n-KİŞİ OYUNLARDA DENGE NOKTALARI

EQUILIBRIUM POINTS IN n-PERSON GAMES

ASLI KESİNBAŞOĞLU

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

Matematik Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI** 'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Naci CANPOLAT

Üye (Danışman) : Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ

Üye : Doç. Dr. Haşmet GÜRÇAY

ONAY

Bu tez .../.../2009 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

..../..../2009

Prof. Dr. Erdem YAZGAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

İçindekiler

n-KİŞİ OYUNLARDA DENGE NOKTALARI

Aslı KESİNBAŞOĞLU

ÖZ

Oyun teorisi, rasyonel insan davranışları üzerine sistemli bir teori kurma girişimidir. Oyun teorisinin hedefi, etkileşimli durumlarda rasyonel düşünceyi ve karar almayı modelleyerek çözüme ulaşmaktır. Bu çalışmada, oyun teorisindeki temel teoremlerden birisi olarak kabul edilen, n-kişi işbirliksiz oyunlarda dengenin varlığını kanıtlayan Nash teoremi incelenmiştir. Birinci bölümde, oyun teorisi ve tarihsel gelişimi; Nash dengesinin oyun teorisindeki önemi ve uygulama alanları, incelenen makale ve bu makalenin incelenmesi için gerekli alt yapıdan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılacak oyun teorik ve matematiksel temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Brouwer ve Kakutani sabit nokta teoremleri ve n-kişi oyunlarda dengenin varlığı incelenmiştir. Bu bölümde matematiksel ve oyun teorik bilgiler birlikte kullanılmış, sabit nokta teoremlerinin oyun teorisine uygulanması ile dengenin varlığı incelenmiştir. Dördüncü bölümde, dengenin bulunmasındaki farklılık bakımından iki ayrı örnek sunul muştur: iç ve dış politikada karşılaşılan ve ünlü bir problem haline gelen "Mahkumların İkilemi" ve günlük hayatta karşılaşabileceğimiz "Yazı mı Tura mı?" tanıtılmış ve çözümlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Nash Dengesi, Oyun Teorisi, Sabit Nokta Teoremleri, Sperner'ın Önteoremi, Afin ve Konveks Kümeler, Mahkumların İkilemi

Danışman: Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

n-KİŞİ OYUNLARDA DENGE NOKTALARI

Aslı KESİNBAŞOĞLU

ABSTRACT

Game theory is an attempt which is modelling rational human behaviour. The aim of game theory is, to find solutions in an interaction situation by modelling rational thinking and decision. In this thesis, equilibrium points in n- person games -Nash equilibrium-, which is accepted as a fundamental theorem of game theory, is studied. In first section, game theory and Nash equilibrium is defined and not only the historical development of game theory and Nash equilibrium but also some aplications of them to other fields are mentioned. In the second, mathematical and game theoric general informations are given for this work. In the third, the problem which is taken into account is analysed. This chapter consist of two sub-chapter : Brouwer and Kakutani fixed point theorems and existance of Nash equiliria. In this chapter mathematical and game theoric informations are used together and by aplication of Kakutani fixed point theorem to game theory, the existance of equilibria is analysed. In the forth, there are two example in which equilibrium point are investigated in different ways: one of them is "Prisoners' Dilemma" which is bacame an famous problem in social sciences and the other is "Matching Pennies" which is a coordination problem.

Keywords: Nash Equilibrium, Game Theory, Afine and Conveks Sets, Fixed Point Theorems, Simpleks, Prisoners' Dilemma

Advisor: Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ, Hacettepe Üniversity, Faculty of Science, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Yeniliklere her zaman açık olan ve daha fazlasını başabilmemiz için bütün öğrencileri-ni cesaretlendiren; bu konuda çalışabilmeme imkan sağlayan ve çalışmalarım sırasında desteğini benden esirgemeyen tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ'a derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Sadece oyun teorisi değil, aynı zamanda hayata karşı oyun teorik bakışından da çok şey öğrendiğim, çalışmalarımda bana her zaman yol gösteren ve destekleyen Sayın Doç. Dr. Naci CANPOLAT'a derin saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Beni istediğim herşeyi yapabileceğime inandıkları, hedeflerim için beni destekledikleri ve her koşulda yanımda oldukları, sevgilerini hissettirdikleri için aileme teşekkür ederim.

Dönem arkadaşlarım Arş. Gör. Eylem ÖZTÜRK, Arş. Gör. F. Gamze DÜZGÜN ve Arş. Gör. Kerime KORKMAZ KALLI'ya her türlü destekleri için teşekkür ederim.

Varlıklarıyla beni her zaman mutlu eden ve her zaman yanımda olan arkadaşlarım Yelda ve Didem'e teşekkür ederim.

1 GİRİŞ

Türk Dil Kurumu sözlüğü "oyun" kelimesinin ilk anlamını "vakit geçirmeye yarayan, belirli kuralları olan eğlence" olarak tanımlarlar. Bu tanıma göre, örneğin, futbol, basketbol, tenis, poker, briç, tavla ve stranç birer oyundur. Aralarındaki bir çok farklılığa rağmen tüm bu oyunların paylaştığı en temel özellik, oyuncuların oyunun sonucunu tek başlarına belirleyememeleridir. Oyunların bu ortak özelliği, oyuncular arasındaki etkileşimin stratejik bir nitelik taşıdığını gösterir. Ancak, bu özellik sadece eğlence amaçlı oyunlarda değil, bireylerin farklı tercih ve amaçlar taşıdığı tüm toplumsal etkileşim biçimlerinde de vardır. Örneğin; işçi-işveren ilişkileri, uluslararası diplomasi, savaş vb. gibi etkileşim içinde olan birimlerin sonucu tek başlarına belirleyemedikleri ve stratejinin önem taşıdığı tüm toplumsal etkileşim biçimleri de bir "oyun" gibi değerlendirilebilir. "Oyun teorisi", farklı tercih ve amaçlara sahip olan ve bu nedenle de çıkarları tam olarak örtüşmeyen (çoğu zaman çakışan) bireyler arasındaki stratejik etkileşimi ve karar sürecini inceler. Bu nedenle bazı bilim adamları "oyun teorisi" yerine "etkileşimli karar teorisi" denmesinin daha doğru olduğunu belirtmektedirler (Aumann, 1987, s:2).

Amaçları ve tercihleri farklılık içeren ve bu nedenle de çıkarları çelişen bireyler arasındaki etkileşimin formel bir biçimde incelenmesi yeni bazı matematiksel yöntemlerin ve kavramların geliştirilmesini gerekli kılmıştır. Bu matematiksel yöntemler, oyuncuların hangi stratejileri belirleyecekleri ve diğer oyuncuların benimseyecekleri stratejiler hakkında hangi beklentileri rasyonel bir biçimde oluşturacakları konusunda öngörü oluşturulmasına imkan sağlar. Bu nedenle Myerson oyun teorisinin önemini, toplumsal bilimlere sağladığı matematiksel temele dayandırır (Myerson, 1991).

Oyun teorisi, oyunlar üzerinde yoğunlaşarak, rasyonel insan davranışları üzerine sistemli bir teori kurma girişimidir. Oyun teorisi, bu disiplinin kuralları içersinde oyuncuların hangi stratejileri benimseyeceklerini ve oyunun sonucu hakkında ön görüde bulunurlar. Oyun teorisinde bütün oyuncular rasyonel ve akılcı kabul edilir. Akılcı ve rasyonel bir oyuncu kendisini diğer oyuncuların yerine koyar, diğer oyuncuların olası kararlarını göz önünde bulundurur ve kendisine en yüksek ödentiyi sağlayan stratejisini belirler. Oyun teorisi gerçek ve soyut dünya arasında çok özel bir yere sahiptir. Gerçek dünyadan gelen bir problemi, soyut dünyanın imkanları ile çözümler ve gerçek dünyaya çözümü taşır.

Oyun teorisindeki ilk teorem Zermello (1913) tarafından kanıtlanmıştır; Zermello bu teoremiyle satrançta her zaman kazanan bir strateji olduğunu; satrançtaki iki oyuncudan ya birisinin kazanabileceğini ya da iki oyuncunun berabere kalabileceklerini göstermiştir (Aumann, 1987, s:4). Oyun teorisindeki ikinci büyük adım von Neumann tarafından atılmıştır. Von Neumann, ekonomi biliminde oyun teorisinden faydalanılabileceğini, "Zur Theorie der Gesellsschalftspiele (1928)", başlıklı makalesinde ileri sürmüştür ve "Minimaks Teoremi" ile her sonlu iki kişi-sabit toplamlı oyunun en az bir dengesi olduğunu kanıtlamıştır. Bu tarz problemlerin çözümlenebilmesi için en büyük girişim ise John von Neuman ve ekonomist Oscar Morgenstern'in ortak çalışmaları, "Oyunlar Teorisi ve İktisadi Davranış" (*The Theory of Games and Economic Behavior*) kitabıdır. Von Neuman ve Oscar Morgenstern iktisadi teorinin problemleri çözümlemekte yetersiz kaldığını, kullanılan matematiğin çok ağır, karışık ve problemi net olarak ortaya koyamadığını; bu sebeple çözüme ulaşılamadığını vurgulamışlardır. Bu nedenle, "Oyunlar Kuramı ve İktisadi Davranış" matematiği bilimsel mantığın dili olarak kullanan, sosyal teoride yenilik yapmaya yönelik bir girişimdir.Yazarlar kitapta bulunan strateji oyunları matematiğinin iktisadi davranış problemleri ile benzer olduğunu iddia etmişlerdir. Von Neumann ve Morgenstern sadece teorilerden ve tanımlamalardan bahsetmemiştir. Aynı zamanda bu teoremlerin ekonomik problemlerle nasıl uygulacağını göstermişlerdir. Von Neumann ve Morgenstern'in yönteminde ekonomik bir problem, oyun gibi formüle ediliyor, çözümleniyor ve elde edilen sonuç ekonomik olarak yorumlanıyor (Kreps, 1987).

"Oyunlar Kuramı ve İktisadi Davranış" günümüzdeki oyunlar kuramının temeli kabul edilen klasik bir çalışmadır. Kitapta özellikle iki-kişi sıfır toplamlı ve n-kişi işbirlikli oyunların analizi konu alınmıştır. Minimaks teoremi sadece sabit toplamlı, yani oyuncuların çıkarlarının taban tabana zıt olduğu durumlarda çözüm sağlar. Ancak, çoğu toplumsal etkileşimde bireyler arasındaki çıkar çelişkisi mutlak değildir. Oyun teorisindeki ikinci büyük adım "Nash Dengesi" kavramı ile Nash tarafından atılmıştır (Nash, 1950).

Amerikalı matematikçi John Forbes Nash oyun teorisi, cebirsel geometri, diferansiyel geometri, parçalı dife-ransiyel denklemler alanlarında çalışmıştır. Ünlü geometrici Mikhail Gromov'a göre Nash, "Yüzyılın son yarısındaki en önemli matematikçi"dir.
Nash sezgilerinde mantığını ön plana çıkartmıştır. Hayat hakkındaki kararları -ilk asansöre

mi binmeli yoksa ikincisini mi beklemeli, parasını hangi bankaya yatırmalı, hangi işi kabul etmeli, evlenmeli mi- tüm duygulardan, adet ve geleneklerden arındırılmış algoritma avantaj ve dezavantaj hesapları ya da matematiksel kurallarla çözmeye çalışmıştır. (Sylvia, 2002)

Nash, "Oyunlar Kuramı ve İktisadi Davranış" kitabını incelemiş ve uygulamada daha yararlı olan n-kişi işbirliksiz oyunlar için yeni bir teori geliştirmiştir. İşbirliksiz oyunlarda her bir oyuncu, hiç bir dış zorlama altında kalmadan, diğer oyuncularla iletişim kurmaksızın tek başına karar alabilmektedir. Nash, öncelikle iki-kişi sabit toplamlı oyunların çözümünü genelleştirerek teorisinin temelini oluşturan n-kişi oyunlarda denge noktasını tanımlamış ve sonlu oyuncu ve sonlu strateji kümesine sahip işbirliksiz oyunların en az bir denge noktasına sahip olduğunu kanıtlamıştır (Nash, 1950). Ancak dengenin varlığı salt stratejiler üzerindeki olasılık dağılımları olarak tanımlanan karma stratejiler de dahil edildiğinde garantilenebilir. n-kişi ve sonlu strateji kümesine sahip bir oyunun Nash dengesinin her zaman olduğuna dair kanıt, Kakutani'nin sabit nokta teoreminin bir uygulamasıdır.

Nash dengesi, oyun teorisinde merkezi bir rol oynar. Dengede, hiç bir oyuncu, diğer oyuncuların stratejileri sabit tutulduğunda kendi stratejisini değiştirerek daha yüksek bir refah seviyesi elde edememektedir. Nash dengesi kavramının hangi soruya yanıt oluşturduğu oyun teorisinde süre gelen tartışma konusudur. Çoğu yazarın bu soruya verdikleri yanıt şu biçimde özetlenebilir: Belirli bir oyunda yöntemi açıkça belirlenmemiş bir biçimde oyuncuların oyunu nasıl oynayacaklarına ilişkin bir anlaşmaya ulaştıklarını var sayalım. Bu anlaşma, her bir oyuncunun stratejisini seçtiği ve diğer oyuncularla paylaştığı bir durumdur. Bununla birlikte oyuncular, oyunun formal tanımının bir parçası olarak verilen kurallardan başka zorlama mekenizmalarına başvuramazlar. Eğer oyunculardan biri diğerlerinin bu anlaşmaya uyacaklarını düşünerek, anlaşmada kendisine düşen stratejiden farklı bir strateji seçerse bu anlaşma kendini-zorlayan (ya da stratejik olarak istikrarlı) değerlendirilemez. Yani, bu anlamda kendini zorlayan olması için anlaşmanın bir Nash dengesi olması gerekmektedir. Bu her Nash dengesinin kendini zorlayan bir anlaşma oluşturduğu anlamına gelmez. Örneğin birden fazla oyuncunun anlaşmayı çiğnedikleri düşünülebilir. Ayrıca bir oyunda, anlaşmaya nasıl ulaşıldığı ya da anlaşma olmazsa ne olacağı da bilinemez. Zaten anlaşma olmadığı durumlarada, Nash dengesi kavramının hiç bir yararı yoktur. Oyunun nasıl oynanacağına dair bir anlaşma oyun öncesinde oyuncular arasında açık pazarlıktır. Eğer bu olursa herhangi bir oyuncunun özel bilgiye ulaşmasından önce pazarlığın yapılmış olması önem kazanır. Oyuncuların bir anlaşmaya ulaşabileceklerini ya da hangi anlaşmaya ulaşacaklarını garanti edemeyiz. Ancak eğer anlaşma biraz önce belirtildiği gibi kendini zorluyorsa o bir denge olmalıdır. Diğer bir ifadeyle oyun öncesi pazarlıklarla ulaşılan olası tüm kendini zorlayan anlaşmalar kümesi Nash dengeleri kümesi içinde barındırılır. (Kreps ,1987)

"Nash dengesi" oyun teorisyenlerinin ihtiyaç duyduğu temel çözümdür. Nash dengesi kavramı şu şekilde özetlenebilir. Bir oyunda oyuncuların davranışlarını ön görmeye çalışan teorisyenler ya da oyuncuların nasıl davranmaları gerektiğini belirlemeye çalışan toplumsal planlamacılar olarak davrandığımızı var sayalım. Oyuncular tarafından hangi stratejilerin (muhtemelen raslantısallaştırılmış) kullanılması gerektiğini belirleyerek yeni bir oyun tanımlayalım. Eğer oyuncularımız için bir denge tanımlamadıysak, bazı oyuncular bizim onlara vermiş olduğumuz stratejileri değiştirerek kazanç sağlayabilirler. Böylece denge dışı strateji tanımlamalarına, bütün oyuncular ilk başta inansa bile gerçeklik kazanamaz. Rasyonel bazı oyuncular zaman içersinde Nash dengesine uygun davranışları keşfederler, bu da yeni bir düzen anlamına gelmektedir. Bu görüş, oyuncuların stratejilerini birbirlerinden bağımsız olarak seçtiklerini, dolayısıyla bir oyuncunun strateji değiştirmesinin diğer oyuncuların stratejilerini değiştirmelerine yol açmayacağını varsayar. Oyuncuların stratejileini birbirlerinden bağımsız olarak seçtikleri varsayımı teoremin genelliğini zedelemez. Oyuncular arasında iletişim olsa bile, bu durumda her oyuncunun strateji kümesi bu iletişim turları sırasında nelerin söyleneceğine ilişkin tüm planları içerecek bir biçimde ve diğer oyuncuların söylediklerinin bir fonksiyonu olarak hangi hamlelerin yapılacağını içerecek bir biçimde yeniden tanımlanabilir. Dolayısıyla oyuncuların stratejileini seçmeden önce birbirleriyle iletişim kurma fırsatına sahip olmamaları Nash dengesi kavramının genelliğini zedelemez. Anlaşma olsun ya da olmasın oyuncuların amacı kendilerine en yüksek faydayı sağlamak olduğu bilindiğine göre, oyuncuların seçimi, eğer varsa, daima Nash dengesinden yana olacaktır. Burada rasyonel oyuncuların bir oyunda denge stratejilerini kullanmaları gerektiği anlatılmaktadır.

Başlangıçta ekonomik davranışları incelemek amacına yönelen oyun teorisi bir çok farklı alanda da kullanılmaktadır. Özellikle evrimsel biyoloji, iç ve dış politika, taktik ve stratejik askeri sorunlar, bilgisayar bilimleri, yapay zeka gibi alanlarda oyun teorisi yaygın bir uygulama alanı bulmuştur. Oyun teorisinin, muhasebe, istatistik, matematiğin temelleri, sosyal psikoloji, epistemoloji ve etik gibi alanlarla ilişkisinin de son yıllarda giderek arttığı gözlemlenmektedir.

Bu yüksek lisans tezinde John F. Nash,Jr'ın Princeton Üniversitesi'nde doktora öğrencisiyken yayınladığı "n-Kişi Oyunlarda Denge Noktaları" ,1950, isimli makalesi üzerinde çalışılmıştır. Nash dengesinin varlığının göterilmesi Kakutani sabit nokta teoreminin oyunlar kuramına bir uygulaması olduğu için bu çalışmada Kakutani sabit nokta teoremi de detaylı olarak incelenmiştir.

2 ÖNBİLGİLER VE TEMEL KAVRAMLAR

2.1 OYUN TEORİSİ ÖN BİLGİ VE TEMEL KAVRAMLARI

Oyun teorisini özellikle sosyal bilimlerde stratejik karşılaşmaları modellemeye yarayan matematiksel bir araç olarak da tanımlayabiliriz. Bu bölüm, ilerdeki bölümlerde kullanılmak üzere oyun teorisinin temel kavram, tanım ve notasyonları içermektedir.

Bir oyunun tanımı üç temel öğeye dayanır:

1. Oyuncular kümesi (N): Her oyunun rasyonel karar vericiler kümesi vardır, bu karar vericilere *oyuncular* denir.

$$N = \{1, ..., n\}$$

Bu oyuncular kurgulanan oyuna ve modellenen duruma göre kişiler, şirketler, devletler olabilir. Oyuncu sayısı ise ikiden sonsuza kadar olabilir. (Bu tezde sonlu oyunculu oyunlardan bahsedilecektir.) Oyun teorisine göre oyuncuların sayısını saptarken, çıkar çelişkisinin taraflarına bakmak gerekir. Örneğin briçte oyuncu sayısı dört değil ikidir.

Oyuncuların, kullanabilecekleri kaynakları, seçebilecekleri stratejileri, karşılıklı etkileşim sonrası ortaya çıkabilecek olası sonuçlar üzerinde bir sıralama yapmalarına olanak veren içsel bir tercih sistemleri olduğu ve her oyuncunun tercih sisteminin de diğer oyuncular tarafından bilindiği varsayılır. Her oyuncu için temel problem, tamamen kontrol edemediği sonuçlardan kendisi için en iyi olanı seçmek ve bunu yaparken diğer oyuncuların da benzer biçimde davranacağını hesaba katmaktır. Oyuncular, bu seçimi rasyonel ve akıllı bir biçimde yaparlar. Rasyonellik, oyuncunun karşı karşıya bulunduğu sonuçlar arasından beklenen değeri en fazla olanı seçmesi anlamına gelir. Bu seçim işleminde karar vericiye, olası sonuçlar üzerinde eksiksiz bir sıralama yapmasına olanak veren tercihleri yön gösterir. Oyuncunun sahip olduğu tercihler bir fayda işlevi ile temsil edilebilirse rasyonellik, beklenen fayda maksimizasyonu ile eşanlamlıdır. Akıllı olmak ile anlatılmak istenen ise oyuncunun, oyun yapısını rakiplerinin de en az kendisi kadar anladığını ve içinde bulunulan durum hakkında kendisinin çıkaracağı sonuçları rakiplerinin de çıkaracağını varsaymasıdır. Rasyonel davranmak, akıllı davranmayı gerektirmez.

2. Strateji kümesi (A): Her bir oyuncuya ait bütün olası eylem seçeneklerinin yer aldığı kümedir.

A_i, i. oyuncunun strateji uzayıdır ve $A = A_1 \times ... \times A_n$ bireysel strateji uzaylarının kartezyen çarpımıdır ve oyunun strateji uzayıdır.

$a_i \in A_i$, i.oyuncunun stratejisini temsil etmektedir. $A_i \subset R^n$ 'dir.

$a = (a_1, ..., a_n) \in A$ bir strateji profilidir.

$a \in A$ ve $t_i \in A_i$ olmak üzere $a \backslash t_i = (a_{1,}..., a_{i-1}, t_i, a_{i+1}, ..., a_n)$'dir. $a \backslash t_i$ strateji profilinde $n-1$ oyuncunun stratejileri sabit kalırken i. oyuncunun stratejisi a_i yerine t_i stratejisi seçilmiştir

$a = (a_i, a_{-i})$ olarak da ifade edilebilir. Burada $a_{-i} = (a_{1,}..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$ 'dir.

3. Ödentiler: Her türlü olası strateji profili için her oyuncunun oyun sonunda elde edeceği kazancı ya da kaybıdır. Bu kazanç ya da kayıp reel değerli ödenti fonksiyonu P_i ile her bir oyuncuya her bir strateji profili için atanmaktadır.

$P_i(a) \in R$, i. oyuncu için ödenti fonksiyonudur ve $P(a) = (P_1(a), ..., P_n(a)) \in R^n$ ödenti vektörüdür.

n-oyunculu Γ oyununun stratejik biçim gösterimi $\Gamma = (N, A, P)$ biçiminde ifade edilir.

Oyun teorisindeki bir çok model oyunun yapısı ile ilgili olan aşağıdaki varsayımlar içerisinde düşünülür:

$$Varsayım\ 1\ :\quad A_i \subset R^m\ , \forall i \in N\ icin,\ kompakt\ ve\ konvekstir.$$

$$Varsayım\ 2\ :\quad P_i(a) \in R\ ,\ \forall i \in N\ ve\ \forall a \in A\ icin,\ \tan ımlı,\ sürekli,\ ve\ sınırlıdır.$$

$$Varsayım\ 3\ :\quad P_i(a \backslash t_i),\ \forall i \in N\ ,\ \forall a \in A\ ve\ t_i \in A\ icin,\ konkavdır.$$

Orijinal stratejilere "*salt strateji*" ve salt stratejiler üzerindeki olasılık dağılımlarına "*karma strateji*" denir.

i. oyuncunun karma stratejileri kümesi;

$$Q_i = \left\{ q_i \in R_+^m : \sum_{k=1}^{m} q_{ik} = 1 \right\}$$

Karma stratejiler kümesi $Q = \prod_i Q_i$'dir (Owen,1982).

Tanım 2.1 *q karma stratejisi seçildiğinde i. oyuncunun beklenen ödentisi;*

$$q(a) = \prod_{j=1}^{N} q_j(a_j)$$

olmak üzere

$$EP_i(a) = \sum_{a \in A} q(a) P_i(a)$$

Tanım 2.2 *i. oyuncu için "en iyi cevap fonksiyonu" her $q \in Q$ stratejisi ile $Q_i$nin bir alt kümesini*

$$r_i(q) = \left\{ t_i \in Q_i : P_i(q/t_i) = \max_{q_i^{'}} P_i\left(q/q_i^{'}\right) \right\}$$

kuralı ile bağdaştıran küme değerli bir ilişkidir. $t \in r(q)$ ancak ve ancak $t_i \in r_i(q)$, $i \in N$. "En iyi cevap fonksiyonu" her $q \in Q$ stratejisi ile $t \in r(q)$ kuralına göre Q 'nun alt kümesi ile bağdaştırılan küme değerli bir ilişkidir. Burada $r(q)$, $r_1(q) \times .. \times r_n(q)$ kartezyen çarpımıdır (Friedman, 1990).

Karma strateji, beklenen ödenti ve en iyi cevap fonksiyonları için daha ayrıntılı bilgi üçüncü bölümde verilmiştir.

Tanım 2.3 *Eğer*

(a) *oyuncular kümesi*

(b) *bütün oyuncuların strateji kümeleri*

(c)*bütün oyuncuların potansiyel ödentileri*

her bir oyuncu için ortak bilgi ise bu oyuna "tam bilgili oyun" denir. Eğer bir ya da daha fazla oyuncu (a), (b), ve/veya (c) bilgilerinden yoksun ise bu oyuna "eksik bilgili oyun" denir (Friedman, 1990).

Tanım 2.4 *Her bir oyuncunun oyun sırasında birbirlerinin adım adım strateji seçimlerinden haberdar oldukları oyunlara "kusursuz bilgili oyun", oyuncuların birbirlerinin strateji seçimlerini göremedikleri ve sanki aynı anda karar veriyorlarmış gibi oynadıkları oyunlara "kusurlu bilgili oyunlar" denir (Friedman, 1990).*

Oyun teorisinde her oyuncu *rasyonel* kabul edilir. Yani her oyuncu kendi kazancını maksimize etmeye çalışır.

Tanım 2.5 *Oyuncuların stratejilerini aynı anda seçtikleri oyunlara statik oyunlar denir.*

Statik Oyun Varsayımları:

i) Oyuncular eylem seçimlerini aynı anda ya da birbirlerinin haberi olmadan yaparlar.

ii) Tüm oyuncular rasyoneldir.

iii) Tüm oyuncuların rasyonelliği ortak bilgidir.

iv) Tüm oyuncular kusursuz fakat eksik bilgiye sahiptir (Friedman, 1990).

Tezin son kısmında sunulacak olan "Mahkumların İkilemi" oyunu statik bir oyundur.

Nash dengesindeki temel düşünce, her bir oyuncunun diğer oyuncuların stratejilerine karşın kendi ödentisini maksimize eden stratejiyi seçmesidir.

Tanım 2.6 $a^* \in A$ *bir Nash denge noktası ise* , $\forall i \in N$ *ve* $\forall a_i \in A_i$ *icin,*

$$P_i\left(a^*\right) \geq P_i\left(a^* \backslash a_i\right)$$

eşitsizliği sağlanır.(Friedman, 1990).

Oyunlar, karşılıklı etkileşim içinde olan tarafların içinde bulundukları kurumsal yapıya göre işbirlikli ve işbirliksiz (yarışmacı-çekişmeli) oyunlar olmak üzere iki ana öbek altında sınıflandırılar. İşbirlikli oyunlarda oyuncular arasında belirli bir amaca ulaşmak için sağlanan anlaşmalara (koalisyonlar) uymayı zorunlu kılan bir kurumsal yapının var olduğu ve tarafları bağlayıcı olduğu varsayılır. Böyle bir kurumsal yapıyı içermeyen oyunlar, tarafların davranışlara bakılmaksızın işbirliksiz olarak sınıflandırılır. İşbirliksiz oyunlarda taraflar arasında sağlanabilecek bir anlaşmanın anlamlı olabilmesi için tarafların sergiledikleri davranışların herhangi bir kurumsal (dış) zorlama olmadan benimsenmiş olması gerekir. Diğer bir anlatımla, her oyuncunun, karşı tarafın benimsediği davranış (strateji) veri iken kendi çıkarına en uygun olan davranışı benimsediği durumlar işbirliksiz oyunlarda tarafların üzerinde "anlaşabileceği" ve teorik açıdan da anlamlı olabilecek tek "anlaşma" durumudur. İşbirliksiz oyunlarda denge kavramı, bu "anlaşma" durumuna denk düşer ve Nash dengesi (Cournot- Nash dengesi, stratejik denge) olarak adlandırılır.(Friedman, 1990).

Tanım 2.7 *Her $a_{-i} \in A_{-i}$ için, a_i stratejisi i'inci oyuncu için her zaman en düşük ödentiyi veriyorsa yani*

$$P_i\left(q_i^{\imath}, a_{-i}\right) \rangle P_i\left(a_i, a_{-i}\right)$$

ise a_i stratejisine "yenilgen strateji" denir (Owen,1982).

Rasyonel oyuncular yenilgen stratejileri oynamayacaklarına göre, hiç bir rasyonel oyuncu, rakibinin yenilgen bir stratejisine pozitif olasılık vermeyecektir.

Tanım 2.8 *Diğer oyuncuların seçebilecekleri tüm stratejilere karşı her zaman en yüksek ödentiyi sağlayan bir a_i^* stratejisi varsa bu strateji i'inci oyunun "basat (baskın) stratejisi" dir. Diğer bir ifade ile her a_{-i} ve $a_i^{--} \neq a_i^*$ için*

$$P_i\left(a_i^*, a_{-i}\right) \rangle P_i\left(a_i^{--}, a_{-i}\right)$$

eşitsizliğini sağlayan bir a_i^* stratejisi varsa bu strateji i'inci oyunun "başat (baskın) stratejisi"dir (Owen,1982).

Bir oyuncu için başat strateji, eğer varsa, rakip oyuncular ne yaparlarsa yapsınlar her zaman "kesin en iyi cevap"tır. Bir oyuncunun başat stratejisi olması durumunda diğer tüm stratejiler yenilgen stratejidir.

Tanım 2.9 *Her oyuncunun başat stratejisini oynadığı bir durumda elde edilen dengeye başat strateji dengesi denir (Owen,1982) .*

Uygulama bölümünde sunulan Mahkumların İkilemi oyunu bu duruma klasik bir örnek oluşturur.

2.2 MATEMATİKSEL ÖN BİLGİ VE TEMEL KAVRAMLAR

Strateji kümeleri, R^n'de birim simplekslerle ifade edildiği için bu tezde; R^n öklit uzayındaki basit yapılı kümelerle ilgilenilmiştir.

$$R^n = \{x : \ x = (x_{1,\ldots,}x_n) \ , \ \forall x_i \epsilon R \quad i = (1, 2, \ldots n)\} .$$

2.2.1 Konveks Kümeler

Oyun teorisinde, konveks kümeler merkezi bir rol oynar. Strateji kümelerinin ve dengenin yapısının anlaşılabilmesi için konvekslik kavramı ayrıntılı incelenmiştir. Konveks kümelerin geometrik ve topolojik özelliklerinin daha iyi anlaşılabilmesi için bu bölümde önce afin kümeler incelenmiştir.

Afin Kümeler

x ve y, R^n'de birbirlerinden farklı iki nokta ve $\lambda \in R$ olmak üzere $(1-\lambda)x + \lambda y = x + \lambda(y-x)$ biçimindeki noktalar kümesi x ve y'den geçen bir doğru tanımlar.

Tanım 2.10 *$M \subset R^n$ olmak üzere $\forall x, y \in M$ ve $\lambda \in R$ için*

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in M$$

ise M bir afin kümedir (Rockafellar,1970).

$\varnothing$ ve R^n uzayı afin kümelerin uç örnekleridir. Aynı zamanda tanım gereği M kümesi tek bir nokta içerdiğinde M yine afin kümelere bir örnektir. Bir genelleme yapıldığında afin kümeler farklı iki noktasından geçerek uzayan doğruyu barındırıran kümelerdir. Bir afin küme sonsuz eğrisiz bir yapı, uzayda bir doğru ya da düzlem gibidir.

Afin kümelerin geometrisi R^n'nin alt uzayları ile ilgili doğrusal cebir teoremlerinden geliştirilebilir. Afin kümeler ve alt uzaylar arasındaki benzerlikler şu iki teoremle tanımlanabilir:

Teorem 2.11 *R^n'nin alt uzayları orijini barındıran afin kümelerdir (Rockafellar, 1970).*

İspat. R^n'nin her alt uzayı 0 noktasını barındırır ayrıca toplama ve skalar çarpım altında kapalıdır; yani özelde bir afin kümedir. Tersine, M afin kümesi 0 noktasını barındırsın. Herhangi bir $x \in M$ ve $\lambda \in R$ için

$$\lambda x = (1-\lambda)0 + \lambda x \quad \in M$$

olur; görüldüğü üzere M skaler çarpım altında kapalıdır. $x \in M$ ve $y \in M$ olmak üzere

$$(1/2)(x+y) = (1/2)x + (1-1/2)y \in M$$

$$x + y = 2((1/2)(x + y)) \ \in M$$

dir. M toplama altında kapalıdır. M bir alt uzaydır. ■

$M \subset R^n$ ve $a \in R^n$ için, M'nin a ile taşınmasını $(translation)$ şöyle ifade edelim:

$$M + a = \{x + a \ : \ x \in M\}$$

Bir afin kümenin taşınmış hali yine bir afin kümedir. M ve L afin kümeler olmak üzere bazı a'lar için $M = L + a$ eşitliği sağlanıyorsa, M kümesi L kümesine paraleldir denir. Açık olarak " M, L ye paraleldir" ifadesi R^n'nin afin kümeleri arasında bir denklik bağıntısı tanımlar.

Teorem 2.12 *Boştan farklı her afin M kümesi, R^n'nin tek bir alt uzayı, L'ye paraleldir. L şöyle tanımlıdır:*

$$L = M - M = \{x - y : \ x, y \in M\}$$

(Rockafellar, 1970)

İspat. Önce M'nin iki ayrı alt uzaya paralel olamayacağını gösterilmiştir. L_1 ve L_2 alt uzayları M 'ye paralel olsunlar; bu durumda L_1 ve L_2 alt uzayları birbirlerine de paraleldirler. Yani bazı a lar için $L_2 = L_1 + a$. $0 \in L_2$ olduğundan $-a \in L_1$'dir, yani $a \in L$'dir. $L_1 + a = L_2 \subset L_{1.}$ Yine aynı düşünce ile $L_1 \subset L_2$; $L_1 = L_2$'dir. Yani M tek bir alt uzaya paraleldir. Şimdi herhangi bir $y \in M$ için $M - y = M + (-y)$ kümesi; M kümesinin $-y$ ile taşınmış 0 'ı barındıran biçimidir. Teorem 2.11 ile bu taşınmış afin küme R^n'nin bir alt uzayı L'dir ve az önce ispatladığımız gibi tektir.Yani $L = M - y$, hangi y'nin seçildiği önemsiz olduğu için $L = M - M$ 'dir. ■

Boştan farklı bir afin kümenin boyutu, bu kümeye paralel alt uzayın boyutu olarak tanımlanmıştır. ($\varnothing$ nin boyutunu -1 olarak kabul edelim.) Doğal olarak $0, 1, 2$ boyutlu afin kümeler sırasıyla nokta, doğru ve düzlemdir.

Tanım 2.13 *R^n'de $(n-1)$ boyutlu afin kümeye hiper düzlem denir (Rockafellar, 1970).*

Hiper düzlemler veya diğer afin kümeler doğrusal fonksiyonlarla veya doğrusal denklemlerle gösterilebilirler. Bunu R^n'de ortogonallik teorisinden gözlemleyebiliriz. L,

R^n'de bir alt uzay olmak üzere $x \perp L$ olacak şekilde x vektörlerinin kümesi, $\forall y \in L$ için $x \perp y$, L'nin ortogonal tümleyenidir; $L^{\perp}$ ile gösterilir. $L^{\perp}$ bir alt uzaydır ve

$$\dim L + \dim L^{\perp} = n \tag{1}$$

Eğer $b_1, ..., b_m$ noktaları L'nin bir tabanı ve $x \perp L$ ise; $x \perp b_1, ..., x \perp b_m$ 'dir. Özel olarak $(n-1)$ boyutlu R^n'nin alt uzayları bir boyutlu alt uzayların ortogonal tümleyenleridir. Bu bir boyutlu alt uzayların tabanları sıfırdan farklı tek bir b vektördür. O zaman, x $(n-1)$ boyutlu alt uzayın bir elemanı olmak üzere, $(n-1)$ boyutlu alt uzaylar $\{x : \ x \perp b\}$ biçimindeki kümelerdir $(b \neq 0)$. Hiperdüzlemler bu kümelerin taşınmış biçimidir. Ama

$$\{x : x \perp b\}+a = \{x+a : \langle x, b\rangle = 0\} = \{y : \ \langle y-a, b\rangle = 0\} = \{y : \ \langle y, b\rangle = \beta, \beta = \langle a, b\rangle\} \tag{2}$$

Bu ifadeler aşağıdaki hiperdüzlem betimlemesine olanak verir.

Teorem 2.14 *$\beta \in R$ ve sıfırdan farklı $b \in R^n$ verilsin.*

$$H = \{x : \langle x, b\rangle = \beta\} \tag{3}$$

kümesi R^n'de bir hiperdüzlemdir. Ve bütün hiperdüzlemler bu biçimde ifade edilebilirler (Rockafellar, 1970).

Teorem 2.14'de, b vektörüne H hiperdüzleminin bir *normali* denir. H'nin diğer bütün normalleri b vektörünün pozitif ya da negatif bir skalarla çarpımına eşittir. Her hiperdüzlemin iki tarafının varlığı bu durumun güzel bir yorumudur; örneğin R^2'de bir doğru veya R^3'te bir düzlem düşünülebilir.

Bir sonraki teorem R^n'nin afin kümelerini n değişkenli doğrusal denklem sisteminin çözümü olarak ifade edebileceğimizi belirtiyor.

Teorem 2.15 *$b \in R^m$ ve bir $m \times n$ reel matris B verilsin.*

$$M = \{x \in R^n : Bx = b\} \tag{4}$$

kümesi R^n'de bir afin kümedir. Ve bütün afin kümeler bu biçimde gösterilebilirler (Rockafellar, 1970).

İspat. $x, y \in M$ ve $\lambda \in R$ ise $z = (1-\lambda)x + \lambda y$ için

$$Bz = (1-\lambda)Bx + \lambda By = (1-\lambda)b + \lambda b = b$$

olur ve $z \in M$ 'dir. Böyle tanımlanan bir M kümesi afin kümedir.

Diğer taraftan R^n'den ve boştan farklı herhangi bir M afin kümesi ve bu kümeye paralel L alt uzayını alalım. $b_1, ..., b_m$ noktaları $L^{\perp}$ için bir taban olsun. O zaman B satırları $b_1, ..., b_m$ olan bir matris için

$$\begin{aligned} L = (L^{\perp})^{\perp} &= \{\ x : \quad x \perp b_1, ..., x \perp b_m\ \} \\ &= \{\ x : \quad \langle x, b_i \rangle = 0, \quad i = 1, .., m\} \\ &= \{\ x : \ Bx = 0\} \end{aligned}$$

M, L 'ye paralel olduğu için ,

$$\begin{aligned} M = L + a &= \{\ x : B(x-a) = 0\} \\ &= \{\ x : Bx = b\} \end{aligned}$$

olacak biçimde bir $a \in R^n$ vardır; ve $b = Ba$'dır. ■

(R^n ve ϕ afin kümeleri teoremdeki gibi ifade edilebilir: $m \times n$ tipindeki B matrisini sıfır matris alalım. $b = 0$ olduğunda R^n, $b \neq 0$ olduğunda ϕ afin kümelerini elde ederiz.)

Teorem 2.15'ten yola çıkarak b_i, B'nin i. satırı ve β_i, b'nin i. bileşeni olmak üzere

$$M = \{x : \langle x, b_i \rangle = \beta_i, i = 1, ..., m\} = \cap_{i=1}^{m} H_i$$

dir. Burada

$$H_i = \{x : \ \langle x, b_i \rangle = \beta_i\}$$

dir.

Her H_i bir hiperdüzlemdir $(b_i \neq 0)$ veya boş kümedir $(b_i = 0, \beta_i \neq 0)$ veya R^n dir $(b_i = 0, \beta_i = 0)$.

Tanım 2.16 *Sonlu afin kümenin kesişimi yine bir afin kümedir. Bu sebeple, herhangi $S \subset R^n$ kümesi düşünüldüğünde S kümesini kapsayan afin kümelerin kesişimi S 'yi kapsayan en küçük afin kümedir. Bu kümeye S'nin afin zarı denir ve $affS$ olarak gösterlir. $affS$ kümesinin elemanları $x_i \in S$ ve $\lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m$ biçimindeki vektörlerdir (Border, 1985).*

Tanım 2.17 *$m+1$ noktadan oluşan $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ kümesi için, eğer $aff\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ $m-$boyutlu ise afin bağımsız denir (Border, 1985).*

$$aff\{b_0, b_1, ..., b_m\} = L + b_0 \tag{5}$$

öyle ki

$$L = aff\{0, b_1 - b_0, ..., b_m - b_0\}$$

Teorem 2.11 ile, L kümesi $b_1 - b_0, ..., b_m - b_0$ noktalarını içeren R^n'nin en küçük alt uzayıdır. L'nin boyutu ancak ve ancak bu vektörler doğrusal bağımız ise m 'dir. Yani $b_0, b_1, ..., b_m$ ancak ve ancak $b_1 - b_0, ..., b_m - b_0$ doğrusal bağımsız ise afin bağımsızdır. Bu bağlantıdan yararlanarak afin bağımsızlık için başka bir tanım verilebilir:

$b_1 - b_0, ..., b_m - b_0$ doğrusal bağımsız noktalar olsun. O zaman $\lambda_i \in R$ olmak üzere

$$\lambda_1(b_1 - b_0) + ... + \lambda_m(b_m - b_0) = 0$$

olduğunda $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$ dir.

Yukarıdaki eşitlikten

$$\lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m = b_0(\lambda_1 + ... + \lambda_m)$$

$$0 = b_0(\lambda_1 + ... + \lambda_m)$$

b_0 'ın katsayısına λ_0 olsun.

$$\lambda_0 = \lambda_1 + ... + \lambda_m = 0$$

Yapılan işlemleri geriye doğru takip edildiğinde $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i b_i = 0$ ve $\sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 0$ olduğunda $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ afin bağımsız ise $\lambda_0 = ... = \lambda_m = 0$ 'dır.

Doğrusal bağımsızlıkla ilgili bütün olgular afin bağımsızlığa uygulanabilir. Mesela R^n 'de herhangi $m+1$ noktaya sahip bir afin bağımsız bir küme $n+1$ noktaya sahip afin bağımsız bir kümeye genişletilebilir. $m-$boyutlu bir afin M kümesi $m+1$ noktanın afin zarı olarak gösterilebilir.(M 'ye paralel olan alt uzayın taban noktalarını taşıyarak gösterilebilir.)

Eğer $M = aff\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ ise , M 'ye paralel olan L alt uzayındaki vektörler $b_1 - b_0, ..., b_m - b_0$ 'ın doğrusal bileşimidir. O zaman M kümesindeki vektörleri şu biçimde ifade edilebilir:

$$x = \lambda_1(b_1 - b_0) + ... + \lambda_m(b_m - b_0) + b_o$$

$$= \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m + b_0(-\lambda_1 - ... - \lambda_m + 1)$$

$$-\lambda_1 - ... - \lambda_m + 1 = \lambda_0$$

olmak üzere

$$x = \lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m \quad , \qquad \lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_m = 1$$

Sonuç 2.18 *x yukarıdaki gibi ifade edildiğinde, x'in katsayıları, ancak ve ancak $b_0, b_1, ..., b_m$ afin bağımsız ise tektir (Border, 1985).*

Bu katsayıların tek olmadığı varsayılsın.

$$\lambda'_0 + \lambda'_1 + ... + \lambda'_m = 1$$

olmak üzere;

$$x = \lambda'_0 b_0 + \lambda'_1 b_1 + ... + \lambda'_m b_m$$

olsun. O zaman

$$\lambda_0 b_0 + \lambda_1 b_1 + ... + \lambda_m b_m = \lambda'_0 b_0 + \lambda'_1 b_1 + ... + \lambda'_m b_m$$

$$0 = (\lambda'_0 - \lambda_0) b_0 + (\lambda'_1 - \lambda_1) b_1 + ... + (\lambda'_m - \lambda_m) b_m,$$

$$\sum_{i=0}^{m} \lambda'_i - \lambda_i = \sum_{i=0}^{m} \lambda'_i - \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1 - 1 = 0$$

ve $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ afin bağımsız olduğu için $\lambda'_i - \lambda_i = 0$ yani $\lambda'_i = \lambda_i$. Yani katsayılar tektir.

Tersine $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ afin bağımsız değilse katsayıların tek olmadığı açıktır.

Tanım 2.19 *Yukarıdaki sonuçta adı geçen $\lambda_0, ..., \lambda_m$ parametrelerine, M 'nin barisentrik koordinatları denir (Border, 1985).*

$\mathbf{R}^n$ 'de Konveks Kümeler

Bir kümenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası yine kümenin içinde kalıyorsa, küme herhangi bir boşluk, oyuk içermiyorsa bu küme konveks bir kümedir.

Tanım 2.20 *$C \subset R^n$ olmak üzere, $x, y \in C$ ve $0\langle\lambda\langle 1$ için, $(1-\lambda)x + \lambda y \in C$ ise, C bir konveks kümedir. (Barvinok, 2002)*

Bütün afin kümeler konvekstirler. Çünkü afin kümelerin tanımında a ve b herhangi iki nokta olmak üzere kümenin elemanları $\alpha + \beta = 1$ olacak biçimde $\alpha a + \beta b$ formundadırlar. Bir konveks kümenin elemanları da aynı biçimdedir ancak bunlara ek olarak $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$'dır. Konveks kümelerin sadece kümeye ait herhangi iki farklı noktayı birleştiren doğrunun belirli bir oranını barındırmak zorunda olması nedeniyle konveks kümeler afin kümelerden daha sık kullanılmaktadır. Bu oran

$$\{(1-\lambda)x + \lambda y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

x ve y arasındaki kapalı doğru parçasıdır.

R^3'te bir küp konveks ancak afin değidir (Barvinok, 2002).

Tanım 2.21

$$a_i \in R^n \quad (i = 1, ..., s), \quad \sum_{i=1}^{s} \xi_i = 1 \quad ve \quad \xi_i \geq 0$$

olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i a_i$$

toplamına a^i vektörlerinin konveks bileşimi denir (Barvinok, 2002).

Uygulamalı matemetiğin bir çok alanında katsayı ξ_i ler karşımıza olasılık ya da oranlar olarak çıkmaktadır.

Teorem 2.22 *R^n'nin alt kümesi, ancak ve ancak bu alt küme elemanlarının konveks bileşimleri yine bu kümenin bir elemanı ise konvekstir (Rockafellar, 1970).*

İspat. Konveksliğin tanımına göre C kümesi, ancak ve ancak $x_1, x_2 \in C$, $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olduğunda $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in C$ ise konvekstir. Diğer bir söylemle C, m eleman sayısı olmak üzere, $m = 2$ için elemanlarının konveks bileşimlerini içeriyorsa C, konveks bir kümedir. Burada gösterilmesi gereken $m\rangle 2$ olduğunda da yukarıdaki söylemin doğrulanmasıdır.

$m\rangle 2$ ve $(m-1)$ için C, elemanlarının konveks bileşimlerini içeren konveks bir küme olsun.

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m, \quad x_i \in C \ ve \ \lambda_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$$

olsun.

En az bir skalar, λ_1 diyelim, 1'den farklıdır.

$$\lambda_i^{\imath} = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_1}$$

olmak üzere

$$y = \lambda_2^{\imath} y_2 + ... + \lambda_m^{\imath} y_1$$

olsun.

$$\lambda_2^{\imath} + ... + \lambda_m^{\imath} = (\lambda_2 + ... + \lambda_m)/(\lambda_2 + ... + \lambda_m) = 1$$

y, C'nin $(m-1)$ elemanının konveks kombinasyonu olduğu için kabulümüzden $y \in C$'dir.

$$x = (1-\lambda_1)y + \lambda_1 x_1$$

$$= \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m \ \in C$$

dir. ■

Teorem 2.23 *Keyfi sayıdaki konveks kümenin kesişimi de konvekstir (Rockafellar, 1970)*

İspat. C_i'ler konveks kümeler olmak üzere

$x, y \in \cap_{i\in I} C_i$ olsun. $\forall i \in I$, $x, y \in C_i$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $(1-\lambda)x + \lambda y \in C_i$. O zaman

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in \cap_{i\in I} C_i$$

dir. $\cap_{i\in I} C_i$ konvekstir. ■

Tanım 2.24 *$S \subset R^n$ kümesini kapsayan bütün konveks kümelerin kesişimi yine konveks bir kümedir ve bu kesişim kümesine S'nin konveks zarı denir ve coS ile gösterilir. coS, S 'yi kapsayan en küçük konveks kümedir (Rockafellar, 1970).*

Teorem 2.25 *Herhangi $S \subset R^n$ kümesi için coS, S'nin elemanlarını bütün konveks bileşimlerini içerir (Rockafellar, 1970).*

İspat. $S \subset coS$ olduğu için Teorem 2.22'ye göre coS, S'nin elemanlarının bütün konveks bileşimlerini içerir.

Ayrıca

$$x_i \in S,\ y_i \in S\ \ ve\ \ \sum_i^m \lambda_i\ = 1, \sum_i^r \mu_r = 1$$

olmak üzere

$$x = x_1\lambda_1 + ... + x_m\lambda_m\ \ ve\ y = y_1\mu_1 + ... + y_r\mu_r$$

S'nin elemanlarının iki ayrı konveks bileşimidir. $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$(1-\lambda)x + \lambda y = (1-\lambda)x_1\lambda_1 + ... + (1-\lambda)x_m\lambda_m + \lambda y_1\mu_1 + ... + \lambda y_r\mu_r$$

elemanı S'nin elemanlarının başka bir konveks bileşimidir. Yani S'nin konveks bileşimlerinin oluşturduğu küme konvekstir ve bu küme S ve coS yi kapsar. ■

Sonuç 2.26 *R^n uzayının sonlu $\{b_0, ..., b_m\}$ alt kümesinin konveks zarı*

$$\lambda_i \geq 0 (i = 0, 1, ..., m)\ ve\ \lambda_0 + ... + \lambda_m = 1$$

olmak üzere $\lambda_0 b_0 + ... + \lambda_m b_m$ biçimindeki vektörlerden oluşur (Rockafellar, 1970).

$X \subset R^n$'den coX 'i üretilirken, X kümesinden seçilen noktaların sayısına bakmaksızın bu noktalararın bütün olası konveks kombinasyonlarının bir kümesi oluşturuldu. Ancak R^n'nin $n-$boyutlu olması X'in en fazla $n+1$ noktasının konveks bileşimlerinin düşünülmesine imkan vermektedir.

Lemma 2.27 *Eğer bir $x \in R^n$ noktası, sonlu $x^i \in R^n$ noktalarının negatif olmayan doğrusal bileşimi olarak ifade edilebiliyorsa , bu x^i noktalarından en fazla n tanesinin negatif olmayan doğrusal bileşimi olarak x noktasını ifade edilebilir (Barvinok, 2002).*

İspat. $s \rangle n$ olmak üzere x, s tane noktanın negatif olmayan doğrusal bileşimleri olarak ifade edilebilsin. $s \rangle n$ olduğu için bu x^i noktaları doğrusal bağımlıdır yani,

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i x^i = 0$$

eşitliğinde önemsiz olmayan bir doğrusal ilişki vardır.

$$x = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i x^i\ \ ,\ \ \ \alpha_i \geq 0\ \ \ \ (i = 1, ..., s)$$

olsun. Genel gidişatı bozmadan bazı β_i'ler pozitif düşünülebilir. Bütün pozitif β_i'leri düşünerek

$$\theta = \min \frac{\alpha_i}{\beta_i}$$

seçildiğinde;

$$x = \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i - \theta\beta_i) x^i$$

Herhangi bir pozitif β_i için, $\alpha_i \geq \theta\beta_i$'dir. θ'nın negatif olduğunu düşünüldüğünde, diğer β_i'ler içinde $\alpha_i \geq \theta\beta_i$'dir. Ayrıca en az bir pozitf β_i için, $\alpha_i = \theta\beta_i$'dir. Yani bütün $\alpha_i - \theta\beta_i$ katsayıları negatif değildir ve bazıları kaybolmuştur. Bu durumda en az bir katsayı kaybolmuştur yani x, en fazla $(s-1)$ tane x^i'nin negatif olmayan doğrusal bileşimi olarak ifade edilebilir. Bu uygulamaya devam edildiğinde, işe yaramayan x^i'lerden birer birer kurtularak x'i, R^n 'de en fazla n tane noktanın negatif olmayan doğrusal bileşimi olarak ifade edilebilir. ■

Teorem 2.28 *R^n'de X kümesinin konveks zarı co$X$*

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x^i \ , \ \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \qquad \alpha_i \geq 0 \ \ (i = 1, 2, ..., n+1)$$

biçimindeki noktalar kümesine eşittir. Buradaki n+1 tane x^i, X kümesini bağımsızca örterler ve α_i'ler olası ütün değerleri alır (Barvinok, 2002).

İspat. Burada gösterilmesi gereken eğer x, $s \rangle n+1$ tane $x_i \in R^n$ noktanın konveks bileşimi olarak ifade edilebiliyorsa ; x 'in en fazla $n+1$ noktanın konveks bileşimi olarak ifade edilebileceğidir. Noktaların konveks bileşimi ve negatif olmayan doğrusal bileşimi arasındaki basit bağlantıdan yararlanarak gereksiz noktaların atılabilmesi için Lemma 2.27'den yararlanılmıştır.

$x \in R^n$ olmak üzere, $x^* = (x, 1) \in R^{n+1}$ olsun. $\lambda_i \in R$ ve $\lambda_i \rangle 0$ olmak üzere, Lemma 2.27'den bilindiği üzere x^*, $n+1$ noktanın negatif olmayan doğrusal bileşimi olarak ifade edilebilr.

$$x^* = \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_{s+1} x^{s+1}$$

$$= \lambda_1 (x^1, 1) + ... + \lambda_{s+1} (x^{s+1}, 1)$$

$$(x,1) = (\lambda_1 x^1 + ... + \lambda_{s+1} x^{s+1}, \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_{s+1} x^{s+1})$$

ve buradan

$$x = \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_{s+1} x^{s+1} \quad , \qquad 1 = \quad \lambda_1 + ... + \lambda_{s+1}$$

Yukarıdan da görüldüğü gibi R^n'de s tane x^inoktanın konveks kombinasyonu, ancak ve ancak R^{n+1}'de s tane x^i noktanın negatif olmayan doğrusal bileşimi ile ifade edilebiliyorsa x'tir . ■

Teorem 2.29 *X bir konveks küme olmak üzere,*

(i) Kapanışı $\bar{X}$ yine bir konveks kümedir.

(ii) Eğer $a \in X^o$ ve $b \in \bar{X}$ ise $[a,b]$ parçasına ait her nokta , bazen b hariç, X 'in bir iç noktasıdır (Nikaido, 1968).

İspat. (i) $x, y \in \bar{X}$ olsun. O zaman X 'te sırasıyla x ve y noktalarına yakınsak $\{x^v\}$ ve $\{y^v\}$ dizileri vardır. $\alpha, \beta \geq 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere doğrusal operasyonların sürekliliğinden $\alpha x^v + \beta y^v$, $\alpha x + \beta y$ noktasına yakınsaktır. X konveks bir küme olduğu için $\alpha x^v + \beta y^v \in X$ 'tir. Dolayısıyla $\alpha x + \beta y \in X$'tir.

(ii) $a \in X^o$ olduğu için ,

$$U(a,\varepsilon) = \{x \quad : \quad \|x - a\| < \varepsilon \quad , \varepsilon > 0\}$$

olmak üzere, $U(a,\varepsilon) \subset X$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır. b haricinde $[a,b]$ 'nin bütün noktalarını

$$c_t = (1-t)a + tb \quad , \qquad 0 \leq t < 1$$

formunda ifade edilebilir.

c_t 'nin bir iç nokta olduğunun görülmesi için

$$U(c_t, (1-t)\varepsilon) \subset X$$

olduğu görülmelidir.

$$x \in \ U(c_t, (1-t)\varepsilon)$$

olsun. O zaman $\|x - c_t\| < \ (1-t)\varepsilon$ 'dir. Diğer taraftan $b \in \bar{X}$ oduğu için, b noktasına oldukça yakın bir $d \in X$ noktası alınsın ve bu yakınlığı

$$t\,\|b - d\| < (1-t)\varepsilon - \|x - c_t\|$$

ile ifade edilsin.

$$\|x-[(1-t)a+tb]\| \leq \|x-(1-t)a-tb+tb-tb\| \leq \|x-c_t\|+t\,\|b-d\|$$

$$< \|x-c_t\|+(1-t)\varepsilon- \|x-c_t\| < (1-t)\varepsilon$$

Eşitsizliği $(1-t)$ ye bölersek

$$\left\|\frac{1}{1-t}(x-td)-a\right\| < \varepsilon$$

olur. Buradan da görüldüğü üzere

$$e= \frac{1}{1-t}(x-td) \in U(a,\varepsilon) \subset X$$

yani $x=(1-t)e+td \in [e,d]$. Bu ise

$$U(c_t,(1-t)\varepsilon) \subset X$$

olduğunu ispatlar. ■

Teorem 2.29'dan bir çok önemli sonuç elde edilir.

Sonuç 2.30 *X^o, X kümesinin içi yine bir konveks kümedir (Nikaido, 1968).*

Sonuç 2.31 *Konveks bir X kümenin bir iç noktası a'dan doğan ışın üzerinde, X'in en fazla bir tane sınır noktası vardır (Nikaido, 1968).*

İspat. Bir ışın üzerinde iki tane sınır noktası olduğunu varsayalım. Bu iki sınır noktasından a 'ya yakın olanı c , diğeri b olsun. Bu durumda $c \in [a,b]$ 'dir. Teorem 2.29 (ii) gereği, $a \in X^o$ ve $b \in \bar{X}$ olduğu için $c \in X^o$'dır. Bu ise c 'nin sınır noktası olmasıyla çelişir. ■

Sonuç 2.32 *X bir konveks küme ve X^o boştan farklı olmak üzere, $\bar{X}=\bar{X^o}$ (Nikaido, 1968).*

İspat. $X^o \subset X$ olduğu için $\bar{X^o} \subset \bar{X}$. Tersine X 'in bir iç noktası a'yı sabitleyelim. Herhangi $b \in \bar{X}$ için, bazen b hariç olmak üzere $[a,b] \in X^0$'dir. Yani b'ye çok yakın elemanlar X^o'e aittir. O zaman $\bar{X} \subset \bar{X^o}$'dır. ■

Tanım 2.33 *R^n'de bir koveks kümenin içi ancak küme R^n 'nin bir afin öz alt uzayı tarafından kapsanıyorsa boştur (Nikaido, 1968).*

Tanım 2.34 *R^n'de içi boştan farklı kompakt konveks bir kümeye konveks yapı denir (Nikaido, 1968).*

Bir sonraki teoremden de anlaşıldığı üzere topolojik açıdan konveks kümeler çok basit yapılardır.

Teorem 2.35 *R^n'de iki konveks yapı homemorfiktirler (Nikaido, 1968).*

İspat. Konveks yapılardan birisi birim n- yuvar, $C_n = \{y \ : \ \|y\| = 1\}$ olsun. Diğeri $X \subset R^n$ olsun. $a \in X^o$ olsun. a'dan doğan herhangi bir L ışını üzerinde X 'in en az bir tane sınır eleman vardır çünkü $L \cap X$ kapalı, X kompakt ve $a \in L \cap X$ olduğu için, $L \cap X$ boştan farklı ve kompakt bir kümedir. Sürekli

$$\lambda(x) = \|x - a\|$$

fonksiyonu, $L \cap X$ üzerinde b noktasında maksimum değerini alsın. Konvekslikten ötürü $[a, b] \subset X$ 'tir. L üzerindeki bir x noktası b'ye ne kadar yakın olursa olsun

$$\|x - a\| > \|b - a\|$$

oluyorsa x, X 'in elemanı değildir. Bu nedenle $b \in \bar{X} \cap \bar{X^c}$'dir yani b sınır noktasıdır. Sonuç 2.31 gereği L üzerinde X 'in başka bir sınır noktası yoktur.

X^b, X 'in sınırı olsun. O zaman $X^b \neq \varnothing$ ve $a \notin X^b$'dir. Şimdi

$$g : X^b \to S_n \ , \quad S_n = \{y : \|y\| = 1\}$$

fonksiyonunu tanımlansın;

$$g(x) = (x - a) : \|x - a\| \, .$$

Görüldüğü üzere g süreklidir. Eğer $x^1, x^2 \in X^b$ için, $g(x^1) = g(x^2)$ ise $x^1 - a, x^2 - a$ 'nın pozitif bir skalerle çarpımına eşittir; yani x^1ve x^2, a'dan doğan aynı ışın üzerindedir. Sonuç 2.31 gereği $x^1 = x^2$; g bire-bir bir fonksiyondur. Bundan başka herhangi bir $y \in S_n$ için ,

$$L = \{\alpha y + a \quad : \alpha \geq 0\}$$

ışını X^b ile tek bir noktada kesişir, $g(x) = y$'dir. Yani g örten bir fonksiyondur. X^b, X 'te kapalı olduğu için kompakttır. Teorem 2.50 gereği $g^{-1} : S_n \to X^b$ süreklidir.

Son olarak X 'in konveksliğini kullanarak

$f : C_n \to X$ olmak üzere

$$f(y) = \begin{cases} a & , \; y = 0 \quad ise \\ (1 - \|y\|)a + \|y\| \, g^{-1}(y/\|y\|), & y \neq 0 \;\; ise \end{cases}$$

f fonksiyonu tanımlansın. $g^{-1}(y/\|y\|)$ sınırlı olduğunda, $y \to 0$ için

$$(1 - \|y\|)a + \|y\| \, g^{-1}(y/\|y\|) \to a$$

olur. Tanımdan f 'nin sürekli olduğu görülmektedir. $x \in X$ olsun.

Eğer $x = a$ ise $a = f(0)$. Eğer $x \neq a$ ise $b \in L \cap X^b$ öyle ki

$$L = \{\alpha(x - a) + a \; : \alpha \geq 0\}$$

. O zaman

$$x = f((\|x - a\| : \|a - b\|).g(b))$$

. f örtendir. Ayrıca

$$(1 - \|y\|)a + \|y\| \, g^{-1}(y/\|y\|) \; y \neq 0$$

olduğunda hiç bir zaman a'ya eşit değildir. Sonuç 2.31 göre f bire-birdir. C_n kompakt olduğu için f^{-1} süreklidir. $f : C_n \to X$ homeomorfik bir fonksiyondur. ■

Tanım 2.36 *Sonlu noktanın konveks zarına politop denir. Eğer* $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$ *afin bağımız noktalar kümesi ise bu kümenin konveks zarına* m*-boyutlu simpleks ve* $b_0, b_1, ..., b_m$ *noktalarına da verteks denir (Barvinok, 2002).*

C konveks kümesinin boyutu, C'nin afin zarının boyutuna eşittir. 2-boyutlu konveks bir diskin gömüldüğü uzayın boyutunun bir önemi yoktur.

Teorem 2.37 C *konveks kümesinin boyutu* C *tarafından kapsanan maksimum boyutlu simpleksin boyutuna eşittir (Barvinok, 2002).*

İspat. C 'nin herhangi bir alt kümesinin konveks zarı C 'nin içindedir. C en fazla $m + 1$ afin bağımsız nokta içersin yani, C 'nin içinde olabilecek maksimum boyutlu simpleks m-boyutludur. $\{b_0, b_1, ..., b_m\}$, $m + 1$ afin bağımsız noktalar kümesi ve

$$aff\{b_0, b_1, ..., b_m\} = M$$

olsun. Bu durumda $\dim M = m$ ve $M \subset affC$. Aynı zamanda $C \subset M$ dir; eğer $b \in C \backslash M$ olsaydı ($b \notin \{b_0, b_1, ..., b_m\}$) $b_0, b_1, ..., b_m, b$ noktaları C 'de afin bağısız olurdu ki bu m 'nin maksimalliği ile çelişirdi. $affC$, C 'yi kapsayan en küçük afin küme olduğu için

$$affC = M, \ dmC = m$$

olur. ■

Teorem 2.38 *X ve Y sırasıyla R^n ve R^m'de iki kompakt konveks yapı olsunlar.*

$$\dim X = \dim Y = k$$

ise X ve Y homomorfiktirler (Nikaido, 1968).

İspat. φ bire-bir afin dönüşüm olmak üzere, $\varphi : affX \to R^k$ tanımlıdır. φ iki yöne de sürekli olduğu için $\varphi(X)$, R^k 'da konveks bir yapıdır. Aynı düşünce ile Y, R^k 'da konveks bir yapıya homomorfiktir. O zaman daha önce gösterdiğimiz üzere X ve Y homomorfiktirler. ■

2.2.2 Simpleksler

Bir önceki bölümde, bir simpleksin ne anlama geldiğini kısaca ifade edilmiştir. Bu bölümde, özellikle Brouwer sabit nokta teoreminin incelenmesinde yoğun olarak kullanılacak olan simpleksler hakkında daha ayrıntılı bilgi verilmiştir.

Tanım 2.39 *$\{x^0, x^1, ..., x^k\}$ afin bağımsız noktalar kümesi olsun. Bu noktaların konveks zarına $k-$boyutlu simpleks denir. Bu noktaların ürettiği simpleks, $\overline{x^0x^1...x^k}$ ile gösterilsin. Bu üretici x^i'lere verteks denir (Nikaido, 1968).*

R^n 'de $0-$boyutlu simpleks bir nokta, $1-$boyutlu simpleks, $\overline{x^0x^1}$, başlangıç ve bitiş noktaları x^0 ve x^1 olmak üzere bir doğru parçası, $2-$boyutlu simpleks, $\overline{x^0x^1x^2}$, verteksleri x^0, x^1, x^2 olmak üzere bir üçgen belirtir.

Tanım 2.40 $\{x^{i_0}, x^{i_1}, ..., x^{i_s}\} \subset \{x^0, x^1, ..., x^k\}$ *olmak üzere,* $\overline{x^{i_0}x^{i_1}...x^{i_s}}$ *simpleksine* $\overline{x^0x^1...x^k}$ *simpleksinin bir yüzü denir (Nikaido, 1968).*

$k-$boyutlu bir simpleksin iç noktalarının barisenter koordinatlarının hepsi pozitiftir ve sınırı $k-1$-boyutlu yüzlerinin birleşimidir.

$X \subset R^n$ kümesinin çapı, $\forall x, y \in X$ için $\delta(X) = \sup \|x-y\|$ olarak tanımlansın.

Lemma 2.41 $\delta(\overline{x^0, x^1, ..., x^k}) = \max_{0 \leq i,j \leq k} \|x^i - x^j\|$ *(Nikaido, 1968).*

Bir simpleks daha küçük simplekslere bölmek mümkündür. Bu bölme işlemi, birçok yolla yapabilir ancak bu çalışmada sadece barisentrik bölüm ile ilgilenilmiştir. Bir simpleksin barisentrik bölümü yapılırken, simpleksin özel bir noktası, barisenter noktası, bütün yeni küçük simplekslerin ortak verteksi olarak alınır. Bu bölünmeyi daha iyi anlamlandırmak üzere önce $0, 1, 2$-boyutlu simplekslerin, daha sonra k-boyutlu bir simpleksin barisentrik bölümünü incelenmiştir (Nikaido, 1968).

Bir $\overline{x^0, x^1, ..., x^k}$ simpleksinin *barisenter noktasının* barisentrik kordinatları $\lambda_0 = \lambda_1 = ... = \lambda_k = \frac{1}{k+1}$ 'dir.

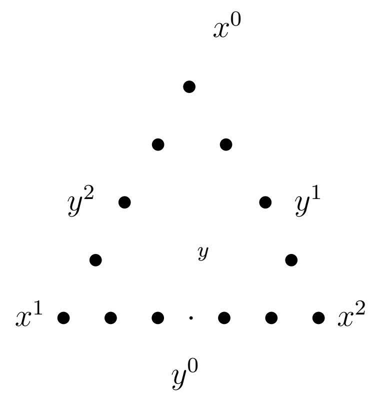
0-boyutlu simpleksin barisentrik bölümü: 0-boyutlu bir simpleks, tek bir noktadan oluşur ve bölünmüş hali kendisine eşittir.

1-boyutlu simpleksin barisentrik bölümü: 1-boyutlu $\overline{x^0 x^1}$ simpleks, y barisenter noktası olmak üzere iki simplekse bölünür; $\overline{x^0 y}$ ve $\overline{x^1 y}$.

x^0 • .... •.......... • x^1

y

2-boyutlu simpleksin barisentrik bölümü: 2-boyutlu $\overline{x^0 x^1 x^2}$ simpleks, aynı boyutlu 6 simplekse bölünür; $\overline{x^0 y^2 y}$, $\overline{x^1 y^2 y}$, $\overline{x^1 y^0 y}$, $\overline{x^2 y^0 y}$, $\overline{x^2 y^1 y}$, ve $\overline{x^0 y^1 y}$. Burada y, y^0, y^1ve y^2 sırasıyla $\overline{x^0 x^1 x^2}$, $\overline{x^1 x^2}$, $\overline{x^0 x^2}$ ve $\overline{x^0 x^1}$ in barisenter noktalarıdır.



k-boyutlu simpleksin barisentrik bölümü: k'dan daha küçük boyutlu simplekslerin bölündüğünü ve $m < k$ için m-boyutlu simpleksin aynı boyutlu $(m+1)!$ simplekse bölündüğü kabul edilsin. Bu durumda $\overline{x^0 x^1 ... x^k}$ k-boyutlu simpleksinin, $k-1$-boyutlu yüzlerinin $k!$ tane simplekse bölündüğü kabul edilsin. y, $\overline{x^0x^1...x^k}$ 'nın barisenter noktası ve $\overline{y^0y^1...y^{k-1}}$ adı geçen simpleksin $k-1$-boyutlu yüzünün bölünmesiyle elde edilen simpleks olsun. k-boyutlu simpleksin, $k-1$ boyutlu $k+1$ tane yüzü ve bu her bir yüzün $k!$ tane bölünmüş simpleksi vardır. O zaman $\overline{y^0y^1...y^{k-1}y}$ biçiminde $(k+1)!$ tane simpleks vardır. $\overline{x^0x^1...x^k}$ bu biçimdeki $(k+1)!$ simplekse bölünür. $\overline{x^0x^1...x^k}$ simpleksinin herhangi bir noktası barisenter noktası ya da öz yüzü üzerinde değilse, barisentır noktası ile yüzünü birleştiren doğru üzerindedir, yani nokta bazı $\overline{y^0y^1...y^{k-1}y}$ 'nin üzerindedir.

Tanım 2.42 *Bir simpleksin bölümünden oluşan daha küçük simplekslere türetilmiş simpleks denir (Nikaido, 1968).*

$\overline{x^0x^1...x^k}$ simpleksinin barisentrik bölme ile türetilmiş s-boyutlu bir simpleksinin, $\{x^0, x^1, ..., x^k\}$'nın alt kümelerinin tek bir artan dizisi $V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_m \subset ... \subset V_s$'den oluşturulduğu rahatlıkla görülebilir: burada $V_0 \neq \varnothing$ ve y^m, V_m kümesinin ürettiği simplesin barisentır noktası olmak üzere, türetilmiş simpleks $\overline{y^0y^1...y^m...y^s}$ biçimindedir. Türetilmiş simpleks ve adı geçen artan dizi arasında birebir bir ilişki vardır.

Lemma 2.43 $\overline{x^0x^1...x^k}$ *nın barisentrik bölümünden elde edilen $k-1$-boyutlu türetilmiş bir simpleks Δ^{k-1} (Nikaido, 1968)*

(i) *eğer tamamen $\overline{x^0x^1...x^k}$ 'nın sınırında ise k-boyutlu türetilmiş bir simpleksin bir yüzüdür,*

(ii) *diğer durumda k-boyutlu türetilmiş iki simpleksin ortak bir yüzüdür.*

İspat. (i) $\Delta^{k-1} = \overline{y^0y^1...y^{k-1}}$, V_m $m+1$ noktadan oluşmak üzere

$$V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_m \subset ... \subset V_{k-1}$$

dizisinden üretilmiştir.Eğer V_m $m+2$ nokta içeriyor olsaydı Δ^{k-1}, $\overline{x^0x^1...x^k}$ in barisenter noktasını bir verteks olarak alırdı ki bu Δ^{k-1} in sınırda olmasıyla çelişir.

(ii) $\Delta^{k-1} = \overline{y^0y^1...y^{k-1}}$ $V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_m \subset ... \subset V_{k-1}$ dizisinden üretilmiştir, simpleks sınırda olmadığı için V_{k-1} orjinal simpleksin bütün vertekslerini içeriyor. Bu durumda tek bir $l \leq k-1$ sayısı için V_l, V_{l-1} den iki verteks fazla içerir.

$V_l = V_{l-1} \cup \{x^{i_1}, x^{i_2}\}$. V_l dışındaki bütün kümeler bir önceki kümeden sadece bir verteks daha fazla eleman içeriyor.

$$V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{l-1} \subset V_{l-1} \cup \{x^{i_1}\} \subset V_l \subset ... \subset V_k \quad ....(k_1)$$

$$V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_{l-1} \subset V_{l-1} \cup \{x^{i_2}\} \subset V_l \subset ... \subset V_k \quad ....(k_2)$$

(k_1) ve (k_2) dizilerinin ürettiği $\overline{y^0y^1...y^{l-1}y^{i_1}y^l...y^k}$ ve $\overline{y^0y^1...y^{l-1}y^{i_2}y^l...y^k}$ k-boyutlu türetilmiş simplekslerinin ortak bir yüzü Δ^{k-1}'dir. ■

$\overline{x^0x^1...x^k}$ simpleksi v sefer barisentrik bölündüğünde, simpleksin v. barisentrik bölümü elde edilir; ve bu bölüm ile simpleks v. dereceden türetilmiş simplekslere bölünür. v bölünme sayısını ne kadar artarsa, türetilmiş simplekslerin çapı o kadar küçülür.

Teorem 2.44 *$S = \overline{x^0x^1...x^k}$'nin v. barisentrik bölümünde T^v, v.dereceden türetilmiş bir simpleks olsun. $\delta(S)$, $\delta(T^v)$ sırasıyla S ve T^v'nin çapları olmak üzere*

$$\delta(T^v) \leq (\frac{k}{k+1})^v \delta(S)$$

eşitsizliği sağlanır (Nikaido, 1968).

Teorem 2.45 *$S = \overline{x^0x^1...x^k}$, v kez barisentrik bölünsün. $k-1$-boyutlu v.dereceden türetilmiş simpleks T^v*

(i) eğer $\overline{x^0x^1...x^k}$'nın tamamiyle sınırında ise k-boyutlu v. dereceden türetilmiş simpleks bir simpleksin bir yüzü,

(ii) diğer durumda ise k-boyutlu v. dereceden türetilmiş iki simpleksin ortak bir yüzüdür (Nikaido, 1968).

Tanım 2.46 *$x \in S = \overline{x^0x^1...x^k}$ olmak üzere x'in barisentrik kordinatları $\lambda_i(x)$, $(i = 0, 1, ..., k)$ ile gösterilsin. x'in pozitif barisentrik kordinatları $\{i_0, ..., i_n\} \subset \{0, 1, .., k\}$ ile işaretlensin. $\overline{x^0x^1...x^k}$ simpleksinin $\overline{x^{i_0}...x^{i_n}}$ yüzüne x'in taşıyıcısı denir (Nikaido, 1968).*

2.2.3 Kompakt Kümeler

Oyun teorisindeki temel varsayımlardan birisi A_i, $i = \{1, ..., n\}$, strateji kümelerinin kompakt kümeler olmasıdır. Bu çalışmada, belirli bir sürekli fonksiyon altında bu kompakt strateji kümeleri üzerindeki sabit noktalar araştırılmaktadır. Bu sebeple, kompakt kümelerin bazı özellikleri bu bölümde incelenmiştir.

Tanım 2.47 *X kümesindeki herhangi bir dizinin X kümesine ait bir noktaya yakınsak bir altdizisi varsa X kompakt bir kümedir (Border, 1985).*

Teorem 2.48 *(i) X kümesinin kompakt M alt kümesi X'de kapalıdır.*

(ii) Kompakt X kümesinin kapalı M alt kümesi X 'de kompakttır (Border, 1985).

İspat. (i) M kompakt bir küme olsun. M'deki $\{x^v\}$ dizisi X içindeki bir x noktasına yakınsasın. M kompakt bir küme olduğu için $\{x^v\}$ dizisinin M'nin bir y noktasına yakınsayan bir alt dizisi $\{x^\mu\}$ vardır. Yakınsak bir dizinin herhangi alt dizisi aynı noktaya yakınsayacağından $x = y$'dir, yani $x \in M$. Bu da M kümesinin kapalılığını ispatlar.

(ii) M kümesi X'de kapalı bir küme osun. M kümesindeki bir $\{x^v\}$ dizisi, aynı zamanda X'te de bir dizidir. X kompakt bir küme olduğu için bu $\{x^v\}$ dizisinin $x \in X$'e yakınsak bir alt dizisi $\{x^\mu\}$ vardır. x noktası M'nin kapanışına aittir. M kapalı bir küme olduğu için $x \epsilon M$'dir. Böylelikle M kümesindeki $\{x^v\}$ dizisinin yine bu kümeye ait bir noktaya yakınsak bir alt dizinin varlığını görüyoruz. Yani M alt kümesi X'de kompakttır. ■

Teorem 2.49 *X kompakt kümesinin $f : X \to Y$ sürekli fonksiyonu altındaki görüntsü yine kompakttır (Border, 1985).*

İspat. $\{y^v\}$, $f(X)$ de herhangi bir dizi olsun. O zaman $y^v = f(x^v)$,$(v = 1, 2, ...)$, olacak biçimde X kümesinde bir $\{x^v\}$ dizisi vardır. X kompakt bir küme olduğu için $\{x^v\}$'nin öyle bir alt dizisi $\{x^\mu\}$ vardır ki bir $x \epsilon X$ noktasına yakınsar ve f sürekli bir fonksiyon oduğu için $\{y^v\}$'nin alt dizisi $f(x^v)$, $f(X)$ kümesinde $f(x)$ noktasına yakınsaktır. ■

Bir $\{x^v\}$ dizisi P özelliğine sahip olduğunda bu dizinin bütün alt dizileri P özelliğine sahip olacak biçimde bir P özeliği olsun. Kompakt bir X kümesi içinde P özeliğine sahip bir $\{x^v\}$ dizi düşünelim. X kompakt olduğu için $\{x^v\}$ nin P özelliğine sahip yakınsak bir alt dizisi$\{x^{v_\mu}\}$ vardır. O zaman genellemeyi kaybetmeden orjinal $\{x^v\}$ dizisini yakınsak olarak düşünebiliriz.

Teorem 2.50 *Eğer X kompakt ise $f : X \to Y$ bire-bir örten sürekli fonksiyonunun tersi f^{-1}süreklidir (Border, 1985).*

İspat. $\{y^v\}$ dizisi Y'de y noktasına yakınsasın. $x^v = f^{-1}(y^v)$ ve $x = f^{-1}(y)$ olsun.$\{x^v\}$'nin x'e yakınsadığını göstermek üzere tersini kabul edelim.O zaman bazı alt diziler için

$\{x^{v_s}\}$ $(s = 1, 2, ...)$ ve $\varepsilon > 0$ için $\|x^{v_s} - x\| \geq \varepsilon$. X kompakt olduğu için genelliği bozmadan x^{v_s} X'de bir x^0 noktasına yakınsadığını düşünebiliriz. f sürekli oduğu için $f(x^{v_s}) \to f(x^0) = y^0$. $\{f(x^{v_s})\}$, $\{y^v\}$ dizisinin alt dizisi olduğu için $f(x^0) = f(x)$. f bire-bir olduğu için $x^0 = x$. Bu da kabulümüzle çelişir. $\lim_{v\to\infty} f^{-1}(y^v) = f^{-1}(y)$ olduğu için f^{-1}süreklidir. ■

Tanım 2.51 *$\{G_\lambda : \lambda\epsilon\nabla\}$ açık kümelerden oluşan bir aile olsun. Eğer $X \subset \cup_{\lambda\epsilon\nabla} G_\lambda$ ise bu aileye X in bir açık örtüsü denir (Border, 1985).*

Tanım 2.52 *(Açık Örtülerle Kompaktlık Tanımı) X kümesinin herhangi bir açık örtüsünün sonlu alt örtüsü varsa X kompakt bir kümedir (Border, 1985).*

Tanım 2.53 *$U(a, \varepsilon) = \{x : \ dis(x, a)\langle\varepsilon\ \}$ kümesi X 'de a noktasının ε-komşuluğu olsun. X' in $\{a^i : i = 1, 2, ..., s\ \}$ sonlu alt kümesinin ε-komşuluğu $\{U(a_i, \varepsilon) : \ i = 1, 2, ..., s\ \}$ X kümesini örtüyorsa bu sonlu alt kümeye X metrik uzayının ε-neti denir (Nikaido, 1968).*

Lemma 2.54 *Eğer bir X metrik uzayı kompakt ise, X in herhangi bir $\epsilon > 0$ için ε-neti vardır (Nikaido, 1968).*

İspat. X kümesinin ε-neti olmadığını düşünelim. Herhangi bir a^1 noktası alalım. X'in ε-neti olmadığı için $U(a^1, \varepsilon)$, X 'i örtemez, yani bazı $a^2\epsilon X$ noktaları $U(a^1, \varepsilon)$ kümesine ait değidir.Yine aynı sebebten bazı a^3 noktaları vardır ki ne $U(a^1, \varepsilon)$ ne de $U(a^2, \varepsilon)$ kümesine aittir. Bu düşünce ile devam edersek $a^{v+1} \notin \cup_{i=1}^{v} U(a^i, \varepsilon)$ olacak biçimde bir dizi belirlenir. Dizinin yapısından dolayı $\mu \neq \nu$ için $dis(a^\mu, a^\nu) \geq \varepsilon$.Yani X'deki bu dizinin yakınsak bir alt dizisini bulmak mümkün değildir; bu ise X 'in kompakt olmasıyla çelişir. ■

Kompakt değerli noktadan kümeye tanımlı fonksiyonları Kakutani sabit nokta teoreminin incelenmesinde kullanılmak üzere aşağıda incelenmiştir.

$f : X \to Y$ nokta değerli fonksiyonu, bir $x \in X$ noktasını , bir $f(x) \in Y$ noktasına taşımaktadır. Bazı durumlarda X in bütün elemanlarını Y'nin alt kümelerine taşıyan fonksiyonlara ihtiyaç duyulmaktadır. Böyle fonksiyonlara *küme değerli veya noktadan kümeye (correspondence)* fonksiyon denilmektedir. Küme değerli bir fonksiyon, X 'in bütün noktalarını, Y 'nin bütün alt kümelerinin ailesine taşıyan nokta değerli bir fonksiyon olarak da düşünülebilir. Bu sebeple, X 'ten Y 'ye tanımlı küme değerli fonksiyonu, 2^Y Y'nin alt kümelerinin ailesi olmak üzere, $f : X \rightarrow 2^Y$ olarak gösterilmektedir. Küme değerli bir fonksiyonun görüntü kümeleri sadece tek bir noktadan oluşuyorsa, bu fonksiyona nokta değerli fonksiyon da denilebilir. Yani nokta değerli fonksiyon küme değerli fonksiyonun özel halidir.

Nokta değerli $f : X \rightarrow Y$ fonksiyonu için iki ayrı süreklilik tanımı şöyle yapılmaktadır:

Tanım 2.55 (I) *Yakınsaklık anlamındaki süreklilik:* X *'deki herhangi yakınsak dizi* $\{x^v\} \rightarrow x$ *için* $\{f(x^v)\} \rightarrow f(x)$ *ise* f *,* x*'te süreklidir (Nikaido, 1968).*

(II) *Cauchy anlamında süreklilik:* $f(x)$ *in herhangi bir* U *komşuluğu için* $f(V) \subset U$ *olacak biçimde* x *in bir* V *komşuluğu varsa* f *,* x *te süreklidir.*

(I) ve (II) 'nin $f : X \rightarrow 2^Y$ küme değerli fonksiyonu için sırasıyla genelleştirilmiş tanımları şöyledir:

Tanım 2.56 $f : X \rightarrow 2^Y$ *küme değerli fonksiyon olsun.* $\lim x^v = x$*,* $\lim y^v = y$ *ve* $y^v \in f(x^v)$ *için* $y \in f(x)$ *ise,* f*,* x*'te kapalıdır.* $f : X \rightarrow 2^Y$ *eğer bütün* $x \in X$ *için kapalı ise* f *kapalıdır denir (Nikaido, 1968).*

$f : X \rightarrow 2^Y$ küme değerli fonksiyonun grafiği $G_f = \{(x, y) : y \epsilon f(x)\}$'in kapalılığı, f'nin kapalılığına denktir (Nikaido, 1968).

Tanım 2.57 $f : X \rightarrow 2^Y$ *küme değerli fonksiyon olsun. Görüntü kümesi* $f(x)$*'in herhangi bir* U *komşuluğu için,* $f(V) = \cup_{z \in V} f(z)$ *olmak üzere,* $f(V) \subset U$ *olacak biçimde* x*'in bir* V *komşuluğu varsa* f *,* x *te üst yarı süreklidir* (*upper semi continuous*) *denir.* $f : X \rightarrow 2^Y$ *eğer bütün noktalarında üst yarı sürekli ise* f *üst yarı süreklidir denir (Nikaido, 1968).*

$f(x)$ boştan farklı kümeler olmak üzere $f : X \rightarrow 2^Y$ küme değerli fonksiyonu için yukarıda iki süreklilik tanımı verilmiştir.Bu iki tanım arasındaki ilişki aşağıda incelenmiştir.

(α) Her görüntü kümesi $f(x)$, Y 'de kapalı olsun ve f üst yarı sürekli olsun.

(β) f kapalı olsun.

Lemma 2.58 *(i)* $(\alpha) \to (\beta)$

(ii) Eğer Y *kompakt ise*

$(\beta) \to (\alpha)$ *(Nikaido, 1968).*

Lemma 2.59 $f : X \to 2^Y$ *küme değerli fonksiyonunun her görüntü kümesi* $f(x)$, *boştan farklı kompakt küme olsun. Eğer* X *kompakt ve* f *üst yarı sürakli ise* $f(X) = \cup_{x \in X} f(x)$ *kompakttır (Nikaido, 1968).*

Küme değerli bir fonksiyon $f : X \to 2^X$ için sabit nokta kavramı, nokta değerli bir fonksiyon için bilinen sabit nokta kavramının genelleştirilmiş biçimidir.

Tanım 2.60 $f : X \to 2^Y$ *küme değerli fonksiyon olmak üzere,* $x^\star \in f(x^\star)$ *ise* $x^\star \in X$, f*'nin sabit noktasıdır (Nikaido, 1968).*

Ekonomide bir çok uygulamada, küme değerli fonksiyonlar kompakt değerlidir. Yukarıda komşuluk kavramı kullanılarak verilen üst yarı süreklilik tanımı için, fonksiyon kompakt değerli olduğunda, dizi kavramı kullanılarak denk bir tanım verilebilir. Bir çok ispatta bu denk tanım ile çalışmak daha kolaydır.

Tanım 2.61 *(Dizilerle üst yarı süreklilik tanımı)* $f : X \to 2^Y$ *küme değerli fonksiyonunun görüntü kümeleri kompakt olsun.* $x \in X$ *olmak üzere,* x *noktasına yakınsayan her* $\{x_n\}$ *dizisi ve* $y_n \in f(x_n)$ *olan her* $\{y_n\}$ *dizisi için,* (y_n) *dizisinin bir limit noktası* $f(x)$ *kümesinin elemanı ise* f, x *noktasında üst yarı süreklidir denir (Nikaido, 1968).*

3 n-KİŞİ İŞBİRLİKSİZ OYUNLARDA DENGE

Nash, teoreminde önce oyun ve ödenti kavramlarını daha sonra oyunda dengeyi tanımlamış ve teoremin son bölümünde de Kakutani teoremine dayanarak dengenin varlığını kanıtlamıştır.

Çalışmamızın 2.1 bölümde oyun teorisine ilişkin temel kavramlar ve 2.2 bölümünde dengenin varlığının gösterimesinde merkezi bir rol oynayan Kakutani sabit nokta teoreminin inclenebilmesi ve denge kavramının yapısının anlaşılabilmesi için gerekli matematiksel alt yapı incelenmiştir. Nash dengesinin varlığının gösterimesi Kakutani sabit nokta teoreminin oyun teorisine bir uygulamasıdır. Bu bölümde sabit nokta teoremleri ve dengenin varlığı incelenmiştir.

3.1 Sabit Nokta Teoremleri

Sabit nokta teorisi, verilen bir denklemin belirli bir türden çözümü olup olmadığını söyleyen güçlü matematiksel bir araçtır. Sabit nokta teorisi, ekonomik çalışmalarda yoğun olarak kullanılmıştır. Özellikle, von Neuman ekonomik süreç konusundaki, "Bir Ekonomik Denklemler Sistemi ve Brouwer Sabit Nokta Teorisinin Genellemesi (1932)" başlıklı makalesinde ve 1977'de "Genel Denge Teorisi" çalışmalarıyla Nobel Ödülü'nü alan Kenneth Arrow sabit nokta teoremlerini çalışmalarında yoğun olarak kullanmışlardır (Casti,1996). Sabit nokta teorisi, varsa, çözümü bulmak anlamına geldiği için oyun teorisinde de temel bir rol oynar.

Bu çalışmada incelenen, işbirliksiz oyunlarda Nash dengesinin varlığını göstermek, Nash'in makalesinde(1950) de bahsettiği üzere, Kakutani sabit nokta teoreminin oyunlar kuramına bir uygulamasıdır. Kakutani 1941 yılında yayınladığı "Brouwer Sabit Nokta Teoreminin Bir Genelleştirilmesi" başlıklı makalesinde, Brouwer'ın sabit nokta teoreminin genelleştirmiş ve bu genelleştirmenin John von Neuman'ın Minimaks teoremi ile nasıl ilişkilendirileceğini göstermiştir.

20. yy başlarında ünlü Alman matematikçi L.E.J. Brouwer sabit noktalar için güçlü bir varlık teoremi ortaya koymuştur. Brouwer sabit noktaların X kompakt ve konveks bir küme ve f sürekli bir fonksiyon olduğunda var olduğunu ileri sürmüştür. Ancak ispatı, bu tür özgün bir noktanın bulunması için ne yapalılabileceği konusunda en ufak bir ip ucu dahi içermemektedir. İspat, yapısal bir yaklaşımdan çok, var olma ile

ilgili fikir yürütmelere dayanmaktadır. Brouwer'ın sabit noktaların varlığını yapısal olmayan bir yöntemle ispatlamasından bir kaç yıl sonra, 1928'de Emmanuel Sperner doktora tezinde günümüzde Sperner Önteoremi olarak anılan bir sonuç ortaya koydu. Bu geometrik objeler kümesindeki elemanların adlandırılmasını konu alan bu çalışma, sabit noktaların gerçekten hesaplanmasında kullanılan bir algoritmalar ailesinin geliştirilmesine temel olmuştur (Casti,1996).

1960'lı yıllara gelindiğinde matematiksel programlama ve ekonomi alanlarında çalışanlar, Sperner Önteoremi'nin sabit noktaların yaklaşık sayısal değerlerini bulmaktaki yararını keşfetmişlerdir. İlgi duyulan uzayları küçük parçalara bölecek sonra da Sperner Önteoremi ile var olduğu bilinen, köşeleri farklı işaretli parçaları verimli biçimde arayacak hesaplama algoritmaları geliştirilmiştir (Casti,1996).

Bu bölümde "Brouwer Sabit Nokta Teoremi" ve "Kakutani Sabit nokta Teoremi" incelenmiştir. Bu bölümde "Brouwer Sabit Nokta Teoremi" ispatı incelenirken Sperner'ın Önteoremi'nden faydalanılmıştır. Bu sebeple bu bölümde Sperner'ın Önteoremi de incelenmiştir.

Tanım 3.1 X *bir küme,* $f : X \to X$ *tanımlı bir fonksiyon olsun.* $x^* \in X$, $f(x^*) = x^*$ *ise* x^*, f *fonksiyonunun sabit noktasıdır denir (Nıkaido, 1968).*

Sabit noktaların varlığı X kümesinin topolojik yapısına ve f fonksiyonunun özelliklerine bağlıdır.

Lemma 3.2 $(Sperner's\ Lemma,\ Sperner, 1928)$

$S = \overline{x^0x^1...x^k}$ *simpleksi v kez barisentrik bölünmüş olsun.* $y \to \vartheta(y)$ *fonksiyonu bölünmüş simpleksin bir verteksi y'yi, y'nin taşıyıcısının bir verteksine götürsün.* $i \neq j$ *için* $\vartheta(y^i) \neq \vartheta(y^j)$ *olacak biçimde bazı k-boyutlu türetilmiş simpleksler* $S^v = \overline{y^0y^1...y^k}$ *vardır. Ayrıca bu k-boyutlu türetilmiş simpleksler tek sayıdadır (Nıkaido, 1968).*

İspat. İspat tümevarım yöntemiyle yapılmıştır. $k = 0$ için lemmanın doğruluğu açıktır. Lemmanın daha net anlaşılması için $k = 1$ durumunu incelenmiştir.

(i) $k = 1$ olsun. $S = \overline{x^0x^1}$ simpleksi başlangıç ve bitiş noktaları x^0 ve x^1 olan bir doğru parçasıdır. Bu doğru parçası üzerinde belirli sayıda, türetilmiş simpleklerin verteksleri vardır. y türetilmiş bir simpleksin verteksi olmak üzere, $\vartheta(y)$'nin görüntüsü x^0 veya x^1'dir. Şimdi, $\vartheta(y)$'nin x^0'dan x^1'e veya x^1'den x^0'a kaç kez değiştiğini incelecektir. Taşıyıcı kavramının tanımından $\vartheta(x^0) = x^0$ ve $\vartheta(x^1) = x^1$olduğu görülmektedir. $\vartheta(y)$ bazı türetilmiş verteksler de değişmek zorundadır. y^0, y^1 türetilmiş verteksler olmak üzere y^1, y^0'ın hemen sağında ve $\vartheta(y^0) = x^0$, $\vartheta(y^1) = x^1$ olsun. Bu durumda aranılan türetilmiş simpleks $\overline{y^0y^1}$'dir. Ayrıca aranılan türetilmiş simplekslerin sayısı, $\vartheta(y)$'nin değerinin değişim sayısına eşittir; ve bu sayı tek olmak zorundadır. Aksi halde son değişim x^1'den x^0'a olur ki bu değişimle $\vartheta(x^1) = x^0$ çelişkisi elde edilir.

(ii) Lemmanın $(k-1)$ için doğru olduğunu kabul edilmiş; k için doğruluğunu araştırılmıştır. v.dereceden türetilmiş simpleks yerine, türetilmiş simpleks denilmiştir. Ispatta geçen bütün simpleksler, S orjinal simpleksi ve $S^\imath$ türetilmiş simpleksi dahil olmak üzere, k-boyutlu ve adı geçen bütün yüzler $k-1$ boyutludur.

$S^\imath = \overline{y^0y^1...y^k}$ türetimiş simpleksi $i \neq j$ için $\vartheta(y^i) \neq \vartheta(y^j)$ ise, $S^\imath$ *düzenlidir* denir. $k-1$-boyutlu $\overline{z^0z^1...z^{k-1}}$ türetilmiş simpleksi $i \neq j$ için $\vartheta(z^i) \neq \vartheta(z^j)$ ve $\vartheta(z^i) \neq x^k$ $(i = 0, 1, ..., k-1)$ ise $\overline{z^0z^1...z^{k-1}}$ *düzenlidir* denir.

$$\alpha := \text{ düzenli türetilmis simplekslerin sayısı}$$

$$\beta := S\text{'nin sınırındaki düzenli türetilmis yüz simplekslerinin sayısı}$$

$$\beta(S^\imath) := \text{türetilmis } S^\imath \text{ simpleklerinin düzenli yüzlerinin sayısı}$$

Amaç, α'nın tek bir sayı olduğunu göstermektir. Öncelikle $\beta(S^\imath)$ araştırılmıştır.Eğer $S^\imath$ düzenli ise simpleksin k adet verteksi $y^0, y^1, ..., y^{k-1}$, ϑ ile sırasıyla $x^0, x^1, ..., x^{k-1}$'e giderken y^k'da ϑ ile x^k'ya gitmektedir. Bu sebeple, $S^\imath$'nün bir yüzü $\overline{y^0y^1...y^{k-1}}$ mutlaka düzenlidir. $S^\imath$'nün diğer yüzlerinin ortak verteksi y^k'da ϑ ile x^k'ya gider, bu sebeple bu yüzler düzenli değildirler. Düzenli $S^\imath$ için $\beta(S^\imath) = 1$'dir. Eğer $S^\imath$düzenli değil ise $x^0, x^1, ..., x^k$'dan bazıları $S^\imath$'nün verteksl erinin ϑ altındaki görüntüsü değildir; iki durum düşünülebilir:

(i) $x^0, x^1, ..., x^{k-1}$'den bazıları $S^\imath$'nün vertekslerinin görüntüsü değildir

ya da;

(ii) $x^0, x^1, ..., x^{k-1}$'in hepsi $S^\imath$'nün vertekslerinin görüntüsüdür ve x^k, $S^\imath$'nün hiç bir verteksinin görüntüsü değildir.

Eğer (i) durumu gerçekleşiyorsa $\beta(S^\imath) = 0$; eğer (ii) durumu gerçekleşiyorsa $S^\imath$'nün vertekslerinin kümesi, $\{ x^0, x^1, ..., x^{k-1}\}$ kümesini ϑ ile örter. $k+1$ tane eleman ϑ ile k tane elemana gitmiştir; yani farklı iki eleman ϑ ile aynı elemana gitmiştir. Bu düşünce ile $S^\imath = \overline{y^0y^1...y^k}$ simpleksi $\vartheta(y^i) = x^i$ $(i = 0, 1, ..., k-1), 0 \leq j \leq k-1$ olmak üzere, $\vartheta(y^k) = x^j$ formunda elde edilebilir. Böylelikle $S^\imath$'nün iki düzenli yüzü olduğu görülmektedir. Eğer y^i ve y^{i+1}, ϑ altında aynı vertekse gidiyorlarsa yüzlerden birisi $\overline{y^0y^1...y^{i-1}y^iy^{i+2}...y^k}$ diğeri ise $\overline{y^0y^1...y^{i-1}y^{i+1}y^{i+2}...y^k}$'dir. Böylelikle $\beta(S^\imath) = 2$'dir.

$$\beta^\imath(S^\imath) = \begin{cases} 1 & , \textit{eğer } S^\imath \textit{ düzenli ise} \\ 0 \textit{ veya } 2 & , \textit{eğer } S^\imath \textit{ düzenli değil ise} \end{cases}$$

O halde

$$\alpha \equiv \sum \beta^\imath(S^\imath) \quad (mod2)$$

Burada toplam bütün türetilmiş $S^\imath$ simpleksleri üzerinden alınmıştır. Yukarıdaki denkliğin sağ tarafı türetilmiş simplekslerin düzgün yüzlerinin sayısını vermektedir. Burada bazen bir yüz iki kez hesaba katılmış olmaktadır. Teorem 4.2 'ye göre düzgün türetilmiş yüz $T^\imath$, $S^\imath$'nün sınırında ise türetilmiş bir simpleksin bir yüzüdür diğer koşulda $T^\imath$ türetilmiş iki simpleksin ortak bir yüzüdür. O halde $T^\imath$, $S^\imath$'nün sınırında ise bir kez, diğer koşulda iki kez hesaba katılmıştır. Bu değerlendirme ışığında

$$\beta \equiv \sum \beta^\imath(S^\imath) \quad (mod2)$$

Yukarıdaki iki denklikten;

$$\alpha \equiv \beta \quad (mod2)$$

Eğer β tek bir sayı ise, α tek bir sayıdır. β tek sayı olduğunu görelim. Lemmanın $k-1$ için gerçeklendiğini varsaymıştık. S'nin sınırında bulunan düzgün türetilmiş yüz $T^\imath$, $\overline{x^0x^1...x^{k-1}}$ yüzünün üzerinde bulunmaktadır, aksi halde $T^\imath$'nün düzgünlüğü ile çelişir. $\overline{x^0x^1...x^{k-1}}$ simpleksine ait düzgün türetilmiş simpleks ile , S'nin $\overline{x^0x^1...x^{k-1}}$ yüzünde bulunan düzgün türetilmiş yüz aynı şeyi ifade etmektedir. $\overline{x^0x^1...x^{k-1}}$ simpleksinin düzgün türetilmiş simplekslerinin sayısı kabulden tektir; yani β tektir. ■

Teorem 3.3 $(Brouwer, 1909, 1910)$,

X, R^n'de boştan farklı, kompakt ve konveks bir küme ve $f : X \to X$ fonksiyonu sürekli olsun. O zaman f fonksiyonunun bir sabit noktası vardır;

$$f(x^*) = x^*$$

(Nikaido, 1968)

İspat. Eğer $\dim(X) = k$ ise teorem 2.38 ile X herhangi, bir k boyutlu simplekse homomorfiktir; özel olarak standart simpleks düşünülebilir:

$$P_{k+1} = \{p \ / \ \sum_{i=0}^{k} p_i = 1, \ p_i \geq 0 \ (i = 0, 1, ..., k)\}$$

P_{k+1} standart simpleksinin $k+1$ verteksi , $(k+1)$ dereceden birim matrisin kolonlarıdır. φ, P_{k+1}'den X 'e tanımlanan homomorfizma olsun. $\varphi^{-1} f \varphi : P_{k+1} \to P_{k+1}$ olmak üzere $(\varphi^{-1} f \varphi)(p) = \varphi^{-1} f(\varphi(p))$ bileşke fonksiyonu oluşturulsun. Görüldüğü üzere f 'nin sabit noktası x noktasıdır ancak ve ancak $p = \varphi^{-1}(x)$ noktası bileşke fonksiyonunun sabit noktasıdır. Bu sebeple X yerine P_{k+1} kümesi kullanarak ıspat sınırlandırılabilir.

$f : P_{k+1} \to P_{k+1}$ bir sürekli fonksiyon olsun. $\forall p \in P_{k+1}$ için, $f(p)$'nin koordinatları $f_i(p) \geq 0$, $(i = 0, 1, ..., k)$, ve $\sum_{i=0}^{k} f_i(p) = 1$ koşullarını sağlamaktadır. $k+1$ tane alt küme tanımlayalım:

$$F_i = \{p / \ p \in P_{k+1}, \ p_i \geq f_i(p)\} \qquad (i = 0, 1, ..., k)$$

f_i'ler sürekli fonksiyon oldukları için, F_i kümeleri P_{k+1}'in kapalı alt kümeleridirler.

$e^0, e^1, ..., e^k$, P_{k+1}'in $k+1$ verteksi olsun. $T = \overline{e^{i_0} e^{i_1} ... e^{i_m}}$, P_{k+1}'in bir yüzü olmak üzere

$$T \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_m}$$

olur.

T 'nin herhangi bir elemanı $p_{i_0} + p_{i_1} + ... + p_{i_m} = 1$ koşulunu sağlamaktadır. Eğer p, $F_{i_0}, F_{i_1}, ..., F_{i_m}$ kümelerinin hiçbirisine ait değilse $t = 0, 1, ..., m$ için, $p_{i_t} \leq f_{i_t}(p)$ 'dir; t üzerinden toplam alınırsa,

$$1 = \sum_{t=0}^{m} p_{i_t} \langle \sum_{t=0}^{m} f_{i_t}(p) \leq \sum_{i=0}^{k} f_i(p) = 1$$

çelişkisi elde edilmektedir.

Şimdi P_{k+1}'in v.barisentrik bölümünü alalım. $\{F_i\}$ ailesini kullanarak lemma 2.43'deki koşulları sağlayan $y \to \vartheta(y)$ fonksiyonunu tanımlayalım. y, v.dereceden türetilmiş bir verteks olsun. Eğer $T = \overline{e^{i_0} e^{i_1} ... e^{i_m}}$ y'nin taşıyıcısı ise, $T \subset F_{i_0} \cup F_{i_1} \cup ... \cup F_{i_m}$ olduğu için y, en az bir $F_{i_0}, F_{i_1}, ..., F_{i_m}$ kümesinin elemanıdır. Bu y 'yi içeren kümeye F_{i_h} denilsin. Ve $\vartheta(y) = e^{i_h}$ tanımlansın. Yani $y \to \vartheta(y)$ fonksiyonunu v.dereceden türetilmiş bütün verteks y'leri, bu verteksin taşıyıcısının bir verteksi $\vartheta(y)$'ye götürdüğü için Lemma 2.43'e göre en az bir v.dereceden düzenli türetilmiş bir simpleks S^v vardır.

$$S^v = \overline{y^{0_v}y^{1_v}...y^{k_v}} \quad y^{i_v} \in F_i \quad (i = 0, 1, ..., k)$$

olmak üzere, Teorem 2.44 ile

$$\max_{0 \leq i,j \leq k} \left\| y^{iv} - y^{jv} \right\| = \delta(S^v) \leq \left(\frac{k}{k+1} \right)^v \delta(P_{k+1})$$

$v \to +\infty$ iken eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşır. Ayrıca P_{k+1} kompakt olduğu için $\{v\}$'nin $\{v^\imath\}$ alt dizisi için, $\{y^{iv^\imath}\} \to p^i$'dir. $\{y^{iv^\imath}\}$, kapalı F_i alt kümesinde olduğu için $p^i \in F_i$'dir. Yukarıda belirtildiği gibi $v^\imath \to +\infty$ için $\left\| y^{iv^\imath} - y^{jv^\imath} \right\| \to 0$. Yani bu $k+1$ tane p^i noktaları $v^\imath \to +\infty$ için birbirlerinden hemen hemen farksızdırlar. Eğer bu birbirlerinden farksız limit noktalarına p^*denilirse, p^* bütün F_i'lerin elemanıdır, yani $p_i^* \geq f_i(p^*)$, $(i = 0, 1, ..., k)$. Son olarak $\sum p_i^* = \sum f_i(p^*) = 1$ olduğu için $p_i^* = f_i(p^*)$. Bu ise $p^* = f(p^*)$ olduğunu ıspatlar. ■

Brouwer'in sabit nokta teoremi zamanla daha kullanışlı bir forma dönüştürülmüştür. Bu alandaki gelişmeler von Neumann (1937)'ın Brouwer'in sabit nokta teoremini genelleştirerek bir ekonomik probleme uygulamasıyla başlamış ve Kakutani (1941)'nin Brouwer'in sabit nokta teoremini genelleştirerek kendi sabit nokta teoremini ortaya koymasıyla devam etmiştir. Aşağıda, çalışmamızda merkezi bir yere sahip Kakutani'nin sabit nokta teoremini incelenmiştir.

Teorem 3.4 *(Kakutani, 1941) $X \subset R^n$ boştan farklı kompakt ve konveks bir küme ve $f : X \to 2^X$ (a) ve (b)'yi sağlayan küme değerli bir fonksiyon olsun.*

(a) $\forall x \in X$ için, $f(x)$ görüntü kümesi boştan farklı ve X'in konveks bir alt kümesi

(b) f kapalı bir fonksiyon.

O zaman f'in bir sabit noktası vardır (Nıkaido, 1968).

İspat. X kompakt bir küme olduğu için, X'in herhangi bir ε 0 için

$$N_\varepsilon = \{a^{\varepsilon_i} \; : \; i = 1, 2, ..., s_\varepsilon\}$$

$\varepsilon-$net kümesi vardır. $f(a^{\varepsilon_i})$ kümesinden, keyfi b^{ε_i} noktası alınarak, X üzerinde tanımlı s_ε tane sürekli $\varphi_i^\varepsilon(x)$ fonksiyonlarını tanımlanmıştır:

$$\varphi_i^\varepsilon(x) = \max\left(\varepsilon - \|x - a^{\varepsilon_i}\|, 0\right) \quad (i = 1, 2, ..., s_\varepsilon)$$

Bu tanımlanan fonksiyonlar negatif değildirler ve toplamları her zaman pozitiftir. Çünkü; N_ε bir $\varepsilon-$net kümesi olduğu için $\forall x \in X$ için, öyle bazı i'ler vardır ki $\varepsilon > \|x - a^{\varepsilon_i}\|$'dır ve bu i'ler için $\varphi_i^\varepsilon(x)$ 0'dır. $\varphi_i^\varepsilon(x)$ fonksiyonları kullanılarak, s_ε tane ağırlık fonksiyonu tanımlanmıştır:

$$\varpi_i^\varepsilon(x) = \varphi_i^\varepsilon(x) / \sum_{j=1}^{s_\varepsilon} \varphi_j^\varepsilon(x), \qquad (i = 1, 2, ..., s_\varepsilon)$$

Bu ağırlık fonksiyonları kullanılarak nokta değerli ve sürekli $f^\varepsilon(x)$ fonksiyonu tanımlanmıştır:

$$f^\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{s_\varepsilon} \varpi_i^\varepsilon(x)\ b^{\varepsilon_i}$$

$$b^{\varepsilon_i} \in X \ (i = 1, 2, ..., s_\varepsilon) \ ve \ \varpi_i^\varepsilon(x) \geq 0, \ \sum \varpi_i^\varepsilon(x) = 1$$

X konveks olduğu için $f^\varepsilon(x) \in X$ 'tir. Bu sebeple $\forall\ \varepsilon > 0$ için nokta değerli, sürekli $f^\varepsilon : X \to X$ fonksiyonu oluşturulmuştur. Brouwer'in sabit nokta teoremi ile f^ε'nun bir sabit noktasının var olduğu görülmektedir; $x^\varepsilon = f^\varepsilon(x^\varepsilon)$.

Yukarıda ki sonucu limiti 0 olan ve pozitif sayılardan oluşan $\{\varepsilon_v\}$ dizisine uygulansın. X kompakt olduğu için sabit noktaların dizisi $\{x^{\varepsilon_v}\}$'nin, $x^{\varepsilon_v} = f^{\varepsilon_v}(x^{\varepsilon_v})$, yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu alt dizinin yakınsadığı nokta $x^\bigstar$ olsun. Genel düşünceyi bozmadan pozitif sayılardan oluşan, seçtilen $\{\varepsilon_v\}$ dizisinin aşağıdakileri sağladığı düşünülmüştür.

$$(\alpha) \ \lim_{v \to +\infty} \varepsilon_v = 0$$

$$(\beta) \ \lim_{v \to +\infty} \ x^{\varepsilon_v} = x^\bigstar$$

$$(\gamma) \ x^{\varepsilon_v} = f^{\varepsilon_v}(x^{\varepsilon_v})$$

f 'nin aranılan sabit noktasının $x^\bigstar$ olduğu gösterilecektir. Bu amaçla, $U_\delta = \{u : \|u\| \langle \delta\ ,\ \delta \rangle 0\}$ olmak üzere $\sigma_\delta = f(x^\bigstar) + U_\delta$ kümesi alınsın. Eğer herhangi bir $\delta > 0$ için, $x^\bigstar \in \sigma_\delta$ ise $dis(x^\bigstar, f(x^\bigstar) = 0$ olur ki; bu da $f(x^\bigstar)$ kapalı olduğu için, $x^\bigstar \in f(x^\bigstar)$ olmasını gerektirir. Şimdi herhangi bir $\delta > 0$ için $x^\bigstar \in \sigma_\delta$ olduğu gösterilecektir.

U_δ açık bir küme ve $\sigma_\delta = \cup(x + U_\delta)$ birleşimi bütün $x \in f(x^\bigstar)$ üzerinden alındığı için, σ_δ, $f(x^\bigstar)$'i kapsayan açık bir kümedir. Ayrıca $f(x^\bigstar)$ ve U_δ konveks kümeler oldukları için vektörel toplamları σ_δ yine konveks bir kümedir.

Lemma 2.58 (ii) ile, f'nin üst yarı sürekli olduğunu açıktır. Bu sebeple σ_δ, $f(x^\bigstar)$ 'ı kapsayan açık bir küme olduğundan $x^\bigstar$'ın öyle bir ε komşuluğu

$V_\varepsilon = \{\ x : \left\|x - x^\star\right\| \langle \varepsilon, x \in X\}$ vardır ki $f\ (\ V_\varepsilon) \subset \sigma_\delta$ dir.Yeterince büyük v'ler için (α) ve (β) ile $\varepsilon_v < \varepsilon/2$ ve $x^{\varepsilon_v} \in V_{\varepsilon/2}$'dir. Bu yeterince büyük v'ler için $\varpi_i^{\varepsilon_v}\left(x^{\varepsilon_v}\right)$ 0 olur yani $\|a^{\varepsilon_v i} - x^{\varepsilon_v}\| < \varepsilon_v < \varepsilon/2$

$$\left\|a^{\varepsilon_v i} - x^\star\right\| \leq \left\|a^{\varepsilon_v i} - x^{\varepsilon_v}\right\| + \left\|x^{\varepsilon_v} - x^\star\right\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\varpi_i^{\varepsilon_v}\left(x^{\varepsilon_v}\right) > 0$ ı sağlayan i ve yeterince büyük v sayıları için

$$b^{\varepsilon_v i} \in f\left(a^{\varepsilon_v i}\right) \subset f\ (\ V_\varepsilon) \subset \sigma_\delta.$$

$$x^{\varepsilon_v} = f\left(x^{\varepsilon_v}\right) = \sum \varpi_i^{\varepsilon_v}(x)\ \ b^{\varepsilon_v i}$$

Yukarıdan da görüldüğü üzere yeterince büyük v'ler için x^{ε_v}, σ_δ'daki $b^{\varepsilon_v i}$'lerin konveks bileşimidir. σ_δ konveks olduğu için yeterince büyük v'ler için $x^{\varepsilon_v} \in \sigma_\delta$. (β) ile $x^\star \in \sigma_\delta$. Daha önce de söylendiği gibi $x^\star \in \sigma_\delta$ ve $f(x^\star)$ kapalı olduğu için $x^\star \in f(x^\star)$ dır. ■

3.2 n- kişi Oyunlarda Nash Dengesinin Varlığı

Bu bölümde, n-kişi oyunlarda dengenin varlığının incelenmesinden önce, en iyi cevap fonksiyonları incelenmiş ve denge ile en iyi cevap fonksiyonları arasındaki ilişki incelenmiştir.

Stratejiler kümesi ve ödenti fonksiyonlarının doğal bir genişlemesi vardır. Salt stratejiler kümesi üzerinde bir denge noktasına ulaşmak mümkün değil ise, denge karma stratejiler kümesi üzerinde aranır.

Tanım 3.5 *i. oyuncunun karma stratejileri kümesi;*

$$Q_i = \left\{ q_i \in R_+^m : \sum_{k=1}^{m} q_{ik} = 1 \right\}$$

ve $i \neq j$ olmak üzere j. oyuncunun karma stratejileri kümesi;

$$Q_j = \left\{ q_j \in R_+^d : \sum_{k=1}^{d} q_{jk} = 1 \right\}$$

eşitlikleri ile tanımlanır (Owen,1982).

Q_i; R^m'de ve Qj; R^d'de olmak üzere, Q_i ve Qj birim (strandart) simplekslerdir. Q_i, i. oyuncunun karma stratejilerini içerdiği gibi bütün salt stratejilerini de içerir; örneğin $q_i = (1, 0, .., 0)$ noktası *i.* oyuncunun bir salt strateji noktasıdır.

Tanım 3.6 *Sadece bir bileşeni "1" olan, q_i karma strateji noktalarına "verteks" denir. (Owen,1982)*

Yukarıda görüldüğü üzere i. oyuncunun m, *j.* oyuncunun d adet salt stratejisi vardır.

Tanım 3.7 *i. oyuncunun salt stratejileri kümesi A_i olmak üzere, $(a_i \in A_i)$, Q_i karma strateji kümesini fonksiyonların yardımı ile tanımlamak da mümkündür:*

$$Q_i = \left\{ q_i : A_i \longrightarrow [0,1] : \sum_{a_i \in A_i} q_i(a_i) = 1 \right\}$$

ve $Q = \prod_i Q_i$'dır (Friedman, 1990).

Tanım 3.8 *q karma stratejisi seçildiğinde i. oyuncunun beklenen ödentisi;*

$$EP_i(a) = \sum_{a \in A} q(a) P_i(a)$$

öyle ki;

$$q(a) = \prod_{j=1}^{N} q_j(a_j)$$

(Owen,1982)

Yukarıda ki formüllerden de görüldüğü üzere, *i.* oyuncunun beklenen ödentisi, bütün oyuncuların karma stratejilerine bağlıdır.

Oyunculardan birisi, mesela *i.* oyuncu, diğer oyuncuların belirli stratejileine karşı $((q_1, .., q_{i-1}, q_{i+1}, .., q_n))$ oyunun sonunda elde edeceği ödentisini (P_i) maksimum seviyeye taşımak için, kendi stratejisini belirlemek üzere rasyonel değerlendirmeler yapacaktır. Bu eğilim *i.* oyuncu için en iyi cevap fonksiyonunu tanımlamaktadır. i. oyuncu için en iyi cevap fonksiyonu Q'dan (hatta $Q_1 \times .. \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times .. \times Q_n$'dan) Q_i'nin alt kümelerine tanımlanmıştır. *En iyi cevap fonksiyonuna optimal strateji fonksiyonu da denilmektedir. i.* oyuncunu için q'ya karşı en iyi cevap değeri ile, q/t_i'ye karşı en iyi cevap değeri aynıdır.

i. oyuncu için "*en iyi cevap fonksiyonu*" her $q \in Q$ stratejisi ile Q_i'nin bir alt kümesini

$$r_i(q) = \left\{ t_i \in Q_i : P_i(q/t_i) = \max_{q_i^{'}} P_i\left(q/q_i^{'}\right) \right\}$$

kuralı ile bağdaştıran küme değerli bir ilişkidir.

Eğer i oyuncusu diğer oyuncuların seçimlerine karşın t_i strateji seçimi ile ödentisini maksimize edebiliyorsa i. oyuncu için t_i, q stratejisine karşı en iyi cevaptır. Genel olarak t_i tek olmak zorunda değildir. $t \in Q$'nun $q \in Q$'ya karşı en iyi cevap olması t'nin bütün bileşenleri, t_i 'nin i. oyuncu için q'ya karşı en iyi cevap olması anlamına gelir.

$t \in r(q)$'dır ancak ve ancak $\forall i \in N$ için ,$t_i \in r_i(q)$'dır. "*En iyi cevap fonksiyonu*" her $q \in Q$ stratejisi ile $t \in r(q)$ kuralına göre Q 'nun alt kümesi ile bağdaştırılan küme değerli bir ilişkidir. Burada $r(q)$, $r_1(q) \times .. \times r_n(q)$ kartezyen çarpımıdır.

En iyi cevap fonksiyonları ile denge noktaları arasındaki bağlantı aşağıdaki lemma ile incelenmiştir.

Lemma 3.9 *$\lceil= (N, Q, P)$ işbirliksiz bir oyun olsun. $q \in Q$, $\lceil'$nin, ancak ve ancak $q \in r(q)$ ise denge noktasıdır (Friedman, 1990).*

İspat. q^* denge noktası olsun. q^* denge noktası ise $q^* \in Q$ ve $P_i(q^*) = \max_{q_i \in Q_i} P_i(q^*/q_i)$'dır, $\forall\ i \in N$. Yani $q_i^* \in r_i(q^*)$

Tersine $q^* \in r(q^*)$ olsun. q^*'ın bir denge noktası olduğunu görmek için en iyi cevap fonksiyonunun tanımını hatırlanırsa; $r_i(q^*) = \max_{q_i \in Q_i} P_i(q^*/q_i)$, $(i \in N)$ ise $q_i^* \in r_i(q^*)$'dır. Bu tanım diğer oyuncuların stratejilerine karşılık hiçbir oyuncunun stratejisini değiştirerek daha iyi bir ödenti elde edemeyeceğini göstermektedir. Bu ifade ise q^*'ın bir denge noktası olduğunu göstermektedir. ■

$q \in r(q)$ ise, q'ya r'nin *sabit noktası* denir. r'nin sabit noktalarının kümesi ile $\lceil$'nin denge noktalarının kümesi eşittir. Bir önceki lemma ile çok kullanışlı bir sonuca ulaşıyoruz: Bir oyunun denge noktalarının araştırılması, o oyunun en iyi cevap fonksiyonunun sabit noktalarının araştırılması ile denktir.

En iyi cevap fonksiyonu r'nin sabit noktalarının varlığını göstermek için Kakutani (1941) Sabit Nokta Teoremi'nden faydalanılmıştır. Kakutani(1941) Sabit Nokta Teoremi'ni hatırlanacak olunursa;

"$\theta(x)$, A'dan A'ya tanımlı üst yarı sürekli küme değerli fonksiyon olsun. Eğer A kompakt ve konveks bir küme ve $\forall\, x \in A$ için, $\theta(x)$ boştan farklı ve konveks bir küme ise, θ'nin sabit noktası vardır."

r'nin tanım kümesi Q, $R^{n_1 n_2 .. n_n}$ Öklit uzayının kompakt ve konveks bir alt kümesidir. Her $q \in Q$ için $r(q)$ boştan farklıdır. Çünkü $r_i(q)$, i.oyuncunun ödentisini maksimize eden stratejilerin kümesidir ve ayrıca sürekli ödenti fonksiyonu P_i, kompakt bir küme (Q_i) üzerinde tanımlandığı için Weierstrass teoremi ile bu küme üzerindeki maksimum değerini alır. Aynı zamanda $r(q)$ konveks bir küme ve her $q \in Q$ için $r(q) \in Q$'dır. $r(q)$, her P_i ödenti fonksiyonu Q_i'de konkav olduğu için konvekstir ve $r(q)$ tanımından dolayı Q'nun bir alt kümesidir.

Lemma 3.10 *$\lceil= (N, Q, P)$ işbirliksiz bir oyun olsun. O zaman $\lceil$'nin en iyi cevap küme değerli fonksiyonu*

$$r : Q \to 2^Q$$

üst yarı süreklidir (Friedman, 1990).

İspat. *(a)* $\{q^k\}_{k=1}^{\infty} \subset Q$, Q'da herhangi yakınsak noktalar dizisi *(b)* q^0, bu dizinin limit noktası *(c)* $t^k \in r(q^k)$, $(k = 1, 2, ..)$ yakınsak noktalar dizisi ve *(d)* t^0, $\{t^k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisinin limit noktası olsun. $r(q)$ ancak ve ancak $t^0 \in r(q^0)$ ise üst yarı süreklidir. Herhangi bir $i \in N$ için $t_i^0 \in r_i(q^0)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$r_i(q^0)$'dan bir eleman seçelim; $t_i^\imath$. Eğer $P_i(q^0/t_i^0) > P_i(q^0/t_i^\imath)$ ise, $t_i^\imath$ 'nün en iyi cevap olmasıyla çelişir. Eğer $P_i(q^0/t_i^0) = P_i(q^0/t_i^\imath)$ ise, $t_i^0 \in r_i(q^0)$'dır. Geriye sadece $P_i(q^0/t_i^0) < P_i(q^0/t_i^\imath)$ 'nin imkansız olduğunu göstermek kalıyor. Aksini kabul edelim; $P_i(q^0/t_i^0) < P_i(q^0/t_i^\imath)$ ve $P_i(q^0/t_i^\imath) - P_i(q^0/t_i^0) = \varepsilon > 0$ olsun. P_i sürekli olduğu için herhangi $\delta > 0$ için sonlu bir k_δ vardır, öyle ki, $k \rangle k_\delta$ için $\left|P_i\left(q^k/t_i^k\right) - P_i(q^0/t_i^0)\right| < \delta$ ve $\left|P_i\left(q^k/t_i^\imath\right) - P_i(q^0/t_i^\imath)\right| < \delta$ 'dır. Burada δ, $\varepsilon/4$ 'ten küçük seçilmiştir.

O zaman

$$P_i\left(q^k/t_i^\imath\right) > P_i\left(q^0/t_i^\imath\right) - \varepsilon/4 > P_i\left(q^0/t_i^\imath\right) - 3\varepsilon/4 = P_i\left(q^0/t_i^0\right) + \varepsilon/4 > P_i\left(q^k/t_i^k\right)$$

Bu eşitsizlik ise $k > k_\delta$ için $t_i^k \notin r_i\left(q^k\right)$ olduğunu gösterir. Bu ise çelişki yarattığı için $P_i(q^0/t_i^0) = P_i(q^0/t_i^\imath)$ ve $t^0 \in r(q^0)$'dir.Yani, r'nin üst yarı süreklidir. ■

Bir oyunda, her bir oyuncu, oyuna başlamadan önce oyunu analiz eder, stratejisini hiç bir etki altında kalmadan, rasyonelce belirler. Belirlenen strateji Nash dengesi ise, diğer oyuncuların stratejileri sabit tutulup, oyuncu stratejisini değiştirdiği an ödentisi düşer. Bir oyuncu, seçimini kendisine olası en yüksek rafahı, ödentiyi sağlayan stratejiden yana yapar. Daha formel bir anlatımla , $a^* \in A$ (veya Q) bir Nash dengesi ise,$\forall i \in N$ *ve* $\forall a_i \in A_i$ (veya Q_i) *icin*, $P_i(a^*) \geq P_i(a^* \backslash a_i)$ sağlanır.

Teorem 3.11 *$\lceil = (N, Q, P)$ işbirliksiz bir oyun olsun. O zaman $\lceil$'nin en az bir Nash denge noktası vardır (Friedman, 1990).*

İspat. Nash dengesinin varlığının ispatı "Kakutani Sabit Nokta Teoremi"nin doğrudan uygulamasıdır. $\lceil$'nin denge noktalarının kümesi ile r küme değerli en iyi cevap fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi birbirine eşittir.

$r : Q \to Q$ küme değerli en iyi cevap fonksiyonu, Q karma stratejiler kümesi üzerinde tanımlıdır. Oyuncuların salt stratejileri, karma stratejiler kümesinde de var olduğu için, ıspatı karma stratejiler üzerinde aramak genelliği bozmaz. $r : Q \to Q$ küme değerli en iyi cevap fonksiyonu, Kakutani sabit nokta teoremi koşullarını sağlar:

$Q = \prod_i Q_i$ karma stratejiler kümesi, $\forall i \in N$ için, Q_i kompakt ve konveks olduğu için Q kompakt ve konveks bir kümedir.

$\forall q \in Q$ için, r tanımlı ve $r(q) \subset Q$ dır: Herhangi bir $q \in Q$ için,

$$r_i(q) = \{t_i \in Q_i : P_i(q/t_i) \geq P_i(q/t_i^\imath), \forall t_i^\imath \in Q_i\}.$$

Böyle bir t_i elemanı her zaman vardır çünkü; bu elemanlar kompakt Q_i kümeleri üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonları (P_i) maksimize eden elemanlardır. Eğer $t \in r(q)$ ise $t_i \in r_i(q)$, $\forall i \in N$,dır. Bu sebeple $r(q)$, $\forall q \in Q$ için tanımlıdır ve $r(q) \subset Q$ 'dur.

r'nin görüntü kümeleri konvekstir: t_i ve $t_i^\imath \in r_i(q)$ olsun. $\lambda \in [0, 1]$ için, $t_i^\lambda = \lambda t_i + (1 - \lambda) t_i^\imath$ olsun. P_i, konkav bir fonksiyon olduğu için $P_i\left(q/t_i^\lambda\right) \geq \lambda P_i(q/t_i) + (1 - \lambda) P_i(q/t_i^\imath)$. Büyüktür işareti t_i ve $t_i^\imath$ elemanlarının $r_i(q)$'nun elemanları olmadığını gösterir ki, bu bir çelişkidir. O halde eşitlikten $t_i^\lambda \in r_i(q)$'dır. Yani $r_i(q)$,$\forall i \in N$ için konvekstir ve konveks kümelerin kartezyen çarpımları konveks olduğu için $r(q)$ konvekstir.

r'nin üst yarı sürekli olduğu yukarıda gösterilmiştir.

$r : Q \to Q$ küme değerli fonksiyonu Kakutani Sabit Nokta Teoremi'nin bütün koşullarını sağlamaktadır. r'nin sabit noktası vardır. Yani $\lceil$'nin bir denge noktası vardır. ■

n-Kişi Oyunlarda Denge Noktası

"*Biri* n-kişili bir oyun kavramını, her bir oyuncunun sonlu salt stratejisiler kümesine sahip olduğu ve her oyuncu için bir bileşeninin alındığı her sıralı-n'li salt stratejilere karşılık gelen n oyuncuya yapılan belirli bir ödemeler kümesiyle tanımlayabilir. Salt stratejiler üzerinde olasılık dağılımları olan karma stratejiler için ödenti fonksiyonları oyuncuların beklentileridir, bu nedenle çeşitli oyuncuların çeşitli salt stratejilerini oynadıkları olasılıklarda polilineer biçim oluştururlar.

Her bir oyuncuya bir stratejinin düştüğü, stratejilerin herhangi bir n-terimlisi oyuncuların n strateji uzayının çarpımıyla elde edilen çarpım uzayında bir nokta gibi düşünülebilir. Böyle bir sıralı-n, eğer karşılaşılan n-terimli oyuncusu için elde edilebilecek en yüksek beklentiyi sıralı-n'li bir n-terimlinin karşılaştığı diğerinden üstün ise üstünlük sağlayan n-bileşen içindeki her bir oyuncunun stratejisi üstünlük sağlanan n-terimli içindeki diğer oyuncuların n-1 stratejilerine karşı olası en yüksek beklentiyi sağlıyor demektir. Kendiyle karşılaşan bir n-terimliye denge noktası denir.

Her bir n-bileşenli için kendisine üstünlük sağlayan n- bileşenlilerin kümesi çarpım uzayından kendi içine tanımlı noktadan kümeye bir fonksiyon tanımlar. Üstünlük tanımından , bir noktanın üstünlük sağlayan noktaların kümesinin konveks olduğunu görüyoruz. Ödenti fonksiyonunun sürekli olmasından noktadan kümeye tanımlı fonksiyonun grafiğinin kapalı olduğunu görüyoruz. Kapalılık şuna eştir: eğer $P_1, P_2, ...$ ve $Q_1, Q_2, ...$ çarpım uzayında, $Q_n \rightarrow Q$ ve $P_n \rightarrow P$ olmak üzere, dizilerin noktaları ve Q_n, P_n'den üstün ise Q, P'den üstündür.

Grafik kapalı ve her noktanın noktadan kümeye tanımlı fonksiyon altındaki görüntüsü konveks olduğu için, Kakutani(1941)) nin teoreminden bu fonksiyonun bir sabit noktası vardır (yani nokta görüntü kümesi içindedir). Yani bir denge noktası vardır."
(Nash, 1950)

4 ÖRNEKLER

4.1 Mahkumların İkilemi

"Oyunlar Kuramı ve İktisadi Davranış" yayınının oyun teorisi için önemli bir basamak olduğu giriş bölümünde anlatılmıştır. A. W. Tucker'ın bazı oyunların analiz edilmesinin zorluğunu göstermek üzere kullandığı "Mahkumların ikilemi" (*Prisoners' Dilemma*) örneği de, bir çok disipline kazandırdığı bakış açısı ile oyun teoridinde önemli bir yere sahiptir. Bir kaç satır alan mahkumlar ikilemi, etik, biyoloji, sosyoloji, politika, ekonomi ve tabi ki oyun teorisi alanlarında 20 yy.'ın ikinci yarısında büyük etki yaratmıştır.

Oyun:

İki kişi bir suçu işledikleri şüphesiyle tutuklanmışlardır. Yeterli delillere sahip olmayan savcının mahkumiyet kararı elde edebilmek için sanıkların itiraflarına ihtiyacı vardır. Savcı, birbirleriyle konuşmaları ya da haberleşmeleri engellenen tutuklulara, ellerinde onları mahkum edecek yeterli delillere sahip olmadığını belirttikten sonra karşı karşıya bulunduğu seçenekleri sıralar. Tutukluların hiçbiri diğeri aleyhine tanıklık yapmazsa her ikisi de daha hafif bir suçtan, örneğin ruhsatsız silah taşımaktan, 2'şer yıla mahkum edileceklerdir. Tutuklulardan biri itiraf eder diğeri itiraf etmezse, itiraf eden serbest kalırken suçu inkar eden tutuklu 6 yıl hapse mahkum edilecektir. Ancak, her iki tutuklu da birbirleri aleyhine tanıklık ederse ikisi de 4'er yıl hapis yatacaklardır. Her tutuklu, savcının bu seçenekleri diğer tutukluya da sunduğunu bilmektedir. Tutuklulara düşünmeleri ve karar vermeleri için bir süre tanınır ama bu süre içinde birbirlerinin verdikleri kararı öğrenmelerine imkan yoktur. Kendinizi bir mahkumun yerine koyun ve karar verin. (Davis, 1997)

		2. Oyuncu	
		inkar	itiraf
1. oyuncu	inkar	2,2	6,0
	itiraf	0,6	4,4

çizelge 1

Mahkumların İkilemi oyununda oyuncular kümesi iki oyuncudan oluşur: Mahkumlara, 1. oyuncu ve 2. oyuncu diyebiliriz. 1. Oyuncu'nun strateji kümesi A_1= {inkar, itiraf}, 2. oyuncu'nun strateji kümesi A_2= {inkar, itiraf} biçiminde yazılabilir. Oyunun farklı strateji profilleri ve bunlara karşılık gelen ödenti profilleri {inkar, inkar}= {2, 2}, {inkar, itiraf}= {6, 0}, {itiraf, inkar}= {0, 6}, {itiraf, itiraf}= {4, 4} biçimindedir. Oyunun ödenti profili bu verilere dayanılarak oluşturulabilir. Örneğin, Mahkumların İkilemi oyununda 1. oyuncu'nun "inkar," 2. oyuncu'nun "itiraf" stratejisini seçtiği durumda ödenti profili

$$P(inkar, itiraf) = (P_1(inkar, itiraf), P_2(inkar, itiraf)) = (6, 0)$$

olur. Mahkumların İkilemi oyununun stratejik biçimi Çizelge 1'de gösterilmiştir.

Stratejik biçimli Mahkumların İkilemi oyunu şöyle oynanır: Eğer 1. Oyuncu $A_1=$ {inkar, itiraf} içinden a_1'i, 2. Oyuncu $A_2=$ {inkar, itiraf} içinden a_2'yi eşzamanlı olarak seçerlerse; $[P_1(a_1,\ a_2),\ P_2(a_1,\ a_2)]$ ödentilerini alırlar:

Bu oyunun çözümü nasıl bulunabilir? Oyuncular cezalarını minimize etmek için hangi stratejileri seçmeleri rasyonel bir davranış olur?

Mahkumların İkilemi oyunu, kesinlikle yenilgen stratejilerin elenmesiyle çözülebilecek türde bir oyundur. Oyuna 1. Oyuncu açısından bakalım. 2. Oyuncu itiraf etse de etmese de "inkar" stratejisi her durumda 1. oyuncu için hapiste yatılacak daha fazla yıl demektir. Çünkü

$$P_1(inkar, itiraf) < P_1(itiraf, itiraf)$$
$$P_1(inkar, inkar) < P_1((itiraf, inkar)$$

eşitsizliklerinin de gösterdiği gibi 1. oyuncu için "inkar" kesinlikle yenilgen stratejidir. Aynı durum 2. oyuncu için de geçerlidir. Dolayısıyla "inkar" stratejisi her iki oyuncu için de kesinlikle yenilgen stratejidir. Bu nedenle her iki oyuncu da "inkar" stratejisini, kesinlikle yenilgen strateji olduğu için oyundan eleyecek ve "itiraf" stratejisini seçecektir. Diğer bir deyişle "itiraf" her iki oyuncu için de başat stratejidir. Diğer bir deyişle rakip hangi stratejisini seçerse seçsin "itiraf" stratejisi daha az hapis cezası dolayısıyla daha çok fayda sağlamaktadır. Rasyonel oyuncular kesinlikle yenilgen stratejileri oynamayacaklarına göre her iki tutuklu da "itiraf" stratejisini oynayacaklardır. Oyunun Nash dengesi yani çözümü, a*= {itiraf, itiraf} strateji profili verir. Oyunun denge ödenti profili P*(itiraf, itiraf)={4, 4} biçimindedir. Her iki oyuncu da rasyonel davranmış ve kesinlikle yenilgen stratejilerini oynamamışlar ve bunun sonucu dörder yıl mahkumiyet cezası almışlardır. Oysa her ikisi de "irrasyonel" davranıp kesin yenilgen stratejilerini oynasalar ve suçu inkar etselerdi dörder yıl yerine ikişer yıl hapis yatacaklardı. Peki tutuklular neden aralarında işbirliğine giderek {inkar, inkar} stratejisini oynamıyorlar? Bu soruyu, "çünkü {inkar, inkar} strateji profili, oyunun bir dengesi değildir" diye yanıtlayabiliriz. Oyunculardan biri "inkar" stratejisini benimsediğinde diğeri "itiraf" ederek serbest kalabilir. Oyuncuların hiçbiri teorinin önerdiği {itiraf, itiraf} stratejisinden tek taraflı saparak faydasını artıramaz.

Mahkumların İkilemi çok oyunculu durumlarda da karşımıza çıkar. Örneğin ekonomi yazınındaki "bedavacı" sorunu, n-oyunculu mahkumların ikilemine bir örnek oluşturur. Çok sayıda ve benzer vergi yükümlülerinden oluşan bir ekonomiyi ele alalım. Her vergi yükümlüsünün önünde iki strateji olduğunu düşünelim: "Vergiyi tam ödemek" ve "biraz vergi kaçırmak." Herkes "vergiyi tam ödemek" stratejisini seçerse vergi gelirleri ve dolayısıyla kamu hizmetlerinin miktarı ve kalitesi yükselecek, dolayısıyla tüm oyuncular daha "iyi" bir duruma gelecektir. Eğer herkes "biraz vergi kaçırmak" stratejisini benimserse vergi gelirleri ve dolayısıyla da kamu hizmetlerinin miktarı ve kalitesi azalacak, bütün oyuncular daha "kötü" bir duruma düşeceklerdir. Bir vergi yükümlüsünün strateji seçimi toplam vergi gelirlerini fazla etkilemez. Bu nedenle diğerleri ne yaparsa yapsın "biraz vergi kaçırmak" stratejisini seçmekle her zaman durumunu daha iyi bir hale getirebilir. Ama her vergi yükümlüsü aynı biçimde rasyonel davranırsa hepsi daha kötü duruma düşerler. Benzer örnekler çoğaltılabilir, ama sonuç hep aynıdır. Bireysel rasyonellik, toplumsal açıdan "eniyi" sonuçları her zaman üretmez. Luce ve Raiffa (1957), mahkumların ikileminden çıkış olmadığını, bu tür oyunların yasaklanması gerektiğini söyler.

4.2 Yazı mı Tura mı?

Bu bölümde incelenecek olan Yazı mı Tura mı oyununda salt stratji Nash dengesi yoktur. Bu oyun, iki-kişi ve sonlu strateji kümesine sahip bir oyun olduğu için, salt stratejiler kümesi üzerinde bir denge noktası olmasa dahi karma stratejilerde, Nash teoreminin garantilediği üzere, en az bir denge noktası vardır. Bu problemde Nash dengesi, karma stratejiler üzerinde aranacaktır.

Oyun:

Bu oyun iki oyuncu arasında oynanmaktadır: 1. Oyuncu ve 2. Oyuncu . Her oyuncunun bir madeni parası var. Oyuncular, aynı anda bu paraların yazı veya tura yüzünü seçiyorlar. Oyuncuların seçtikleri para yüzlerini aynı anda gösteriyorlar. Eğer iki oyuncunun seçimi aynı ise 1. oyuncu , 2. Oyuncu'dan 1tl, eğer iki oyuncunun seçimleri farklı ise 2. oyuncu, 1. oyuncu'dan 1tl alır. (Davis, 1997)

Bu oyunu siz oynasaydınız, kazancınızı maksimum (kaybınızı minimum) tutmak için hangi stratejiyi benimserdiniz?Yazı mı Tura mı oyununun stratejik biçimi Çizelge 2'de gösterilmiştir.

		2. Oyuncu	
		yazı	tura
1. Oyuncu	yazı	1,-1	-1,1
	tura	-1,1	1,-1

çizelge 2

Oyunun denge noktasını aramak için yukarıdaki ödenti matrisini inceleyelim. Burada, A_1= {yazı,tura} ve A_2= {yazı,tura}'dır.

1. Oyuncu , "yazı" stratejisini seçtiğinde,2. oyuncu $P_2(a_1, a_2) > P_2(a_1, a_1)$ olduğu için "tura" stratejisini seçer.

2. Oyuncu, "tura" stratejisini seçtiğinde, 1. oyuncu $P_1(a_2, a_2) > P_1(a_1, a_2)$ olduğu için "tura" stratejisini seçer.

1. Oyuncu , "tura" stratejisini seçtiğinde, 2. oyuncu $P_2(a_2, a_1) > P_2(a_2, a_2)$ olduğu için "yazı" stratejisini seçer.

2. Oyuncu , "yazı" stratejisini seçtiğinde,1. oyuncu $P_1(a_1, a_1) > P_1(a_2, a_1)$ olduğu için "yazı" stratejisini seçer.

1. Oyuncu, "yazı" stratejisini seçtiğinde, oyun bu dizinin başına döner. Nash Teoremi'nin bize garanti ettiği gibi bu tarz sonlu oyunlar için en az bir Nash dengesi vardır. Bu denge noktasını karma stratejileri üzerinde arayalım. Karma stratejiler, salt stratejileri üzerindeki olasılık dağılımları oldukları için oyuncuların ödentileri için artık sadece beklenen ödentilerden bahsedebiliriz. 1. Oyuncu 'nun "yazı" seçme olasılığı p, "tura" seçme olasılığı ise 1-p olsun; 2. oyuncu 'nun "yazı" seçme olasılığı s, "tura" seçme olasılığı ise 1-s olsun.

			2. oyuncu	
			(s) yazı	(1-s) tura
1. oyuncu	(p)	yazı	1,-1	-1,1
	(1-p)	tura	-1,1	1,-1

çizelge3

2. Oyuncu'nun stratejilerine karşın 1. oyuncu 'nun beklenen ödentileri şöyle olacaktır:

2. Oyuncu "yazı" stratejisini seçtiğinde; $p \times 1 + (1-p) \times (-1)$

2. Oyuncu "tura" stratejisini seçtiğinde; $p \times (-1) + (1-p) \times 1$

Aynı düşünce ile, 1. oyuncu'nun stratejilerine karşın 2. oyuncu 'n n beklenen ödentileri şöyle olacaktır:

1. Oyuncu "yazı" stratejisini seçtiğinde; $s \times (-1) + (1-s) \times 1$

1. Oyuncu "tura" stratejisini seçtiğinde; $s \times 1 + (1-s) \times (-1)$

Oyunun salt stratejilerde dengesi yoktur. Diğer bir deyişle hep yazı ya da hep tura oynamak oyuncular açısından rasyonel değildir. Ancak, oyunun karma stratejilerde bir dengesi vardır. sal olarak, "yazı" veya "tura" stratejisini seçtiklerinde aynı beklenen ödentiyi elde etmek isterler.

$p \times 1 + (1-p) \times (-1) = \ p \times (-1) + (1-p) \times 1$; $p = \frac{1}{2}$ ve,

$s \times (-1) + (1-s) \times 1 = s \times 1 + (1-s) \times (-1)i$, $s = \frac{1}{2}$

Bu oyunun Nash karma strateji dengesi $q_1^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ve $q_2^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ olmak üzere; (q_1^*, q_2^*) karma strateji ikilisidir. Yani oyuncular oyundan olası en yüksek ödentiyi elde edebilmek için, oyun zamanının yarısında "tura", yarısında "yazı" stratejisini raslantısal olarak seçmelidirler.

Oyuncuların bu stratejilerle elde edecekleri beklenen ödentilerini hesaplayalım:

$EP_1\,(q_1^*, q_2^*) = q_1^*(a_1)[q_2^*\,(a_1)\,P_1(a_1, a_1) + q_2^*\,(a_2)\,P_1(a_1, a_2)] + q_1^*(a_2)[q_2^*\,(a_1)\,P_1(a_2, a_1) + q_2^*\,(a_2)\,P_1(a_2, a_2)]$

$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2} \times 1 + \tfrac{1}{2} \times (-1)] + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2} \times (-1) + \tfrac{1}{2} \times 1]$$
$$= 0$$

Oyun sıfır toplamlı bir oyun olduğu için 2. oyuncu 'nin de beklenen ödentisi 0'dır.

5 SONUÇ

Nash, sonlu oyuncu ve sonlu strateji kümesine sahip işbirliksiz bir oyunun en az bir denge noktası olduğunu söylemiştir. Bu denge, her bir rasyonel ve akılcı oyuncunun kazancından memnun olduğu ve değiştirdiği anda kazancının düştüğü bir strateji noktasıdır. Nash dengesi oyunun çözümüdür. Aslında bir oyunu çözmek, toplumsal bir karşılıklı etkileşim ortamında bireysel açıdan rasyonel davranışın özelliklerini belirlemek demektir.

Oyun teorisinde amaç, bir stratejik etkileşim ortamında rasyonel bireylerin hangi stratejileri uygulayacağını ve diğer oyuncuların uygulayacağı stratejiler hakkında hangi beklentileri oluşturacağı konularında öngörülerde bulunmaktır. Daha genel bir anlatımla oyun teorisi, oyun benzeri durumlarda "oyunun en iyi biçimde oynanmasının yolu var mıdır?" sorusunun yanıtını araştırır ve stratejik düşünmenin bazı genel ilkelerini belirlemeye çalışır. Oyun teorisi hiç birşey başaramamış kabul edilse dahi, felsefenin en önemli kördüğümlerinden birisi olan "akılcı davranış"a bir çözümleme getirmiştir (Casti, 1996).

Bir çok disiplin gibi oyun teorisi de hayatta karşılaşılacak tüm karmaşık ilişkilere kesin sonuçlar üretemez. Hayattaki bir çok karşılıklı etkileşim, şans unsurları içerdiği gibi çok da karmaşıktır. Gerçek yaşamda karşımıza çıkan toplumsal, ekonomik ve siyasi oyunları sonlu oyun biçiminde kurgularken dikkatli olmak gerekir. Çünkü gerçek yaşamda karşılaşılan oyun benzeri durumlar, genellikle sürekli zamanda oynanır ve oyunların stratejik parametreleri genellikle süreklidir ve bu oyunların bitiş süreleri belli değildir. Bu nedenle gerçek yaşamda karşımıza çıkan çoğu çıkar çelişkisi ancak, eksik bir biçimde sonlu oyun olarak modellenebilir.

Hayatta karşılaşacağımız bütün etkileşimli olaylarda - kadın-erkek ilişkileri, çocuk-ebeveyn ilişkileri ve iş ilişkileri- durumu kavramak ve içinde bulunduğumuz durum dahilinde en iyi seçimi yapabilmek için, olaylara oyun teorik bir bakış açısı ile yaklaşmayı öğrenmeliyiz. Sayısal analizci Richard W. Hamming'in söylediği gibi, "Oyun teorisinin amacı çözüm bulmak değil, kavramaktır." (Casti, 1996). Oyun teorik bakış açısıyla politika, ekonomi, biyoloji, etik başta olmak üzere bir çok alanda, anlamsız ya da çok karmaşık görünen olayları daha net anlayabilmek mümkündür. Ünlü ekonomist Samuelson'un dediği gibi, modern çağda okur yazar olmak demek oyun teorisi hakkında bazı genel bilgilere sahip olmak anlamına geliyor.

6 KAYNAKLAR

Aumann, R. J. , *"Game Theory."* J. Eatwell, M. Milgate ve P. Newman (ed), *The New Palgrave Dictionary of Economics*, ss. 460-482. London: Macmillan, 1987.

Barvinok, Alexandar, *A Course in Convexity,* American Mathematical Society, 2002. , ss. 22-51.

Border,Kim C., *Fixed Point Theorems with Aplications to Economics and Game Theory*, Cambridge University Press, 1985.

Brouwer, L.E.J., *"Ueber eineindeutige, stetige Transformationen von Flächen in sich"* Math. Ann. , 69 (1910) ss. 176–180.

Casti, John L., *Five Golden Rules: Great Theories of 20th Centrury Mathematics and Why They Matter*, John Wiley and Sons, Inc,1996.

Davis, Morton D. , *Game Theory: A Nontechnical Introduction*, Dover Publications, Inc, 1997.

Friedman, James W., *Game Theory with Applications to Economics*, New York: Oxford University Press, 1990.

Kakutani, S., *A Genaralization of Brouwer's Fixed Point Theorem,* Duke Math. J. 8 (1941), ss. 457-459.

Myerson, Roger B. 1991. *Game Theory: Analysis of Conflict*, Cambridge MA: Harvard University Press.

Nash, J. , *Equilibrium Points in n- Person Games*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 36 (1950), ss: 48-49

Nash, J. , *Non-Cooperative Games*, Ann. of Math. 54 (1951), ss: 286-295

Nikaido, Hukukane, *Convex Structures and Economic Theory*, Akademic Press,1968.
Nasar, Sylvia, *Akıl Oyunları*, Altın Kitaplar Yayın Evi, 2002.

Owen, G., *Game Theory*, Academic Press, Inc, 1982, ss. 1-30 ve 329-333.

Rockafellar, Tyrrell R. , *Convex Analysis, Princeton University Press*, New Jersey,1970. ss. 3-40.

Sperner, E., *Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg6 (1928),ss. 265-272.

von Neuman, J., ve O. Morgenstern,*Theory of Games and Economic Behaviou*r, Princeton University Press, New Jersey, 1947.

von Neumann, J. , *"Zur Theorie der Gesellsschalftspiele"*, 1928, Mathematische Annalen 100, ss. 295–300.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Aslı KESİNBAŞOĞLU

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1983

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu :

Lise : 1998-2001 Gölbaşı Anadolu Lisesi, Ankara

Lisans : 2001-2005 Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi :

2008- SERCEV, Genel Müdür Yardımcısı