcı değişkene ait kitle parametresi $\bar{X}$ biliniyorsa, tüm tahmin ediciler için minimum HKO, Eş. (2.133)’te verildiği gibidir. Das ve Tripathi (1978) tarafından önerilen ve Eş. (2.18)’de verilen $\hat{S}_3^2$ ve 1983 yılında Isaki tarafından önerilen Eş. (2.32)’de verilen $\hat{S}_5^2$ tahmin edicileri için de durum aynıdır.

Bu tahmin ediciler de tek bir yardımcı değişken kitle parametresinden yararlanılarak yapılmıştır. O halde,

$$HKO_{min}(\hat{S}_3^2) = HKO_{min}(\hat{S}_5^2) = HKO_{min}(d_1) \quad (2.134)$$

olur. Taylor serisi ile **d** vektörü ve **Σ** matrisi ile de yapıldığında, aynı sonuca ulaşılmıştır.

2.4.2. İki Bilinen Parametre İçin Genelleştirilmiş Tahmin Edici Sınıfı

N büyüklüklü C kitlesinden n büyüklüklü c örneklemi, **herhangi bir örnekleme yöntemiyle** seçilsin. Genelleştirilmiş tahmin edici sınıfı, seçilen örnekleme yöntemine bağlı değildir. y, çalışmada ilgilenilen değişken olsun. d_1, d_2, d_3 sınıflarında bulunan tahmin ediciler geliştirilebilir. Yardımcı değişkene ait, iki kitle parametresi θ_1,θ_2 bilinsin. Örneğin $\overline{Y}$ kitle ortalaması tahmininde, $\overline{X}, C_x$; $\overline{X},\sigma_x^2$ ya da $\overline{X}, C_y$ bilinebilir. Bu durumlarda Das ve Tripathi (1980), θ_0 için aşağıdaki tahmin ediciyi önermişlerdir :

$$d_4 = \hat{\theta}_0 - t_1^*(\hat{\theta}_1 - \theta_1) - t_2^*(\hat{\theta}_2 - \theta_2). \quad (2.135)$$

Burada $\hat{\theta}_i$ (i=0,1,2), herhangi bir örnekleme tasarımı için, θ_i'nin tahmin edicisidir. t_1^* ve t_2^* ise, uygun olarak seçilmiş istatistikler olabilecekleri gibi sabit de olabilirler.

Aynı miktarda bilgi ile aşağıdaki genel tahmin edici sınıfı tanımlanabilir:

$$d_g^* = g(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_1,\theta_2). \quad (2.136)$$

d_g^* özelliklerini görmek için, aşağıdaki durumlar varsayılır:

(i) $t = (\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\theta_1,\theta_2)$, C kapalı kümesinin elemanlarıdır ve bulundukları üç boyutlu uzay, T= $(\theta_0,\theta_1,\theta_2)$ noktasını da kapsamaktadır ;

(ii) $g(.), \hat{\theta}_0$'nın bir fonksiyonudur öyle ki,

$$g(t)\big|_{t=T} = \theta_0$$

eşitliği sağlansın;

(iii) g(.) fonksiyonu süreklidir ve C'de tanımlıdır;

(iv) g(.)'nın birinci ve ikinci kısmi türevleri vardır, sürekli ve tanımlıdır.

g(.), T noktası civarında ikinci dereceden Taylor serisine açılırsa,

$$d_g^* = \theta_0 + \varepsilon_0 g_1(t) + \varepsilon_1 g_2(t) + \varepsilon_2 g_3(t)$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[\varepsilon_0^2 g_{11}(t^*) + \varepsilon_1^2 g_{22}(t^*) + \varepsilon_2^2 g_{33}(t^*)$$

$$+ 2\varepsilon_0\varepsilon_1 g_{12}(t^*) + 2\varepsilon_0\varepsilon_2 g_{13}(t^*) + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 g_{23}(t^*) + \ldots\Big] \qquad (2.137)$$

elde edilir. Burada $\varepsilon_i = (\hat{\theta}_i - \theta_i)$ (i=0,1,2) ve bazı durumlarda $E(\varepsilon_i) = 0$'dır.

g_i (i=1,2,3) ,g(.) fonksiyonunun birinci kısmi türevleri ve g_{ij} (i,j=1,2,3) ise ikinci kısmi türevleridir.

Eş.(2.137)'de ikinci satır (ikinci türevler) ihmal edildiğinde, beklenen değer bulunarak buradan yan'a geçilir :

$$d_g^* \cong \theta_0 + \varepsilon_0 g_1(t) + \varepsilon_1 g_2(t) + \varepsilon_2 g_3(t) + O(n^{-1}),$$

$$E(d_g^*) \cong \theta_0 + E(\varepsilon_0) g_1(T) + E(\varepsilon_1) g_2(T) + E(\varepsilon_2) g_3(T) + 0(n^{-1})$$

$$= \theta_0 + E(\hat{\theta}_0 - \theta_0) g_1(T) + E(\hat{\theta}_1 - \theta_1) g_2(T) + E(\hat{\theta}_2 - \theta_2) g_3(T) + 0(n^{-1}) \qquad (2.138)$$

$$= \theta_0 + Yan(\hat{\theta}_0)g_1(T) + Yan(\hat{\theta}_1)g_2(T) + Yan(\hat{\theta}_2)g_3(T) + 0(n^{-1}).$$

O halde yan,

$$Yan(d_g^*) \cong Yan(\hat{\theta}_0)g_1(T) + Yan(\hat{\theta}_1)g_2(T) + Yan(\hat{\theta}_2)g_3(T) + 0(n^{-1}) \quad (2.139)$$

olur. Burada n, örneklem büyüklüğüdür.

İkinci varsayımda belirtildiği gibi, $g_1(T) = \frac{\partial d_g^*}{\partial \hat{\theta}_0}\Big|_{t=T} = 1$ 'dir. d_g^* için HKO eşitliği bulunabilir. Bunun için,

$$d_g^* - \theta_0 \cong \varepsilon_0 g_1(t) + \varepsilon_1 g_2(t) + \varepsilon_2 g_3(t),$$

$$d_g^* - \theta_0 = (\hat{\theta}_0 - \theta_0)g_1(t) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1)g_2(t) + (\hat{\theta}_2 - \theta_2)g_3(t) \quad (2.140)$$

olduğu düşünülerek eşitliğin her iki yanının karesi ve beklenen değeri alınırsa,

$$\begin{aligned}(d_g^* - \theta_0)^2 = {} & (\hat{\theta}_0 - \theta_0)^2 g_1^2(t) + (\hat{\theta}_1 - \theta_1)^2 g_2^2(t) + (\hat{\theta}_2 - \theta_2)^2 g_3^2(t) \\ & + 2(\hat{\theta}_0 - \theta_0)(\hat{\theta}_1 - \theta_1)g_1(t)g_2(t) \\ & + 2(\hat{\theta}_0 - \theta_0)(\hat{\theta}_2 - \theta_2)g_1(t)g_3(t) \\ & + 2(\hat{\theta}_1 - \theta_1)(\hat{\theta}_2 - \theta_2)g_2(t)g_3(t),\end{aligned} \quad (2.141)$$

$$\begin{aligned}HKO(d_g^*) = {} & HKO(\hat{\theta}_0) + HKO(\hat{\theta}_1)g_2^2(T) + HKO(\hat{\theta}_2)g_3^2(T) \\ & + 2Cov(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_1)g_1(T)g_2(T) + 2Cov(\hat{\theta}_0, \hat{\theta}_2)g_1(T)g_3(T) \\ & + 2Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)g_2(T)g_3(T)\end{aligned} \quad (2.142)$$

elde edilir.

$g_1(T)=1$'dir. HKO'nın g_2 (T) ve g_3 (T)'ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\partial HKO(d_g^*)}{\partial g_2(T)} = 2HKO(\hat{\theta}_1)g_2(T) + 2Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) + 2Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)g_3(T) = 0 \quad ,$$

(2.143)

$$\frac{\partial HKO(d_g^*)}{\partial g_3(T)} = 2Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)g_2(T) + 2Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2) + 2HKO(\hat{\theta}_2)g_3(T) = 0$$

bulunur. İlk önce $g_2(T)$'yi bulmak amacıyla ilk eşitliğin her iki yanı $-HKO(\hat{\theta}_2^2)$ ile ; ikinci eşitliğin her iki yanı ise $Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ ile çarpılır. İki eşitlik toplanır ve g_2 (T) elde edilir. Daha sonra bu değer ilk denklemde yerine yazılarak g_3 (T) bulunur. Buna göre,

$$g_2(T) = \frac{Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) - HKO(\hat{\theta}_2)Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)}{HKO(\hat{\theta}_1)HKO(\hat{\theta}_2) - \left(Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)^2} \quad , \tag{2.144}$$

$$g_3(T) = \frac{Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) - HKO(\hat{\theta}_1)Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)}{HKO(\hat{\theta}_1)HKO(\hat{\theta}_2) - \left(Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2\right)^2} \tag{2.145}$$

elde edilir. Bu değerler Eş. (2.142)'de yerine yazılırsa, minimum HKO bulunur:

$$HKO_{min}(d_g^*) = HKO_{min}(\hat{\theta}_0) - M . \tag{2.146}$$

Burada,

$$M = \frac{HKO(\hat{\theta}_1)\left[Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)\right]^2 + HKO(\hat{\theta}_2)\left[Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1\right]^2}{HKO(\hat{\theta}_1)HKO(\hat{\theta}_2) - \left[Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\right]^2}$$

$$- \frac{2Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)}{HKO(\hat{\theta}_1)HKO(\hat{\theta}_2) - \left[Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\right]^2}$$

biçimindedir.

$\theta_1$veθ_2 bilindiğinde, d_g^*'ın alt sınıfları olan aşağıdaki tahmin ediciler önerilmiştir (Tripathi vd., 2002) :

$$e_1 = \sum_{i=1}^{2} w_i \left\{\hat{\theta}_0 - \lambda_i(\hat{\theta}_i - \theta_i)\right\}, \ \sum_{i=1}^{2} w_i = 1, \tag{2.147}$$

$$e_2 = w_0\hat{\theta}_0 + w_1(\hat{\theta}_1 - \theta_1) + w_2(\hat{\theta}_2 - \theta_2), \ \sum_{i=0}^{2} w_i = 1, \tag{2.148}$$

$$e_3 = \hat{\theta}_0 - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(\hat{\theta}_i - \theta_i), \ i=1,2, \tag{2.149}$$

$$e_4 = \hat{\theta}_0 u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}, \ u_i = \hat{\theta}_i / \theta_i, \ i=1,2, \tag{2.150}$$

$$e_5 = \left[\hat{\theta}_0 - \lambda_1(\hat{\theta}_1 - \theta_1)\right](\hat{\theta}_2 / \theta_2)^{\alpha}, \tag{2.151}$$

$$e_6 = \frac{\hat{\theta}_0 - \lambda_1(\hat{\theta}_1 - \theta_1) - \lambda_2(\hat{\theta}_2 - \theta_2)}{\hat{\theta}_1 - \lambda_1^*(\hat{\theta}_1 - \theta_1) - \lambda_2^*(\hat{\theta}_2 - \theta_2)}(\theta_1) \quad , \tag{2.152}$$

$$e_7 = \hat{\theta}_0 \frac{1 + \alpha_1(u_1 - 1)}{1 + \alpha_2(u_2 - 1)} \quad , \tag{2.153}$$

$$e_8 = \frac{\hat{\theta}_0}{\left[1 + \alpha_1(u_1 - 1) - \alpha_2(u_2 - 1)\right]} \tag{2.154}$$

$$e_9 = \hat{\theta}_0\left(w_1 u_1 + w_2 u_2^{\alpha_2}\right), \ \sum_{i=1}^{2} w_i = 1. \tag{2.155}$$

Burada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^*, \lambda_2^*), (\alpha, \alpha_1, \alpha_2), (w_0, w_1, w_2)$ sabit değerlerdir.

Eş. (2.150)'deki tahmin edici için matrislerden yaralanılarak Taylor serisi yöntemi uygulanırsa,

$e_4 = \hat{\theta}_0 u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2}$, $u_i = \hat{\theta}_i / \theta_i$, i=1,2.

elde edilir. Bu tahmin edici için **d** vektörü ve **Σ** matrisi oluşturulursa,

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1\theta_0/\theta_1 & \alpha_2\theta_0/\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}(\hat{\theta}_0) & \mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) & \mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) & \mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2) & \mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) & \mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{HKO}(e_4) = \mathbf{d\Sigma d}'$$

$$= \mathrm{Var}(\hat{\theta}_0) + \frac{\alpha_1^2\theta_0^2}{\theta_1^2}\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) + \frac{\alpha_2^2\theta_0^2}{\theta_2^2}\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)$$

$$+2\frac{\alpha_1\theta_0}{\theta_1}\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) + 2\frac{\alpha_2\theta_0}{\theta_2}\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2) + \frac{2\alpha_1\alpha_2\theta_0^2}{\theta_1\theta_2}\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) \qquad (2.156)$$

olur. Türev alınarak sıfıra eşitlenirse aşağıdaki iki denklem elde edilir:

$$\frac{2\alpha_1\theta_0^2}{\theta_1^2}\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1) + \frac{2\theta_0}{\theta_1}\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) + \frac{2\alpha_2\theta_0^2}{\theta_1\theta_2}\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2) = 0,$$

(2.157)

$$\frac{2\alpha_1\theta_0^2}{\theta_1\theta_2}\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)) + \frac{2\theta_0}{\theta_2}\mathrm{Cov}(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2) + \frac{2\alpha_2\theta_0^2}{\theta_2^2}\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2) = 0.$$

İki denklem birlikte çözüldüğünde,

$$\alpha_1^* = \frac{\theta_1}{\theta_0}\left\{\frac{Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)Var(\hat{\theta}_2) - Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)}{\left[Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\right]^2 - Var(\hat{\theta}_1)Var(\hat{\theta}_2)}\right\}, \tag{2.158}$$

$$\alpha_2^* = \frac{\theta_2}{\theta_0}\left\{\frac{Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)Var(\hat{\theta}_1) - Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)}{\left[Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\right]^2 - Var(\hat{\theta}_1)Var(\hat{\theta}_2)}\right\} \tag{2.159}$$

elde eldir. Bu değerler, $\alpha_1^* = \frac{\theta_1}{\theta_0} g_2(T)$ ve $\alpha_2^* = \frac{\theta_2}{\theta_0} g_3(T)$ olarak, Eş. (2.144) ve Eş. (2.145)'teki değerler cinsinden yazılabilir. Eş. (2.145)'te yerine yazıldığında,

$$HKO(e_4) = Var(\hat{\theta}_0) + \frac{\alpha_1^{*2}\theta_0^2}{\theta_1^2} Var(\hat{\theta}_1) + \frac{\alpha_2^{*2}\theta_0^2}{\theta_2^2} Var(\hat{\theta}_2)$$

$$+2\frac{\alpha_1^*\theta_0}{\theta_1} Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1) + 2\frac{\alpha_2^*\theta_0}{\theta_2} Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2) + \frac{2\alpha_1^*\alpha_2^*\theta_0^2}{\theta_1\theta_2} Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$$

elde edilir. Sadeleştirmeler yapıldığında bu eşitliğin Eş. (2.142) ile aynı olduğu görülür. O halde, $HKO_{min}(e_4)$ de Eş. (2.146)'deki gibidir. Burada

$$M = \frac{HKO(\hat{\theta}_1)\left[Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)\right]^2 + HKO(\hat{\theta}_2)\left[Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)\right]^2}{HKO(\hat{\theta}_1)HKO(\hat{\theta}_2) - \left[Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\right]^2}$$

$$-\frac{2Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_2)Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)Cov(\hat{\theta}_0,\hat{\theta}_1)}{HKO(\hat{\theta}_1)HKO(\hat{\theta}_2) - \left[Cov(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)\right]^2}$$

biçimindedir.

2.4.3. İkiden Çok Bilinen Parametre İçin Genelleştirilmiş Tahmin Edici Sınıfı

N büyüklüklü C kitlesinden n büyüklüklü c örneklemi, **herhangi bir örnekleme yöntemiyle** seçilsin. Genelleştirilmiş tahmin edici sınıfı, örnekleme yöntemine bağlı değildir. y, çalışmada ilgilenilen değişken, x_1, x_2, …, x_k da iki bilinen parametreye sahip $\Theta_i = (S^2_{x_i}, \theta_{i2})$ (i=1,2,…,k) , yardımcı değişkenler olsunlar. Kitle varyansı S^2_y'nin tahmini, fark yöntemi ile yapılabilir. c örneklemindeki y, x_1, x_2, …, x_k gözlemleri ile yardımcı değişkenle ilgili bilinen $\Theta_1, \Theta_2, ..., \Theta_k$ kitle değerleri kullanılarak tahmin yapılır. $S^2_{x_i}, \theta_{i2}$'nin yansız tahmin edicileri $\hat{S}^2_{x_i}, \hat{\theta}_{i2}$ olsun. S^2_y'nin yansız tahmin edicisi ise, $\hat{S}^2_y$ olmak üzere, fark tahmin edicisi aşağıdaki gibidir (Arcos vd., 2005):

$$\hat{S}^2_D = \hat{S}^2_y + \sum_{i=1}^{k} c_i \left(S^2_{x_i} - \hat{S}^2_{x_i}\right) + \sum_{i=1}^{k} d_i \left(\theta_{i2} - \hat{\theta}_{i2}\right). \tag{2.160}$$

Eğer $\mathbf{B} = \left[c_1 \quad d_1 \quad ... \quad c_k \quad d_k\right]'$, $\mathbf{P} = \left[S^2_{x1} \quad \theta_{12} \quad ... \quad S^2_{xk} \quad \theta_{k2}\right]'$ ve

$\mathbf{p} = \left[\hat{S}^2_{x1} \quad \hat{\theta}_{12} \quad ... \quad \hat{S}^2_{xk} \quad \hat{\theta}_{k2}\right]'$ biçiminde gösterilirse,

$$\hat{S}^2_D = \hat{S}^2_y + (\mathbf{P} - \mathbf{p})'\mathbf{B} \tag{2.161}$$

yazılır.

Tahmin edicinin HKO'sı aşağıdaki gibi bulunur.

Öncelikle eşitliğin her iki yanından da kitle varyansı çıkartılır:

$$\hat{S}^2_D - S^2_y = (\hat{S}^2_y - S^2_y) + (\mathbf{P} - \mathbf{p})'\mathbf{B}\,. \tag{2.162}$$

Eşitliğin her iki yanının karesi alınır:

$$(\hat{S}^2_D - S^2_y)^2 = (\hat{S}^2_y - S^2_y)^2 + 2(\hat{S}^2_y - S^2_y)(\mathbf{P} - \mathbf{p})'\mathbf{B} + \mathbf{(P - p)BB'(P - p)'} \quad . \tag{2.163}$$

Beklenen değer alınırsa,

$$HKO(\hat{S}_D^2) = HKO(\hat{S}_y^2) + 2Cov(\hat{S}_y^2, \mathbf{p})\mathbf{B} + HKO\mathbf{(p)BB'} \tag{2.164}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin B'ye göre türevi alınır ve sıfıra eşitlenirse, optimal **B** değerine ulaşılır:

$$\frac{\partial HKO(\hat{S}_D^2)}{\partial \mathbf{B}} = 0,$$

$$2Cov(\hat{S}_y^2, p) + 2HKO\mathbf{(p)B} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{B_{opt}} = \frac{-Cov(\hat{S}_y^2, \mathbf{p})}{HKO(\mathbf{p})} = \mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}. \tag{2.165}$$

Bulunan değer Eş. (2.164) ile verilen HKO'nda yerine yazılırsa,

$$HKO(\hat{S}_D^2) = HKO(\hat{S}_y^2) - 2Cov(\hat{S}_y^2, \mathbf{p})\frac{Cov(\hat{S}_y^2, \mathbf{p})}{HKO(\mathbf{p})} + HKO\mathbf{(p)}\left[\frac{Cov(\hat{S}_y^2, \mathbf{p})}{HKO(\mathbf{p})}\right]^2$$

$$\begin{aligned} &= HKO(\hat{S}_y^2) - \frac{(Cov(\hat{S}_y^2, \mathbf{p}))^2}{HKO(\mathbf{p})} \\ &= HKO(\hat{S}_y^2) - \boldsymbol{\sigma}'\mathbf{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \tag{2.166}$$

elde edilir. Burada $\mathbf{\Sigma}_{(2kx2k)} = (a_{ij})_{(2kx2k)}$'dır:

$a_{ii} = V(\hat{S}_{xi}^2)$, i tek ise

$a_{ii} = V(\hat{\theta}_{i2})$, i çift ise

$a_{ij} = cov(\hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}, \hat{\theta}_{\frac{i}{2}2})$, i ve j çift ise

$$a_{ij} = \text{cov}(\hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}, \hat{S}^2_{xj}), \qquad \text{i çift ve j tek ise} \tag{2.167}$$

$$a_{ij} = \text{cov}(\hat{S}^2_{xi}, \hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}), \qquad \text{i tek ve j çift ise}$$

$$a_{ij} = \text{cov}(\hat{S}^2_{xi}, \hat{S}^2_{xj}), \qquad \text{i ve j tek ise.}$$

Benzer biçimde,

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\text{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{S}^2_{x1}) \quad \text{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{\theta}_{12}) \ldots \quad \text{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{S}^2_{xk}) \quad \text{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{\theta}_{k2})\right]' \tag{2.168}$$

olarak tanımlanır.

Bulunan optimal **B** değeri, bilinmeyen kitle parametrelerine bağlıdır. Dolayısıyla bu optimal tahmin edici kullanılamaz. **B** değeri yerine örnekleme dayalı olan tahmin edici değeri kullanılır. $\boldsymbol{\Sigma}$ ve $\boldsymbol{\sigma}$ yerine yansız tahmin edicileri olan $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ ve $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ kullanılarak tahmin yapılır. Aşağıdaki tahmin edici elde edilir:

$$\hat{S}^2_{Dopt} = \hat{S}^2_y + (\mathbf{P} - \mathbf{p})\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2.169}$$

Burada $\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = (\hat{a}_{ij})$'dır:

$$\hat{a}_{ii} = \hat{V}(\hat{S}^2_{xi}), \qquad \text{i tek ise}$$

$$\hat{a}_{ii} = \hat{V}(\hat{\theta}_{i2}), \qquad \text{i çift ise}$$

$$\hat{a}_{ij} = \hat{\text{cov}}(\hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}, \hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}), \qquad \text{i ve j çift ise}$$

$$a_{ij} = \hat{\text{cov}}(\hat{\theta}_{\frac{i}{2}2}, \hat{S}^2_{xj}), \qquad \text{i çift ve j tek ise} \tag{2.170}$$

$a_{ij} = \hat{cov}(\hat{S}^2_{xi}, \hat{\theta}_{\frac{i}{2}2})$, i tek ve j çift ise

$a_{ij} = \hat{cov}(\hat{S}^2_{xi}, \hat{S}^2_{xj})$, i ve j tek ise.

Benzer biçimde,

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \left[\hat{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{S}^2_{x1}) \quad \hat{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{\theta}_{12}) \ldots \quad \hat{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{S}^2_{xk}) \qquad \hat{Cov}(\hat{S}^2_y, \hat{\theta}_{k2})\right]'$$

olarak tanımlanır.

S^2_y için, genel bir sınıf tanımlanmıştır (Arcos vd., 2005):

$$G = \left\{\hat{S}^2_g ; \hat{S}^2_g = G\left(\hat{S}^2_y, u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_k\right)\right\}. \qquad (2.171)$$

G(.), $\hat{S}^2_y, u_i = \dfrac{\hat{S}^2_{xi}}{S^2_{xi}}, v_i = \dfrac{\hat{\theta}_{i2}}{\theta_{i2}}$'nin sürekli bir fonksiyonudur. Öyle ki,

i) $G(S^2_y, \mathbf{I}) = S^2_y$,

ii) $G_1(S^2_y, \mathbf{I}) = 1$ biçimindedir. Burada **I,** birim matristir. $G_1(S^2_y, \mathbf{I})$, G(.)'nın S^2_y'ya göre birinci kısmi türevidir.

iii) G'nin birinci ve ikinci kısmi türevleri vardır ve P'de süreklidir.

Yukarıdaki koşulları sağlayan herhangi bir G fonksiyonu uygun bir tahmin edici olur. Klasik tahmin edici $\hat{S}^2_y = s^2_y$, fark tahmin edicisi $\hat{S}^2_{ID} = s^2_y + d(S^2_x - s^2_x)$ ve oransal tahmin edici $\hat{S}^2_{IR} = s^2_y \dfrac{S^2_x}{s^2_x}$, bu sınıfın içinde yer almaktadır.

Ayrıca eğer, θ_{i2} (i=1,…,k) bilgisi kullanılmazsa, Eş. (2.171)'deki tahmin edici sınıfı aşağıdaki gibi sadeleşir:

$$H = \left\{ \hat{S}_h^2 ; \hat{S}_h^2 = H\left(\hat{S}_y^2, u_1, \ldots, u_k \right) \right\}. \tag{2.172}$$

Bu sınıfın özel durumları ise $\hat{S}_1^2 = s_y^2 \left(\frac{S_x^2}{s_x^2} \right)^{\alpha}$, $\hat{S}_{IR}^2$, $\hat{S}_{ID}^2$ ve $\hat{S}_2^2 = w_1^* s_y^2 - w_2^* (s_x^2 - S_x^2)$ tahmin edicileridir.

G fonksiyonu, $(S_y^2, \mathbf{I})$ civarında ikinci derece Taylor serisine açılırsa,

$$\hat{S}_g^2 = (\hat{S}_y^2 - S_y^2) + \sum_{i=1,..k} \frac{\partial G}{\partial u_i}\bigg|_{(S_y^2,1)} \left(\frac{\hat{S}_{xi}^2}{S_{xi}^2} - 1 \right) + \sum_{i=1,...k} \frac{\partial G}{\partial v_i}\bigg|_{(S_y^2,1)} \left(\frac{\hat{\theta}_{i2}}{\theta_{i2}} - 1 \right) + O(n^{-1}) \tag{2.173}$$

bulunur.

Taylor serisinde birinci derece yaklaşım düşünülerek her iki yanın karesi ve beklenen değeri alınırsa, Eş. (2.157) sınıfında bulunan her tahmin edici için,

$$V(\hat{S}_g^2) \geq V(\hat{S}_y^2) - \boldsymbol{\sigma}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \tag{2.174}$$

elde edilir. Bu durumda, $\hat{S}_g^2$'nin asimtotik varyansı için alt sınır, $\hat{S}_{Dopt}^2$'in varyansı olacaktır. O halde $\hat{S}_{Dopt}^2$, bu sınıftaki optimal tahmindir.

Sadece bir tek x değişkenine ait $\overline{X}$ kitle ortalaması ve S_x^2 kitle varyansı bilindiğinde (k=1), sonlu kitlede, S_y^2 tahmini için, Eş. (2.154)'den $\theta_{i2} = \overline{X}_i$ olarak alınarak,

$$\hat{S}_D^2 = s_y^2 + c(S_x^2 - s_x^2) + d(\overline{X} - \overline{x}) \tag{2.175}$$

tahmin edicisi elde edilir.

Klasik fark tahmin edicisinde ise, $\hat{S}_{ID}^2 = s_y^2 + d(S_x^2 - s_x^2)$'dir ve bilinen kitle parametresi sadece x değişkenine ait S_x^2'dir.

Eş. (2.175)'de verilen tahmin edici için ise,

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} V(s_x^2) & \text{cov}(s_x^2, \overline{x}) \\ \text{cov}(s_x^2, \overline{x}) & V(\overline{x}) \end{bmatrix}$$

ve

$$\boldsymbol{\sigma} = \left[\text{cov}(s_y^2, s_x^2), \text{cov}(s_y^2, \overline{x})\right]'$$

olarak tanımlanır.

$\det(\mathbf{\Sigma}) = V(\overline{x})V(s_x^2)(1-\rho^2(\overline{x}, s_x^2))$ ve optimum tahmin edici de $\rho^2(\overline{x}, s_x^2) = 1$ haricinde tüm değerler için elde edilebilir:

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \frac{1}{V(\overline{x})V(s_x^2)(1-\rho^2(\overline{x}, s_x^2))} \begin{bmatrix} V(\overline{x}) & -\text{Cov}(s_x^2, \overline{x}) \\ -\text{Cov}(s_x^2, \overline{x}) & V(s_x^2) \end{bmatrix} \quad .$$

Eş.(2.160)'dan,

$$V_{min}(\hat{S}_D^2) = V(s_y^2) - \boldsymbol{\sigma}' \mathbf{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \tag{2.176}$$

$$= V(s_y^2) - \frac{V(\overline{x})\left[\text{Cov}(s_y^2, s_x^2)\right]^2 - 2\text{Cov}(s_x^2, \overline{x})\text{Cov}(s_y^2, s_x^2)\text{Cov}(s_y^2, \overline{x}) + V(s_x^2)\left[\text{Cov}(s_y^2, \overline{x})\right]^2}{V(\overline{x})V(s_x^2)(1-\rho^2(\overline{x}, s_x^2))}$$

elde edilir.

k=3 olarak alınsın. İlgilenilen değişken y ve yardımcı değişkenler x_1, x_2, x_3 olsun. $\theta_{i2} = \overline{X}_i$ alınırsa, Eş. (2.160)'dan aşağıdaki tahmin edici önerilebilir :

$$\hat{S}_D^2 = \hat{S}_y^2 + \sum_{i=1}^{3} c_i \left(S_{x_i}^2 - \hat{S}_{x_i}^2\right) + \sum_{i=1}^{3} d_i \left(\overline{X}_i - \overline{x}_i\right) \quad . \tag{2.177}$$

Tahmin edicinin HKO, Eş. (2.166)'de verilmiştir:

$$\mathrm{HKO}(\hat{S}_D^2) = \mathrm{HKO}(\hat{S}_y^2) - \frac{(\mathrm{Cov}(\hat{S}_y^2, p))^2}{\mathrm{HKO}(p)}$$

$$= \mathrm{HKO}(\hat{S}_y^2) - \boldsymbol{\sigma}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\sigma}$$

Burada,

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} V(\hat{S}_{x1}^2) & C(\hat{S}_{x1}^2, \bar{x}_1) & C(\hat{S}_{x1}^2, \hat{S}_{x2}^2) & C(\hat{S}_{x1}^2, \bar{x}_2) & C(\hat{S}_{x1}^2, \hat{S}_{x3}^2) & C(\hat{S}_{x1}^2, \bar{x}_3) \\ & V(\bar{x}_1) & C(\bar{x}_1, \hat{S}_{x2}^2) & C(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & C(\bar{x}_1, \hat{S}_{x3}^2) & C(\bar{x}_1, \bar{x}_3) \\ & & V(\hat{S}_{x2}^2) & C(\hat{S}_{x2}^2, \bar{x}_2) & C(\hat{S}_{x2}^2, \hat{S}_{x3}^2) & C(\hat{S}_{x2}^2, \bar{x}_3) \\ & & & V(\bar{x}_2) & C(\bar{x}_2, \hat{S}_{x3}^2) & C(\bar{x}_2, \bar{x}_3) \\ & & & & V(\hat{S}_{x3}^2) & C(\hat{S}_{x3}^2, \bar{x}_3) \\ & & & & & V(\bar{x}_3) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}(\hat{S}_y^2, \hat{S}_{x1}^2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{S}_y^2, \bar{x}_1) \\ \mathrm{Cov}(\hat{S}_y^2, \hat{S}_{x2}^2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{S}_y^2, \bar{x}_2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{S}_y^2, \hat{S}_{x3}^2) \\ \mathrm{Cov}(\hat{S}_y^2, \bar{x}_3) \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

2.4.4. İki Aşamalı Genelleştirilmiş Tahmin Edici Sınıf Yöntemi

N büyüklüklü kitleden, ilk aşamada n' büyüklüklü bir örneklem seçilsin. Burada gözlenen birimler x ve z olsun. İkinci aşamada örneklemden n büyüklüklü (n<n') ikinci bir örneklem seçilsin. Bu örneklemde de ölçülen birimler x, y ve z birimleri gözlensin.

x, y ve z değişkenlerinin değerleri X_i, Y_i ve Z_i (i=1,2,…,N) ile gösterilsin. Küçük harflerle ise x_i, y_i, z_i örneklem değerleri belirtilsin:

$$\bar{Y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Y_i\,,\quad \bar{X}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}X_i\,,\quad \bar{Z}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z_i\,,$$

$$S_y^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^2,\quad S_x^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i-\bar{X}\right)^2,\quad S_z^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(Z_i-\bar{Z}\right)^2,$$

$$\mu_{rst}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(Y_i-\bar{Y}\right)^r\left(X_i-\bar{X}\right)^s\left(Z_i-\bar{Z}\right)^t,$$

$$\theta_{rst}=\frac{\mu_{rst}}{\mu_{200}^{r/2}\,\mu_{020}^{s/2}\,\mu_{002}^{t/2}}\,,$$

$$C_y=\frac{S_y}{\bar{Y}}\,,\ C_x=\frac{S_x}{\bar{X}}\,,\ C_z=\frac{S_z}{\bar{Z}}\,.$$

$\bar{z}'$ ve $s_z^{'2}$, n’ büyüklüklü ilk örneklemde, z değişkenine ait örneklem ortalaması ve varyansını göstersin.

Aşağıdaki ifadeler tanımlanabilir:

$$w=\frac{s_y^2}{S_y^2}\,,\ u_1=\frac{\bar{x}}{\bar{x}'}\ \ v_1=\frac{\bar{z}}{\bar{Z}}\,,\ v_1^{'}=\frac{\bar{z}'}{\bar{Z}}\,,\ u_2=\frac{s_x^2}{s_x^{'2}}\,,\ v_2=\frac{s_z^2}{S_z^2}\,,\ v_2^{'}=\frac{s_z^{'2}}{S_z^2}\,. \tag{2.178}$$

İki aşamalı örneklemede her iki örneklem de yerine koymadan basit rasgele örnekleme yöntemi ile seçildiğinde, aşağıdaki beklenen değerler elde edilir:

$$E(w)=E(u_1)=E(v_1)=E(v_1^{'})=E(u_2)=E(v_2)=E(v_2^{'})=1\,,$$

$$E\left[(u_1-1)(v_1^{'}-1)\right]=E\left[(u_1-1)(v_2^{'}-1)\right]=E\left[(u_2-1)(v_1^{'}-1)\right]=E\left[(u_2-1)(v_2^{'}-1)\right]=0\,,$$

$$E\left[(v_1-1)^2\right]=\frac{1}{n}C_z^2, E\left[(v_1^{'}-1)^2\right]=\frac{1}{n'}C_z^2,\ E\left[(w-1)^2\right]=\frac{1}{n}(\theta_{400}-1)\ E\left[(u_1-1)^2\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)C_x^2,$$

$$E\left[(u_2-1)^2\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)(\theta_{040}-1),\ E\left[(v_2-1)^2\right]=\frac{1}{n}(\theta_{004}-1),\ E\left[(v_2^{'}-1)^2\right]=\frac{1}{n'}(\theta_{004}-1),$$

$$E\left[(w-1)(u_1-1)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\theta_{210}C_x, E\left[(w-1)(v_1-1)\right]=\frac{1}{n}\theta_{201}C_z,$$

$$E\left[(w-1)(v_1^{'}-1)\right]=\frac{1}{n'}\theta_{201}C_z,\ E\left[(w-1)(u_2-1)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)(\theta_{220}-1),$$

$$E\left[(w-1)(v_2-1)\right]=\frac{1}{n}(\theta_{202}-1),\ E\left[(w-1)(v_2^{'}-1)\right]=\frac{1}{n'}(\theta_{202}-1),$$

$$E\left[(u_1-1)(v_1-1)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\theta_{011}C_xC_z,\ E\left[(v_1-1)(v_2-1)\right]=\frac{1}{n}\theta_{003}C_z,$$

$$E\left[(v_1^{'}-1)(v_2^{'}-1)\right]=\frac{1}{n'}\theta_{003}C_z,\ E\left[(u_1-1)(u_2-1)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\theta_{030}C_x,$$

$$E\left[(u_1-1)(v_2-1)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\theta_{012}C_x,\ E\left[(v_1-1)(u_2-1)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\theta_{021}C_z,$$

$$E\left[(u_2-1)(v_2-1)\right]=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)(\theta_{022}-1). \qquad (2.179)$$

İkinci yardımcı değişken z için kitle ortalaması $\overline{Z}$ ve kitle varyansı S_z^2 biliniyor olsun. Ancak birinci yardımcı değişken x' e ait kitle ortalaması $\overline{X}$ ve S_x^2 kitle varyansı bilinmiyor. Z değişkeninin x değişkeni ile yüksek bir korelasyona sahip olduğu ancak, y ve z arasındaki korelasyonun sadece y ve x arasındaki korelasyon yüksek ise ortaya çıkabileceğini varsayalım. Bu tür durumlar için aşağıdaki genel tahmin edici sınıfı önerilmiştir (Jhajj vd., 2005):

$$\hat{V}_{Td} = T\left(s_y^2, \frac{\bar{x}}{\bar{x}'}, \frac{s_x^2}{s_x^{'2}}, \frac{\bar{z}'}{\bar{Z}}, \frac{s_z^{'2}}{S_z^2}\right)$$

$$= T\left(s_y^2, u_1, u_2, v_1^{'}, v_2^{'}\right). \tag{2.180}$$

Öyle ki T parametrik bir fonksiyondur ve $T\left(s_y^2,1,1,1,1\right) = S_y^2$ koşulunu sağlamaktadır. Bu sınıfa hata kareler ortalaması Taylor açılımından yararlanılarak bulunabilir:

$$HKO(\hat{V}_{Td}) \cong E\left[\left(\sum T_j(\hat{V}_{Td} - V)\right)^2\right]$$

$$= \frac{\partial \hat{V}_{Td}}{\partial s_y^2}\bigg|_{s_y^2=S_y^2} E\left[(s_y^2 - S_y^2)^2\right] + \frac{\partial \hat{V}_{Td}}{\partial u_1}\bigg|_{\bar{x}=\bar{x}'=\bar{X}} E\left[(u_1 - U_1)^2\right] + \ldots + \frac{\partial \hat{V}_{Td}}{\partial v_2^{'}}\bigg|_{s_z^2=S_z^2} E\left[(v_2^{'} - V_2)^2\right]$$

T_i (i=2,3,4,5), fonksiyonun birinci türevi olsun:

$$HKO(\hat{V}_{Td}) = V(s_y^2) + T_2^2 V(u_1) + T_3^2 v(u_2) + T_4^2 V(v_1^{'}) + T_5^2 V(v_2^{'})$$

$$+ 2T_2 Cov(s_y^2, u_1) + 2T_3 Cov(s_y^2, u_2) + 2T_4 Cov(s_y^2, v_1^{'}) + 2T_5 Cov(s_y^2, v_2^{'})$$

$$+ 2T_2T_3 Cov(u_1, u_2) + 2T_2T_4 Cov(u_1, v_1^{'}) + 2T_2T_5 Cov(u_1, v_2^{'})$$

$$+ 2T_3T_4 Cov(u_2, v_1^{'}) + 2T_3T_5 Cov(u_2, v_2^{'}) + 2T_4T_5 Cov(v_1^{'}, v_2^{'}). \tag{2.181}$$

Değerler yerlerine yazılırsa,

$$HKO(\hat{V}_{Td}) = \frac{1}{n} S_y^4 \left(\theta_{400} - 1\right) + T_2^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right) C_x^2 + T_3^2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)\left(\theta_{040} - 1\right) + T_4^2 \frac{1}{n'} C_z^2$$

$$+ T_5^2 \frac{1}{n'}\left(\theta_{004} - 1\right) + 2T_2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)\theta_{210} C_x S_y^2 + 2T_3\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)(\theta_{220} - 1) S_y^2$$

$$+2T_4\frac{1}{n'}S_y^2\theta_{201}C_z+2T_5\frac{1}{n'}S_y^2(\theta_{202}-1)+2T_2T_3\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\theta_{030}C_x+2T_4T_5\frac{1}{n'}\theta_{003}C_z \qquad (2.182)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlik düzenlenerek tekrar yazılırsa,

$$HKO(\hat{V}_{Td})=\frac{1}{n}S_y^4(\theta_{400}-1)$$

$$+\frac{1}{n'}\left[T_4^2C_z^2+T_5^2(\theta_{004}-1)+2T_4S_y^2\theta_{201}C_z+2T_5S_y^2(\theta_{202}-1)+2T_4T_5\theta_{003}C_z\right]$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\left[T_2^2C_x^2+T_3^2(\theta_{040}-1)+2T_2T_3\theta_{030}C_x+2T_2\theta_{210}C_xS_y^2+2T_3(\theta_{220}-1)S_y^2\right] \qquad (2.183)$$

bulunur. HKO'nın minimum değerini elde edebilmek için sırasıyla T_2, T_3, T_4, T_5'e göre türev alınıp sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial HKO(\hat{V}_{Td})}{\partial T_2}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\left(2T_2C_x^2+2T_3\theta_{030}C_x+2\theta_{210}C_xS_y^2\right)=0 \qquad (2.184)$$

$$\frac{\partial HKO(\hat{V}_{Td})}{\partial T_3}=0$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n'}\right)\left(2T_3(\theta_{040}-1)+2T_2\theta_{030}C_x+2(\theta_{220}-1)S_y^2\right)=0. \qquad (2.185)$$

İki denklem birlikte çözülürse,

$$T_2=\frac{S_y^2}{C_x}\left[\frac{\theta_{030}(\theta_{220}-1)-\theta_{210}(\theta_{040}-1)}{\theta_{040}-\theta_{030}^2-1}\right], \qquad (2.186)$$

$$T_3 = S_y^2\left(\frac{\theta_{030}\theta_{210} - \theta_{220} + 1}{\theta_{040} - \theta_{030}^2 - 1}\right) \tag{2.187}$$

olur. Benzer şekilde işlemler T_4, T_5 için yapılırsa,

$$\frac{\partial HKO(\hat{V}_{Td})}{\partial T_4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n'}\left(2T_4 C_z^2 + 2S_y^2\theta_{201}C_z + 2T_5\theta_{003}C_z\right) = 0 \tag{2.188}$$

$$\frac{\partial HKO(\hat{V}_{Td})}{\partial T_5} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n'}\left(2T_5\left(\theta_{004} - 1\right) + 2S_y^2(\theta_{202} - 1) + 2T_4\theta_{003}C_z\right) = 0 \tag{2.189}$$

bulunur. Yine iki denklem birlikte çözülürse,

$$T_4 = \frac{S_y^2}{C_z}\left[\frac{\theta_{003}\left(\theta_{202} - 1\right) - \theta_{201}\left(\theta_{004} - 1\right)}{\theta_{040} - \theta_{030}^2 - 1}\right], \tag{2.190}$$

$$T_5 = S_y^2\left(\frac{\theta_{003}\theta_{210} - \theta_{202} + 1}{\theta_{040} - \theta_{030}^2 - 1}\right) \tag{2.191}$$

olur. Bulunan bu değerler Eş. (2.179)'daki HKO'nda yerlerine yazılırsa, minimum HKO elde edilir:

$$HKO_{min}(\hat{V}_{Td}) = S_y^4\left\{\frac{1}{n}\left(\theta_{400} - 1\right) - \frac{1}{n'}\left[\theta_{201}^2 + \frac{(\theta_{202} - \theta_{201}\theta_{003} - 1)^2}{\theta_{004} - \theta_{030}^2 - 1}\right]\right. \tag{2.192}$$

$$\left. - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n'}\right)\left[\theta_{210}^2 + \frac{(\theta_{220} - \theta_{210}\theta_{030} - 1)^2}{\theta_{040} - \theta_{030}^2 - 1}\right]\right\}.$$

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

3. BU ÇALIŞMADA ÖNERİLEN VARYANS TAHMİN EDİCİLERİ

Örneklemede, kitle ortalamasının tahmin edilmesi kadar kitle varyansının tahmin edilmesi de önemlidir. Varyans tahmin edicisinin seçimini yapmak oldukça güçtür. Tahmin edicilerin etkinliği, maliyet, zaman, emek vb. koşullar göz önünde bulundurulmalıdır. Etkinlik için en önemli ölçü, tahmin edicinin HKO'dır. En küçük HKO'na sahip tahmin edici tercih edilir.

Kitle ortalaması ile ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında, klasik oransal kitle ortalaması tahmin edicisinden daha etkin tahmin edicilerin bulunduğu görülür. O halde bu tahmin ediciler, kitle varyansına da uyarlanabilir ve daha etkin tahmin ediciler önerilebilir.

Bu nedenle bu çalışmada, kitle ortalamasına ilişkin tahmin edicilerden yararlanılarak kitle varyansı için yeni tahmin ediciler önerilmiştir. En küçük HKO'na sahip yanlı tahmin ediciler önerilmiştir. Önerilen tahmin edicilerden bazılarının her koşulda, klasik oransal varyans tahmin edicisinden daha etkin olduğu görülmüştür.

3.1. Basit Rasgele Örneklemede Önerilen Varyans Tahmin Edicileri

BRÖ Yönteminde iki değişken olduğunda, değişkenlerden birine ait kitle bilgisi yardımıyla, diğerinin tahmini yapılabilir. Bu yönteme de oransal tahmin yöntemi adı verilir. Karakülah (2006) yüksek lisans tezinde, BRÖ ile kitle ortalamasının tahmini için, önerilen çeşitli oransal tahmin edicileri ve varyanslarını inceleyerek karşılaştırmalar yapmıştır. Kitle ortalaması için önerilen tahmin ediciler, duyarlılıkları yönünden klasik oransal tahmin edici ile karşılaştırılmıştır (Karakülah, 2006). Tezde bahsedilen kitle ortalaması tahmin edicileri, belli koşullar altında, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdırlar.

N büyüklüğündeki bir kitleden, BRÖ ile büyüklüğü n olan bir örneklem seçilir. Kitle ortalaması için Beale'in (1962) önerdiği tahmin edici,

$$\bar{y}_B = \left(\frac{\bar{y}}{\bar{x}}\right)\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)(\bar{X}) \tag{3.1}$$

biçimindedir . Buradan,

$$Yan(\bar{y}_B) \cong \upsilon\bar{Y}\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)(C_x^2 - C_{yx}) \ , \tag{3.2}$$

$$HKO(\bar{y}_B) \cong \upsilon\bar{Y}^2\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)^2(C_y^2 + C_x^2 - 2C_{yx}) \tag{3.3}$$

elde edilmiştir. Beale (1962)'nin tahmin edicisi , $-1 < \left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right) < 1$ için klasik oransal tahmin ediciden daha duyarlıdır (Karakülah, 2006).

Bu tahmin ediciden yola çıkılarak, kitle varyansı için de bir tahmin edici önerilebilir:

$$\hat{S}^2_{öneri(1)} = \left(\frac{s_y^2}{s_x^2}\right)\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)(S_x^2). \tag{3.4}$$

Burada, Eş.(3.1)'e benzer şekilde, kitle ortalaması yerine yardımcı değişken kitle varyansı, ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken örneklem ortalamaları yerine de , ilgilenilen değişken ve yardımcı değişken örneklem varyansları yazılmıştır.

Bu tahmin edicinin yan'ı ve HKO fark yöntemi ile aşağıdaki gibi bulunabilir (Sukhatme ve Sukhatme, 1970). Bunun için,

$$e_1 = \frac{s_y^2 - S_y^2}{S_y^2} \Rightarrow s_y^2 = S_y^2(1+e_1),$$

$$e_2 = \frac{s_x^2 - S_x^2}{S_x^2} \Rightarrow s_x^2 = S_x^2(1+e_2)$$

olarak tanımlanırsa, önerilen tahmin edici,

$$\hat{S}^2_{\text{öneri}(1)} = \left(\frac{S_y^2(1+e_1)}{(1+e_2)}\right)\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right) S_y^2(1+e_1)(1+e_2)^{-1}$$

$$\cong \left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right) S_y^2(1+e_1)(1-e_2+e_2^2) \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu tahmin edicinin yanı,

$$\text{Yan}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(1)}) \cong \left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right) S_y^2 E(e_1 - e_2 - e_1 e_2 + e_2^2) \tag{3.6}$$

olur. Burada,

$$E(e_1) = E(e_2) = 0\,,$$

$$E(e_1^2) = \lambda(\beta_y - 1),$$

$$E(e_2^2) = \lambda(\beta_x - 1), \tag{3.7}$$

$$E(e_1 e_2) = \lambda(\theta - 1)$$

değerleri yerlerine yazılırsa,

$$\text{Yan}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(1)}) \cong \lambda\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right) S_y^2(\beta_x - \theta) \tag{3.8}$$

elde edilir.

HKO bulunması için,

$$\hat{S}^2_{öneri(1)} - S^2_y \cong \left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C^2_x}\right) S^2_y (e_1 - e_2 - e_1 e_2 + e^2_2)$$

eşitliğinin karesi alınırsa,

$$(\hat{S}^2_{öneri(1)} - S^2_y)^2 \cong \left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C^2_x}\right)^2 S^4_y (e^2_1 + e^2_2 - 2e_1 e_2)$$

elde edilir. Her iki yanın da beklenen değeri alındığında ise,

$$HKO(\hat{S}^2_{öneri(1)}) \cong \lambda \left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C^2_x}\right)^2 S^4_y (\beta_y + \beta_x - 2\theta) \tag{3.9}$$

bulunur.

Kitle ortalaması için önerilen tüm tahmin ediciler, kitle varyansı tahmin edicisine uyarlanabilir. Karakülah (2006)'da incelenen Tin (1965)'in tahmin edicisi, Shuckla'nın tahmin edicisi, Ray ve Singh (1981)'ın tahmin edicisi, Sampath ve Durairajan (1988)'ın tahmin edicisi, kitle varyansının basit rasgele örnekleme ile tahminine uyarlanmış ve aşağıdaki tahmin ediciler önerilmiştir:

$$\hat{S}^2_{öneri(2)} = \frac{s^2_y}{s^2_x}\left[1 + \lambda(C_{yx} - C^2_x)\right] S^2_x, \tag{3.10}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(3)} = \frac{s^2_y + b(S^{2\alpha}_x - s^{2\alpha}_x)}{s^{2^\gamma}_x} S^{2^\gamma}_x, \tag{3.11}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(4)} = (s^2_y + s^{2\alpha}_x - S^{2\alpha}_x)\frac{S^2_x}{s^2_x}, \tag{3.12}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(5)} = \frac{s^2_y}{s^2_x + \rho_{yx}}(S^2_x + \rho_{yx}). \tag{3.13}$$

Önerilen birinci ve ikinci tahmin ediciler $\hat{S}^2_{\text{öneri(i)}} = \frac{s_y^2}{s_x^2} W_i S_x^2$ (i=1,2) biçiminde genel olarak yazılabilir. Burada $W_1 = \frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}$, $W_2 = 1+\lambda(C_{yx} - C_x^2)$'dir. Bu tahmin ediciler için yan ve HKO,

$$\text{Yan}(\hat{S}^2_{\text{öneri(i)}}) \cong \lambda S_y^2 W_i (\beta_x - \theta) \quad , \tag{3.14}$$

$$\text{HKO}(s^2_{\text{öneri(i)}}) = \lambda S_y^4 W_i^2 (\beta_y + \beta_x - 2\theta)\ , \qquad i=1,2 \tag{3.15}$$

olur.

Eş. (3.11)'de önerilen tahmin edici için de yan ve HKO bulunabilir. Bunun için, Eş. (3.11)'de verilen tahmin edici aşağıdaki gibi yazılır:

$$\hat{S}^2_{\text{öneri(3)}} = \frac{S_y^2(1+e_1) + b\left[S_x^{2\alpha} - (S_x^2(1+e_2))^\alpha\right]}{\left[S_x^2(1+e_2)\right]^\gamma} S_x^{2\gamma}. \tag{3.16}$$

MacLauren serisi açılımı kullanılırsa,

$$(1+e_2)^\alpha = 1 + \alpha e_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} e_2^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} e_2^3 + \ldots\ , \tag{3.17}$$

$$(1+e_2)^{-\gamma} = 1 - \gamma e_2 + \frac{\gamma(\gamma-1)}{2!} e_2^2 - \frac{\gamma(\gamma-1)(\gamma-2)}{3!} e_2^3 + \ldots \tag{3.18}$$

olur. Üçüncü terimden sonraki terimler ihmal edilirse, Eş. (3.16)'da önerilen tahmin edici,

$$\hat{S}^2_{\text{öneri(3)}} = \left[S_y^2(1+e_1) + bS_x^{2\alpha}\left(1 - (1+e_2)^\alpha\right)\right](1+e_2)^{-\gamma}$$

$$=\left\{S_y^2(1+e_1)+bS_x^{2\alpha}\left[1-\left(1+\alpha e_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}e_2^2\right)\right]\right\}\left[1-\gamma e_2+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}e_2^2\right], \qquad (3.19)$$

$$\hat{S}^2_{\text{öneri}(3)}-S_y^2=\left\{S_y^2e_1+bS_x^{2\alpha}\left[1-\left(1+\alpha e_2+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}e_2^2\right)\right]\right\}\left[1-\gamma e_2+\frac{\gamma(\gamma-1)}{2!}e_2^2\right] \qquad (3.20)$$

olur. Eşitliğin her iki yanının beklenen değerini alırsak ,

$$\text{Yan}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(3)})\cong\lambda\left\{(\beta_x-1)\left[\frac{\gamma(\gamma-1)}{2}S_y^2-B\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}S_x^{2\alpha}+B\alpha\gamma S_x^{2\alpha}\right]-\gamma S_y^2(\theta-1)\right\} \qquad (3.21)$$

elde edilir.

HKO'nı bulmak için ise, öncelikle Eş. (3.20)'nin her iki yanının karesi alınır:

$$(\hat{S}^2_{\text{öneri}(3)}-S_y^2)^2\cong S_y^4e_1^{\,2}+b^2\alpha^2e_2^{\,2}S_x^{4\alpha}+\gamma^2e_2^{\,2}S_y^4-2\gamma S_y^4e_1e_2$$

$$-2b\alpha S_y^2S_x^{2\alpha}e_1e_2+2b\alpha\gamma S_y^2S_x^{2\alpha}e_2^2 \qquad (3.22)$$

Daha sonra beklenen değer alınarak HKO elde edilir:

$$\text{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(3)})\cong\lambda\big[S_y^4(\beta_y-1)+(B^2\alpha^2S_x^{4\alpha}+\gamma^2S_y^4+2B\alpha\gamma S_y^2S_x^{2\alpha})(\beta_x-1)$$

$$-2(\gamma S_y^4+B\alpha S_y^2S_x^{2\alpha})(\theta-1)\big]\ . \qquad (3.23)$$

Burada E(b)=B ve $B=\dfrac{S_{yx}}{S_x^2}=\dfrac{\rho S_y}{S_x}$'dir. Bu değer yerine yazıldığında,

$$\text{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(3)})\cong\lambda S_y^4\left[(\beta_y-1)+(\alpha^2\rho^2\frac{S_x^{4\alpha-2}}{S_y^2}+\gamma^2+2\rho\alpha\gamma\frac{S_x^{2\alpha-1}}{S_y})(\beta_x-1)-2(\rho\alpha\frac{S_x^{2\alpha-1}}{S_y}+\gamma)(\theta-1)\right] \qquad (3.24)$$

bulunur. Burada $V_\alpha=\dfrac{S_x^{2\alpha-1}}{S_y}$ alınırsa,

$$HKO(\hat{S}^2_{öneri(3)}) \cong \lambda S_y^4\left[(\beta_y - 1) + (\gamma + \rho\alpha V_\alpha)^2(\beta_x - 1) - 2(\gamma + \rho\alpha V_\alpha)(\theta - 1)\right] \quad (3.25)$$

elde edilir. $HKO(\hat{S}^2_{öneri(3)})$'nin minimum değerini bulabilmek için, α ve γ'ya göre türev alınıp sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial HKO(\hat{S}^2_{öneri(3)})}{\partial\alpha} = 0 \ , \ \frac{\partial HKO(\hat{S}^2_{öneri(3)})}{\partial\gamma} = 0 \, .$$

Yukarıdaki eşitliklerden elde edilen α^* ve γ^* değerleri yerine yazıldığında, HKO'nın minimum değeri bulunur:

$$HKO_{min}(s^2_{öneri(3)}) \cong \lambda S_y^4\left[(\beta_y - 1) + (\alpha^{*2}\rho^2 V^2_{\alpha^*} + \gamma^{*2} + 2\rho\alpha^*\gamma^* V_{\alpha^*})(\beta_x - 1) - 2(\rho\alpha^* V_{\alpha^*} + \gamma^*)(\theta - 1)\right] \quad (3.26)$$

Benzer biçimde Eş.(3.12)'de önerilen tahmin edici için de yan ve HKO bulunmuştur:

$$\hat{S}^2_{öneri(4)} = \frac{S_y^2(1+e_1) + \left[\left(S_x^2(1+e_2)\right)^\alpha - S_x^{2\alpha}\right]}{(1+e_2)}$$

$$= \left\{S_y^2(1+e_1) + (S_x^2)^\alpha\left[(1+e_2)^\alpha - 1\right]\right\}(1+e_2)^{-1}. \quad (3.27)$$

MacLauren serisi açılımı ile yazılırsa,

$$\hat{S}^2_{öneri(4)} \cong \left\{S_y^2(1+e_1) + (S_x^2)^\alpha\left[\alpha e_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}e_2^2\right]\right\}(1 - e_2 + e_2^2)\,, \quad (3.28)$$

$$\hat{S}^2_{öneri(4)} - S_y^2 = S_y^2(e_1 - e_2 - e_1e_2 + e_2^2) + \alpha(S_x^2)^\alpha\left[e_2 + \frac{(\alpha-1)}{2}e_2^2 - e_2^2\right] \quad (3.29)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte her iki yanın beklenen değeri alındığında aşağıdaki yan miktarı elde edilir:

$$\text{Yan}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(4)}) = \lambda S_y^2(\beta_x - \theta) + \alpha(S_x^2)^{\alpha}\left(\frac{\alpha-3}{2}\right)(\beta_x - 1). \quad (3.30)$$

Eş. (3.29)'da her iki yanın karesi alınırsa,

$$(\hat{S}^2_{\text{öneri}(4)} - S_y^2)^2 = S_y^4(e_1^2 + e_2^2 - 2e_1e_2) + \alpha^2(S_x^4)^{\alpha}e_2^2 + 2\alpha S_y^2(S_x^2)^{\alpha}(e_1e_2 - e_2^2) \quad (3.31)$$

olur. Bu eşitlikte de her iki yanın beklenen değeri alınarak, HKO bulunur:

$$\text{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(4)}) \cong \lambda\left[S_y^4(\beta_y + \beta_x - 2\theta) + \alpha^2 S_x^{4\alpha}(\beta_x - 1) + 2\alpha S_y^2 S_x^{2\alpha}(\theta - \beta_x)\right].$$

(3.32)

HKO'nın $\alpha S_x^{2\alpha}$'e göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir:

$$\frac{\partial \text{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(4)})}{\partial(\alpha S_x^{2\alpha})} = 0,$$

$$\alpha S_x^{2\alpha} = \frac{S_y^2(\beta_x - \theta)}{(\beta_x - 1)}.$$

Bulunan değer, $\text{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(4)})$'da yerine yazılırsa, minimum HKO elde edilir:

$$\text{HKO}_{\min}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(4)}) \cong \lambda S_y^4\left[(\beta_y + \beta_x - 2\theta) - \frac{(\beta_x - \theta)^2}{(\beta_x - 1)}\right]. \quad (3.33)$$

Son olarak Eş. (3.13)' te önerilen tahmin edici için de yan ve HKO bulunmuştur. Tahmin edici,

$$\hat{S}^2_{\text{öneri}(5)} = S_y^2(1 + e_1)\frac{(S_x^2 + \rho)}{S_x^2(1 + e_2) + \rho}$$

$$= S_y^2(1+e_1)\left(1+\frac{S_x^2 e_2}{S_x^2+\rho}\right)^{-1} \quad (3.34)$$

$$= S_y^2(1+e_1)(1+\kappa e_2)^{-1}$$

$$\cong S_y^2(1+e_1)(1-\kappa e_2+\kappa^2 e_2^2), \quad (3.35)$$

$$\hat{S}^2_{\ddot{o}neri(5)} - S_y^2 = S_y^2(e_1-\kappa e_2+\kappa^2 e_2^2-\kappa e_1 e_2+\kappa^2 e_1 e_2^2) \quad (3.36)$$

biçimindedir. Burada $\kappa = \dfrac{S_x^2}{S_x^2+\rho}$ ‘dır. Eşitliğin her iki yanının beklenen değeri alınırsa, yan miktarı bulunur:

$$\text{Yan}(\hat{S}^2_{\ddot{o}neri(5)}) \cong \lambda S_y^2 \kappa\left(\kappa\beta_x-\kappa-\theta+1\right). \quad (3.37)$$

HKO’nı bulabilmek için Eş. (3.36)’da her iki yanın karesi alınır:

$$(\hat{S}^2_{\ddot{o}neri(5)} - S_y^2)^2 \cong (e_1^{\,2}+\kappa^2 e_2^{\,2}-2\kappa\, e_1 e_2). \quad (3.38)$$

Daha sonra beklenen değer alınarak, HKO elde edilir:

$$\text{HKO}(\hat{S}^2_{\ddot{o}neri(5)}) \cong \lambda S_y^4\left[(\beta_y-1)-2\,\kappa\,(\theta-1)+\kappa^2\,(\beta_x-1)\right] \quad (3.39)$$

Karşılaştırmalar

Önerilen tahmin ediciler ile klasik tahmin edici karşılaştırılmıştır.

Eş. (3.4) ve Eş. (3.10)’da verilen tahmin ediciler klasik tahmin edici ile karşılaştırılırsa,

$$\lambda S_y^4 W_1^2\left(\beta_y+\beta_x-2\theta\right) < \lambda S_y^4\left(\beta_y+\beta_x-2\theta\right),$$

$$\text{HKO}(\hat{S}^2_{\ddot{o}neri(i)}) < \text{HKO}(\hat{S}^2_7), \quad i=1,2$$

$W_i^2 < 1,$

$$-1 < W_i < 1, \tag{3.40}$$

koşulu sağlandığında, Eş. (3.4) ve Eş. (3.10)'da önerilen tahmin ediciler, klasik oransal tahmin ediciden daha duyarlıdır. Burada $W_1 = \dfrac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}$, $W_2 = 1+\lambda(C_{yx} - C_x^2)$ biçimindedir.

Eş. (3.11)'de önerilen tahmin edici ile klasik tahmin edici de karşılaştırılmıştır. Aşağıdaki koşul sağlandığında, önerilen tahmin edicinin klasik tahmin ediciden daha duyarlı olduğu söylenebilir:

$\mathrm{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(3)}) < \mathrm{HKO}(\hat{S}^2_7),$

$$M(\beta_x - 1) - 2T(\theta - 1) < \beta_x + \beta_y - 2\theta. \tag{3.41}$$

Burada $M = \alpha^2 \rho^2 \dfrac{S_x^{4\alpha-2}}{S_y^2} + 2\alpha\gamma\rho\dfrac{S_x^{2\alpha-1}}{S_y} + \gamma^2$, $T = \dfrac{\rho S_x^{2\alpha-1}}{S_y} + \gamma$'dir.

Eş. (3.12)'de önerilen tahmin edici için de aynı şekilde karşılaştırma yapılabilir:

$\mathrm{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(4)}) < \mathrm{HKO}(\hat{S}^2_7),$

$$-\frac{(\beta_x - \theta)^2}{\beta_x - 1} < 0 \qquad ,\beta_x > 1, \tag{3.42}$$

ya da $-\dfrac{(\beta_x - \theta)^2}{\beta_x - 1} > 0$, $\beta_x < 1.$

Yukarıdaki koşullara dikkat edildiğinde bu koşullar her zaman için sağlanır. Bu nedenle önerilen tahmin edici klasik tahmin ediciden her zaman daha duyarlı olur.

Son olarak, Eş. (3.13)'te önerilen tahmin edici ile klasik tahmin edici karşılaştırılmıştır:

$$\mathrm{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(5)}) < \mathrm{HKO}(\hat{S}^2_7),$$

$$\kappa^2(\beta_x - 1) - 2\kappa(\theta - 1) < 1 + \beta_x - 2\theta\ . \qquad (3.43)$$

3.2. Genelleştirilmiş Sınıf Yardımıyla Önerilen Bazı Varyans Tahmin Edicileri

Eş. (2.147) - Eş. (2.155) 'te verilen tahmin edicilerden yararlanılarak, bu tahmin edicilerin kitle varyansı için düşünülmesiyle, aşağıdaki tahmin edici, Eş. (2.150)'den yararlanılarak, bu çalışmada önerilmiştir:

$$\hat{S}^2_{\text{öneri}(6)} = s_y^2\left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_x^2}{S_x^2}\right)^{\alpha_2}. \qquad (3.44)$$

Öncelikle Taylor serisi yöntemi ile $\mathrm{HKO}_{\min}$ bulunur:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 S_y^2/\bar{X} & \alpha_2 S_y^2/S_x^2 \end{bmatrix}$$

Taylor serisine göre, $\mathrm{HKO}(\hat{S}^2_p)$ = $\mathbf{d\Sigma d'}$ eşitliği ile bulunur:

$$\begin{aligned}\mathrm{HKO}(\hat{S}^2_{\text{öneri}(6)}) &= \mathrm{Var}(s_y^2) + \frac{\alpha_1^2 S_y^4}{\bar{X}^2}\mathrm{Var}(\bar{x}) + \frac{\alpha_2^2 S_y^4}{S_x^4}\mathrm{Var}(s_x^2)\\ &+ 2\frac{\alpha_1 S_y^2}{\bar{X}}\mathrm{Cov}(s_y^2,\bar{x}) + 2\frac{\alpha_2 S_y^2}{S_x^2}\mathrm{Cov}(s_y^2,s_x^2) \qquad (3.45)\\ &+ 2\frac{\alpha_1\alpha_2 S_y^4}{\bar{X}S_x^2}\mathrm{Cov}(\bar{x},s_x^2)\,.\end{aligned}$$

Burada,

$$\beta_x = \frac{\mu_{04}}{\mu_{02}^2}, \quad Var(s_x^2) = \lambda S_x^4(\beta_x - 1), \quad Cov(s_y^2, \bar{x}) = \lambda \mu_{21} \quad , \quad Cov(s_y^2, s_x^2) = \lambda S_y^2 S_x^2(\theta - 1),$$

$$\theta = \frac{\mu_{22}}{\mu_{20}\mu_{02}} \quad , \quad Cov(\bar{x}, s_x^2) = \lambda \mu_{03}$$

biçimindedir. Varyans ve kovaryans değerleri yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} HKO(\hat{S}^2_{\text{öneri}(6)}) &= Var(s_y^2) + \frac{\alpha_1^2 S_y^4}{\bar{X}^2}\lambda S_x^2 + \frac{\alpha_2^2 S_y^4}{S_x^4}\lambda S_x^4(\beta_x - 1) \\ &+ 2\frac{\alpha_1 S_y^2}{\bar{X}}\lambda\mu_{21} + 2\frac{\alpha_2 S_y^2}{S_x^2}\lambda S_y^2 S_x^2(\theta - 1) \\ &+ 2\frac{\alpha_1\alpha_2 S_y^4}{\bar{X}S_x^2}\lambda\mu_{03} \end{aligned} \tag{3.46}$$

olur. Eş. (3.46)'nın α_1 ve α_2'ye göre kısmi türevleri alınarak sıfıra eşitlendiğinde,

$$\frac{\alpha_1 S_y^4 S_x^2}{\bar{X}^2} + \frac{S_y^2\mu_{21}}{\bar{X}} + \frac{\alpha_2 S_y^4 \mu_{03}}{\bar{X}S_x^2} = 0, \tag{3.47}$$

$$\frac{\alpha_1 S_y^4 \mu_{03}}{\bar{X}S_x^2} + S_y^4(\theta - 1) + \alpha_2 S_y^4(\beta_x - 1) = 0$$

bulunur. Eş. (3.47)'de verilen iki denklem birlikte çözüldüğünde, minimum değerler bulunur:

$$\alpha_1^* = \frac{\bar{X}S_x^2\left[\mu_{21}(\beta_x - 1)S_x^2 - (\theta - 1)\mu_{03}S_y^2\right]}{S_y^2\left[\mu_{03}^2 - S_x^6(\beta_x - 1)\right]},$$

(3.48)

$$\alpha_2^* = -\frac{S_x^2\left[\mu_{21}\mu_{03} - S_x^4 S_y^2(\theta - 1)\right]}{S_y^2\left[\mu_{03}^2 - S_x^6(\beta_x - 1)\right]}.$$

Bulunan değerler Eş. (3.46)'da yerlerine yazıldığında aşağıdaki minimum HKO elde edilir:

$$HKO_{min}(\hat{S}^2_{öneri(6)}) = \lambda S_y^4(\beta_y - 1) - \frac{\lambda}{S_x^6(\beta_x - 1) - \mu_{03}^2}\Big[S_x^6 S_y^4(\theta - 1)^2 - S_x^4 \mu_{21}(\beta_x - 1)$$

$$-2S_y^2 S_x^2 \mu_{21}\mu_{03}(\theta - 1)\Big]. \tag{3.49}$$

Genelleştirilmiş sınıf yönteminde de aynı sonuç Eş. (2.146)'da verilen şekilde elde edilir. Burada

$$\theta_0 = S_y^2,\ \hat{\theta}_0 = s_y^2;\ \ \theta_1 = \overline{X},\ \hat{\theta}_1 = \overline{x}\ ;\ \theta_2 = S_x^2, \hat{\theta}_2 = s_x^2$$

olarak alınır ve Eş. (2.146)'da yerlerine yazılırsa,

$$HKO(\hat{S}^2_{öneri(6)}) = Var(s_y^2) - M,$$

$$M = \frac{V(\overline{x})\left[C(s_y^2, s_x^2)\right]^2 + V(s_x^2)\left[C(s_y^2, \overline{x})\right]^2 - 2C(s_y^2, s_x^2)C(s_y^2, \overline{x})C(\overline{x}, s_x^2)}{V(\overline{x})V(s_x^2) - \left[C(\overline{x}, s_x^2)\right]^2}$$

$$= \frac{\lambda S_x^2\left[\lambda S_y^2 S_x^2(\theta - 1)\right]^2 + \lambda S_x^4(\beta_x - 1)\left[\lambda\mu_{21}\right]^2 - 2\lambda S_y^2 S_x^2(\theta - 1)\lambda\mu_{21}\lambda\mu_{03}}{\lambda S_x^2 \lambda S_x^4(\beta_x - 1) - \left[\lambda\mu_{03}\right]^2}$$

$$= \frac{\lambda}{S_x^6(\beta_x - 1) - \mu_{03}^2}\left[S_x^6 S_y^4(\theta - 1)^2 - S_x^4\mu_{21}(\beta_x - 1) - 2S_y^2 S_x^2 \mu_{21}\mu_{03}(\theta - 1)\right] \tag{3.50}$$

elde edilir. O halde HKO da, Eş .(3.49) ile aynıdır.

Eş. (2.147) ve Eş. (2.155)'deki tahmin ediciler de yine kitle varyansını tahmin edecek şekilde yazılabilir. Ancak $\hat{\theta}_1 = \overline{x}, \theta_1 = \overline{X}$, $\hat{\theta}_2 = s_x^2$ ve $\theta_2 = S_x^2$ olduğu sürece minimum HKO, Eş.(2.165) olacaktır, değişmeyecektir:

$$\hat{S}^2_{öneri(7)} = w_1\left[s_y^2 - \lambda_1(\bar{x} - \bar{X})\right] + w_2\left[s_y^2 - \lambda_2\left(s_x^2 - S_x^2\right)\right], \ \sum_{i=1}^{2} w_i = 1, \tag{3.51}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(8)} = w_0 s_y^2 + w_1(\bar{x} - \bar{X}) + w_2(s_x^2 - S_x^2), \quad \sum_{i=0}^{2} w_i = 1, \tag{3.52}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(9)} = s_y^2 - \lambda_1\left(\bar{x} - \bar{X}\right) + \lambda_2\left(s_x^2 - S_x^2\right), \tag{3.53}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(10)} = \left[s_y^2 - \lambda_1(\bar{x} - \bar{X})\right](s_x^2 / S_x^2)^{\alpha}, \tag{3.54}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(11)} = \frac{s_y^2 - \lambda_1(\bar{x} - \bar{X}) - \lambda_2(s_x^2 - S_x^2)}{\bar{x} - \lambda_1^*(\bar{x} - \bar{X}) - \lambda_2^*(s_x^2 - S_x^2)}(\bar{X}), \tag{3.55}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(12)} = s_y^2 \frac{1 + \alpha_1\left(\dfrac{\bar{x}}{\bar{X}} - 1\right)}{1 + \alpha_2\left(\dfrac{s_x^2}{S_x^2} - 1\right)}, \tag{3.56}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(13)} = \frac{s_y^2}{1 + \alpha_1\left(\dfrac{\bar{x}}{\bar{X}} - 1\right) - \alpha_2\left(\dfrac{s_x^2}{S_x^2} - 1\right)}, \tag{3.57}$$

$$\hat{S}^2_{öneri(14)} = s_y^2\left[w_1\left(\frac{\bar{x}}{\bar{X}}\right) + w_2\left(\frac{s_x^2}{S_x^2}\right)^{\alpha_2}\right], \ \sum_{i=1}^{2} w_i = 1. \tag{3.58}$$

Burada $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1^*, \lambda_2^*), (\alpha, \alpha_1, \alpha_2), (w_0, w_1, w_2)$ uygun olarak seçilen sabitlerdir.

Önerilen tüm tahmin edicilerin minimum HKO, Eş. (3.49)'da verilmiştir. Buna göre,

$$HKO_{min}(\hat{S}^2_{öneri(6)}) = \ldots = HKO_{min}(\hat{S}^2_{öneri(14)})$$

olur.

3.3. Tabakalı Rasgele Örneklemede Önerilen Varyans Tahmin Edicileri

TRÖ'de varyansın tahmini ayrı tahmin edici olarak da yapılabilir. Ayrı tahmin edicide, herbir tabakadan kitle varyansı oransal yolla tahmin edilip tüm tabakalar üzerinde toplanır. TRÖ'de ayrı varyans için aşağıdaki tahmin ediciler bu çalışmada önerilmiştir:

$$\hat{S}^2_{ötb1} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{s^2_{xh}} S^2_{xh}, \tag{3.59}$$

$$\hat{S}^2_{ötb2} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{s^2_{xh} + C_{xh}} (S^2_{xh} + C_{xh}), \tag{3.60}$$

$$\hat{S}^2_{ötb3} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{s^2_{xh} + \beta_{xh}} (S^2_{xh} + \beta_{xh}), \tag{3.61}$$

$$\hat{S}^2_{ötb4} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{(s^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh}), \tag{3.62}$$

$$\hat{S}^2_{ötb5} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{(s^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh}), \tag{3.63}$$

$$\hat{S}^2_{ötb6} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} + C_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} + C_{xh}) \right], \tag{3.64}$$

$$\hat{S}^2_{ötb7} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} + \beta_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} + \beta_{xh}) \right], \tag{3.65}$$

$$\hat{S}^2_{ötb8} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh}) \right], \tag{3.66}$$

$$\hat{S}^2_{ötb9} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh}) \right], \tag{3.67}$$

$$\hat{S}^2_{ötb10} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh} \left(\frac{S^2_{xh} + \beta_{xh}}{s^2_{xh} + \beta_{xh}} \right)^{\delta} \qquad (3.68)$$

$$\hat{S}^2_{ötb11} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh} \left[2 - \left(\frac{s^2_{xh} + \beta_{xh}}{S^2_{xh} + \beta_{xh}} \right)^{\varphi} \right]. \qquad (3.69)$$

Bu tahmin ediciler için hata kareler ortalamaları da bulunmuştur. Taylor serisi yönteminden yararlanılır :

$$HKO(\hat{S}^2_{ötb}) \cong \sum_{h=1}^{L} \mathbf{d_h} \, \Sigma_{\mathbf{h}} \, \mathbf{d}'_h \, , \qquad (3.70)$$

$$\mathbf{d_h} = \left[\left. \frac{\partial h(a,b)}{\partial a} \right|_{S^2_{yh}, S^2_{xh}} \quad \left. \frac{\partial h(a,b)}{\partial b} \right|_{S^2_{yh}, S^2_{xh}} \right],$$

$$\mathbf{\Sigma_h} = \begin{bmatrix} V(s^2_{yh}) & Cov(s^2_{yh}, s^2_{xh}) \\ Cov(s^2_{yh}, s^2_{xh}) & V(s^2_{xh}) \end{bmatrix}.$$

Burada $h(a,b)=h((s^2_y, s^2_x) = s^2_{y_{ötb}}$ ’dır. Eş. (3.59) için,

$$\mathbf{d_h} = \begin{bmatrix} W_h & -\frac{W_h S^2_{yh}}{S^2_{xh}} \end{bmatrix}$$

olur. Buna göre,

$$HKO(\hat{S}^2_{ötbi}) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 V(s^2_{yh}) - 2\frac{W_h^2 S^2_{yh}}{S^2_{xh}} Cov(s^2_{yh}, s^2_{xh}) + \frac{W_h^2 S^4_{yh}}{S^4_{xh}} V(s^2_{xh}), i=1,\ldots 5 \qquad (3.71)$$

elde edilir. Burada,

$$V(s^2_{yh}) = \lambda_h S^4_{yh}(\beta_{yh} - 1),$$

$$V(s^2_{xh}) = \lambda_h S^4_{xh}(\beta_{xh} - 1), \tag{3.72}$$

$$Cov(s^2_{yh}, s^2_{xh}) = \lambda_h S^2_{yh} S^2_{xh}(\theta_h - 1)$$

biçimindedir. Eş. (3.70) kullanılarak, HKO, Taylor serisi yöntemi ile

$$HKO(\hat{S}^2_{\ddot{o}tb}) \cong \sum_{h=1}^{L} \mathbf{d_h \Sigma_h d_h'},$$

$$HKO(\hat{S}^2_{\ddot{o}tb}) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^4_{yh}(\beta_{yh} + \beta_{xh} - 2\theta_h) \tag{3.73}$$

bulunur.

Eş. (3.60)'dan Eş. (3.64)'e kadar olan tahmin ediciler için, HKO aşağıdaki gibidir:

$$HKO(\hat{S}^2_{\ddot{o}tbi}) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^4_{yh}\{(\beta_{yh} - 1) - A_{hi}[2(\theta_h - 1) + A_{hi}(\beta_{xh} - 1)]\}, i=2,..,5 \tag{3.74}$$

Burada,

$$A_{h2} = \frac{S^2_{xh}}{S^2_{xh} + C_{xh}}, \; A_{h3} = \frac{S^2_{xh}}{S^2_{xh} + \beta_{xh}}, \; A_{h4} = \frac{S^2_{xh} C_{xh}}{S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh}}, \; A_{h5} = \frac{S^2_{xh} \beta_{xh}}{S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh}}$$

olarak tanımlanır.

Eş. (3.64)'te önerilen tahmin edici için HKO ise,

$$HKO(\hat{S}^2_{\ddot{o}tb}) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^4_{yh}\left[(\beta_{yh} - 1) - A_h(2\alpha_h(\theta_h - 1) - 1) + \alpha_h^2 A_h(\beta_{xh} - 1)\right] \tag{3.75}$$

olur. Eş. (3.75)'in α_h 'a gore türevi alınarak sıfıra eşitlenirse, optimal değeri bulunur:

$$\alpha_{hopt} = \frac{(\theta_h - 1)(S^2_{xh} + \beta_{xh})}{S^2_{xh}(\beta_{xh} - 1)}, \qquad h= 1,2,\ldots,L. \tag{3.76}$$

Eş. (3.76)'de bulunan değer, Eş. (3.75)'daki HKO'nda yerine yazılırsa,

$$HKO_{min}(\hat{S}^2_{ötb}) \cong \sum_{h=1}^{L} W_h^2 \lambda_h S^4_{yh} \left[(\beta_{yh} - 1) - \frac{(\theta_h - 1)^2}{\beta_{xh} - 1} \right] \tag{3.77}$$

elde edilir.

Eş. (3.64)'ten Eş. (3.69)'a kadar olan tahmin edicierin HKO, Eş. (3.77) ile aynıdır. Ancak optimal değerler değişir. Optimal değerler aşağıdaki gibidir :

$$\alpha_{hopti} = \delta_{hopti} = \varphi_{hopti} = \frac{(\theta_h - 1)}{A_{hi}(\beta_{xh} - 1)}, \; h=1,2,\ldots,L \; ; \; i=2,\ldots 5 \, . \tag{3.78}$$

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM

4. SAYISAL ÖRNEK

Bu bölümde varyans tahmin edicileri ile ilgili sayısal bir örnek vermek amacıyla Hacettepe Üniversitesi Biyoloji Bölümü Ekoloji Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans öğrencisi Savcı (2007'nın Yüksek Lisans tez çalışmasındaki veriler kullanılmıştır. Tezde sevgi çiçeğinin (Asteraceae) biyo-ekolojik yapısı incelenmiştir. Çeşitli etkenlerin etkisi altında kalan sevgi çiçeğinin kitle gelişimi, tohum özellikleri, tohumların çimlenme potansiyelleri vb. konularda incelemeler yapılmıştır. Sevgi çiçeğinin boy uzunluğu ve pappus uzunluğu ölçülmüştür. Pappus, tohumların üzerinde bulunan ve çiçeğin toprağa tutunmasını sağlayan kıllardır. Pappus uzunluğunun ölçülmesi çok zor olduğundan, boy uzunluğu yardımcı değişken olarak alınmıştır. Sevgi çiçeği, Ankara'da üç farklı bölgede yetişmektedir. Bu bölgeler, Gölbaşı Aquapark Bölgesi, Ulus Devlet Opera ve Bale Binası'nın bahçesi ve gübreleme uygulanan çeşitli alanlardır.

Uygulamada amaç, daha önceki bölümlerde kuramsal olarak anlatılan tahmin yöntemleri ile kitle varyansının tahminini yapmaktır. Önerilen çeşitli tahmin edicilerle kitle varyansı tahmin edilecek ve tahmin edicilerin etkinlikleri bu uygulama için karşılaştırılacaktır. BRÖ, TRÖ ve SKÖ yöntemleri ile örneklemler çekilmiştir.

Sevgi çiçeği'ne ait iki farklı değişken bulunmaktadır. Bu değişkenlerden boy (x) değişkeni yardımcı değişken olarak ele alınmıştır. Ölçümünün yapılması kolay bir değişkendir. İlgilenilen değişken ise pappus uzunluğu (y) olarak alınmıştır. Pappus uzunluğunu belirlemek oldukça güçtür. Bu iki değişken arasında pozitif yönlü bir ilişki vardır. Toplam 450 çiçek için boy uzunlukları ve pappus uzunlukları ölçülmüştür (Savcı, 2007). Kitleye ait değerler Çizelge (4.1)'de verilmiştir.

Çizelge (4.1) 2006 Yılı için Sevgi Çiçeğinin Boy Uzunluğu x ve Pappus Uzunluğu y Değişkenlerine Ait Kitle Bilgileri

N=450	$\beta_X = 3{,}697$
$\overline{X} = 3{,}455$	$\beta_y = 5{,}707$
$\overline{Y} = 2{,}291$	$\theta = 2{,}530$
$S_x^2 = 0{,}518$	$\rho = 0{,}630$
$S_y^2 = 0{,}486$	B=0,613

Sayısal hesaplamalardan önce yapılan analizlerden, y değişkeni pappus uzunluğu (mm.) ve x yardımcı değişkeni boy (mm.) arasındaki ilişki, başlangıç noktasından geçen bir doğru denklemi ile gösterilebilmektedir. Bu nedenle basit tahmin edicilerin yanı sıra oransal tahmin ediciler de bulunabilir.

4.1. Basit Rasgele Örnekleme için Sayısal Örnek

N=450 çiçekten yerine konmadan basit rasgele örnekleme yöntemi ile bir örneklem çekilmiştir. Örneklem büyüklüğünün tahmininde,

$$n_0 = \frac{t^2 S_x^2}{d_x^2}, \quad n = \frac{n_0}{1 + \frac{n_0}{N}} \tag{4.1}$$

eşitliği kullanılmıştır (Çıngı, 1994). Burada d_x, x değişkeni için hoşgörü miktarıdır (tolerance value). Örneklem birimi çiçekler olarak alınıp, hoşgörü miktarı d_x =0,145 belirlenmiştir. Burada $V(\bar{x})=d^2 / t^2 = 0{,}0053$ olarak hesaplanmıştır. Buradan $n_0 = \dfrac{S_x^2}{V(\bar{x})} \cong 99$ yazılabilir. $n = \dfrac{99}{1+\dfrac{99}{450}} \cong 81$ olarak elde edilmiştir.

N=450 büyüklüğündeki kitleden 81 çiçek yerine koymadan rasgele olarak seçilmiştir. Seçilen örnekleme ait değerler Çizelge (4.2)'de verilmiştir:

Çizelge (4.2) 2006 Yılı için Sevgi Çiçeği Boy Uzunluğu x ve Pappus Uzunluğu y Değişkenlerine Ait Örneklem Bilgileri

$\bar{x} = 3{,}320$	b = 0,548
$\bar{y} = 2{,}204$	r = 0,606
$s_x^2 = 0{,}519$	$\hat{\beta}_x = 4{,}829$
$s_y^2 = 0{,}425$	$\hat{\beta}_y = 2{,}792$

Çizelge (4.2)'de $\bar{x}$, boy uzunluğu örneklem ortalaması; $\bar{y}$, pappus uzunluğu örneklem ortalaması; s_x^2, boy uzunluğu örneklem varyansı; s_y^2, pappus uzunluğu örneklem varyansı; b, örneklemden regresyon katsayısı tahmini; r, örneklemden korelasyon katsayısı tahmini; $\hat{\beta}_x$, örneklemden boy uzunluğu basıklık katsayısı tahmini; $\hat{\beta}_y$ örneklemden pappus uzunluğu basıklık katsayısı tahminidir. İkinci Bölüm'de incelenen tüm tahmin edicilerin, BRÖ ile seçilmiş örneklem üzerinden tahmin değerleri, yanları ve Bölüm 2'de verilen ilgili eşitlikler kullanılarak, hata kareler ortalamaları hesaplanmıştır. Bu değerler Çizelge (4.3)'te verilmiştir:

Çizelge (4.3) Varyans Tahmin Edicilerinin Tahmin, Yan ,Hata Kareler Ortalamaları Değerleri ve Hata Kareler Ortalamalarının Küçükten Büyüğe Doğru Sıra Numaraları

Tahmin Ediciler	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**	**HKO Sıra No**
Klasik Tahmin Edici $s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$	0,652075	-	0,013736	11
Hirano(1973) $s_y^{'2} = A\, s_y^2$	0,402118	0,4598	0,012982	9
Das ve Triphati (1978) $\hat{S}_1^2 = s_y^2\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha}$	0,428127	-0,00003	0,013732	10
Das veTriphati (1978) $\hat{S}_2^2 = s_y^2\left(\frac{S_x^2}{s_x^2}\right)^{\alpha}$	0,424784	-0,0071	0,011205	3
Das ve Triphati (1978) $\hat{S}_3^2 = \frac{\bar{X}s_y^2}{\bar{X} + \alpha(\bar{x} - \bar{X})}$	0,428079	-0,000005	0,013732	10
Das ve Triphati (1978) $\hat{S}_4^2 = \frac{S_x^2 s_y^2}{S_x^2 + \alpha(s_x^2 - S_x^2)}$	0,424784	0	0,011205	3

Çizelge (4.3) devam

Tahmin Ediciler	Tahmin	Yan	HKO	HKO Sıra No
Isaki (1983) $\hat{S}_5^2 = W_1 s_y^2 - W_2(\bar{x} - \bar{X})$	0,402156	-0,0264	0,012135	4
Isaki (1983) $\hat{S}_6^2 = W_1^* s_y^2 - W_2^*(s_x^2 - S_x^2)$	0,4057251	-0,0217	0,01010	1
$\hat{S}_7^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2} S_x^2$	0,424466	0,0069	0,012679	7
$\hat{S}_8^2 = s_y^2 + w(S_x^2 - s_x^2)$	0,424724	0	0,011205	3
Prasad ve Singh (1990) $\hat{S}_9^2 = \frac{s_y^{2\prime}}{s_x^2} S_x^2$	0,401422	-0,0198	0,012415	6
Prasad ve Singh (1990) $\hat{S}_{10}^2 = \frac{A s_y^2}{s_x^2} S_x^2$	0,40891	-0,0111	0,012336	5
Upadhyaya ve Singh(1999) $\hat{S}_{11}^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2 + \beta_x}(S_x^2 + \beta_x)$	0,425111	-0,0009	0,012758	8
Chandra ve Singh(2005) $\hat{S}_{12}^2 = \frac{s_y^2}{\alpha(s_x^2 + \beta_x) + (1-\alpha)(S_x^2 + \beta_x)}(S_x^2 + \beta_x)$	0,424784	Yansız	0,011205	3

Çizelge (4.3) devam

Tahmin Ediciler	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**	**HKO Sıra No**
$\hat{S}^2_{13} = s^2_y\left(\dfrac{S^2_x+\beta_x}{s^2_x+\beta_x}\right)^{\delta}$	0,424784	-0,0031	0,011205	3
$\hat{S}^2_{14} == s^2_y\left(2-\left[\dfrac{s^2_x+\beta_x}{S^2_x+\beta_x}\right]\right)$	0,424784	0,0031	0,011205	3
Kadılar ve Çıngı(2006b) $\hat{S}^2_{15} = W_1 s^2_y + W_2 \dfrac{s^2_y}{s^2_x}\tau S^2_x$	0,424775	-0,2718	0,011204	2

Bu durumda en iyi tahmin edici, bu uygulama için, Isaki (1983) tarafından önerilen altıncı tahmin edicidir. Daha sonra Kadılar ve Çıngı (2006b) tarafından önerilen on beşinci tahmin edici, en küçük HKO'na sahiptir.

Üçüncü Bölüm'de önerilen tahmin ediciler için tahmin, yan ve hata kareler ortalaması değerleri bulunmuş ve Çizelge (4.4)'te verilmiştir.

Çizelge 4.4. Önerilen Varyans Tahmin Edicileri için Tahmin, Yan ve Hata Kareler Ortalamaları Değerleri ve Hata Kareler Ortalamalarının Küçükten Büyüğe Doğru Sıra Numaraları

Önerilen Tahmin Ediciler	**Tahmin**	**Yan**	**HKO**	**HKO Sıra No**
$\hat{S}^2_{öneri1} = \left(\frac{s_y^2}{s_x^2}\right)\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)(S_x^2)$	0,4244	0,007	0,012678	3
$\hat{S}^2_{öneri2} = \frac{s_y^2}{s_x^2}\left(1+\lambda(C_{yx}-C_x^2)\right)S_x^2$	0,4244	0,007	0,012678	3
$\hat{S}^2_{öneri3} = \frac{s_y^2 + b(S_x^{2^\alpha} - s_x^{2^\alpha})}{s_x^{2^\gamma}} S_x^{2^\gamma}$	0,4492	0,0006	0,011205	1
$\hat{S}^2_{öneri4} = (s_y^2 + s_x^{2^\alpha} - S_x^{2^\alpha})\frac{S_x^2}{s_x^2}$	0,4245	0,007	0,011205	1
$\hat{S}^2_{öneri5} = \frac{s_y^2}{s_x^2+\rho}(S_x^2+\rho)$	0,4287	-0,0009	0,011312	2

Önerilen tahmin ediciler kendi aralarında hata kareler ortalamalarına göre sıralanmıştır. Buna göre, bu uygulama için, en küçük hata kareler ortalamasına sahip tahmin edici, önerilen üçüncü ve dördüncü tahmin edicilerdir.

Önerilen tahmin ediciler, kuramsal olarak, sadece klasik oransal tahmin edici $\hat{S}_7^2$ ile karşılaştırılmışlardır ($\hat{S}_7^2 = 0{,}012679$).

$\hat{S}^2_{öneri1} = \left(\frac{s_y^2}{s_x^2}\right)\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)(S_x^2)$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.40)'da verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. $-1 < \frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2} = 0{,}99 < 1$ koşulu sağlandığı için, önerilen tahmin edici, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır. Ancak koşulda belirtilen w_1 değeri üst sınıra çok yakın bir değer olduğundan hata kareler ortalamaları çok farklı değildir.

$\hat{S}^2_{öneri2} = \frac{s_y^2}{s_x^2}\left(1+\lambda(C_{yx} - C_x^2)\right)S_x^2$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.40)'ta verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. $-1 < 1+\lambda(C_{yx} - C_x^2) = 0{,}99 < 1$ koşulu sağlandığı için, önerilen ikinci tahmin edici de, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır. Ancak yine, koşulda belirtilen w_2 değeri üst sınıra çok yakın bir değer olduğundan hata kareler ortalamaları çok farklı değildir.

$\hat{S}^2_{öneri3} = \frac{s_y^2 + b(S_x^{2^\alpha} - s_x^{2^\alpha})}{s_x^{2^\gamma}} S_x^{2^\gamma}$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.41)'de verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. M= 0,3216, T= 0,5671 olduğundan koşul sağlandığı için, önerilen üçüncü tahmin edici, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır.

$\hat{S}^2_{öneri4} = (s_y^2 + s_x^{2^\alpha} - S_x^{2^\alpha})\frac{S_x^2}{s_x^2}$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.42)'de verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. Koşul sağlandığı için, önerilen dördüncü tahmin edici, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır.

Son olarak $\hat{S}^2_{öneri5} = \frac{s_y^2}{s_x^2 + \rho}(S_x^2 + \rho)$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.43)'te verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. Burada

$\kappa^2(\beta_x - 1) - 2\kappa(\theta - 1) = -0{,}831$,

$1 + \beta_x - 2\theta = -0{,}363$

bulunur. Koşul sağlandığı için, önerilen beşinci tahmin edici, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır.

4.2. Tabakalı Rasgele Örnekleme için Sayısal Örnek

Bitkiler bulundukları yerlere göre farklılık göstermektedirler. Üç farklı bölge düşünülerek araştırma yapılmıştır. Bu bölgeler, Aquapark, Opera ve Bale Binası'nın bahçesi ve gübreli alanda bulunan çiçeklerdir. Bu heterojen yapı düşünülerek, çiçekler bulundukları yerlere göre tabakalara ayrılmışlardır:

1. tabaka : Aquapark
2. tabaka : Opera ve Bale Binası'nın Bahçesi
3. tabaka : Gübreli Alan

Tabakalara ait kitle bilgileri Çizelge (4.5)'te verilmiştir.

Çizelge (4.5) Tabakalara Göre 2006 Yılı için Sevgi Çiçeği Boy Uzunluğu (x) ve Pappus Uzunluğu (y) Değişkenlerine Ait Kitle Bilgileri

Tabaka	W_h	$\overline{X}_h$	$\overline{Y}_h$	S^2_{xh}	S^2_{yh}	β_{xh}	β_{yh}	ρ_h	θ_h
1	0,33	2,4986	1,7609	0,0326	0,1323	20,1577	5,8390	0,4519	9,6776
2	0,33	3,8276	2,0287	0,0757	0,1381	18,3131	2,1164	0,1469	0,8439
3	0,34	4,0379	3,084	0,0488	0,2095	3,4896	2,2989	0,3327	1,0854

İkinci Bölüm'de incelendiği gibi, kitle varyansının tahmini, tabakalı rasgele örnekleme ile de yapılabilir.

Diğer örnekleme yöntemleri ile karşılaştırmalar da yapabilmek amacıyla yine n=81 çiçeğin seçilmesi uygun görülmüştür. Tabakalara dağıtım, her bir tabakada varyans bilindiği için, Neyman dağıtımı kullanılarak yapılmıştır:

$$n_h = n\frac{N_h S_{xh}}{\sum_{i=1}^{L} N_h S_{xh}} \quad , h=1,2,3.$$

Neyman dağıtımıyla, her bir tabakadan sırasıyla n_1=21, n_2 =33, n_3 =27 birim örnekleme seçilmiştir. Seçilen örnekleme ait değerler Çizelge (4.6)'da verilmiştir.

Çizelge (4.6) Tabakalara Göre 2006 Yılı için Sevgi Çiçeği Boy Uzunluğu (x) ve Pappus Uzunluğu (y) Değişkenlerine Ait Örneklem Bilgileri

Tabaka	n_h	$\bar{x}_h$	$\bar{y}_h$	s^2_{xh}	s^2_{yh}
1	21	2,477	1,676	0,023	0,130
2	33	3,857	2,093	0,047	0,147
3	27	4,122	3,130	0,043	0,187

İkinci Bölüm'de anlatılan varyans tahmin edicileri ve Üçüncü Bölüm'de önerilen varyans tahmin edicileri için tahmin ve hata kareler ortalamaları bulunmuş ve Çizelge (4.7)'de verilmiştir.

Çizelge (4.7) Tabakalı Rasgele Örneklemede Varyans Tahmin Edicileri için Tahmin ve Hata Kareler Ortalamaları Değerleri ve Hata Kareler Ortalamalarının Küçükten Büyüğe Doğru Sıra Numaraları

Varyans Tahmin Edicileri	**Tahmin**	**HKO**	**HKO Sıra No**
Kadılar ve Çıngı (2006a) $\hat{S}^2_{tb,y} \cong \sum_{h=1}^{L} W_h \hat{S}^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} W_h (\bar{y}_h - \bar{y}_{tb})^2$	0,155033	0,004856	3
Kadılar ve Çıngı (2006a) $\hat{S}^2_{ob} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x}} S^2_x$	1,018870	0,000729	1
Kadılar ve Çıngı (2006a) $\hat{S}^2_{obkc1} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x} + C_x}(S^2_x + C_x)$	0,392083	0,001211	2
Kadılar ve Çıngı (2006a) $\hat{S}^2_{obkc2} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x} + \beta_x}(S^2_x + \beta_x)$	0,173052	0,035522	6
Kadılar ve Çıngı (2006a) $\hat{S}^2_{obkc3} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x}\beta_x + C_x}(S^2_x\beta_x + C_x)$	0,658673	0,009809	4

Çizelge (4.7) devam

Varyans Tahmin Edicileri	**Tahmin**	**HKO**	**HKO Sıra No**
Kadılar ve Çıngı (2006a) $\hat{S}^2_{obkc4} = \dfrac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x}C_x + \beta_x}(S^2_x C_x + \beta_x)$	0,158849	0,028947	5

Çizelge (4.7)'de verilen tahmin ediciler için hata kareler ortalaması değerleri küçükten büyüğe doğru sıralanabilir. Buna göre,

$$HKO(\hat{S}^2_{ob}) < HKO(\hat{S}^2_{obkc1}) < HKO(\hat{S}^2_{tb,y}) < HKO(\hat{S}^2_{obkc3}) < HKO(\hat{S}^2_{obkc4}) < HKO(\hat{S}^2_{obkc2})$$

olur. Kadılar ve Çıngı (2006a) tarafından önerilen oransal birleşik tahmin edici, bu uygulama için, en küçük HKO'na sahiptir. Basit tahmin edici ise diğer üç tahmin ediciye göre daha iyi sonuç vermiştir.

Çizelge (4.8) Tabakalı Rasgele Örneklemede Önerilen Varyans Tahmin Edicileri için Tahmin ve Hata Kareler Ortalamaları Değerleri ile Hata Kareler Ortalamalarının Küçükten Büyüğe Doğru Sıra Numaraları

Önerilen Tahmin Ediciler	**Tahmin**	**HKO**	**HKO Sıra No**
$\hat{S}^2_{ötb1} = \sum_{h=1}^{L} W_h \dfrac{s^2_{yh}}{s^2_{xh}} S^2_{xh}$	0,211867	0,002461	6

Çizelge (4.8) devam

Önerilen Tahmin Ediciler	**Tahmin**	**HKO**	**HKO Sıra No**
$\hat{S}^2_{ötb2} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{s^2_{xh} + C_{xh}} (S^2_{xh} + C_{xh})$	0,175091	0,000819	4
$\hat{S}^2_{ötb3} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{s^2_{xh} + \beta_{xh}} (S^2_{xh} + \beta_{xh})$	0,155242	0,000750	2
$\hat{S}^2_{ötb4} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{(s^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh})$	0,155046	0,001991	5
$\hat{S}^2_{ötb5} = \sum_{h=1}^{L} W_h \frac{s^2_{yh}}{(s^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh})$	0,204619	0,000753	3
$\hat{S}^2_{ötb6} = \sum_{h=1}^{L} W_h [\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} + C_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} + C_{xh})]$	0,161824	0,000396	1
$\hat{S}^2_{ötb7} = \sum_{h=1}^{L} W_h [\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} + \beta_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} + \beta_{xh})]$	0,161824	0,000396	1
$\hat{S}^2_{ötb8} = \sum_{h=1}^{L} W_h [\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh})]$	0,161824	0,000396	1
$\hat{S}^2_{ötb9} = \sum_{h=1}^{L} W_h [\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh})]$	0,161824	0,000396	1
$\hat{S}^2_{ötb10} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh} \left(\frac{S^2_{xh} + \beta_{xh}}{s^2_{xh} + \beta_{xh}} \right)^{\delta}$	0,155048	0,000396	1

Çizelge (4.8) devam

Önerilen Tahmin Ediciler	**Tahmin**	**HKO**	**HKO Sıra No**
$\hat{S}^2_{ötb11} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh}\left[2-\left(\frac{s^2_{xh}+\beta_{xh}}{S^2_{xh}+\beta_{xh}}\right)^{\varphi}\right]$	0,157527	0,000396	1

Önerilen tahmin ediciler kendi içinde hata kareler ortalamalarına göre sıralanabilir. $\hat{S}^2_{ötbi}$, i=6,7,8,9,10,11 tahmin edicileri, birbirlerine eşit ve en küçük hata kareler ortalamasına sahiplerdir:

$$HKO(\hat{S}^2_{ötb6}) = HKO(\hat{S}^2_{ötb7}) = HKO(\hat{S}^2_{ötb8}) = HKO(\hat{S}^2_{ötb9}) = HKO(\hat{S}^2_{ötb10}) = HKO(\hat{S}^2_{ötb11})$$

Öteki tahmin ediciler için de aşağıdaki eşitsizlik verilebilir:

$$HKO(\hat{S}^2_{ötb6}) < HKO(\hat{S}^2_{ötb3}) < HKO(\hat{S}^2_{ötb5}) < HKO(\hat{S}^2_{ötb2}) < HKO(\hat{S}^2_{ötb4}) < HKO\left(\hat{S}^2_{ötb1}\right).$$

4.3. Sıralı Küme Örneklemesi için Sayısal Örnek

Yardımcı değişken çiçeğin boy uzunluğu ve ilgilenilen değişken çiçeğin pappus uzunluğu olduğu önceki sayısal örnek ele alınmaktadır. Pappus uzunluğu belirlemek oldukça zor olduğundan bitkilerin sıralaması boy uzunluğuna göre yapılarak sıralı küme örneklemesi ile örneklem seçilmiştir. BRÖ ve TRÖ ile bulunan tahmin edicilerle bir karşılaştırma yapılmak istendiğinden yine örneklem büyüklüğü 81 olacak şekilde küme büyüklüğü ve tekrar sayısı belirlenmiştir. Sonlu büyüklüklü kitleden n=3 küme büyüklüğü ve n=3 küme sayısı ve m=27 tekrar sayısı olmak üzere örneklem seçilmiştir. Kitleye ait değerler Çizelge (4.9)'da verilmiştir. Sıralı küme örneklemesi ile sadece basit tahminler incelendiğinden, değerler, pappus uzunluğuna (y) ait değerlerdir.

Çizelge (4.9) Sıralı Gözlemler için 2006 Yılı Sevgi Çiçeği'nin Pappus Uzunluğu (y) Değişkeninin Kitle Değerleri

Küme	$\mu_{y[r]}$	$\sigma^2_{y[r]}$	$\tau_{y[r]}$	$\mu_{3[r]}$	$\mu_{4[r]}$
1	1,634	0,1217	-0,6572	0,3604	1,6595
2	2,0064	0,1329	-0,2848	-0,2937	1,8991
3	3,1854	0,2471	0,8942	-0,8709	5,7271

SKÖ ile N=450 birimden $n^2m=243$ birim seçilerek rasgele n=3 kümeye ayrılmıştır.

Daha sonra gözlemler, ölçüm yapmadan görsel olarak, boy değişkenine göre sıralanır. Sıralama yapıldıktan sonra, 1. kümeden en küçük sıralı birim; 2. kümeden 2. en küçük sıralı birim ve en son kümeden en büyük 3. sıralı birim seçilir. Bu şekilde 27 tekrar yapılır ve mn=81 büyüklüklü SKÖ elde edilir. Sadece seçilen gözlemlerin ölçümleri yapılır. Sıralama boy uzunluğuna göre yapılmıştır. Bu sıralamaya göre örneklem belirlenir. Örnekleme seçilen birimlerin pappus uzunlukları ve boy uzunlukları ölçülür. Böylece BRÖ kadar birim yine örnekleme seçilmiş olur ancak bu seçilen birimler aynı zamanda bir sıralama bilgisini de içermektedirler. Seçilen gözlemlere ait değerler Çizelge (4.12)'de verilmiştir:

Çizelge (4.10) 2006 Yılı için Sevgi Çiçeği Boy Uzunluğu (x) ve Pappus Uzunluğu (y) Değişkenlerine Ait Sıralı Küme Örneklemesi ile Seçilen Örneklem

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=1	**2,4**	**1,4**				
			2,5	**1,73**		
					2,64	**2,02**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=2	**2,55**	**1,56**				
			2,59	**1,59**		
					4,17	**1,73**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=3	**3,84**	**1,48**				
			3,95	**2,03**		
					4,29	**2,5**

Çizelge (4.10) devam

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=4	**3,65**	**2,38**				
			3,89	**2,65**		
					3,92	**2,27**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=5	**3,74**	**2,27**				
			3,53	**2,26**		
					3,89	**2,65**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=6	**3,9**	**3,24**				
			4,23	**3,12**		
					4,25	**3,36**

Çizelge (4.10) devam

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=7	**4,02**	**4,12**				
			4,24	**3,04**		
					4,22	**2,96**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=8	**3,89**	**2,62**				
			4	**3,15**		
					4,21	**3,35**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=9	**3,84**	**2,27**				
			3,99	**3,48**		
					4,47	**3,86**

Çizelge (4.10) devam

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=10	**2,41**	**1,47**				
			2,51	**1,56**		
					2,64	**2,02**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=11	**2,38**	**1,97**				
			2,49	**2,43**		
					2,52	**2,2**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=12	**2,43**	**1,49**				
			2,54	**1,85**		
					2,72	**1,93**

Çizelge (4.10) devam

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=13	**2,29**	**1,27**				
			2,28	**2,07**		
					4,18	**2,78**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=14	**3,76**	**1,45**				
			3,89	**2,65**		
					4,02	**2,36**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=15	**3,86**	**2,7**				
			3,87	**2,82**		
					4,09	**3,98**

Çizelge (4.10) devam

	Kümeler					
Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=16	**3,93**	**2,41**				
			3,84	**2,37**		
					4,22	**3,41**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=17	**3,59**	**1,15**				
			3,52	**2,09**		
					3,72	**1,56**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=18	**3,65**	**1,47**				
			3,82	**1,76**		
					4,04	**1,54**

Çizelge (4.10) devam

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=19	**3,31**	**2,58**				
			3,87	**1,91**		
					3,96	**2,57**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=20	**3,57**	**1,63**				
			3,95	**1,86**		
					4,22	**1,85**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=21	**3,52**	**1,85**				
			2,34	**1,3**		
					2,43	**1,66**

Çizelge (4.10) devam

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=22	**2,29**	**1,27**				
			2,43	**1,49**		
					2,58	**1,91**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=23	**2,4**	**1,23**				
			2,58	**1,69**		
					2,62	**1,87**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=24	**2,55**	**1,55**				
			2,61	**1,63**		
					2,47	**2,32**

Çizelge (4.10) devam

Kümeler

Tekrar Sayısı	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=25	**2,44**	**2,03**				
			2,17	**1,7**		
					2,64	**1,76**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=26	**3,65**	**2,38**				
			4,03	**2,41**		
					4,21	**1,7**
	1		2		3	
	x	y	x	y	x	y
	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS	BOY	PAPPUS
m=27	**3,53**	**1,58**				
			3,92	**2,56**		
					4,13	**2,06**

Alt Bölüm (2.3)'te incelenen ve Eş.(2.95) ile verilen Stokes (1980) tahmin edicisi ve Eş.(2.99) ile verilen MacEachern vd. (2002) tahmin edicisi, yan ve HKO değerleri bulunmuştur. Bu değerler Çizelge (4.11)'de verilmiştir.

Çizelge (4.11) Sıralı Küme Örneklemesinde İncelenen Varyans Tahmin Edicileri için Tahmin, Yan ve Hata Kareler Ortalamaları Değerleri

Tahmin Ediciler	Tahmin	Yan	HKO
Stokes (1980) $\hat{\sigma}_S^2 = \frac{1}{mn-1}\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}\left(Y_{[r]i} - \hat{\mu}\right)^2$	0,46004	0,00012	0,02671
MacEachern vd. (2002) $\hat{\sigma}_{Mc}{}^2 = \frac{\sum_{r \neq s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2}{2n^2m^2} + \frac{\sum_{r=s}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2}{2m(m-1)n^2}$	0,29728	yansız	0.02679

İki varyans tahmin yöntemi, bu uygulama için karşılaştırılır. Alt Bölüm (2.3.4)'te incelendiği gibi, eğer birimlerin sıralamaları rasgele değil ise, yani sıralama hatasız olarak yapıldı ise, Stokes (1980) ve MacEachern vd. (2002) varyans tahmin edicilerinin göreli duyarlılıkları 1'e eşit olacaktır. Bu nedenle öncelikle sıralamanın rasgele olup olmadığını belirlemek amacıyla hipotez testi yapılmıştır.

H_0 : Pappus uzunluğu rasgele olarak sıralanmıştır

H_1 : Pappus uzunluğu rasgele olarak sıralanmamıştır.

Hipotez testi için, E(DKO) ve E(HKO) değerleri hesaplanır:

E(DKO)= 17,8875,

E(HKO)= 0,16721,

$$V = \frac{E(DKO)}{E(HKO)} = 106{,}9786\ .$$

Büyük değerler aldığında, gözlemlerin homojen kümelere ayrılmalarında sıralama başarılıdır. Yani H_1 hipotezi kabul edilir.

Sıralama rasgele değildir. O halde Stokes (1980) varyans tahmin edicisi ile MacEachern vd. (2002) varyans tahmin edicisi göreli duyarlılıkları yaklaşık olarak 1 olacaktır:

$$GD(\hat{\sigma}^2_S, \hat{\sigma}^2_{Mc}) = \frac{HKO(\hat{\sigma}^2_S)}{Var(\hat{\sigma}^2_{Mc})} = 0{,}99 \cong 1.$$

Sıralı Küme Örneklemesi ile bulunan varyans tahmin edicileri ile Basit rasgele örnekleme ve tabakalı rasgele örneklemede bulunan varyans tahmin edicileri de karşılaştırılabilir. SKÖ'nde sadece basit tahmin yapılmış ve herhangi bir yardımcı değişken bilgisinden yararlanılmamıştır. Bu durumda örnekleme yöntemlerinin karşılaştırılmasında da BRÖ ve TRÖ'deki basit tahmin edicilerin HKO ile karşılaştırma yapılabilir. Bu değerler Çizelge (4.12)'de verilmiştir.

Çizelge (4.12) Örnekleme Yöntemine Göre Basit Tahmin Edicilerin Tahmin Değeri ve Hata Kareler Ortalaması Değerleri

Örnekleme Yöntemi	**Tahmin Edici**	**Tahmin**	**HKO**
BRÖ	Klasik Tahmin Edici $s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$	0,652075	0,013736

Çizelge (4.12) devam

Örnekleme Yöntemi	Tahmin Edici	Tahmin	HKO
BRÖ	Hirano(1973) $s_y'^2 = A s_y^2$	0,402118	0,012982
TRÖ	Kadılar ve Çıngı (2006b) $\hat{S}^2_{tb,y} \cong \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh} + \sum_{h=1}^{L} W_h (\bar{y}_h - \bar{y}_{tb})^2$	0,098864	0,001415
SKÖ	Stokes (1980) $\hat{\sigma}^2_S = \frac{1}{mn-1} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} \left(Y_{[r]i} - \hat{\mu}\right)^2$	0,460040	0,026710
	MacEachern (2002) $\hat{\sigma}_{Mc}{}^2 = \frac{\sum_{r \neq s} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2}{2n^2m^2} + \frac{\sum_{r=s} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \left(Y_{[r]i} - Y_{[s]j}\right)^2}{2m(m-1)n^2}$	0,297275	0,026790

Çizelge (4.12)'de de görüldüğü gibi, bu uygulama için, yardımcı değişken bilgisi düşünülmediği ve basit tahmin yapılmak istendiğinde en iyi örnekleme yöntemi, tabakalı rasgele örneklemede Kadılar ve Çıngı tahmin edicisidir. Sıralı küme örneklemesi, bu uygulama için iyi sonuç vermemiştir. BRÖ ile SKÖ basit tahmin ve Stokes tahmin edicisi karşılaştırıldığında da, BRÖ basit tahmin edici daha küçük hata kareler ortalamasına sahiptir. Ancak zaten Stokes tarafından önerilen tahmin edicinin daha küçük HKO'na sahip olabilmesi için küme büyüklüğü n arttırılmalıdır (Stokes, 1980).

BEŞİNCİ BÖLÜM

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Yapılan çalışmalarda genellikle kitle varyansı S^2 bilinmez ve seçilen uygun bir örneklemden tahmin edilmeye çalışılır. Varyans tahmini yapabilmek için, hem uygun örnekleme yönteminin belirlenmesi hem de hangi tahmin yönteminin kullanılacağına karar verilmesi gerekir.

Bu çalışmada üç farklı örnekleme yönteminde çeşitli varyans tahmin edicileri incelenmiştir. BRÖ, TRÖ ve SKÖ için varyans tahminleri yapılmıştır. Varyans tahmin edicilerinde basit ve oransal olmak üzere iki farklı tahmin yöntemi kullanılmıştır. Basit tahmin ediciler, sadece ilgilenilen değişkene ait bilgilerin olduğu durumda kullanılır. Oransal tahmin ediciler de ise, ilgilenilen değişkenle yardımcı bir değişken arasındaki ilişki başlangıç doğrusundan geçen bir denklem ile ifade edilebilmelidir.

Daha sonra bir yardımcı değişken bilgisinden yararlanılarak, kitle varyansının oransal tahmin edicileri ele alınmıştır. Bu tahmin edicilerde, yardımcı değişkene ait kitle parametresi bilinir. BRÖ'de $\hat{S}_1^2$, $\hat{S}_3^2$, $\hat{S}_5^2$ tahmin edicilerinde, yardımcı değişken kitle ortalaması bilgisinden yararlanılmıştır. $\hat{S}_2^2$, $\hat{S}_4^2$, $\hat{S}_6^2$, $\hat{S}_7^2$, $\hat{S}_8^2$, $\hat{S}_9^2$, $\hat{S}_{10}^2$, $\hat{S}_{15}^2$ tahmin edicilerinde ise, yardımcı değişken kitle varyansı bilgisinden yararlanılmıştır. $\hat{S}_{11}^2$, $\hat{S}_{11-1}^2$, $\hat{S}_{11-2}^2$, $\hat{S}_{11-3}^2$ tahmin edicilerinde, yardımcı değişken değişim katsayısı veya basıklık katsayısından yararlanılarak tahminler yapılmıştır. $\hat{S}_{12}^2$, $\hat{S}_{13}^2$, $\hat{S}_{14}^2$ tahmin edicileri ise, yardımcı değişken kitle varyansı ve yardımcı değişken basıklık katsayısından yararlanılarak elde edilmiş tahmin edicilerdir. Bu tahmin edicilerin HKO değerleri karşılaştırılarak çeşitli koşullarda, klasik oransal tahmin edici olan $\hat{S}_7^2$'ne üstünlükleri gösterilmiştir.

İncelenen bir diğer örnekleme yöntemi ise, tabakalı rasgele örneklemedir. TRÖ'de Kadılar ve Çıngı tarafından önerilen $\hat{S}_{tb,y}^2$ tahmin edicisi basit bir tahmin edicidir. Herhangi bir yardımcı değişken bilgisinden yararlanılmamıştır. TRÖ'de varyans tahmini oransal olarak da yapılmıştır. Kadılar ve Çıngı (2006a) çalışmalarında birleşik tahmin yöntemi ile beş farklı tahmin edici ($\hat{S}_{ob}^2, \hat{S}_{obkc1}^2, \hat{S}_{obkc2}^2, \hat{S}_{obkc3}^2, \hat{S}_{obkc4}^2$) önerilmiş ve

HKO eşitlikleri bulunmuştur. $\hat{S}^2_{ob}$, TRÖ'de kitle varyansının oransal birleşik tahmin edicisidir. Bu tahmin edicide, yardımcı değişken kitle varyansı bilgisinden yararlanılmıştır. $\hat{S}^2_{obkc1}$, $\hat{S}^2_{obkc2}$, $\hat{S}^2_{obkc3}$, $\hat{S}^2_{obkc4}$ tahmin edicilerinde ise, yardımcı değişken değişim katsayısı, yardımcı değişken basıklık katsayısı ya da her iki bilgi bir arada kullanılarak, kitle varyansı tahmin edicileri, Kadılar ve Çıngı tarafından önerilmiştir.
Sıralı küme örneklemesinde, varyans tahmini için, iki tane basit tahmin edici önerilmiştir. 1980 yılında Stokes tarafından önerilen, $\hat{\sigma}^2_S$ ve MacEachern vd. tarafından 2002'de önerilen $\hat{\sigma}^2_{Mc}$ tahmin edicileri HKO ve yan eşitlikleri bulunarak incelenmiştir. Sıralı küme örneklemesinde, kitle varyansı tahmininde, oransal bir tahmin edici önerilmemiştir.
Ayrıca yardımcı değişkenle ilgili bilinen kitle parametresi sayısına bağlı olarak genel sınıflar verilmiştir. Burada, örnekleme yönteminin etkisi yoktur. Yardımcı değişkene ait tek bir kitle parametresi biliniyorsa, iki kitle parametresi biliniyorsa ve ikiden fazla kitle parametresi biliniyorsa, genel sınıflar ve bu sınıflara ait HKO değerleri bulunabilir. Hangi parametrenin tahmini yapılırsa yapılsın, yardımcı değişkene ait bilinen kitle parametresi sayısına bağlı olarak genelleştirilmiş sınıflar vardır. Böylece, kitlenin bilinmeyen parametreleri ile ilgili, yardımcı değişkene bağlı tahmin ediciler için HKO bulunur. Örnekleme yöntemine bağlı olamadığı gibi, tahmin edilecek parametreye de bağlı değildir. Tahmin edicilerle ilgili çalışmalarda, kolaylık sağlayan önemli bir yöntemdir.
Çalışmanın üçüncü bölümünde ise, BRÖ ve TRÖ yöntemlerinde, kitle varyansı için oransal tahmin ediciler önerilmiştir. Bu tahmin ediciler, klasik oransal tahmin edici ile karşılaştırılarak üstün olma koşulları belirlenmiştir.
Uygulamada ise, teorik olarak incelenen kitle varyansı tahmin edicileri için HKO değerleri bulunarak karşılaştırmalar yapılmıştır.

BRÖ'de onbeş farklı tahmin edici incelenmiştir. Basit tahmin edici s^2_y ile Hirano tahmin edicisi $s^{2'}_y$ karşılaştırılırsa, $S^4_y\left(\dfrac{\lambda(\beta_y-1)}{1+\lambda(\beta_y-1)}\right) < \lambda S^4_y(\beta_y-1)$ koşulu her zaman sağlandığından, Hirano tahmin edicisi, basit tahmin ediciye göre daha duyarlıdır.

$\hat{S}_1^2 = s_y^2\left(\frac{\bar{X}}{\bar{x}}\right)^{\alpha}$ ve $\hat{S}_3^2 = \left(\frac{\bar{X}s_y^2}{\bar{X}+\alpha(\bar{x}-\bar{X})}\right)$ oransal tahmin edicilerinde, yardımcı x değişkenine ait kitle ortalaması bilgisinden yararlanılmıştır. İki tahmin edici için de $HKO_{min}(\hat{S}_1^2) = HKO_{min}\left(\hat{S}_3^2\right) = \lambda\left(S_y^4(\beta_y - 1) - \frac{\mu_{21}^2}{S_x^2}\right)$ aynıdır $\hat{S}_2^2 = s_y^2\left(\frac{S_x^2}{s_x^2}\right)^{\alpha}$ ve $\hat{S}_4^2 = \frac{s_y^2 S_x^2}{S_x^2 + \alpha(s_x^2 - S_x^2)}$ oransal tahmin edicilerinde ise, yardımcı x değişkenine ait kitle varyansı bilgisinden yararlanılmıştır. Tahmin edicilerin HKO ise, $HKO_{min}(\hat{S}_2^2) = HKO_{min}(\hat{S}_4^2) = \lambda S_y^4\left\{(\beta_y - 1) - \frac{(\theta-1)^2}{(\beta_x - 1)}\right\}$'dir. Bu tahmin edicilerden yola çıkarak 1983 yılında Isaki, $\hat{S}_5^2 = W_1 s_y^2 - W_2(\bar{x}-\bar{X})$ ve $\hat{S}_6^2 = W_1^* s_y^2 - W_2^*(s_x^2 - S_x^2)$ tahmin edicilerini önermiştir. Bu tahmin ediciler için de HKO değerleri bulunmuştur. Ayrıca S_x^2 bilgisinden yararlanarak yine Isaki (1983) S_y^2 için oransal tahmin edici ve fark tahmin edicileri önermiştir: $\hat{S}_7^2 = \frac{s_y^2}{s_x^2}S_x^2$, $\hat{S}_8^2 = s_y^2 + w(S_x^2 - s_x^2)$.

Klasik oransal tahmin edici ile klasik basit tahmin edici karşılaştırılabilir. Burada $\frac{1+\beta_x}{2} < \theta$ (2,3485 < 2,530) olduğundan, $\hat{S}_7^2$ oransal tahmin edici, s_y^2 tahmin edicisinden daha duyarlıdır. Fark tahmin edicisi ile klasik basit tahmin edici karşılaştırıldığında, $\frac{(\theta-1)^2}{(\beta_x - 1)} > 0$ yani $(\beta_x = 3{,}697 > 1)$ olduğundan, $\hat{S}_8^2$ oransal tahmin edici, s_y^2 tahmin edicisinden daha duyarlıdır.

$\hat{S}_9^2 = \frac{s_y^{2'}}{s_x^2}S_x^2 = \frac{(1+\lambda(\beta_y - 1))^{-1}s_y^2}{s_x^2}S_x^2$ tahmin edicisi için de, $\theta < \frac{\beta_y + 1}{2}$

(2,530< 3,3535) koşulu sağlandığı için, $\hat{S}_9^2, \hat{S}_7^2$'den daha duyarlıdır. $\hat{S}_{10}^2 = \frac{As_y^2}{s_x^2}S_x^2$

tahmin edicisi için, $\theta < \frac{\beta_y - 1}{2}$ (2,530>2,3535) koşulu sağlanmadığı için, $\hat{S}_{10}^2$ oransal tahmin edicisi, $\hat{S}_7^2$ tahminin edicisinden daha büyük bir HKO'na sahiptir. $\hat{S}^2_{11}$ tahmin edicisi için ise, $\hat{S}^2_7$'nin HKO'ndan daha büyük bir HKO bulunmuştur. $\hat{S}^2_{12}, \hat{S}^2_{13}, \hat{S}^2_{14}$ tahmin edicileri için HKO ise, klasik oransal tahmin ediciden daha küçük bulunmuştur. $\hat{S}^2_{15}$ için ise, Eş.(2.79)'da verilen koşul sağlandığı için, yine , klasik oransal tahmin ediciden daha küçük HKO'na sahiptir.

$\hat{S}^2_{öneri1} = \left(\frac{s_y^2}{s_x^2}\right)\left(\frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2}\right)(S_x^2)$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.40)'da verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. $-1 < \frac{1+\lambda C_{yx}}{1+\lambda C_x^2} = 0{,}99 < 1$ koşulu sağlandığı için, önerilen tahmin edici, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır. Ancak koşulda belirtilen w_1 değeri üst sınıra çok yakın bir değer olduğundan hata kareler ortalamaları çok farklı değildir.

$\hat{S}^2_{öneri2} = \frac{s_y^2}{s_x^2}\left(1+\lambda(C_{yx} - C_x^2)\right)S_x^2$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.40)'ta verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. $-1 < 1+\lambda(C_{yx} - C_x^2) = 0{,}99 < 1$ koşulu sağlandığı için, önerilen ikinci tahmin edici de, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır. Ancak yine, koşulda belirtilen w_2 değeri üst sınıra çok yakın bir değer olduğundan hata kareler ortalamaları çok farklı değildir.

$\hat{S}^2_{öneri3} = \frac{s_y^2 + b(S_x^{2^\alpha} - s_x^{2^\alpha})}{s_x^{2^\gamma}} S_x^{2^\gamma}$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.41)'de verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. M= 0,3216, T= 0,5671 olduğundan koşul sağlandığı için, önerilen üçüncü tahmin edici, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır.

$\hat{S}^2_{öneri4} = (s_y^2 + s_x^{2^\alpha} - S_x^{2^\alpha})\frac{S_x^2}{s_x^2}$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.42)'de verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. Koşul her zaman sağlandığı için, önerilen dördüncü tahmin edici, her zaman klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır.

Son olarak $\hat{S}^2_{öneri5} = \frac{s_y^2}{s_x^2 + \rho}(S_x^2 + \rho)$ ile $\hat{S}^2_7$ karşılaştırılır. Eş. (3.43)'te verilen koşulun sağlanması gerekmektedir. Burada

$\kappa^2(\beta_x - 1) - 2\kappa(\theta - 1) = -0{,}831$,

$1 + \beta_x - 2\theta = -0{,}363$

bulunur. Koşul sağlandığı için, önerilen beşinci tahmin edici, klasik oransal tahmin ediciye göre daha duyarlıdır.

TRÖ'de ise, bir tane basit tahmin edici Kadılar ve Çıngı tarafından önerilmiştir. $\hat{S}^2_{tb,y}$ tahmin edicisinde herhangi bir yardımcı değişken kitle bilgisi kullanılmamıştır. En küçük HKO'na sahip tahmin edici, $\hat{S}^2_{ob} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x}} S^2_x$'dır. Daha sonra ise, x değişkeni değişim katsayısı bilgisinden yararlanılarak bulunmuş olan, $\hat{S}^2_{obkc1} = \frac{\hat{S}^2_{tb,y}}{\hat{S}^2_{tb,x} + C_x}(S^2_x + C_x)$ tahmin edicisi gelmektedir. X yardımcı değişkeninin basıklık katsayısı bilgisinden yararlanılarak bulunmuş olan tahmin ediciler ise uygulama için iyi sonuç vermemişlerdir.

TRÖ'de on beş tane ayrı oransal tahmin edici önerilmiştir. Bu tahmin ediciler arasında uygulamada en küçük HKO'na sahip tahmin ediciler,

$$\hat{S}^2_{ötb6} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} + C_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} + C_{xh}) \right],$$

$$\hat{S}^2_{ötb7} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} + \beta_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} + \beta_{xh}) \right],$$

$$\hat{S}^2_{ötb8} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh})} (S^2_{xh} C_{xh} + \beta_{xh}) \right],$$

$$\hat{S}^2_{ötb9} = \sum_{h=1}^{L} W_h \left[\frac{s^2_{yh}}{\alpha(s^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh}) + (1-\alpha)(S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh})} (S^2_{xh} \beta_{xh} + C_{xh}) \right],$$

$$\hat{S}^2_{ötb10} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh} \left(\frac{S^2_{xh} + \beta_{xh}}{s^2_{xh} + \beta_{xh}} \right)^{\delta}, \quad \hat{S}^2_{ötb11} = \sum_{h=1}^{L} W_h s^2_{yh} \left[2 - \left(\frac{s^2_{xh} + \beta_{xh}}{S^2_{xh} + \beta_{xh}} \right)^{\varphi} \right]$$

biçimindedir. .

Bu tahmin edicilerde, yardımcı değişkene ait tabaka değişim katsayısından, yardımcı değişkene ait tabaka basıklık katsayısından veya her iki katsayıdan da yararlanarak tahmin ediciler bulunmuştur. Tahmin edicilerin payda kısımlarında ağırlıklandırma yapılmıştır. $\hat{S}^2_{\text{ötbi}}$, i=6,7,8,9,10,11 tahmin edicileri, birbirlerine eşit ve en küçük hata kareler ortalamasına sahiplerdir. Diğer tahmin ediciler için de aşağıdaki eşitsizlik verilebilir:

$$HKO(\hat{S}^2_{\text{ötb6}}) < HKO(\hat{S}^2_{\text{ötb3}}) < HKO(\hat{S}^2_{\text{ötb5}}) < HKO(\hat{S}^2_{\text{ötb2}}) < HKO(\hat{S}^2_{\text{ötb4}}) < HKO\left(\hat{S}^2_{\text{ötb1}}\right).$$

En son olarak ise, SKÖ ile örneklem seçimi yapılmıştır. SKÖ'nde varyans tahmini konusunda çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Yardımcı değişken kitle bilgisinden yararlanılmadan, sadece basit tahmin ediciler incelenmiştir. Stokes (1980) ve MacEachern vd. (2002) tahmin edicileri için karşılaştırma yapabilmek amacıyla, hipotez testi yapılmıştır. H_1 hipotezi kabul edilir yani sıralama rasgele olarak yapılmamıştır.

O halde Stokes (1980) varyans tahmin edicisi ile MacEachern (2002) varyans tahmin edicisi göreli duyarlılıkları yaklaşık olarak 1 olmuştur:

$$GD(\hat{\sigma}^2_S, \hat{\sigma}^2_{Mc}) = \frac{HKO(\hat{\sigma}^2_S)}{Var(\hat{\sigma}^2_{Mc})} = 0{,}99 \cong 1.$$

Biyoloji Bölümü'nde daha sonra yapılacak olan araştırmalara da yol göstermesi için, örnekleme yöntemlerinin de karşılaştırması yapılmıştır. Buna göre, uygulamada, TRÖ ile örneklem seçilmesi uygundur.

Kitle varyansı üzerinde yapılan bu çalışmada, ilgilenilen değişken ile ilişkili bir değişkenin kitle bilgisinden yararlanmanın HKO'nı azaltacağı görülmüştür. Bu yardımcı değişken bilgisi, ortalama, varyans, değişim katsayısı, basıklık katsayısı ya da korelasyon katsayısı olabilir. Ayrıca genellikle ağırlıklı tahmin edicilerin daha küçük HKO'na sahip oldukları gözlemlenmiştir. Tahmin edicilerin ağırlık değerleri HKO'nı minimum yapacak şekilde belirlenmektedir.

Biyoloji Bölümü Ekoloji Ana Bilim Dalı ile yapılacak olan ortak çalışmada, 2008 yılı Asteraceae (sevgi çiçeği) verileri toplanacaktır. Veri toplamada, TRÖ yöntemi ile verilerin toplanması tahmin edicilerin HKO'nı azaltacaktır. Ayrıca, konusunda bilgili araştırmacılar yardımı ile, gözlemsel olarak n=3'ten fazla çiçeğin boy uzunluklarına göre sıralanması mümkün olduğundan, zaman ve emek tasarrufu sağlayan SKÖ ile de veriler toplanabilir.

Daha sonra yapılacak çalışmalarda, sıralı küme örneklemesinde kitle varyansının tahmini oransal yolla yapılabilir. SKÖ, BRÖ'ye alternatif bir yöntem olarak geliştirildiğinden, BRÖ'de incelenen tüm varyans tahmin edicileri, SKÖ'ne uyarlanabilir.

KAYNAKLAR

Arcos, A., Rueda, M., Martine, M.D., Gonzales, S., Roma, Y., 2005, Incorporating the auxiliary information available in variance estimation, Applied Mathematics and Computation, 160, 387-399.

Beale, E.M.L., 1962, Some use of computers in operational research, Industrielle Organisation, 31, 27-28.

Chandra, P., Singh, H.P., 2005, A family of estimators for population variance using the knowledge of kurtosis of auxiliary variable in sample surveys, Statistics in Transition, 7, 1, 27-34.

Çıngı, H., 1994, Örnekleme Kuramı, Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Basımevi, Beytepe.

Çıngı, H., 2004, Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü Lisansüstü Eğitim Ders Notları.

Das, A.K., Tripathi, T.P., 1978, Use of auxiliary information in estimating the finite population variance, Sankhya, 40, 139-148.

Das, A.K., Tripathi, T.P., 1980, Sampling strategies for population mean when coefficient variation of an auxiliary character is known, Sankhya, 42, C, 76-86.

Dell, T.R., Clutter, J.L., 1972, Ranked set sampling theory with order statistics background, Biometrics, 28, 545-555.

Esin, A., Bakı, M.A., Aydın, C., Gürbüzsel, E., 2001, Temel Örnekleme Yöntemleri, Literatür Yayınları:53, Ankara.

Halls, L.S., Dell, T.R., 1966, Trial of ranked set sampling for forage yields, Forest Science, 12, 22-26.

Hirano, K., 1973, Some properties of an estimator for the variance of a normal distribution. Annals of the Institute of Statistical Mathematics 25,1,479-492.

Isaki, C.T., 1983, Variance estimation using auxiliary information, Journal of American Statistical Association, 78, 117-123.

Jhajj, H.S., Sharma, M.K., Grover, L.K., 2005, An efficient class of chain estimators of population variance under sub-sampling scheme, Journal of Japanese Statistical Society, 35, 2, 273-286.

Kadılar, C., Çıngı, H., 2003, Ratio estimators in stratified random sampling, Biometrical Journal, 45, 2, 218-225.

Kadılar, C., Çıngı, H., 2006a, Ratio estimators for the population variance in simple and stratified random sampling, Applied Mathematics and Computation, 173, 2, 1047-1059.

Kadılar, C., Çıngı, H., 2006b, Improvement in variance estimation using auxiliary information, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 35, 1, 111-115.

Kadılar, C., Çıngı, H., 2007, Improvement in variance estimation in Simple Random Sampling, Communications in Statistics:Theory and Methods, 36 11, 2075-2081.

Karakülah, Ü.H., 2006, Basit Rasgele Örnekleme Yönteminde Oransal Tahmin Ediciler, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Kendall, M.G., Yule, G.U., 1977, An Introduction to the Theory of Statistics, London: Griffin, 701 s.

MacEachern, S., Öztürk, Ö., Wolfe, D., 2002, A new ranked set sample estimator of variance, Journal of Royal Statistics Society B, 64, 2, 177-188.

McIntyre, G.A., 1952, A method for unbiased selective sampling using ranked sets, Australian Journal of Agricultural Research, 2, 385-390.

Öztürk, Ö., Bilgin, O., Wolfe, D., 2005, Estimation of population mean and variance in flock management: a ranked set sampling approach in a finite population setting, Journal of Statistical Computation and Simulation, 75, 11, 905-919.

Prasad, B., Singh, H.P.,1990, Some improved ratio-type estimators of finite population variance in sample surveys, Communications in Statistics: Theory and Methods 19 , 1127–1139.

Ray, S.K., Singh, R.K., 1981, Difference cum-ratio type estimators, Journal of Indian Statistical Association, 19, 147-151.

Sampath, S., Durairajan, T.M., 1988, An efficient ratio type estimator, Journal of the Indian Statistical Association, 26, 67-71.

Savcı, A.E., 2007, Ankara-Gölbaşı Çevresinde Centaurea Tchihatcheffii Fischer ve Meyer (Asteraceae)'in Biyo-ekolojisi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi, Ankara.

Shabbir, J., Yaab, M.Z., 2003, Improvement over transformed auxiliary variable in estimating the finite population mean, Biometrical Journal, 45, 723-729.

Singh, H.P., Upadhyaya, L.N., Namjoshi, U.D., 1988, Estimation of finite population variance, Current Science, 20, 57,. 24, 1331-1334.

Singh, H.P., Tailor, R., 2003, Use of known correlation coefficient in estimating the finite population mean, Statistics in Transition, 6, 4, 555-560.

Srivastava, S.K., 1971, An estimator using auxiliary information, Calcutta Statistical Association Bulletin, 16, 121-132.

Srivastava, S.K., 1980, A class of estimators using auxiliary information in sample surveys, Canadian Journal of Statistics, 8, 2, 253-254.

Stokes, S., 1980, Estimation of variance using judgement ordered ranked set samples, Biometrics, 36, 35-42.

Sukhatme, P.V., Sukhatme, B.V., 1970, Sampling Theory of Surveys with Applications, Iowa State University Press, Second Revised Edition.

Takahashi, K., Wakimoto, K., 1968, On unbiased estimates of the population mean based on the sample stratified by means of ordering, Annals of the Institute Statistical Mathematics, 20, 1-31.

Tin, M., 1965, Comparison of some estimators, Journal of American Statistical Association, 60, 294-307.

Tripathi, T.P., Singh, H.P., Upadhyaya, L.N., 2002, A general method of estimation and its application to the estimation of coefficient of variation, Statistics in Transition, 5, 6, 887-897.

Upadhyaya, L.N., Singh, H.P., 1999, Use of transformed auxiliary variable in estimating the finite population mean, Biometrical Journal, 41, 5, 627-636.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : P. Yeşim Ünyazıcı

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1978

Medeni Hali : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise 1993-1996 : TED Ankara Koleji, Ankara.

Lisans 1996-2000 : Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü, Ankara.

Yabancı Dil : İngilizce, Japonca

İş Tecrübesi :

2000-… : Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi