KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİK VE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

ÖZEL BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İstatistikçi Burcu HASANÇEBİ

HAZİRAN 2013
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İSTATİSTİKVE BİLGİSAYAR BİLİMLERİ ANABİLİM DALI

ÖZEL BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

İstatistikçi Burcu HASANÇEBİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"YÜKSEK LİSANS (İSTATİSTİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24.05.2013
Tezin Savunma Tarihi : 13.06.2013

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK

Trabzon 2013

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalında

Burcu HASANÇEBİ Tarafından Hazırlanan

ÖZEL BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 28 / 05 /2013 gün ve 1507 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	**: Prof. Dr. İhsan ÜNVER**	**………………………………**
Üye	**: Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK**	**………………………………**
Üye	**: Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ**	**………………………………**

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasının ilk bölümünde özel bariyerli üçgensel müdahaleye sahip rastgele yürüyüş sürecinin ergodikliği tartışılmış, üçgensel müdahaleye sahip rastgele yürüyüş sürecinin momentleri için üç terimli asimptotik ifadeler elde edilmiş, Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak simülasyon sonuçları bulunarak bu değerler asimptotik ifadelerle karşılaştırılmıştır. Çalışmanın ikinci bölümünde ise ilk bölümüne benzer şekilde üçgensel dağılıma sahip gecikmeli bir rastgele yürüyüş süreci için ilk bölümde bahsedilen hesaplamalar yapılmış ve sonuçlar Monte Carlo benzetim yöntemi kullanılarak karşılaştırılmıştır.

Çalışmamın bu noktaya gelmesindeki her aşamada sabrını, ilgisini ve desteğini esirgemeyen danışman hocam sayın Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ankara TOBB Üniversitesi öğretim üyesi sayın Prof. Dr. Tahir KHANİYEV'e çalışmam süresince tavsiye ve eleştirilerinden dolayı teşekkür eder saygılarımı sunarım.

2008-2011 yılları arasında bölümümüzde sözleşmeli yabancı uyruklu öğretim üyesi olarak çalışmış olan Azerbaycan Bakü Devlet Üniversitesi Olasılık Teorisi ve Matematiksel İstatistik Bölümü öğretim üyesi sayın Doç. Dr. Rovshan ALİYEV'e çalışmam konusundaki yardımlarından dolayı teşekkür ederim.

Tez çalışmam boyunca her türlü soru ve sorunumda beni sabırla dinleyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e şükranlarımı sunarım.

Sonsuz desteklerini esirgemeyen Matematik Bölümü bölüm başkanı sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER'e ve İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü bölüm başkanı sayın Doç. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ'a teşekkür ederim.

Son olarak tez çalışmam süresince desteklerini esirgemeyen değerli aileme ve sevgili arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Burcu HASANÇEBİ
Trabzon 2013

TEZ BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Özel Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci Üzerine Bir Çalışma” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK‘ün sorumluluğunda tamamladığımı, verileri kendim topladığımı, analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 24/05/2013

Burcu HASANÇEBİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

ÖZEL BARİYERLİ YARI-MARKOV RASTGELE YÜRÜYÜŞ SÜRECİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Burcu HASANÇEBİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK
2013, 69 Sayfa

Bu çalışmada kesikli şans karışımlı yarı-Markov bir $X(t)$ rastgele yürüyüş süreci ele alındı ve sürecin zayıf varsayımlar altında ergodikliği gösterildi. Kesikli şans karışımlı ζ_1 rastgele değişkeni $\frac{S+s}{2}$ merkezli [s,S] aralığında üçgensel dağılıma sahip olduğunda sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin formüller elde edildi. Bu sonuçlara dayanarak $a \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar oluşturuldu. Ayrıca X(t) sürecinin ergodik dağılımının varyans, çarpıklık ve basıklıkları için asimptotik denklemler kuruldu. Son olarak a parametresinin küçük değerleri için bile verilen formüllerin yüksek doğruluk sağladığı Monte Carlo deneyleri ile gösterildi. Çalışmanın ikinci bölümünde ise yukarıda belirtilen tüm işlemler gecikmeli kesikli şans karışımlı yarı-Markov bir rastgele yürüyüş süreci için de uygulandı.

Anahtar Kelimeler: Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci, üçgensel dağılım, ergodik dağılım, sınır fonksiyoneli, asimptotik açılım, basamak değişkenleri, Monte Carlo simülasyon metodu.

Master Thesis

SUMMARY

ON THE SEMI-MARKOVIAN RANDOM WALK WITH SPECIAL BARRIERS

Burcu HASANÇEBİ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Statistic and Computer Science Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Zafer KÜÇÜK
2013, 69 Pages

In this study, a semi-Markovian random walk with a discrete interference of chance (X(t)) is considered and under some weak assumptions the ergodicity of this process is discussed. The exact formulas for the first four moments of ergodic distribution of the process (X(t)) are obtained when the random variable ζ_1, which is describing a discrete interference of chance, has a triangular distributionin the interval [s,S] with center $\frac{S+s}{2}$. Based on these results, the asymptotic expansions with three-term are obtained for the first four moments of the ergodic distribution of X(t), as a $a \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$. Furthermore, the asymptotic expansions fort he variance, skewness and kurtosis of the ergodic distribution of the process X(t) are established. Finally, by using Monte Carlo experiments it is shown that the given approximating formulas provide high accuracy even for small values of parameter a. In second section of this study above mentioned all processes carried out for semi-Markovian random walk with a discrete interference of chance with delay.

Key Words: Semi-Markovian random walk, triangular distribution, ergodic distribution, boundary functional, asymptotic expansion, ladder variables, Monte Carlo simülation method.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

a $<$ b	: a küçüktür b
a $>$ b	: a büyüktür b
a $\leq$ b	: a küçüktür veya eşittir b
a $\geq$ b	: a büyüktür veya eşittir b
$a \in A$	: a A'nın elemanıdır
$a \notin A$	: a A'nın elemanı değildir
$a = b$	: a eşittir b
$a \neq b$	: a farklıdır b
$\forall$	: her
$\exists$	: en az bir
∞	: sonsuz
$a < \infty$	: a sonludur
(a, b)	: açık aralık
$[a, b)$	: sağdan açık soldan kapalı aralık
$(a, b]$	: soldan açık sağdan kapalı aralık
$[a, b]$	: kapalı aralık
$\lvert x \rvert$	: x sayısının mutlak değeri
$A \subseteq B$	: B kümesi A kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
$A \supseteq B$	: A kümesi B kümesini içerir veya A ve B kümeleri eşittir
$\min A$	: A kümesinin minimumu
$maxA$	:A kümesinin maksimumu
$infA$	: A kümesinin infimumu
$\sum_{i=1}^{n} a_i$	: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sayılarının toplamı
$f_1{}^* f_2$	: f_1 ve f_2 fonksiyonlarının konvolüsyon çarpımı

f^{*n}	: f fonksiyonunun kendisiyle n kat konvolüsyon çarpımı
$P\{.\}$	: $\{.\}$ olayının olasılığı
$P_z\{.\}$	: $\{.\}$ olayının koşullu olasılığı
$E(\xi)$	: ξ rastgele değişkeninin beklenen değeri
$E_z(\xi)$	: ξ rastgele değişkeninin koşullu beklenen değeri
$E(\xi^n)$	: ξ rastgele değişkeninin n. başlangıç momenti
$E\|\xi\|$	: ξ rastgele değişkeninin mutlak momenti
$V(\xi)$	: ξ rastgele değişkeninin varyansı
$V_z(\xi)$	: ξ rastgele değişkeninin koşullu varyansı
d_zF	: F fonksiyonunun z değişkenine göre diferansiyeli
$\lim_{x\to\infty} f(x)$	: x ∞'a giderken $f(x)$ fonksiyonunun limiti
γ_3	: çarpıklık
γ_4	: basıklık
Δ_k	: mutlak hata
δ_k	: göreli hata
A_{p_k}	: uyum yüzdesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bilim adamlarının pek çoğu olasılık hesabının doğuşunu Blaise Pascal (1623-1662) ile Pierre de Fermat (1601-1665)'in XVII. yüzyıldaki yazışmalarına bağlamaktadırlar. Ancak bu dönemdeki Olasılık Teorisinin oluşumundaki en önemli rol Jacob (James, Jacques) Bernoulli'e (1654-1705) aittir. Jacop Bernoulli'nin elde ettiği en önemli sonuç "En Büyük Sayılar Kanunu"dur. Bu kanun Olasılık Teorisinin uygulamaları için temel oluşturmaktadır. Bu kanun ilk kez J. Bernoulli'nin ölümünden sonra 1713 yılında yayınlanan "Ars Conentandi (The Art of Conjecture) " isimli kitabında limit teoremi şeklinde yer almıştır. "Büyük Sayılar Kanunu" kavramı 1835 yılında Poisson tarafından teklif edilmiştir. J. Bernoulli'den sonraki dönemde (XVIII-XIX. yüzyılın birinci yarısı) Olasılık Teorisinde iz bırakmış bilim adamlarından Pierre-Remond de Montmort (1678-1719), Abraham de Moivre (1667-1754), Thomas Bayes (1702-1761), Pierre Simon de Laplace (1749-1827), Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ve Simon Denis Poisson (1781-1840) 'u sıralamak mümkündür. Bu dönemde Olasılık Teorisinin analitik yöntemleri geliştirilmeye başlanmıştır. Moivre'nin ismi daha çok Binom dağılımının normal dağılıma yaklaşımıyla bilinmektedir. "Büyük Sayılar Kanunu"nda J. Bernoulli frekansların, belli bir anlamda, olasılığa yakınsadığını göstermişse de, Moivre normal yaklaşım ile beklenen değerden sapmaların davranışındaki diğer bir evrensel kuralı ortaya koymuştur. Moivre'nin sonucunu ifade eden "İntegral Limit Teoremi" o kadar büyük bir öneme sahipti ki bu teorem sonraki dönemlerde "Olasılık Teorisinin Merkezi Limit Teoremi" olarak anılmaya başlandı. Bu dönemin en değerli bilim adamı olarak Laplace kabul edilmektedir. Laplace'nin "Theorie Analitique des Probabilities" (1812) adlı kitabı XIX. yüzyılda Olasılık Teorisi üzerine yazılmış temel ders kitabı sayılmıştır. Hatalar teorisinde normal dağılım kullanılması Laplace ve Gauss'un isimlerine bağlıdır.

XIX. yüzyılın ikinci yarısından itibaren Olasılık Teorisinin temel problemlerinin incelenmesinde P.L. Chebyshev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.Liapunov (1857-1918) vs. büyük rol oynamışlardır. Örneğin, Chebyshev rastgele değişkenler ve beklenen değer kavramlarının Olasılık Teorisinde önemli yer almasına büyük katkıda bulunmuştur. Diğer taraftan bu dönemde, J. Bernoulli, Moivre, Laplace ve diğerlerinin elde ettikleri sonuçlar daha genel bir biçimde incelenmiştir. Bu sonuçlar genel olarak bağımsız rastgele değişkenler dizisi ile ilgiliydiler. Fakat A.A. Markov tarafından bağımlı rastgele değişkenler dizisinin ele alınması ve incelenmesi ile olasılık teorisinde yeni bir dalın temeli atılmış oldu.

Stokastik süreç kavramı ise sistematik olarak A.N. Kolmogorov ve A.Y. Khinchin gibi ünlü olasılıkçılar tarafından ortaya konulmuş ve bu alanda ilk esaslı sonuçlar elde edilmeye başlanmıştır. A.N. Kolmogorov günümüzde Markov tipli süreçler olarak adlandırılan stokastik süreçlerin esaslarını ortaya koyarken. A.Y. Khinchin çalışmalarında durağan süreçler olarak adlandırdığı stokastik süreçler üzerinde çalışmalar yapmıştır. Çağımızda stokastik süreçlere ilişkin problemlere büyük ilgi gösterilmektedir. Bu alanda emeği geçen başlıca bilim adamları N. Wiener, W. Feller, J. Dobb, R. Fisher, J. Neumann ve H. Cramer olarak sıralanabilir.

Markov veya yarı-Markov modelleri ile ilgili olan bir çok teorik çalışmalar literatürde mevcuttur. Bu çalışmaların pek çoğundaki sonuçlar teorik bakımdan önemli olsalar da, uygulamanın ihtiyaçlarını karşılayabilecek nitelikte değillerdir. Aşikar ifadeleri içeren ve uygulama için yararlı olabilecek çalışmalar da vardır. Fakat bu çalışmaların eksik olan yönü, ele alınan modellerin gereğinden fazla idealize edilmiş olmalarıdır. Örneğin, Saaty'nin ele aldığı (s,S) tipli modelleri banka sistemlerinin veya sigorta şirketlerinin çalışmasına uygulamak mümkündür. Fakat bu modele göre çalışabilen bir banka sistemine, sistemdeki toplam kapital miktarının belli bir kritik seviyenin altına inmediği sürece sisteme bir miktar ekleme yapmak mümkün değildir. Böyle bir varsayım, ele alınmış modelin matematiksel olarak incelenmesini kolaylaştırsa da gerçeklik bakımından gereksiz ve yapaydır.

Rastgele yürüyüş problemi ilk kez Karl Pearson tarafından ortaya atılmıştır. Karl Pearson sarhoş bir adamın yürüyüş problemini ele almıştır. Bu problemde bir adam hareketine orijinde başlamakta ve rastgele yönlerde L uzunluklu bir adım atmaktadır. Bu adımdan sonra rastgele bir açı ile L uzunluklu başka bir adım atar ve bu süreci n defa tekrarlar. Burada n adım sonunda orijinden uzaklığının olasılık dağılımının ne olduğu problemi ortaya çıkıyor. Pearson aslında bu problemi çözememiştir ama 1905 yılında "The Problem of the Random Walk" adlı yazısını Nature dergisinde yayınlatmıştır. Bir hafta sonra Lord Rayleigh aynı dergide bu sorun için bir çözüm yayınlamıştır. Çünkü, Rayleigh rastgele yürüyüş problemini farklı bir yolla 1880 yılında çözmüştür.

Rastgele yürüyüş ardışık rastgele adımlardan oluşan yörüngelerin matematiksel ifadesidir. Rastgele yürüyüş için, bir molekülün sıvı ya da gaz içerisinde izlediği yol, bir hayvanın yiyecek aramak için takip ettiği yol, bir hisse senedinin bir dönem içindeki fiyat hareketleri ve bir kumarbazın oyun esnasında parasının değişim miktarı gibi birçok örnek verilebilir. Rastgele yürüyüş süreci bilgisayar bilimlerinde, fizikte, ekolojide, ekonomide, psikolojide ve diğer alanlarda temel bir model olarak kullanılmaktadır.

Bu çalışmada, A.N. Kolmogorov tarafından 1960-1970'li yıllarda tanımlanmış ve literatürde "kesikli müdahaleli yarı-Markov süreçler" olarak bilinen geniş bir stokastik süreçler ailesinin önemli bir alt sınıfı ele alınmış ve asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Literatürde bu konuda önemli sonuçlar mevcut olsa da elde edilen sonuçlar uygulanabilir matematiksel yapıda değillerdir. Genel durumda sade formüllerin alınamayacağı anlaşıldığı için 1980'li yıllardan sonra daha dar, fakat önemli sınıflar ele alınmaya başlanmıştır. Fakat bu güne kadar bu süreçler her yönüyle tam olarak araştırılamamıştır. Bunun temel nedeni, bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin çok karmaşık bir matematiksel yapıya sahip olmasıdır. Özellikle müdahaleyi ifade eden rastgele değişkenler yeterince geniş bir sınıfa ait olduklarında sürecin temel karakteristikleri için kullanılabilir formüllerin elde edilmesi çok zordur. Bu zorluğu ortadan kaldırmak için 1990'lı yıllardan sonra iki yönde araştırmalar yoğunlaştırılmıştır. Bir taraftan benzetim yöntemlerini kullanarak bilgisayar yardımı ile sayısal sonuçlar alınmakta; diğer taraftan ise integraller için asimptotik yöntemlere başvurarak yaklaşık, fakat yeterince sade ifadeler elde edilmektedir.

Bu çalışmada bahsedilen bazı temel kavramlar aşağıdaki gibidir:

(Ω, F, P) bir olasılık uzayı, $X: \Omega \to R$ ve $X_n: \Omega \to \mathrm{R}, \mathrm{n} = 1,2, \dots$ birer rastgele değişken olmak üzere,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } P\left(\left\{\omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

olduğunda (X_n) rastgele değişkenler dizisine X rastgele değişkenine hemen hemen her yerde yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{hhhy} X$ biçiminde gösterilir. Bu yakınsamaya bir olasılığı ile yakınsama ya da güçlü yakınsama da denir.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ için } \lim_{n\to\infty} P(\{\omega: |X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon\}) = 1$$

olduğunda (X_n) rastgele değişkenler dizisine X rastgele değişkenine olasılık ölçüsünde (olasılıkta) yakınsar denir ve $X_n \xrightarrow{p} X$ biçiminde gösterilir.

Aynı bir (Ω, F, P) olasılık uzayında $t \in T \subset R$ olmak üzere $\{\xi_n(\omega,t)\}, n \geq 1$ stokastik fonksiyonlar dizisi ve $\xi(\omega,t)$ stokastik fonksiyonu verilsin. Bunun yanı sıra $E|\xi_n(\omega,t)| < \infty$ ve $E|\xi(\omega,t)| < \infty$ olsun. Eğer $\forall\ t \in T$ için,

$$\lim_{n\to\infty} E[\xi_n(\omega,t) - \xi(\omega,t)]^2 = 0$$

ise $\{\xi_n(\omega,t)\}, n \geq 1$ stokastik fonksiyonlar dizisi, $\xi(\omega,t)$ stokastik fonksiyonuna kuadratik orta anlamda yakınsaktır denir ve

$$l.i.m_{n\to\infty}\xi_n(\omega,t) = \xi(\omega,t)$$

ile gösterilir.

$X: \Omega \to R, (\Omega, F, P)$ olasılık uzayında tanımlı ölçülebilen bir fonksiyon yani, her $x \in X$ için $\{\omega: X(\omega) \leq x\} \in F$ ise X'e bir boyutlu rastgele değişken denir ve

$$F(x) = P\{\omega: X(\omega) \leq x\}$$

olasılık fonksiyonuna X rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu denir.

$t\ \in T \subset R^+$ için X_t ler aynı bir olasılık uzayında tanımlı rastgele değişkenler olmak üzere, $\{X_t: t\ \in T\}$ ailesine bir stokastik süreç denir. Buradaki t parametresi zaman olarak düşünülebilir. T kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz ise sürece kesikli zamanlı stokastik süreç, T kümesi bir aralık (sonlu veya sonsuz) ise sürece sürekli zamanlı stokastik süreç denir.

$x, y \in R$ olmak üzere $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ özelliğini sağlayan $t_0, t_1, \ldots, t_n\ \in T$'ler için $P\{X_{t_n} < y\ |\ X_{t_{n-1}} = x, X_{t_{n-2}} = x_{n-2}, \ldots, X_{t_1} = x_1, X_{t_0} = x_0\} = P\{X_{t_n} < y\ |X_{t_{n-1}} = x\}$ eşitliği her $x_{n-2}, \ldots, x_0\ \in R$ için sağlanıyorsa $X(t)$ sürecine bir Markov süreci denir.

η_i , $i = 1,2, \ldots$ rastgele değişkenleri bağımsız ve aynı tür dağılıma sahip olmak üzere,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \text{ ile tanımlı } \{S_n\}, n \geq 0 \text{ sürecine,}$$

a) η_i ler pozitif değerli ise yenileme süreci

b) η_i ler pozitif değerli ve keyfi dağılıma sahip ise ödüllü yenileme süreci

b) η_i ler hem negatif hem pozitif değerli ise rastgele yürüyüş süreci denir.

$$P\{X_n = j\,|X_{n-1} = i, X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0\} = P\{X_n = j\,|X_{n-1} = i\}$$
$$= p_{ij}$$

eşitliği her $x_{n-2}, \dots, x_0 \in R$ için sağlanıyorsa $\{X_n: n \in N\} = \{X_n\}_{n \in N}$ sürecine bir Markov zinciri ve p_{ij} ye de i durumundan j durumuna bir adıma geçiş olasılığı denir.

Yarı-Markov rastgele yürüyüş süreçleri yarı-Markov süreçlerinin özel bir durumudur. Yarı-markov süreci kavramını ilk kez, birbirinden bağımsız olarak ve hemen hemen aynı zamanlarda ünlü olasılıkçılar Levy, Smith ve Takacs tarafından verilmiştir. Bu tanımlardan Levy'nin tanımını kısaca verelim;

$X_t(w)$ sürecinin durumlar uzayı {0,1,2,…} olsun. Eğer $X_t(w)$ sürecinin geçiş olasılıkları aşağıdaki fonksiyonlar ailesi ile belirlenirse, bu sürece yarı-Markov süreci denir.

$$f_t(i,j,u) = P\{\varepsilon_{k-1};\ \tau_t(\varepsilon_k(\omega)) < u; \varepsilon_k(\omega) = i\,\}, i,j = 0,1,2, \dots s$$

burada $\varepsilon_k(\omega), k.$ sıçramada sistemin durumu ve $\chi_t(k), k.$ sıçrama anı olmak üzere

$$\tau_t(\varepsilon_k(\omega)) = \chi_t(k+1) - \chi_t(k)$$

dır. Fakat bu tanımda durum uzayı sonlu elemanlı olduğundan ve sıçrama anları fiziksel olarak belirlenebildiğinden bu tanımın genelleştirilmesi ve matematikselleştirilmesi gereği vardı. Bu nedenle Çınlar, Gihman ve Skorohod, Serfoza, Ezhov ve Koroljuk çalışmalarında genel durum uzayına sahip yarı-Markov süreci tanımlarını vermişler ve böylece yukarıdaki tanımı genelleştirmişlerdir. Bu tanımlardan Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu tanımı aşağıdaki gibidir;

$(\Omega, F, P_x), x \in X,$ olasılık uzayları ailesi ve bir (Ω, σ, P_x) olasılık uzayında bir $\{X_n(\omega); n = 0,1,2, \dots\}$ Markov zinciri verilsin. Bu zincirin, $P_x\{X_0(\omega) = x\} = 1$ olmak üzere, durum uzayı (X, B) ve geçiş olasılığı $\pi(x, B)$ dir. $\eta_1(\omega), \eta_2(\omega), \dots$ bağımsız, aynı tür dağılıma sahip ve $\{X_n(\omega); n = 0,1,2, \dots\}$ ailesinden $[0,1]$ aralığında düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi olsun. Her $x, y \in X$ için $F_{x,y}(t)$, herhangi bir negatif olmayan rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olmak üzere, [0,1] de öyle bir negatif olmayan $\varphi_{x,y}(t)$ fonksiyonu belirlensin ki, $\varphi_{x,y}(\xi)$ nin [0,1] de dağılım fonksiyonu $F_{x,y}(t)$ olsun. (burada ξ, [0,1] aralığında düzgün dağılıma sahip bir rastgele değişkendir). Bu takdirde

$$\tau_k = \varphi_{X_{k-1},X_k}(\eta_k)$$

olmak üzere

$$X(t) = X_{k-1}(\omega), \text{eğer} \sum_{i=1}^{k-1} \tau_i \le t \le \sum_{1}^{k} \tau_i \text{ ise} \sum_{1}^{0} = 0$$

ile tanımlanan $X(t)$ sürecine bir yarı-Markov süreci denir.

Yarı-Markov sürecinin diğer bir tanımını da Shurenkov 1987 yılında vermiş ve bu tanımın Gihman ve Skorohod'un vermiş olduğu tanıma denk olduğu gösterilmiştir. Nasırova ise 1970 yılında Skorohod'un vermiş olduğu yarı-Markov süreci kavramının özel bir durumu olan yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci kavramını şu şekilde vermiştir;

$\{(\xi_i, \eta_i); i = 1,2, \dots\}$ bir (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlı, bağımsız, aynı tür dağılıma sahip bir rastgele değişkenler çifti dizisi ve ξ_i ler pozitif değerli olsun. Bu takdirde

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i$$

eğer,

$$T_n \le t < T_{n+1} \text{ ise}$$

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,, n \ge 1\,, T_0 = 0$$

ile tanımlanan $X(t)$ sürecine bir yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci denir.

Not: υ tam değerli rastgele değişkeni ve $\{\xi_n\}$ dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış olsunlar. Ayrıca $\upsilon \geq 0$ ve ξ_n rastgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız olsunlar. $\mathcal{F}_{k.n}$ ile $\xi_1, \dots, \xi_n$ rastgele değişkenlerinin ürettiği sigma cebir, yani $\mathcal{F}_{k.n} = \sigma(\xi_k, \dots, \xi_n)$ ile gösterilsin.

Tanım: Her $n = 1,2, \dots$ için $\{\upsilon \leq n\}$ olayı $\mathcal{F}_{n+1.\infty}$ sigma cebrinden bağımsız olduğunda υ rastgele değişkenine "gelecekten bağımsız" rastgele değişken denir.

Tanım: Her $n = 1,2, \dots$ için $\{\upsilon \leq n\} \in \mathcal{F}_{1.n}$ olduğunda υ rastgele değişkenine Markov rastgele değişkeni veya durdurma anı denir.

Başka bir değişle, bu durumda $\xi_1, \dots, \xi_n$ rastgele değişkenlerinin değerleri bilindiğinde $\{\upsilon \leq n\}$ olayının gerçekleşip gerçekleşmediğini kesin olarak söylemek mümkündür. Markov rastgele değişkeni υ, ξ_k rastgele değişkenler dizisi için "gelecekten bağımsız" rastgele değişkendir.(Borovkov, 1976).

$S_\upsilon = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ olarak tanımlandığında S_υ rastgele sayıda rastgele değişkenin toplamıdır.

Teorem : (Kolmogorov-Prokhorov Teoremi), (Borovkov, 1976).

Negatif olmayan tam değerli rastgele değişkeni υ, "gelecekten bağımsız" bir rastgele değişken olsun. Eğer

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(\upsilon \geq k) E(|\xi_k|) < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa, bu takdirde

$$E(S_\upsilon) = P(\upsilon \geq k) E(\xi_k)$$

eşitliği yazılabilir.

Bu teoremin önemli bir sonucu olan aşağıdaki teorem literatürde Wald Özdeşliği olarak bilinmektedir.

İspat:

$$E(S_\upsilon) = E\left(\sum_{i=1}^{\upsilon} \xi_i\right) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} \xi_k / \upsilon = n\right] P_\upsilon(n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} E(\xi_k / \upsilon = n) P_\upsilon(n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\sum_{i=1}^{n} E(\xi_i)\right] P_\upsilon(n)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nE(\xi_1)\, P_\upsilon(n) = E(\xi_1) \sum_{n=1}^{\infty} nP_\upsilon(n) = E(\xi_1) \sum_{n=1}^{\infty} nP(\upsilon = n)$$

Burada,

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP(\upsilon = n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\upsilon \geq n)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\upsilon \geq n) = P(\upsilon \geq 1) + P(\upsilon \geq 2) + P(\upsilon \geq 3) + \cdots$$
$$= P(\upsilon = 1) + P(\upsilon = 2) + P(\upsilon = 3) + \cdots + P(\upsilon = 2) + P(\upsilon = 3) +$$
$$+ P(\upsilon = 4) + \cdots + P(\upsilon = 3) + P(\upsilon = 4) + P(\upsilon = 5) + \cdots$$
$$= 1P(\upsilon = 1) + 2P(\upsilon = 2) + 3P(\upsilon = 3) + \cdots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP(\upsilon = n)$$

Böylece Teorem ispatlanmış olur.

Teorem: (Wald Özdeşliği)

$\xi_1, \xi_2, \ldots$ rastgele değişkenleri kendi aralarında bağımsız ve aynı dağılıma sahip, υ rastgele değişkeni ise gelecekten bağımsız bir rastgele değişken olsun. Ayrıca $E(\xi_k) < \infty$ ve $E(\upsilon) < \infty$ olsun. Bu takdirde,

$$E(S_v) = E\left(\sum_{k=1}^{v} \xi_k\right) = E(\xi_k)E(v)$$

olur. Bu eşitliğe Wald Özdeşliği denir (Borovkov, 1976).

İspat: Kolmogorov-Prokhorov Teoreminden bilinmektedir ki;

$$\sum_{n=1}^{\infty} nE(\xi_1)\, P_v(n) = E(\xi_1) \sum_{n=1}^{\infty} nP_v(n) = E(\xi_1)E(v)$$

bu ise ispatı tamamlar.

Tanım: $\{\xi_n\}, n = 1,2,\ldots$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rastgele değişkenler dizisi olsun. Bu dizinin yardımı ile

$$N(t) \equiv \min\left\{n \geq 1 : \sum_{i=1}^{n} \xi_i > t\right\}, t > 0$$

stokastik süreci inşa edilsin. Bu şekilde kurulan $N(t)$ sürecine literatürde "Yenileme Süreci" denir.

Teorem: $N(t)\,, t > 0$ yenileme sürecinin dağılımı $F(t) \equiv P(\xi_1 \leq t)$ ile gösterilsin. Bu takdirde,

$$P\{N(t) = n\} = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)$$

şeklinde yazılabilir.

İspat:

$$T_{\boldsymbol{n}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \;\; ve\; P\{T_{\boldsymbol{n}} \leq t\} = F^{*n}(t)$$

dir. Buradan,

$$P\{N(t) = n\} = P\{T_n \leq t \leq T_{n+1}\}$$

yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
&P\{T_n \le t \le T_{n+1}\} = \\
&= \int_0^\infty P\{T_n \in du\,; u \le t \le T_{n+1}\} = \int_0^\infty P\{T_n \in du\,;\ u \le t \le u + \xi_{n+1}\} \\
&= \int_0^\infty P\{T_n \in du\,;\ 0 \le t - u \le \xi_{n+1}\} = \int_0^t P\{T_n \in du\} P\{\xi_{n+1} \ge t - u\} \\
&= \int_0^t P\{T_n \in du\}[1 - P\{\xi_{n+1} \le t - u\}] \\
&= \int_0^t P\{T_n \in du\} - \int_0^t P\{T_n \in du\} P\{\xi_{n+1} \le t - u\} \\
&= F_{T_n}(u) - F_{T_n}(u) F_{\xi_{n+1}}(t-u) = F_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}(u) - F_{\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n}(u) F_{\xi_{n+1}}(t-u) \\
&= F^{*n}(t) - F^{*n}(t)F(t) \\
&= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)
\end{aligned}
$$

Not: $N(t)$ yenileme sürecinin beklenen değerine "Yenileme Fonksiyonu" denir ve genellikle $U(t)$ sembolü ile, yani

$$U(t) = E(N(t))$$

şeklinde gösterilir.

Teorem: $\{\xi_n\}, n = 1,2, ...$ rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(t)$, yani

$$F(t) \equiv P(\xi_1 \le t)$$

şeklinde olsun. Bu takdirde, $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$$

burada $F^{*n}(t)$ ile $F(t)$ dağılım fonksiyonunun n. konvolüsyon çarpımı gösterilmiş olup aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$F^{*n}(t) = F^{*(n-1)}(t) * F(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s)\, dF(s)$$

burada,

$$F^{*0}(t) = \begin{cases} 1\,; t \geq 0 \\ 0\,; t < 0 \end{cases}$$

ve

$$F^{*(1)}(t) = F(t)$$

dir.

İspat: $I_n \equiv I_n(t), n.$ yenilemenin $[0, t]$ aralığında olması olayının göstergesi olsun. Yani,

$$I_n = \begin{cases} 1\,; \text{n. yenileme } [0,\text{t}] \\ 0\,;\ \text{aksi durumlarda} \end{cases}$$

olsun. I_n'in beklenen değeri ise

$$E(I_n) = 1P\{I_n = 1\} + 0P\{I_n = 0\}$$
$$E(I_n) = P\{I_n = 1\}$$

şeklindedir. Burada,

$$\{I_n = 1\} = \{T_n \leq t\}$$

olduğu açıktır. Buradan,

$$N(t) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n$$

olduğu görülür. Buna göre,

$$U(t) = E\big(N(t)\big) = E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} E(I_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{I_n = 1\}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P\{T_n \leq t\} = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$$

dir. $U(t)$ fonksiyonu monoton azalmayan ve pozitif değerli bir fonksiyondur. Ayrıca $U(0) = 1$ dir.

Teorem: Her sonlu t için $U(t) < \infty$ dır.

İspat: $F^{*n}(t) = P\{T_n \leq t\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n \leq t\}$
$\leq P\{\xi_1 \leq t, \xi_2 \leq t, \dots, \xi_n \leq t\}$

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} [F(t)]^n$$

dir. $0 < F(t) < 1$ olduğundan bir geometrik dizi oluşturur ve $F(t) < 1$ koşulunu sağlayan tüm t'ler için seri yakınsaktır, dolayısıyla $U(t) < \infty$ dır.

Tanım: A bilinmeyen bir fonksiyon, F bir dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)dF(x), t > 0$$

dir. Burada $a(t)$ integrallenebilir bir fonksiyondur. $A(t)$'ye "Yenileme Denklemi" denir.

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t) = F^{*0}(t) + F^{*1}(t) + F^{*2}(t) + \cdots$$

$$= 1 + F(t) + F(t) * F(t) + \cdots$$
$$= 1 + F(t) * [1 + F(t) + F^{*2}(t) + \cdots]$$
$$= 1 + F(t) * U(t)$$

$$U(t) = 1 + \int_0^t U(t-s)dF(s)\,;\; t > 0$$

$U(t)$ fonksiyonunun asimptotik davranışını incelemek, olasılık teorisinde önemli bir yer tutmaktadır. Bu nedenle, $U(t)$'nin $t \to \infty$ iken asimptotik davranışı ile ilgili literatürde birçok önemli sonuçlar mevcuttur. Bu sonuçların en önemlilerinden birisi "Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi" adı ile bilinmekte olup, Feller W. tarafından 1971 yılında ispat edilmiştir.

Teorem: (Elementer Yenileme Teoremi)

$\{N(t)\,; t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. Ardışık yenilemeler arası geçen süreler aritmetik olmayan $F(t)$ dağılım fonksiyonuna ve $\mu < \infty$ ortalamaya sahip olsun. Bu takdirde,

$$E\big(N(t)\big) = U(t)$$

$$\frac{U(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}\ ;\ t \to \infty$$

dir.

Teorem: (Kesinleştirilmiş Yenileme Teoremi)

$F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım, beklenen değeri μ ve varyansı da $\sigma^2 < \infty$ olsun. Bu takdirde, $t \to \infty$ iken

$$0 \leq U(t) - \frac{t}{\mu} \to \frac{\mu^2 + \sigma^2}{2\mu^2}$$

dir.

Teorem: (Birinci Yenileme Teoremi)

$F(.)$ dağılımı aritmetik olmayan bir dağılım ve beklenen değeri $\mu < \infty$ olsun.

$\forall\, h > 0$ için $t \to \infty$ iken

$$U(t) - U(t-h) \to \frac{h}{\mu}$$

olur.

İspat: Elementer yenileme teoreminden,

$$\frac{U(t)}{t} \to \frac{1}{\mu} \Longrightarrow U(t) \to \frac{t}{\mu}$$

olur. Buradan,

$$\lim_{t\to\infty} U(t) - U(t-h) = \lim_{t\to\infty} U(t) - \lim_{t\to\infty} U(t-h)$$
$$= \frac{t}{\mu} - \frac{t-h}{\mu} = \frac{h}{\mu}$$

elde edilir.

Tanım: $\{\eta_n\}, n \geq 1$ dizisi (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlanmış, bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi olsun. Ayrıca $\eta_n, n = 1,2,...$ rastgele değişkenleri hem pozitif, hem de negatif değerler alabilsin. Bu rastgele değişkenlerin yardımı ile aşağıdaki rastgele yürüyüş süreci tanımlansın:

$$S_0 = 0\ ;\ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i\ , n \geq 1$$

Birinci basamak anı ve birinci basamak yüksekliği de aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\upsilon_1^+ = \min\{n \geq 1 : S_n > 0\}\ ;\ \chi_1^+ = \sum_{i=1}^{\upsilon_1^+} \eta_i$$

υ_1^+ rastgele değişkenine birinci basamak anı, χ_1^+ rastgele değişkenine ise birinci basamak yüksekliği denir (Feller, 1971).

$0 < E(\eta_n) < \infty$ koşulu sağlandığında, $E(\upsilon_1^+)<\infty$; $E(\chi_1^+) < \infty$ olur (Feller , 1971).

Teorem: $\{S_n\}$ bir rastgele yürüyüş süreci olduğunda $\{S_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin sınır fonksiyonelleri olarak bilinen $N(x)$ ve $S_{N(x)}$ rastgele değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N(x) = \min\{n \geq 1 :\ S_n > x\}, x > 0\ ve\ S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{N(x)} \eta_i$$

$N(x)$ sınır fonksiyoneli, $\{S_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin $x > 0$ seviyesini ilk kez aşma anı olarak yorumlanır. $S_{N(x)} - x$ ise, $\{S_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin $x > 0$ seviyesini ilk kez aştığında x seviyesinin üzerinde kalan "artık" kısım olarak yorumlanır. Ayrıca, $N(x)$ ve $S_{N(x)}$ rastgele değişkenlerine, $\{S_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin belli bir sınırı aşması ile ilgili oldukları için sınır fonksiyonelleri denir.

$\{S_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin incelenmesinde $N(x)$ ve $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonellerinin çok büyük önemi vardır. Fakat η_1 hem negatif hem pozitif değerler alabildiğine göre $N(x)$ ve $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonellerini sadece yukarıdaki tanımlarından yararlanılarak incelemek oldukça zordur. Bu nedenle, bu fonksiyonellerin incelenmesi için literatürde "Dykin Prensibi" olarak bilinen bir matematiksel düşünceden yararlanılmaktadır. Bu düşünceyi ortaya koymak için $\{S_n\}$ rastgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı υ_1^+ ve birinci basamak yüksekliği χ_1^+ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\upsilon_1^+ = \min\{n \geq 1 : \; S_n > 0\}\,; \; \chi_1^+ \; = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\upsilon_1^+} \mathrm{S}_{\upsilon_1^+}$$

Ayrıca $(\upsilon_n^+; \chi_n^+), n = 1,2,3, \ldots$ rastgele değişken ikilileri $(\upsilon_1^+; \chi_1^+)$ ile aynı dağılıma sahip bağımsız rastgele çiftler dizisi olsun. Bu rastgele değişkenler yardımı ile aşağıdaki yenileme süreci inşa edilsin:

$$H(x) = \min\left\{n \geq 1\colon \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \geq x\right\}$$

Bu takdirde, Dynkin prensibi matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$N(x) = \sum_{i=1}^{H(x)} \upsilon_i^+, S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(x)} \chi_i^+$$

Dolayısıyla, Dynkin prensibine göre, rastgele yürüyüş sürecinin içinde öyle iki ödüllü yenileme süreci inşa etmek mümkündür ki, $N(x)$ ve $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelleri bu ödüllü yenileme süreçleri yardımıyla ifade edilebilsin (Rogozin, 1964).

Tanım: $N(x)$ sınır fonksiyoneli yukarıdaki gibi tanımlandığında, Dynkin prensibine göre,

$$N(x) = \sum_{i=1}^{H(x)} v_i^+$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $H(x)$ ile $\{\chi_n^+ , n = 1,2, \ldots\}$ basamak yüksekliklerinin oluşturduğu yenileme süreci gösterilmiştir. Wald Özdeşliğine göre,

$$E[N(x)] = E\left(\sum_{i=1}^{H(x)} v_i^+\right) = E(\, v_i^+)E[H(x)]$$

olur.

$H(x)$ bir yenileme süreci olduğundan her $z < \infty$ için $E[H(x)] < \infty$'dır. (Feller, 1971). Diğer taraftan $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğu takdirde, $E(\, v_i^+) < \infty$'dur (Feller, 1971). Özetle, her $0 < z < \infty$ için $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğunda, hem $E(\, v_i^+)$ hem de $E[H(x)]$ sonlu olur. Bunlar yukarıdaki eşitlikte göz önünde bulundurulursa $E[N(x)]$'inde sonlu olduğu sonucu elde edilir. Yani, $E[N(x)] < \infty$ olur.

$\mathrm{E}[\mathrm{N}(\zeta_1)]'$in sonlu olduğunu göstermek için Wald Özdeşliği ve $\mathrm{E}[\mathrm{N}(\zeta_1)]'$in tanımı gereği,

$$\mathrm{E}[\mathrm{N}(\zeta_1)] = E\left(\sum_{i=1}^{H(\zeta_1)} v_i^+\right) = E(\, v_i^+)E[H(\zeta_1)]$$

olur. Burada,

$$E[H(\zeta_1)] = \int_0^\infty E[H(x)]d\pi(x)$$

dir. $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğu için $E(\, v_i^+) < \infty$'dir (Feller, 1971). Dolayısıyla, $E[N(\zeta_1)]$'in sonlu olması için $E[H(\zeta_1)]$'in sonlu olmasını göstermek yeterlidir.

Kesinleştirilmiş yenileme teoremine göre $z \to \infty$ iken,

$$E[H(x)] \equiv U_{+}(x) = \frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + g(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $\mu_k \equiv E(\chi_1^{+k})$'dır. $g(x)$ ise sınırlı bir fonksiyon olup, $z \to \infty$ iken sıfıra yakınsamaktadır. Bu takdirde, öyle bir $b > 0$ sayısı bulmak mümkündür ki, her $\varepsilon > 0$ için $z \geq b$ olduğunda $|g(x)| < {}^{\varepsilon}/_{2}$ olsun. Bunu göz önünde bulundurarak,

$$\int_0^\infty E[H(x)]d\pi(x)$$

integrali aşağıdaki şekilde değerlendirilebilir:

$$\int_0^\infty E[H(x)]d\pi(x) = \int_0^b E[H(x)]d\pi(x) + \int_b^\infty E[H(x)]d\pi(x)$$

$$\leq U_{+}(b)\int_0^b d\pi(x) + \int_b^\infty U_{+}(x)d\pi(x)$$

$$\leq U_{+}(b) + \int_b^\infty \left\{\frac{x}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right\}d\pi(x) = U_{+}(b) + \frac{1}{\mu_1}\int_b^\infty x d\pi(x) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}\right)\int_b^\infty d\pi(x)$$

$$\leq U_{+}(b) + \frac{E(\zeta_1)}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

burada,

$$\int_0^b d\pi(x) \leq \int_0^\infty d\pi(x) \equiv 1, \int_b^\infty d\pi(x) \leq \int_0^\infty d\pi(x) \equiv 1,$$

$$\int_b^\infty x d\pi(x) \leq \int_0^\infty x d\pi(x) \equiv E(\zeta_1)$$

eşitsizlikleri kullanılmıştır. Böylece $0 < E(\eta_1) < \infty$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulları sağlandığında $E[Nn(x)]$ ve $E[N(\zeta_1)]$'in sonlu oldukları ispatlanmış olur.

Tanım: $a_n(x,z) = P\{z - S_k \geq s, k = \overline{1,n}\,, z - S_n \leq x\}, n \geq 1$

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z)\,, x, z > 0$$

Burada,

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_{i\,,} n \geq 1\,;\; S_0 = 0$$

ile $\{\eta_n\}$ dizisinin oluşturduğu rastgele yürüyüş süreci gösterilmiştir. Hatırlanacak olursa, $\{\eta_n\}, n \geq 1$ dizisi $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız, aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisidir. $\{\eta_n\}$ rastgele değişkenler dizisi hem pozitif hem negatif değerler alabilen rastgele değişkenlerdir. Ayrıca, $0 < E(\eta_1) < \infty$ koşulu sağlanmaktadır. Bu durumda, $A(x,z)$ serisinin sonlu olup olmadığı araştırılmalıdır.

$$\{\omega : z - S_k > 0\} \equiv C_k, k = 1, \dots, n \text{ ve } \{\omega : z - S_n \leq x\} \equiv D_n(x), n \geq 0$$

olsun. Bu durumda,

$$a_n(x,z) = P\{C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n \cap D_n(x)\}, n = 0,1, \dots$$

olur. Kısaca $C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_n = B_n$ olsun.

$$D_n(x) \equiv \{\omega : z - S_n \leq x\} \subseteq \Omega$$

olduğuna göre $a_n(x,z) \leq P(B_n \cap \Omega) = P(B_n)$ olur.

$$A(x,z) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{z - S_k > 0\,; k = \overline{1,n}\}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $N(z) = \min\{n \geq 1 : z - S_n \leq 0\}$ sınır fonksiyonelinin tanımından

$$\{N(z) > n\} = \{z - S_k > 0\,, k = \overline{1,n}\}$$

olduğu görülmektedir. Dolayısıyla,

$$A(x,z) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(z) > n\} = \sum_{n=0}^{\infty} P\{N(z) > n+1\} = \sum_{m=1}^{\infty} P\{N(z) \geq m\} = E[N(z)]$$

dir. $E[N(z)]$'in sonlu olduğu yukarıda gösterilmiştir. Böylece her $x > 0\,, z > 0$ için $E(\eta_1) > 0$ olduğunda $A(x,z)$ sonludur, yani $A(x,z) < \infty$'dır. Böylece $A(x,z)$ serisinin sonlu olduğu gösterilmiş olur.

Tanım: Bir $\{X_n\}_{n\in N}$ Markov zinciri verilsin.

$$f_{ii} = P\{X_n = i, X_{n-1} \neq i, \dots, |X_0 = i\}$$
$$P_{ij}(n) = P\{X_{m+n} = j|X_m = i\}$$

olmak üzere

$$F_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}(n),\ R_{ii} = \sum n f_{ii}(n) \equiv \sum P_{ii}(n)$$

tanımlansın. F_{ii}, başlangıçta i durumunda olan zincirin eninde sonunda tekrar i durumuna gelme olasılığıdır. R_{ii}' ye i durumunun ortalama tekrarlama zamanı denir. Eğer,

1) $F_{ii} = 1$ ise i'ye tekrarlanan durum denir

2) i tekrarlanan durum ve $R_{ii} = +\infty$ ise i'ye sıfır (null) durum, $R_{ii} < \infty$ ise i'ye sıfır olmayan (non-null) denir.

3) $P_{ii}(n_1) > 0, P_{ii}(n_2) > 0, \dots$ ve $n_1 > n_2 > \cdots$ olan $n_1, n_2, \dots$ sayıları için $d_i = (n_1, n_2, \dots) > 1$ ise i'ye d_i periyodlu durum, $d_i = 1$ ise i'ye periyodik olmayan durum denir (buradaki parantez, içindeki sayıların en büyük ortak bölenidir).

Bu tanımlardan sonra ergodik durumu aşağıdaki gibi verilebilir;

Tekrarlanan, sıfır olmayan ve periyodik olmayan duruma ergodik durum denir. Bir Markov zincirinin ergodikliği, bütün durumların ergodik olması ile tanımlanır. Bir Markov sürecinin ergodikliği ise aşağıdaki gibi verilir;

$X(t)$ bir Markov süreci olduğunda $f(x)$ sınırlı, ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere;

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T f(X(t))dt$$

limiti mevcut, sonlu ve rastgele değişken değil (yani $X(0) = z \; ve \; t$ değerlerinden bağımsız) ise bu $X(t)$ Markov sürecine ergodiktir denir ve bu limit değerine de sürecin en genel ergodik dağılım fonksiyonu denir.

Bir Markov sürecinin ergodik olması için bu süreçten ergodik bir Markov zincirinin inşa edilebilmesi gerekmektedir, ancak bu yeterli değildir.

Hem pratik hem teorik bakımdan yarı-Markov süreçleri için ergodik teoremler ve bu süreçlerin ergodik dağılımları da oldukça önemlidir. Kesikli müdahaleli yarı-Markov süreçleri için genel ergodik teorem Gihman ve Skorohod (1975) tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir;

Teorem: $X(t)$ süreci kesikli müdahaleli bir yarı-Markov süreci olsun. Ayrıca aşağıdaki iki varsayım sağlansın:

1.Varsayım: Öyle bir $\tau_0 \equiv 0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots < \infty$ artan zaman anları bulunsun ki, $X(t)$ sürecinin bu anlardaki değerleri $(X(\tau_n), n = 1,2, \dots)$ ergodik bir Markov zinciri oluşturmuş olsun.

2. Varsayım: $\tau_0, \tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots$ anları arasında geçen sürelerin beklenen değeri sonlu yani $\forall \; n = 1,2, \dots$ için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olsun.

Bu takdirde $X(t)$ süreci ergodiktir.

Teorem: Yukarıdaki teoremin varsayımlar sağlandığında, her sınırlı ölçülebilir $f(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(s)ds = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} f(x) P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\} dt d\pi(z))$$

Burada, $\pi(z)$ $\{X(\tau_n)\}$ Markov zincirinin ergodik dağılımıdır.

Not: Bu teorem zaman ortalamalarının durum ortalamalarına 1 olasılığı ile yakınsadığını ifade eden bir önermedir ve ergodik süreçler için en temel bağıntıyı ortaya koyar.

Not: Yukarıda zaman ortalamalarının durum (mekan) ortalamasına yakınsadığı ifade edilmiş ve aşağıdaki eşitliğin 1 olasılığı ile doğru olduğu verilmiştir.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{0}^{t} f(X(u)du = S_f \equiv \frac{1}{E(\tau_1(\zeta_1))}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x)P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z))$$

burada $f(x)$ fonksiyonu sınırlı ölçülebilen bir fonksiyondur.

$$\sup_{x \in R^+} |f(x)| = M < \infty$$

olsun. Bu takdirde,

$$\left|\int_{z=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty} f(x)P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z)\right| \leq M\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} P_z\{\tau_1 > t; X(t) \in dx\}dtd\pi(z)$$

$$= M\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} P_z\{\tau_1 > t\}dtd\pi(z) = M\int_{0}^{\infty} E[\tau_1(z)]d\pi(z)$$

olur. Wald Özdeşliğine göre,

$$E[\tau_1(z)] = E\left(\sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i\right) = E(\xi_1)E[N_1(z)]$$

ve $0 < E(\xi_1) < \infty$'dır. Dolayısıyla $E[\tau_1(z)]$'in sonlu olabilmesi için $E[N_1(z)]$'in sonlu olması yeterlidir. Dynkin prensibine göre,

$$N(z) = \sum_{i=0}^{H(z)} v_i^+$$

şeklinde yazılabilir. Burada υ_1^+, birinci basamak anı; υ_n^+'lar ise υ_1^+ ile aynı dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenlerdir. $H(z)$ süreci, $\{\chi_n^+\}, n = 1,2, \ldots$ basamak yüksekliklerinin oluşturduğu bir yenileme sürecidir. Wald Özdeşliğine göre,

$$E[N_1(z)] = E\left(\sum_{i=1}^{H(z)} \upsilon_i^+\right) = E(\upsilon_i^+)E[H(z)]$$

olur. $E[H(z)] = U_+(z)$ bir yenileme fonksiyonu olduğundan her sonlu z için, $E[H(z)] = U_+(z)$'nin sonlu olduğu bilinmektedir (Feller, 1971). $0 < E(\eta_1) < \infty$ olduğunda $E(\upsilon_i^+) < \infty$'dır (Feller, 1971). Dolayısıyla $E[N_1(z)]$ sonludur. Ayrıca

$$\int_0^\infty E[H(z)]d\pi(z)$$

integralinin sonlu olduğu $E(\eta_1) > 0$ ve $E(\eta_1^2) < \infty$ koşulları altında ilerleyen bölümlerde gösterilecektir. Bu takdirde,

$$\int_0^\infty E[\tau_1(z)]d\pi(z) = E(\xi_1)\int_0^\infty E[N_1(z)]d\pi(z) = E(\xi_1)E(\upsilon_1^+)\int_0^\infty E[H(z)]d\pi(z) < \infty$$

olur. $M \equiv \sup_{x\in R} |f(x)| < \infty$ sonlu olduğu da göz önünde bulundurulursa, yukarıdaki üç katlı integrallerin sonlu oldukları ispat edilmiş olur.

Tanım: $\{\eta_n\}, n = 1,2, \ldots$ dizisi (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlı bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler dizisi olsun. η_n rastgele değişkenleri hem pozitif hem negatif değerler alabilsin. η_n rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $F(x)$ ile, karakteristik fonksiyonu ise $\varphi(\theta)$ ile gösterilsin, yani

$$F(x) = P\{\eta_1 \leq x\};\ \varphi(\theta) = \mathrm{E}(\exp(\mathrm{i}\theta\eta_1))$$

olsun.

$\{\eta_n\}, n = 1,2, \ldots$ dizisinin yardımıyla aşağıdaki rastgele yürüyüş süreci tanımlansın:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_{i\,,} n \geq 1\ ;\ S_0 = 0$$

$A \subseteq R$ reel sayılar kümesinin keyfi bir alt kümesi olsun. A' ile A'nın tümleyicisi gösterilsin, yani $A' = R \backslash A$ olsun (Genellikle A' sonlu veya sonsuz bir aralık şeklinde ortaya çıkar). $I \subseteq A'$ olduğunda Eğer $S_1 \in A;\ S_2 \in A; \dots ; S_{n-1} \in A; S_n \in A' (I \subseteq A')$ ise bu takdirde, "rastgele yürüyüş süreci ilk kez A' kümesine n. adımda ulaşmış ve bu andaki değeri I kümesindedir" denir. A' kümesine ilk kez ulaşma anı N ile, sürecin bu andaki değeri ise S_N ile gösterilsin. Dolayısıyla,

$$N = \min\{n \geq 1 :\ S_1 \in A;\ S_2 \in A; \dots ; S_{n-1} \in A; S_n \in A'\}\ ;\ S_N = \sum_{i=1}^{N} \eta_i$$

olsun. $(N; S_N)$ ikilisinin ortak dağılımı için aşağıdaki notasyon tanımlansın:

$$P\{N = n;\ S_n \in I\} \equiv H_n\{I\}, I \subseteq A', n = 1,2, \dots$$

Tanımı gereği $H_n\{I\}$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$H_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A; \dots ; S_{n-1} \in A; S_n \in I\}$$

Ayrıca, $I \subseteq A$ için $H_n\{I\} = 0$ olarak kabul edilsin. Bu durumda, her $I \subseteq R$ için

$$H_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A; \dots ; S_{n-1} \in A; S_n \in A'; S_n \in I\}$$

şeklinde gösterilebilir. $H_n\{I\}$ olasılıklarına "ilk kez ulaşma olasılıkları" denir. $H_n\{I\}$ olasılıklarının incelenmesi, rastgele yürüyüş süreçlerinin A' kümesine ilk kez ulaşmasına kadar olan davranışı ile bağlantılıdır.

Ayrıca, her $I \subseteq A$ ve $n = 1,2, \dots$ için $G_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A; \dots ; S_{n-1} \in A; S_n \in I\}$ olsun. $G_n\{I\}$, ilk n adımda sürecin A' kümesine ulaşmaması ve n. adımda I kümesinde olması olasılığıdır. $I \subseteq A'$ olduğunda $G_n\{I\} = 0$ olsun. Bu takdirde, $G_n\{I\}$ olasılıkları tüm $I \subseteq R$'ler için tanımlanmış olur ve aşağıdaki şekilde göstermek daha uygundur:

$G_n\{I\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A; \dots; S_n \in A; S_n \in I\}$

Tanıma göre, $G_n\{A\} = P\{S_1 \in A;\ S_2 \in A; \dots; S_n \in A\} = P\{N > n\} = 1 - P\{N \leq n\}$ dir.

Amaç, $(N; S_N)$ ikilisinin dağılımını incelemektir (Feller, 1971). Bu amaca ulaşmak için Fourier analizi yöntemi kullanılır. N tam değerli rastgele değişken olduğu için N'nin moment çıkaran fonksiyonu, S_N'nin ise karakteristik fonksiyonu kullanılsın. Bunun için aşağıdaki notasyonlar tanımlansın:

$$\chi(s,\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{A'} e^{i\theta x} H_n\{dx\};\ \gamma(s,\theta) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} s^n \int_{A'} e^{i\theta x} G_n\{dx\};$$

$(n = 0. terim\ 2. seride\ 1'dir.)$

$|s| < 1$ olduğunda her iki seri de yakınsak olur. Rastgele yürüyüş süreçleri için temel özdeşlik $\chi(s,\theta)$ ve $\gamma(s,\theta)$ arasında kurulan ilişkiyi ifade eder (Feller, 1971).

Temel Özdeşlik: Her $\theta \in R$ ve $|s| < 1$ için

$$1 - \chi(s,\theta) = \gamma(s,\theta)[1 - s\varphi(\theta)]$$

dir.

Not: Düzgün dağılım, her sürekli değer için aynı sabit olasılık gösteren bir olasılık dağılımları ailesidir. Desteklenen aralık iki parametre ile, yani minimum değer *a* ve maksimum değer *b* ile, tanımlanmaktadır. Bu dağılım kısa olarak *U*(*a*,*b*) olarak gösterilir. Simulasyon denemelerinin işletilip sonuçlar alınmasında, sürekli düzgün dağılım kullanılması simulasyon tekniğinin vazgeçilmez bir öğesidir. Bilgisayar yazılım dillerinin hemen hepsi, sözde-rastgele sayıların üretilmesi için özel komutlar içermektedir; bu sözde-rastgele sayılar aslında bir standart düzgün (yani *U*(0,1)) dağılımdan elde edilirler. (*a*,*b*) parametreli bir sürekli düzgün dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}; a\le x\le b\\ 0 \quad ; x<a \ veya \ x>b\end{cases}$$

Sınırda olan değerler, a ve b genellikle teorik bakımdan önemli değildirler; çünkü herhangi bir aralıkta $f(x)dx$ integral değerine ve $xf(x)dx$ değerine ve benzer değerlere bu sınır değerler hiç bir teorik etkide bulunmazlar

(a,b) parametreli bir sürekli düzgün dağılım için birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad ; x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}; a\le x\le b\\ 1 \quad ; x\ge b\end{cases}$$

(a,b) parametreli bir sürekli düzgün dağılım için beklenen değer, varyans, moment çıkaran fonksiyon ve karakteristik fonksiyon gibi önemli karakteristikler de aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$E(X)=\frac{a+b}{2} \ ; \ V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

$$M_X(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} \ ; \ \varphi_X(t)=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

Bu çalışmada yukarıda (a,b) parametreleri ile verilen düzgün dağılım (s,S) parametreleri ile kullanıldı ve belirtilen tüm olasılık yoğunluk fonksiyonu, birikimli dağılım fonksiyonu ve diğer karakteristikler bu parametrelere göre hesaplandı.

Üçgensel dağılımı elde etmek iki düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenin toplanması ile mümkündür. Bu işlem konvolüsyon çarpımı metodu ile yapılmaktadır

f ve g gibi iki fonksiyon olsun. Bu iki fonksiyonun konvolüsyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t_1)g(t - t_1)\, dt_1$$

Konvolüsyon operatörü adi çarpmadaki gibi davranır. Eğer f, g ve h uygun fonksiyonlar ise bu durumda, konvolüsyon

$i)$ Dağılma : $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
$ii)$ Değişme : $f * g = g * f$
$iii)$ Birleşme : $f * (g * h) = (f * g) * h$

özelliklerine sahiptir. Bununla birlikte konvolüsyon operatörü, çarpma operatöründen farklıdır. Örneğin, genel olarak $f * 1 \neq f$ ve $f * f \neq f^2$ dir.

Üçgensel dağılım üzerine yazılı ilk kayıtlar 18. y.y.'ın ortalarında yani olasılığın kombinasyonel problemlerinin en üst düzeylerde olduğu zamanlarda görülür. Üçgensel dağılımdan ilk bahseden Thomas Simpson'dır (1755-1757). Thomas Simpson'ın Roger Boscovich (1711-1787) ve ünlü İtalyan bir astronom ve istatistikçi ile mektuplaşmaları mevcuttur. Daha sonra Stigler (1984) ve Farebrother (1990) Thomas Simpson'a bazı detaylar ilave etmiştirler. 1997'de D. Johnson üçgensel dağılımın Beta dağılımının vekili olduğunu söylemiştir.

Üçgensel dağılım, genellikle sınırlı örneklem verileri ve özellikle değişkenler arasındaki ilişkinin bilindiği ancak verilerin zor bulunur olduğu (veri toplamanın yüksek maliyeti gibi sebeplerden) durumlar için kitlenin öznel bir şekilde tanımlanması için kullanılır. Model değeri maksimum değer, minimum değer ve bunlardan esinlenilmiş bir tahmin yoluyla belirlenir. Bu nedenle üçgensel dağılıma bilgisizlik dağılımı da denir.

Üçgensel dağılım aynı zamanda özellikle simülasyonda karar vermede sıklıkla kullanılır. Genellikle bir sonucun dağılımı hakkında fazla bir bilgiye sahip olunmadığı durumlarda kullanılır. Bu gibi durumlarda düzgün dağılımı kullanmakta mümkündür fakat eğer en olası sonuç biliniyorsa o zaman sonuca üçgensel dağılım yardımıyla simülasyon uygulanır.

Üçgensel dağılım Beta dağılımı ile birlikte proje yönetiminde maksimum ve minimum değerler yardımıyla bir aralık ile tanımlanabilen durumlarda yaygın bir şekilde kullanılır. Simetrik üçgensel dağılım ise ses titreşimleri konusunda yaygın bir şekilde kullanılır.

Üçgensel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & ; x<0 \\ \dfrac{x}{a^2} & ; 0<x<\dfrac{S}{2} \\ \dfrac{2a-x}{a^2} & ; \dfrac{S}{2}<x<S \\ 0 & ; S<x \end{cases}$$

1.2. Literatür Araştırması

Stok kontrol, güvenilirlik, kuyruk, matematiksel biyoloji, stokastik finans, matematiksel sigorta teorisi gibi alanlardan sonuçlanan çoğu problem rastgele yürüyüş ya da sürecin değişiminin yardımıyla ifade edilebilir. Literatürde bu süreçlerde birçok değerli çalışma vardır. Alsmeyer G. (1991), Anisimov V. ve Artalejo J.R. (2001), Aras G. (1993), Borovkov A.A. (1976), Brown M. (1975), Solomon (1975), Khaniyev T.A. (2003), Lotov V.I. (1996), Nasırova T.I. (1984), Rogozin B.A. (1964), Spitzer F . (1964). Buna rağmen matematiksel formüllerin karmaşıklığından var olan çalışmalar genellikle teoriktir ve pratikte somut problemleri çözmeye yardımcı değillerdir. Bu yüzden kesin formüllere ek olarak birkaç yaklaşık formül önerilir. Yaklaşık formüller kesin ifadelere yeterli derecede yakın olmalıdır. Bu tarz yaklaşık formülleri elde etmek için en etkili metot asimptotik metottur. Birçok örnekte elde edilen asimptotik denklemlerdeki terimlerin artan numaraları ile kesin ifadelere yakın yaklaşık formüller elde etmek mümkündür. Buna rağmen asimptotik denklemlerdeki terimlerin numaraları epeyce azaldığında yaklaşık ifadeler basitliklerini ve anlamlarını kaybetmeye başlar. Bu yüzden bu çalışmada sadece üç terimli asimptotik denklemleri ele alacağız.

Literatürde bu ve buna benzer süreçler için birçok çalışma mevcuttur, (Aliyev vd., 2010) "Pareto Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci için Asimptotik Sonuçlar" adlı çalışmada müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}, n \geq 0$ rastgele değişkenler dizisinin durağan dağılım fonksiyonu (α, λ) parametreli Pareto dağılımına sahip olan bir Markov zinciri olduğu durumda, $E(\zeta_n) \to \infty$ iken, sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde etmiştirler. (Khaniyev, 2003) “Özel Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci için Bazı Asimptotik Sonuçlar” adlı çalışmada sürecin ergodik dağılımının 1. ve 2. momentleri için bazı kesin formüller ve N ve $\mathrm{Y_N}$ rastgele değişkenlerinin ortak dağılımları kullanılarak sürecin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu elde edilmiştir. Bu sonuçlara dayanarak, $S - s \to \infty$ iken bu sürecin beklenen değer ve varyansının asimptotik davranışları elde edilmiştir. Son olarak, sürecin ergodik dağılımının $S - s$ için yeterli büyük değerler alındığında (S, s) üzerinde bir düzgün dağılıma yakın olduğu ispatlanmıştır. (Khaniyev ve Küçük, 2005) “İki Bariyerli Normal Dağılıma Sahip Rastgele Yürüyüş Süreci için Asimptotik Açılımlar” adlı çalışmada 0 ve $\beta > 0$ seviyeli iki bariyerli toplamları normal dağılımlı yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci ele alınmış, ayrıca, bazı zayıf varsayımlar altında sürecin ergodikliği tartışılmış ve sürecin ergodik dağılımı S_N’nin karakteristik fonksiyonların yardımıyla ifade edilmiştir. Bu ilişki kullanılarak, ergodik dağılımın ilk dört momenti için kesin formüller ve $\beta \to \infty$ iken üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir. (Kesemen vd., 2010) “Gamma Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Sürecinin Momentleri için Asimptotik Açılımlar” adlı çalışmada, kesikli müdahaleyi tanımlayan ζ_1 rastgele değişkeni (α, λ); $\alpha > 1, \lambda > 0$ parametreli gama dağılımına sahip olduğunda sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin formüller elde edilmiştir. Bu sonuçlara dayanarak, $\lambda \to 0$ iken sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ayrıca, X(t) sürecinin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklığı için asimptotik açılımlar bulunmuştur. Son olarak, elde edilen asimptotik açılımlar kullanılarak ortaya çıkarılabilen bu sürecin durağan karakteristikleri için alternatif tahminler tartışılmıştır. (Kokangül vd., 2008) Üstel Müdahaleli Yarı-Markov Bir Rastgele Yürüyüş Sürecinin Momentleri için Asimptotik Açılımlar adlı çalışmada ζ_1 rastgele değişkeni $\lambda > 0$ parametreli üstel dağılıma sahip olduğunda, sürecin ergodik dağılımının 1. ve 2. dereceden momentleri için bazı kesin formüller elde edilmiştir. Burada ζ_1 rastgele değişkeni, kesikli müdahalenin miktarını ifade eder. Bu sonuçlara dayanarak, $\lambda \to 0$ iken X(t) sürecinin ergodik dağılımının beklenen değer ve varyansı için 3. derece asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Ayrıca, (Khaniyev vd., 2001) “İki Yansıtan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreçleri Üzerine” adlı çalışmada rastgele yürüyüş süreci ve yenileme sürecinin olasılık karakteristikleri yardımıyla durağan olmayan dağılım fonksiyonları bariyersiz olarak ifade edilmiştir. Özellikle zaman iki sıçrama anı arasında üstel veya Erlang dağılımına sahip olduğunda, sürecin durağan olmayan dağılım fonksiyonu için açık formüller elde edilmiştir. Ayrıca, sürecin alt yansıtan bariyerden önemli bir sınır fonksiyonu olan ilk yansıtan anın beklenen değeri, varyansı ve moment üreten fonksiyonu için açık ifadeler verilmiştir. (Khaniyev vd., 2011) "(s,S) Tipli Yarı-Markov Bir Depo Modeli için Asimptotik Bir Yaklaşım" adlı çalışmada (s,S) tipli yarı-Markov bir depo modeli olarak ifade edilen bir stokastik süreç kurulmuş ve sürecin bazı zayıf varsayımlar altında ergodik olduğu gösterilmiştir. Ayrıca, $S-s\to\infty$ iken sürecin ergodik dağılımının n.dereceden momentleri $(n=1,2,3,\ldots)$ için kesin ve asimptotik ifadeler elde edilmiştir. Son olarak, elde edilen yaklaşık formüllerin kesin ifadelere ne kadar yakın olduğu gösterilmiştir.

Yarı-Markov süreçlerin ergodik dağılımının yakınsaklığı üzerine de literatürde bazı çalışmalar vardır. (Khaniyev ve Atalay, 2010) "(s,S) Tipli Bir Depo Modeli için Ergodik Dağılımın Zayıf Yakınsaklığı Üzerine" adlı çalışmada şans karışımlı bir ödüllü yenileme süreci kurulmuştur (bu süreç özellikle (s,S) tipli yarı-Markov bir depo modelini tanımlar). Sürecin ergodik dağılımı yenileme fonksiyonu ve müdahale üçgensel dağılıma sahip olduğunda $S-s\to\infty$ iken elde edilen sürecin ergodik dağılımı için 2. dereceden yaklaşımlar yardımıyla ifade edilmiştir. Ayrıca, ergodik dağılım için zayıf yakınsaklık teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımı elde edilmiştir. Son olarak, yaklaşık formüllerin doğruluğu Monte Carlo simülasyon metoduyla test edilmiştir. (Aliyev ve Khaniyev, 2010) "Yarı-Markov Bir (s,S) Depo Modelinin Ergodik Dağılımı için Asimptotik Açılımlarının Yakınsaklık Oranları" adlı çalışmada, (s,S) depo modeli adı verilen bir stokastik süreç ele alınmış, sürecin ergodik dağılımının asimptotik davranışları elde edilmiştir. (s,S) aralığında düzgün dağılım eğilimi gösteren sürecin ergodik dağılımının $\beta=S-s$ parametresinin yeterli büyük değerleri ve yakınsaklık oranları tahmin edilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Gecikmesiz Model

Herhangi bir sistem $t = 0$ anında $z = s + at$ durumunda olsun. Burada $x \geq 0$ ve $s > 0$ önceden belirlenen bir kontrol seviyesidir. Sisteme rastgele T_n anlarında arz ve talepler gelmektedir ve $T_n = \sum_{i=1}^{n} \zeta_i$,$n \geq 1$ şeklinde tanımlanmaktadır. Sistem $(X(t))$ arz ve talebin $(\{-\eta_n\}, n \geq 1)$ miktarına göre T_n anında bir durumdan diğerine aşağıdaki kurala göre geçmektedir:

$$X(T_1) \equiv X_1 = z - \eta_1,$$
$$X(T_2) \equiv X_2 = z - \eta_1 - \eta_2, \ldots,$$
$$\ldots$$
$$X(T_n) \equiv X_n = z - \eta_1 - \eta_2 - \cdots - \eta_n, ..$$

Sistemin bu değişimi, sürecin $s > 0$ seviyesini ilk kez geçme anı olan rastgele τ_1 anına kadar devam eder. Sistem $s > 0$ kontrol seviyesini geçtiği anda derhal ζ_1 değerini alır ve hareketine buradan devam eder. Burada ζ_1 rastgele değişkeni [s,S] aralığında tanımlı bir rastgele değişkendir. Bir periyot sistemin $(X(t))$ $s > 0$ seviyesini ilk kez geçtiği iki an arası olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımlamaya göre ilk periyot τ_1'de ikinci periyot τ_2'de v.b. biter. Burada,

$$X(\tau_n + 0) = \zeta_n, n = 1,2,3, \ldots$$

dir. $X(\tau_n + 0)$ biçiminde yazılmasının nedeni sürecin sağdan sürekli olmasıdır. Burada ζ_n'ler aynı dağılıma sahiptir. Bu bölümde amaçlanan yukarıdaki gibi ifade edilen $X(t)$ sürecini matematiksel olarak tanımlamak ve sürecin ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde etmektir. Ayrıca elde edilen yaklaşık formüllerin doğrulukları Monte Carlo simülasyon yöntemiyle test edilmiştir.

Müdahalenin üstel dağılıma sahip olduğu durumda çalışılmıştır (Khaniyev vd., 2008). Fakat bu çalışmada müdahale [s,S] aralığında $\frac{S+s}{2}$ merkezli üçgensel dağılıma sahiptir. Müdahalenin [s,S] aralığında üçgensel dağılıma sahip olmasının anlamı müdahalenin S ve s değerlerini çok düşük bir olasılıkla almasıdır. ζ_1'in s değerine çok yakın olması ortalama stok miktarını arttırır ki bu da stoklama masrafının artmasına neden olur. Eğer ζ_1'in değeri s'ye çok yakın olursa talebin miktarına bağlı olarak sistem küçük aralıklarla müdahaleye gerek duyabilir. Talebin sayısının artması uygulamada çok istenen bir durum değildir çünkü bu sipariş masrafının artmasına neden olmaktadır. Aşağıda ifade edilen gerçek model müdahalenin neden [s,S] aralığında üçgensel dağılıma uygun olabileceğine ait bir örnektir.

2.2. $X(t)$ Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n, \zeta_n, \eta_n\}$ $n = 1,2,...$ rastgele değişken üçlüleri aynı bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler olsunlar. Burada ξ_n'ler pozitif, η_n'ler hem pozitif hem negatif değerler alabilen rastgele değişkenlerdir. Ayrıca ζ_n'ler ise $\frac{S+s}{2}$ merkezli [s,S] aralığında üçgensel dağılıma sahip rastgele değişkenlerdir. Bu rastgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları sırasıyla,

$$\phi(t) = P\{\xi_1 \le t\}, t > 0$$
$$F(x) = P\{\eta_1 \le x\}, x > 0$$
$$\pi(z) = P\{\zeta_1 \le z\}, z \in [\mathrm{s}, \mathrm{S}]$$

şeklindedir.

$\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rastgele yürüyüş aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, , S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, T_0 = S_0 = 0, n = 1,2, ...$$

Tam değerli $\{N_n\}$ rastgele değişkenler dizisi ise;

$$N_0 = 0, N_{n+1} = \inf\{k \ge N_n + 1 : \zeta_n - S_k + S_{N_n} < s\}, n \ge 0,\ \zeta_0 = z \in [\mathrm{s}, \mathrm{S}]$$

dir. Burada $\inf\{\emptyset\} = +\infty$ dır. Çünkü infimumun özelliklerinden,

$i)\ \forall\ x \in A$ için $a = infA$

$ii)\ \forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ a_\varepsilon \in A:\ a_\varepsilon < a + \varepsilon$

$\inf\{\emptyset\} = \max\{-\infty, +\infty, R\} = +\infty$

dir.

$\tau_n$ve $v(t)$ sırasıyla;

$$\tau_n = T_{N_n}, n \geq 0 \text{ ve } v(t) = \max\{n \geq 0: T_n \leq t\}$$

şeklinde tanımlansın.

Yukarıdaki bilgiler ışığında bu bölümde incelenen $X(t)$ süreci tanım olarak,

$$X(t) = \zeta_n - S_{v(t)} + S_{N_n}, \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, n = 0,1,2, \ldots;\ \ \zeta_0 = z \in [\mathrm{s}, \mathrm{S}]$$

biçiminde ifade edilebilir.

Yukarıda matematiksel olarak inşa edilen $X(t)$ süreci literatürde "üçgensel müdahaleli yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci" olarak adlandırılır. Bu süreci ifade eden grafiklerden birisi Şekil 1' de verildiği gibidir.

Bu bölümün esas amacı $X(t)$ sürecinin durağan momentlerinin $a \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ iken asimptotik davranışlarını incelemektir. Bu amaç için öncelikle $X(t)$ sürecinin ergodikliği incelenmelidir.

$X(t)$ sürecinin ergodikliğinin incelenebilmesi için aşağıdaki gösterimlere ihtiyaç vardır:

$$a_n(x,z) = P\{z - S_k \geq s, k = \overline{1,n}\, z - S_n \leq x\}, n \geq 1;$$

$$a_0(x,z) = \varepsilon(x - z);$$

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z);\ A(x,.) = \int_s^S A(x,z)d\pi(z)$$

burada,

$t \geq 0$ olduğunda $\varepsilon(t) = 1$ ve $t < 0$ olduğunda $\varepsilon(t) = 1$

dir.

Ele alınan $X(t)$ sürecinin durağan karakteristiklerini incelemek için sürecin bazı varsayımlar altında ergodik olduğunu ispat etmek gereklidir.

Önerme 2.2.1: $\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n\}$ rastgele değişkenler dizisi başlangıçta verilen koşullara ek olarak aşağıdaki koşullarlı da sağlasın:

$i)0 < E\xi_1 < \infty$

$ii)0 < E\eta_1 < \infty$

$iii)$ η_1 aritmetik olmayan bir rastgele değişkendir.

Bu üç şartı sağlayan $X(t)$ süreci ergodiktir ve aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur.

$f(x)(f:[s,S] \to R)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f\big(X(u)\big)du = \frac{1}{A(\infty,.)} \int_s^S f(x) d_x A(x,.), \qquad (2.2.1)$$

Burada

$$A(\infty,.) \equiv \lim_{x\to\infty} A(x,.)$$

İspat 2.2.1: Literatürde $X(t)$ süreci; kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler olarak bilinen bir sınıfa aittir. Ayrıca bu sınıf için literatürde “Smith’in anahtar yenileme teoremi” olarak bilinen bir ergodik teoremde mevcuttur (Gihman-Skorohod) Bu genel teoremin varsayımları önerme 2.2.1’in koşulları altında sağlandığında $X(t)$ süreci ergodiktir ve (2.2.1) eşitliği 1 olasılığı ile doğrudur.

$$\varphi_X(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\big\{\exp\big(\mathrm{i}\alpha \mathrm{X}(\mathrm{t})\big)\big\}, \alpha \in \mathrm{R}$$

olarak tanımlansın.

Rastgele yürüyüş için temel özdeşlik ve Önerme 2.2.1 kullanılarak Önerme 2.2.2 elde edilir.

Önerme 2.2.2: ζ_1 rastgele değişkeni kesikli şans karışımlı, $\frac{S+s}{2}$ merkezli [s,S] aralığında üçgensel dağılıma sahip olsun ve Önerme 2.2.1'in koşulları sağlansın. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $\varphi_X(x)$ karakteristik fonksiyonu $(N(x), S_N(x))$ ikililerinin ve η_1 rastgele değişkeninin karakteristik fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\varphi_X(\alpha) \equiv \lim_{t\to\infty} \mathrm{E}\{\exp(\mathrm{i\alpha X(t)})\}, \alpha \in \mathrm{R}$$

$$\varphi_X(\alpha) = \lim_{t\to\infty} E\{e^{i\alpha X(t)}\} = \frac{1}{EN}\int_s^S e^{i\alpha z}\frac{\varphi_{S_{N(z-s)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}d\pi(z), \tag{2.2.2}$$

Burada,

$$EN = \int_s^S EN_{1(z-s)}d\pi z\ ;$$

$$\varphi_{S_N}(\alpha) = Eexp(i\alpha SN_1);$$

$$\varphi_\eta(\alpha) = Eexp(i\alpha\eta_1), \alpha \in R\ \{0\}$$

dir.

İspat 2.2.2: $\varphi_\eta(-\alpha) - 1 = E(\{e^{-ia\eta_1}\}) - 1$ olduğu bilinmektedir. η_1 rastgele değişkeninin karakteristik fonksiyonunun 0 civarında Taylor açılımı aşağıdaki gibidir:

$$E(e^{-ia\eta_1}) = E[1 - ia\eta_1 + \frac{(ia)^2}{2!}\eta_1^2 - \frac{(ia)^3}{3!}\eta_1^3 + o(a^3)]$$

Karakteristik fonksiyonun payda kısmı ise:

$$\begin{aligned}\varphi_\eta(-\alpha) - 1 &= -iam_1 + \frac{(-ia)^2}{2!}m_2 - \frac{(-ia)^3}{3!}m_3 + o(a^3))\\ &= -iam_1\{1 - \frac{iam_2}{2m_1} + \frac{(ia)^2m_3}{6m_1} + o(a^2)\}\\ &= -iam_1\{1 - \frac{ia}{2}m_{21} + \frac{(ia)^2}{6}m_{31} + o(a^2)\}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Karakteristik fonksiyonun pay kısmı için yukarıdaki işlemlere benzer işlemler yapıldığında;

$$\varphi_{S_{N(x)}}(-\alpha) - 1 = E\left(e^{-iaS_{N(x)}}\right) - 1$$
$$= -iaM_1(x)\{1 - \frac{ia}{2}M_{21}(x) + \frac{(ia)^2}{6}M_{31}(x) + o(a^2)\}$$

elde edilir.

Karakteristik fonksiyonun payı paydasına bölündüğünde;

$$\frac{\varphi_{S_{N(z-s)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} = \frac{M_1(x)}{m_1}\frac{[1 - \frac{ia}{2}m_{21} + \frac{(ia)^2}{6}m_{31} + o(a^2)]}{[1 - \frac{ia}{2}M_{21}(x) + \frac{(ia)^2}{6}M_{31}(x) + o(a^2)]}$$

$$y = \frac{ia}{2}M_{21}(x) + \frac{(ia)^2}{6}M_{31}(x)$$

olarak alındığında;

$\frac{1}{1-y}$ ifadesinin 0 civarında Taylor açılımı;

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + o(y^2)$$
$$= \frac{M_1(x)}{m_1}\{1 - \frac{ia}{2}m_{21} + \frac{(ia)^2}{6}m_{31} + o(a^2)\}\frac{1}{1-x}$$

$$\frac{\varphi_{S_{N(z-s)}}(-\alpha) - 1}{\varphi_\eta(-\alpha) - 1} = \frac{M_1(x)}{m_1}\frac{[1 - \frac{ia}{2}m_{21} + \frac{(ia)^2}{6}m_{31} + o(a^2)]}{[1 - \frac{ia}{2}M_{21}(x) + \frac{(ia)^2}{6}M_{31}(x) + o(a^2)]}$$

dir.

$$\frac{1}{1-y} = 1 + [\frac{ia}{2}m_{21} - \frac{(ia)^2}{6}m_{31} + (\frac{ia}{2}m_{21} + \frac{(ia)^2}{6}m_{31})^2]$$
$$= 1 + \frac{ia}{2}m_{21} - \frac{(ia)^2}{6}m_{31} + \frac{(ia)^2}{4}m_{21}^2 - \frac{(ia)^4}{36}m_{31}^2 - 2\frac{(ia)^3}{12}m_{21}m_{31}$$

Paydanın 0 civarında Taylora açılmış haliyle geri kalan terimler çarpılsın:

$$\left\{1-\frac{ia}{2}M_{21}(x)+\frac{(ia)^2}{6}M_{31}(x)\right\}\{1+\frac{ia}{2}m_{21}-\frac{(ia)^2}{6}m_{31}+\frac{(ia)^2}{4}m_{21}^2-\frac{(ia)^4}{36}m_{31}^2-2\frac{(ia)^3}{12}m_{21}m_{31}\}$$
$$=1-\frac{ia}{2}[M_{21}(x)-m_{21}]+\frac{(ia)^2}{12}[2M_{31}(x)-3M_{21}(x)m_{21}+3m_{21}^2-2m_{31}]$$
$$=\frac{M_1(x)}{m_1}[1-\frac{ia}{2}[M_{21}(x)-m_{21}]+\frac{(ia)^2}{12}[2M_{31}(x)-3M_{21}(x)m_{21}+c_1]+o(a^2)$$

elde edilir. Burada $c_1=3m_{21}^2-2m_{31}$ ve bir sabittir.

e^{iaz} ifadesinin 0 civarında Taylor açılımı;

$$e^{iaz}=1+iaz+\frac{(ia)^2}{2!}z^2+o(a^2)$$

olduğu bilinmektedir.

İntegralin içindeki ifade için;

$$e^{i\alpha z}\frac{\varphi_{S_{N(z-s)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}=$$
$$=\frac{M_1(x)}{m_1}[1+iaz+\frac{(ia)^2}{2!}z^2+o(a^2)][1-\frac{ia}{2}[M_{21}(x)-m_{21}]$$
$$+\frac{(ia)^2}{12}[2M_{31}(x)-3M_{21}(x)m_{21}+c_1]$$
$$=\frac{M_1(x)}{m_1}\{1+\frac{ia}{2}[2z-M_{21}(x)+m_{21}]+$$
$$+\frac{(ia)^2}{12}[2M_{31}(x)-3M_{21}(x)m_{21}+c_1-6zM_{21}+6zm_{21}+6z^2+o(a^2)]\}$$

yazılır.

$x=z-s$ için bulunan ifade integrallenirse;

$$\int_s^\infty e^{i\alpha z}\frac{\varphi_{S_{N(z-s)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}d\pi(z)=$$
$$=\frac{E[M_1(\zeta_1-s)]}{m_1}+\frac{ia}{2m_1}\int_0^\infty[2(x+s)M_1(x)-M_1(x)M_{21}(x)+m_{21}M_1(x)]d\pi(x+s)+$$

$$+\frac{(ia)^2}{12m_1}\int_0^\infty 2M_{31}(x)M_1(x)-3m_{21}M_{21}(x)M_1(x)+c_1M_1(x)-6(x+s)M_{21}(x)M_1(x)+$$

$$+6(x+s)M_{21}(x)M_1(x)+6(x+s)m_{21}M_1(x)+6(x+s)M_1(x)\,d\pi(x+s)$$

$$=\frac{E[M_1(\zeta_1-s)]}{m_1}+\frac{ia}{2m_1}\int_0^\infty [2(x+s)M_1(x)-M_2(x)+m_{21}M_1(x)]d\pi(x+s)+$$

$$+\frac{(ia)^2}{12m_1}\int_0^\infty [2M_3(x)-3m_{21}M_2(x)+c_1M_1(x)-6(x+s)M_2(x)+6(x+s)M_1(x)]+$$

$$+6(x+s)^2m_{21}M_1(x)+6(x+s)^2M_1(x)]d\pi(x+s)+o(a^2)$$

sonuç olarak;

$$EN=\int_0^\infty EN(z-s)d\pi(z)=\int_0^\infty EN(x)f_\zeta(x+s)dx=\int_0^\infty \frac{M_1(x)}{m_1}f_\zeta(x+s)dx$$

$$EN=\frac{1}{m_1}E[M_1(\zeta_1-s)]$$

ve

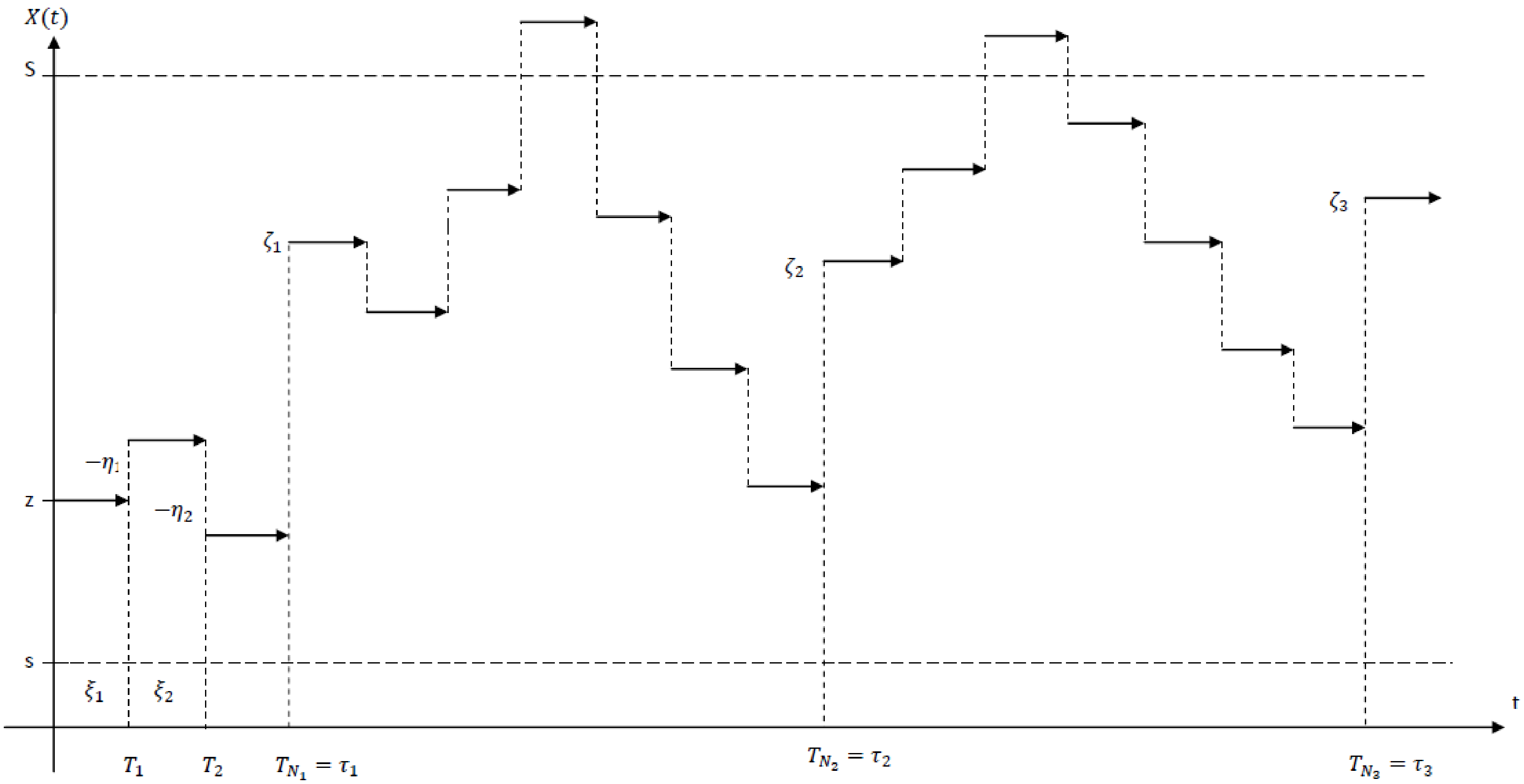
$$\varphi_x(\alpha)=\frac{1}{EN}\int_s^S e^{i\alpha z}\frac{\varphi_{S_{N(z-s)}}(-\alpha)-1}{\varphi_\eta(-\alpha)-1}d\pi(z)=$$

$$=1+\frac{ia}{2E[M_1(\zeta_1-s)]}\int_0^\infty [2(x+s)M_1(x)-M_2(x)+m_{21}M_1(x)]d\pi(x+s)+$$

$$+\frac{(ia)^2}{12E[M_1(\zeta_1-s)]}\int_0^\infty [2M_3(x)-3m_{21}M_2(x)+c_1M_1(x)-6(x+s)M_2(x)+$$

$$+6(x+s)M_1(x)+6(x+s)^2m_{21}M_1(x)+6(x+s)^2M_1(x)]d\pi(x+s)+o(a^2)$$

elde edilir.



Şekil 1. $X(t)$ sürecinin bir görünüşü

2.3. Ergodik Dağılımın İlk Dört Momenti için Kesin Formüller

Bu bölümün amacı; $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentini η_1 rastgele değişkeni ve $S_{N(z-s)}$ sınır fonksiyonunun momentleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaç için aşağıdaki gösterimler yapılsın:

$$m_k = E(\eta_1)^k;\ M_k = E\left({S^k}_{N(x)}\right), \qquad k = \overline{1,5}, \qquad x > 0$$

Gösterim kolaylığı için,

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}, M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}, k = \overline{2,5};$$

$$J_{kn}(\alpha) = \int_0^{2a} x^n M_k(x) p_a(x)dx, k = \overline{1,5};\ n = \overline{0,4};\ \alpha \equiv \frac{S-s}{2};$$

olarak yazılsın.ζ_1 rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$p_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2}\ ;\ 0 \le x < a \\ \dfrac{2a-x}{a^2};\ a \le x \le 2a \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca,

$$E(\bar{X}^k) = \lim_{t\to\infty} E\left(\overline{X(t)}^k\right), k = \overline{1,4}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$\bar{X}(t) = X(t) - s$$

dir.

Sınırlı ve ölçülebilir $M(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik doğrudur,

$$c * M(x) = c\int_0^x M(u)du, x > 0$$

burada c bir sabittir.

Aşağıdaki teoremler bu bölümün esas sonuçlarını ifade etmektedir.

Teorem 2.3.1: Önerme 2.2.2'nin koşulları ve $E|\eta_1{}^3| < \infty$ şartı sağlandığında $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci ve ikinci momenti vardır ve η_1 rastgele değişkeni ile $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$E(\bar{X}) = \frac{2J_{11}(\alpha) - J_{20}(\alpha)}{2J_{10}(\alpha)} + A_{1;} \tag{2.3.1}$$

$$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{J_{10}(\alpha)}\left\{J_{12}(\alpha) - J_{21}(\alpha) + m_{21}\left[J_{11}(\alpha) - \frac{1}{2}J_{20}(\alpha)\right] + \frac{1}{3}J_{30}(\alpha)\right\} + A_2 \tag{2.3.2}$$

burada,

$$A_1 = \frac{m_{21}}{2}\ ;\ A_2 = \frac{m_{21}{}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}$$

dir.

Teorem 2.3.2: Önerme 2.2.2'nin koşulları ve $E|\eta_1{}^5| < \infty$ şartı sağlandığında $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momenti vardır ve η_1 rastgele değişkeni ile $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$E(\bar{X}^3) = \frac{1}{J_{10}(\alpha)}\left\{J_{13}(\alpha) - \frac{3}{2}J_{22}(\alpha) + J_{31}(\alpha) - \frac{1}{4}J_{40}(\alpha)\right\} +$$
$$\left\{+3A_1\left[J_{12}(\alpha) - J_{21}(\alpha) + \frac{1}{3}J_{30}(\alpha)\right] + 3A_2\left[J_{11}(\alpha) - \frac{1}{2}J_{20}(\alpha)\right]\right\} + 3A_3$$

$$E(\bar{X}^4) = \frac{1}{J_{10}(\alpha)}[J_{14}(\alpha) - 2J_{23}(\alpha) + 2J_{32}(\alpha) - J_{41}(\alpha) + \tfrac{1}{5}J_{50}(\alpha)]+$$
$$+4A_1\left[J_{13}(\alpha) - \tfrac{3}{2}J_{22}(\alpha) + J_{31}(\alpha) - \tfrac{1}{4}J_{40}(\alpha)\right]+$$
$$\left\{+6A_2\left[J_{12}(\alpha) - J_{21}(\alpha) + \tfrac{1}{3}J_{30}(\alpha)\right] + 12A_3\left[J_{11}(\alpha) - \tfrac{1}{2}J_{20}(\alpha)\right]\right\}+3A_4$$

burada,

$$A_3 = \frac{m_{41}}{12} - \frac{m_{31}m_{21}}{3} + \frac{{m_{21}}^3}{4},$$
$$A_4 = \frac{m^4{}_{21}}{4} - \frac{m_{31}m^2{}_{21}}{2} + \frac{m_{41}m_{21}}{6} + \frac{m^2{}_{31}}{9} - \frac{m_{31}}{30}$$

dir.

Teorem 2.3.1 ve 2.3.2'nin İspatı: $S_{N(x)}$'in ilk beş momentinin varlığı ve sonluluğu Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2'nin başlangıç koşullarından elde edilir (Feller, 1971). Bu nedenle, $\alpha \to 0$ iken $\varphi_\eta(-\alpha)$ ve $\varphi_{S_{N(x)}}(-\alpha)$ karakteristik fonksiyonlarının Taylor açılımı elde edilebilir. Bu bilgiler kullanılarak 2.2.2'deki Taylor açılımları yardımıyla Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2'nin ispatı tamamlanır.

2.4. Ergodik Dağılımın İlk Dört Momentinin Üç Terimli Asimptotik Açılımları

Bu bölümün amacı $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde etmektir. Bu amaç için bir rastgele yürüyüş sürecinin basamak değişkenleri kullanılır. $S_0 = 0$ başlangıç durumunda S_n rastgele yürüyüş süreci ele alınsın ve $\upsilon_1^+ = \min\{n \geq 1 \colon S_n > 0\}$, $\chi_1^+ = S_{\upsilon_1^+}$ olarak tanımlansın.

υ_1^+ ve χ_1^+ rastgele değişkenleri sırasıyla S_n rastgele yürüyüş sürecinin birinci basamak anı ve birinci basamak yüksekliği olarak adlandırılırlar. $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ dizisi χ_1^+ rastgele değişkeni ile aynı dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenlerden oluşmaktadır.

$H(x) = \min\{n \geq 1 \colon \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \geq x\}, x \geq 0$ olarak tanımlandığında $H(x)$ bir yenileme sürecidir ve bu süreç $\chi_n^+, n \geq 1$ pozitif değerli rastgele değişkenler yardımıyla elde edilirler.

Dynkin prensibine göre,

$$N(x) = \sum_{i=1}^{H(X)} \upsilon_i^+, S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(X)} \chi_i^+,$$

yazılır.

Yardımcı Teorem 2.4.1: Teorem 2.3.1'in koşulları altında $x \to \infty$ iken $S_{N(x)}$'in ilk beş momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur:

$$1) M_1(x) = x + \frac{\mu_{21}}{2} + o(\frac{1}{x})$$

$$2) M_2(x) = x^2 + \mu_{21}x + \frac{1}{3}\mu_{31} + o(1)$$

$$3) M_3(x) = x^3 + \frac{3}{2}\mu_{21}x^2 + \mu_{31}x + o(x)$$

$$4) M_4(x) = x^4 + 2\mu_{21}x^3 + 2\mu_{31}x^2 + o(x^2)$$

$$5) M_5(x) = x^5 + \frac{5}{2}\mu_{21}x^4 + \frac{10}{3}\mu_{31}x^3 + o(x^3)$$

burada,

$$\mu_k = E({\chi^+}_1)^k, \mu_{k1} = \frac{\mu_k}{\mu_1}, k = 2,3;\ M_k(x) = E\left({S^k}_{N(x)}\right), k = \overline{1,5}$$

dir.

Sonuç 2.4.1: Yardımcı Teorem 2.4.1'in koşulları altında $x \to \infty$ iken $S_{N(x)}$'in momentlerinin integralleri için aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur.

$$1) 1 * M_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\mu_{21}x + \frac{1}{12}[3{\mu^2}_{21} - 2\mu_{31}] + o(1)$$

$$2) 1 * [x^k M_1(x)] = \frac{x^{k+2}}{k+2} + \frac{x^{k+1}}{2(k+1)}\mu_{21} + o(x^k), \qquad k \geq 1$$

$$3) 1 * [x^k M_2(x)] = \frac{x^{k+3}}{k+3} + \frac{x^{k+2}}{k+2}\mu_{21} + \frac{x^{k+1}}{3(k+1)}\mu_{31} + o(x^{k+1}), \qquad k \geq 0$$

$$4) 1 * [x^k M_3(x)] = \frac{x^{k+4}}{k+4} + \frac{3x^{k+3}}{2(k+3)}\mu_{21} + \frac{x^{k+2}}{k+2}\mu_{31} + o(x^{k+2}), \qquad k \geq 0$$

$$5) 1 * M_4(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}\mu_{21}x^4 + \frac{2}{3}\mu_{31}x^3 + o(x^3)$$

$$6) 1 * [xM_4(x)] = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}\mu_{21}x^5 + \frac{1}{2}\mu_{31}x^4 + o(x^4)$$

$$7) 1 * M_5(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}\mu_{21}x^5 + \frac{5}{6}\mu_{31}x^4 + o(x^4)$$

$$8)1 * [xM_5(x)] = \frac{1}{7}x^7 + \frac{5}{12}\mu_{21}x^6 + \frac{2}{3}\mu_{31}x^5 + o(x^5)$$

Yardımcı Teorem 2.4.2: Teorem 2.3.1'in koşulları altında $\alpha \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur.

$$J_{10}(a) = a + \frac{1}{2}\mu_{21} + o(\frac{1}{a})$$

$$J_{11}(a) = \frac{7}{6}a^2 + \frac{1}{2}\mu_{21}a + o(1)$$

$$J_{12}(a) = \frac{3}{2}a^3 + \frac{1}{2}\mu_{21}a^2 + o(a)$$

$$J_{13}(a) = \frac{31}{15}a^4 + \frac{3}{4}\mu_{21}a^3 + o(a^2)$$

$$J_{14}(a) = 3a^5 + \frac{31}{30}\mu_{21}a^4 + o(a^3)$$

$$J_{20}(a) = \frac{7}{6}a^2 + \mu_{21}a + \frac{5}{3}\mu_{31} + o(1)$$

$$J_{21}(a) = \frac{3}{2}a^3 + \frac{7}{6}\mu_{21}a^2 + o(a)$$

$$J_{22}(a) = \frac{31}{15}a^4 + \frac{3}{2}\mu_{21}a^3 + \frac{7}{18}\mu_{31}a^2 + o(a^2)$$

$$J_{23}(a) = 3a^5 + \frac{31}{15}\mu_{21}a^4 + \frac{1}{2}\mu_{31}a^3 + o(a^3)$$

$$J_{30}(a) = \frac{5}{2}a^3 + \frac{15}{4}\mu_{21}a^2 + o(a)$$

$$J_{31}(a) = \frac{31}{15}a^4 + \frac{9}{4}\mu_{21}a^3 + o(a^2)$$

$$J_{32}(a) = 3a^5 + \frac{31}{10}\mu_{21}a^4 + \frac{3}{2}\mu_{31}a^3 + o(a^3)$$

$$J_{40}(a) = \frac{31}{15}a^4 + 3\mu_{21}a^3 + \frac{7}{3}\mu_{31}a^2 + o(a^2)$$

$$J_{41}(a) = 3a^5 + \frac{62}{15}\mu_{21}a^4 + 3\mu_{31}a^3 + o(a^3)$$

$$J_{50}(a) = 3a^5 + \frac{31}{6}\mu_{21}a^4 + 5\mu_{31}a^3 + o(a^3)$$

İspat: Federyuk'un integral metotları (1984) kullanılarak Sonuç 2.4.1 ve Yardımcı Teorem 2.4.1'den Yardımcı Teorem 2.4.2 elde edilir.

Teorem 2.4.1: Teorem 2.3.1'in koşulları altında $\alpha \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur.

$$E(\bar{X}) = \frac{7}{12}a^2 + \frac{1}{2}\left(m_{21} - \frac{7}{12}\mu_{21}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{7}{8}\mu^2{}_{21} - 5\mu_{31}\right)\frac{1}{a} + o\left(\frac{1}{a}\right) \qquad (2.4.1)$$

$$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{12}(7m_{21} - 3\mu_{21})a + \frac{m^2{}_{21}}{2} - \frac{m_{31}}{3} - \frac{7}{24}m_{21}\mu_{21} + \frac{1}{8}\mu^2{}_{21} + o(1) \quad (2.4.2)$$

burada,

$$E(\bar{X}^k) = \lim\nolimits_{t\to\infty} E[X(t) - s]^k,\ k \geq 1$$

dir.

İspat: $\alpha \to \infty$ iken Yardımcı Teorem 2.4.2'ye göre;

$$\frac{1}{2J_{10}(a)} = \frac{1}{2a}\left[1 - \frac{1}{2}\mu_{21}\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\mu^2{}_{21}\frac{1}{a^2} - \frac{1}{8}\mu^3{}_{21}\frac{1}{a^3} + o\left(\frac{1}{a^3}\right)\right] \qquad (2.4.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\alpha \to \infty$ iken,

$$2J_{11}(a) - J_{20}(a) = \frac{7}{6}a^2 - \frac{5}{3}\mu_{31} + o(1) \qquad (2.4.4)$$

dir.

2.4.1 ve 2.4.2 ifadelerini (2.3.1) formülünde yerine yazılırsa 2.4.1 asimptotik açılımı elde edilir. Benzer şekilde Yardımcı Teorem 2.4.2'deki $J_{10}(a), J_{12}(a), J_{21}(a), J_{11}(a), J_{20}(a), J_{30}(a)$ asimptotik açılımları 2.3.2 kesin formülünde yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa 2.4.2 asimptotik açılımı elde edilir.

Sonuç 2.4.2: Teorem 2.4.1'in koşulları sağlandığında $\alpha \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının varyansı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V(X) = \frac{23}{144}a^2 + \frac{23\mu_{21}}{144}a + B + o(1)$$

burada,

$$B=\frac{m^2{}_{21}}{4}-\frac{m_{31}}{3}-\frac{75}{576}\mu^2{}_{21}+\frac{35}{36}\mu_{31}$$

dır.

Teorem 2.4.2: Teorem 2.3.2'nin koşulları altında $\alpha\to\infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur.

$$E(\overline{X}^3)=\frac{31}{60}a^3-\left(\frac{3}{2}A_1-\frac{31}{120}\mu_{21}\right)a^2+\left[\left(\frac{31}{240}-\frac{7}{8}A_1\right)\mu^2{}_{21}-\frac{7}{6}\mu_{31}+\frac{7}{4}A_2\right]a+o(a)$$

$$E(\overline{X}^4)=\frac{3}{5}a^4+\left(\frac{31}{30}A_1-\frac{3}{10}\mu_{21}\right)a^2+\left(\frac{3}{10}\mu^2{}_{21}-\frac{1}{2}A_1\mu_{21}+3A_2\right)a^2+o(a^2)$$

burada,

$$A_1=\frac{m_{21}}{2},\qquad A_2=\frac{m^2{}_{21}}{2}-\frac{m_{31}}{3}$$

dir.

İspat: Teorem 2.4.2'in ispatı Teorem 2.4.1'in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Uyarı 2.4.1: $X(t)$ sürecinin elde edilen ilk dört momenti kullanılarak sürecin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\gamma_3=\frac{E(\bar{X}-\mu)^3}{\sigma^3}$$

$$\gamma_4=\frac{E(\bar{X}-\mu)^4}{\sigma^4}-3$$

burada,

$$\mu=E(\bar{X}),\qquad \sigma^2=V(\bar{X})$$

dir.

Sonuç 2.4.3: Teorem 2.4.2'nin koşulları altında $a \to \infty$ iken $X(t)$'nin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklık katsayıları için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$\gamma_3 = 0.6056 + O\left(\frac{1}{a}\right) \; ve \; \gamma_4 = -0.3357 + O(\frac{1}{a})$$

2.5. Simülasyon Sonuçları

Çalışmanın esas amaçlarından olan $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar bu bölüme kadar elde edildi. Bu bölümde ise elde edilen momentlerin doğruluğu Monte Carlo simülasyon metodu ile test edilecektir. Burada, $\hat{E}(\bar{X}^k), k = \overline{1,4}$ ile simülasyon sonucu elde edilen momentleri, $\tilde{E}(\bar{X}^k), k = \overline{1,4}$ ile de asimptotik değerler gösterilmektedir. Ayrıca,

$$\Delta_k = \left|\hat{E}(\bar{X}^k) - \tilde{E}(\bar{X}^k)\right|;$$
$$\delta_k = \frac{\Delta_k}{\hat{E}(\bar{X}^k)};$$
$$A_{p_k} = 100\% - \delta_k, k = 1,2,3$$

olarak tanımlanan formüller sırasıyla mutlak hata, göreli hata ve asimptotik sonuçlar ile simülasyon sonuçlarının uyum yüzdesidir. Burada η_1 rastgele değişkeni (1,1) parametreli normal dağılıma sahiptir. Momentlerin asimptotik ifadelerinde bulunan μ_1, μ_2, μ_3 değerleri "On the Stationary Characteristics of the Extended Model of Type (s,S)" (Khaniyev, vd., 2006) çalışmasından alınmıştır. Simülasyon sonuçları her bir deneme 10^8 kez yapılarak elde edilmiştir. Buradaki momentlerin asimptotik değerleri $s = 0$ olduğunda Teorem 2.4.1 ve Teorem 2.4.2'de kalan terim göz ardı edilerek alınmıştır.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik ve simülasyon değerlerini içeren tablolar aşağıda verilmiştir.

Tablo 1. E($\bar{X}$)’nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(\bar{X})$	$\tilde{E}(\bar{X})$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$A_{P_1}(\%)$
50	29.653119	29.801254400	0.148135402	0.4995609	99.50044
40	23.818905	23.961542390	0.142637388	0.5988411	99.40116
30	17.993536	18.117577920	0.124041919	0.6893693	99.31063
20	12.167070	12.262982320	0.095912317	0.7882943	99.21171
10	6.313335	6.365862175	0.052527175	0.8320036	99.16800
9	5.711445	5.768353995	0.056908995	0.9964028	99.00360
8	5.129110	5.167302104	0.038192104	0.7446146	99.25539
7	4.532171	4.561187768	0.029016768	0.6402399	99.35976
6	3.972255	3.947479764	0.024775236	0.6237071	99.37629
5	3.382124	3.321621892	0.060502108	1.7888791	98.21112

Tablo 2. E$\left(\bar{X}^2\right)$’nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

a	$\hat{E}\left(\bar{X}^2\right)$	$\tilde{E}\left(\bar{X}^2\right)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$A_{P_2}(\%)$
50	1288.490552	1288.4505500	0.0400062	0.003105	99.9969
40	830.063400	830.6295770	0.5661771	0.068209	99.93179
30	472.465982	472.8086080	0.3426263	0.072519	99.92748
20	214.455051	214.9876400	0.5325885	0.248345	99.75165
10	57.314823	57.1666708	0.1481522	0.258489	99.74151
9	46.998902	46.8845739	0.1143281	0.243257	99.75674
8	37.753640	37.6024770	0.151163	0.400393	99.59961
7	29.649688	29.3203801	0.3293079	1.110662	98.88934
6	22.311508	22.0382833	0.2732247	1.224591	98.77541
5	16.222781	15.7561864	0.4665946	2.876169	97.12383

Tablo 3. E($\bar{X}^3$)’nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

a	$\hat{E}\left(\bar{X}^3\right)$	$\tilde{E}\left(\bar{X}^3\right)$	Δ_3	$\delta_3(\%)$	$A_{P_3}(\%)$
50	67325.56881	67499.70306	174.1342555	0.2586451	99.74135
40	34837.64027	34920.18329	82.54302433	0.2369363	99.76306
30	14932.32594	14980.4531	48.1271605	0.3223018	99.6777
20	4555.035026	4580.51249	25.477464	0.5593253	99.44067
10	625.658769	620.3614558	5.297313167	0.8466777	99.15332
9	463.308736	459.1847792	4.123956775	0.8901099	99.10989
8	332.576351	328.3059984	4.2703526	1.2840217	98.71598
7	230.766167	224.6251134	6.141053642	2.6611586	97.33884
6	152.170722	145.0421241	7.1285979	4.6846054	95.31539
5	92.626459	86.45703063	6.169428375	6.6605465	93.33945

Tablo 4. E($\bar{X}^4$)’nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

a	$\hat{E}\left(\bar{X}^4\right)$	$\tilde{E}\left(\bar{X}^4\right)$	Δ_4	$\delta_4(\%)$	$A_{P_4}(\%)$
50	3961304.609000	3962737.4000	1432.791100	0.03617	99.96383
40	1643938.562000	1644679.0100	740.445940	0.045041	99.95496
30	531999.940500	531678.4200	314.520500	0.059121	99.94088
20	109522.243000	109433.2880	88.954956	0.081221	99.91878
10	7625.999060	7641.2640	15.264936	0.20017	99.79983
9	5114.708570	5126.9421	12.233571	0.239184	99.76082
8	3279.874903	3288.2255	8.350633	0.254602	99.7454
7	2009.204611	1992.4118	16.792777	0.835792	99.16421
6	1149.358449	1121.1986	28.159761	2.450042	97.54996
5	590.531283	570.6837	19.847533	3.360962	96.63904

2.6. Gecikmeli Model

Bu bölüme kadar gecikmesiz bir yarı-Markov rastgele yürüyüş sürecininin ergodikliği ispatlandı ve sürecin ergodik dağılımının ilk dört momenti için kesin ve asimptotik denklemler elde edildi. Ayrıca sürecin ergodik dağılımının varyansı, basıklık ve çarpıklık katsayısı için de asimptotik denklemler bulundu. Burada ise gecikmeli model için yukarıda bahsedilen işlemler tekrarlanacaktır.

Herhangi bir sistem $t = 0$ başlangıç anında $z = s + x$ durumunda olsun. Burada $x \geq 0$ ve $s > 0$ önceden bilinen bir kontrol seviyesidir. Sisteme rastgele T_n anlarındaarz ve talepler gelmektedir ve $T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, , n \geq 1$ şeklinde tanımlanmaktadır. Sistem arz ve talebin miktarına göre T_n zamanında bir durumdan diğerine aşağıdaki kurala göre geçsin:

$X(T_1) \equiv X_1 = z - \eta_1,$

$X(T_2) \equiv X_2 = z - \eta_1 - \eta_2, \ldots,$

...

$X(T_n) \equiv X_n = z - \eta_1 - \eta_2 - \cdots - \eta_n, ..$

Sistemin bu değişimi sürecin $s > 0$ seviyesini geçtiği anda θ_1 rastgele anı kadar bekler ve sonra ζ_1 konumuna gelir. Burada ζ_1 rastgele değişkeni $[s, S]$ aralığında mutlak bir dağılıma sahiptir. Sistemin $s > 0$’ı geçtiği iki ardışık an arasındaki zaman bir periyod olarak tanımlanır. Bu tanıma göre ilk periyod $\gamma_1 = \tau_1 + \theta_1$ de biter, ikinci periyod $\gamma_2 = \tau_2 + \theta_2$,… şeklinde devam eder.

Burada,

$$X(\gamma_n + 0) = \zeta_n \,, n = 1,2,3, \ldots$$

dir ve ζ_n'lerin dağılımı ζ_1'in dağılımı ile aynıdır.

Bu alanda var olan çalışmalar genellikle teoriktir ve matematiksel formüllerin karmaşıklığından dolayı uygulamada somut problemlerin çözümünde yardımcı değildir. Bundan dolayı literatürdeki bu tarz problemler için kesin formüllere ek olarak bazı yaklaşık formüller önerilir. Yaklaşık formüller uygulamada genellikle daha basit ve kolaydır. Yaklaşık formüller kesin ifadelere oldukça yakın olmalıdırlar. Bu tipteki yaklaşık formülleri elde etmenin en etkili yollarından biri asimptotik metottur. Çoğu durumda elde edilen asimptotik ifadelerin terim sayıları arttırılarak kesin ifadelere oldukça yakın yaklaşık formüller elde edilebilir. Buna rağmen asimptotik ifadelerdeki terim sayıları arttırıldığında yaklaşık ifadeler kolaylıklarını ve anlamlarını önemli ölçüde kaybederler.

Amaç matematiksel olarak tanımlanan $X(t)$ sürecinin ilk dört ergodik momentini elde etmektir. Burada ζ_1 rastgele değişkeni kesikli şans karışımlı $[s, S]$ aralığında $a \equiv \frac{S-s}{2}$ merkezli üçgensel dağılıma sahiptir.

Elde edilen yaklaşık formüllerin doğruluğunu test etmek amacıyla Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılır.

2.7 $X(t)$ Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\theta_n\}, n \geq 1$ rastgele değişken üçlüleri aynı bir $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlı birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip rastgele değişkenler olsunlar. $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$, $\pi(z), z \in [s, S]$ durağan dağılıma sahip kesikli şans karışımlı ergodik bir Markov zinciridir. ξ_1, η_1 ve θ_1 rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları sırasıyla;

$$\phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\} \,, t > 0$$
$$F(x) = P\{\eta_1 \leq x\} \,, x > 0$$
$$H(u) = P\{\theta_1 \leq u\} \,, u > 0$$

dir.

$\{T_n\}$ yenileme süreci ve $\{S_n\}$ rastgele yürüyüş süreci aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, , S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \, , T_0 = S_0 = 0 \, , n = 1,2,3, \dots$$

Tam değerli $\{N_n\}$ rastgele değişkenler dizisi ise:

$$N_0 = 0; \; N_{n+1} = \inf\{k \geq N_n + 1 \colon \zeta_n - S_k, + S_{N_n} < s\}, n \geq 0$$

Burada, $\inf\{\emptyset\} = \infty$ dir.

τ_n, γ_n ve $\nu(t)$ sırasıyla

$$\tau_n = T_{N_n} \, , n \geq 0 \; \gamma_n = \tau_n + \theta_n$$

$$\nu(t) = \max\{n \geq 0 \colon T_n \leq t\}$$

şeklinde tanımlansın.

Yukarıdaki bilgiler ışığında bu bölümde incelenen $X(t)$ süreci tanım olarak

$$\gamma_n < t < \gamma_{n+1} \; ise \; X(t) = \max\{s, \zeta_n - S_{\nu(t)}, + S_{N_n}\}, n = 0,1,2, \dots ; \; \zeta_0 = z \in [s, S]$$

biçiminde ifade edilebilir.

Yukarıda matematiksel olarak inşa edilen $X(t)$ süreci literatürde üçgensel müdahaleli yarı-Markov bir rastgele yürüyüş süreci olarak adlandırılır. Bu süreci ifade eden grafiklerden birisi Şekil 2.'de verildiği gibidir. Bu bölümün esas amacı $X(t)$ sürecinin durağan momentlerinin $a \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ iken asimptotik davranışlarını incelemektir. Bu amaç için öncelikle sürecin ergodikliği incelenmelidir.

$X(t)$ sürecinin ergodikliğinin incelenebilmesi için aşağıdaki gösterimlere ihtiyaç vardır:

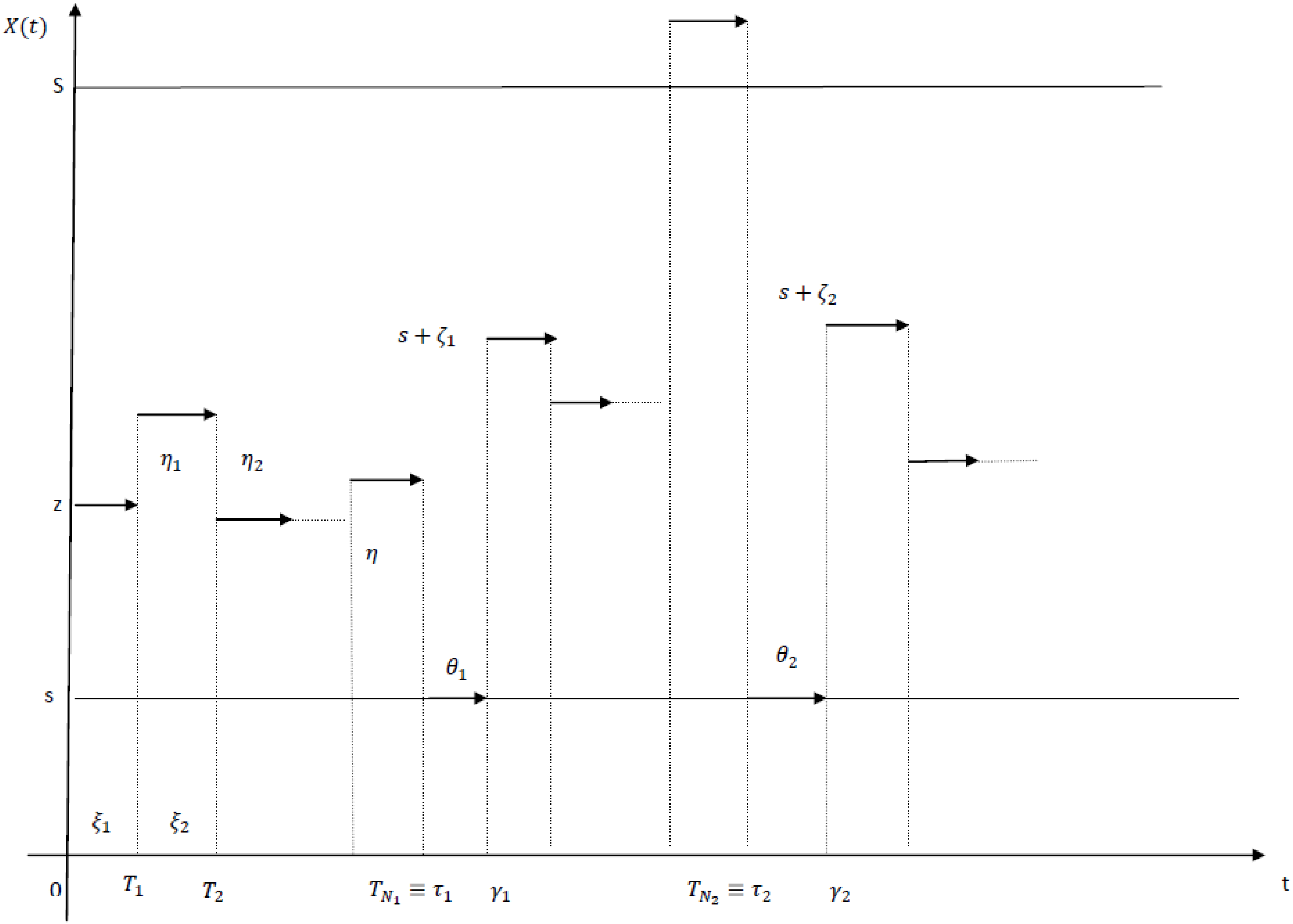
$$a_n(x,z) = P\{z - S_k > s, k = \overline{1,n};\ z - S_n \leq x\}, n \geq 1;\ a_0(x,z) = \varepsilon(x-z);$$

$$b_n(x,z) = P\{z - S_k > s, k = \overline{1,n-1};\ z - S_n \leq x\};$$

$$A(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x,z);\ A(x,.) = \int_s^S A(x,z)d\pi(z);\ B(x,z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(x,z)$$

burada,

$t \geq 0\ ise\ \varepsilon(t) = 1\ ve\ t < 0\ ise\ \varepsilon(t) = 0$ dır.



Şekil 2. $X(t)$ sürecinin bir görünüşü

2.8. Sürecin Ergodikliği

Ele alınan $X(t)$ sürecinin durağan karakteristiklerini incelemek için sürecin bazı varsayımlar altında ergodik olduğunu ispat etmek gereklidir.

Önerme 2.8.1: $\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, \{\theta_n\}, n \geq 1$ rastgele değişken dizileri başlangıçta verilen koşullara ek olarak aşağıdaki koşulları da sağlasın:

$i)$ $E(\xi_1) < \infty$

$ii)$ $0 < E(\eta_1) < \infty$

$iii)$ η_1 aritmetik olmayan bir rastgele değişken

$iv)$ $E(\theta_1) < \infty$

Bu dört şartı sağlayan $X(t)$ süreci ergodiktir ve aşağıdaki eşitlik 1 olasılığı ile doğrudur.

$f(x)$ $[f: [s, S] \to R]$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(X(u))du = \frac{E(\xi_1) \int_s^S f(x)dA(x,.) + E(\theta_1) \int_s^S f(x)dB(x,.)}{E(\xi_1)A(\infty,.) + E(\theta_1)} \tag{2.8.1}$$

Burada

$$A(\infty,.) \equiv \lim_{x\to\infty} A(x,.)$$

dir.

İspat: Literatürde $X(t)$ süreci kesikli şans karışımlı yarı-Markov süreçler olarak bilinen bir sınıfa aittir. Ayrıca bu sınıf için Smith'in "Anahtar Yenileme Teoremi" olarak bilinen bir ergodik teoremde mevcuttur (Gihman ve Skorohod, 1975). Bu genel teoremin varsayımları önerme 2.8.1'in koşulları altında sağlandığında $X(t)$ süreci ergodiktir ve (2.8.1) eşitliği 1 olasılığı ile doğrudur.

$$\varphi_X(a) \equiv \lim_{t\to\infty} E\{\exp\{iaX(t)\}\}, a \in R$$

olarak tanımlansın.

Rastgele yürüyüş için temel özdeşlik ve Önerme 2.8.1 kullanılarak Önerme 2.8.2 elde edilir.

Önerme 2.8.2: Önerme 2.8.1'in koşulları sağlandığında $\varphi_X(a)$, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının karakteristik fonksiyonu $(N(x), S_{N(x)})$ ikililerinin karakteristikleri ve η_1 rastgele değişkeni yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\varphi_X(a) \equiv \lim_{t\to\infty} E\{\exp[iaX(t)]\} =$$
$$= \frac{1}{EN+K}\int_s^S e^{iaz}\frac{\varphi_{S_{N(z-s)}}(-a)-1}{\varphi_\eta(-a)-1}d\pi(z) + \frac{K}{EN+K}\int_s^S e^{iaz}\varphi_{S_{N(z-s)}}(-a)d\pi(z) \qquad (2.8.2)$$

Burada,

$$E(N) = \int_s^S E\big(N_{1(z-s)}\big)d\pi(z);$$
$$\varphi_{S_N}(a) = E[\exp\big(iaS_{N_1}\big)];$$
$$\varphi_\eta(a) = E[\exp(ia\eta_1)], a \in R\backslash\{0\}$$

dir ve

$$K = \frac{E(\theta_1)}{E(\xi_1)}$$

gecikme sabitidir.

2.9. Ergodik Dağılımın İlk Dört Momenti İçin Kesin Formüller

Bu bölümün amacı $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momentini η_1 rastgele değişkeni ve $S_{N(z-s)}$ sınır fonksiyonelinin momentleri yardımıyla ifade etmektir. Bu amaç için öncelikle aşağıdaki gösterimler yapılsın:

$$m_k = E\big(\eta_1^k\big);\ M_k(x) = E\big(S_{N(x)}^k\big), k = \overline{1,5}\,, x > 0$$

Gösterim kolaylığı için;

$$m_{k1} = \frac{m_k}{m_1}\ , M_{k1}(x) = \frac{M_k(x)}{M_1(x)}\ , k = \overline{2,5}\ ;$$

$$E(\bar{X}^k) = \lim_{t\to\infty} E(\bar{X}(t)^k), k = \overline{1,4}\ ,$$

Burada,

$$\bar{X}(t) = X(t) - s$$

dir.

Sınırlı ve ölçülebilir $M(x)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$c * M(x) = c\int_0^x M(u)du, x > 0$$

burada c sabittir.

Teorem 2.9.1: $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rastgele değişkenleri kesikli şans karışımlı $a \equiv \frac{S-s}{2}$ merkezli $[s, S]$ aralığında üçgensel dağılıma sahip bir Markov zinciri olsun ve Önerme 2.8.2'nin koşulları ile $E|\eta_1|^3 < \infty$ sağlansın. Bu durumda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci ve ikinci momentleri vardır ve η_1 rastgele değişkeni ile $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$E(\bar{X}) = \frac{1}{J_{10}(a) + m_1K}\frac{1}{2}[m_{21}J_{10}(a) - J_{20}(a)] + \frac{Km_1}{J_{10}(a) + m_1K}[e_1 - J_{10}(a)] \qquad (2.9.1)$$

$$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{J_{10}(a) + m_1K}[\left(\frac{1}{2}m_{21}^2 - \frac{1}{3}m_{31}\right)J_{10}(a) + m_{21}J_{11}(a) + J_{12}(a)$$
$$-\left(\frac{1}{2}m_{21}\right)J_{20}(a) - J_{21}(a) + \frac{1}{3}J_{30}(a) + Km_1J_{20}(a) - 2Km_1J_{11}(a) + e_2Km_1] \qquad (2.9.2)$$

Burada,

$$J_{kn}(a) = \int_{a}^{2a} x^n M_k(x) g_a(x) dx, \qquad k = \overline{1,5}\,, n = \overline{0,4}\,;$$

dir. ζ_1 rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$g_a(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{a^2}\,, 0 \le x < a \\ \dfrac{2a - x}{a^2}\,, a \le x \le 2a \end{cases}$$

şeklindedir.

$$M_k(x) = E\left(S_{N(x)}^k\right), k = \overline{1,5}\,;$$

$$A_1 = \frac{m_{21}}{2}\,, A_2 = \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}}{3}\,;$$

$$e_k = \int_{s}^{S} x^k g_a(x) dx, k = \overline{1,4}$$

Teorem 2.9.2: Teorem 2.9.1'in koşulları ve $E|\eta_1|^5 < \infty$ şartı sağlandığında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri vardır ve η_1 rastgele değişkeni ile $S_{N(x)}$ sınır fonksiyonelinin karakteristikleri yardımıyla aşağıdaki gibi ifade edilebilirler:

$$E(\bar{X}^3) = \frac{1}{J_{10}(a) + m_1 K}\Big[\Big(\frac{3}{4}m_{21}^3 - m_{21}m_{31} + \frac{1}{4}m_{41}\Big)J_{10}(a) - \Big(\frac{3}{4}m_{21}^2 - \frac{1}{2}m_{31}J_{20}(a)\Big) +$$
$$+\frac{1}{2}m_{21}J_{30}(a) - \frac{1}{4}J_{40}(a) + \Big(\frac{3}{2}m_{21}^2 - m_{31}\Big)J_{11}(a) - \frac{3}{2}m_{21}J_{21}(a) + J_{31}(a) + \frac{3}{2}m_{21}J_{21}(a) -$$
$$-\frac{3}{2}J_{22}(a) + J_{13}(a) + 3Km_1J_{21}(a) - Km_1J_{30}(a) - 3Km_1J_{12}(a) + Km_1e_3\Big]\,;$$

$$E(\bar{X}^4) = \frac{1}{J_{10}(a) + m_1 K}\Big[B_1J_{10}(a) - B_2J_{20}(a) + B_3J_{11}(a) + \Big(m_{21}^2 - \frac{2}{3}m_{31}\Big)J_{30}(a) -$$
$$-(3m_{21}^2 - 2m_{31})J_{21}(a) + (3m_{21}^2 - 2m_{31})J_{12}(a) - \frac{1}{2}m_{21}J_{40}(a) - 2m_{21}J_{31}(a) -$$
$$-3m_{21}J_{22}(a) + 2m_{21}J_{13}(a) + Km_1J_{40}(a) - 4Km_1J_{31}(a) + 6Km_1J_{22}(a) +$$

$$+\frac{1}{5}J_{50}(a) - J_{40}(a) + -4Km_1J_{13}(a) \ + 2J_{32}(a) - 2J_{23}(a) + J_{14}(a) + Km_1e_4] \ ;$$

burada,

$$B_1 = \frac{3}{2}m_{21}^4 + \frac{2}{3}m_{31}^2 - \frac{1}{5}m_{51} - 3m_{21}^2m_{31} + m_{21}m_{41} \ ,$$
$$B_2 = \frac{3}{4}m_{21}^2 - \frac{1}{2}m_{31} \ ,$$
$$B_3 = \frac{3}{2}m_{21}^2 - m_{31}$$

dir.

Teorem 2.9.1 ve 2.9.2'nin İspatı: $S_{N(x)}$'in ilk beş momentinin varlığı ve sonluluğu Teorem 2.9.1 ve Teorem 2.9.2 'nin başlangıç koşullarından elde edilebilir ve sınırlılığını sağlar (Feller, 1971). Bu nedenle $a \to 0$ iken η_1 rastgele değişkenin ve $S_{N(x)}$'in karakteristik fonksiyonlarının Taylor açılımları elde edilebilir. Bu bilgiler kullanılarak Teorem 2.9.1 ve Teorem 2.9.2'nin ispatı tamamlanır.

2.10. Ergodik Dağılımın İlk Dört Momenti İçin Üç Terimli Asimptotik Açılımlar

Bu bölümün amacı $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde etmektir. Bu amaç için rastgele yürüyüş sürecinin basamak değişkenleri kullanılır. $S_0 = 0$ başlangıç durumunda $S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \ , n \geq 1$ rastgele yürüyüş sürecini ele alınsın ve $\nu_1^+ = \min\{n \geq 1 \colon S_n > 0\}, \chi_1^+ = S_{\nu_1^+}$ olarak tanımlansın. ν_1^+ ve χ_1^+ rastgele değişkenleri sırasıyla S_n rastgele yürüyüş sürecinin basamak anı ve basamak yüksekliği olarak adlandırılır (Feller, 1971). $\{\chi_n^+\}, n \geq 1$ dizisi χ_1^+ rastgele değişkeni ile aynı dağılıma sahip bağımsız rastgele değişkenlerden oluşmaktadır.

$$H(x) = \min\left\{n \geq 1 \colon \sum_{i=1}^{n} \chi_i^+ \geq x\right\}, x \geq 0$$

olarak tanımlansın. $H(x)$ bir yenileme sürecidir ve bu süreç $\chi_n^+ \ , n \geq 1$ pozitif değerli rastgele değişkenler yardımıyla elde edilir.

Dynkin prensibine göre;

$$N(x) = \sum_{i=1}^{H(x)} \nu_i^+ \text{ ve } S_{N(x)} = \sum_{i=1}^{H(x)} \chi_i^+$$

yazılır.

Yardımcı Teorem 2.10.1: Teorem 2.9.1 in koşulları altında $x \to \infty$ iken $S_{N(x)}$'in momentleri için aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur.

$$1) M_1(x) = x + \frac{\mu_{21}}{2} + o\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$2) M_2(x) = x^2 + \mu_{21}x + \frac{1}{3}\mu_{31} + o(1);$$

$$3) M_3(x) = x^3 + \frac{3}{2}\mu_{21}x^2 + \mu_{31}x + o(x);$$

$$4) M_4(x) = x^4 + 2\mu_{21}x^3 + 2\mu_{31}x^2 + o(x^2);$$

$$5) M_5(x) = x^5 + \frac{5}{2}\mu_{21}x^4 + \frac{10}{3}\mu_{31}x^3 + o(x^3);$$

Burada,

$$\mu_k = E(\chi_1^+)^k, \mu_{k1} = \frac{\mu_k}{\mu_1}, k = 2,3;\ M_k(x) = E\left(S_{N(x)}^k\right), k = \overline{1,5}$$

dir.

Sonuç 2.10.1: Yardımcı Teorem 2.10.1'in koşulları altında $x \to \infty$ iken $S_{N(x)}$'in momentlerinin integralleri için aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur.

$$1) 1 * M_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\mu_{21}x + \frac{1}{12}[3\mu_{21}^2 - 2\mu_{31}] + o(1);$$

$$2) 1 * \left(x^k M_1(x)\right) = \frac{x^{k+2}}{k+2} + \frac{x^{k+1}}{2(k+1)}\mu_{21} + O(x^{k-1}), k \geq 1;$$

$$3) 1 * \left(x^k M_1(x)\right) = \frac{x^{k+3}}{k+3} + \frac{x^{k+2}}{k+2}\mu_{21} + \frac{x^{k+1}}{3(k+1)}\mu_{31} + O(x^k), \qquad k \geq 0;$$

$$4)1 * \left(x^k M_3(x)\right) = \frac{x^{k+4}}{k+4} + \frac{3x^{k+3}}{2(k+3)}\mu_{21} + \frac{x^{k+2}}{(k+2)}\mu_{31} + O(x^{k+1}), \qquad k \geq 0\,;$$

$$5)1 * M_4(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}\mu_{21}x^4 + \frac{2}{3}\mu_{31}x^3 + O(x^2);$$

$$6)1 * \left(xM_4(x)\right) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}\mu_{21}x^5 + \frac{1}{2}\mu_{31}x^4 + O(x^3);$$

$$7)1 * M_5(x) = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}\mu_{21}x^5 + \frac{5}{6}\mu_{31}x^4 + O(x^3);$$

$$8)1 * \left(xM_5(x)\right) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{5}{12}\mu_{21}x^6 + \frac{2}{3}\mu_{31}x^5 + O(x^4).$$

Yardımcı Teorem 2.10.2: Teorem 2.9.1'in koşulları altında $a \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik açılımlar doğrudur.

$$J_{10}(a) = a + \frac{1}{2}\mu_{21} + o\left(\frac{1}{a}\right);$$

$$J_{11}(a) = \frac{7}{6}a^2 + \frac{1}{2}\mu_{21}a + o(a);$$

$$J_{12}(a) = \frac{3}{2}a^3 + \frac{7}{12}\mu_{21}a^2 + o(a^2);$$

$$J_{13}(a) = \frac{31}{15}a^4 + \frac{3}{4}\mu_{21}a^3 + o(a^3);$$

$$J_{14}(a) = 3a^5 + \frac{31}{30}\mu_{21}a^4 + o(a^4);$$

$$J_{20}(a) = \frac{7}{6}a^2 + \mu_{21}a + \frac{5}{3}\mu_{31} + o(1);$$

$$J_{21}(a) = \frac{3}{2}a^3 + \frac{7}{6}\mu_{21}a^2 + o(a^2);$$

$$J_{22}(a) = \frac{31}{15}a^4 + \frac{3}{2}\mu_{21}a^3 + \frac{7}{18}\mu_{31}a^2 + o(a^2);$$

$$J_{23}(a) = 3a^5 + \frac{31}{15}\mu_{21}a^4 + \frac{1}{2}\mu_{31}a^3 + o(a^3);$$

$$J_{30}(a) = \frac{3}{2}a^3 + \frac{7}{4}\mu_{21}a^2 + o(a^2);$$

$$J_{31}(a) = \frac{31}{15}a^4 + \frac{9}{4}\mu_{21}a^3 + o(a^3);$$

$$J_{32}(a) = 3a^5 + \frac{31}{10}\mu_{21}a^4 + \frac{3}{2}\mu_{31}a^3 + o(a^3);$$

$$J_{40}(a) = \frac{31}{15}a^4 + 3\mu_{21}a^3 + \frac{7}{3}\mu_{31}a^2 + o(a^2);$$

$$J_{41}(a) = 3a^5 + \frac{62}{15}\mu_{21}a^4 + 3\mu_{31}a^3 + o(a^3);$$

$$J_{50}(a) = 3a^5 + \frac{31}{6}\mu_{21}a^4 + 5\mu_{31}a^3 + o(a^3).$$

İspat: Federyuk'un integral metotları (1984) kullanılarak Sonuç 2.10.1 ve Yardımcı Teorem 2.10.1'den Yardımcı Teorem 2.10.2 elde edilir.

Teorem 2.10.1: Teorem 2.9.1'in koşulları sağlanmış olsun. Bu takdirde $a \to \infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk iki momenti için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$E(\bar{X}) = \frac{7}{12}a^2 + \left[\frac{1}{2}m_{21} - \frac{7}{24}\mu_{21} + \frac{7}{24}K\mu_{21}\right] +$$
$$+\left[\frac{7}{48}\mu_{21}^2 - \frac{5}{6}\mu_{31} + K\left(\frac{7}{48}Km_{21}^2 - \frac{5}{24}m_1\mu_{21} - \frac{1}{4}m_2 + \frac{2}{3}m_1 s\right)\right]\frac{1}{a} + o\left(\frac{1}{a}\right); \qquad (2.10.1)$$

$$E(\bar{X}^2) = \frac{1}{2}a^2 + \left[\frac{7}{12}m_{21} - \frac{1}{4}\mu_{21} - \frac{1}{4}Km_1\right]a + \frac{m_{21}^2}{2} - \frac{m_{31}^2}{3} - \frac{7}{24}m_{21}\mu_{21}$$
$$+\frac{1}{8}\mu_{21}^2 + K\left[\frac{4}{3}m_1 s - \frac{7}{24}m_{21}^2 + \frac{1}{4}m_{21}\mu_{21} + \frac{1}{8}Km_1^2\right] + o\left(\frac{1}{a}\right) \qquad (2.10.2)$$

Burada,

$$\bar{X} = X - s$$

dir.

İspat: $a \to \infty$ iken Yardımcı Teorem 2.10.2'ye göre,

$$\frac{1}{J_{10}(a) + Km_1} =$$
$$= \frac{1}{a}\left[1 - \frac{1}{2}(\mu_{21} + Km_1)\frac{1}{a} + \frac{1}{4}(\mu_{21} + Km_1)^2\frac{1}{a^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{8}(\mu_{21} + Km_1)^3\frac{1}{a^3} + o\left(\frac{1}{a^3}\right)\right] \qquad (2.10.3)$$

$$J_{10}(a)-\frac{1}{2}J_{20}(a)=\frac{7}{12}a^2-\frac{5}{6}\mu_{31}+o(1) \qquad (2.10.4)$$

elde edilir.

2.10.3 ve 2.10.4 ifadeleri 2.8.1 formülünde yerine yazılırsa 2.10.1 asimptotik açılımı elde edilir. Benzer şekilde Yardımcı Teorem 2.10.2'deki $J_{10}(a), J_{12}(a), J_{21}(a), J_{11}(a), J_{20}(a), J_{30}(a)$ asimptotik açılımları 2.8.2 kesin formülünde yerine yazılıp gerekli hesaplamalar yapılırsa 2.10.2 asimptotik açılımı elde edilir.

Sonuç 2.10.2: Teorem 2.10.1'in koşulları sağlandığında $a\to\infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının varyansı aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$V(X)=\frac{23}{144}a^2+(\frac{13}{144}\mu_{21}+\frac{13}{144}Km_1)a+\frac{1}{4}m_{21}^2-\frac{1}{3}m_{31}-\frac{75}{576}\mu_{21}^2+\frac{35}{36}\mu_{31}+$$
$$+K(\frac{7}{12}m_2+\frac{17}{96}m_1\mu_{21}-\frac{7}{24}m_{21}^2-\frac{75}{576}Km_{21}^2+\frac{5}{9}m_1 s)+o\left(\frac{1}{a}\right).$$

Teorem 2.10.2: Teorem 2.8.2'in koşulları sağlandığında $a\to\infty$ iken $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının üçüncü ve dördüncü momentleri için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$E(\bar{X}^3)=\frac{31}{60}a^3-(\frac{3}{4}m_{21}-\frac{31}{120}\mu_{21}-\frac{31}{120}Km_1)a^2+$$
$$+(\frac{31}{240}\mu_{21}^2+\frac{7}{8}m_{21}^2-\frac{7}{12}m_{31}-\frac{7}{6}\mu_{31}-\frac{3}{8}m_{21}\mu_{21})+$$
$$+K\left(\frac{31}{120}m_1\mu_{21}-\frac{3}{8}m_2+\frac{12}{5}m_1 s+\frac{31}{240}Km_1^2\right)]a+o(a);$$

$$E(\bar{X}^4)=\frac{3}{5}a^4-(\frac{31}{10}m_{21}+\frac{3}{10}\mu_{21}-\frac{59}{10}Km_1)a^3+$$
$$+[(\frac{3}{2}m_{21}^2+\frac{3}{20}\mu_{21}^2+\frac{31}{60}m_{21}\mu_{21}-3m_1+$$
$$+K(\frac{158}{40}m_1\mu_{21}+\frac{31}{60}m_2+\frac{64}{15}sm_1-\frac{65}{20}Km_1^2)]a^2+o(a).$$

İspat: Teorem 2.10.2'nin ispatı Teorem 2.10.1'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Uyarı 2.10.1: Bu kısma kadar $\bar{X}(t)$ sürecinin ilk dört ergodik momenti için üç terimli asimptotik açılımlar elde edildi. Bu momentler kullanılarak $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının çarpıklık (γ_3) ve basıklığı (γ_4) için üç terimli asimptotik açılımlar yazmak mümkündür.

$$\gamma_3 = \frac{E(\bar{X}-a)^3}{\sigma^3}\,, \qquad \gamma_4 = \frac{E(\bar{X}-a)^4}{\sigma^4} - 3\,;$$

Burada,

$$a = E(\bar{X}),\ \sigma^2 = V(\bar{X})$$

dir.

Sonuç 2.10.3: Teorem 2.10.2'nin koşulları altında $a \to \infty$ iken $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının basıklık ve çarpıklığı için aşağıdaki asimptotik açılımlar yazılabilir.

$$\gamma_3 = 0.6056 + O\left(\frac{1}{a}\right)\ ve\ \gamma_4 = -0.3357 + O(\frac{1}{a})$$

2.11. Simülasyon Sonuçları

Çalışmanın esas amaçlarından olan $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için asimptotik açılımlar bu bölüme kadar elde edildi. Bu bölümde ise elde edilen momentlerin doğruluğu Monte Carlo simülasyon metodu ile test edilecektir. Burada, $\hat{E}(\bar{X}^k)\,, k = \overline{1,4}$ ile simülasyon sonucu elde edilen momentler, $\tilde{E}(\bar{X}^k), k = \overline{1,4}$ ile de asimptotik değerler gösterilmiştir. Ayrıca,

$$\Delta_k = \left|\hat{E}(\bar{X}^k) - \tilde{E}(\bar{X}^k)\right|$$

$$\delta_k = \frac{\Delta_k}{\hat{E}(\bar{X}^k)}.100\%\,;$$

$$Ap_k = 100\% - \delta_k\,, k = 1,2,3.$$

olarak tanımlanan formüller sırasıyla mutlak hata, göreli hata ve asimptotik sonuçlar ile simülasyon sonuçlarının uyum yüzdesidir. Tablo 1-4'de (λ) parametreli Laplace dağılımına sahip η_1 rastgele değişkeni için Monte Carlo deneyleri yardımıyla hesaplanmış

$\hat{E}(\bar{X}^k), k = \overline{1,4}$ değerleri bulunmuştur. Simülasyon sonuçları her bir deneme 10^8 kez yapılarak elde edilmiştir. Buradaki momentlerin asimptotik değerleri $s = 0$ olduğunda Teorem 2.10.1 ve Teorem 2.10.2'den kalan terim göz ardı edilerek alınmıştır. Burada $\bar{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının k. momentlerinin bulunduğu tablolar η_1 rastgele değişkeni Laplace dağılımına sahip olduğu durumlar için verilmiştir.

Tablo 5. E($\bar{X}$)'nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

A	$\hat{E}(\bar{X})$	$\tilde{E}(\bar{X})$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$A_{p_1}(\%)$
50	29,653119	29,801254400	0,148135402	0,4995609	99,50044
40	23,818905	23,961542390	0,142637388	0,5988411	99,40116
30	17,993536	18,117577920	0,124041919	0,6893693	99,31063
20	12,167070	12,262982320	0,095912317	0,7882943	99,21171
10	6,313335	6,365862175	0,052527175	0,8320036	99,16800
9	5,711445	5,768353995	0,056908995	0,9964028	99,00360
8	5,129110	5,167302104	0,038192104	0,7446146	99,25539
7	4,532171	4,561187768	0,029016768	0,6402399	99,35976
6	3,972225	3,947479764	0,024775236	0,6237071	99,37629
5	3,382124	3,321621892	0,060502108	1,7888791	98,21112

Tablo 6. E($\bar{X}^2$)nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(\bar{X}^2)$	$\tilde{E}(\bar{X}^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$A_{p_2}(\%)$
50	1288,490552	1288,4505500	0,0400062	0,003105	99,9969
40	830,063400	830,6295770	0,5661771	0,068209	99,93179
30	472,465982	472,8086080	0,3426263	0,072519	99,92748
20	214,455051	214,9876400	0,5325885	0,248345	99,75165
10	57,314823	57,1666708	0,1481522	0,258489	99,74151
9	46,998902	46,8845739	0,1143281	0,243257	99,75674
8	37,753640	37,6024770	0,151163	0,400393	99,59961
7	29,649688	29,3203801	0,3293079	1,110662	98,88934
6	22,311508	22,0382833	0,2732247	1,224591	98,77541
5	16,222781	15,7561864	0,4665946	2,876169	97,12383

Tablo 7. E$(\bar{X}^3)'$nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(\bar{X}^3)$	$\tilde{E}(\bar{X}^3)$	Δ_3	$\delta_3(\%)$	$A_{p_3}(\%)$
50	67325,56881	67499,70306	174,1342555	0,2586451	99,74135
40	34837,64027	34920,18329	82,54302433	0,2369363	99,76306
30	14932,32594	14980,4531	48,1271605	0,3223018	99,6777
20	4555,035026	4580,51249	25,477464	0,5593253	99,44067
10	625,658769	620,3614558	5,297313167	0,8466777	99,15332
9	463,308736	459,1847792	4,123956775	0,8901099	99,10989
8	332,576351	328,3059984	4,2703526	1,2840217	98,71598
7	230,766167	224,6251134	6,141053642	2,6611586	97,33884
6	152,170722	145,0421241	7,1285979	4,6846054	95,31539
5	92,626459	86,45703063	6,169428375	6,6605465	93,33945

Tablo 8. E$(\bar{X}^4)'$nin simülasyon ve asimptotik değerlerinin karşılaştırılması

a	$\hat{E}(\bar{X}^4)$	$\tilde{E}(\bar{X}^4)$	Δ_4	$\delta_4(\%)$	$A_{p_4}(\%)$
50	3961304,609000	3962737,4000	1432,791100	0,03617	99,96383
40	1643938,562000	1644679,0100	740,445940	0,045041	99,95496
30	531992,940500	531678,4200	314,520500	0,059121	99,94088
20	109522,243000	109433,2880	88,954956	0,081221	99,91878
10	7625,999060	7641,2640	15,264936	0,20017	99,79983
9	5114,708570	5126,9421	12,233571	0,239184	99,76082
8	3279,874903	3288,2255	8,350633	0,254602	99,7454
7	2009,204611	1992,4118	16,792777	0,835792	99,16421
6	1149,358449	1121,1986	28,159761	2,450042	97,54996
5	590,531283	570,6837	19,847533	3,360962	96,63904

Uyarı: Yukarıdaki tablolardan görüldüğü gibi yaklaşık formüller $a \equiv \frac{S-s}{2}$ parametresinin küçük değerleri için bile yüksek doğruluk sağlarlar. Örneğin, Tablo1-4'de görüldüğü üzere $a \geq 10$ parametresinin her bir değeri için %99'dan daha iyi bir doğruluk sağlanmıştır. Bu ise uygulamanın çeşitli ihtiyaçları için elde edilen yaklaşımların güvenli bir şekilde kullanılabilirliğini gösterir.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada gecikmesiz ve gecikmeli özel bariyerli iki yarı-Markov rastgele yürüyüş süreci ele alınmış ve bu süreçler için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. İki fiziksel model ele alınarak bu modelleri ifade eden stokastik süreçler matematiksel olarak inşa edilmiştir.

2. Matematiksel olarak kurulan süreçlerin ergodik olduklarını ifade eden teoremler ispat edilmiştir.

3. Süreçlerin ergodik dağılımlarının ilk dört momenti için kesin formüller elde edilmiştir.

4. Ergodik momentler için üç terimli asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

5. Süreçlerin varyansları, çarpıklık ve basıklık katsayıları için asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

4. KAYNAKLAR

Aliyev R.T., Khaniyev T.A. ve Kesemen T., 2010. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance, Communications in Statistics-Theory and Methods, 39, 1, 130-143. (SCI-C).

Aliyev, R.T., Kesemen, T. ve Ünver, İ., 2010. Pareto Müdahaleli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci için Asimptotik Sonuçlar, 7. İstatistik Günleri Sempozyumu, Haziran, Ankara, Bildiriler Kitabı: 133-134.

Aliyev, R.T., Khaniyev T.A. ve Kesemen T., 2010. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with Gamma distributed interference of chance, Communications in Statistics-Theory and Methods, 39, 1, 130-143. (SCI-C).

Alsmeyer, G., 1991. Some Relations Between Harmonic Renewal Measure and Certain First Passage Times, Statistics&Probability Letters, 12, 1, 19-27.

Anisimov, V.V. ve Artalejo, J.R., 2001. Analysis of Markov Multiserver Retrial Queunes with Negative Arrivals, Queuing Systems: Theory and Applications, 39, 2-3, 157-182.

Aras, G. ve Woodroofe, M., 1993. Asymptotic Expansions for the Moments of a Randomly Stopped Average, Annals of Statistics, 21, 503-519.

Borovkov, A.A., 1976. Stochastic Process in Queuening Theory, Spinger, Newyork.

Brown, M. ve Ross, S.M., 1972. Asymptotic Properties of Process, SIAM J. Appl. Math., 22, 1, 93-105.

Brown, M. ve Solomon, H.A., 1975. Second-Order Approximation for the Variance of a Renewal Reward Process, Stochastic Process and Their Applications, 3, 301-314.

Dikmenoğlu, S., 1997. İki Yansıtan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Ezhov, I.I. ve Korolyuk, V.S., 1967. Semi-Markovian Process and Their Applications, Cybernetica, 5, 58-65.

Federyuk, M.V., 1984. Asymptotic for Integrals and Series, Nauka, Moscow.

Feller, W., 1971. Introduction to Probability Theory and Its Appl. II, J. Willey, N.Y.

Gihman, I.I. ve Skorohod, A.V., 1975. Theory of Stochastic Process II, Springer, Berlin.

Harlamov, B.P., 1977. On the Convergence of Semi-Markov Walks to a Continuous Semi-Markov Process, Theor, Probab. Appl., 21, 482-498.

Kemperman, J.H.B., 1963. A Wiener-Hopf type method for a general random walk with a two-sided boundary, Ann. Math. Statist., 34, 1168-1193.

Kesemen, T., 2001. Genişletilmiş (s,S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kesemen, T., 2006. Rastgele Hacimli Genişletilmiş (s,S) Tipli Modellerin Analitik ve Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kesemen, T., Khaniyev, T. ve Aliyev, R., 2007. Gecikmeli Yarı-Markov Rasgele Yürüyüş Süreçleri için Asimptotik Sonuçlar, 5. Ulusal İstatistik Kongresi, Mayıs, Antalya, Bildiriler Kitabı: 76-77.

Khaniyev, T.A., Unver, I. ve Maden, S., 2001. On the semi-Markovian random walk with two reflecting barriers, Stochastic Analysis and Applications, 19, 5, 799-819.

Khaniyev, T.A., 2003. Some asymptotic results for the semi-Markovian random walk with a special barrier, Turkish Journal of Mathematics, 27, 2, 1-22.

Khaniyev, T.A. ve Kucuk, Z., 2004. Asymptotic expansions for the moments of the Gaussian random walk with two barriers, Statistics & Probab. Letters, 69, 1, 91-103.

Khaniyev, T. Aliyev, R. ve Kesemen, T., 2005. Kesikli şans karışımlı yarı-Markov rasgele yürüyüş sürecinin beklenen değeri ve varyansı için üç terimli yaklaşımlar, 4. Ulusal İstatistik Kongresi, Mayıs, Antalya, Bildiriler Kitabı: 284-285.

Khaniyev, T., 2005. (s,S) tipli Gauss modelinde ergodik dağılımın momentleri için asimptotik sonuçlar, 4. Ulusal İstatistik Kongresi, Mayıs, Antalya, Bildiriler Kitabı: 286-287.

Khaniyev, T. ve Küçük, Z., 2005. İki Bariyerli Gauss Rasgele Yürüyüş Süreci İçin Bazı Asimptotik Sonuçlar, 4. Ulusal İstatistik Kongresi, Mayıs, Antalya, 282-283.

Khaniyev, T.A. ve Mammadova, Z., 2006. On the stationary characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 10, 861-874.

Khaniyev, T.A., Aliyev, R.T., Kesemen, T. ve Kesemen, O., 2006. Some asymptotic results for the stationary characteristics of semi-Markovian random walk with barrier, Automatic Control and Computer Sciences, 40, 1, 31-43 (SCI-C).

Khaniyev, T., Kokangul, A., Aliyev, R. ve Mammadova, Z., 2007. Üçgensel Müdahileli Ödüllü Yenileme Sürecinin Momentleri için Asimptotik Açılımlar, 5. Ulusal İstatistik Kongres*i*, Mayıs, Antalya, Bildiriler Kitabı: 72-73.

Khaniyev, T.A., Kesemen, T., Aliyev, R.T. ve Kokangul, A., 2008. Asymptotic expansions for the moments of a semi-Markovian random walk with exponential distributed interference of chance, Statistics & Probability Letters, 78, 6, 785-793.

Khaniyev, T., Kesemen, O. ve Kesemen, T., 2008. Approximations for the stationary characteristics of the extended model of type (s, S) with delay , Proceedings of 6th International Symposium on Intelligent and Manufacturing Systems, Ekim, Sakarya, Bildiriler Kitabı: 356-366.

Khaniyev, T.A. ve Atalay, K.D., 2010. On the weak convergence of the ergodic distribution for an inventory model of type (s,S), Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 39, 4, 599-611 (SCI-C).

Khaniyev, T.A., Kucuk, Z. ve Aliyev, R., 2010. Three-Term Asymptotic Expansions for the Moments of the Random Walk with Triangular Distributed Interference of Chance, Applied Mathematical Modelling, 34, 11, 3599-3607 (SCI-B).

Khaniyev, T.A., Kesemen, O. ve Kesemen, T., 2011. Approximations for the stationary moments of the extended model of type (s,S) with delay, Mathematical and Computational Modelling, Manuscript MCM5520 (SCI-C).

Khaniyev, T.A., Kokangul, A. ve Aliyev, R.T., 2011. An asymptotic approach for a semi-Markovian inventory model of type (s, S), Applied Stochastic Models in Business and Industry, Manuscript ASMB-07-151 (SCI-B).

Khaniyev, T., Mammadova, Z. ve Agakishiyev, I., 2011. On the weak convergence of the ergodic distribution of a semi-Markovian random walk with a normal distributed interference of chance, Stochastic Models, Manuscript SM-2037 (SCI-C).

Küçük, Z., 2003. İki Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreçlerinin Asimptotik Yöntemlerle İncelenmesi Üzerine, Doktora Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Kovalenko, I.N., Kuznetchov, N. ve Shurenkov, V.M., 1983. Stochastic Process, Naukova Dumka, Kiev.

Lotov, V.I., 1996. On some boundary crossing problems for Gaussian random walks, The Annals of Probability, 24, 4, 2154-2171.

Lukac, E., 1970. Characteristics Function, Griffin, London.

Maden, S., 1997. Yansıtan ve Tutan Bariyerli Yarı-Markov Rastgele Yürüyüş Süreci Üzerine, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Nasirova, T.I., 1984. Process of Semi-Markovian Random Walk, ELM, Baku.

Nasirova, T.I., Yapar, C., ve Khaniyev, T.A., 1998. On the Probability Characteristics of the Stock Level in the Model of Type (s,S), Cybernetics and Systems Analysis, 5, 69-76.

Nasirova, T.H., Yapar, C. ve Küçük, Z., 2000. Investigation of the Semi-Markovian Random Walk Positive Drifts and Two Delaying Barriers, Journal of Math&Comp. Sci., 13,1, 43-52.

Rogozin, B.A., 1964. On the distribution of the first jump, Theory Probability and Its Applications, 9, 3, 498-545.

Ross, S.M., 1993. Introduction to Probability Models, Academic Press, New York.

Shurenkov, V. M., 1981. Ergodic Theorems and Related Questions of the Theory of Random Process , Naukova Dumka, Kiev.

Smith, W.L., 1965-1966. Some Peculiar Semi-Markov Process, Proc.5-Th Berkelly Symp. Math. Statist. And Probab., 2, 2, 255-263.

Solomon, F., 1975. Random Walks in a Random Environment, Institute of Mathematical Statistics, 3, 1, 1-31.

Spitzer, F., 1964. Principles of Random Walk, Princeton, N.J.D. Van Nostrand.

Ünver, İ., 1989. On Distributions of the Semi-Markovian Random Walk with Reflecting and Delaying Barriers, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 34, 2, 314-329.

Weesakul, B., 1961. The Random Walk Between a Reflecting and an Absorbing Barrier, Ann. Math. Statist., 23, 765-774.

ÖZGEÇMİŞ

Burcu HASANÇEBİ, 11.05.1987 tarihinde Samsun ilinde doğdu. İlköğrenimini Gülsüm-Sami Kefeli İlköğretim okulunda, Lise öğrenimini Milli Piyango Anadolu Lisesinde tamamladı. 2005-2006 eğitim öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri bölümünü kazandı. Haziran 2010'da bu bölümden mezun oldu.

Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim dalı yüksek lisans programına dahil oldu. Halen bu anabilim dalında öğrenimine devam etmektedir.