

**KARMA LOGARİTMİK DOĞRUSAL
MODELLERE BAYESCİ YAKLAŞIMLAR**

**BAYESIAN APPROACHES TO THE MIXED
LOGARITHMIC LINEAR MODELS**

HAYDAR DEMİRHAN

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :.....
Prof. Dr. Süleyman GÜNAY

Üye (Danışman) :.....
Yrd. Doç. Dr. Canan HAMURKAROĞLU

Üye :.....
Prof. Dr. Deniz BÜYÜKKILIÇ

Üye :.....
Doç. Dr. Tülay SARAÇBAŞI

Üye :.....
Yrd. Doç. Dr. İlkur ÖZMEN

ONAY

Bu tez/...../2009 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Erdem YAZGAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

KARMA LOGARİTMİK DOĞRUSAL MODELLERE BAYESCİ YAKLAŞIMLAR

Haydar Demirhan

ÖZ

Çok değişkenli nitel veriler için kullanılan modelleme yöntemlerinden biri de logaritmik-doğrusal (LD) modellerdir. Oluşturulan LD modeller olumsuzluk çizelgesini oluşturan kategorik değişkenlerin yapısına göre farklılık gösterir. Ordinal yapıdaki çizelgeler için ilişki modelleri; nominal ve ordinal değişkenlerin birlikte oluşturdukları olumsuzluk çizelgeleri için ise satır / sütun etki modelleri gibi modeller kurulur.

Çalışmada, ordinal ve karma LD modeller için skorların da raslantı değişkeni olduğu durumda Bayesci parametre kestirimlerinin elde edilmesi için değişebilirlik varsayımını, skorlar ve model parametreleri arasındaki ilişki yapısını dikkate alan, sonsal çıkarsamaların kolaylıkla elde edilebildiği ve bilgi içeren çözümlene yapmaya olanak sunan yaklaşımlar önerilmiştir. Belirtilen özellikleri taşıyan ve beklenen göze sıklıklarının Bayesci kestiriminin LD model parametrelerine ilişkin önsel bilgiler kullanılarak yapılmasını sağlayan yaklaşımlar da önerilmiştir. Ayrıca, skorların da raslantı değişkeni olduğu durumda model seçimi üzerinde durulmuş ve model seçimi için bir tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo yaklaşımı verilmiştir. Önerilen tüm yaklaşımlar çeşitli veri kümeleri üzerinden uygulanmış ve elde edilen sonuçlar tartışılmıştır.

Çalışmanın İkinci Bölümü'nde LD modeller ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. Üçüncü Bölümde nominal, ordinal ve karma LD modeller için model parametrelerinin Bayesci kestirimi üzerinde durulmuştur. Bayesci model seçimi çalışmanın dördüncü bölümünde verilmiştir. Son bölümde ise, önerilen yaklaşımlar gerçek veri kümeleri üzerinde uygulanmıştır.

Anahtar kelimeler: Ağrı şiddeti veri kümesi, Bayesci model seçimi, çok değişkenli log-gamma, değişebilirlik varsayımı, nominal, olumsuzluk çizelgesi, ordinal, skor.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Canan HAMURKAROĞLU, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, İstatistik Teorisi A.D.

BAYESIAN APPROACHES TO THE MIXED LOGARITHMIC LINEAR MODELS

Haydar Demirhan

ABSTRACT

Logarithmic linear (LL) models are used to model multivariate categorical data. Methods used for modelling of contingency tables vary according to the type of the corresponding categorical variables. If all variables are ordinal or some of considered variables are ordinal and the rest are nominal, the LL model turns into the association or row/column effects models, respectively.

In this dissertation, some Bayesian approaches are proposed for the estimation of LL models. In the approaches the scores are treated as random variables; correlation structure between the scores and assumption of exchangeability are taken into account; posterior inferences are easily drawn; informative Bayesian analysis is possible; and expected cell counts of the considered contingency table are estimated in a Bayesian way under the mentioned conditions. Additionally, model choice is also considered from the Bayesian perspective for the models noted above. A reversible jump Markov chain Monte Carlo algorithm is introduced. All the proposed approaches are illustrated over various data sets, and obtained results are discussed.

In the second section, general information on LL models are given. In the third section, Bayesian estimation of LL model parameters of nominal, ordinal and mixed LL model are mentioned. Bayesian model assessment is given in the fourth section. In the last section, proposed approaches are applied over various real datasets.

Keywords: Dumping severity data, Bayesian model assessment, multivariate log gamma, exchangeability assumption, nominal, contingency table, ordinal, score.

Advisor: Asst. Prof. Dr. Canan HAMURKAROĞLU, Hacettepe University, Department of Statistics, Theory of Statistics Division.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın gerçekleşmesinde hem değerli eleştirileri ile yol göstermiş hem de gerekli ortamı sunmuş olan Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü Başkanı değerli hocam Prof. Dr. Süleyman GÜNAY'a,

Akademik yaşamımın her aşamasında sonsuz desteğini benden esirgemeyen, her zaman yol gösterici olmuş ve bana güvenmiş olan değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Canan HAMURKAROĞLU'na,

Tez izleme komitesi üyesi olarak sağladığı değerli katkı ve eleştirileri için değerli hocam Yrd. Doç. Dr. İlknur ÖZMEN'e,

Sonsuz desteği ve anlayışı ile hep yanımda olan sevgili eşim Dr. Yaprak PARLAK DEMİRHAN'a,

Yurt İçi Doktora Burs Programı ile maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a,

Tezin çoğaltılması aşamasında maddi destek sağlayan Hacettepe Üniversitesi, Bilimsel Araştırmalar Birimi'ne,

Bugünkü bilgi düzeyine ulaşmamda katkıları büyük olan tüm değerli HOCALARIM'a,

Her koşulda yanımda olan AİLEM'e,

İçtenlikle TEŞEKKÜR EDERİM...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZ.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. LOGARİTMİK DOĞRUSAL MODELLER.....	6
2.1. Olumsuzluk Çizelgeleri	6
2.2. Gösterimler	7
2.3. Logaritmik Doğrusal Modellerin Yorumlanması	11
2.4. Ordinal Değişkenler için Skorların Belirlenmesi ve Parametre Kestirimi	13
3. BAYESCİ KESTİRİMLER.....	15
3.1. Nominal Logaritmik Doğrusal Modeller için Bayesci Çıkarlamalar.....	15
3.1.1. Logaritmik doğrusal model parametreleri üzerinden Bayesci çıkarlama	15
3.1.2. Beklenen göze sıklıkları üzerinden Bayesci çıkarlama	17
3.2. Değişebilirlik Varsayımı.....	18
3.3. Ordinal Logaritmik Doğrusal Modeller için Bayesci Çıkarlamalar.....	22
3.3.1. Ordinal logaritmik doğrusal model parametreleri üzerinden Bayesci	
çıkarsama	22
3.3.2. Ordinal olumsuzluk çizelgelerinde beklenen göze sıklıkları üzerinden	
Bayesci çıkarlama.....	47
3.3.2.1. Model parametrelerinden beklenen göze sıklıklarına geçiş	48
3.3.2.2. Model parametreleri için kullanılan önsel bilginin beklenen göze	
sıklıkları için tutarlılığı	54
3.4. Karma Logaritmik Doğrusal Modeller için Bayesci Çıkarlamalar	60
3.4.1. Karma logaritmik doğrusal model parametreleri üzerinden Bayesci	
çıkarsama	61

3.4.2. Karma olumsuzluk çizelgelerinde beklenen göze sıklıkları üzerinden Bayesci çıkarsama	69
3.4.2.1. Karma logaritmik doğrusal modellerde model parametrelerinden beklenen göze sıklıklarına geçiş	70
3.4.2.2. Karma logaritmik doğrusal model parametresi için kullanılan önsel bilginin beklenen göze sıklıkları için tutarlılığı	74
4. BAYESCİ MODEL SEÇİMİ	78
4.1. Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi	78
4.2. Karma Olumsuzluk Çizelgeleri için Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi	80
5. SAYISAL ÖRNEKLER	83
5.1. Örnek 1 : Sanayi İşçilerinin Nefes Alma Testleri	83
5.1.1. Örnek 1: Bağımlılık durumu	84
5.1.2. Örnek 1: Bağımsızlık durumu	92
5.2. Örnek 2 : Ağrı Şiddeti	96
5.2.1. Örnek 2: Bağımlılık durumu	98
5.2.2. Örnek 2: Bağımsızlık durumu	102
5.3. Örnek 3: Mutluluk Düzeyi	107
5.3.1. Örnek 3: Bağımlılık durumu	108
5.3.2. Örnek 3: Bağımsızlık durumu	112
5.4. Örnek 4: TSMZMC'nin Ağrı Şiddeti Verisine Uygulanması	116
5.4.1. Örnek 4: Bağımlılık durumu	117
5.4.2. Örnek 4: Bağımsızlık durumu	121
6. SONUÇ ve TARTIŞMA	124
KAYNAKLAR	127
EKLER DİZİNİ	132
ÖZGEÇMİŞ	148

KISALTMALAR DİZİNİ

$ \cdot $	İki çizgi arasındaki kümenin eleman sayısı
$(\cdot)^T$	Parantez içindeki matrisin devriği
$(a)_b$	Pochhammer sembol
BMO	Bayesci model ortalama
BÖ	Bağımsızlık örnekleyicisi
$corr()$	Parantez içindeki raslantı değişkenlerinin korelasyonu
ÇDG	Çok değişkenli gamma
ÇDLG	Çok değişkenli log-gamma
G-ÇDLG	Genelleştirilmiş çok değişkenli log-gamma
J	Jacobian matrisi
LD	Log-doğrusal
MH	Metropolis - Hastings
$mut()$	Parantez içindeki ifadenin mutlak değeri
MZMC	Markov zinciri Monte Carlo
$ndet()$	Parantez içindeki dikdörtgen matrisin belirteni
N-R	Newton - Raphson
\hat{R}	Gizil ölçek indirgeme ölçütü
$tekil_i()$	Parantez içindeki matrisi i. tekil değeri
TSMZMC	Tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.1. Bağımlılık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.	88
Şekil 5.2. Bağımlılık durumunda ana etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	88
Şekil 5.3. Bağımlılık durumunda ilişki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	88
Şekil 5.4. Bağımsızlık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.	93
Şekil 5.5. Bağımsızlık durumunda ana etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	93
Şekil 5.6. Bağımsızlık durumunda ilişki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	94
Şekil 5.7. Bağımlılık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.	100
Şekil 5.8. Bağımlılık durumunda ana etki ve nominal etkileşim parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	100
Şekil 5.9. Bağımlılık durumunda satır etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	101
Şekil 5.10. Bağımsızlık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.	104
Şekil 5.11. Bağımsızlık durumunda ana etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	104
Şekil 5.12. Bağımsızlık durumunda satır etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.	105
Şekil 5.13. Bağımlılık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.	110
Şekil 5.14. Bağımlılık durumunda beklenen göze sıklıklarının sonsal kestirimlerinin çizimi.	110
Şekil 5.15. Bağımsızlık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.	113
Şekil 5.16. Bağımsızlık durumunda beklenen göze sıklıklarının sonsal kestirimlerinin çizimi.	113

ÇİZELGELER DİZİNİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 3.1. Korelasyonlara ilişkin ortalamalar.	45
Çizelge 5.1. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	89
Çizelge 5.2. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	91
Çizelge 5.3. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	95
Çizelge 5.4. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için 0.35;0.512 ikilisine ve ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	96
Çizelge 5.5. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	102
Çizelge 5.6. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	103
Çizelge 5.7. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	106
Çizelge 5.8. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.	107
Çizelge 5.9. Bağımlılık durumunda skorlar ve beklenen göze sıklıkları için sonsal kestirimler, \hat{R} değerleri ve kabul oranları.	111
Çizelge 5.10. Bağımsızlık durumunda skorlar ve beklenen göze sıklıkları için sonsal kestirimler, \hat{R} değerleri ve kabul oranları.	115
Çizelge 5.11. Hiyerarşik log-doğrusal modeller.	116
Çizelge 5.12. Hiyerarşik log-doğrusal modeller için geçiş olasılıkları.	117
Çizelge 5.13. Bağımlılık durumunda TSMZMC yöntemi ile elde edilen sonsal model olasılıkları.	118
Çizelge 5.14. Bağımlılık durumunda m_{14} modeli için iki önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler.	120

Çizelge 5.15. Bağımsızlık durumunda TSMZMC yöntemi ile elde edilen sonsal model olasılıkları.	122
Çizelge 5.16. Bağımsızlık durumunda m_{14} modeli için iki önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler.....	123

1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerin birçok alanında karşılaşılan veriler kesikli yapıdadır. Örneğin sosyal bilimlerde uygulanan anket çalışmalarında toplanan veriler genellikle kesikli yapıdadır. Kesikli veriler ile en sık karşılaşılan alanlar psikoloji, sosyoloji, ekonomi, sağlık bilimleri, özellikle halk sağlığı araştırmaları, eğitim bilimleri biçiminde sıralanabilir. Verilerin doğru biçimde toplanması ve taşıdığı bilginin somut bir biçime dönüştürülerek anlaşılır hale getirilmesi ise istatistik biliminin ilgi alanına girer. Toplanan verilerin araştırmacılara anlamlı yorumlar verebilmesi için bazı istatistiksel modeller oluşturulur ve bu modeller üzerinden çıkarsamalar yapılır.

İki ya da daha çok sayıda kesikli raslantı değişkeninin bileşik dağılımı olumsuzluk çizelgeleri (contingency tables) kullanılarak ifade edilebilir. Kesikli verilerin çözümlenmesinde logaritmik doğrusal (LD) modeller önemli bir yere sahiptir. LD modeller kullanılarak ilgili olumsuzluk çizelgesini oluşturan kesikli raslantı değişkenlerinin ilişki yapısının ortaya çıkarılması amaçlanır. LD modellerin iki önemli özelliği esneklikleri ve yorum kolaylığıdır.

Bayesci yöntemler ise araştırmacıların ilgilendikleri alandaki çalışmalarından kaynaklanan bilgi ve tecrübelerinin de çözümlene sürecine dahil edilmesini sağlar. Bayesci yöntemlerin örneklemden gelen bilginin yanı sıra araştırmacının bilgisini de dikkate almasından dolayı nesnel olmadığı düşünülebilir. Ancak, Bayesci yöntemler örneklem bilgisine ek olarak, gerçekte var olan ancak örneklem alınarak elde edilemeyecek bilgileri de çözümlenmeye katar. Dolayısıyla Bayesci yöntemlerin nesnellik özelliğine sahip olduğu belirtilmektedir (Yardımcı, 1992).

Bayesci LD model çözümlenmesinde olumsuzluk çizelgesinin beklenen göze sıklıklarına, göze olasılıklarına ya da LD model parametrelerine ilişkin önsel bilgiler çözümlene sürecine dahil edilebilir.

LD modeller için Bayesci yaklaşımların gelişimi, karmaşık sonsal dağılımlardan analitik olarak çıkarsama yapmanın boyut artışıyla beraber imkansızlaşması ve sınırsız boyuttaki (çok sayıda etken içeren) modellerin gösterimlerindeki zorluklar nedeniyle uzun zaman almıştır. Bilgisayar teknolojisindeki hızlı gelişmeyle beraber geliştirilen ve analitik

çıkarsamaya bir alternatif olan benzetim yöntemleri boyut artışından ya da sonsal dağılımın karmaşıklığından etkilenmeksizin çıkarsama yapma olanağı sunmuştur.

Agresti and Hitchcock (2005) kategorik veri çözümlemesinde Bayesci yaklaşımların gelişimini vermiştir. Ayrıca ordinal (sıralanabilir) yapıdaki kategorik verilerin çözümlenmesine ilişkin geniş literatür taramaları Agresti (1999) ve Liu and Agresti (2005) tarafından verilmiştir.

LD model parametreleri için Bayesci yaklaşımları ilk inceleyen Lindley (1964)'dir. Lindley (1964), iki boyutlu olumsuzluk çizelgeleri için Dirichlet önselini kullanmış ve göze olasılıkları kullanılarak oluşturulan bağıntıların dağılımının yaklaşık olarak normal dağılım olduğunu belirtmiştir. Daha sonra Bolch and Watson (1967), Lindley (1964)'in çalışmasını kullanarak sonsal dağılımlar için daha iyi yaklaşımlar geliştirmişlerdir. Leonard (1975), iki boyutlu olumsuzluk çizelgeleri için kurulan LD modellere Bayesci yaklaşımlar üzerinde durmuştur. Leonard (1975), sonsal tepe değerlerini bulmak için bir adımsal algoritma vermiştir. Laird (1978), Leonard (1975)'in çalışmasını bir adım ileri götürerek bir görgül Bayesci yaklaşım geliştirmiştir. Nazaret (1987) ise üç boyutlu olumsuzluk çizelgeleri için LD modellere Bayesci yaklaşımlar vermiştir. Nazaret (1987) de sonsal çıkarsamalar için sayısal bir algoritma vermiştir. Daha sonra Knuiman and Speed (1988) sınırsız boyut için LD modellere Bayesci yaklaşımlar vermişlerdir. Ancak, Knuiman and Speed (1988) önsel dağılım olarak kullandıkları çok değişkenli normal dağılımın ortalama ve kovaryans yapısını açık bir biçimde ortaya koyamamışlardır. Knuiman and Speed (1988), sonsal çıkarsamalar için sonsal dağılımın tepe değerini kullanmışlardır. Leighty and Johnson (1990), Leonard (1975) ve Nazaret (1987)'in çalışmalarının sınırsız boyutlu olumsuzluk çizelgelerine genellemesi niteliğindeki çalışmalarında, LD model parametreleri için önsel dağılımın belirlenişi ve önsel-sonsal süreci üzerinde durmuşlardır. King and Brooks (2001) ise çok değişkenli normal dağılım için ortalama ve kovaryans yapısını açık bir biçimde ortaya koymuşlar, ancak sonsal çıkarsamalara değinmemişlerdir. Green and Park (2004), Poisson dağılımlı verileri içeren olumsuzluk çizelgeleri için oluşturulan LD modeli, genelleştirilmiş doğrusal model olarak tanımlayarak yeni bir yaklaşım geliştirmişlerdir. Bu yaklaşım ile göze sıklıklarının logaritmalarının sonsal dağılımı üzerinden Gibbs örnekleme algoritması kullanılarak

sonuca gidilmektedir. Buraya kadar sözü edilen çalışmaların tümünde LD model parametreleri üzerinden gidilerek bir sonsal dağılım elde edilmiş ve Bayesci çıkarsamalar yapılmıştır. Demirhan (2004) ve Demirhan ve Hamurkaroğlu (2006), ise LD model parametreleri için belirlenen önsel dağılımdan hareketle beklenen göze sıklıkları için elde edilen önsel dağılımın belirlenmesi üzerinde durmuş ve beklenen göze sıklıkları için bir Bayesci yaklaşım vermişlerdir. Sonsal çıkarsamalar için ise benzetime dayalı Markov zinciri Monte Carlo (MZMC) yöntemlerinden, Gibbs örnekleme algoritması ve Metropolis-Hastings (MH) algoritmasını kullanmışlardır. Bu çalışmaların tümünde ilgilenilen olumsuzluk çizelgesinin nominal (sınıflanabilir) değişkenlerden oluştuğu varsayılmıştır. Evans, et al. (1993), Goodman'ın çarpımsal (multiplicative) RC modeli olarak bilinen ilişki modeli için Bayesci yaklaşım vermişlerdir. Kateri et al (2005), Goodman'ın RC(m) modeli için bir Bayesci yaklaşım geliştirmişlerdir. Forster and Webb (2006) ise ordinal değişkenlerin oluşturduğu olumsuzluk çizelgeleri için grafiksel modeller üzerinde durmuştur. Iliopoulos et al. (2007), Kateri et al. (2005)'nin çalışmasında verilmiş olan algoritmaları sadeleştiren bir parametreleme önermişlerdir.

Değişken seçimi için geliştirilmiş olan Bayesci yaklaşımlar literatürde geniş bir yer tutmaktadır. Bu yöntemler genel olarak ölçüte bağlı yöntemler, Bayes faktörlerine dayanan yöntemler, Bayesci Model Ortalama (BMO, Bayesian Model Averaging) yöntemi ve MZMC yöntemlerine dayanan yöntemler biçiminde sınıflanabilir. Bayes faktörlerine ve MZMC yöntemlerine dayanan yöntemler ve BMO sonsal model olasılıklarına ve önsel dağılımlara duyarlıdır. Buna karşın ölçüte bağlı yöntemler belirli (proper) önseller gerektirmedikinden diğerlerine göre daha esnektir (Chen et al., 2004). Literatürde model seçimi için verilmiş olan bir çok ölçüt bulunmaktadır. Bunlardan bazıları BIC (Bayesian Information Criterion, Schwarz, 1978), AIC (Akaike Information Criterion, Akaike, 1973), TIC (Takeuchi Information Criterion, Takeuchi, 1976), NIC (Network Information Criterion, Murata et al., 1994) biçiminde sıralanabilir. Bu ölçütlerin tümünde model uyumu ile modeldeki parametre sayısı arasında bir uyum sağlanamamıştır. Spiegelhalter et al. (2002) tarafından önerilmiş olan DIC (Deviance Information Criterion) 'de ise önsel bilginin sürece dahil edilmesi ile modeldeki parametre sayısı ile model uyumu arasında bir denge sağlandığı belirtilmektedir. Chen et al. (2004) ise kategorik veriler için oluşturulan modellerin karşılaştırılmasında kullanılan ve Gelfand

and Gosh (1998) ve Ibrahim et al. (2001), tarafından verilmiş olan L-ölçüsünü geliştirerek, ağırlıklandırılmış L-ölçüsü adını verdikleri bir ölçüt önermişlerdir.

LD modeller için Bayes faktörüne dayalı değişken seçimi Spiegelhalter and Smith (1982) tarafından verilmiştir. Ancak, Raftery (1996), Spiegelhalter and Smith (1982) tarafından verilmiş olan Bayes faktörünün, ilgilenilen olumsuzluk çizelgesinde sıfır sıklıklı göze bulunması durumunda uygun olmadığını belirtmiş ve sorunun ortadan kaldırılması için Jeffery's önsellerinin kullanımını önermiştir. Daha sonra Raftery (1996) Bayes faktörlerinin kullanımını genelleştirilmiş doğrusal modeller üzerinden tartışmış ve LD modeller için bir uygulama yapmıştır. Madigan and Raftery (1994), Bayes faktörlerini ve model ortalamayı bir arada kullanan bir yöntem önermişlerdir. Albert (1996), LD model parametrelerini alt kümelerine ayırıp, bu alt kümelerin seçiminin yapılmasını önermiştir.

BMO yöntemi ise ilgilenilen her modelin sonsal dağılımının sonsal model olasılıkları ile ağırlıklandırılmasına dayanmaktadır. Çok sayıda değişken ile çalışıldığında tüm model uzayının taranmasının gerekmesi BMO yönteminin bir zayıflığıdır. BMO yöntemi ile ilgili ayrıntılı bilgi ve yöntemin çeşitli modellere uygulanışı Hoeting et al. (1999) tarafından verilmiştir.

MZMC yöntemlerine dayanan değişken seçim yöntemlerinden biri "Bağımsızlık Örnekleyicisi" 'dir (BÖ, Independence sampler). Yöntem, MH algoritmasına benzemektedir. MH algoritmasında parametre vektörü ile beraber model de ele alınarak uygun bir model belirlenmeye çalışılır (Dellaportas et al., 2002). Ancak BÖ yöntemi herhangi bir anda bulunan modelden daha küçük boyutlu bir modele geçişe izin vermemektedir. Bu geçişe de izi veren ve Green (1995) tarafından geliştirilen Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo (TSMZMC, Reversible Jump Markov Chain Monte Carlo) yöntemi BÖ'den daha etkili bir yöntemdir (Dellaportas et al., 2002). Green (1995), TSMZMC yöntemini genel biçimiyle vermiştir. TSMZMC algoritmaları kullanıldığı alana göre farklılık göstermektedir. LD modeller için değişken seçiminde TSMZMC yöntemi Dellaportas and Forster (1999) tarafından ele alınmıştır. Dellaportas and Forster (1999) LD model parametreleri üzerinden değişken seçimi yapmak için önsel

dağılımların seçimi ve TSMZMC yöntemi üzerinde durmuşlardır.

Çalışmada, Demirhan ve Hamurkaroğlu (2006) ve Demirhan (2004)'in çalışmalarının genişletilmesi hedeflenmiştir. Nominal, ordinal ve nominal-ordinal çizelgeler üzerinden oluşturulan LD modeller için hem parametrelerin hem de beklenen göze sıklıklarının Bayesci kestirimleri elde edilmiştir. Bu bağlamda, ordinal değişken içeren çizelgeler üzerinden oluşturulan LD modellerde yer alan skorların kestirimi için bir yaklaşım geliştirilmiştir. Bu yaklaşım ile örneklemin skorlara ilişkin taşıdığı bilgi ortaya çıkartılabilmektedir. Bunun yanı sıra LD modeldeki tüm parametrelerin kestirimi de yapılmaktadır. Yapılan tüm çözümlenelerde değişebilirlik (exchangeability) varsayımı dikkate alınmış ve varsayımın sağlanması için bir yaklaşım önerilmiştir. Ayrıca ordinal ve nominal-ordinal çizelgeler için oluşturulan LD modellerin parametreleri üzerinden model seçimi yapmak için bir TSMZMC yaklaşımı önerilmiştir. Son olarak önerilmiş olan kuramsal yaklaşımlar dört sayısal örnek üzerinden tartışılmıştır.

2. LOGARİTMİK DOĞRUSAL MODELLER

Bu bölümde LD modeller ile ilgili genel bilgilere değinilmiştir. Üzerinden model kurulacak olan olumsallık çizelgelerinin yapısı, buna bağlı olarak kullanılacak olabilirlik fonksiyonu, LD modeller için kullanılacak gösterimler, ordinal değişkenler için klasik yaklaşımla skorların belirlenmesi, modellerin yorumlanması ve parametre kestirimi üzerinde durulmuştur. Nominal çizelgeler ile ilgili ayrıntılı bilgiler Demirhan (2004) tarafından verilmiştir.

2.1. Olumsallık Çizelgeleri

I ve J düzeyli iki kategorik değişken birlikte sınıflandığında $I \times J$ tane olası birleşim vardır. Bu iki değişkenin bileşik olasılık dağılımı $I \times J$ gözele bir çizelgede gösterilebilir. Bu çizelgeler olumsallık çizelgeleri olarak adlandırılır. "Olumsallık çizelgesi" (Contingency table) terimi ilk olarak Karl Pearson tarafından kullanılmıştır. Olumsallık çizelgeleri için Bishop, et al. (1975) şu tanımı verir: "Çok değişkenli kesikli veri çözümlemesinde her gözlem bazı özellikleri ile tanımlanır. Gözeleri belirli özellikleri taşıyan birey sayılarını barındıran çizelgeler olumsallık çizelgeleridir."

I satır ve J sütundan oluşan olumsallık çizelgeleri $I \times J$ boyutlu ya da iki-yönlü, I satır, J sütun ve K katmandan (layer) oluşan olumsallık çizelgeleri $I \times J \times K$ boyutlu ya da üç-yönlü çizelgeler olarak adlandırılır. Boyut sayısı $I \times J \times K \times L \times M \dots$ olabilir, bu durumda da çizelge, çok-yönlü çizelge olarak adlandırılır (Agresti, 2002).

Bir olumsallık çizelgesinin yapısı kendisini oluşturan değişkenlerin yapısı ile belirlenir. Çalışmada çizelgeyi oluşturan tüm değişkenler nominal ise ilgili çizelge nominal çizelge, tümü ordinal ise ordinal çizelge ve bir kısmı nominal bir kısmı ordinal ise karma çizelge olarak anılacaktır. Nominal çizelge üzerinden kurulan LD model "nominal LD model", ordinal çizelge üzerinden kurulan LD model "ordinal LD model" ve karma çizelge üzerinden kurulan LD model "karma LD model" olarak adlandırılacaktır.

Olumsallık çizelgeleri ile ifade edilen veriler çeşitli örnekleme planlarına göre toplanır. Örneklem büyüklüğü üzerinde herhangi bir kısıt bulunmadığında, olumsallık çizelgesinin her gözesi bağımsız Poisson dağılır. Örneklem büyüklüğü çalışmaya başlanmadan önce

belirlendiğinde katlı-terimli (multinomial) dağılımlı veri ile çalışılır. Çarpım-katlı-terimli (Product-multinomial) dağılımda örneklem büyüklüğü yerine etkenlerin düzey toplamları değişmezdir. Poisson ve katlı-terimli örnekleme planları için ulaşılan sonuçlar çarpım-katlı-terimli örnekleme planı içinde geçerlidir (Bishop et al., 1975).

Olabilirlik fonksiyonu, kullanılan örnekleme planına göre farklılık gösterse de olabilirlik fonksiyonunun çekirdeği aynıdır ve olabilirlik fonksiyonunun çekirdeğinin logaritması Eş. 2.1'de verilmiştir (Bishop et al., 1975; Christensen, 1990; Agresti, 2002):

$$L = \sum_{k \in K} y_k \log n_k. \quad (2.1)$$

Burada $k \in K$, "olumsallık çizelgesinin tüm gözeleri üzerinden" anlamında kullanılmıştır. Gösterimler ile ilgili ayrıntılı bilgi Kesim 2.2'de verilmiştir.

2.2. Gösterimler

LD modellerin gösteriminde kullanılan çeşitli gösterim biçimleri bulunmaktadır. Bu kesimde Bishop et al. (1975)'un gösterimleri ve King and Brooks (2001) tarafından verilmiş olan sınırsız boyut gösterimleri verilmiştir.

A , B ve C düzeyli üç ordinal değişkenin oluşturduğu bir olumsuzluk çizelgesi için kurulan tekdüze etkileşim modeli Bishop et al. (1975)'un gösterimleri ile $i = 1, \dots, A$, $j = 1, \dots, B$ ve $k = 1, \dots, C$ için,

$$\log n_{ijk} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} + u_{3(k)} + \beta_{12}x_i y_j + \beta_{13}x_i z_k + \beta_{23}y_j z_k + \beta_{123}x_i y_j z_k$$

biçiminde ifade edilir. Burada n_{ijk} , birinci değişkenin $i.$, ikinci değişkenin $j.$ ve üçüncü değişkenin $k.$ düzeyine karşılık gelen beklenen göze sıklığıdır. u , genel ortalama terimidir. $u_{1(i)}$, $u_{2(j)}$ ve $u_{3(k)}$, sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü değişkenlerin $i.$, $j.$ ve $k.$ düzeylerinin ana etki parametreleridir. β_{12} , β_{13} , β_{23} ve β_{123} tekdüze ilişki parametreleridir. x_i , y_j ve z_k birinci, ikinci ve üçüncü değişkenlerin $i.$, $j.$ ve $k.$ düzeylerine ilişkin skor değerleridir. Model parametrelerine ilişkin $\sum_i u_{1(i)} = 0$, $\sum_j u_{2(j)} = 0$ ve $\sum_k u_{3(k)} = 0$ kısıtları vardır.

A düzeyli nominal, B ve C düzeyli ordinal değişkenlerin oluşturduğu bir karma olumsallık çizelgesi için kurulan kısmi ilişki modeli Bishop et al. (1975)'un gösterimleri ile $i = 1, \dots, A$, $j = 1, \dots, B$ ve $k = 1, \dots, C$ için,

$$\log n_{ijk} = u + u_{1(i)} + u_{2(j)} + u_{3(k)} + \tau_i^{12}y_j + \tau_i^{13}z_k + \beta_{23}y_jz_k$$

biçiminde ifade edilir. Burada, önceki modelden farklı olarak τ_i^{12} ve τ_i^{13} , sırasıyla birinci - ikinci ve birinci - üçüncü değişkenler arasındaki ilişkileri ifade eden satır etki parametreleridir. Satır etki parametrelerine ilişkin $\sum_i \tau_i^{12} = 0$ ve $\sum_i \tau_i^{13} = 0$ kısıtları vardır. Farklı çizelge yapıları için oluşturulan LD modellerde, nominal - ordinal etkileşimler için satır (sütun) etki parametreleri ve ordinal - ordinal etkileşimler için ilişki parametreleri kullanılır.

Boyut artışı ile birlikte LD modellerin gösterimi zorlaşmaktadır. King and Brooks (2001) tarafından verilen gösterimler LD modellerin gösteriminde her boyuttaki çizelge için kullanılabilir. Çalışmada, King and Brooks (2001) tarafından verilmiş olan sınırsız boyut gösterimleri çalışmanın amacına uygun olarak genişletilerek kullanılmıştır.

Olumsallık çizelgesinde yer alan kategorik değişkenlerin oluşturduğu küme S olsun. $|\cdot|$ ilgili kümenin eleman sayısını göstermek üzere, S kümesinin eleman sayısı $|S|$ 'dir. Bu durumda S kümesi $S = \{S_\lambda : \lambda = 1, \dots, |S|\}$ biçiminde tanımlanır. S_λ 'nın düzeylerinin kümesi ise $\lambda = 1, \dots, |S|$ olmak üzere K_λ ile gösterilir. İlgili olumsallık çizelgesinin gözeleri $K = K_1 \times \dots \times K_{|S|}$ kartezyen çarpımı kullanılarak gösterildiğinde, gözeler $\mathbf{k} \in K$ kullanılarak indislenir. Çalışma boyunca \mathbf{k} gözesine karşılık gelen beklenen sıklık $\mathbf{k} \in K$ olmak üzere $n_{\mathbf{k}}$ ve gözlenen sıklık $y_{\mathbf{k}}$ ile gösterilecektir. LD modelleri tanımlamak için S 'nin alt kümelerinin kümesi olan $\wp(S) = \{s : s \subseteq S\}$ tanımlanır ve ilgilenilen model $m \subseteq \wp(S)$ ile gösterilir. m 'deki her eleman, $c \in m \subseteq \wp(S)$ biçimindeki bir c kümesinin elemanıdır. c 'deki değişkenlerin düzeylerinin tüm kombinasyonları ise $M^c = \{m_1^c, \dots, m_{|M^c|}^c\}$ kümesinde yer alır.

Tasarım matrisinin oluşturulması için genel olarak iki tür kodlama kullanılır. Bunlardan birincisi yapay (dummy) kodlamadır. Yapay kodlamada tasarım matrisinin elemanları

0 ve 1 değerlerini alır. İkinci kodlama ise etki (effect) kodlamadır. Etki kodlamada tasarım matrisinin elemanları -1, 0 ve 1 değerlerini alır. Her iki kodlamada da tasarım matrisinin tam ranklı olması için değişkenlerin bir düzeyi dışarıda bırakılır ve bu düzey $i = 1, \dots, |M^c|$ için tanımlanan m_j^c kümesinde yer almaz.

Nominal olumsuzluk çizelgesi üzerinden kurulan bir LD modelde her $c \in m$ için $\beta^c = (\beta_{m_1}^c, \dots, \beta_{m_{|M^c|}}^c)$ biçiminde tanımlanır ve m modeline ilişkin LD parametre vektörü $\beta_m = ((\beta^{c_1})^T, \dots, (\beta^{c_{|m|}})^T)$ biçimindedir. $m \subseteq \wp(S)$ modeline karşılık gelen tasarım matrisi X_m ile gösterilir. LD model genel olarak

$$\log n = X_m \beta_m \quad (2.2)$$

biçiminde ifade edilir.

Ayrıca modeldeki her β^c 'ye karşılık gelen alt tasarım matrisi $k \in K$ ve $c \in m$ olmak üzere $(I^c(k))^T = (I_{m_1}^c(k), \dots, I_{m_{|M^c|}}^c(k))$ biçimindedir. Burada $j \in M^c$ olmak üzere $I_j^c(k) = 0, \mp 1$ 'dir.

Gösterimler ile ilgili daha geniş bilgi ve örnekler King and Brooks (2001), Demirhan (2004) ve Demirhan ve Hamurkaroğlu (2006) tarafından verilmiştir.

Ordinal olumsuzluk çizelgesi üzerinden kurulan LD modelde $m = m^* \cup m^o$ olmak üzere her $c \in m^*$ için $\beta^c = (\beta_{m_1}^c, \dots, \beta_{m_{|M^c|}}^c)$ biçiminde tanımlanır. Burada m^* modeldeki ana etki terimlerini içeren kümedir. Modelde etkileşimleri ifade etmek üzere her $d \in m^o$ için bir β^d parametresi yer alır. Bu durumda m modeline ilişkin LD parametre vektörü $\beta_m = ((\beta^{c_1})^T, \dots, (\beta^{c_{|m^*|}})^T, \beta^{d_1}, \dots, \beta^{d_{|m^o|}})$ biçimindedir. Modelde etkileşimleri içeren her parametre için o parametre ile etkileşimi ifade edilen değişkenlere skorlar atanır. Skorları ifade etmek için ilgilenilen etkileşimi içeren d 'nin elemanlarının tanımlanması gerekmektedir. Bunun için $d' \in d \in m^o$ tanımlaması yapıldığında, her $d' \in d$ 'ye karşılık gelen skor değeri, $i = 1, \dots, |M^{d'}| + 1$ olmak üzere, $x_{d'}$ biçiminde gösterilir. Bu durumda tasarım matrisinin ana etkilere karşılık gelen sütunları nominal çizelgeler için oluşturulan LD modellerin tasarım matrisi ile aynı olurken, etkileşim terimlerinde karşılık gelen kısmı farklı olur; $X_m = [X_{m^*}; X_{m^o}]$. Burada X_{m^*} , m^* 'in elemanlarına karşılık

gelir ve etki kodlama altında -1, 0, 1 değerlerinden oluşur; \mathbf{X}_{m^o} , m^o 'nun elemanlarına karşılık gelir ve ilgili skorların çarpımlarını içerir. Bu tanımlamalar altında LD model Eş. 2.2'deki gibi ifade edilir.

Karma olumsuzluk çizelgeleri üzerinden kurulan m LD modeli $m = m^* \cup m^N \cup m^o \cup m^{No}$ biçiminde alt kümelere ayrılır. Burada, m^* ana etkileri ifade eden parametreleri, m^N nominal-nominal etkileşimlerine, m^o ordinal-ordinal etkileşimlerine, m^{No} nominal-ordinal etkileşimlerine karşılık gelen parametreleri içeren alt kümelerdir. Her $c \in m^* = m^* \cup m^N$ için $\beta^c = (\beta_{m_1^c}, \dots, \beta_{m_{|M^c|}^c})$ biçimindedir. Her $d \in m^o$ için modelde bir β^d parametresi yer alır. Her $e \in m^{No}$ için ise modelde bir $\beta^e = (\beta_{m_1^{No}}, \dots, \beta_{m_{|M^e|}^{No}})$ parametre vektörü yer alır. Bu durumda, m modeline ilişkin LD modelin parametre vektörü $\beta_m = ((\beta^{c_1})^T, \dots, (\beta^{c_{|m^*|}})^T, \beta^{d_1}, \dots, \beta^{d_{|m^o|}}, (\beta^{e_1})^T, \dots, (\beta^{e_{|m^{No}|}})^T)$ biçimindedir. Modeldeki ordinal-ordinal ve nominal-ordinal etkileşimler için ilgili etkileşim terimindeki ordinal değişkene skorlar atanır. Her $d' \in d \in m^o$ 'ya karşılık gelen skor değeri, $i = 1, \dots, |M^{d'}| + 1$ olmak üzere, $x_{d'_i}$ biçiminde ve her $e' \in e \in m^{No}$ 'ya karşılık gelen skor değeri, $i = 1, \dots, |M^{e'}| + 1$ olmak üzere, $x_{e'_i}$ biçiminde gösterilir. Bu durumda tasarım matrisi $\mathbf{X}_m = [\mathbf{X}_{m^*} : \mathbf{X}_{m^N} : \mathbf{X}_{m^o} : \mathbf{X}_{m^{No}}]$ biçimindedir. Etki kodlama kullanıldığında \mathbf{X}_{m^*} ve \mathbf{X}_{m^N} 'nin elemanları -1, 0, 1 değerlerinden ve \mathbf{X}_{m^o} ve $\mathbf{X}_{m^{No}}$ 'nun elemanları ilgili skorların çarpımından oluşur. Bu tanımlamalar altında LD model Eş. 2.2'deki gibidir.

\mathbf{X}_{m^*} ve \mathbf{X}_{m^N} alt tasarım matrislerinin oluşturulması için yapılacak işlemler, ilgilenilen olumsuzluk çizelgesinin gözelerinin sıralanması için kullanılan eşitlikler, ana etkilere ve nominal-nominal etkileşimlere karşılık gelen LD modelin parametre vektörü içerisinde sıralanması için gerekli eşitlikler King and Brooks (2001) tarafından ve bu işlemlerin uygulanması ile ilgili çeşitli örnekler Demirhan (2004) tarafından verilmiştir.

\mathbf{X}_{m^o} ve $\mathbf{X}_{m^{No}}$ alt tasarım matrisleri olumsuzluk çizelgesindeki her göze karşılık gelen skoru ya da skorların çarpımını içerir. Ordinal-ordinal ve nominal-ordinal etkileşimlere karşılık gelen LD model parametrelerinin β_m içerisinde sıralanması için King and Brooks (2001) tarafından verilen eşitlikler geçerli olmakla beraber β_m içerisinde ordinal-ordinal etkileşimler, ordinal-nominal etkileşimlerden önce yer alır.

2.3. Logaritmik Doğrusal Modellerin Yorumlanması

Her LD model bir ilişki yapısına karşılık gelir. Nominal yapıdaki üç boyutlu çizelgeler için karşılıklı bağımsızlık modeli, kısmi ilişki modelleri, koşullu ilişki modelleri, üç-değişken etkileşiminin bulunmadığı model olmak üzere dört çeşit model oluşturulabilir. Karşılıklı bağımsızlık modeli, etkileşim terimi içermez ve üç değişkenin karşılıklı olarak birbirinden bağımsız oluşunu ifade eder. Kısmi ilişki modellerinde sadece bir ikili etkileşim terimi modelde yer alır. Bu modeller, değişkenlerden birinin diğer ikisinden bağımsız olduğunu ifade eder. Koşullu ilişki modellerinde ikili etkileşim terimlerinden sadece bir tanesi bulunmaz. Etkileşimlerde tek değişken ortaktır ve diğer değişkenler ortak değişkenin düzeylerinden bağımsızdır. Üç-değişken etkileşiminin bulunmadığı model ise değişkenlerden ikisi arasındaki ilişkinin diğer değişkenin düzeyleri arasında sabit oluşunu ifade eder. Boyut sayısının üçten çok olması durumunda üç boyut için verilen yorumlar ilgili boyut için genellenir (Bishop et al., 1975; Christensen, 1990; Agresti, 2002). İlgilenilen çizelgedeki tüm gözeleri parametreler ile ifade eden modele doymun (saturated) model denir (Christensen, 1990; Agresti, 2002). Nominal çizelgeler için oluşturulan modellerin yorumlanmasına ilişkin daha geniş bilgi Demirhan (2004) tarafından verilmiştir.

Ordinal yapıdaki çizelgeler için kurulan modellerin yorumlanması nominal çizelgeler için oluşturulan modellere göre daha kolaydır ve en yüksek dereceden etkileşim parametresinin bulunduğu model doymun değildir (Agresti, 1984). Ordinal çizelgeler için oluşturulan modeller ilişki modelleridir. Doğrusal ilişki modelleri bir ilişki parametresi içerir, satır ve sütun skorları sabittir. Satır ve sütun etki modelinde ise hem satır hem de sütun skorları bilinmeyen parametrelerdir. Bu modellerden bir ilişki parametresi içeren satır ve sütun etki modeli Goodman'ın RC modeli, birden çok ilişki parametresi içeren ise Goodman'ın RC(m) modeli olarak da bilinir (Goodman, 1979, 1983; Agresti, 2002; Liu and Agresti, 2005). İlişki modellerinde çizelgeyi oluşturan değişkenlerin her kombinasyonuna bir ilişki parametresi karşılık gelir. Örneğin, ordinal yapıdaki üçer düzeyli üç değişkenin oluşturduğu üç boyutlu bir çizelge ile ilgilenilsin. Bu durumda $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, $K_1 = K_2 = K_3 = \{1, 2, 3\}$, $|K_1| = |K_2| = |K_3| = 3$ ve $\wp(S) = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}, \{S_1, S_2, S_3\}\}$ biçimindedir. İlgilenilen model $m = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$ olsun.

Bu durumda $m = m^* \cup m^O$ ve $m^* = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}\}$ ve $c_1 = \{\emptyset\}$, $c_2 = \{S_1\}$, $c_3 = \{S_2\}$, $c_4 = \{S_3\}$ biçiminde, $m^O = \{\{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$ ve $d_1 = \{S_1, S_2\}$, $d_2 = \{S_1, S_3\}$, $d_3 = \{S_2, S_3\}$ biçimindedir. $i = 2, 3, 4$ olmak üzere $M^{c_i} = \{m_1^{c_i}, m_2^{c_i}\} = \{(1), (2)\}$ biçimindedir. Bu tanımlamalar altında LD modelin parametre vektörü $\beta_m = (\beta^{c_1}, (\beta^{c_2})^T, \dots, (\beta^{c_4})^T, \beta^{d_1}, \beta^{d_2}, \beta^{d_3})$ biçimindedir. Burada $\beta^{c_1}, \dots, (\beta^{c_4})$ 'ün yorumu nominal çizelgeler için yapılan yorumların aynısıdır. β^{d_1} , β^{d_2} ve β^{d_3} ise tekdüze ilişki parametreleridir ve ikili değişken çiftleri arasındaki ilişkinin üçüncü değişkenin düzeylerinde sabit olduğu yorumunu verir. İlişki ile ilgili yorumlar odds oranları kullanılarak yapılabilir. $c_1, c_2, c_3 \in m^*$ olmak üzere c_3 'ün elemanı olan değişkenin etkisi sabit tutulduğunda diğer iki değişkene ilişkin odds oranı $\theta_{M^{c_1}M^{c_2}(M^{c_3})}$ olmak üzere, $\log \theta_{M^{c_1}M^{c_2}(M^{c_3})} = \beta^{d_1}$ biçimindedir.

Karma yapıdaki üç boyutlu çizelgeler için satır etki ve sütun etki modellerinin yanı sıra nominal-nominal ve ordinal-ordinal etkileşimlerini içeren modeller de kurulabilir. Bu tür modeller için ana etki, nominal-nominal ve ordinal-ordinal etkileşim parametrelerinin yorumu önceki kesimlerde verildiği gibidir. Satır etki modellerinde sütun skorları sabit, satır skorları bilinmeyen parametredir. Sütun etki modelinde satır skorları sabit, sütun skorları bilinmeyen parametrelerdir, satır ve sütun etki modelinde ise hem satır hem de sütun skorları bilinmeyen parametrelerdir (Goodman, 1979, 1983; Agresti, 2002; Liu and Agresti, 2005). Önceki örnekte birinci değişken nominal, diğer iki değişken ordinal olsun. Bu durumda $m = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$ modeli $m^* = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}\}$, $m^N = \emptyset$, $m^O = \{S_2, S_3\}$ ve $m^{NO} = \{\{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}\}$ olmak üzere $m = m^* \cup m^N \cup m^O \cup m^{NO}$ biçiminde alt kümelere ayrılır. Burada önceki örnekten farklı olarak $d_1 = \{S_2, S_3\}$, $e_1 = \{S_1, S_2\}$ ve $e_2 = \{S_1, S_3\}$ biçiminde ve LD modelin parametre vektörü ise $\beta_m = (\beta^{c_1}, (\beta^{c_2})^T, \dots, (\beta^{c_4})^T, \beta^{d_1}, (\beta^{e_1})^T, (\beta^{e_2})^T)$ biçimindedir. Burada da $\beta^{c_1}, \dots, (\beta^{c_4})$ 'ün yorumu nominal çizelgeler için yapılan yorumların aynısıdır. β^{d_1} birinci değişkenin düzeylerinde ikinci ve üçüncü değişken arasındaki tekdüze ilişkiyi verir. $(\beta^{e_1})^T$ üçüncü değişkenin düzeylerinde tekdüze olan, birinci ve ikinci değişken ilişkisinde nominal değişkenin düzeylerinin etkisini verir. $(\beta^{e_2})^T$ ikinci değişkenin düzeylerinde tekdüze olan, birinci ve üçüncü değişken ilişkisinde nominal değişkenin düzeylerinin etkisini verir. $c_1, c_2, c_3 \in m^*$ olmak üzere c_3 'ün elemanı olan ordinal değişkenin etkisi sabit tutulduğunda nominal değişken ile diğer ordinal

değişkene ilişkin odds oranı $\theta_{M^{c_1} M^{c_2} (M^{c_3})}$ olmak üzere, $\log \theta_{M^{c_1} M^{c_2} (M^{c_3})} = \beta_{m_{i+1}^{NO}}^e - \beta_{m_i^{NO}}^e$ biçimindedir.

Bir model anlamlı ise daha küçük boyutlu bir modelde anlamlıdır. Daha büyük boyutlu modelden bağımsızlıkla ilgili bir çıkarsama yapılabilirse, daha küçük boyutlu modellerden de aynı çıkarsama yapılır (Bishop et al., 1975).

2.4. Ordinal Değişkenler için Skorların Belirlenmesi ve Parametre Kestirimi

Olumsuzluk çizelgesini oluşturan ordinal değişkenlerin düzeylerine skor değerleri atanır. Klasik çözümlemede bu atama araştırmacı tarafından, skorların belirlenmesi için verilmiş yöntemler kullanılarak yapılabilir ya da skorlar da bilinmeyen parametreler olarak alınıp skor değerleri kestirilebilir. Ancak skorların ordinal değişkenin yapısı dikkate alınmadan atanması, veri dengeli olmadığında ya da ordinal değişkenin düzeyleri arasındaki farklar eşit olmadığında sağlıklı bir yaklaşım olmamaktadır. Skorların doğrusal dönüşümleri çözümleme üzerinde farklı etki yaratmaz.

Goodman (1979), m LD modeli $m = m^* \cup m^O$ biçiminde alt kümelere ayrıldığında, $d' \in d \in m^O$ olmak üzere, doğrusal ilişki modelleri için $x_{d'} = i$ alınmasını önermiştir. Agresti (2002) ise ordinal değişkenin her düzeyindeki gözlemlere o düzeydeki gözlemlerin örneklemdaki sıra numaralarının yarısının atanabileceğini belirtmektedir. Ancak bu yaklaşımın ordinal değişkenin düzeylerindeki gözlem sayısı birbirine yakın olduğunda düzeyler arasındaki sıralamayı yansıtamadığı ve bu yaklaşım ile elde edilen skorların kullanılmadan önce uygunluğunun kontrol edilmesi gerektiği belirtilmektedir (Graubard and Korn, 1987; Agresti, 2002). Graubard and Korn (1987), ilgilenilen ordinal değişkenin düzeyleri eşit aralıklı ise düzey numaralarının standartlaştırılmasını ve standartlaştırılmış değerlerin skor değerleri olarak kullanılmasını önermişlerdir.

Ordinal değişkenler için atanacak skorlar parametre olarak alındığında, parametre kestirimi ile eş zamanlı olarak skorlar da kestirilmektedir. RC modeli, model parametrelerini çarpımsal olarak içerdiğinden ilgilenilen model log-doğrusal değil log-çarpımsal olmaktadır. Olabilirlik fonksiyonu, RC modelinin parametre kestirimi sırasında içbükey olmamakta ve bir yerel maksimum noktası bulunamayabilmektedir

(Agresti, 2002). Chuang (1983), skorların en çok olabilirlik kestirimlerini adımsal olarak yeniden ağırlıklandırılmış doğrusal olmayan en küçük kareler yöntemini kullanarak elde etmiştir. Agresti (1984), değişkenlerden birine karşılık gelen skorların parametre, diğer değişkenlere karşılık gelenlerin sabit olarak alınmasının modeli LD yapacağını, bu işlemin sırayla her değişken için tekrarlanması durumunda parametre kestiriminin LD modeller için verilen adımsal yöntemler ile yapılabileceğini belirtmektedir. Bu durumda her adımda kestirilen skor değerleri bir sonraki adımda araştırmacı tarafından belirlenmiş gibi kullanılmaktadır. Bu yöntemde de yakınsama sağlanamayabilmektedir. Ancak model uyumu çok iyi olduğu zaman yakınsama sağlanması olasılığının yüksek olduğu belirtilmektedir (Agresti, 2002).

Nominal çizelgeler için oluşturulan LD modeller için parametre kestirimleri, ilgili model için doğrudan kestirimlerin elde edilebildiği durumlarda doğrudan kestiriciler kullanılarak, elde edilemediği durumlarda ise adımsal yöntemler kullanılarak bulunur. Doğrudan kestiricilerin varlığının araştırılması için gerekli yöntemler Bishop et al. (1975) tarafından verilmiş ve Demirhan (2004) tarafından Kesim 2.3'te verilmiş olan gösterimlere uyarlanmıştır. Doğrudan kestirimlerin bulunamadığı durumlarda temel olarak iki adımsal yöntem kullanılmaktadır; birincisi adımsal orantılı uyum (iterative proportional fitting), ikincisi ise Newton-Rapson (N-R) yöntemidir. Bir dizi ağırlıklandırılmış regresyon çözümü yapmakla eşdeğer olan N-R yöntemi genellikle yeniden ağırlıklandırılmış iteratif en küçük kareler (iteratively reweighted least squares) yöntemi adıyla da bilinir (Christensen, 1990). N-R yöntemi, olabilirlik fonksiyonunun birinci türevini kullanır. Daha yüksek dereceden türevleri kullanan ve daha duyarlı olan adımsal yöntemler de vardır. Ancak programlama kolaylığı ve yakınsama hızı nedeniyle N-R yöntemi daha çok kullanılmaktadır.

3. BAYESÇİ KESTİRİMLER

Bu bölümde ilk olarak nominal çizelgeler için LD model parametrelerinin ve beklenen göze sıklıklarının Bayesci yaklaşım ile kestirilmesi üzerinde durulmuştur. Daha sonra nominal, ordinal ve karma LD modeller için Bayesci parametre kestirimleri hem parametreler hem de beklenen göze sıklıkları üzerinden Bayesci yaklaşımla elde edilmiştir. Buna ek olarak ordinal ve karma LD modeller için değişebilirlik varsayımı ve ordinal değişkenlere karşılık gelen skorların kestirilmesi için Bayesci yaklaşımlar geliştirilmiştir.

Ordinal ve karma LD model parametreleri üzerinden Bayesci çıkarsama yapılırken bağımsızlık yapısına ilişkin önsel bilginin temel olarak iki durumu dikkate alınmıştır. Bunlardan birincisi ana etki, nominal etkileşim, ilişki ve satır (sütun) etki parametrelerinin gruplar halinde bağımsız olduğu önsel bilgisinin bulunduğu durumdur. İkincisi ise parametrelerin kendi gruplarının içerisinde de bağımsız olduğu bilgisinin bulunduğu durumdur. Birinci durumun dışındaki kısmi bağımsızlık durumlarında birinci durum için yapılan işlemlere benzer işlemler yapılarak çözümleme yapılır.

3.1. Nominal Logaritmik Doğrusal Modeller için Bayesci Çıkarsamalar

3.1.1. Logaritmik doğrusal model parametreleri üzerinden Bayesci çıkarsama

LD model parametreleri için olabilirlik fonksiyonu olarak Eş. 3.1 ile verilmiş olan çok değişkenli normal (ÇDN) dağılım kullanılabilir (Leighty and Johnson, 1990):

$$l(\boldsymbol{\beta}_m | \mathbf{b}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_m)^T \mathbf{V}_b^{-1} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_m) \right\}. \quad (3.1)$$

Eş. 3.1'de \mathbf{b} , $\boldsymbol{\beta}_m$ 'nin en çok olabilirlik kestiricisi (EÇOK), \mathbf{V}_b , \mathbf{b} 'ye ilişkin kovaryans matrisidir. $m \subseteq \wp(S)$ için $\boldsymbol{\beta}_m \sim N(\boldsymbol{\mu}_m, \boldsymbol{\Sigma}_m)$ alındığında $p(\boldsymbol{\beta}_m)$ Eş. 3.2'de verildiği gibidir:

$$p(\boldsymbol{\beta}_m) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_m)^T \boldsymbol{\Sigma}_m^{-1} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_m) \right\}, -\infty < \beta_m^i \in \boldsymbol{\beta}_m < \infty. \quad (3.2)$$

Bu aşamadan sonra önsel dağılımın parametrelerinin ve hiper-parametrelerinin belirlenmesi gerekmektedir. \mathbf{I}_m , $p = \text{boyut}(\boldsymbol{\beta}_m)$ boyutlu birim matris ve $c = p/\text{iz}(\mathbf{V}_b^{-1})$ olmak

üzere $\Sigma_m = \frac{1-\tau}{\tau} \mathbf{C}_m = \frac{1-\tau}{\tau} c \mathbf{I}_m$ olarak alındığında LD modelin parametre vektörünün önsel dağılımı

$$p(\boldsymbol{\beta}_m | \tau) \propto \left[\frac{\tau}{1-\tau} \right]^{p/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_m)^T \frac{\tau}{1-\tau} \mathbf{C}_m^{-1} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_m) \right\}, -\infty < \beta_m^i \in \boldsymbol{\beta}_m < \infty \quad (3.3)$$

olur.

Eş. 3.1 ile verilmiş olan olabilirlik fonksiyonu Bayes Teoremi kullanılarak Eş. 3.3 ile verilmiş olan önsel dağılım ile birleştirildiğinde Eş. 3.4'te verilmiş olan sonsal dağılıma ulaşılır:

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{\beta}_m | \mathbf{b}, \tau) &\propto p(\boldsymbol{\beta}_m | \tau) \ell(\boldsymbol{\beta}_m | \mathbf{b}) \\ &\propto \left[\frac{\tau}{1-\tau} \right]^{p/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_m)^T \frac{\tau}{1-\tau} \mathbf{C}_m^{-1} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_m) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_m)^T \mathbf{V}_b^{-1} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\beta}_m) \right\} \\ &\propto \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_\beta)^T \Sigma_\beta^{-1} (\boldsymbol{\beta}_m - \boldsymbol{\mu}_\beta) \right\}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Burada $\boldsymbol{\mu}_\beta$ ve Σ_β parametrelerin bileşik dağılımının ortalama vektörü ve kovaryans matrisidir ve Eş. 3.5 ve 3.6'daki gibi elde edilir.

$$\Sigma_\beta = \left[\mathbf{V}_b^{-1} + \frac{\tau}{1-\tau} \mathbf{C}_m^{-1} \right]^{-1} \quad (3.5)$$

$$\boldsymbol{\mu}_\beta = \Sigma_\beta \left[\mathbf{V}_b^{-1} \mathbf{b} + \frac{\tau}{1-\tau} \mathbf{C}_m^{-1} \boldsymbol{\mu}_m \right]. \quad (3.6)$$

Eş. 3.5 ve 3.6 ile verilmiş olan sonuçların çıkarımı Demirhan (2004) tarafından verilmiştir. Boyut sayısının büyük olması ve ulaşılan sonsal dağılımın karmaşıklığı nedeniyle Eş. 3.6'dan analitik çözümler bulmak mümkün olmamaktadır. Bu durumda sıklıkla kullanılan MZMC yöntemlerinden Gibbs örnekleme algoritması uygun çözümler vermektedir. Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanması için LD model parametrelerinin tam koşullu dağılımlarının bulunması gerekir. Gösterim kolaylığı için $\boldsymbol{\beta}_m$,

$$\left(\beta_{m_1}^{c_1}, \dots, \beta_{m_{|M^{c_1}|}}^{c_1}, \beta_{m_1}^{c_2}, \dots, \beta_{m_{|M^{c_2}|}}^{c_2}, \dots, \beta_{m_1}^{c_a}, \dots, \beta_{m_{|M^{c_a}|}}^{c_a} \right),$$

$$(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_a)$$

biçiminde gösterildiğinde,

$$p(\beta_i | \boldsymbol{\beta}_{-i}, \tau, \mathbf{b}) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\varphi_{ii}^{-1}} \left[\beta_i - \left(\mu_{\beta_i} - \frac{D}{\varphi_{ii}} \right) \right]^2 \right\}, -\infty < \beta_i < \infty. \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. Burada $\boldsymbol{\beta}_{-i}$, i . parametre dışındaki parametreleri içeren vektördür ve $i, j = 1, \dots, a$ için $\Sigma_{\boldsymbol{\beta}} = (\varphi_{ij})$, $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}} = (\mu_{\beta_i})$ biçimindedir. D sabiti ise $D = (\boldsymbol{\beta}_{-i} - \boldsymbol{\mu}_{-i})^T \boldsymbol{\eta}$ ile elde edilir. Burada $\boldsymbol{\mu}_{-i}$, $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{\beta}}$ 'nin i . elemanı dışındaki elemanlarını içeren vektördür. $\boldsymbol{\eta}$ ise $\Sigma_{\boldsymbol{\beta}}$ 'nin herhangi bir satır ya da sütunundaki i . elemanın haricindeki elemanları içeren vektördür. Elde edilen tam koşullu dağılım, $(\mu_{\beta_i} - \frac{D}{\varphi_{ii}})$ ortalaması ve φ_{ii}^{-1} varyansı ile normal dağılımdır. Gibbs örnekleme algoritması Eş. 3.7 ile verilmiş olan tam koşullu dağılımlar kullanılarak EK 2'de verildiği gibi uygulanır.

3.1.2. Beklenen göze sıklıkları üzerinden Bayesci çıkarsama

Doygun model dışındaki LD modellerde parametre sayısı göze sayısından azdır. Bu durumda beklenen göze sıklıkları için belirlenecek önsel dağılımın parametreler üzerinden elde edilmesi kolaylık sağlamaktadır. Bu yaklaşım King and Brooks (2001) tarafından verilmiştir. Eş. 3.1 ile verilmiş olan önsel dağılım üzerinden $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{X}_m \boldsymbol{\mu}_m$ ve $\Sigma = \mathbf{X}_m \Sigma_m \mathbf{X}_m^T$ olmak üzere $\log \mathbf{n} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ biçiminde elde edilir. Buradan hareketle \mathbf{n} 'nin önsel dağılımı Eş. 3.8 ile verilmiş olan çok değişkenli log-normal (ÇDLN) dağılımdır (King and Brooks, 2001).

$$p(\mathbf{n}) \propto \prod_{k \in K} \left(\frac{1}{n_k} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\log \mathbf{n} - \boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\log \mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, 0 < n_i \in \mathbf{n}. \quad (3.8)$$

Ancak $\Sigma = \mathbf{X}_m \Sigma_m \mathbf{X}_m^T$ biçiminde tanımlandığında Σ 'nin tam ranklı olmadığı, dolayısıyla pozitif tanımlı olma kısıtının sağlanmadığı ve bu nedenle Eş. 3.8 ile verilen dağılımın tanımlanamayacağı Demirhan (2004) ve Demirhan ve Hamurkaroğlu (2006) tarafından gösterilmiştir. Demirhan (2004) ve Demirhan ve Hamurkaroğlu (2006), tam ranklı

olmama sorununun giderilmesi için Σ yerine $\Sigma^* = \Sigma + hI$ 'in kullanılmasını önermişler ve $enk(\lambda_j)$, Σ 'nın en küçük özdeğeri olmak üzere, $h = [iz(\Sigma)/p] - enk(\lambda_j)$ alınmasının soruna bir çözüm sağladığını göstermişlerdir. Eş. 3.8'de Σ yerine Σ^* kullanıldığında önsel dağılım

$$p(\mathbf{n}|\tau, h) \propto \prod_{k \in K} \left(\frac{1}{n_k} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\log \mathbf{n} - \boldsymbol{\mu})^T (\Sigma^*)^{-1} (\log \mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}) \right\}, 0 < n_k \in \mathbf{n} \quad (3.9)$$

biçimindedir.

Eş. 3.9 ile verilmiş olan önsel dağılım, Eş. 2.1 ile verilmiş olan olabilirlik fonksiyonu ile birleştirildiğinde beklenen göze sıklıklarının bileşik sonsal dağılımı

$$p(\mathbf{n}|\tau, h, \mathbf{y}) \propto \prod_{k \in K} \left(\frac{1}{n_k} \right) \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\log \mathbf{n} - \boldsymbol{\mu})^T (\Sigma^*)^{-1} (\log \mathbf{n} - \boldsymbol{\mu}) \right\} \\ \times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \log n_k \right\}, 0 < n_k \in \mathbf{n} \quad (3.10)$$

biçiminde elde edilir (Demirhan, 2004; Demirhan ve Hamurkaroğlu, 2006). Eş. 3.10'da ulaşılan sonsal dağılımdan analitik çıkarsamalar yapmak ve tam koşullu dağılımların elde edilişi zor olmaktadır. Bu nedenle sonsal çıkarsamalara ulaşmak için MZMC yöntemlerinden MH algoritması kullanılabilir. MH algoritmasının uygulanışı EK 3'te verilmiştir.

Ordinal LD modeller için Bayesci çıkarsamalara geçmeden önce nominal LD modeller için kendiliğinden sağlanan değişebilirlik varsayımının incelenmesi gerekmektedir.

3.2. Değişebilirlik Varsayımı

Y_1, \dots, Y_r raslantı değişkenleri için oluşturulan önsel dağılımda raslantı değişkenlerinin tüm alt indisleri bilgi içermiyorsa bu raslantı değişkenleri değişebilir denilebilir. Tüm alt indislerin bilgi içermediği yargısına, Y_1, \dots, Y_r raslantı değişkenlerinin tüm tekli, ikili, üçlü, ..., r'li kombinasyonlarının marjinal ya da marjinal bileşik dağılımlarının aynı olduğundan yola çıkılarak ulaşılır (Bernardo and Smith, 1994).

Kısmi değişebilirlik ise birden çok özelliğin ölçüldüğü çalışmalarında ortaya çıkar. Örneğin, erkek ve kadınlara farklı ilaç dozlarının uygulandığı bir çalışmada, aynı dozu alan ve cinsiyeti aynı olan bireyler arasında değişebilirlik olması durumunda kısmi değişebilirlik görülür (Bernardo and Smith, 1994).

Değişebilirlik varsayımı kategorik veri çözümlemesinde değişkenlerin düzeyleri arasında herhangi bir sıralamanın olmadığı ya da sıralama yapılamadığı, yani tüm değişkenlerin nominal olduğu durum için geçerlidir (Agresti, 1984). İlgilenilen çizelge ordinal olduğunda değişkenlerin düzeyleri arasında sıralama olduğundan düzey indisleri bilgi içerir. Bu nedenle ilgili çizelge üzerinden oluşturulan önsel dağılım değişebilirlik özelliğine sahip değildir. Karma olduğunda ise ilgili önsel dağılım için ancak kısmi değişebilirlik varsayımı sağlanabilir. Bu durumda, LD modeller için şimdye kadar önerilmiş olan Bayesci yaklaşımlarda tanımlanan önsel dağılımların kullanılması uygun değildir. Çünkü bu önsellerde, her ne kadar önsel bilgi her parametre ya da göze için ayrı ayrı ifade edilse de önsel bilgiye olan güvenin derecesini ifade etmek için aynı duyarlık parametresi kullanılmaktadır. Bu nedenle önsel bilgiye olan güven tüm düzeyler için aynı olmaktadır. Değişebilirlik özelliğini taşıyan bir önsel belirlemek için modeldeki her parametreye ilişkin önsel bilgiye olan güvenin de ayrı ayrı belirlenebilmesi gerekmektedir. Bu da kullanılacak önsel dağılımın kovaryans matrisinin ayrıştırılması ile mümkün olur.

Ordinal ya da karma LD modeller için Bayesci çıkarsama yapmak amacıyla oluşturulan önsel dağılımın kovaryans matrisi Σ olsun. Σ 'nın Cholesky ayrışımı $\Psi = \Phi\Gamma$ olmak üzere $\Sigma = \Psi(\Psi)^T$ biçimindedir. Bu durumda,

$$\Sigma = \Phi\Gamma\Gamma^T\Phi^T \quad (3.11)$$

elde edilir. Eş. 3.11'de $\Phi = \text{köş}(\varphi_1, \dots, \varphi_{|m|})$, ve $t = 1, \dots, |m|$, $s = t + 1, \dots, |m|$ için $\Gamma = (\gamma_{ts})$ biçimindedir. $\varphi_t > 0$ ve Γ bir alt üçgen matris olmak üzere Σ , $\Phi = \text{köş}(\varphi_1, \dots, \varphi_{|m|})$ 'nin ve Γ 'nin sıfırdan farklı elemanlarının bir fonksiyonudur. $t = 1, \dots, |m|$ ve $s = t + 1, \dots, |m|$ için $\Sigma = (\omega_{ts})$ olsun. Buna göre $\Sigma = (\omega_{ts})$ matrisindeki varyans ve kovaryans terimleri,

$$\omega_{tt} = \varphi_t^2 \left[1 + \sum_{s=1}^{t-1} \gamma_{ts}^2 \right] \text{ ve } \omega_{ts} = \varphi_t \varphi_s \left[\gamma_{ts} + \sum_{r=1}^{t-1} \gamma_{tr} \gamma_{sr} \right] \quad (3.12)$$

biçiminde elde edilir. Γ 'nin sıfırdan farklı olan elemanları parametreler arasındaki kovaryansları ifade etmek için kullanılır. Önsel olarak parametrelerin bağımsız olduğu varsayıldığında $\Sigma = \text{köş}(\varphi_1^2, \dots, \varphi_{|m|}^2)$ elde edilir (Chen and Dunson, 2003). Kovaryans matrisi ayrıştırıldıktan sonra, ayrışım ile elde edilen her φ_t ve γ_{ts} için bir önsel dağılım atanabilir.

φ_t 'lerin önsel olarak bağımsız olduğu varsayıldığında $\xi_t = (1 + \varphi_t)^{-1}$ dönüşümünün kullanılmasıyla her ξ_t için,

$$\begin{aligned} p(\xi_t) &= \eta_t^{-1}, 0 \leq \xi_t \leq \eta_t \\ &= 0, \text{ ö.d.} \end{aligned} \quad (3.13)$$

biçiminde bir tekbiçimli önsel dağılım atanabilir. Bu durumda Eş. 3.13'ten her φ_t için bir Cauchy-kuyruk önseli belirlenmiş olur:

$$p(\varphi_t) \propto \frac{1}{(1 + \varphi_t)^2}, \varphi_t \geq \frac{1 - \eta_t}{\eta_t}, \quad (3.14)$$

burada η_t araştırmacı tarafından belirlenecek bir sabittir.

Önsel dağılımın 3.11-3.14 eşitliklerinde verilen yaklaşım kullanılarak belirlenmesiyle φ_t 'nin alacağı en küçük değer kontrol edilmektedir. $\eta_t \rightarrow 0$ olduğunda ξ_t 'nin dağılımının belirsiz (improper) önsel olduğu ve Eş. 3.12'den $\omega_{tt} \rightarrow \infty$ olduğu görülmektedir. $\eta_t > 1$ olduğunda önsel dağılım her zaman bilgi içermeyen önsel olmamaktadır. η_t 'nin sıfıra yakın ancak sıfırdan büyük değerleri için bilgi içermeyen bir önsel dağılım elde edilmektedir.

Önsel olarak ilgili parametrelerin bağımsız olduğu varsayıldığında γ_{ts} için belirli (proper) bir tekbiçimli önsel kullanılabilir. Bağımsızlığa ilişkin bir önsel bilgi yoksa varyanslar ve korelasyonlara ilişkin bilgidен kovaryanslara geçilebilir. İlgilenilen parametre β ile

gösterildiğine, β_t ile β_s arasındaki korelasyon katsayısı ρ_{ts} olmak üzere Eş. 3.12 kullanılarak,

$$\rho_{ts} = \frac{\gamma_{ts} + \sum_{r=1}^{t-1} \gamma_{tr} \gamma_{sr}}{\left[1 + \sum_{r=1}^{t-1} \gamma_{tr}^2\right]^{1/2} \left[1 + \sum_{r=1}^{s-1} \gamma_{sr}^2\right]^{1/2}} \quad (3.15)$$

elde edilir. Eş. 3.15'ten de görüldüğü gibi parametreler arasındaki korelasyon φ_t 'den bağımsızdır. Bu nedenle parametreler arasındaki korelasyona ilişkin önsel bilgi η_t 'den bağımsız olarak ifade edilir. γ_{ts} dışındaki tüm $\gamma_{..}$ 'lar bilindiğinde, A ve B sabit olmak üzere $\rho_{ts} = (\gamma_{ts} + A)/B$ biçiminde ifade edilebilir. ρ_{ts} için Eş. 3.16 ile verilmiş olan önsel dağılım kullanıldığında,

$$\begin{aligned} p(\rho_{ts}) &= g_{ts}^{-1} (1-a) g_{ts} < \rho_{ts} < a g_{ts} \\ &= 0 \quad , \text{ö.d.} \end{aligned} \quad (3.16)$$

biçimindedir. Eş. 3.16 ve 3.17'de $a, g_{ts} < 0$ ise 0, değilse 1 değerini almaktadır. $i = 1, \dots, t-1, j = 1, \dots, s-1$ için

$$\begin{aligned} p(\gamma_{ts} | \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\xi}) &= B g_{ts}^{-1} B(1-a) g_{ts} - A < \gamma_{ts} < B a g_{ts} - A \\ &= 0 \quad , \text{ö.d.} \end{aligned} \quad (3.17)$$

biçiminde elde edilir. Bu yaklaşım ile korelasyon katsayılarına ilişkin bilgi kovaryans matrisinin ayrışım sonucunda elde edilen elemanlarına ilişkin bilgiye dönüştürülmüş olur. Korelasyonlara ilişkin bilginin ifade edilmesi kovaryanslara ilişkin bilginin ifade edilmesinden daha kolaydır. Araştırmacı, β_t ve β_s arasındaki korelasyona ilişkin bilgisini g_{ts} 'yi belirleyerek ifade eder. Bu işlemde ρ_{ts} 'nin beklenen değeri göz önünde bulundurulur.

Önsel dağılımın kovaryans matrisinin 3.11-3.17 eşitliklerinde verilen yaklaşımla belirlenmesi sonucunda parametre vektörünün her bir elemanına ilişkin önsel güvenin derecesi ayrı ayrı belirtilebilir. Aynı zamanda önsel bilgi de her parametre için değişkenlerin düzeylerinden bağımsız olarak belirlenebildiğinden ordinal ve karma LD modeller için değişebilirlik varsayımını sağlayan önsel dağılımlar belirlenmiş olur.

Burada verilen yaklaşım Demirhan ve Hamurkaroğlu (2008) tarafından log odds oranlarının $R \times C$ ve $2 \times 2 \times K$ olumsuzluk çizelgeleri üzerinden Bayesci kesitirmine değişebilirlik varsayımının sağlanması için kullanılmıştır.

3.3. Ordinal Logaritmik Doğrusal Modeller için Bayesci Çıkarsamalar

Ordinal LD modeller için Bayesci çıkarsamalar ilk olarak LD model parametreleri üzerinden yapılmıştır. Beklenen göze sıklıkları için yapılacak Bayesci çıkarsamalarda kullanılan önsel dağılım LD model parametreleri için belirlenen önsel dağılımdan elde edilmiştir. Son olarak, LD model parametrelerinin önsel dağılımından beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımını elde etmek için kullanılan dönüşümün tutarlılığı üzerinde durulmuştur.

3.3.1. Ordinal logaritmik doğrusal model parametreleri üzerinden Bayesci çıkarsama

Ordinal LD modeller için çıkarsama yapılırken skorların belirlenmesi önemli bir problemdir. Bayesci çıkarsama, önsel bilginin çözülemeye dahil edilmesinin yanı sıra skor belirleme problemine de bir çözümler sunabilmektedir. Kateri et al. (2005), RC(m) modelleri için skorları da raslantı değişkeni olarak çözümler sürecine dahil eden bir Bayesci yaklaşım önermişlerdir. Kateri et al. (2005), kullandıkları önsel dağılımların karmaşıklığı nedeniyle tam koşullu dağılımlara ulaşamamış ve bu nedenle MH algoritmasını kullanmışlardır. Ayrıca Kateri et al. (2005)'nin sonsal çıkarsamalar için verdiği algoritma bazı karmaşık dönüşümler gerektirmektedir. Iliopoulos et al. (2007) ise ilişki modeli için yeni bir parametrelere önermişler ve Kateri et al. (2005)'nin yaklaşımını daha basit hale getirdiklerini belirtmişlerdir. Iliopoulos et al. (2007) temel sıra-kısıtlı (order-restricted) RC model için bir yaklaşım verdiklerini belirtmişlerdir. Iliopoulos et al. (2007) skorların raslantı değişkeni olması durumunda ilişki modelinin log-çarpımsal olması nedeniyle çözümler yapabilmek için bir takım kısıtlar oluşturmuşlardır.

Iliopoulos et al. (2007) sıra-kısıtlı olmayan çözümlerlerinde skorlar için normal önsel kullanmışlar ancak skorların arasında var olması olası olan ilişki yapısına değinmemişler ve değişebilirlik varsayımını sağlayan önsel dağılımlar elde etmişlerdir. Böylece Kateri et al. (2005) tarafından verilen yaklaşımdan daha yalın bir yaklaşım elde etmişlerdir.

Iliopoulos et al. (2007) sıra-kısıtlı çözümlerinde ise skorların sıralı olduğu kısıtını çözümelemeye dahil etmişler ancak yine skorlar arasında olması olası bağımlılık yapısını dikkate almamışlardır. Yaptıkları yeniden parametreleme sonucunda ortaya çıkan yeni parametreler için önsel dağılım olarak normal, log-normal ya da gamma dağılımının kullanılmasını önermişlerdir.

Bu alt bölümde ordinal LD modellerin parametreleri üzerinden Bayesci çıkarsama yapılması ve aynı zamanda skor belirleme probleminin Bayesci yaklaşımla ele alınması üzerinde durulacaktır. Bu bağlamda, Kateri et al. (2005) ve Iliopoulos et al. (2007)'un verdiği yaklaşımdan daha yalın ve kullanışlı, skorlar arasındaki olası bağımlılık yapısını da dikkate alan ve değişebilirlik varsayımını sağlayan bir yaklaşımın geliştirilmesi üzerinde durulmuştur.

Bir Bayesci yaklaşım geliştirebilmek için ilk olarak olabilirlik fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. Katlı-terimli örnekleme planı kullanılarak oluşturulan ordinal yapıdaki bir olumsuzluk çizelgesi ile ilgilenildiğinde olabilirlik fonksiyonunun çekirdeği Eş. 2.1'de verildiği gibidir. Nominal-nominal etkileşim parametreleri için farklı bir işlem yapılmayacağından ilerleyen eşitliklerde aksi belirtilmedikçe $m^* = m^* \cup m^O$ olarak kullanılacaktır. $m = m^* \cup m^O$, $c \in m^*$, $d \in m^O$ ve her $d' \in d$ için $k(d')$, k 'nin d' 'ye karşılık gelen elemanı olmak üzere,

$$\log n_k = \sum_{c \in m^*} (I^c(k))^T \beta^c + \sum_{d \in m^O} \beta^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'}^i - \sum_{r \in m} (I^r(k))^T \beta^r \quad (3.18)$$

biçimindedir. Eş. 3.18'de β^r gereksiz (redundant) terimleri içerir (Demirhan, 2004). Eş. 3.18, Eş. 2.1'de yerine yazıldığında kullanılacak olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$\log l = L(\mathbf{x}_d, \beta^c, \beta^d | \mathbf{y}) = \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{c \in m^*} (I^c(k))^T \beta^c + \sum_{d \in m^O} \beta^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'}^i - \sum_{r \in m} (I^r(k))^T \beta^r \right] \quad (3.19)$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.19'da $\beta_\emptyset \in m^*$ biçimindedir. Bayesci kestirim sürecinde ilgilenilen skorlar da raslantı değişkeni olarak tanımlanmıştır. Bu durumda skorlar, LD modelin ana etki parametreleri ve ilişki parametreleri için önsel dağılımların belirlenmesi

gerekmektedir.

Önsel dağılımın belirlenmesi Bayesci çözümlemenin en önemli konularından biridir. Çünkü önsel dağılım çözümleme sonuçları üzerinde etkilidir. Önsel dağılımlar ilk olarak skorlar için daha sonra LD model parametreleri için belirlenecektir. Skorlar için belirlenecek önsel dağılım sürekli ve tüm gerçel sayılar için tanımlı olmalıdır. Bunun yanı sıra, kullanılacak önsel dağılımlar Eş. 3.19 ile verilen log-olabilirlik fonksiyonu ile uyumlu olmalıdır. Bu durumda tüm gerçel sayılar üzerinde tanımlanan normal dağılım ya da t-dağılımı akla gelmektedir. Ancak bu dağılımlar önsel dağılım olarak kullanıldığında bilgi içermeyen önsel dağılım tanımlamak için önsel dağılımın ortalaması olarak klasik kestirimlerin kullanılması gerekmektedir. Aksi durumda önsel dağılım olabilirliği bastırmakta ve uygun olmayan sonuçlar elde edilmektedir (Demirhan ve Hamurkaroğlu, 2006a, 2008).

Önsel olarak skorların bağımsızlığına ilişkin bir varsayım yapmak her zaman uygun değildir. Böyle bir varsayımın yapılması ile çözümleme sürecine çok güçlü bir önsel bilgi dahil edilmiş olur. Bu varsayım yapılmadığında skorlar için bir bileşik önsel dağılım elde etmek gerekir. Bu dağılım skorlar arasındaki korelasyona ilişkin önsel bilginin ifade edilebildiği, log-olabilirlik fonksiyonu ile uyumlu olan ve tüm gerçel ekseninde tanımlı bir dağılım olmalıdır.

Bu özellikleri taşıyan bir dağılım, çok değişkenli gamma (ÇDG) dağılımından logaritmik dönüşümle elde edilmiştir. ÇDG dağılımı üzerinde halen çalışılan bir dağılımdır ve çok çeşitli ÇDG dağılımları önerilmesine rağmen standart halde bir ÇDG dağılımı verilmemiştir. ÇDG dağılımları ile ilgili geniş bilgi Kotz et al. (2000) tarafından verilmiştir. Çalışmanın amacına uygun olan çok değişkenli önsel dağılım Nomoto et al. (2004) tarafından verilen, Eş. 3.20'deki ÇDG dağılımı kullanılarak elde edilmiştir. Nomoto et al. (2004) tarafından önerilen ÇDG dağılımı Simith et al. (1982) tarafından önerilen iki değişkenli gamma dağılımının bir genellemesidir.

$$p_Y(y_1, \dots, y_p) \approx \delta^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu)n!} (1 - \delta)^n \prod_{j=1}^p p_{Y_j}^{\nu+n} \left(\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right), y_j > 0 \quad (3.20)$$

Eş. 3.20'de ρ_{st} , Y_s ile Y_t arasındaki korelasyon katsayısı ve

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\text{mut}(\rho_{12})} \cdots \sqrt{\text{mut}(\rho_{1p})} \\ \sqrt{\text{mut}(\rho_{12})} & 1 & \cdots \sqrt{\text{mut}(\rho_{2p})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sqrt{\text{mut}(\rho_{1p})} & \sqrt{\text{mut}(\rho_{2p})} \cdots & & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

olmak üzere, $\delta = \det(\Omega)^{\frac{1}{p-1}}$ biçimindedir. $p_{Y_j}^{\nu+n}(\cdot)$ ise $\text{Gamma}(\nu + n, 1)$ dağılımına sahip bir raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Eş. 3.20 ile yaklaşık olarak verilen dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliğini sağlaması için $(\delta^p \prod_{j=1}^p \lambda_j)^{-1}$ sabiti ile çarpılması gerekmektedir. Bu sabitin bulunuşu EK 4'te verilmiştir. Bu durumda ÇDG dağılımının bileşik olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Y}}(y_1, \dots, y_p) &= \delta^{\nu-p} \left(\prod_{j=1}^p \lambda_j \right)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\nu + n)}{\Gamma(\nu) n!} (1 - \delta)^n \prod_{j=1}^p p_{Y_j}^{\nu+n} \left(\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right), y_j > 0 \\ &= 0, \quad \text{ö.d.} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Eş. 3.22 ile verilen dağılımda $Z_j = (1/\mu_j) \log(Y_j/\delta)$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{Z}}(z_1, \dots, z_p) &= \delta^{\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta)^n \prod_{j=1}^p \mu_j \lambda_j^{-\nu-n-1}}{[\Gamma(\nu + n)]^{p-1} \Gamma(\nu) n!} \\ &\quad \times \exp \left\{ (\nu + n) \sum_{j=1}^p \mu_j z_j - \sum_{j=1}^p \frac{1}{\lambda_j} \exp\{\mu_j z_j\} \right\}, z_j \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.23)$$

elde edilir. Eş. 3.23'te elde edilen dağılım genelleştirilmiş çok değişkenli log-gamma (G-ÇDLG) dağılımı olarak anılacaktır. Eş. 3.23'te elde edilen G-ÇDLG dağılımı δ , ν , $\boldsymbol{\lambda}$ ve $\boldsymbol{\mu}$ parametrelerine sahiptir. Yapılan dönüşüm sırasında ÇDG dağılımında yer almayan $\boldsymbol{\mu}$ parametresinin eklenmesinin nedeni bu işlemin önsel bilgiyi ifade etmekte kolaylık sağlayacak olmasıdır.

Skorlar için önsel dağılım olarak G-ÇDLG dağılımı kullanıldığında skorlar arasındaki korelasyona ilişkin önsel bilgi ifade edilebilir. Ayrıca skorlar için sadece pozitif sayıların kullanılması gerekmez; negatif sayılarda kullanılabilir. İlgilenilen ordinal değişkenin düzeylerinin artan sırada olması zorunluluğu da yoktur. Skorlar arasındaki korelasyonlar

önsel bilgi olarak belirtildiğinden negatif korelasyon bir düzeyden diğerine geçiş sırasında skorlar arasındaki hiyerarşide azalma olduğunu ifade eder (Demirhan ve Hamurkaroğlu, 2008). Eş. 3.23 ile verilen G-ÇDLG dağılımı ve Kesim 3.2.'de verilen yaklaşım kullanılarak bir iki aşamalı önsel dağılım oluşturulmuştur.

Birinci aşamada kovaryans matrisi Kesim 3.2.'de verilen yaklaşım kullanılarak belirlenir. γ_{ts}^S için g_{ts}^S değerleri belirlenir. Eş. 3.12'den kovaryans matrisi elde edilir. \mathbf{D} , kovaryans matrisinin köşegen elemanlarından oluşan köşegen matris olmak üzere, korelasyon matrisi $\mathbf{R} = \mathbf{D}^{-1/2}\Sigma\mathbf{D}^{-1/2}$ eşitliği ile elde edilir ve $\Omega = \mathbf{R}^{1/2}$ biçimindedir. İkinci aşamada, verilen bir m modeli için skorlara önsel dağılım atanır. Skorlar için kullanılacak önsel dağılım $d' \in d \in m^O$, $t = 1, \dots, |d|$ ve $s = t + 1, \dots, |d|$ için $\boldsymbol{\gamma}^S = (\gamma_{ts}^S)$, $\boldsymbol{\lambda}^S = (\lambda_{d'}^S)$, $\boldsymbol{\mu}^S = (\mu_{d'}^S)$ ve $\mathbf{h}_S^T = ((\boldsymbol{\varphi}^S)^T, (\boldsymbol{\gamma}^S)^T, (\boldsymbol{\lambda}^S)^T, (\boldsymbol{\mu}^S)^T, \nu^S, m)$ olmak üzere

$$p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) \propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\}, \mathbf{x}_d \in \mathbb{R} \quad (3.24)$$

biçimindedir. Önsel olarak skorların ardışık olarak ilişkili olduğu, ardışık olmayan skorların ise ilişkisiz olduğu varsayılabilir.

Önsel olarak LD modelin ana etki parametrelerinin bağımsız olduğuna ilişkin bir bilgi bulunmadığında G-ÇDLG dağılımının kullanılması uygun bir yaklaşımdır. Bu durumda ana etki parametreleri için belirlenecek önsel dağılım tüm gerçel ekseninde tanımlı, ana etki parametreleri arasındaki ilişkiyi ifade edebilen ve Eş. 3.19 ile verilmiş olan log-olabilirlik fonksiyonu ile uyumlu olmalıdır. ÇDN dağılımın kullanılması skorlar için ortaya çıkan güçlüğün ana etki parametreleri içinde ortaya çıkmasına neden olmaktadır. Bu nedenle G-ÇDLG dağılımının kullanılması daha uygundur. Ana etki parametreleri için bir iki aşamalı önsel dağılım belirlenmiştir.

Birinci aşamada Kesim 3.2.'de verilmiş olan yöntemle γ_{ts}^* için g_{ts}^* belirlenir. İkinci aşamada, m modeli altında, ana etki parametrelerine G-ÇDLG önseli atanır. Bu du-

rumda ana etki parametrelerinin önsel dağılımı $c \in m^*$, $p_1 = \sum_{c \in m^*} |M^c|$, $t = 1, \dots, p_1$ ve $s = t + 1, \dots, p_1$ için $\boldsymbol{\gamma}^* = (\gamma_{ts}^*)$, $j \in M^c$, $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_j^c)$, $\boldsymbol{\mu}^* = (\mu_j^c)$ ve $\mathbf{h}_*^T = ((\boldsymbol{\gamma}^*)^T, (\boldsymbol{\lambda}^*)^T, (\boldsymbol{\mu}^*)^T, \nu^*, m)$ olmak üzere Eş. 3.25'teki gibidir.

$$p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{h}_*) \propto \delta_*^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} \Gamma(\nu^*) n!} \times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \right\}, \beta_{m_i}^c \in \mathbb{R} \quad (3.25)$$

Önsel olarak LD modelin ana etki parametrelerinin bağımsız olduğuna ilişkin güçlü bir önsel bilgi bulunduğunda G-ÇDLG dağılımının önsel dağılım olarak kullanılması uygun değildir. Çünkü böyle bir önsel bilgi bulunduğunda $\delta = 1$ olmakta ve G-ÇDLG dağılımı tanımsız olmaktadır. Önsel olarak ana etki parametrelerinin bağımsızlığı varsayımıyla her ana etki parametresi için bir log-gamma dağılımı kullanılabilir. Birinci aşamada $d_{m_i}^c$, ν^* ve $\boldsymbol{\lambda}^*$ değerleri belirlenir. İkinci aşamada ise ana etki parametrelerine $\beta_{m_i}^c \sim \text{Log-Gamma}(\nu_{m_i}^c, \lambda_{m_i}^c)$ ataması yapılır. Log-Gamma dağılımı kullanıldığında değişebilirlik varsayımının sağlanması için hiper-parametrelerin Kesim 3.2.'de verilen yaklaşım ile belirlenmesi gerekir. Log-Gamma dağılımlı bir raslantı değişkeninin beklenen değer ve varyans formüllerinin çıkarımı EK 5'te verilmiştir. İlgili varyans $\boldsymbol{\lambda}^*$ içermemektedir. Bu nedenle sadece ν^* kullanılarak Eş. 3.13'teki yaklaşım uygulanır. Bu durumda m modeli altında ana etki parametrelerinin önsel dağılımı $c \in m^*$ ve $j \in M^c$ için $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_j^c)$ ve $\mathbf{u}_*^T = ((\nu^*)^T, (\boldsymbol{\lambda}^*)^T, m)$ olmak üzere,

$$p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{u}_*) \propto \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} [\nu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \exp \{ \beta_{m_i}^c \} / \lambda_{m_i}^c] \right\}, \beta_{m_i}^c \in \mathbb{R} \quad (3.26)$$

biçimindedir.

İlişki parametreleri için belirlenecek önsel dağılım ana etki parametreleri için belirlenen önsel dağılım ile aynı özellikleri taşımalıdır. Kesim 3.2.'de verilmiş olan yaklaşım kullanılarak bir iki aşamalı önsel dağılım tanımlanmıştır.

Birinci aşamada Kesim 3.2.'de verilmiş olan yaklaşıma göre $\gamma_{ts}^{\mathcal{O}}$ için $g_{ts}^{\mathcal{O}}$ belirlenir. İkinci aşamada ise m modeli altında $d \in m^{\mathcal{O}}$ ve $t = 1, \dots, |d|$ için $\boldsymbol{\gamma}^{\mathcal{O}} = (\gamma_t^{\mathcal{O}})$, $d \in m^{\mathcal{O}}$ için $\boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{O}} = (\lambda_d^{\mathcal{O}})$ ve $\boldsymbol{\mu}^{\mathcal{O}} = (\mu_d^{\mathcal{O}})$ olmak üzere Eş. 3.27 ile verilen dağılım ilişki parametrelerinin önsel dağılımı olarak atanır. $\mathbf{h}_{\mathcal{O}}^T = ((\boldsymbol{\gamma}^{\mathcal{O}})^T, (\boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{O}})^T, (\boldsymbol{\mu}^{\mathcal{O}})^T, \nu^{\mathcal{O}}, m)$ olmak üzere

$$p(\boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{O}}} | \mathbf{h}_{\mathcal{O}}) \propto \delta_{\mathcal{O}}^{\nu^{\mathcal{O}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{\mathcal{O}})^n \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} \mu_d^{\mathcal{O}} (\lambda_d^{\mathcal{O}})^{-\nu^{\mathcal{O}} - n - 1}}{[\Gamma(\nu^{\mathcal{O}} + n)]^{|m^{\mathcal{O}}| - 1} \Gamma(\nu^{\mathcal{O}}) n!} \times \exp \left\{ (\nu^{\mathcal{O}} + n) \sum_{d \in m^{\mathcal{O}}} \mu_d^{\mathcal{O}} \beta^d - \sum_{d \in m^{\mathcal{O}}} \frac{1}{\lambda_d^{\mathcal{O}}} \exp \{ \mu_d^{\mathcal{O}} \beta^d \} \right\}, \beta^d \in \mathbb{R} \quad (3.27)$$

biçimindedir.

Önsel olarak ilişki parametrelerinin bağımsız olduğu varsayıldığında her parametre için bir log-gamma dağılımı önsel dağılım olarak kullanılabilir. Birinci aşamada $d_d^{\mathcal{O}}$, $\nu^{\mathcal{O}}$ ve $\boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{O}}$ değerleri belirlenir. İkinci aşamada ise m modeli altında ilişki parametrelerine $\beta^d \sim \text{Log-Gamma}(\nu_d^{\mathcal{O}}, \lambda_d^{\mathcal{O}})$ ataması yapılır. Bu durumda, $d \in m^{\mathcal{O}}$ için $\nu^{\mathcal{O}} = (\nu_d^{\mathcal{O}})$, $\boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{O}} = (\lambda_d^{\mathcal{O}})$ ve $\mathbf{u}_{\mathcal{O}}^T = ((\nu^{\mathcal{O}})^T, (\boldsymbol{\lambda}^{\mathcal{O}})^T, m)$ olmak üzere ilişki parametrelerinin önsel dağılımı,

$$p(\boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{O}}} | \mathbf{u}_{\mathcal{O}}) \propto \exp \left\{ \sum_{d \in m^{\mathcal{O}}} [\nu_d^{\mathcal{O}} \beta^d - \exp \{ \beta^d \} / \lambda_d^{\mathcal{O}}] \right\}, \beta^d \in \mathbb{R} \quad (3.28)$$

biçimindedir.

Önsel olarak skorların, ana etki parametrelerinin, ilişki parametrelerinin gruplar halinde tam bağımsız olduğuna ilişkin önsel bulunduğu ve $\mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_{\mathcal{O}}$ vektörlerinin elemanlarının kendi aralarında tam bağımsız olduğu varsayıldığında bu değişkenlerin bileşik önsel dağılımı Eş. 3.29'da verildiği gibidir:

$$p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{O}}} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_{\mathcal{O}}) \propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{h}_*) p(\boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{O}}} | \mathbf{h}_{\mathcal{O}}). \quad (3.29)$$

Önsel olarak skorların, ana etki parametrelerinin, ilişki parametrelerinin kendi içlerinde ve birbirleri arasında tam bağımsız olduğu ve $\mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_{\mathcal{O}}$ vektörlerinin kendi aralarında

tam bağımsız olduğu varsayıldığında bu değişkenlerin bileşik önsel dağılımı Eş. 3.30'da verildiği gibidir:

$$p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o} | \mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) \propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{u}_*) p(\boldsymbol{\beta}_{m^o} | \mathbf{u}_O). \quad (3.30)$$

Eş. 3.19 ile verilen olabilirlik fonksiyonu ile Eş. 3.29'da verilmiş olan önsel dağılımın Bayes Teoremi kullanılarak birleştirilmesiyle Eş. 3.31 ile verilen bileşik sonsal dağılım elde edilir.

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O, \mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{h}_*) p(\boldsymbol{\beta}_{m^o} | \mathbf{h}_O) L(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}^c, \boldsymbol{\beta}^d | \mathbf{y}) \\ &\propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^o} \prod_{i=1}^{M^{d'}} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\ &\quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^o} \sum_{i=1}^{M^{d'}} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^o} \sum_{i=1}^{M^{d'}} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\} \\ &\quad \times \delta_*^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{M^c} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1-1} \Gamma(\nu^*) n!} \\ &\quad \times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{M^c} \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{M^c} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \right\} \\ &\quad \times \delta_O^{\nu^O} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_O)^n \prod_{d \in m^o} \mu_d^O (\lambda_d^O)^{-\nu^O - n - 1}}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{|m^o|-1} \Gamma(\nu^O) n!} \\ &\quad \times \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{d \in \boldsymbol{\beta}_{m^o}} \mu_d^O \beta^d - \sum_{d \in \boldsymbol{\beta}_{m^o}} \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \{ \mu_d^O \beta^d \} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{c \in m^*} (I^c(k))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^o} \beta^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'_i} - \sum_{r \in m} (I^r(k))^T \boldsymbol{\beta}^r \right] \right\}, \\ &\quad \mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Ana etki parametrelerinin ve ilişki parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduğuna ilişkin önsel bilgi bulunduğu ise Eş. 2.1'de verilen olabilirlik fonksiyonu ile Eş. 3.30'da verilmiş olan önsel dağılımın Bayes Teoremi kullanılarak birleştirilmesiyle Eş. 3.32 ile verilen bileşik sonsal dağılım elde edilir.

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o} | \mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O, \mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{u}_*) p(\boldsymbol{\beta}_{m^o} | \mathbf{u}_O) L(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}^c, \boldsymbol{\beta}^d | \mathbf{y}) \\
&\propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^o} \prod_{i=1}^{|\mathbf{M}^{d'}|} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
&\quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^o} \sum_{i=1}^{|\mathbf{M}^{d'}|} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^o} \sum_{i=1}^{|\mathbf{M}^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|\mathbf{M}^c|} [\nu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \exp \{ \beta_{m_i}^c \} / \lambda_{m_i}^c] \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \sum_{d \in m^o} [\nu_d^o \beta^d - \exp \{ \beta^d \} / \lambda_d^o] \right\}, \\
&\quad \times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left[\beta_\emptyset + \sum_{c \in m^*} (\mathbf{I}^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^o} \beta^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'_i} - \sum_{r \in m} (\mathbf{I}^r(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^r \right] \right\}, \\
&\quad \mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o} \in \mathbb{R}.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Ulaşılan bileşik sonsal dağılımların karmaşıklığı nedeniyle Eş. 3.31 ve Eş. 3.32'den analitik olarak sonsal çıkarsama yapmak zordur. Bu nedenle sonsal çıkarsamalar MZMC yöntemleri kullanılarak yapılacaktır. MZMC yöntemlerinden Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanması amaçlandığında, parametrelerin her birinin tam koşullu dağılımının elde edilmesi gerekir. Tam koşullu dağılımlar elde edilemediğinde bunlara gereksinim duymayan, ancak daha çok varsayım gerektiren MH algoritması kullanılabilir. MH algoritmasının uygulanması sırasında karşılaşılan temel zorluk, uygun öneri dağılımlarının elde edilmesidir. Bu durumda MH algoritmasının uygulanmasının zorluğu, kabul olasılığının her zaman 1 olduğu ve MH algoritmasının bir özel durumu olarak algılanabilecek Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanmasının zorluğu ile yaklaşık aynıdır.

Tam koşullu dağılımlar ilk olarak skorlar için daha sonra LD model parametreleri için elde edilmiştir. Skorlara ilişkin tam koşullu dağılımlar ana etki ve ilişki parametreleri için önsel bağımsızlık varsayımından etkilenmez. $d' \in d \in m^o$ ve $i = 1, \dots, |\mathbf{M}^{d'}|$ olmak üzere $\mathbf{x}_{d_{-i}}$ i. skor dışındaki skorları içeren vektör olsun. Gösterim kolaylığı için ilgilenilen parametre dışındaki parametreler bir \mathbf{g} vektöründe yer alsın:

$$\mathbf{g}_S^T = [(\mathbf{x}_{d_{-i}})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^o})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{h}_*)^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{y})^T].$$

$x_{d'_i}$ dışındaki parametreler bilindiğinden,

$$\begin{aligned}
p(x_{d'_i} | \mathbf{g}_S) &\propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_S^{\nu^S} (1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^{\circ}} \prod_{j=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^{S} (\lambda_{d'_j}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
&\times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^{\circ}} \sum_{j=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} - \sum_{d' \in d \in m^{\circ}} \sum_{j=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_j}^S} \exp \{ \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} \} \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left(\sum_{d \in m^{\circ}} \boldsymbol{\beta}^d x_{d'_i} \prod_{j=k(d' \in d), j \neq i} x_{d'_j} \right) \right\} \\
&\propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_S^{\nu^S} (1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^{\circ}} \prod_{j=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^{S} (\lambda_{d'_j}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
&\times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^{\circ}} \sum_{j=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} - \sum_{d' \in d \in m^{\circ}} \sum_{j=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_j}^S} \exp \{ \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} \} \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k x_{d'_i} \left(\sum_{d: d' \subset d} \boldsymbol{\beta}^d \prod_{j=k(d' \in d), j \neq i} x_{d'_j} \right) \right\} \\
&\propto \exp \{ x_{d'_i} S_{d'} \} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(1 - \delta_S) \prod_{d' \in d \in m^{\circ}} \prod_{j=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'_j}^S)^{-1} \right]^n}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
&\times \exp \left\{ n \sum_{d' \in d \in m^{\circ}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} \right\} \exp \left\{ (\nu^S + n) \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\} \\
&\frac{\exp \{ (\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) x_{d'_i} - e^{\mu_{d'_i}^S x_{d'_i}} / \lambda_{d'_i}^S \}}{\Gamma(\nu^S)} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(1 - \delta_S) \exp \left\{ \sum_{d' \in d \in m^{\circ}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} \right\} \prod_{d' \in d \in m^{\circ}} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'_i}^S)^{-1} \right]^n}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} n!} e^{n \mu_{d'_i}^S x_{d'_i}}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. Eş. 3.33'te $S_{d'} = \sum_{k \in K} y_k \left(\sum_{d: d' \subset d} \boldsymbol{\beta}^d \prod_{j=k(d' \in d), j \neq i} x_{d'_j} \right)$ biçimindedir. EK 1'de çıkarımı ve çalışma kapsamında kullanımı ile ilgili bir tartışma verilmiş olan

$$\Gamma(\nu^S + n) \approx \exp(-7.24663 + 2.07728n + 1.9922\nu^S)$$

yaklaşımı Eş. 3.33'te kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\rho(x_{d'_i} | \mathbf{g}_S) &\propto \frac{\exp\{(\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'})x_{d'_i} - e^{\mu_{d'_i}^S x_{d'_i}} / \lambda_{d'_i}^S\}}{(\exp(-7.24663 + 2.07728\nu^S))^{|d|-1} \Gamma(\nu^S)} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(1 - \delta_S) \exp\left\{ \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} \right\} \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{j=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'_j}^S)^{-1} \right]^n}{(\exp(2.07728))^{n(|d|-1)} n!} e^{n \mu_{d'_i}^S x_{d'_i}} \\
&\propto \exp\left\{ (\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'})x_{d'_i} - e^{\mu_{d'_i}^S x_{d'_i}} / \lambda_{d'_i}^S \right\} \\
&\times \exp\left\{ \frac{(1 - \delta_S) \exp\left\{ \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} \right\} e^{\mu_{d'_i}^S x_{d'_i}} \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{j=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'_j}^S)^{-1}}{(\exp(2.07728))^{|d|-1}} \right\} \\
&\propto \exp\left\{ (\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'})x_{d'_i} - s b t^S e^{\mu_{d'_i}^S x_{d'_i}} \right\}, x_{d'_i} \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{3.34}$$

elde edilir. Eş. 3.34'te

$$s b t^S = (\lambda_{d'_i}^S)^{-1} - (1 - \delta_S) \exp\left\{ 2.07728(1 - |d|) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_j}^S x_{d'_j} \right\} \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{j=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'_j}^S)^{-1}$$

biçimindedir. Eş. 3.34 ile ulaşılan tam koşullu dağılım $(\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) > 0$ ve $s b t^S > 0$ olması durumunda genelleştirilmiş-log-gamma dağılımına orantılıdır. $s b t^S > 0$ kısıtı önsel dağılımın seçimine bağlı olarak sağlanmaktadır. Bu durumda Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanması için $(\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) > 0$ olduğu durumda G-Log-Gamma($(\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'}), 1/s b t^S, \mu_{d'_i}^S$) dağılımından rasgele sayı üretilmesinde herhangi bir güçlükle karşılaşılmamaktadır. Genelleştirilmiş-log-gamma dağılımından rasgele sayı üretilmi EK 6'da verilmiştir.

Ancak $(\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) > 0$ kısıtı her veri kümesi için sağlanmaz. $(\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) \leq 0$ olduğu durumda ise Eş. 3.34 ile verilmiş olan tam koşullu dağılımın bir olasılık dağılımı olarak alınıp, tam koşullu dağılımdan reddetme yöntemi ile rasgele sayı üretilmesi üzerinde durulmuştur. Çalışmada kullanılan reddetme yöntemine ilişkin algoritma, Fishman (1995, sy. 172) tarafından verilmiştir. Algoritmanın genel biçimi ve çalışmada ele alınan konular için uygulanışı ise EK 6'da verilmiştir. Rasgele sayı üretilmesi için Eş. 3.34 ile verilen ifadenin normalleştirilebilir olması gerekmektedir. Normalleştirilmenin yapılabilmesi için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ (\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'}) x_{d_i} - s b t^S e^{\mu_{d_i}^S x_{d_i}} \right\} dx_{d_i} \quad (3.35)$$

integralinin yakınsak olması gerekmektedir. Bu integralin yakınsaklığının kontrolü için karşılaştırma testi (comparison test) kullanılmıştır. Karşılaştırma testine göre $b \geq a$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında negatif olmayan bir $f(x)$ varsa ve $x \geq a$ için $g(x) \geq f(x)$ olacak şekilde bir $g(x)$ fonksiyonu bulunabiliyorsa $\int_a^{\infty} g(x) dx$ 'in yakınsak olması durumunda $\int_a^{\infty} f(x) dx$ 'de yakınsaktır (Khuri, 2003, sy.222).

Ayrıca $T \sim \text{Tip-I Gumbel}(a, b)$ ise T raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$h(t; a, b) = ab \exp \{ - (b \exp(-at) + at) \}, -\infty < t < \infty \quad (3.36)$$

=0 , ö.d.

biçimindedir (Kotz et al., 1995). $f(x_{d_i}) = \exp\{(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'}) x_{d_i} - s b t^S \exp\{\mu_{d_i}^S x_{d_i}\}\}$, $g(x_{d_i}) = \exp\{-a x_{d_i} - b \exp\{-a x_{d_i}\}\}$ ve $-a = (\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'})$ alındığında $b \geq s b t^S \exp\{-x_{d_i} [\mu_{d_i}^S (\nu^S - 1) - \text{mut}(S_{d'})]\}$ olmak üzere $g(x_{d_i}) \geq f(x_{d_i})$ koşulu sağlanmaktadır. $g(x_{d_i})$, Eş. 3.36 ile verilen Tip-I Gumbel dağılımına orantılı olduğundan $\int_{-\infty}^{\infty} g(x_{d_i}) dx_{d_i}$ yakınsaktır. Bu durumda karşılaştırma testine göre Eş. 3.35 ile verilen integralin yakınsak olduğu söylenebilir ve ilgili normalleştirme sabiti elde edilebilir.

Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanması sırasında $(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'}) > 0$ ise $(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'})$, $1/s b t^S$ ve $\mu_{d_i}^S$ parametrelili genelleştirilmiş log-gamma dağılımı, aksi durumda ise Eş. 3.34 ile verilen dağılım tam koşullu dağılım olarak kullanılır.

Ana etki parametreleri için önsel olarak bağımsızlık varsayımı yapılmadığında ana etki parametrelerinin tam koşullu dağılımını elde etmek için yapılacak işlemler skorlar için yapılanlara benzerdir.

$$\mathbf{g}_*^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m_*^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^\circ})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{h}_*)^T, (\mathbf{h}_\circ)^T, (\mathbf{y})^T]$$

verildiğinde $c \in m^*$ olmak üzere $i = 1, \dots, |\mathbf{M}^c|$ için her $\beta_{m_i}^c$ 'nin tam koşullu dağılımı,

$$\begin{aligned}
p(\beta_{m_i}^c | \mathbf{g}_*) &\propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_*^{\nu^*} (1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{j=1}^{|M^c|} \mu_{m_j}^c (\lambda_{m_j}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
&\times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1}^{|M^c|} \mu_{m_j}^c \beta_{m_j}^c - \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_j}^c} \exp \{ \mu_{m_j}^c \beta_{m_j}^c \} \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \sum_{c \in m^*} (I^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c \right\} \\
&\propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(1 - \delta_*) \prod_{c \in m^*} \prod_{j=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_j}^c)^{-1} \right]^n}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} n!} \\
&\times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1}^{|M^c|} \mu_{m_j}^c \beta_{m_j}^c - \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_j}^c} \exp \{ \mu_{m_j}^c \beta_{m_j}^c \} \right\} \\
&\times \exp \left\{ \beta_{m_i}^c \sum_{k \in K} y_k I^c(\mathbf{k}(\beta_{m_i}^c)) \right\} \\
&\propto \exp \left\{ \beta_{m_i}^c S_c \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(1 - \delta_*) \prod_{c \in m^*} \prod_{j=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_j}^c)^{-1} \right]^n}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} n!} \\
&\times \exp \left\{ n \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^c|} \mu_{m_j}^c \beta_{m_j}^c \right\} \exp \left\{ (\nu^* + n) \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \right\} \\
&\propto \exp \left\{ [\nu^* \mu_{m_i}^c + S_c] \beta_{m_i}^c - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \right\} \\
&\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[(1 - \delta_*) \exp \left\{ \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^c|} \beta_{m_j}^c \right\} \prod_{c \in m^*} \prod_{j=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_j}^c)^{-1} \right]^n}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} n!} \exp \{ n \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.37'de $S_c = \sum_{k \in K} y_k I^c(\mathbf{k}(\beta_{m_i}^c))$ biçimindedir. Eş. 3.33'ten, 3.34'e geçiş sırasında kullanılan yaklaşım uygulandığında,

$$\begin{aligned}
p(\beta_{m_i}^c | \mathbf{g}_*) &\propto \exp \left\{ [\nu^* \mu_{m_i}^c + S_c] \beta_{m_i}^c - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \right\} \\
&\times \exp \left\{ \frac{(1 - \delta_*) \exp \left\{ \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^c|} \mu_{m_j}^c \beta_{m_j}^c \right\} \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \prod_{c \in m^*} \prod_{j=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_j}^c)^{-1}}{(\exp(2.07728))^{p_1 - 1}} \right\} \\
&\propto \exp \left\{ [\nu^* \mu_{m_i}^c + S_c] \beta_{m_i}^c - s b t^* \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \right\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

elde edilir. Eş. 3.38'de

$$sbt^* = (\lambda_{m_i}^c)^{-1} - \exp \left\{ 2.07728(1 - p_1) \sum_{c \in \beta_{m^*}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|\mathbf{M}^c|} \mu_{m_j}^c \beta_{m_j}^c \right\} (1 - \delta_*) \prod_{c \in m^*} \prod_{j=1}^{|\mathbf{M}^c|} (\lambda_{m_j}^c)^{-1}$$

biçimindedir.

Sonsal çıkarsamalar sırasında, $(\nu^* \mu_{m_i}^c + S_c) > 0$ ise $(\nu^* \mu_{m_i}^c + S_c)$, $1/sbt^*$ ve $\mu_{m_i}^c$ parametrelili genelleştirilmiş log-gamma dağılımı, aksi durumda ise Eş. 3.38 ile verilen dağılım tam koşullu dağılım olarak alınarak Gibbs örnekleme algoritması uygulanır.

Ana etki parametreleri için bağımsızlığa ilişkin güçlü önsel bilgi bulunduğu ve

$$\mathbf{g}_*^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m_{-i}^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{u}_*)^T, (\mathbf{u}_\circ)^T, (\mathbf{y})^T]$$

verildiğinde $c \in m^*$ olmak üzere $i = 1, \dots, |\mathbf{M}^c|$ için her $\beta_{m_i}^c$ 'nin tam koşullu dağılımı,

$$\begin{aligned} p(\beta_{m_i}^c | \mathbf{g}_*) &\propto \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{j=1}^{|\mathbf{M}^c|} [(\nu_{m_j}^c - 1) \beta_{m_j}^c - \exp\{\beta_{m_j}^c\} / \lambda_{m_j}^c] \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \sum_{c \in m^*} (\mathbf{I}^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c \right\} \\ &\propto \exp \left\{ \nu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \exp\{\beta_{m_i}^c\} / \lambda_{m_i}^c \right\} \exp \left\{ \beta_{m_i}^c S_c \right\} \\ &\propto \exp \left\{ (\nu_{m_i}^c + S_c) \beta_{m_i}^c - \exp\{\beta_{m_i}^c\} / \lambda_{m_i}^c \right\}, \beta_{m_i}^c \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.39)$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.39'daki S_c , Eş. 3.37'dekinin aynıdır. Sonsal çıkarsamalar için Eş. 3.34'te uygulanan yaklaşım ile Gibbs örnekleme algoritmasının kullanılması uygundur. Tam koşullu dağılım olarak $(\nu_{m_i}^c + S_c) > 0$ olduğunda $(\nu_{m_i}^c + S_c)$ ve $\lambda_{m_i}^c$ parametrelili log-gamma dağılımı, aksi durumda Eş. 3.39 ile verilen dağılım kullanılır. Eş. 3.34 ile 3.39 fonksiyonel olarak birbirine çok yakındır. Bu nedenle Eş. 3.39'dan rasgele sayı üretimi için yapılan tartışma burada da geçerlidir.

Sonsal çıkarsama yapmak için son olarak ilişki parametrelerinin tam koşullu dağılımının elde edilmesi gerekmektedir. İlişki parametreleri için önsel olarak bağımsızlık varsayımı yapılmadığında ve

$$\mathbf{g}_O^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^o-i})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{h}_*)^T, (\mathbf{h}_O)^T, (\mathbf{y})^T]$$

verildiğinde $d \in m^O$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} p(\beta^d | \mathbf{g}_O^T) &\propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta_{\mathcal{O}}^{\nu^O} (1 - \delta_{\mathcal{O}})^n \prod_{e \in m^O} \mu_e^O (\lambda_e^O)^{-\nu^O - n - 1}}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{|m^O| - 1} \Gamma(\nu^O) n!} \\ &\quad \times \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{e \in m^O} \mu_e^O \beta^e - \sum_{e \in m^O} \frac{1}{\lambda_e^O} \exp \{ \mu_e^O \beta^e \} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{e \in m^O} \beta^e \prod_{i=k(e' \in e)} x_{e'_i} \right] \right\} \\ &\propto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1 - \delta_{\mathcal{O}}) \prod_{e \in m^O} (\lambda_e^O)^{-1}]^n}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{|m^O| - 1} n!} \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{e \in m^O} \mu_e^O \beta^e - \sum_{e \in m^O} \frac{\exp \{ \mu_d^O \beta^e \}}{\lambda_d^O} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \beta^d \sum_{k \in K} y_k \prod_{i=k(e' \in e)} x_{e'_i} + \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{e \in m^O \setminus d} \beta^e \prod_{i=k(e' \in e)} x_{e'_i} \right] \right\} \\ &\propto \exp \{ \beta^d S_d \} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1 - \delta_{\mathcal{O}}) \prod_{e \in m^O} (\lambda_e^O)^{-1}]^n}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{|m^O| - 1} n!} \exp \left\{ n \sum_{e \in m^O, e \neq d} \mu_e^O \beta^e \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ (\nu^O + n) \mu_d^O \beta^d - \frac{\exp \{ \mu_d^O \beta^d \}}{\lambda_d^O} \right\} \\ &\propto \exp \left\{ (\nu^O \mu_d^O + S_d) \beta^d - \frac{\exp \{ \mu_d^O \beta^d \}}{\lambda_d^O} \right\} \\ &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1 - \delta_{\mathcal{O}}) \exp \{ \sum_{e \in m^O, e \neq d} \mu_e^O \beta^e \} \prod_{e \in m^O} (\lambda_e^O)^{-1}]^n}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{|m^O| - 1} n!} \exp \{ n \mu_d^O \beta^d \} \end{aligned} \quad (3.40)$$

elde edilir. Eş. 3.40'ta $S_d = \sum_{k \in K} y_k \prod_{i=k(e' \in e)} x_{e'_i}$ biçimindedir. Eş. 3.33'ten, 3.34'e geçiş sırasında kullanılan yaklaşımın Eş. 3.40'a uygulanmasıyla,

$$\begin{aligned} p(\beta^d | \mathbf{g}_O^T) &\propto \exp \left\{ (\nu^O \mu_d^O + S_d) \beta^d - \frac{\exp \{ \mu_d^O \beta^d \}}{\lambda_d^O} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \frac{(1 - \delta_{\mathcal{O}}) \exp \left\{ \sum_{e \in m^O, e \neq d} \mu_e^O \beta^e \right\} \prod_{e \in m^O} (\lambda_e^O)^{-1}}{(\exp(2.07728))^{|m^O| - 1}} \exp \{ \mu_d^O \beta^d \} \right\} \\ &\propto \exp \left\{ (\nu^O \mu_d^O + S_d) \beta^d - s b t^O \exp \{ \mu_d^O \beta^d \} \right\}, \beta^d \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.41)$$

elde edilir. Eş. 3.41'de,

$$sbt^{\mathcal{O}} = (\lambda_d^{\mathcal{O}})^{-1} - (1 - \delta_{\mathcal{O}}) \exp \left\{ 2.07728(1 - |m^{\mathcal{O}}|) \sum_{e \in m^{\mathcal{O}}, e \neq d} \mu_e^{\mathcal{O}} \beta^e \right\} \prod_{e \in m^{\mathcal{O}}} (\lambda_e^{\mathcal{O}})^{-1}$$

biçimindedir. Sonsal çıkarsamalar için Gibbs örnekleme algoritması kullanılır. Burada da $(\nu^{\mathcal{O}} \mu_d^{\mathcal{O}} + S_d) > 0$ ise $(\nu^{\mathcal{O}} \mu_d^{\mathcal{O}} + S_d)$, $1/sbt^{\mathcal{O}}$ ve $\mu_d^{\mathcal{O}}$ parametrelili genelleştirilmiş-log-gamma dağılımı, aksi durumda Eş. 3.41 ile verilen dağılım tam koşullu dağılım olarak kullanılır.

İlişki parametrelerinin bağımsızlığına ilişkin güçlü önsel bilgi bulunduğu ve

$$\mathbf{g}_{\mathcal{O}}^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{O}}-i})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{u}_*)^T, (\mathbf{h}_{\mathcal{O}})^T, (\mathbf{y})^T]$$

verildiğinde $d \in m^{\mathcal{O}}$ olmak üzere her β^d 'nin tam koşullu dağılımı,

$$\begin{aligned} p(\beta^d | \mathbf{g}_{\mathcal{O}}^T) &\propto \exp \left\{ \sum_{d \in m^{\mathcal{O}}} [\nu_d^{\mathcal{O}} \beta^d - \exp\{\beta^d\}/\lambda_d^{\mathcal{O}}] + \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{e \in m^{\mathcal{O}}} \beta^e \prod_{i=k(e' \in e)} x_{e'} \right] \right\} \\ &\propto \exp \left\{ \nu_d^{\mathcal{O}} \beta^d - \exp\{\beta^d\}/\lambda_d^{\mathcal{O}} \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ \beta^d \sum_{k \in K} y_k \prod_{i=k(e' \in e)} x_{e'} + \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{e \in m^{\mathcal{O}} \setminus d} \beta^e \prod_{i=k(e' \in e)} x_{e'} \right] \right\} \quad (3.42) \\ &\propto \exp \left\{ \nu_d^{\mathcal{O}} \beta^d - \exp\{\beta^d\}/\lambda_d^{\mathcal{O}} + \beta_d S_d \right\} \\ &\propto \exp \left\{ (\nu_d^{\mathcal{O}} + S_d) \beta^d - \exp\{\beta^d\}/\lambda_d^{\mathcal{O}} \right\} \end{aligned}$$

biçimindedir. Eş. 3.42'deki S_d , Eş. 3.40'dakinin aynıdır. Sonsal çıkarsamalar için kullanılacak Gibbs örnekleme algoritmasında tam koşullu dağılım olarak, $(\nu_d^{\mathcal{O}} + S_d) > 0$ ise $(\nu_d^{\mathcal{O}} + S_d)$ ve $\lambda_d^{\mathcal{O}}$ parametrelili log-gamma dağılımı, aksi durumda Eş. 3.42 ile verilen dağılım kullanılır.

Gibbs örnekleme algoritmasını uygulamak için gereken tüm tam koşullu dağılımlara ulaşılmıştır. Bu durumda ordinal LD model parametreleri için Bayesci çözümleme bağımlılık durumunda aşağıda verilmiş olan Algoritma 1, bağımsızlık durumunda ise

Algoritma 2 kullanılarak yapılır.

Algoritma 1

A1.1. Tüm skorlar, ana etki ve ilişki parametreleri için başlangıç değerleri belirlenir. $i=0$ alınır. Başlangıç değerlerini içeren vektörler sırasıyla \mathbf{x}_d^0 , $\boldsymbol{\beta}_{m^*}^0$ ve $\boldsymbol{\beta}_{m^o}^0$ biçimindedir.

A1.2. Skorlar için ν^S , g_{ts}^S ve $\boldsymbol{\mu}^S$ değerleri belirlenir. Eş. 3.16'dan rasgele sayı üretilir. Eş. 3.12'den yararlanarak Ω ve oradan da δ_S elde edilir. δ_S kullanılarak $\boldsymbol{\lambda}^S$ elde edilir.

A1.3. ν^* , g_{ts}^* ve $\boldsymbol{\mu}^*$ belirlenir, g_{ts}^* kullanılarak Eş. 3.16'dan rasgele sayı üretilir. Kovaryans matrisi ve δ_* elde edilir. δ_* kullanılarak $\boldsymbol{\lambda}^*$ elde edilir.

A1.4. ν^o , g_{ts}^o ve $\boldsymbol{\mu}^o$ belirlenir, g_{ts}^o kullanılarak Eş. 3.16'dan rasgele sayı üretilir. Kovaryans matrisi ve δ_o elde edilir. δ_o kullanılarak $\boldsymbol{\lambda}^o$ elde edilir.

A1.5. Her skor için bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Algoritmanın uygulanması sırasında Eş. 3.34'te verilen skorların tam koşullu dağılımından rasgele sayı üretilir. Tüm skorlar için bir adım ilerlendikten sonra A1.6.'ya geçilir.

A1.6. A1.5'te elde edilen kestirimler kullanılarak \mathbf{X}_{m^o} ve \mathbf{X}_m oluşturulur.

A1.7. Her ana etki parametresi için bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Her ana etki parametresi için A1.6'da oluşturulan tasarım matrisi kullanılarak Eş. 3.38 ile verilen ana etki parametrelerinin tam koşullu dağılımından rasgele sayı üretilir. Tüm ana etki parametreleri için bir adım ilerlendikten sonra A1.8.'e geçilir.

A1.8. Her ilişki parametresi için bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Her ilişki parametresi için A1.6'da oluşturulan tasarım matrisi kullanılarak Eş. 3.41 ile verilen ilişki parametrelerinin tam koşullu dağılımından rasgele sayı üretilir. Tüm ilişki parametreleri için bir adım ilerlendikten sonra A1.9.'a geçilir.

A1.9. Belirlenen toplam adım sayısına ulaşılmış ise durulur. Aksi durumda $i=i+1$ alınır, elde edilen kestirimler \mathbf{x}_d^i , $\boldsymbol{\beta}_{m^*}^i$ ve $\boldsymbol{\beta}_{m^o}^i$ vektörlerine atanarak A1.5. adımına dönülür.

Algoritma 2

A2.1. Tüm skorlar, ana etki ve ilişki parametreleri için başlangıç değerleri belirlenir. $i=0$ alınır. Başlangıç değerlerini içeren vektörler sırasıyla \mathbf{x}_d^0 , $\boldsymbol{\beta}_{m^*}^0$ ve $\boldsymbol{\beta}_{m^o}^0$ biçimindedir.

A2.2. Skorların önsel dağılımı, ν^S ve $\boldsymbol{\mu}^S$ değerleri belirlenir. Eş. 3.16'dan rasgele sayı üretilir. Eş. 3.12'den yararlanarak Ω ve oradan da δ_S elde edilir. δ_S kullanılarak $\boldsymbol{\lambda}^S$ elde edilir.

A2.3. $\eta_{m_i}^c$ belirlenir. $\eta_{m_i}^c$ kullanılarak $\nu_{m_i}^c$ elde edilir. $\nu_{m_i}^c$ kullanılarak $\lambda_{m_i}^c$ değerleri belirlenir.

A2.4. η_d^o belirlenir. η_d^o kullanılarak ν_d^o elde edilir. ν_d^o kullanılarak λ_d^o değerleri belirlenir.

A2.5. Her skor için bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Algoritmanın uygulanması sırasında Eş. 3.34 ile verilen skorların tam koşullu dağılımından rasgele sayı üretilir. Tüm skorlar için bir adım ilerlendikten sonra A2.6.'ya geçilir.

A2.6. A2.5'te elde edilen kestirimler kullanılarak \mathbf{X}_{m^o} ve \mathbf{X}_m oluşturulur.

A2.7. Eş. 3.39'dan rasgele sayı üretilerek bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Tüm ana etki parametreleri için bir adım ilerlendikten sonra A2.8.'e geçilir.

A2.8. Eş. 3.42'den rasgele sayı üretilerek bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Tüm ilişki parametreleri için bir adım ilerlendikten sonra A2.9.'a geçilir.

A2.9. Belirlenen toplam adım sayısına ulaşılmış ise durulur. Aksi durumda $i=i+1$ alınır, elde edilen kestirimler \mathbf{x}_d^i , $\boldsymbol{\beta}_{m^*}^i$ ve $\boldsymbol{\beta}_{m^o}^i$ vektörlerine atanarak A2.5. adımına dönülür.

Model parametrelerinin kestirimi için yapılacak çözümlemede önsel bilginin ifade edilmesi :

Önsel bilginin ifade ediliş şeklini, temel olarak her parametre grubunun kendi içindeki bağımsızlığına ilişkin önsel bilginin varlığı belirler. Ana etki parametrelerinin ya da ilişki parametrelerinin kendi aralarındaki bağımsızlıklarına ilişkin önsel bilgi dört farklı biçimde olabilir. Bunlardan, ana etki parametrelerinin ve ilişki parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduğu ve olmadığı durumlar ele alınmıştır. Ele alınmayan durumlar ise ana etki parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduğu, ilişki parametrelerinin bağımsız olmadığı ve ilişki parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduğu, ana etki parametrelerinin bağımsız olmadığı durumlardır. Ancak bağımsızlığa ilişkin bu bilgilerin önsel olarak ifade edilmesi için önsel bilgiye olan güvenin çok yüksek düzeyde (çok güçlü) olması gerekmektedir. Bu nedenle, çalışmada iki uç durum verilmiştir. Diğer durumlar önsel bilginin ifade ediliş sırasında yansıtılabileceği gibi, bunlar için benzer çıkarsamalar da yapılabilir. Önsel dağılımın belirlenmesinde bağımsızlık yapısının yanı sıra önsel dağılımın bilgi içerip içermeyeceği de önemlidir.

LD model parametrelerinin bağımsız olduğu önsel bilgisi bulunmadığında önsel bilginin

ifade edilmesi için G-ÇDLG dağılımının marjinal beklenen değer ve varyansının elde edilmesi gerekmektedir. \mathbf{Z} , $G - \text{ÇDLG}(\nu, \delta, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ dağılımlı raslantı vektörü için $E(Z_i)$ ve $V(Z_i)$ Eş. 3.43 ve 3.44'teki gibi elde edilmiştir. Bu eşitliklerin çıkarımı EK 7'de verilmiştir.

$$E(Z_i) = \frac{1}{\mu_i} [\log(\lambda_i/\delta) + F(\nu)], \quad (3.43)$$

$$V(Z_i) = \frac{1}{(\mu_i)^2} F^{[1]}(\nu). \quad (3.44)$$

Eş. 3.43 ve 3.44'te $F(\nu)$ ve $F^{[1]}(\nu)$ digamma ve trigamma fonksiyonlarının ν için aldığı değeri ifade etmektedir. Digamma ve trigamma fonksiyonlarının çizimi EK 5'te verilmiştir.

LD model parametrelerinin bağımsız olduğu önsel bilgisi bulunmadığında, bilgi içermeyen bir önsel dağılım belirlemek için Eş. 3.44 ile verilmiş olan varyans formülü üzerinde durulması gerekir. Her parametreye ilişkin bilgi içirme durumu, ilgili parametreye karşılık gelen marjinal varyans ile belirlenir. Parametrelere karşılık gelecek marjinal varyansı belirleyen hiper-parametre μ_i 'dir. Bu nedenle tam koşullu dağılımların $\mu_i \rightarrow 0$ ve $\mu_i \rightarrow \infty$ durumlarında belirli olup olmadığı ve bu tam koşullu dağılımlardan üretilecek rasgele değerlerin sonlu olup olmadığı araştırılmalıdır. İnceleme Eş. 3.34 ile verilen skorların tam koşullu dağılımı üzerinden yapılmıştır. Modeldeki diğer parametreler için aynı sonuçlar geçerlidir.

İlk olarak $(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'}) > 0$ olduğu durum incelenmiştir. Bilgi içeren önsel tanımlandığında önsel varyansı küçültmek için μ_i olabildiğince büyük alınmalıdır. Genelleştirilmiş log-gamma dağılımının beklenen değeri EK 5'te verilmiştir. $Y \sim \text{Genelleştirilmiş-log-gamma}((\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'}), 1/sbt^S, \mu_{d_i}^S)$, $sbt^S = (\lambda_{d_i}^S)^{-1}A$, A bir sabit ve $B_{d_i}^S$ ilgili skora karşılık gelen önsel bilgi olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow \infty} E(Y) &= \lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{d'_i}^S} \left[\log \left(\frac{\lambda_{d'_i}^S}{A} \right) + F(\nu + \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) \right] \\
&= \lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu_{d'_i}^S} \left[\log \left(\frac{\exp(B_{d'_i}^S \mu_{d'_i}^S - F(\nu)) \delta}{A} \right) + F(\nu + \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) \right] \\
&= B_{d'_i} + \lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow \infty} \frac{F(\nu + \mu_{d'_i}^S + S_{d'})}{\mu_{d'_i}^S} \\
&= {}^{L'H} B_{d'_i} + \lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow \infty} F^{[1]}(\nu + \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) \\
&= B_{d'_i}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

biçiminde elde edilir. Buradan $\mu_{d'_i}^S \rightarrow \infty$ durumunda ilgili tam koşullu dağılımdan üretilecek rasgele sayıların ilgili önsel bilgiye yakınsayacağı söylenebilir. Ancak $\mu_{d'_i}^S \rightarrow \infty$ durumunda Eş. 3.31 ile verilen bileşik sonsal dağılım belirsiz olmaktadır. Sonsuzdan küçük, ancak yeterince büyük $\mu_{d'_i}^S$ değerleri için, önsel bilgiye bağlı olmaksızın bilgi içeren önsel dağılım tanımlanabileceği söylenebilir.

Bilgi içermeyen önsel tanımlamak üzere önsel dağılımın varyansını olabirliğin varyansına göre büyültmek için μ_i olabildiğince küçük alınmalıdır. Bu nedenle $\mu_i \rightarrow 0$ durumunda tam koşullu dağılımlardan üretilecek sayılar incelenmelidir. Y raslantı değişkeni önceki paragraftaki gibi tanımlansın, bu durumda

$$\begin{aligned}
\lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow 0} E(Y) &= \lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow 0} \frac{1}{\mu_{d'_i}^S} \left[\log \left(\frac{\exp(B_{d'_i}^S \mu_{d'_i}^S - F(\nu)) \delta}{A} \right) + F(\nu + \mu_{d'_i}^S + S_{d'}) \right] \\
&= \infty + \lim_{\mu_{d'_i}^S \rightarrow 0} \frac{F(\nu + \mu_{d'_i}^S + S_{d'})}{\mu_{d'_i}^S} \\
&= \infty
\end{aligned} \tag{3.46}$$

elde edilir. İlgili tam koşullu dağılımlardan $\mu_{d'_i}^S \rightarrow 0$ durumunda üretilecek rasgele sayılar sonsuza yaklaşacaktır. Buradan sıfıra eşit olmayan ancak sıfıra yaklaşan $\mu_{d'_i}^S$ değerleri için önsel bilginin, üretilen rasgele sayıları nasıl etkilediğini açık bir şekilde incelemenin mümkün olmadığı görülmektedir. EK 6'da verilmiş olan, genelleştirilmiş log-gamma dağılımından rasgele sayı üretimi için yapılan işlemlerin incelenmesi ile sıfıra yaklaşan $\mu_{d'_i}^S$ değerleri için önsel bilginin üretilen rasgele sayıları nasıl etkilediği görülebilir. İlgili tam koşullu dağılımdan rasgele sayı üretmek için ilk olarak $\text{Gamma}((\nu^S \mu_{d'_i}^S + S_{d'}), 1/sbt^S)$

dağılımından bir rasgele değer üretilir. Sonra bu değer logaritması alınıp $\mu_{d_i}^S$ 'ye bölünür. Bu durumda üretilen rasgele sayıların beklenen değeri $(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'})/sbt^S$ biçimindedir. Bu beklenen değer, sbt^S 'nin yerine konulmasıyla,

$$\frac{(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'}) \exp(B_{d_i}^S \mu_{d_i}^S - F(\nu)) \delta}{A} \quad (3.47)$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 3.47'de $S_{d'}$ örneklem bilgisini ifade eder. Eş. 3.47'den $\mu_{d_i}^S$ 'nin sifıra yaklaşmasıyla üretilen rasgele sayılar üzerinde önsel bilginin etkisinin sifıra yaklaştığı, rasgele sayıların sadece örneklem bilgisinden etkilendiği görülmektedir. Ancak $Y = \log(X)/\mu_{d_i}^S$ dönüşümü nedeniyle $\mu_{d_i}^S$ sifıra yaklaşırken bir $\mu_{d_i}^S$ değerinden sonra ilgili tam koşullu dağılımdan üretilen değerler aşırı büyüyecek ve güvenilir sosal kestirimler elde edilmeye başlanacaktır. Bu durumda bir duyarlık çözümlemesi yapılarak Eş. 3.47'ye önsel bilginin katkısını en küçük yapan ve güvenilir kestirimler vermeyen uygun $\mu_{d_i}^S$ değeri elde edilebilir. Bu koşulları sağlayan $\mu_{d_i}^S$ elde edildiğinde önsel bilginin tam koşullu dağılımdan üretilen değerler üzerindeki etkisi sayısal değer olarak en azıner. Elde edilen kestirimler örneklem bilgisini yansıtır. Ayrıca, korelasyonlara ilişkin önsel bilginin de örneklem bilgisi ile etkileşime girmesi istenmiyorsa $g_{..}$ değerleri δ 'yı 1'e yaklaştıracak biçimde alınmalıdır.

$(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d'}) \leq 0$ olduğunda bilgi içerme durumunun ifade edilmesini incelemek için EK 6'da verilmiş olan, ilgili tam koşullu dağılımlardan rasgele sayı üretiminde kullanılan reddetme algoritması üzerinde durulmuştur. Bu reddetme algoritmasında aday olarak üretilen rasgele değerler önsel bilgiye göre üretilmektedir. Örneklem bilgisi ise aday değerlerin kabul edilme koşulunda yer almaktadır. Skorların tam koşullu dağılımı ele alındığında, reddetme algoritmasında ilk olarak Eş. EK 6.1'deki genelleştirilmiş log-gamma dağılımından rasgele sayı üretilmekte ve bu sayı Eş. EK 6.1'de verilen $g(\cdot)$ fonksiyonunda yerine konulmaktadır. $\mu_{d_i}^S \rightarrow \infty$ durumunda $G\text{-Log-Gamma}(\nu^S \mu_{d_i}^S, 1/sbt^S, \mu_{d_i}^S)$ dağılımlı raslantı değişkeninin beklenen değeri sifıra gitmektedir. Bu koşulda üretilen rasgele sayıların $g(\cdot)$ fonksiyonunda yerine konulmasıyla $g(x_{d_i}) \rightarrow 1$ olur ve reddetme algoritmasının RA5. adımında üretilen tüm rasgele değerler kabul edilir. Bu durumda önsel bilgi altında üretilen rasgele değerlerin reddedilmesi noktasında örneklem bilgisinin etkisi en azıner. Tamamen

önsel bilgiye dayanarak üretilen rasgele değerlerin kabul edilmesi ile bilgi içeren önsel kullanılarak bilgi içeren sonsal kestirimler elde edileceği söylenebilir. $\mu_{d_i}^S \rightarrow 0$ durumunda ise G-Log-Gamma($\nu^S \mu_{d_i}^S, 1/sbt^S, \mu_{d_i}^S$) dağılımlı raslantı değişkeninin varyansı sonsuza gitmektedir. Bu durumda üretilen rasgele değerler çok geniş bir aralıktan gelir ve bu değerlerin çoğu reddedilir. $\mu_{d_i}^S$ 'nin sıfıra yakın değerleri için üretilen rasgele değerlerden örneklem bilgisi ile uyumlu olanlar kabul edilebilir. $\mu_{d_i}^S$ 'nin sıfıra yakın olan ve bileşik sonsal dağılımı belirsiz yapmayan değerleri için önsel bilgi içermeyen, örneklem bilgisine dayanan sonsal kestirimlerin elde edileceği söylenebilir. Modeldeki diğer parametrelere ilişkin tam koşullu dağılımlar için aynı yorumlar geçerlidir.

δ , Kesim 3.2. ile verilmiş olan yaklaşım ile belirlenir. δ 'nın değeri sadece Kesim 3.2.'de değinilmiş olan $g_{..}$ için belirlenen değerlere bağlıdır. Bu nedenle her parametreye ilişkin bilgi içerme durumu Eş. 3.44 ile yansıtılır. Her parametre için önsel bilgiye olan güven tek tek belirlenebildiğinden bu işlemin değişebilirlik varsayımı üzerinde herhangi bir olumsuz etkisi yoktur. ν ise araştırmacı tarafından belirlenen bir hiper-parametredir. Önsel bilgi ($E(Z_i)$) ise ν ve μ_i 'nin belirlenmesinden sonra Eş. 3.43'ten çekilen λ_i değerlerine atanır. $\lambda_i = \delta \exp\{E(Z_i)\mu_i - F(\nu)\}$ biçimindedir. Önsel bilginin ifade edilmesi için EK 5'te verilen çizimlerden yararlanılabilir. Ayrıca digamma fonksiyonuna ilişkin hesaplamalar Wolfram Research (2009-a)'ün internet sayfasında yapılabilmektedir. λ ve ν değerlerinin belirlenmesi sırasında bu parametrelerin artı değer alması kısıtı göz önünde bulundurulmalıdır.

Skorların ve modelde yer alan diğer parametrelerin ilişki yapısı için önsel bilginin ifade edilmesi sırasında dikkat edilmesi gereken bir nokta vardır. Çözümleme sürecine $g_{..}$ değerlerinin belirlenmesi ile yansıtılan, modelde yer alan elemanlar arasındaki ilişkilere ilişkin bilgi Eş. 3.22'den 3.23'e geçiş sırasında yapılan dönüşüm nedeniyle doğrudan parametrelere karşılık gelmemekte, ilgili parametrelerin doğrusal olmayan fonksiyonları arasındaki ilişkiye karşılık gelmektedir. Θ_i ve Θ_j ilgili parametreleri göstermek üzere, dönüşüm nedeniyle δ 'nın elemanları $\exp(\mu_i\Theta_i)$ ile $\exp(\mu_j\Theta_j)$ arasındaki ilişkiyi (ρ_{ij}) ifade etmektedir. Bu nedenle, belirlenmiş olan $g_{..}$ değerlerinin Θ_i ve Θ_j arasındaki ilişkiyi (ρ_{ij}^{\ominus}) uyum biçimde yansıtacak şekilde belirlenmesi ya da uygun olarak yansıtıp yansıtmadığının araştırılması gerekmektedir.

G-ÇDLG dağılımlı raslantı vektörünün herhangi iki elemanı arasındaki ilişki katsayısının çıkarımı EK 7'de yapılmıştır. $g_{..}$ belirlenmeden önce $\boldsymbol{\rho} = (\rho_{ij})$ 'ya karşılık gelen $\boldsymbol{\rho}^{\ominus} = (\rho_{ij}^{\ominus})$ 'nin elde edilmesi $g_{..}$ değerlerinin doğrudan belirlenmesinden daha sağlıklı bir yaklaşımdır. Örneğin, Θ_i ile Θ_j arasında artı yönlü orta derecede ilişki oluşu önsel bilgisine karşılık ρ_{ij}^{\ominus} için [0.45,0.55] aralığındaki değerler uygundur. Eş. EK 7.11 kullanılarak hangi ρ_{ij} 'nin bu aralıkta bir ρ_{ij}^{\ominus} 'ya karşılık geldiğinin bulunması ve g_{ij} 'nin bulunan bu ρ_{ij} 'ye göre belirlenmesi uygun bir yaklaşım olacaktır.

Bu belirleme işlemi için EK 8'de verilen arama algoritması hazırlanmıştır. Bu algoritma ile ilgilenilen uzay belirlenen bir artış miktarı ile taranmakta ve $\boldsymbol{\rho}^{\ominus}$ 'nin elemanları için tüm elemanları belirlenen aralığı sağlayan $\boldsymbol{\rho}$ matrisleri listelenmektedir.

EK 8'de verilen algoritmanın yanı sıra ρ_{ij}^{\ominus} 'nin ρ_{ij} 'ye yakın olup olmadığı araştırılabilir. ρ_{ij}^{\ominus} 'nin ρ_{ij} 'ye yakın olması için Θ_i ile Θ_j arasındaki ilişkinin $\exp(\mu_i\Theta_i)$ ile $\exp(\mu_j\Theta_j)$ arasındaki ilişkiye yakın olması gerekmektedir. Eğer dönüşüm üstel değil de doğrusal olsaydı ρ_{ij}^{\ominus} 'nin ρ_{ij} 'ye eşit olacağı söylenebilirdi. $f(\Theta_i)$ ve $g(\Theta_j)$, Θ_i ve Θ_j 'nin herhangi doğrusal fonksiyonları olmak üzere $corr(\Theta_i, f(\Theta_i)) = 1$ ve $corr(\Theta_j, g(\Theta_j)) = 1$ 'dir. Bu durumda sırasıyla $f(\Theta_i)$ ve $g(\Theta_j)$, Θ_i ve Θ_j 'yi tam olarak temsil ettiği için $corr(\Theta_i, \Theta_j) = corr(f(\Theta_i), g(\Theta_j))$ biçimindedir. Bu durum kuramsal olarak da kolaylıkla tanıtlanabilir. $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ 'nin doğrusal olmadığı durumda $corr(\Theta_i, f(\Theta_i)) \cong 1$ ve $corr(\Theta_j, g(\Theta_j)) \cong 1$ olmasıyla $corr(\Theta_i, \Theta_j) \cong corr(f(\Theta_i), g(\Theta_j))$ olacağı düşünülebilir. Çalışmada $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ doğrusal dönüşüm değildir.

G-ÇDLG dağılımının elde edilmesi için kullanılan dönüşüm $\Theta_j = (1/\mu_j)[\log(Y_j) - \log(\delta)]$ biçimindedir. Buradan $\exp(\mu_j\Theta_j) = Y_j/\delta$ olarak elde edilir ve $corr(\Theta_j, \exp(\mu_j\Theta_j)) = corr(\log(Y_j), Y_j)$ olduğu kuramsal olarak kolaylıkla tanıtlanabilir. ρ_{ij}^{\ominus} 'nin ρ_{ij} 'ye yakın olup olmadığının araştırılması için $corr(Y_i, Y_j)$ ile $corr(\log(Y_i), \log(Y_j))$ arasındaki fark incelenmelidir.

Bu incelemeyi sayısal olarak yapmak için küçük bir benzetim çalışması yapılmıştır. α ve β , Tekbiçimli(0.0001, 50) dağılımından üretilen rasgele değerler olmak üzere $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$ dağılımından 1000 tane rasgele gözlem üretilmiştir. Her

x değeri için X ile düşük derecede ilişkili olan bir Y raslantı değişkeninin aldığı değerler $Gamma(\alpha, \beta)$ dağılımından üretilmiştir. Her x değeri için X ile orta derecede ilişkili olan bir Y raslantı değişkeninin aldığı değerler, t , Tekbiçimli(0, 1) dağılımından üretilen rasgele bir değer olmak üzere $Gamma(x^t, \beta)$ dağılımından üretilmiştir. Her x değeri için X ile yüksek derecede ilişkili olan bir Y raslantı değişkeninin aldığı değerler ise $\log(x^2)$ dönüşümü ile elde edilmiştir. Daha sonra $corr(X, \log(X))$, $corr(Y, \log(Y))$, $corr(X, Y)$, $corr(\log(X), \log(Y))$ ve $mut(corr(X, Y) - corr(\log(X), \log(Y)))/corr(X, Y)$ (oransal ortalama mutlak hata, OOMH) değerleri hesaplanmıştır. Bu işlemler 20000 defa tekrarlanmıştır. Hesaplanan değerlere ilişkin 20000 adım üzerinden elde edilen aritmetik ortalamalar Çizelge 3.1. ile verilmiştir.

Çizelge 3.1. Korelasyonlara ilişkin ortalamalar.

İlişki	$corr(X, \log(X))$	$corr(Y, \log(Y))$	$corr(X, Y)$	$corr(\log(X), \log(Y))$	OOMH
Düşük	0.9806	0.9805	-0.0005	-0.0004	-0.0155
Orta	0.9809	0.9504	0.4705	0.4760	0.0802
Yüksek	0.9807	0.9917	0.9807	0.9917	0.0225

Çizelge 3.1.'de $corr(X, Y)$ ile $corr(\log(X), \log(Y))$ arasındaki OOMH'nin çok düşük olduğu görülmektedir. Bu durumda ρ_{ij}^{\ominus} 'nin ρ_{ij} değerleri kullanılarak yaklaşık olarak ifade edilebileceği söylenebilir. İlişkilere ilişkin önsel bilginin $g_{..}$ kullanılarak ifade edilmesi ve δ değerinin olasılıksal olarak belirleniyor olması $g_{..}$ değerlerinin belirlenmesinde bu paralellikten yararlanılmasını olası kılmaktadır.

LD model parametrelerinin bağımsız olduğu önsel bilgisi bulunduğunda ise her parametre için Log-Gamma(ν, λ) dağılımı kullanılmıştır. Bu dağılımın beklenen değerinin ve varyansının çıkarımı EK 5'te verilmiştir. İlgili parametreye ilişkin önsel bilgi, digamma fonksiyonunun ilgili ν için alacağı değer hesaplanarak ifade edilebilir. Ancak önce önsel bilgiye olan güven derecesinin ifade edilmesi daha uygundur. İlgilenilen parametre X olsun. EK 5'ten $V(X) = F^{[1]}(\nu)$ ve tam bağımsızlık durumunda $\Sigma = köş(\varphi_t^2) = köş([(1 - \xi_t)/\xi_t]^2)$ olduğundan, $\nu = F^{-[1]}([(1 - \xi_t)/\xi_t]^2)$ yazılabilir. Burada $F^{-[1]}(\cdot)$ ters trigamma fonksiyonudur. Bu durumda, η_t , Kesim 3.2.'de değinilen yaklaşım ile belirlendiğinde, tam bağımsızlık durumu için değişebilirlik varsayımını sağlayan bir önsel dağılım elde edilir. λ ise trigamma fonksiyonunun elde edilen ν için

alacağı değer göz önünde bulundurularak belirlenir.

Bağımsızlık durumunda bilgi içerme durumunun uygun biçimde yansıtılıp yansıtılmadığı bağımlılık durumundakine benzer bir yaklaşımla incelenebilir. Bağımsızlık durumunda önsel dağılımın varyansı ξ_t kullanılarak belirlendiğinden $\xi_t \rightarrow 0$ ve $\xi_t \rightarrow 1$ durumlarında önsel dağılımın ve tam koşullu dağılımların örneklem bilgisinden ve önsel bilgiden nasıl etkilendiği ve bileşik sonsal dağılımların belirli olup olmadığı incelenmiştir.

$\lim_{\xi_t \rightarrow 1} \nu = \lim_{\xi_t \rightarrow 1} F^{-[1]}([(1 - \xi_t)/\xi_t]^2) = \infty$ biçimindedir. Bu durumda ilgili tam koşullu dağılımın varyansı sıfıra gitmektedir. İlgili parametreye ilişkin önsel bilgi $B_{m_i}^c$ ile gösterildiğinde ana etki parametrelerine ilişkin tam koşullu dağılımın beklenen değeri $B_{m_i}^c - F(\nu_{m_i}^c) + F(\nu_{m_i}^c + S_c)$ biçimindedir. Bu durumda tam koşullu dağılımdan rasgele sayı üretimi sırasında önsel bilgiye yakın değerler üretilir. Ancak $\xi_t \rightarrow 1$ durumunda $\nu \rightarrow \infty$ olduğundan bileşik sonsal dağılım belirsiz olmaktadır. Bu nedenle bilgi içeren önsel dağılım belirlenmek istendiğinde ξ_t , bileşik sonsal dağılım belirsiz olmayacak biçimde 1'e olabildiğince yakın alınmalıdır. Ayrıca $\xi_t \rightarrow 1$ olmasının önsel dağılım üzerindeki etkisi ile, ilgili tam koşullu dağılımların üzerindeki etkisi benzerdir. Bilgi içeren önsel dağılım belirlemenin olası olduğu görülmektedir. $\lim_{\xi_t \rightarrow 0} \nu = \lim_{\xi_t \rightarrow 0} F^{-[1]}([(1 - \xi_t)/\xi_t]^2) = 0$ biçimindedir. Bu durumda önsel dağılımın varyansı ($F^{[1]}(\nu)$) sonsuza gitmektedir. Önsel dağılımın beklenen değeri, önsel bilgiye eşit olacak biçimde belirlendiğinden, bu durumdan etkilenmez. $\xi_t \rightarrow 0$ durumunda tam koşullu dağılımların varyansı sonlu olmakta, beklenen değeri ise sonsuza gitmektedir. Bu durumda ilgili ξ_t değerleri, $\nu_{m_i}^c$ aracılığı ile önsel bilginin etkisini enaza indirecek ve tam koşullu dağılımın beklenen değerini sonlu yapacak biçimde seçilmelidir. Bu seçim bir duyarlık çözümlemesi ile yapılabilir. Duyarlık çözümlemesinde ξ_t 'nin birbirine yakın olan bazı değerleri için önsel bilginin etkisinin en aza inmesi, birbirine yakın sonsal kestirimler elde edilmesi ve daha küçük ξ_t değerleri için kestirimlerin aşırı büyümesi beklenmektedir. Buraya kadar yapılan tartışmalar $(\nu_{m_i}^c + S_c) > 0$ olduğu durumda geçerlidir.

$(\nu_{m_i}^c + S_c) \leq 0$ olması durumunda kullanılan ve EK 6'da verilmiş olan reddetme algoritmasında Eş. EK 6.2'den rasgele sayı üretiminin incelenmesi bilgi içerme durumunun uygun biçimde yansıtılıp yansıtılmadığına ilişkin bilgi verir. Algoritmada ana

etki parametreleri için Log-Gamma($\nu_{m_i}^c, \lambda_{m_i}^c$) dağılımından rasgele sayı üretilmektedir. $\xi_t \rightarrow 1$ durumunda bu dağılımdan üretilen değerler önsel bilgiye çok yakındır. Böylece reddetme algoritmasında kabul edilen değerler doğrudan önsel bilgiye çok yakın olur. $\xi_t \rightarrow 0$ durumunda ise daha önce belirtildiği gibi varyans sonsuza gider, üretilen değerler için kabul edilme koşulu örneklem bilgisine bağlı olacağından örneklem bilgisi ile uyumlu olan değerler kabul edilir. Sonsal kestirimler, önsel bilgiden bağımsız olarak örneklem bilgisini yansıtır.

Trigamma fonksiyonunun çizimi EK 5'te verilmiştir. Ters trigamma fonksiyonu ile ilgili hesaplamalar R yazılımının "limma" paketinde yer alan "trigammaInverse" fonksiyonu kullanılarak yapılabilmektedir (R project, 2007).

3.3.2. Ordinal olumsuzluk çizelgelerinde beklenen göze sıklıkları üzerinden Bayesci çıkarsama

LD modellerde Bayesci çözümleme, model parametreleri üzerinden yapılabileceği gibi beklenen göze sıklıkları üzerinden de yapılabilir. Doygun model dışındaki LD modellerin parametre sayısı her zaman ilgilenilen çizelgedeki göze sayısından azdır. Bu nedenle, önsel bilginin LD model parametreleri üzerinden ifade edilmesi daha kolaydır. Ayrıca, LD model parametreleri için oluşturulan önsel dağılımdan beklenen göze sıklıkları için bir önsel dağılım elde edilebilmesi durumunda çözümleme kolaylaşmakta ve çözümlemenin kullanılabilirliği artmaktadır. Ancak bu geçiş sırasında LD model parametreleri için çözümleme sürecine dahil edilen önsel bilginin beklenen göze sıklıklarına ilişkin önsel bilgi ile tutarlı olması gerekmektedir.

Bu kesimde ilk olarak LD model parametreleri için Kesim 3.3.1.'de oluşturulan önsel dağılımdan beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımına geçilmiş ve bileşik sonsal dağılımlar elde edilmiştir. Daha sonra bu geçiş ile elde edilen önsel dağılım ile LD model parametreleri için oluşturulan önsel dağılımın tutarlılığı incelenmiştir.

3.3.2.1. Model parametrelerinden beklenen göze sıklıklarına geçiş

LD model parametrelerinin önsel dağılımından, beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımına geçmek için Eş. 2.2 kullanılmıştır. Ordinal çizelgeler için Eş. 2.2'den,

$$\begin{aligned} n &= \exp \left\{ [\mathbf{X}_{m^*} : \mathbf{X}_{m^{\circ}}] [\boldsymbol{\beta}_{m^*}^T : \boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}}^T]^T \right\} \\ &= \mathbf{g}(\boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}}) \end{aligned} \quad (3.48)$$

elde edilir. LD model parametrelerinin önsel dağılımından Eş. 3.48 ile verilen dönüşüm kullanılarak, beklenen göze sıklıkları için bir önsel dağılım oluşturulması durumunda parametreler üzerindeki önsel bilgi beklenen göze sıklıklarına ilişkin önsel bilgiye dönüştürülmüş olur.

Skorların, ana etki ve ilişki parametrelerinin önsel olarak bağımsız olduğu varsayıldığında,

$$p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}} | \mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) \propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) \quad (3.49)$$

yazılabilir. Eş. 3.48 ile verilen dönüşüm kullanılarak Eş. 3.49'dan skorlar ve beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı,

$$p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) \propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\mathbf{n} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) \quad (3.50)$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda LD model parametreleri için belirlenmiş olan önsel dağılımdan beklenen göze sıklıkları için bir önsel dağılım elde etmek için $p(\boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O)$ üzerinden Eş. 3.48 ile verilen dönüşüm ile $p(\mathbf{n} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O)$ 'yu elde etmek gerekmektedir. Çalışmada ele alınan diğer bağımsızlık yapısı için de aynı durum geçerlidir.

LD model parametrelerini beklenen göze sıklıkları cinsinden yazabilmek için Eş. 2.2'den,

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_m^T \log \mathbf{n} &= \mathbf{X}_m^T \mathbf{X}_m \boldsymbol{\beta}_m \\ \boldsymbol{\beta}_m &= [\mathbf{X}_m^T \mathbf{X}_m]^{-1} \mathbf{X}_m^T \log \mathbf{n} \\ &= \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{n}) \end{aligned} \quad (3.51)$$

elde edilir. Modeldeki ana etki parametrelerinin sayısı $p_1 = \sum_{c \in m^*} |M^c|$, ilişki parametrelerinin sayısı $p_2 = |m^O|$, modeldeki parametre sayısı $p = p_1 + p_2$ ve ilgili olumsuzluk çizelgesindeki göze sayısı $|K|$ olmak üzere $\mathbf{A} = [\mathbf{X}_m^T \mathbf{X}_m]^{-1} = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, |K|$, $j = 1, \dots, p$ tanımlaması yapıldığında Eş. 3.51'den $r = 1, \dots, p_1$ ve $\ell = 1, \dots, p_2$ için,

$$\begin{aligned}
G\beta^{c_r} + (1-G)\beta^{d_\ell} &= G \sum_{c \in m^*} \sum_{j=1}^{|M^c|} a_{rj} \sum_{k \in K} I_{m_j}^c(\mathbf{k}) \log n_k + (1-G) \sum_{j=1}^{|d|} a_{\ell j} \sum_{k \in K} x_{d_\ell^j} \log n_k \\
&= \sum_{k \in K} s_k^{Gr+(1-G)\ell} \log n_k \\
&= Gg_{c_r}^{-1}(\mathbf{n}) + (1-G)g_{d_\ell}^{-1}(\mathbf{n})
\end{aligned} \tag{3.52}$$

elde edilir. Eş. 3.52'de,

$$\begin{aligned}
G &= 1, \beta \in m^* \\
&= 0, \beta \in m^O
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$s_k^{Gr+(1-G)\ell} = G \sum_{c \in m^*} \sum_{j=1}^{|M^c|} a_{rj} I_{m_j}^c(\mathbf{k}) + (1-G) \sum_{j=1}^{|d|} a_{\ell j} x_{d_\ell^j}$$

biçimindedir. Dönüşüm için Jacobian matrisinin (\mathbf{J}) bulunması gerekmektedir. \mathbf{J} , Eş. 3.52'den,

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{n})}{\partial n_k} \right) = \left(\frac{s_k^{Gr+(1-G)\ell}}{n_k} \right)_{p \times |K|} \tag{3.53}$$

biçiminde elde edilir. Doygun olmayan modeller için $p < |K|$ olduğundan, bu modeller için Jacobian matrisi bir dikdörtgen matristir. Dönüşümün yapılabilmesi için Jacobian matrisin belirteninin elde edilmesi gerekmektedir.

Dikdörtgen matrislerin belirteninin bulunuşu Yanai et al. (2006) tarafından verilmiştir; \mathbf{A} , $p \times |K|$ boyutlu bir matris olmak üzere dikdörtgen matrisin belirteni, $ndet(\cdot)$,

$$ndet(\mathbf{A}) = [\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A})]^{1/2} \quad (3.54)$$

biçiminde elde edilir. Eş 3.54, $ndet(\mathbf{A}) = ndet(\mathbf{A}^T)$ eşitliğini sağlamaz. Bu özelliğin sağlanması için $b = enk(p, |K|)$ olmak üzere,

$$ndet(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{A}) \quad (3.55)$$

eşitliğinin kullanılması önerilmektedir (Yanai, et al., 2006). Eş 3.55'te $\text{tekil}_i(\mathbf{A})$, \mathbf{A} 'nın tekil değer ayrışımından (singular value decomposition) elde edilen i . tekil değerdir.

Bu durumda beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n}|\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_\mathcal{O}) &= p_{\beta_{m^*}, \beta_{m^\mathcal{O}}|\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_\mathcal{O}}(g^{-1}(\mathbf{n})) \cdot \text{mut}(ndet(\mathbf{J})) \\ &= p_{\beta_{m^*}, \beta_{m^\mathcal{O}}|\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_\mathcal{O}}(g^{-1}(\mathbf{n})) \cdot \text{mut}\left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J})\right) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. Ana etki parametrelerini Eş. 3.52'de verilmiş olan parametrelere karşılık getirmek için verilen her c ve \mathbf{m}_i^c 'ye karşılık gelen r bulunmalıdır. Bu geçiş için kullanılacak ifade Eş. 3.56 ile verilmiştir:

$$r = \sum_{e \in m^* \wedge |e| \leq |c|} \sum_{j=1}^{|\mathbf{M}^e|} 1. \quad (3.56)$$

İlişki parametrelerini Eş. 3.52'de verilmiş olan parametrelere karşılık getirmek için verilen her d 'ye karşılık gelen ℓ bulunmalıdır. Bu geçiş için kullanılacak formül $d_i = d$ olmak üzere Eş. 3.57 ile verilmiştir:

$$\ell = p_1 + |m^\mathcal{O}| - i. \quad (3.57)$$

Sonraki eşitliklerde gösterim karmaşasına neden olmamak için $s_k^{Gr+(1-G)\ell} = s_k$ biçiminde kullanılmıştır. Bu bilgiler kullanılarak, ana etki ve ilişki parametrelerinin bağımsızlığına ilişkin önsel bilgi bulunduğu beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{n}|\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) \propto & \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \nu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right. \\
& \left. + \sum_{d \in m^O} \nu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right)
\end{aligned} \tag{3.58}$$

biçiminde elde edilir. Skorların ve beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı ise Eş. 3.50 kullanılarak Eş. 3.59'daki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n}|\mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) & \propto p(\mathbf{x}_d|\mathbf{h}_S) p(\mathbf{n}|\mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) \\
& \propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \nu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right. \\
& \quad \left. + \sum_{d \in m^O} \nu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right)
\end{aligned} \tag{3.59}$$

Ana etki ve ilişki parametrelerinin bağımsızlığına ilişkin önsel bilgi bulunmadığında beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{n}|\mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O) & \propto \delta_*^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1-1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{r=1}^{|M^c|} \mu_{m_r}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \delta_O^{\nu^O} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_O)^n \prod_{d \in m^O} \mu_d^O (\lambda_d^O)^{-\nu^O - n - 1}}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{p_2-1} \Gamma(\nu^O) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{d \in m^O} \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{d \in m^O} \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

biçiminde elde edilir. Skorların ve beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı Eş. 3.60 kullanılarak Eş. 3.61'deki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O) &\propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\mathbf{n} | \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O) \\
&\propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
&\quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\} \\
&\propto \delta_*^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1-1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
&\quad \times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
&\propto \delta_O^{\nu^O} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_O)^n \prod_{d \in m^O} \mu_d^O (\lambda_d^O)^{-\nu^O - n - 1}}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{p_2-1} \Gamma(\nu^O) n!} \\
&\quad \times \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{d \in m^O} \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{d \in m^O} \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
&\quad \times \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right).
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Bileşik sonsal dağılım, ana etki ve ilişki parametrelerinin bağımsızlığına ilişkin bir önsel bilgi bulunmadığında, Eş. 2.1 ile verilmiş olan olabilirlik fonksiyonu ve Eş. 3.61 ile verilmiş olan bileşik önsel dağılım kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O, \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O) L(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{y}) \\
& \propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\} \\
& \quad \times \delta_*^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1-1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \delta_O^{\nu^O} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_O)^n \prod_{d \in m^O} \mu_d^O (\lambda_d^O)^{-\nu^O - n - 1}}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{p_2-1} \Gamma(\nu^O) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{d \in m^O} \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{d \in m^O} \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right) \sum_{k \in K} y_k \log n_k
\end{aligned} \tag{3.62}$$

biçiminde elde edilir.

Bileşik sonsal dağılım, ana etki ve ilişki parametrelerinin bağımsızlığına ilişkin bir önsel bilgi bulunduğu ise Eş. 2.1 ile verilmiş olan olabilirlik fonksiyonu ve Eş. 3.59 ile verilmiş olan bileşik önsel dağılım kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O, \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\mathbf{n} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O) L(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{y}) \\
& \propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \} \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} (\nu_{m_i}^c + I^c(\mathbf{k}(\beta_{m_i}^c)) S_c) \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right. \\
& \quad \quad \left. + \sum_{d \in m^O} (\nu_d^O + S_d) \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right) \sum_{k \in K} y_k \log n_k
\end{aligned} \tag{3.63}$$

biçiminde elde edilir.

Eş. 3.62 ve Eş. 3.63 ile verilmiş olan sonsal dağılımlardan analitik yolla çıkarsama yapmak zordur. Bu nedenle MZMC yöntemlerinden yararlanılacaktır. MZMC yöntemlerinden Gibbs örnekleme algoritmasının kullanımı için gerekli olan tam koşullu dağılımlar elde edilememektedir. Bu durumda tam koşullu dağılımlara gereksinim duymayan MH algoritmasının kullanılması uygundur.

3.3.2.2. Model parametreleri için kullanılan önsel bilginin beklenen göze sıklıkları için tutarlılığı

Kesim 3.3.2.1.'de verilen dönüşümün parametrelere ilişkin önsel bilgiyi beklenen göze sıklıklarına uygun bir biçimde aktarması gerekmektedir. Bu tutarlılık özelliği; LD model parametreleri için geçerli olan değişebilirlik varsayımının beklenen göze sıklıkları için de geçerli olması, LD model parametreleri için belirlenen bilgi içermeyen bir önsel dağılımın beklenen göze sıklıkları için de bilgi içermemesi ve LD model parametreleri için belirlenen bilgi içeren bir önsel dağılımın beklenen göze sıklıkları için de bu bilgiyi doğru biçimde yansıtması durumunda sağlanır. Ayrıca bu üç durum, ana etki ve ilişki parametrelerinden oluşan parametre vektörlerinin kendi içlerinde tam bağımsız olduğu önsel bilgisinin bulunduğu (bağımsızlık durumu) ve bulunmadığı (bağımlılık durumu) durumlar için incelenmelidir.

Bağımsızlık durumu

Bağımsızlık durumunda tutarlılığın kontrolü için beklenen göze sıklıklarının dönüşüm sonucundaki beklenen değerinin ve varyansının elde edilmesi gerekmektedir. Eş. 3.48 ile verilen dönüşümden, $d' \in d$ ve $i = 1, \dots, |M^{d'}|$ için ilgili $x_{d'_i}$ skorlarının çarpımı x^d ile gösterildiğinde,

$$n_k = \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \exp \{ I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \} \prod_{d \in m^0} \exp \{ x^d \beta^d \} \quad (3.64)$$

biçimindedir. Eş. 3.64'ten LD model parametrelerinin bağımsızlığı varsayımı altında,

$$E(n_k) = \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} E[\exp \{I_{m_i}^c(\mathbf{k})\beta_{m_i}^c\}] \prod_{d \in m^0} E[\exp \{x^d \beta^d\}] \quad (3.65)$$

biçiminde elde edilir. Skolara ilişkin önsel dağılım, parametrelere ilişkin önsel dağılımdan bağımsız belirlendiğinden Eş. 3.64 ve Eş. 3.65'te skorlar sabit olarak alınmıştır. $\mathbf{k} \in K$ olmak üzere $Z_i^c(\mathbf{k}) = \exp \{I_{m_i}^c(\mathbf{k})\beta_{m_i}^c\}$ ve $Z^d = \exp \{x^d \beta^d\}$ dönüşümleri sonucunda $\beta_{m_i}^c \sim \text{Log-Gamma}(\nu_{m_i}^c, \lambda_{m_i}^c)$ ve $\beta^d \sim \text{Log-Gamma}(\nu_d^0, \lambda_d^0)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} p(Z_i^c(\mathbf{k})) &= \frac{1}{I_{m_i}^c(\mathbf{k})(\lambda_{m_i}^c)^{\nu_{m_i}^c+1}\Gamma(\nu_{m_i}^c)} Z_i^c(\mathbf{k})^{(\nu_{m_i}^c/I_{m_i}^c(\mathbf{k}))^{-1}} \exp \left\{ -(\lambda_{m_i}^c)^{-1} Z_i^c(\mathbf{k})^{1/I_{m_i}^c(\mathbf{k})} \right\}, \\ & \quad Z_i^c(\mathbf{k}) > 0 \\ & = 0, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{ö.d.} \\ (3.66) \end{array}$$

ve

$$\begin{aligned} p(Z^d) &= \frac{1}{x^d(\lambda_d^0)^{\nu_d^0+1}\Gamma(\nu_d^0)} (Z^d)^{(\nu_d^0/x^d)^{-1}} \exp \left\{ -(\lambda_d^0)^{-1} (Z^d)^{1/x^d} \right\}, Z^d > 0 \\ & = 0, \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{ö.d.} \\ (3.67) \end{array}$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.66 ve Eş. 3.67'den,

$$\begin{aligned} E(Z_i^c(\mathbf{k})) &= \frac{(\lambda_{m_i}^c)^{I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2}\Gamma(\nu_{m_i}^c + I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(\nu_{m_i}^c)}, \quad E(Z^d) = \frac{(\lambda_d^0)^{x^d-2}\Gamma(\nu_d^0 + x^d)}{\Gamma(\nu_d^0)}, \\ E[(Z_i^c(\mathbf{k}))^2] &= \frac{(\lambda_{m_i}^c)^{2I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2}\Gamma(\nu_{m_i}^c + 2I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(\nu_{m_i}^c)}, \quad E[(Z^d)^2] = \frac{(\lambda_d^0)^{2x^d-2}\Gamma(\nu_d^0 + 2x^d)}{\Gamma(\nu_d^0)} \end{aligned} \quad (3.68)$$

elde edilir. Eş. 3.65 ve 3.68'den,

$$\begin{aligned} E(n_k) &= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \frac{\Gamma(\nu_{m_i}^c + I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(\nu_{m_i}^c)} \prod_{d \in m^0} (\lambda_d^0)^{x^d-2} \frac{\Gamma(\nu_d^0 + x^d)}{\Gamma(\nu_d^0)} \\ &= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} (\nu_{m_i}^c)_{I_{m_i}^c(\mathbf{k})} \prod_{d \in m^0} (\lambda_d^0)^{x^d-2} (\nu_d^0)_{x^d} \end{aligned} \quad (3.69)$$

elde edilir. Eş. 3.69'da $(a)_b$ bir Pochhammer Sembol'dür. Pochhammer Sembol ile ilgili bilgiler ve $b = -1, 0, 1$ için $(a)_b$ çizimleri EK 9'da verilmiştir. $\mathbf{k} \in K$ için her beklenen göze sıklığının varyansı ise önsel bağımsızlık varsayımı ile

$$V(n_k) = \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} E[\exp^2 \{I_{m_i}^c(\mathbf{k})\beta_{m_i}^c\}] \prod_{d \in m^0} E[\exp^2 \{x^d \beta^d\}] - \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} E[\exp \{I_{m_i}^c(\mathbf{k})\beta_{m_i}^c\}]^2 \prod_{d \in m^0} E[\exp \{x^d \beta^d\}]^2 \quad (3.70)$$

ile elde edilir. Eş. 3.68 ve Eş. 3.70'ten,

$$\begin{aligned} V(n_k) &= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \frac{(\lambda_{m_i}^c)^{2I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \Gamma(\nu_{m_i}^c + 2I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(\nu_{m_i}^c)} \prod_{d \in m^0} \frac{(\lambda^d)^{2x^d-2} \Gamma(\nu^d + 2x^d)}{\Gamma(\nu^d)} \\ &\quad - \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \left[\frac{(\lambda_{m_i}^c)^{I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \Gamma(\nu_{m_i}^c + I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(\nu_{m_i}^c)} \right]^2 \prod_{d \in m^0} \left[\frac{(\lambda^d)^{x^d-2} \Gamma(\nu^d + x^d)}{\Gamma(\nu^d)} \right]^2 \\ &= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{2I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \prod_{d \in m^0} (\lambda^d)^{2x^d-2} \left[\prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\nu_{m_i}^c)_{2I_{m_i}^c(\mathbf{k})} \prod_{d \in m^0} (\nu^d)_{2x^d} \right. \\ &\quad \left. - \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} [(\lambda_{m_i}^c)^{-1} (\nu_{m_i}^c)_{I_{m_i}^c(\mathbf{k})}]^2 \prod_{d \in m^0} [(\lambda^d)^{-1} (\nu^d)_{x^d}]^2 \right] \end{aligned} \quad (3.71)$$

biçiminde bulunur.

Elde edilen bu eşitlikler kullanılarak değişebilirlik varsayımı, bilgi içeren ve içermeyen önsel dağılımlar için tutarlılık incelemesi yapılabilir.

i. Değişebilirlik varsayımı: Kesim 3.3.2.1.'de verilen geçiş ile LD model parametreleri için tanımlanan hiper-parametreler beklenen göze sıklıkları için de hiper-parametre olmaktadır. Kesim 3.3.1.'de değinilen bağımsızlık durumunda, LD model parametrelerine ilişkin hiper-parametreler Kesim 3.2.'de verilen yaklaşım ile tanımlandığından, geçiş sonucunda beklenen göze sıklıkları için elde edilen önsel dağılım içinde değişebilirlik varsayımı sağlanır.

ii. *Bilgi içeren önsel*: Bilgi içermeye durumunda, Kesim 3.3.1.'deki tartışma dikkate alındığında bilgi içeren önsel dağılım için ν 'nün büyük sayısal değerler aldığı görülür. Bu durumda Eş. 3.69'da verilen beklenen değerlerdeki Pochhammer Sembol'lerin değeri küçülmekte ve λ değerleri etkili olmaktadır. İlgili beklenen değer incelendiğinde her parametre için λ kullanılarak ifade edilen bilginin, bulunduğu düzey ile ilişkilendirilerek ilgili göze için önsel bilgiye dönüştürüldüğü görülmektedir. Bu durumda, kullanılan dönüşümün önsel bilginin ifade edilişi bakımından tutarlı olduğu söylenebilir. Benzer biçimde Eş. 3.71 incelendiğinde ilgili beklenen göze sıklığının varyansının sonlu olduğu görülmektedir. Dolayısıyla ilgili önsel bilgiye olan güven ifade edilebilmektedir. Dönüşümün önsel bilgiye olan güvenin ifadesinde de tutarlı olduğu söylenebilir.

iii. *Bilgi içermeyen önsel*: LD model parametreleri için bilgi içermeyen bir önsel belirlemek için ilgili ν değeri sıfıra yakın alınır. Dolayısıyla λ değerleri büyür. Eş. 3.71'deki fark terimi her zaman sıfırdan büyüktür. Beklenen göze sıklıkları için de bir bilgi içermeyen önsel belirlemek için Eş. 3.71 ile verilmiş olan varyansın büyük olması gerekmektedir. λ değerlerinin büyük alınması ilgili varyansı büyütür. Bu koşullar altında, yapılan dönüşüm ile LD model parametreleri için bilgi içermeyen bir önsel dağılımdan beklenen göze sıklıkları için bilgi içermeyen bir önsel dağılım elde edilir. Bu durumda dönüşümün bilgi içermeyen önsel dağılımlar için tutarlı olduğu söylenebilir.

Bağımlılık durumu

Tutarlılığın kontrolü için bağımlılık durumunda da beklenen göze sıklıklarının dönüşüm sonucundaki beklenen değerinin ve varyansının elde edilmesi gerekmektedir. Burada da skora ilişkin önsel dağılım, parametrelere ilişkin önsel dağılımdan bağımsız belirlendiğinden işlemlerde skorlar sabit olarak alınmıştır. Ana etki ve ilişki parametreleri bağımsız olduğundan, Eş. 3.64'ten,

$$E(n_k) = E \left[\exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \right\} \right] E \left[\exp \left\{ \sum_{d \in m^0} x^d \beta^d \right\} \right] \quad (3.72)$$

elde edilir. Eş. 3.72'in sağ yanındaki ilk beklenen değer,

$$\begin{aligned}
E \left[\exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \right\} \right] &= \delta_{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} [(\nu^* + n) \mu_{m_i}^c + I_{m_i}^c(\mathbf{k})] \beta_{m_i}^c \right. \\
&\quad \left. - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} \right\} d\boldsymbol{\beta}^*
\end{aligned} \tag{3.73}$$

ile bulunur. Eş. 3.73'te $\exp \{ \mu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c \} / \lambda_{m_i}^c = u_{m_i}^c$ dönüşümü yapılırsa, $\beta_{m_i}^c = \log(\lambda_{m_i}^c u_{m_i}^c) / \mu_{m_i}^c$, $|J| = \left[\prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\mu_{m_i}^c u_{m_i}^c) \right]^{-1}$ ve

$$\begin{aligned}
E \left[\exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \right\} \right] &= \delta_{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
&\times \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} [(\nu^* + n) \mu_{m_i}^c + I_{m_i}^c(\mathbf{k})] \frac{\log(\lambda_{m_i}^c u_{m_i}^c)}{\mu_{m_i}^c} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} u_{m_i}^c \right\} \left[\prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c u_{m_i}^c \right]^{-1} du^* \\
&= \delta_{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{(I_{m_i}^c(\mathbf{k}) / \mu_{m_i}^c) - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
&\times \int_0^{\infty} \cdots \int_0^{\infty} \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (u_{m_i}^c)^{\nu^* + n + (I_{m_i}^c(\mathbf{k}) / \mu_{m_i}^c) - 1} \exp \left\{ - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} u_{m_i}^c \right\} du^* \\
&= \delta_{\nu^*} \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{(I_{m_i}^c(\mathbf{k}) / \mu_{m_i}^c) - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
&\times \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \Gamma[\nu^* + n + I_{m_i}^c(\mathbf{k}) / \mu_{m_i}^c] \\
&= \delta_{\nu^*} \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{(I_{m_i}^c(\mathbf{k}) / \mu_{m_i}^c) - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n}{\Gamma(\nu^*) n!} \Gamma(\nu^* + n) \\
&\times \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \frac{\Gamma[\nu^* + n + I_{m_i}^c(\mathbf{k}) / \mu_{m_i}^c]}{\Gamma(\nu^* + n)}
\end{aligned} \tag{3.74}$$

elde edilir. Eş. 3.72'nin sağ yanındaki ikinci beklenen değer ilkinе benzer yoldan,

$$\begin{aligned}
E \left[\exp \left\{ \sum_{d \in m^0} x^d \beta^d \right\} \right] &= \delta_{\nu^0} \prod_{d' \in d \in m^0} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'}^d)^{(x_{d'}^d / \mu_{d'}^d) - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_0)^n}{\Gamma(\nu^0) n!} \Gamma(\nu^0 + n) \\
&\times \prod_{d' \in d \in m^0} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{\Gamma[\nu^0 + n + x_{d'}^d / \mu_{d'}^d]}{\Gamma(\nu^0 + n)}
\end{aligned} \tag{3.75}$$

biçiminde elde edilir. Benzer yoldan,

$$E \left[\exp \left\{ 2 \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \right\} \right] = \delta_*^{\nu^*} \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{(2I_{m_i}^c(\mathbf{k})/\mu_{m_i}^c)-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\delta_*)^n}{\Gamma(\nu^*)n!} \Gamma(\nu^* + n) \\ \times \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \frac{\Gamma[\nu^* + n + 2I_{m_i}^c(\mathbf{k})/\mu_{m_i}^c]}{\Gamma(\nu^* + n)} \quad (3.76)$$

ve

$$E \left[\exp \left\{ 2 \sum_{d \in m^0} x^d \beta^d \right\} \right] = \delta_0^{\nu^0} \prod_{d' \in d \in m^0} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'}^d)^{(2x_{d'}^d/\mu_{d'}^d)-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\delta_0)^n}{\Gamma(\nu^0)n!} \Gamma(\nu^0 + n) \\ \times \prod_{d' \in d \in m^0} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{\Gamma[\nu^0 + n + 2x_{d'}^d/\mu_{d'}^d]}{\Gamma(\nu^0 + n)} \quad (3.77)$$

biçiminde elde edilir. İlgili beklenen göze sıklığının varyansı ise Eş. 3.74-3.77 ile ulaşılan sonuçlar kullanılarak

$$V(n_k) = E \left[\exp \left\{ 2 \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \right\} \right] E \left[2 \exp \left\{ \sum_{d \in m^0} x^d \beta^d \right\} \right] - E(n_k)^2 \quad (3.78)$$

eşitliği ile elde edilir.

i. Değişebilirlik varsayımı: Bağımsızlık durumu için yapılan tartışma bağımlılık durumu için de geçerlidir. Bu nedenle, bu durumda da değişebilirlik varsayımının geçerli olduğu söylenebilir.

ii. Bilgi içeren önsel: Eş. 3.74 ve 3.75'ten beklenen göze sıklıklarının beklenen değerinin tüm LD model parametreleri için belirlenen tüm hiper-parametrelerden etkilendiği görülmektedir. Kesim 3.3.1.'de yapılan tartışma dikkate alındığında, LD model parametrelerine ilişkin bilgi içeren önsel belirlendiğinde $\mu_{m_i}^c$ ve $\mu_{d'}^d$ çok büyümektedir. Bu durumda Eş. 3.74 ve 3.75'teki gamma fonksiyonlarının oranlarının çarpımı 1'e yaklaşır. Bu durumda bu beklenen değerler,

$$E \left[\exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \right\} \right] \cong \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{(I_{m_i}^c(\mathbf{k})/\mu_{m_i}^c)-1} \quad (3.79)$$

ve

$$E \left[\exp \left\{ \sum_{d \in m^0} x^d \beta^d \right\} \right] \cong \prod_{d' \in d \in m^0} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'}^d)^{(x_{d'}^d/\mu_{d'}^d)-1} \quad (3.80)$$

biçiminde yazılabilir. Eş. 3.79 ve 3.80'deki beklenen değerler incelendiğinde $\lambda_{m_i}^c$ ve $\lambda_{d'}^d$ değerlerinin (önsel bilginin) ana etkiler için tasarım matrisinin elemanları, ilişki parametreleri için ise skorlar ile ağırlıklandırılarak ilgili beklenen göze sıklığı için önsel bilgiye dönüştürüldüğü görülmektedir. Bilgi içermeye durumunda, beklenen göze sıklıklarının varyanslarının küçük olması gerekmektedir. Eş. 3.79 ve 3.80'deki yaklaşım Eş. 3.76 ve 3.77'ye uygulandığında Eş. 3.78'den beklenen göze sıklıklarının varyanslarının sonlu olacağı söylenebilir. Bu durumda model parametreleri için bilgi içeren bir önsel dağılım belirlendiğinde verilen dönüşüm ile elde edilen beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımı da bilgi içeren bir önsel dağılım olmaktadır. Bu durumda bilgi içermeye durumunda yapılan dönüşümün tutarlı olduğu söylenebilir.

iii. Bilgi içermeyen önsel: LD model parametreleri için bilgi içermeyen bir önsel $\mu_{m_i}^c$ ve $\mu_{d'}^d$ 'nin ilgili değerlerinin sıfıra yeterince yakın alınmasıyla belirlenebilir. Bu seçim beklenen göze sıklıklarının varyanslarını çok büyütür. Bu durumda beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımı olabilirlik fonksiyonu tarafından bastırılır. Böylece beklenen göze sıklıkları için de bilgi içermeyen bir önsel dağılım belirlenmiş olur. Dönüşümün tutarlı olduğu söylenebilir.

3.4. Karma Logaritmik Doğrusal Modeller için Bayesci Çıkarsamalar

Bu kesimde ilk olarak karma LD model parametreleri üzerinden Bayesci çıkarsamalar verilmiştir. Daha sonra karma LD model parametreleri için belirlenen önsel dağılım kullanılarak beklenen göze sıklıkları için bir önsel dağılım elde edilmiştir. Sonsal çıkarsamalardan sonra karma LD modeller için yapılan bu geçişin tutarlılığı üzerinde durulmuştur.

Karma LD model parametreleri için belirlenecek önsel dağılımların değişebilirlik varsayımını sağlaması için Kesim 3.2.'de verilmiş olan yaklaşım kullanılır.

3.4.1. Karma logaritmik doğrusal model parametreleri üzerinden Bayesci çıkarsama

Karma LD modeller ana etki, nominal etkileşim, ilişki ve satır (sütun) etki parametrelerini içerir. Bayesci çıkarsama için gereksinim duyulan olabilirlik fonksiyonunun çekirdeğinin logaritması Eş 2.1'de verildiği gibidir. Kesim 3.4.'te de $m^* = m^* \cup m^N$ biçiminde kullanılacağından $m = m^* \cup m^O \cup m^{NO}$, $c \in m^*$, $d \in m^O$, $e \in m^{NO}$, her $d' \in d$ için $k(d')$, \mathbf{k} 'nin d' 'ye karşılık gelen elemanı ve her e' , e 'deki ordinal değişkeni ifade ettiğinde $k(e')$, \mathbf{k} 'nin e' 'ye karşılık gelen elemanı olmak üzere,

$$\log n_{\mathbf{k}} = \sum_{c \in m^*} (I^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^O} \boldsymbol{\beta}^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'_i} + \sum_{e \in m^{NO}} (I^e(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^e x_{k(e')} - \sum_{r \in m} (I^r(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^r \quad (3.81)$$

biçimindedir. Eş. 3.81'de $\boldsymbol{\beta}^r$ gereksiz terimleri içerir (Demirhan, 2004). Eş. 3.81, Eş. 2.1'de yerine yazıldığında kullanılacak olabilirlik fonksiyonunun logaritması,

$$L(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}^c, \boldsymbol{\beta}^d, \boldsymbol{\beta}^e | \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{k} \in K} y_{\mathbf{k}} \left[\sum_{c \in m^*} (I^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^O} \boldsymbol{\beta}^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'_i} + \sum_{e \in m^{NO}} (I^e(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^e x_{k(e')} - \sum_{r \in m} (I^r(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^r \right] \quad (3.82)$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.82'de $\boldsymbol{\beta}_0 \in m^*$ biçimindedir.

Önsel dağılımların belirlenmesinde önsel olarak ana etki, etkileşim, ilişki ve satır (sütun) etki parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduğu önsel bilgisinin bulunduğu ve bulunmadığı durumlar üzerinde durulmuştur. Her iki durumda da ana etki, etkileşim ve ilişki parametreleri için Kesim 3.3.1.'de verilen önsel dağılımlar geçerlidir. Bu nedenle ilk olarak satır (sütun) etki parametrelerinin önsel dağılımı üzerinde durulmuş ve daha sonra ilgili parametrelerin bileşik önsel dağılımı verilmiştir.

Satır (sütun) etki parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduklarına ilişkin bir önsel bilginin bulunmadığı durumda bu parametreler için belirlenecek önsel dağılım satır (sütun) etki parametrelerinin birbirleriyle ilişkisini ifade edebilecek bir dağılım olmalıdır. Bunun yanı sıra belirlenecek dağılım tüm gerçel ekseninde tanımlı ve Eş. 3.82 ile verilen olabilirlik fonksiyonu ile uyumlu olmalıdır. Eş 3.23 ile verilmiş olan G-ÇDLG dağılımı bu özellikleri sağlamaktadır. Bu durumda, birinci aşamada Kesim 3.2.'de verilmiş olan yaklaşımla γ_{ts}^{NO} için g_{ts}^{NO} belirlenir. İkinci aşamada satır (sütun) etki parametrelerine G-ÇDLG önseli atanır. Bu durumda satır (sütun) etki parametrelerinin önsel dağılımı $e \in m^{NO}$, $p_3 = \sum_{e \in m^{NO}} |M^e|$, $t = 1, \dots, p_3$ ve $s = t + 1, \dots, p_3$ için $\boldsymbol{\gamma}^{NO} = (\gamma_{ts}^{NO})$, $j \in M^e$ için $\boldsymbol{\lambda}^{NO} = (\lambda_j^e)$, $\boldsymbol{\mu}^{NO} = (\mu_j^e)$ ve $(\mathbf{h}_{NO})^T = ((\boldsymbol{\varphi}^{NO})^T, (\boldsymbol{\gamma}^{NO})^T, (\boldsymbol{\lambda}^{NO})^T, (\boldsymbol{\mu}^{NO})^T, \nu^{NO}, m)$ olmak üzere

$$p(\boldsymbol{\beta}_{m^{NO}} | \mathbf{h}_{NO}) \propto \delta_{NO}^{\nu^{NO}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{NO})^n \prod_{e \in m^{NO}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e (\lambda_{m_i}^e)^{-\nu^{NO} - n - 1}}{[\Gamma(\nu^{NO} + n)]^{p_3 - 1} \Gamma(\nu^{NO}) n!} \quad (3.83)$$

$$\times \exp \left\{ (\nu^{NO} + n) \sum_{e \in m^{NO}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e - \sum_{e \in m^{NO}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^e} \exp \{ \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e \} \right\}, \beta_{m_i}^e \in \mathbb{R}$$

biçimindedir.

Satır (sütun) etki parametrelerinin kendi aralarında tam bağımsız olduğu önsel bilginin bulunması durumunda her parametre için birinci aşamada $d_{m_i}^e$, $\nu_{m_i}^e$ ve $\lambda_{m_i}^e$ değerleri belirlenir. İkinci aşamada ise satır (sütun) etki parametrelerine $\beta_{m_i}^e \sim \text{Log-Gamma}(\nu_{m_i}^e, \lambda_{m_i}^e)$ ataması yapılır. Bu durumda satır (sütun) etki parametrelerinin önsel dağılımı $e \in m^{NO}$, $j \in M^e$ ve $i = 1, \dots, |M^e|$, için $\boldsymbol{\nu}^{NO} = (\nu_j^e)$, $\boldsymbol{\lambda}^{NO} = (\lambda_j^e)$ ve $(\mathbf{u}_{NO})^T = ((\boldsymbol{\varphi}^{NO})^T, (\boldsymbol{\nu}^{NO})^T, (\boldsymbol{\lambda}^{NO})^T, m)$ olmak üzere,

$$p(\boldsymbol{\beta}_{m^{NO}} | \mathbf{u}_{NO}) \propto \exp \left\{ \sum_{e \in m^{NO}} \sum_{i=1}^{|M^e|} [\nu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e - \exp \{ \beta_{m_i}^e \} / \lambda_{m_i}^e] \right\}, \beta_{m_i}^e \in \mathbb{R} \quad (3.84)$$

biçimindedir.

Skorların, ana etki ve nominal etkileşim parametrelerinin, ilişki parametrelerinin ve satır (sütun) etki parametrelerinin bileşik önsel dağılımı Eş. 3.85'te verildiği gibidir:

$$p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^0}, \boldsymbol{\beta}_{m^{N^0}} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_{N^0}) = p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{h}_*) p(\boldsymbol{\beta}_{m^0} | \mathbf{h}_0) p(\boldsymbol{\beta}_{m^{N^0}} | \mathbf{h}_{N^0}). \quad (3.85)$$

Eş. 3.85'teki \mathbf{x}_d m 'deki tüm ordinal değişkenlere karşılık gelen skorları içermektedir. Eş. 3.85'te kapalı biçimi verilen bileşik önsel dağılım ile Eş. 3.82 ile verilmiş olan log-olabilirlik fonksiyonu, Bayes teoremi kullanılarak birleştirildiğinde ve ana etki ve nominal etkileşim, ilişki, satır (sütun) etki parametrelerinin önsel bağımsızlığına ilişkin bir bilgi bulunmadığında bileşik sonsal dağılım,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^0}, \boldsymbol{\beta}_{m^{N^0}} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_0, \mathbf{h}_{N^0}, \mathbf{y}) &\propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{h}_*) p(\boldsymbol{\beta}_{m^0} | \mathbf{h}_0) p(\boldsymbol{\beta}_{m^{N^0}} | \mathbf{h}_{N^0}) \\ &\times L(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^0}, \boldsymbol{\beta}_{m^{N^0}} | \mathbf{y}) \\ &\propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^0} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\ &\times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^0} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^0} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \{x_{d'_i}\} \right\} \\ &\times \delta_*^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{|p|-1} \Gamma(\nu^*) n!} \\ &\times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \beta_{m_i}^c - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \{\beta_{m_i}^c\} \right\} \\ &\times \delta_0^{\nu^0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_0)^n \prod_{d \in m^0} (\lambda_d^0)^{-\nu^0 - n - 1}}{[\Gamma(\nu^0 + n)]^{|m^0|-1} \Gamma(\nu^0) n!} \\ &\times \exp \left\{ (\nu^0 + n) \sum_{d \in \boldsymbol{\beta}_{m^0}} \beta^d - \sum_{d \in \boldsymbol{\beta}_{m^0}} \frac{1}{\lambda_d^0} \exp \{\beta^d\} \right\} \\ &\times \delta_{N^0}^{\nu^{N^0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{N^0})^n \prod_{e \in m^{N^0}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e (\lambda_{m_i}^e)^{-\nu^{N^0} - n - 1}}{[\Gamma(\nu^{N^0} + n)]^{|p_3|-1} \Gamma(\nu^{N^0}) n!} \\ &\times \exp \left\{ (\nu^{N^0} + n) \sum_{e \in m^{N^0}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e - \sum_{e \in m^{N^0}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^e} \exp \{\mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e\} \right\} \\ &\times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{c \in m^*} (\mathbf{I}^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^0} \boldsymbol{\beta}^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'_i} \right. \right. \\ &\left. \left. + \sum_{e \in m^{N^0}} (\mathbf{I}^e(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^e x_{k(e')} - \sum_{r \in m} (\mathbf{I}^r(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^r \right] \right\}, \mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^0}, \boldsymbol{\beta}_{m^{N^0}} \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (3.86)$$

biçiminde elde edilir.

Bileşik sonsal dağılım ana etki ve nominal etkileşim, ilişki, satır (sütun) etki parametrelerinin önsel bağımsızlığına ilişkin bir bilgi bulunduğu ise

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o}, \boldsymbol{\beta}_{m^{No}} | \mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O, \mathbf{u}_{No}, \mathbf{y}) \propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\boldsymbol{\beta}_{m^*} | \mathbf{u}_*) p(\boldsymbol{\beta}_{m^o} | \mathbf{u}_O) \\
& \quad \times p(\boldsymbol{\beta}_{m^{No}} | \mathbf{u}_{No}) L(\mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o}, \boldsymbol{\beta}_{m^{No}} | \mathbf{y}) \\
& \propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^o} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^o} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^o} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \exp\{x_{d'_i}\} \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} [\nu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \exp\{\beta_{m_i}^c\} / \lambda_{m_i}^c] \right\} \tag{3.87} \\
& \quad \times \exp \left\{ \sum_{d \in m^o} [\nu_d^o \beta^d - \exp\{\beta^d\} / \lambda_d^o] \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ \sum_{e \in m^{No}} \sum_{i=1}^{|M^e|} [\nu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e - \exp\{\beta_{m_i}^e\} / \lambda_{m_i}^e] \right\} \\
& \quad \times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{c \in m^*} (\mathbf{I}^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^o} \beta^d \prod_{i=k(d' \in d)} x_{d'_i} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \sum_{e \in m^{No}} (\mathbf{I}^e(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^e x_{k(e')} - \sum_{r \in m} (\mathbf{I}^r(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^r \right] \right\}, \mathbf{x}_d, \boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^o}, \boldsymbol{\beta}_{m^{No}} \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

biçimindedir.

Eş. 3.86 ve Eş. 3.87'den sonsal çıkarsama yapmak, ulaşılan dağılımların karmaşıklığı nedeniyle çok güçtür. Bu durumda sonsal çıkarsamalar MZMC yöntemlerinden Gibbs örnekleme algoritması ile yapılacaktır. Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanması için gereksinim duyulan tam koşullu dağılımlar ilk olarak Eş. 3.86 ve daha sonra Eş. 3.87 üzerinden elde edilmiştir.

Skorların tam koşullu dağılımını elde etmek için,

$$\mathbf{g}_S^T = [(\mathbf{x}_{d_{-i}})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^o})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{No}})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{h}_*)^T, (\mathbf{h}_O)^T, (\mathbf{h}_{No})^T, (\mathbf{y})^T] \tag{3.88}$$

tanımlaması yapılsın. Bu durumda Eş. 3.34 ile verilen dağılımda \mathbf{g}_S^T yerine Eş. 3.88 ile verilmiş olan \mathbf{g}_S^T konulduğunda skorların tam koşullu dağılımı elde edilir. Bu dağılımdan

rasgele sayı üretimine Kesim 3.3.1.'de değinilmiştir.

Ana etki ve etkileşim parametrelerinin kendi aralarında bağımsızlığına ilişkin bir önsel bilgi bulunmadığında bu parametrelerin tam koşullu dağılımını elde etmek için,

$$\mathbf{g}_*^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*_i})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{N}^{\circ}}})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{h}_*)^T, (\mathbf{h}_{\circ})^T, (\mathbf{h}_{\mathcal{N}^{\circ}})^T, (\mathbf{y})^T] \quad (3.89)$$

tanımlaması yapılsın. Bu durumda Eş. 3.38 ile verilen dağılımda \mathbf{g}_*^T yerine Eş. 3.89 ile verilmiş olan \mathbf{g}_*^T konulduğunda ana etki ve etkileşim parametrelerinin tam koşullu dağılımını elde edilir. Bu dağılımdan rasgele sayı üretimine Kesim 3.3.1.'de değinilmiştir.

İlişki parametrelerinin kendi aralarında bağımsızlığına ilişkin bir önsel bilgi bulunmadığında bu parametrelerin tam koşullu dağılımını elde etmek için,

$$\mathbf{g}_{\circ}^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}_i})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{N}^{\circ}}})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{h}_*)^T, (\mathbf{h}_{\circ})^T, (\mathbf{h}_{\mathcal{N}^{\circ}})^T, (\mathbf{y})^T] \quad (3.90)$$

tanımlaması yapılsın. Bu durumda Eş. 3.41 ile verilen dağılımda \mathbf{g}_{\circ}^T yerine Eş. 3.90 ile verilmiş olan \mathbf{g}_{\circ}^T konulduğunda ilişki parametrelerinin tam koşullu dağılımını elde edilir. Bu dağılımdan rasgele sayı üretimine Kesim 3.3.1.'de değinilmiştir.

Satır (sütun) etki parametrelerinin kendi aralarında bağımsızlığına ilişkin bir önsel bilgi bulunmadığında bu parametrelerin tam koşullu dağılımını elde etmek için,

$$\mathbf{g}_{\mathcal{N}^{\circ}}^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{N}^{\circ}_i})})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{h}_*)^T, (\mathbf{h}_{\circ})^T, (\mathbf{h}_{\mathcal{N}^{\circ}})^T, (\mathbf{y})^T] \quad (3.91)$$

tanımlaması yapılsın. Bu durumda, $e \in m^{\mathcal{N}^{\circ}}$ ve $i = 1, \dots, |M^e|$ için,

$$\begin{aligned}
\rho(\beta_{m_i^{N\mathcal{O}}}^e | \mathbf{g}_{N\mathcal{O}}) &\propto \delta_{N\mathcal{O}}^{\nu^{N\mathcal{O}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{N\mathcal{O}})^n \prod_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \prod_{j=1}^{|M^e|} \mu_{m_j}^e (\lambda_{m_j}^e)^{-\nu^{N\mathcal{O}} - n - 1}}{[\Gamma(\nu^{N\mathcal{O}} + n)]^{p_3 - 1} \Gamma(\nu^{N\mathcal{O}}) n!} \\
&\times \exp \left\{ (\nu^{N\mathcal{O}} + n) \sum_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \sum_{j=1}^{|M^e|} \mu_{m_j}^e \beta_{m_j}^e - \sum_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \sum_{j=1}^{|M^e|} \frac{\exp \{ \mu_{m_j}^e \beta_{m_j}^e \}}{\lambda_{m_j}^e} \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{c \in m^*} (I^c(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^{\mathcal{O}}} \boldsymbol{\beta}^d \prod_{j=k(d' \in d)} x_{d_j}' \right. \right. \\
&\left. \left. + \sum_{e \in m^{N\mathcal{O}}} (I^e(\mathbf{k}))^T \boldsymbol{\beta}^e x_{k(e')} \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ S_e \beta_{m_i^{N\mathcal{O}}}^e x_{k(e')} \right\} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(1 - \delta_{N\mathcal{O}}) \prod_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \prod_{j=1}^{|M^e|} (\lambda_{m_j}^e)^{-1}]^n}{[\Gamma(\nu^{N\mathcal{O}} + n)]^{p_3 - 1} n!} \\
&\times \exp \{ n \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e \} \exp \left\{ n \sum_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^e|} \mu_{m_j}^e \beta_{m_j}^e \right\} \\
&\times \exp \left\{ \nu^{N\mathcal{O}} \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e - \frac{1}{\lambda_{m_i}^e} \exp \{ \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e \} \right\}
\end{aligned} \tag{3.92}$$

yazılabilir. Eş. 3.92'de $S_e = \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \sum_{e \in m^{N\mathcal{O}}} (I^e(\mathbf{k}_{-i}))^T \boldsymbol{\beta}_{-i}^e x_{k_{-i}(e')} \right\}$ biçimindedir. Eş. 3.33'ten, 3.34'e geçiş sırasında kullanılan yaklaşım Eş. 3.92 için uygulandığında,

$$\begin{aligned}
\rho(\beta_{m_i^{N\mathcal{O}}}^e | \mathbf{g}_{N\mathcal{O}}) &\propto \exp \left\{ S_e \beta_{m_i^{N\mathcal{O}}}^e x_{k(e')} \right\} \exp \left\{ \frac{(1 - \delta_{N\mathcal{O}}) \prod_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \prod_{j=1}^{|M^e|} (\lambda_{m_j}^e)^{-1}}{(\exp(2.07728))^{p_3 - 1}} \right. \\
&\times \exp \{ \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e \} \exp \left\{ \sum_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^e|} \mu_{m_j}^e \beta_{m_j}^e \right\} \\
&\times \exp \left\{ \nu^{N\mathcal{O}} \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e - \frac{1}{\lambda_{m_i}^e} \exp \{ \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e \} \right\} \\
&\left. \propto \exp \left\{ [\nu^{N\mathcal{O}} \mu_{m_i}^e + S_e x_{k(e')}] \beta_{m_i^{N\mathcal{O}}}^e - s b t^{N\mathcal{O}} \exp \{ \mu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e \} \right\}
\end{aligned} \tag{3.93}$$

elde edilir. Eş. 3.93'te

$$s b t^{N\mathcal{O}} = (\lambda_{m_i}^e)^{-1} - (1 - \delta_{N\mathcal{O}}) \exp \left\{ 2.07728(1 - p_3) \sum_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \sum_{j=1, j \neq i}^{|M^e|} \mu_{m_j}^e \beta_{m_j}^e \right\} \prod_{e \in m^{N\mathcal{O}}} \prod_{j=1}^{|M^e|} (\lambda_{m_j}^e)^{-1}$$

biçimindedir. Sonsal çıkarsamalar için Gibbs örnekleme algoritması kullanılır. Tam koşullu dağılım olarak, $(\nu^{N\mathcal{O}} \mu_{m_i}^e + S_e x_{k(e')}) > 0$ olduğunda $(\nu^{N\mathcal{O}} \mu_{m_i}^e + S_e x_{k(e')})$, $1/\lambda_{m_i}^e$ ve $\mu_{m_i}^e$ parametrelili genelleştirilmiş log-gamma dağılımı, aksi durumda ise Eş. 3.93 ile

verilen dağılım kullanılır.

Ana etki ve etkileşim parametrelerinin kendi aralarında bağımsızlığına ilişkin önsel bilgi bulunması durumunda

$$\mathbf{g}_*^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*_i})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{N^{\circ}}})^T, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{u}_*)^T, (\mathbf{u}_{\circ})^T, (\mathbf{u}_{N^{\circ}})^T, (\mathbf{y})^T] \quad (3.94)$$

olsun. Eş. 3.39'da \mathbf{g}_* yerine Eş. 3.94 ile verilmiş olan \mathbf{g}_* konulduğunda $c \in m^*$ olmak üzere $i = 1, \dots, |M^c|$ için her $\beta_{m_i}^c$ 'nin tam koşullu dağılımı Eş. 3.39'daki gibi elde edilir. Bu tam koşullu dağılımdan rasgele sayı üretimine Kesim 3.3.1.'de değinilmiştir.

İlişki parametrelerinin bağımsızlığına ilişkin önsel bilgi bulunduğunda ve

$$\mathbf{g}_{\circ}^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}_i})^T, \boldsymbol{\beta}_{m^{N^{\circ}}}, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{u}_*)^T, (\mathbf{u}_{\circ})^T, (\mathbf{u}_{N^{\circ}})^T, (\mathbf{y})^T] \quad (3.95)$$

verildiğinde, $d \in m^{\circ}$ olmak üzere Eş. 3.42'de \mathbf{g}_{\circ} yerine Eş. 3.95 ile verilmiş olan \mathbf{g}_{\circ} konulduğunda her β^d 'nin tam koşullu dağılımı Eş. 3.42'deki gibi elde edilir. Bu tam koşullu dağılımdan rasgele sayı üretimine Kesim 3.3.1.'de değinilmiştir.

Bağımsızlık durumunda satır (sütun) etki parametrelerinin tam koşullu dağılımını elde etmek için ilk olarak,

$$\mathbf{g}_{N^{\circ}}^T = [(\mathbf{x}_d)^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^*})^T, (\boldsymbol{\beta}_{m^{\circ}})^T, \boldsymbol{\beta}_{m^{N^{\circ}_i}}, (\mathbf{h}_S)^T, (\mathbf{u}_*)^T, (\mathbf{u}_{\circ})^T, (\mathbf{u}_{N^{\circ}})^T, (\mathbf{y})^T] \quad (3.96)$$

tanımlaması yapılsın. Eş. 3.87'den

$$\begin{aligned}
p(\beta_{m_i^{N^O}}^e | \mathbf{g}_{N^O}) &\propto \exp \left\{ \sum_{e \in m^{N^O}} \sum_{j=1}^{|M^e|} [(\nu_{m_j}^e - 1)\beta_{m_j}^e - \exp\{\beta_{m_j}^e\}/\lambda_{m_j}^e] \right\} \\
&\times \exp \left\{ \sum_{k \in K} y_k \left[\sum_{c \in m^*} (I^c(k))^T \boldsymbol{\beta}^c + \sum_{d \in m^O} \boldsymbol{\beta}^d \prod_{j=k(d' \in d)} x_{d_j}' \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{e \in m^{N^O}} (I^e(k))^T \boldsymbol{\beta}^e x_{k(e')} \right] \right\} \\
&\propto \exp \left\{ \nu_{m_i}^e \beta_{m_i}^e - \exp\{\beta_{m_i}^e\}/\lambda_{m_i}^e + S_e \beta_{m_i}^e \right\} \\
&\propto \exp \left\{ (\nu_{m_i}^e + S_e) \beta_{m_i}^e - \exp\{\beta_{m_i}^e\}/\lambda_{m_i}^e \right\},
\end{aligned} \tag{3.97}$$

elde edilir. Sonsal çıkarsamalarda kullanılacak Gibbs örnekleme algoritması için gereken tam koşullu dağılım $(\nu_{m_i}^e + S_e) > 0$ ise $(\nu_{m_i}^e + S_e)$, $\lambda_{m_i}^e$ parametreleri ile log-gamma dağılımı, aksi durumda Eş. 3.97 ile verilen dağılımdır.

Karma LD modellerde parametrelere ilişkin önsel bilginin ifade edilmesi için uygulanacak yaklaşım Kesim 3.3.1. ile verilmiş olan yaklaşımın aynısıdır. Burada ek olarak satır (sütun) etki parametreleri de dikkate alınmalıdır.

Karma LD modeller için model parametreleri üzerinden Bayesci çıkarsama için bağımlılık durumunda Algoritma 1 ile paralel olan aşağıda verilmiş olan Algoritma 3 ve bağımsızlık durumunda ise Algoritma 2 ile paralel olan Algoritma 4 kullanılır.

Algoritma 3

A3.1. A1.1 uygulanır. Buna ek olarak satır (sütun) etki parametreleri için başlangıç değerleri belirlenir. Bu değerleri içeren vektör $\boldsymbol{\beta}_{m^{N^O}}^0$ biçimindedir.

A3.2. A1.2 - A1.6 adımları uygulanır.

A3.3. ν^{N^O} , $g_{ts}^{N^O}$ ve $\boldsymbol{\mu}^{N^O}$ belirlenir, $g_{ts}^{N^O}$ kullanılarak Eş. 3.16'dan rasgele sayı üretilir. Kovaryans matrisi ve δ_{N^O} elde edilir. δ_{N^O} ve önsel bilgi kullanılarak $\boldsymbol{\lambda}^{N^O}$ elde edilir.

A3.4. A1.5 ve A1.4 uygulanır. Buna ek olarak $\mathbf{X}_{m^{N^O}}$ ilgili skorların kestirimleri kullanılarak oluşturulur.

A3.5. A1.7 ve A1.8 uygulanır.

A3.6. Her satır (sütun) etki parametresi için bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Her satır (sütun) etki parametresi için A3.4'te oluşturulan tasarım matrisi kullanılarak Eş. 3.93 ile verilen satır (sütun) etki parametrelerinin tam koşullu dağılımından rasgele sayı

üretilir. Tüm satır (sütun) etki parametreleri için bir adım ilerlendikten sonra A3.7'ye geçilir.

A3.7. Gibbs örnekleme algoritması için belirlenen toplam adım sayısına ulaşılmış ise durulur. Aksi durumda $i=i+1$ alınır, elde edilen kestirimler x_d^i , $\beta_{m^*}^i$, $\beta_{m^0}^i$ ve $\beta_{m^{N^0}}^i$ vektörlerine atanarak A3.4'e dönülür.

Algoritma 4

A4.1. A2.1 uygulanır. Buna ek olarak satır (sütun) etki parametreleri için başlangıç değerleri belirlenir. Bu değerleri içeren vektör $\beta_{m^{N^0}}^0$ biçimindedir.

A4.2. A2.2 - A2.4 adımları uygulanır.

A4.3. $\eta_d^{N^0}$ belirlenir. $\eta_d^{N^0}$ kullanılarak $\nu_d^{N^0}$ ve $\lambda_d^{N^0}$ değerleri belirlenir.

A4.4. A2.5 ve A2.6 uygulanır. Buna ek olarak $X_{m^{N^0}}$ ilgili skorların kestirimleri kullanılarak oluşturulur.

A4.5. A2.7 - A2.8 adımları uygulanır.

A4.6. Eş. 3.97'den rasgele sayı üretilerek bir Gibbs örnekleme adımı ilerlenir. Tüm satır (sütun) etki parametreleri için bir adım ilerlendikten sonra A4.7.'ye geçilir.

A4.7. Gibbs örnekleme algoritması için belirlenen toplam adım sayısına ulaşılmış ise durulur. Aksi durumda $i=i+1$ alınır, elde edilen kestirimler x_d^i , $\beta_{m^*}^i$, $\beta_{m^0}^i$ ve $\beta_{m^{N^0}}^i$ vektörlerine atanarak A4.4'e dönülür.

3.4.2. Karma olumsuzluk çizelgelerinde beklenen göze sıklıkları üzerinden Bayesci çıkarsama

Karma olumsuzluk çizelgelerinde beklenen göze sıklıkları üzerinden Bayesci çıkarsama yapmak için gereksinim duyulan önsel dağılım Kesim 3.3.2.'de olduğu gibi LD model parametreleri için oluşturulan önsel dağılımdan türetilen olacaktır. Burada da bu türetme işlemi ile elde edilen önsel dağılımın parametrelere ilişkin önsel bilgiyi beklenen göze sıklıkları için uygun bir önsel dağılıma dönüştürüyor olması gerekmektedir.

İlk olarak model parametrelerine ilişkin önsel dağılımdan beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımına geçiş yapılmış, daha sonra önsel bilgiyi yansıtmaya bakımından bu geçişin tutarlılığı üzerinde durulmuştur.

3.4.2.1. Karma logaritmik doğrusal modellerde model parametrelerinden beklenen göze sıklıklarına geçiş

LD model parametrelerinin önsel dağılımından, beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımına geçiş için Eş. 2.2 kullanılmıştır. Eş. 2.2'den parametreler üzerindeki önsel bilgiyi beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımına aktarmak için

$$\begin{aligned} n &= \exp \left\{ [\mathbf{X}_{m^*} : \mathbf{X}_{m^{\mathcal{O}}} : \mathbf{X}_{m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}}] [\boldsymbol{\beta}_{m^*}^T : \boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{O}}}^T : \boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}}^T]^T \right\} \\ &= g(\boldsymbol{\beta}_{m^*}, \boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{O}}}, \boldsymbol{\beta}_{m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}}) \end{aligned} \quad (3.98)$$

dönüşümü kullanılır. LD model parametrelerinin beklenen göze sıklıkları cinsinden yazılması için Eş. 3.51 kullanılır.

Modeldeki ana etki ve etkileşim parametrelerinin toplam sayısı $p_1 = \sum_{c \in m^*} |\mathbf{M}^c|$, ilişki parametrelerinin sayısı $p_2 = |m^{\mathcal{O}}|$, satır (sütun) etki parametrelerinin sayısı $p_3 = \sum_{e \in m^*} |\mathbf{M}^e|$, modeldeki parametre sayısı $p = p_1 + p_2 + p_3$ ve ilgili olumsuzluk çizelgesindeki göze sayısı $|K|$ olmak üzere $\mathbf{A} = [\mathbf{X}_m^T \mathbf{X}_m]^{-1} = (a_{ij})$, $i = 1, \dots, |K|$, $j = 1, \dots, p$ ataması yapıldığında Eş. 3.98'den $r = 1, \dots, p_1$, $\ell = 1, \dots, p_2$ ve $t = 1, \dots, p_3$ için,

$$\begin{aligned} G_1 \beta^{c_r} + G_2 \beta^{d_\ell} + G_3 \beta^{e_t} &= G_1 \sum_{c \in m^*} \sum_{j=1}^{|\mathbf{M}^c|} a_{rj} \sum_{k \in K} I_{m_j}^c(\mathbf{k}) \log n_k + G_2 \sum_{j=1}^{|\mathcal{d}|} a_{\ell j} \sum_{k \in K} x_{d_\ell^j} \log n_k \\ &\quad + G_3 \sum_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \sum_{j=1}^{|\mathbf{M}^e|} a_{tj} \sum_{k \in K} I_{m_j}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')} \log n_k \\ &= \sum_{k \in K} s_k^{G_1 r + G_2 \ell + G_3 t} \log n_k \end{aligned} \quad (3.99)$$

elde edilir. Eş. 3.99'da G_1 , $\beta \in m^*$ ise 1, aksi halde 0 değerini alan, G_2 , $\beta \in m^{\mathcal{O}}$ ise 1, aksi halde 0 değerini alan ve G_3 , $\beta \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}$ ise 1, aksi halde 0 değerini alan gösterge fonksiyonlarıdır. Eş. 3.99'da,

$$s_k^{G_1 r + G_2 \ell + G_3 t} = G_1 \sum_{c \in m^*} \sum_{j=1}^{|\mathbf{M}^c|} a_{rj} I_{m_j}^c(\mathbf{k}) + G_2 \sum_{j=1}^{|\mathcal{d}|} a_{\ell j} x_{d_\ell^j} + G_3 \sum_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \sum_{j=1}^{|\mathbf{M}^e|} a_{tj} I_{m_j}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')}$$

biçimindedir. Dönüşümün Jacobian matrisi ise

$$\mathbf{J} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}^{-1}(\mathbf{n})}{\partial n_k} \right) = \left(\frac{s_k^{G_1 r + G_2 \ell + G_3 t}}{n_k} \right)_{p \times |K|} \quad (3.100)$$

biçimindedir. Eş. 3.100'de ulaşılan Jacobian matrisi de bir dikdörtgen matristir. Bu durumda, Jacobian matrisinin belirteni için Kesim 3.3.2.1.'de değinilmiş olan yaklaşım kullanılacaktır. İlerleyen eşitliklerde gösterim karmaşası yaratmamak için $s_k^{G_1 r + G_2 \ell + G_3 t} = s_k$ biçiminde gösterilecektir.

Ana etki ve ilişki parametrelerinin bağımsızlığına önsel ilişkin bilgi bulunduğu beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{n} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O, \mathbf{u}_{\mathcal{N}O}) &= p_{\beta_{m^*}, \beta_{m^O}, \beta_{m^{\mathcal{N}O}} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O, \mathbf{u}_{\mathcal{N}O}}(\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{n})) \cdot \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right) \\ &\propto \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} (\nu_{m_i}^c + I^c(\mathbf{k}(\beta_{m_i}^c))) S_c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right. \\ &+ \sum_{d \in m^O} (\nu_d^O + S_d) \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \\ &+ \left. \exp \left\{ (\nu_{m_i}^e + S_e) \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} / \lambda_{m_i}^e \right\} \right\} \\ &\times \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.101'de $b = \text{enk}(p, |K|)$ biçimindedir. Skorların ve beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı ise Eş. 3.101 kullanılarak Eş. 3.102'deki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O, \mathbf{u}_{\mathcal{N}O}) &\propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\mathbf{n} | \mathbf{u}_*, \mathbf{u}_O, \mathbf{u}_{\mathcal{N}O}) \\
&\propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} (\lambda_{d'}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \\
&\quad \times \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} x_{d'_i} - \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp\{x_{d'_i}\} \right\} \\
&\quad \times \exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} (\nu_{m_i}^c + I^c(\mathbf{k}(\beta_{m_i}^c))) S_c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{d \in m^O} (\nu_d^O + S_d) \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
&\quad + \exp \left\{ (\nu_{m_i}^e + S_e) \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \exp \left\{ \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} / \lambda_{m_i}^e \right\} \\
&\quad \times \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right).
\end{aligned} \tag{3.102}$$

Önsel bağımsızlığa ilişkin bilgi bulunmadığında beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı,

$$\begin{aligned}
p(\mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O, \mathbf{h}_{\mathcal{N}O}) &\propto \delta_*^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1-1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
&\quad \times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
&\quad \times \delta_O^{\nu^O} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_O)^n \prod_{d \in m^O} \mu_d^O (\lambda_d^O)^{-\nu^O - n - 1}}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{p_2-1} \Gamma(\nu^O) n!} \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{d \in m^O} \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right. \\
&\quad \left. - \sum_{d \in m^O} \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
&\quad \times \delta_{\mathcal{N}O}^{\nu^{\mathcal{N}O}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{\mathcal{N}O})^n \prod_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e (\lambda_{m_i}^e)^{-\nu^{\mathcal{N}O} - n - 1}}{[\Gamma(\nu^{\mathcal{N}O} + n)]^{p_3-1} \Gamma(\nu^{\mathcal{N}O}) n!} \\
&\quad \times \exp \left\{ (\nu^{\mathcal{N}O} + n) \sum_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right. \\
&\quad \left. - \sum_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^e} \exp \left\{ \mu_{m_i}^e \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathbf{J}) \right)
\end{aligned} \tag{3.103}$$

biçiminde elde edilir. Skorların ve beklenen göze sıklıklarının bileşik önsel dağılımı ise

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{x}_d, \mathbf{n} | \mathbf{h}_S, \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O, \mathbf{h}_{\mathcal{N}O}) \propto p(\mathbf{x}_d | \mathbf{h}_S) p(\mathbf{n} | \mathbf{h}_*, \mathbf{h}_O, \mathbf{h}_{\mathcal{N}O}) \\
& \propto \delta_S^{\nu^S} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_S)^n \prod_{d' \in d \in m^O} \prod_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S (\lambda_{d'_i}^S)^{-\nu^S - n - 1}}{[\Gamma(\nu^S + n)]^{|d|-1} \Gamma(\nu^S) n!} \exp \left\{ (\nu^S + n) \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{d' \in d \in m^O} \sum_{i=1}^{|M^{d'}|} \frac{1}{\lambda_{d'_i}^S} \exp \left\{ \mu_{d'_i}^S x_{d'_i} \right\} \right\} \delta_{*}^{\nu^*} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_*)^n \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c (\lambda_{m_i}^c)^{-\nu^* - n - 1}}{[\Gamma(\nu^* + n)]^{p_1 - 1} \Gamma(\nu^*) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^* + n) \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k - \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^c} \exp \left\{ \mu_{m_i}^c \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \delta_O^{\nu^O} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_O)^n \prod_{d \in m^O} \mu_d^O (\lambda_d^O)^{-\nu^O - n - 1}}{[\Gamma(\nu^O + n)]^{p_2 - 1} \Gamma(\nu^O) n!} \exp \left\{ (\nu^O + n) \sum_{d \in m^O} \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right. \\
& \quad \left. - \sum_{d \in m^O} \frac{1}{\lambda_d^O} \exp \left\{ \mu_d^O \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \\
& \quad \times \delta_{\mathcal{N}O}^{\nu^{\mathcal{N}O}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{\mathcal{N}O})^n \prod_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e (\lambda_{m_i}^e)^{-\nu^{\mathcal{N}O} - n - 1}}{[\Gamma(\nu^{\mathcal{N}O} + n)]^{p_3 - 1} \Gamma(\nu^{\mathcal{N}O}) n!} \\
& \quad \times \exp \left\{ (\nu^{\mathcal{N}O} + n) \sum_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \mu_{m_i}^e \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right. \\
& \quad \left. - \sum_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \sum_{i=1}^{|M^e|} \frac{1}{\lambda_{m_i}^e} \exp \left\{ \mu_{m_i}^e \sum_{k \in K} s_k \log n_k \right\} \right\} \text{mut} \left(\prod_{i=1}^b \text{tekil}_i(\mathcal{J}) \right)
\end{aligned} \tag{3.104}$$

biçimindedir.

Önsel bağımsızlığa ilişkin bilgi bulunduğu durumda Eş. 3.102 ile verilen önsel dağılımın, bulunmadığı durumda ise Eş. 3.104 ile verilen önsel dağılımın, Eş. 3.82 ile verilmiş olan log-olabilirlik fonksiyonu ile çarpılmasıyla bileşik sonsal dağılım elde edilir. Ulaşılan bileşik sonsal dağılımlardan tam koşullu dağılımlar elde edilemediğinden, sonsal çıkarsamalar MH algoritması kullanılarak yapılabilir.

3.4.2.2. Karma logaritmik doğrusal model parametresi için kullanılan önsel bilginin beklenen göze sıklıkları için tutarlılığı

Bu kesimde yapılacak tutarlılık incelemesi için izlenecek yol Kesim 3.3.2.2.'de izlenen yolun aynısıdır.

Bağımsızlık durumu

Önsel bağımsızlık durumunda tutarlılığın incelenmesi için beklenen göze sıklıklarının dönüşüm sonucundaki beklenen değerinin ve varyansının elde edilmesi gerekir. Eş. 3.98 ile verilen dönüşümden

$$n_k = \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \exp \{ I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \} \prod_{d \in m^0} \exp \{ x^d \beta^d \} \prod_{e \in m^{N^0}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \exp \{ I_{m_i}^e(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^e x_{k(e')} \} \quad (3.105)$$

biçimindedir. Eş. 3.105'ten

$$E(n_k) = \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} E[\exp \{ I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \}] \prod_{d \in m^0} E[\exp \{ x^d \beta^d \}] \times \prod_{e \in m^{N^0}} \prod_{i=1}^{|M^e|} E[\exp \{ I_{m_i}^e(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^e x_{k(e')} \}] \quad (3.106)$$

elde edilir. $\mathbf{k} \in K$ için $Z_i^e(\mathbf{k}) = \exp \{ I_{m_i}^e(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^e \}$ dönüşümü ile $\beta_{m_i}^e \sim \text{Log-Gamma}(\nu_{m_i}^e, \lambda_{m_i}^e)$ olmak üzere

$$p(z_i^e(\mathbf{k})) = \frac{1}{I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')} (\lambda_{m_i}^e)^{\nu_{m_i}^e + 1} \Gamma(\nu_{m_i}^e)} \times \exp \left\{ \nu_{m_i}^e \frac{\log z_i^e(\mathbf{k})}{I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')}} - (\lambda_{m_i}^e)^{-1} \exp \left\{ \frac{\log z_i^e(\mathbf{k})}{I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')}} \right\} \right\}, z_i^e(\mathbf{k}) > 0 \quad (3.107)$$

=0, ö.d.

elde edilir. Eş. 3.107'den

$$\begin{aligned}
E(Z_i^e(\mathbf{k})) &= \frac{(\lambda_{m_i}^e)^{I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}^{-2} \Gamma(\nu_{m_i}^e + I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}{\Gamma(I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}, \\
E[(Z_i^e(\mathbf{k}))^2] &= \frac{(\lambda_{m_i}^e)^{2I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}^{-2} \Gamma(\nu_{m_i}^e + 2I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}{\Gamma(I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}
\end{aligned} \tag{3.108}$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.68, 3.106 ve 3.108'den

$$\begin{aligned}
E(n_k) &= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \frac{(\lambda_{m_i}^c)^{I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \Gamma(\nu_{m_i}^c + I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(I_{m_i}^c(\mathbf{k}))} \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} \frac{(\lambda^d)^{x^d-2} \Gamma(\nu^d + x^d)}{\Gamma(x^d)} \\
&\times \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \frac{(\lambda_{m_i}^e)^{I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}^{-2} \Gamma(\nu_{m_i}^e + I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}{\Gamma(I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})} \\
&= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} (\nu_{m_i}^c)_{I_{m_i}^c(\mathbf{k})} \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} (\lambda^d)^{x^d-2} (\nu^d)_{x^d} \\
&\times \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \prod_{i=1}^{|M^e|} (\lambda_{m_i}^e)^{I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}^{-2} (\nu_{m_i}^e)_{(I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}
\end{aligned} \tag{3.109}$$

biçiminde elde edilir. Eş. 3.68 ve 3.108'den

$$\begin{aligned}
V(n_k) &= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \frac{(\lambda_{m_i}^c)^{2I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \Gamma(\nu_{m_i}^c + 2I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(I_{m_i}^c(\mathbf{k}))} \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} \frac{(\lambda^d)^{2x^d-2} \Gamma(\nu^d + 2x^d)}{\Gamma(x^d)} \\
&\times \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \frac{(\lambda_{m_i}^e)^{2I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}^{-2} \Gamma(\nu_{m_i}^e + 2I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}{\Gamma(I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})} \\
&- \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} \left[\frac{(\lambda_{m_i}^c)^{I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \Gamma(\nu_{m_i}^c + I_{m_i}^c(\mathbf{k}))}{\Gamma(I_{m_i}^c(\mathbf{k}))} \right]^2 \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} \left[\frac{(\lambda^d)^{x^d-2} \Gamma(\nu^d + x^d)}{\Gamma(x^d)} \right]^2 \\
&\times \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \left[\frac{(\lambda_{m_i}^e)^{I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}^{-2} \Gamma(\nu_{m_i}^e + I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})}{\Gamma(I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')})} \right]^2 \\
&= \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{2I_{m_i}^c(\mathbf{k})-2} \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} (\lambda^d)^{2x^d-2} \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \prod_{i=1}^{|M^e|} (\lambda_{m_i}^e)^{2I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}^{-2} \\
&\times \left\{ \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\nu_{m_i}^c)_{2I_{m_i}^c(\mathbf{k})} \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} (\nu^d)_{2x^d} \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \prod_{i=1}^{|M^e|} (\nu_{m_i}^e)_{2I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}} \right. \\
&- \prod_{c \in m^*} \prod_{i=1}^{|M^c|} [(\lambda_{m_i}^c)^{-1} (\nu_{m_i}^c)_{I_{m_i}^c(\mathbf{k})}]^2 \prod_{d \in m^{\mathcal{O}}} [(\lambda^d)^{-1} (\nu^d)_{x^d}]^2 \\
&\left. \times \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^{\mathcal{O}}}} \prod_{i=1}^{|M^e|} [(\lambda_{m_i}^e)^{-1} (\nu_{m_i}^e)_{I_{m_i}^e(\mathbf{k})x_{k(e')}}]^2 \right\}
\end{aligned} \tag{3.110}$$

biçiminde elde edilir.

Eş. 3.109 ve 3.110 incelendiğinde değişebilirlik varsayımı, bilgi içeren önsel ve bilgi içermeyen önsel dağılımlar için Kesim 3.3.2.2.'de yapılan tartışmaların karma LD modeller içinde geçerli olduğu görülür. Bu durumda önsel bağımsızlık durumunda karma LD modeller için dönüşüm sonucunda elde edilen beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımının taşıdığı bilginin parametrelere ilişkin önsel bilgi ile tutarlı olduğu söylenebilir.

Bağımlılık durumu

Ana etki ve etkileşim, ilişki ve satır (sütun) etki parametreleri kendi aralarında bağımsız olduğundan,

$$E(n_k) = E \left[\exp \left\{ \sum_{c \in m^*} \sum_{i=1}^{|M^c|} I_{m_i}^c(\mathbf{k}) \beta_{m_i}^c \right\} \right] E \left[\exp \left\{ \sum_{d \in m^0} x^d \beta^d \right\} \right] \times E \left[\exp \left\{ \sum_{e \in m^{\mathcal{N}^0}} \sum_{i=1}^{|M^e|} I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')} \beta_{m_i}^e \right\} \right] \quad (3.111)$$

yazılabilir. Eş 3.111'in sağ yanındaki ilk iki beklenen değere ilişkin tartışma Kesim 3.3.2.2.'de verilmiştir. Eş. 3.111'in sağ yanındaki son beklenen değer diğerlerine benzer yoldan

$$E \left[\exp \left\{ \sum_{e \in m^{\mathcal{N}^0}} \sum_{i=1}^{|M^e|} I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')} \beta_{m_i}^e \right\} \right] = \delta_{\mathcal{N}^0}^{\nu^{\mathcal{N}^0}} \prod_{c \in m^{\mathcal{N}^0}} \prod_{i=1}^{|M^c|} (\lambda_{m_i}^c)^{(I_{m_i}^c(\mathbf{k}) x_{k(e')}/\mu_{m_i}^c) - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{\mathcal{N}^0})^n}{\Gamma(\nu^{\mathcal{N}^0}) n!} \Gamma(\nu^{\mathcal{N}^0} + n) \times \prod_{e \in m^{\mathcal{N}^0}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \frac{\Gamma[\nu^{\mathcal{N}^0} + n + I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')}/\mu_{m_i}^e]}{\Gamma(\nu^{\mathcal{N}^0} + n)} \quad (3.112)$$

biçiminde elde edilir. Varyans hesaplaması için gereksinim duyulan

$$\begin{aligned}
& E \left[\exp \left\{ 2 \sum_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \sum_{i=1}^{|M^e|} I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')} \beta_{m_i}^e \right\} \right] \\
&= \delta_{\mathcal{N}O}^{\nu^{\mathcal{N}O}} \prod_{c \in m^{\mathcal{N}O}} \prod_{i=1}^{|M^e|} (\lambda_{m_i}^e)^{(2I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')} / \mu_{m_i}^e) - 1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - \delta_{\mathcal{N}O})^n}{\Gamma(\nu^{\mathcal{N}O}) n!} \Gamma(\nu^{\mathcal{N}O} + n) \quad (3.113) \\
&\quad \times \prod_{e \in m^{\mathcal{N}O}} \prod_{i=1}^{|M^e|} \frac{\Gamma[\nu^{\mathcal{N}O} + n + 2I_{m_i}^e(\mathbf{k}) x_{k(e')} / \mu_{m_i}^e]}{\Gamma(\nu^{\mathcal{N}O} + n)}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. $\mathbf{k} \in K$ gözesine karşılık gelen beklenen göze sıklığının varyansı ise Eş. 3.74, 3.76, 3.111, 3.112 ve 3.113 kullanılarak elde edilir.

İlgili beklenen göze sıklığının dönüşüm sonucundaki beklenen değeri ve varyansı incelendiğinde değişebilirlik varsayımı, bilgi içeren ve içermeyen önsel dağılımlar için Kesim 3.3.2.2.'de yapılan tartışmaların karma LD modeller içinde geçerli olduğu görülür. Bu durumda önsel olarak bağımsızlığa ilişkin bilgi bulunmadığında, karma LD modeller için elde edilen beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımının, önsel bilgi bakımından LD model parametrelerine ilişkin önsel dağılım ile tutarlı olduğu söylenebilir.

4. BAYESÇİ MODEL SEÇİMİ

Bayesci model seçimi için birçok yaklaşım geliştirilmiştir. Ancak bunların çoğu model uzayının tamamı üzerinden çalışır. Boyut artışıyla birlikte model uzayının tamamının ele alınması mümkün olmamaktadır. Bu durumda Green (1995) tarafından önerilmiş olan TSMZMC yöntemi iyi bir yaklaşım olarak görülmektedir (Chen et al., 2000).

Bu bölümde TSMZMC yöntemi ile ilgili genel bilgi verildikten sonra karma LD modellerde model parametreleri üzerinden TSMZMC yönteminin uygulanışı verilmiştir.

4.1. Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi

TSMZMC yönteminin uygulanması için bir TSMZMC algoritmasının oluşturulması ve bir bilgisayar programı üzerinden uygulanması gerekmektedir. Bu nedenle bu kesimde yöntem ile ilgili kısımlarda "TSMZMC yöntemi", yöntemin uygulanması için kullanılacak algoritmanın kastedildiği kısımlarda ise "TSMZMC algoritması" ifadeleri kullanılmıştır.

İlgilenilen model uzayı M olsun. $\{m_t, t \in M\}$ modeline karşılık gelen parametre vektörü β_{m_t} ve $p_t = \text{boyut}(\beta_{m_t})$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda,

$$p(\beta_{m_t} | \mathbf{y}, m_t) \propto p'(\beta_{m_t} | \mathbf{y}, m_t) = l(\beta_{m_t} | \mathbf{y}, m_t) p(\beta_{m_t} | m_t) \quad (4.1)$$

biçimindedir. Eş. 4.1'de $l(\beta_{m_t} | \mathbf{y}, m_t)$ olabirlik fonksiyonu, $p(\beta_{m_t} | m_t)$ model parametrelerinin önsel dağılımı ve $p'(\beta_{m_t} | \mathbf{y}, m_t)$ normalleştirilmemiş sonsal dağılımdır. Bu durumda,

$$p(m_t, \beta_{m_t} | \mathbf{y}) \propto p(m_t) p'(\beta_{m_t} | \mathbf{y}, m_t) \quad (4.2)$$

biçimindedir. TSMZMC yöntemi Eş. 4.2 ile verilmiş olan bileşik sonsal dağılımdan örneklem üretme mantığı üzerine kurulmuş bir yöntemdir (Green, 1995; Chen et al., 2000). TSMZMC yönteminde indirgenemez, periyodik olmayan ve farklı boyutlardaki alt model uzaylarına geçiş yapabilen bir Markov zinciri gerçek limit dağılımına yakınsayacak şekilde üretilir (Chen et al., 2000). Markov zincirinin herhangi bir andaki

durumu $(m_t, \boldsymbol{\beta}_{m_t})$ olsun. Bir hareket ile daha büyük, daha küçük ya da eşit boyutlu bir modele geçiş yapılabilir. Eğer bir hareket $(m', \boldsymbol{\beta}_{m'})$ durumuna gidilmesini öneriyorsa ve $|m'| > |m_t|$ (ileriye doğru hareket) ise boyutu $|m'| - |m_t|$ olan bir \mathbf{u} vektörü bir $q(\mathbf{u})$ öneri dağılımından üretilir ve $\boldsymbol{\beta}_{m'}$, $g(\boldsymbol{\beta}_{m_t}, \mathbf{u})$ 'ya eşitlenir. Burada $g(\cdot)$, $(\boldsymbol{\beta}_{m'}, \mathbf{u}')$ ile $(\boldsymbol{\beta}_{m_t}, \mathbf{u})$ arasında bir boyut eşleme (bijection) fonksiyonudur. Eğer bir hareket $|m'| < |m_t|$ (geriye doğru hareket) olan $(m', \boldsymbol{\beta}_{m'})$ durumuna gidilmesini öneriyorsa $\boldsymbol{\beta}_{m'}$, $(\boldsymbol{\beta}_{m'}, \mathbf{u}') = g^{-1}(\boldsymbol{\beta}_{m_t})$ ters dönüşümü ve \mathbf{u}' 'nin dışarıda bırakılması ile elde edilir. Eğer bir hareket aynı durumda kalınmasını öneriyorsa, model parametrelerinin aldığı değerler bir Gibbs örnekleme adımı ya da MH adımı ile güncellenebilir. Genel TSMZMC algoritması Algoritma 5'te verildiği gibidir (Green, 1995; Dellaportas and Forster, 1999; Chen et al., 2000).

Algoritma 5. Genel TSMZMC Algoritması

A5.1. $(m_t, \boldsymbol{\beta}_{m_t})$ başlangıç noktası belirlenir.

A5.2. $j(m'|m_t)$ olasılığı ile yeni bir m' modeli önerilir.

A5.3. Önceden belirlenmiş bir $q(\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}_{m_t}, m_t, m')$ öneri dağılımından bir \mathbf{u} üretilir.

A5.4. $(\boldsymbol{\beta}_{m'}, \mathbf{u}') = g(\boldsymbol{\beta}_{m_t}, \mathbf{u})$ alınır. $\boldsymbol{\beta}_{m_t}$ ve \mathbf{u} ve \mathbf{u}' 'in boyutları $p_t + \text{boyut}(\mathbf{u}) = p_{t'} + \text{boyut}(\mathbf{u}')$ eşitliğini sağlamalıdır.

A5.5. $(m', \boldsymbol{\beta}_{m'})$ noktasına yapılması önerilen hareket

$$\alpha = \text{enk} \left\{ 1, \frac{p(m')p'(\boldsymbol{\beta}_{m'}|\mathbf{y}, m')j(m_t|m')q(\mathbf{u}'|\boldsymbol{\beta}_{m'}, m', m_t) \left| \frac{\partial g(\boldsymbol{\beta}_{m_t}, \mathbf{u})}{\partial(\boldsymbol{\beta}_{m_t}, \mathbf{u})} \right| \right\} \quad (4.3)$$

olasılığı ile kabul edilir.

TSMZMC yönteminde $m_t = m'_t$ olması durumunda yöntemle ilişkin algoritma MH algoritmasına dönüşür. Yöntemin esnek olmasının nedeni boyut eşleme fonksiyonu sayesinde $\text{boyut}(\mathbf{u}') = 0$ olabilmesidir. Bu durumda iç içe olan iki model arasında hareket edilebilmektedir. Bu da bir modelden daha küçük boyutlu bir modele geçiş, yani geriye doğru hareket yapılabilmesini sağlar. Boyut eşleme fonksiyonu birim dönüşüm olarak alındığında Eş. 4.3 ile verilmiş olan kabul olasılığı ileriye doğru hareket için,

$$\alpha = \text{enk} \left\{ 1, \frac{p'(\boldsymbol{\beta}_{m'}, m'|\mathbf{y})j(m_t|m')}{p'(\boldsymbol{\beta}_{m_t}, m_t|\mathbf{y})j(m'|m_t)q(\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}_{m_t}, m_t, m')} \right\} \quad (4.4)$$

biçiminde ve geriye doğru hareket için,

$$\alpha = \text{enk} \left\{ 1, \frac{p'(\boldsymbol{\beta}_{m'}, m' | \mathbf{y}) j(m_t | m') q(\mathbf{u} | \boldsymbol{\beta}_{m_t \setminus m'}, m_t, m')}{p'(\boldsymbol{\beta}_{m_t}, m_t | \mathbf{y}) j(m' | m_t)} \right\} \quad (4.5)$$

biçimindedir. Eş. 4.3'teki $p(m_t)$ ve $p(m')$, sırasıyla m_t ve m' modellerine karşılık gelen önsel model olasılıklarıdır. $j(m' | m_t)$, m' modelinden m_t modeline geçiş olasılığı ve $j(m_t | m')$, m_t modelinden m' modeline geçiş olasılığıdır. $q(\mathbf{u} | \boldsymbol{\beta}_{m_t \setminus m'}, m_t, m')$ öneri dağılımı TSMZMC algoritmasını optimize edecek biçimde seçilmelidir.

TSMZMC algoritması ile n büyüklüğünde bir MZMC örnekleme üretildikten sonra m_t modeli için sonsal model olasılığı $p(m_t | \mathbf{y})$,

$$\hat{p}(m_t | \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta(m_t) \quad (4.6)$$

ile kestirilir. Eş. 4.6'da $\Delta(m_t)$, m_t modelinden geçilmiş ise 1, geçilmemiş ise 0 değerini alan gösterge fonksiyonudur (Chen et al., 2000).

4.2. Karma Olumsuzluk Çizelgeleri için Tersinir Sıçramalı Markov Zinciri Monte Carlo Yöntemi

Karma olumsuzluk çizelgelerinde skorların da raslantı değişkeni olduğu durumda model seçimi Iliopoulos et al. (2007) tarafından ele alınmıştır. Iliopoulos et al. (2007) ölçüte dayalı yaklaşımlardan DIC, AIC ve BIC'yi kullanmışlardır.

Bu kesimde Kesim 3.1., 3.3. ve 3.4.'te LD model parametrelerinin Bayesci kestirimine ilişkin verilmiş olan yaklaşımlara dayan TSMZMC yaklaşımlarının geliştirilmesi üzerinde durulmuştur. Bu kesimde verilmiş olan yaklaşımlar Kesim 4.1.'de verilmiş olan genel TSMZMC yöntemini temel almakta ve yöntemin karma çizelgelerde model seçimine yönelik kullanılabilmesi için yapılması gereken düzenlemeleri içermektedir. Model seçimi LD model parametreleri üzerinden yapılacaktır. Bu kesimde nominal, ordinal ve karma çizelgelerin tek tek incelenmemesinin nedeni, nominal ve ordinal çizelgelere ilişkin

çözümlemelerin önceki kesimlerde ayrıntılı bir biçimde verilmesi ve karma çizelgeler için verilecek yaklaşımların bağımsızlık yapısı da dikkate alınarak kolaylıkla ordinal ve nominal çizelgeler için uygulanabilir olmasıdır.

Karma olumsuzluk çizelgeleri için daha önceki kesimlerde parametre kestirimlerine ilişkin verilmiş olan yaklaşımlardan TSMZMC algoritmalarının üretilmesi, skorların da raslantı değişkeni olarak kestirim sürecinde yer alması ve skorların ve diğer LD model parametrelerinin kendi içlerinde ortaya çıkması olası olan bağımlılık yapısının da sonsal kestirime yansıtılabilmesi açısından yararlı ve önemlidir. Böylece skor belirleme problemi de ortadan kalkmaktadır. Bunlara ek olarak, model belirsizliğinin de dikkate alınması gerçek değerlere daha yakın kestirimlerin elde edilmesi açısından önemlidir.

Karma olumsuzluk çizelgelerinde LD model parametreleri üzerinden TSMZMC algoritmasının uygulanması sırasında ilk olarak önsel model olasılıklarının belirlenmesi uygundur. Hem bağımlılık hem de bağımsızlık durumunda tüm önsel model olasılıklarının eşit alınması algortimayı sadeleştirir ve uygulanmasını kolaylaştırır. Ayrıca araştırmacı bu seçim ile önsel olarak hangi modelin en iyi olduğuna ilişkin bir bilgisinin olmadığını çözümlene sürecine yansıtmış olur.

Modeller arasındaki geçiş olasılıkları hem bağımlılık hem de bağımsızlık durumunda aynı yaklaşım ile belirlenebilir. t anında bulunan m_t modelinden hiyerarşi ilkesi uyarınca geçiş yapılabilecek modellerin sayısı b olsun. Araştırmacının m_t modelinden yapılacak geçişe ilişkin önsel bilgisinin olmaması durumunda $j(m'|m_t) = 1/b$ olarak alınabilir. Bunun bir doğal sonucu olarak $j(m_t|m') = 1/b$ olur ve Eş. 4.4 ve 4.5 bir kez daha sadeleşir. Araştırmacının geçiş olasılıklarına ilişkin önsel bilgisinin bulunması durumunda bu bilgi doğrudan $j(\cdot|\cdot)$ 'ye aktarılabilir.

Bağımlılık durumunda karma olumsuzluk çizelgelerinde LD model parametreleri üzerinden TSMZMC algoritmasını uygulamak için Eş. 4.4 ve 4.5'teki $p'(\beta_{m'}, m'|\mathbf{y})$ ve $p'(\beta_{m'}, m'|\mathbf{y})$ bileşik sonsal dağılımları, önsel model olasılıkları için belirli (proper) tekbiçimli önsellerin kullanılması durumunda, Eş. 3.86 (sayfa 63) ile verilmiş olan bileşik sonsal dağılımın ilgili tekbiçimli önseller ile çarpımından elde edilir.

Eş. 4.4'deki $q(\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}_{m_t}, m_t, m')$ öneri dağılımı algoritmasının performansını, model ve parametre uzaylarının kapsanan kısmının büyüklüğünü yakından etkiler. Bu nedenle $q(\mathbf{u}|\boldsymbol{\beta}_{m_t}, m_t, m')$ 'nin uygun seçilmesi önemlidir. Bağımlılık durumunda eklenecek parametrelerin skorları, ana etki parametrelerini, tekdüze ilişki parametrelerini ve satır (sütun) etki parametrelerini içeren kısmına ilişkin öneri dağılımı olarak Kesim 3.3.1.'de Gibbs örnekleme algoritması için önerilmiş olan tam koşullu dağılımlar kullanılabilir. Bunlar sırasıyla 3.34 (sayfa 32), 3.38 (sayfa 34), 3.41 (sayfa 36) ve 3.93 (sayfa 66) eşitlikleri ile verilmiştir.

Bağımsızlık durumunda karma olumsuzluk çizelgelerinde LD model parametreleri üzerinden TSMZMC algoritmasını uygulamak için Eş. 4.4 ve 4.5'teki bileşik sonsal dağılımlar, önsel model olasılıkları için belirli tekbiçimli önsellerin kullanılması durumunda, Eş. 3.87 (sayfa 64) ile verilmiş olan bileşik sonsal dağılımın ilgili tekbiçimli önseller ile çarpımından elde edilir.

Bağımsızlık durumunda eklenecek parametrelerin skorları, ana etki parametrelerini, tekdüze ilişki parametrelerini ve satır (sütun) etki parametrelerini içeren kısmına ilişkin öneri dağılımı olarak sırasıyla Eş. 3.34 (sayfa 32), 3.39 (sayfa 35), 3.42 (sayfa 37) ve 3.97 (sayfa 68) ile verilen tam koşullu dağılımlar kullanılabilir.

TSMZMC algoritmasının işleyişi açısından aynı modelde kalınmasını öneren hareket (yerinde sayma hareketi) ile karşılaşılması durumunda izlenecek yol önemlidir. Uygun tam koşullu dağılımların bulunması durumunda skorlar ve tüm parametreler bir Gibbs örnekleme adımı ile güncellenebilir. Aksi durumda bir MH adımı ile güncelleme yapılır. MH algoritması kullanıldığında yerinde sayma durumunda kullanılacak yeni öneri dağılımlarına ihtiyaç duyulur. Bu öneri dağılımları ise uygulanan tek MH adımının performansını optimize edecek biçimde seçilmelidir. Bağımlılık durumunda Eş. 3.34 (sayfa 32), 3.38 (sayfa 34), 3.41 (sayfa 36) ve 3.93 (sayfa 66), bağımsızlık durumunda ise Eş. 3.34 (sayfa 32), 3.39 (sayfa 35), 3.42 (sayfa 37) ve 3.97 (sayfa 68) ile verilen tam koşullu dağılımlar öneri dağılımı olarak kullanılabilir ya da bu dağılımlar tam koşullu dağılım olarak alınarak Gibbs örnekleme algoritması kullanılabilir.

5. SAYISAL ÖRNEKLER

Bu kesimde, çalışmada verilmiş olan kuramsal çıkarsamaları açıklamak amacıyla sayısal örnekler üzerinde durulmuştur. İlk örnekte sanayi işçilerinin nefes alma testlerine ilişkin sonuçlardan oluşturulmuş bir ordinal olumsuzluk çizelgesi ele alınmıştır. İkinci örnek literatürde sıklıkla kullanılan ağrı şiddeti verisinin çözümlemesini içermektedir. Üçüncü örnekte Türkiye İstatistik Kurumu'nun (TÜİK) 2006 Yaşam Memnuniyeti Araştırması'nda elde edilen mutluluk düzeyi-eğitim düzeyi çaprazlaması ele alınmıştır. Önerilen TSMZMC yaklaşımı kullanılarak ağrı şiddeti veri kümesi için model seçimi ve parametre kestirimi yapılmıştır. Ele alınan örneklerin tümünde bağımlılık ve bağımsızlık durumları ayrı ayrı incelenmiştir.

Sayısal örneklerde temel amaç, önsel bilginin uygun biçimde ifade edilip edilmediğinin incelenmesi ve yaklaşımların uygulanışının açıklanmasıdır. Bu nedenle verilen parametre kestirimlerine ek olarak standart sapma kestirimleri ve Bayesci hoşgörü aralıkları verilmemiştir.

Örneklerin çözümünde her örnek için özel olarak hazırlanmış bilgisayar programları kullanılmıştır. Programlar Delphi 6 yazılım geliştirme ortamında geliştirilmiştir. Tüm örneklerde rasgele sayı üretimi için Marsaglia and Zaman (1987) tarafından önerilmiş olan rasgele sayı üretici kullanılmıştır. Bu üreticinin periyodunun 2^{144} olduğu ve rasgele sayı üreticileri için yapılan tüm testlerden olumlu sonuç aldığı belirtilmektedir (James, 1990). Üreteç için kullanılan Delphi kodları ise Zhuchkov (2007) tarafından hazırlanmıştır.

5.1. Örnek 1 : Sanayi İşçilerinin Nefes Alma Testleri

Ele alınan veri kümesi A.B.D. Houston'daki sanayi işçilerinin nefes alma test sonuçları ile ilgilidir. Ordinal değişkenler "Yaş", "Sigara içme durumu" (SİD) ve "Nefes alma test sonucu" (NTS) biçimindedir. Yaş "40 yaş altı" ve "40 - 59 yaş arası" düzeylerine; SİD, "Hiç kullanmamış", "Bırakmış" ve "Devam ediyor" düzeylerine; NTS ise "Normal", "Sınırdan" ve "Anormal" düzeylerine sahiptir. Veri kümesi Forthofer and Lehnen (1981) tarafından yayımlanmıştır. Veri kümesinde 40 - 59 yaş grubunda olup hiç

sigara kullanmamış ve test sonucu anormal çıkanlara ilişkin gözede örneklem sıfırı bulunmaktadır. Çözümleme için bu göze 0.1 konulmuştur.

Bu veri kümesi için $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, $K_1 = \{1, 2\}$, $K_2 = K_3 = \{1, 2, 3\}$, $|K_1| = 2$, $|K_2| = |K_3| = 3$ ve $\wp(S) = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}, \{S_1, S_2, S_3\}\}$ biçimindedir. İlgilenilen model $m = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$ olsun. Bu durumda $m = m^* \cup m^{\emptyset}$ ve $m^* = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}\}$ ve $c_1 = \{\emptyset\}$, $c_2 = \{S_1\}$, $c_3 = \{S_2\}$, $c_4 = \{S_3\}$ biçiminde, $m^{\emptyset} = \{\{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$ ve $d_1 = \{S_1, S_3\}$, $d_2 = \{S_2, S_3\}$ biçimindedir. $i = 1, 2$ için $M^{c_i} = \{m_1\} = \{(1)\}$ ve $i = 3, 4$ için $M^{c_i} = \{m_1, m_2\} = \{(1), (2)\}$ biçimindedir. Bu tanımlamalar altında LD modelin parametre vektörü $(\beta_m)^T = (\beta^{c_1}, (\beta^{c_2})^T, (\beta^{c_3})^T, (\beta^{c_4})^T, \beta^{d_1}, \beta^{d_2})$ biçimindedir. Burada $\beta^{c_1} = \beta_{\emptyset}$ genel ortalama terimidir. β^{c_2}, β^{c_3} ve β^{c_4} sırasıyla yaş, SİD ve NTS'nin ana etkilerini, β^{d_1} ve β^{d_2} ise sırasıyla yaş ile NTS ve yaş ile SİD arasındaki tekdüze ilişkileri ifade etmektedir. Ayrıca $d'_1 = \{S_1\}$ için $x_{d'_1}^1, x_{d'_1}^2$, $d'_2 = \{S_2\}$ için $x_{d'_2}^1, x_{d'_2}^2, x_{d'_2}^3$ ve $d'_3 = \{S_3\}$ için $x_{d'_3}^1, x_{d'_3}^2, x_{d'_3}^3$ skorları tanımlanır.

5.1.1. Örnek 1: Bağımlılık durumu

Model parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduğu önsel bilgisinin bulunmadığı durumda önsel dağılımın belirlenmesi için Kesim 3.3.1.'de verilmiş olan yaklaşım kullanılmıştır.

Skorların büyüklüklerinin -1, 0, 1 biçiminde sıralanacağı önsel bilgisi bulunsun. Ordinal değişkenlerin ana etkilerine ilişkin önsel bilgi son düzeylerin etkisinin yüksek olacağı biçiminde olsun ve bu bilgi 0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5, -0.5 değerleri ile çözümleme sürecine yansıtılsın. İlişki parametrelerine ilişkin önsel bilgi, SİD'nin etkisi sabit tutulduğunda 40-59 yaş grubunda olmanın 40 yaş grubunda olmaya göre test sonuçlarını bir derece kötüleştirme oddsunun 1.5 kat olduğu ve yaşın etkisi sabit tutulduğunda sigara içme durumundaki bir derece ilerlemenin test sonuçlarını bir derece kötüleştirme oddsunun 4.5 kat olduğu biçiminde olsun. Yaş ve SİD değişkenine ilişkin skorlar arasında artı yönlü orta derecede, NTS değişkeninin düzeyleri arasında ise güçlü ve artı yönlü

ilişki olduğu, Yaş, SİD ve NTS değişkenlerine karşılık gelen skor grupları arasında ise çok zayıf artı yönlü ilişki olduğu önsel bilgisini bulunsun.

Parametreler arasındaki ilişkilere ilişkin önsel bilginin ilgili önsel dağılımlara yansıtılması için iki yol vardır. Bunlardan birincisi Ek 8'de verilen algoritmanın kullanılmasıdır. İkinci yol ise Kesim 3.3.1.'de tartışıldığı gibi önsel bilgiyi doğrudan δ 'yı oluşturan elemanlara aktarmaktır.

Örneğin, μ^S , μ^* ve μ^O vektörlerinin tüm elemanlarının 5 olduğu durumda yaş değişkenine ilişkin bilgiyi yansıtmak için EK 8'de verilen algoritma kullanılmış ve $\rho_{12} = 0.75$ 'e karşılık $\rho_{12}^S = 0.53$ bulunmuştur. Bu durumda $g_{12}^S = 1.5$ olarak alınmıştır. SİD değişkenine ilişkin bilgiyi yansıtmak için Ek 8'de verilen algoritma kullanılmış ve

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0.703 & 0.703 \\ 0.703 & 1 & 0.703 \\ 0.703 & 0.703 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisine karşılık

$$\rho^S = \begin{pmatrix} 1 & 0.460 & 0.703 \\ 0.460 & 1 & 0.460 \\ 0.460 & 0.703 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilmiştir. Bu durumda $g_{34}^S, g_{35}^S, g_{45}^S$ için 1.4 olarak alınmıştır. NTS değişkenine ilişkin bilgiyi yansıtmak için EK 8'de verilen algoritma kullanılmış ve

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0.768 & 0.768 \\ 0.768 & 1 & 0.768 \\ 0.768 & 0.768 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisine karşılık

$$\rho^S = \begin{pmatrix} 1 & 0.728 & 0.967 \\ 0.728 & 1 & 0.650 \\ 0.967 & 0.650 & 1 \end{pmatrix}$$

elde edilmiştir. Bu durumda $g_{67}^S, g_{68}^S, g_{78}^S$ için 1.536 olarak alınmıştır. Geri kalan g_{ts}^S değerleri Kesim 3.3.1.'deki tartışma dikkate alınarak 0.1 olarak belirlenmiştir. Ana etki parametreleri arasında düşük dereceden ilişkiler bulunacağı bilgisini yansıtmak için tüm g_{ts}^* değerleri 0.9 olarak alınmıştır. İki ilişki parametresi arasındaki ilişki katsayısının küçük olacağı bilgisini yansıtmak için $g_{12}^O = 0.8$ alınmıştır. $\nu' = 1.4262$ olarak alınmış ve $F(\nu') = -0.035$ olarak elde edilmiştir. Bu ayarlamalarla $\delta^S = 0.5888$, $\delta^* = 0.3616$ ve $\delta^O = 0.8528$ biçiminde elde edilmiştir.

Önsel bilgiye olan güveni yansıtmak için μ^S, μ^* ve μ^O vektörleri kullanılır. Bu vektörlerin elemanlarının doğru biçimde belirlenmesi çözümlemenin en önemli adımlarından biridir. Parametrelere ilişkin marjinal varyansın büyük olması önsel bilginin çözümlene sonuçları üzerindeki etkisini küçültürken, küçük olması ise bu etkiyi büyütür. Büyük ya da küçük olmanın belirli bir ölçüsü yoktur. Bu nedenle yukarıda verilen önsel bilgi kullanılarak çeşitli μ' değerleri için çözümlene yapılmış ve sonuçların değerlendirilmesiyle uygun μ' değerleri belirlenmiştir. Aynı zamanda önerilmiş olan yaklaşımlarda çeşitli μ' değerleri için elde edilen sonuçlar incelenmiştir. Büyük μ' değerleri için önsel marjinal varyanslar küçülmekte ve tersi durumda da büyümektedir.

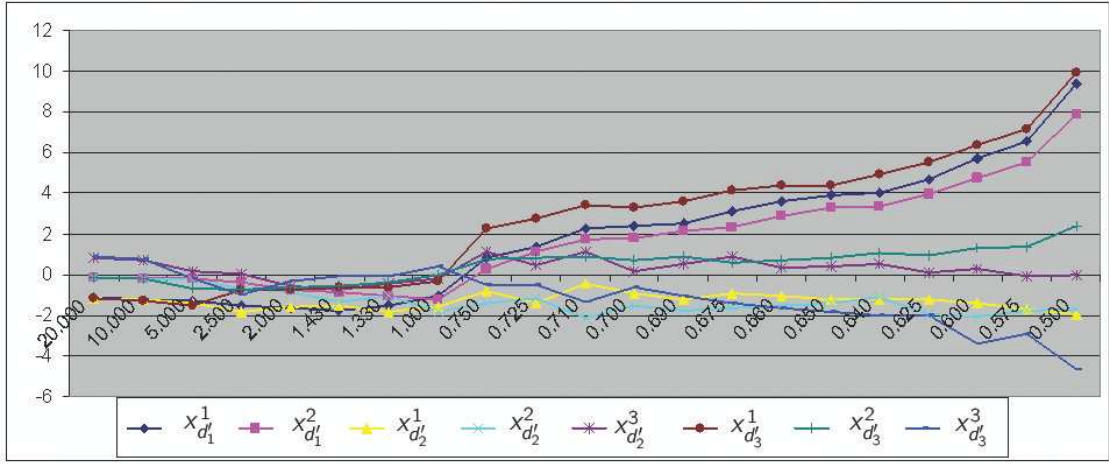
Bu düzenlemelerle Gibbs örnekleme algoritması Kesim 3.3.1.'de verilmiş olan tam koşullu dağılımlar kullanılarak uygulanmıştır. Algoritma, yakınsamanın daha iyi olması ve parametre uzayının kapsanan kısmının en iyi düzeye çıkarılması için 10 paralel zincir ile uygulanmıştır. Her zincir 2200 adım çalıştırılmıştır. İlk 200 adım başlangıç değerlerinin etkisini arıtmak amacıyla dışarıda bırakılmış ve otokorelasyonun etkisini azaltmak amacıyla her 20 adımda bir kayıt yapılmıştır. Yakınsamanın sağlanıp sağlanmadığını ve parametre uzayının kapsanan kısmının yeterli olup olmadığını araştırmak için Gelman et al. (2003) tarafından verilmiş olan gizil ölçek indirgeme (potential scale reduction) ölçütü, \hat{R} kullanılmıştır. Ölçütün hesaplanması EK 2'de verilmiştir.

Sözü edilen inceleme için μ^S , μ^* ve μ^O vektörlerinin tüm elemanları eşit alınmıştır. Kullanılan μ değerleri 20, 10, 5, 2.5, 2, 1.43, 1.33, 1, 0.75, 0.725, 0.71, 0.70, 0.69, 0.675, 0.66, 0.65, 0.64, 0.625, 0.6 ve 0.575'tir. Bu değerlere karşılık her skor, ana etki ve ilişki parametresinin sonsal kestirimlerinin çizimleri oluşturulmuştur. Skorlar, ana etki parametreleri ve ilişki parametreleri için elde edilen çizimler sırasıyla Şekil 5.1.(sayfa 88), Şekil 5.2. (sayfa 88) ve Şekil 5.3. (sayfa 88) ile verilmiştir.

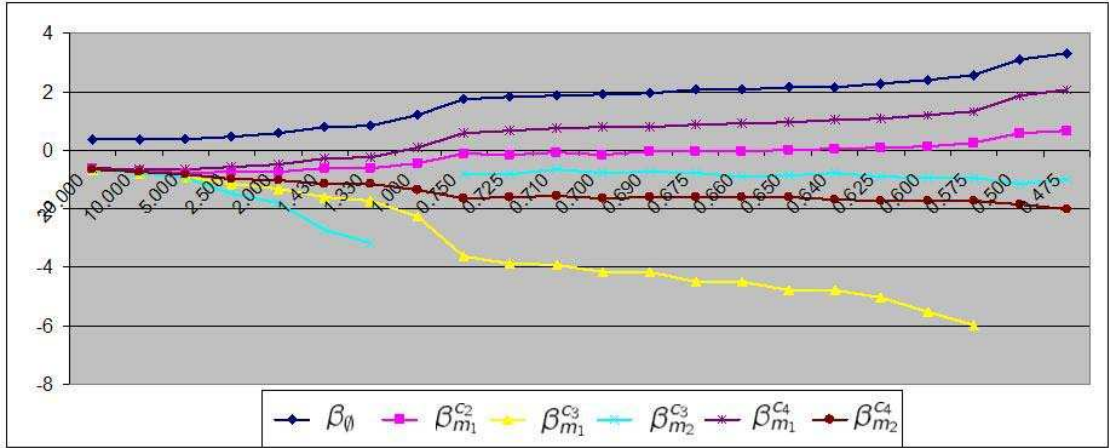
Şekil 5.1., Şekil 5.2. ve Şekil 5.3. incelendiğinde tüm şekillerde parametrelerin sonsal kestirimlerine ilişkin çizgilerin bir noktaya kadar paralele yakın olduğu, bu noktadan sonra çizimlerde sıçramalar olduğu, sonra başka bir noktaya kadar yine çizgilerin paralele yakın olduğu ve daha sonrada yeniden sıçramalar olduğu görülmektedir. Şekillerde ilk paralel gidişin olduğu kısımda μ 'nün görece büyük değerlerine karşılık gelen sonsal kestirimler çizilmiş olduğundan, bu kesimdeki değerler önsel bilgiye olan güven yüksek olduğunda elde edilmesi beklenen değerlerdir. İkinci paralel gidişin olduğu durumda ise μ 'nün küçük değerlerine karşılık gelen sonsal kestirimler yer almaktadır. Bu durumda önsel bilgiye olan güven düşük olduğundan sonsal kestirimler örneklem bilgisinin etkisi altındadır. Skorlar, ana etki ve ilişki parametrelerinin tümü için μ 'nün 1'den büyük olduğu değerlerde bilgi içeren önsel dağılım tanımlanacağı söylenebilir. Tüm skorlar için bilgi içermeyen bir önsel ise μ 'nün 0.75 ile 0.65 arasındaki değerleri için tanımlanabilmektedir. Tüm ana etki parametreleri için bilgi içermeyen bir önsel dağılım μ 'nün 0.75 ile 0.50 arasındaki değerleri için elde edilmektedir. İlişki parametreleri için ise μ 'nün 0.71 ile 0.625 arasındaki değerleri için bilgi içermeyen önsel dağılım elde edilmektedir. 0.5'ten küçük değerler önsel dağılımın belirlenmesi sırasında kullanılmamalıdır. Bu değerler önsel marjinal beklenen değerlerin aşırı büyümesine neden olmakta ve tam koşullu dağılımlardan sağlıklı rasgele sayı üretilememektedir. Bu örnek üzerinden yapılan tartışmalar Kesim 3.3.1.'deki kuramsal tartışmaları destekler niteliktedir.

Sonsal kestirimlerin ve \hat{R} değerlerinin sayısal olarak görülmesi için μ 'nün 20, 0.67 ve 0.47 değerleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri Çizelge 5.1. (sayfa 89)'de verilmiştir.

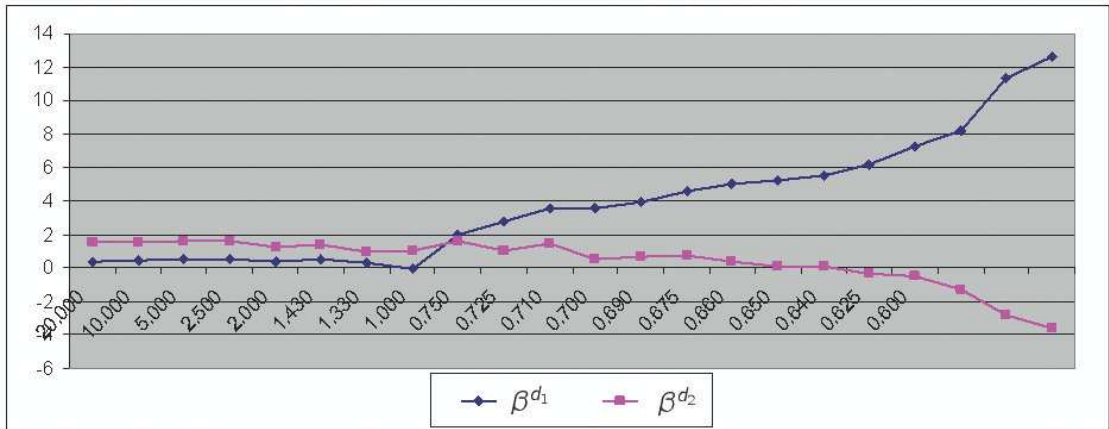
Çizelge 5.1. incelendiğinde tüm \hat{R} değerleri 1'e yakın ve 1.2'den küçük olduğundan



Şekil 5.1. Bağımlılık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.2. Bağımlılık durumunda ana etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.3. Bağımlılık durumunda ilişki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.

Çizelge 5.1. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

Parametre	$\mu' = 20$		$\mu' = 0.67$		$\mu' = 0.47$	
	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}
$x_{d_1}^1$	-1.1255	1.0141	3.1020	1.0084	10.5008	1.0089
$x_{d_1}^2$	-0.1267	1.0114	2.3336	1.0083	8.9999	1.0112
$x_{d_2}^1$	-1.1593	1.0173	-0.9150	1.0162	-1.6786	1.0118
$x_{d_2}^2$	-0.1299	1.0185	-1.6384	1.0106	-1.8424	1.0105
$x_{d_2}^3$	0.8401	1.0197	0.9063	1.0083	-0.1474	1.0060
$x_{d_3}^1$	-1.1455	1.0130	4.1625	1.0097	11.1589	1.0118
$x_{d_3}^2$	-0.1326	1.0181	0.6015	1.0085	2.9539	1.0084
$x_{d_3}^3$	0.8607	1.0063	-1.4250	1.0142	-5.5762	1.0095
β_{\emptyset}	0.3864	1.0108	2.0417	1.0130	3.2982	1.0147
$\beta_{m_1}^{c_2}$	-0.6364	1.0106	-0.0519	1.0085	0.6791	1.0208
$\beta_{m_1}^{c_3}$	-0.6602	1.0109	-4.4755	1.0103	-11.2008	1.0079
$\beta_{m_2}^{c_3}$	-0.6600	1.0069	-0.7739	1.0099	-1.0073	1.0093
$\beta_{m_1}^{c_4}$	-0.6135	1.0057	0.8585	1.0138	2.0538	1.0073
$\beta_{m_2}^{c_4}$	-0.6629	1.0079	-1.6158	1.0079	-2.0055	1.0181
β^{d_1}	0.4034	1.0051	4.5441	1.0118	12.6100	1.0107
β^{d_2}	1.5059	1.0146	0.7181	1.0162	-3.6114	1.0099

tüm parametreler için yakınsamanın sağlandığı ve parametre uzayının kapsanan kısmının yeterli olduğu söylenebilir. Bu durumda, üretilmiş olan Gibbs örneklemi sonsal kestirimler için kullanılabilir. $\mu' = 20$ için elde edilen sonsal kestirimler önsel bilgi ile karşılaştırıldığında sonsal kestirimlerin büyük ölçüde önsel ortalamalara yakın olduğu ve önsel bilginin örneklem bilgisini bastırdığı görülmektedir. $\mu' = 0.47$ için sonsal kestirimlerin birbirine yaklaştığı görülmektedir. Bu durum ilgili tam koşullu dağılımlardan sağlıklı rasgele sayıların üretilmemesinden kaynaklanmaktadır. $\mu' = 0.67$ için ise örneklem bilgisinin önsel bilgiyi bastırdığı, bilgi içermeyen çözümlere sonuçları elde edildiği düşünülmektedir.

Bu sonuçlara göre klasik çözümlemede skorlara doğrudan sıra numaralarının atanmasının uygun bir yaklaşım olmadığı söylenebilir. Çünkü örneklemin skorlara ilişkin içerdiği bilgi sıra numaralarından çok farklıdır. Birinci ve üçüncü değişkene ait olan skorların sonsal kestirimleri artan değil azalan sıradadır. Buradan, örneklemin skorlara ilişkin içerdiği bilginin ortaya çıkarılmasının yararı görülmektedir. Ana etki parametrelerinin sonsal kestirimleri incelendiğinde yaşın birinci düzeyinin, sigara içme durumu değişkeninin ilk

iki düzeyinin ve nefes alma test sonucu değişkeninin ikinci düzeyinin sonuçlar üzerinde eksi yönlü etkide bulunduğu, diğer düzeylerin ise artı yönlü etkide bulunduğu söylenebilir.

Klasik kestirimde model parametrelerinin kestirimleri ve model denklemi kullanılarak beklenen göze sıklıklarının, göze olasılıklarının ya da çeşitli odds oranlarının kestirimi yapılabilir. Ancak Bayesci yaklaşımlarda böyle bir işlemin yapılması ile tutarlı kestirimlerin elde edileceği kesin değildir. Bayesci kestirimde ulaşılan sonsal bilginin yapılan dönüşüm altında tutarlı olması düşük olasılıklı bir durumdur. Böyle bir kullanımdan önce sonsal tutarlılık uygun yollar ile incelenmelidir. Bu duruma bir örnek olarak, koşullu odds oranları, model parametreleri ve kestirilen skorlar kullanılarak elde edilmiştir. Skorlar eşit aralıklı olduğunda $e^{4.5441} = 94.08$ ve $e^{0.7181} = 2.05$ 'tir. Buradan, sigara içme durumunun etkisi sabit tutulduğunda 40-59 yaş grubunda olmanın 40 yaş grubunda olmaya göre test sonuçlarını bir derece kötüleştirme oddsunun 94 kat olduğu ve yaşın etkisi sabit tutulduğunda sigara içme durumundaki bir derece ilerlemenin test sonuçlarını bir derece kötüleştirme oddsunun 2 kat olduğu söylenebilir. Kestirilen skor değerleri kullanıldığında, $\exp\{4.544(3.102 - 2.334)(4.163 - 0.602)\} = 2.5 \cdot 10^5$ ve $\exp\{4.544(3.102 - 2.334)(0.602 + 1.425)\} = 1.2 \cdot 10^3$ elde edilir. Buradan, sigara içme durumunun etkisi sabit tutulduğunda 40-59 yaş grubunda olmanın, 40 yaş grubunda olmaya göre test sonuçlarını "normal" düzeyinden "sınırdan" düzeyine götürme oddsunun $2.5 \cdot 10^5$ kat ve test sonuçlarını "sınırdan" düzeyinden "anormal" düzeyine götürme oddsunun $1.2 \cdot 10^3$ olduğu söylenebilir. $\exp\{0.718(-0.915+1.638)(4.163-0.602)\} = 6.4$, $\exp\{0.718(-0.915+1.638)(0.602+1.425)\} = 2.9$, $\exp\{0.718(-1.638 - 0.9063)(4.163 - 0.602)\} = 0.002$, ve $\exp\{0.718(-1.638 - 0.9063)(0.602 + 1.425)\} = 0.03$ elde edilir. Buradan, yaşın etkisi sabit tutulduğunda, sigara içme durumunun "hiç kullanmamış" düzeyinden "bırakmış" düzeyine geçmesinin, test sonuçlarını "normal" düzeyinden "sınırdan" düzeyine götürme oddsunun 6.4 kat ve test sonuçlarını "sınırdan" düzeyinden "anormal" düzeyine götürme oddsunun 2.9 kat olduğu; sigara içme durumunun "bırakmış" düzeyinden "devam ediyor" düzeyine geçmesinin, test sonuçlarını "normal" düzeyinden "sınırdan" düzeyine götürme oddsunun 0.03 kat ve test sonuçlarını "sınırdan" düzeyinden "anormal" düzeyine götürme oddsunun 0.002 kat olduğu söylenebilir. Elde edilen çok büyük odds oranı kestirimleri ve birden büyük çıkması beklenen kestirimlerin sıfıra yakın çıkması

söz edilen tutarsızlığa birer örnektir. Odds oranı kestirimi yapılmak istendiğinde odds oranlarının olabilirlik fonksiyonu, uygun önsel dağılım ve ilgili sonsal dağılım bulunarak bu sonsal dağılım üzerinden çıkarsama yapılmalıdır.

Bilgi içeren bir önsel belirlendiğinde sonsal kestirimlerin önsel bilgiye yakın çıkması beklenir. Bilgi içermeyen bir önsel ile çalışıldığında ise sonsal kestirimlerin örneklem bilgisine yakın çıkması beklenir. Kesim 3.3.1.'de bu durumlara ilişkin yapılan kuramsal tartışmalar ile, önerilen yaklaşım ile bilgi içeren ve bilgi içermeyen çözümlenin uygun biçimde yapıldığı görülmüştü. Bu örnek için de bilgi içeren çözümlene sonucunda önsel bilgiye yakın sonsal kestirimler elde edildiği görülmüştür. Yukarıdaki çözümlenelerde örneklem bilgisi olduğu varsayılan kestirimler sadece şekillerdeki değişimler ile tespit edilmiştir. Bu örnek için örneklem bilgisinin gerçekten elde edilip edilmediğinin anlaşılması ve kuramsal tartışmaya ek olarak bir sayısal örnek vermek için bir çaprazlama kontrol yapılmıştır. Bunun için önsel bilgi değiştirilmiş ve bilgi içermeyen çözümlene yapılmıştır.

Sırasıyla skora, ana etkilere ve ilişki parametrelerine ilişkin ikinci önsel bilgi olarak $(1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3)^T$, $(1, 1.2, 1.2, 1.2, 1.2, 1.2)^T$ ve $(0.2, 1)^T$ vektörleri alınmış ve yukarıda verilen koşullarda çözümlene yapılmıştır. μ 'nün büyük değerleri için önsel bilgiye yakın, küçük değerleri için ise örneklem bilgisine yakın sonsal kestirimler elde edilmiştir. $\mu^S = (1.025)_{8 \times 1}$, $\mu^* = (1.25, 1, 1, 1.25, 1, 2.5)^T$ ve $\mu^O = (1.11, 1.11)^T$ için elde edilen ve örneklem bilgisini yansıttığı düşünülen sonsal kestirimler Çizelge 5.2. ile verilmiştir. Bu μ değerleri yukarıdaki gibi bir duyarlık çözümlenmesi ile elde edilmiştir.

Çizelge 5.2. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

Parametre	$x_{d_1}^1$	$x_{d_1}^2$	$x_{d_2}^1$	$x_{d_2}^2$	$x_{d_2}^3$	$x_{d_3}^1$	$x_{d_3}^2$	$x_{d_3}^3$
Kestirim	4.1857	4.0036	-0.1935	-0.6793	0.9015	4.6026	2.7691	1.3856
\hat{R}	1.0159	1.0244	1.0090	1.0129	1.0154	1.0165	1.0078	1.0100
Parametre	β_0	$\beta_{m_1}^{c_2}$	$\beta_{m_1}^{c_3}$	$\beta_{m_2}^{c_3}$	$\beta_{m_1}^{c_4}$	$\beta_{m_2}^{c_4}$	β^{d_1}	β^{d_2}
Kestirim	2.0940	1.2409	-0.6275	-0.7216	1.7850	-0.2417	4.5620	0.1260
\hat{R}	1.0075	1.0105	1.0113	1.0090	1.0093	1.0134	1.0185	1.0147

Çizelge 5.1. ile Çizelge 5.2. karşılaştırıldığında elde edilen sonsal kestirimlerin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bazı gözelerde görülen farklılığın tüm parametreler için aynı

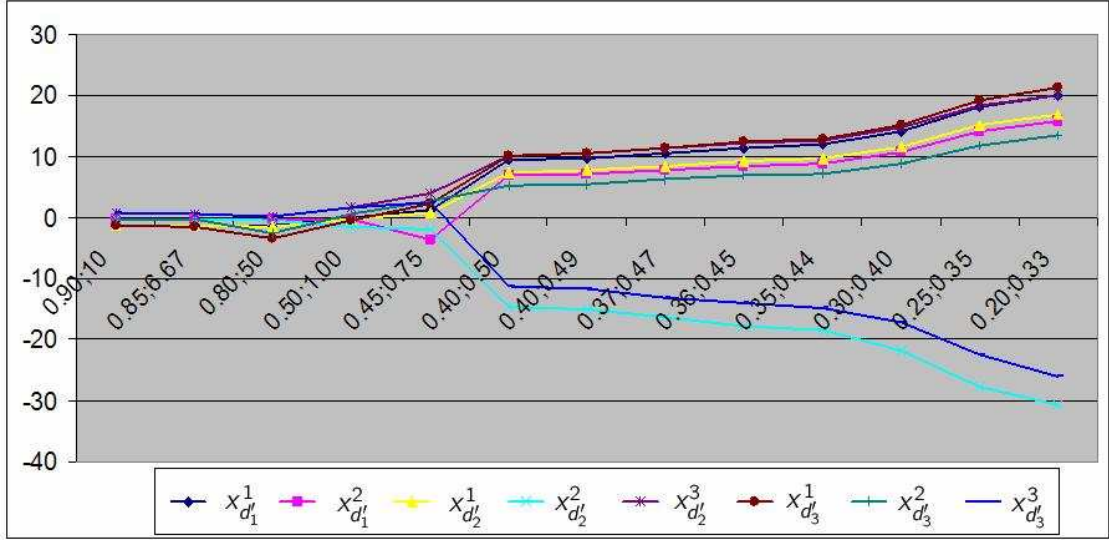
varyansın kullanılmasından ve rasgelelikten ileri geldiği düşünülmektedir. Bu durumda, verilen örneklerde örneklem bilgisinin doğru biçimde ortaya çıkarıldığı ve yapılan kuramsal tartışmanın bu örnekte sayısal olarak da desteklendiği söylenebilir.

5.1.2. Örnek 1: Bağımsızlık durumu

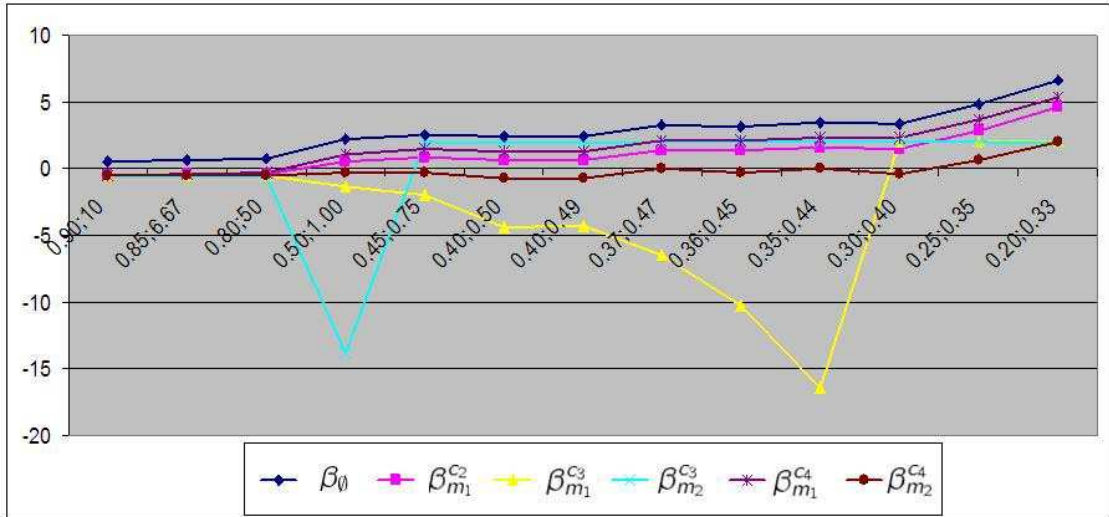
Kesim 5.1.1.'de üzerinde çalışılan örnek veri kümesi ve ele alınan model üzerinden, ana etki ve ilişki parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduğuna ilişkin bir önsel bilginin bulunduğu varsayalım. Skorların önsel dağılımına ilişkin hiper-parametrelerden $\lambda^S, \lambda^*, \lambda^O$ ve ν^S Kesim 5.1.1.'dekinin aynı olsun. Bu koşullar altında $\delta^S = 0.7386$ olarak bulunmuştur.

Önsel dağılımların belirlenmesinde Kesim 3.3.1.'de verilen yaklaşım kullanılmıştır. Kesim 5.1.1.'deki ile aynı amaçla bir duyarlık çözümü yapılmıştır. Bu çözümleme için kullanılan η . ve $\mu^S = (\mu^S)$ ikilileri, 0.90;10, 0.85;6.67, 80;5.00, 0.50;1.00, 0.45;0.75; 0.40;0.50, 0.40;0.49, 0.37;0.47, 0.36;0.45, 0.35;0.44, 0.30;0.40, 0.25;0.35, 0.20;0.33 olarak alınmıştır. Bu önsel düzenlemeler ile Gibbs örnekleme algoritması Kesim 5.1.1.'deki düzenlemeler ile uygulanmıştır. Skorlar, ana etki parametreleri ve ilişki parametreleri için elde edilen çizimler sırasıyla Şekil 5.4.(sayfa 93), Şekil 5.5. (sayfa 93) ve Şekil 5.6. (sayfa 94) ile verilmiştir.

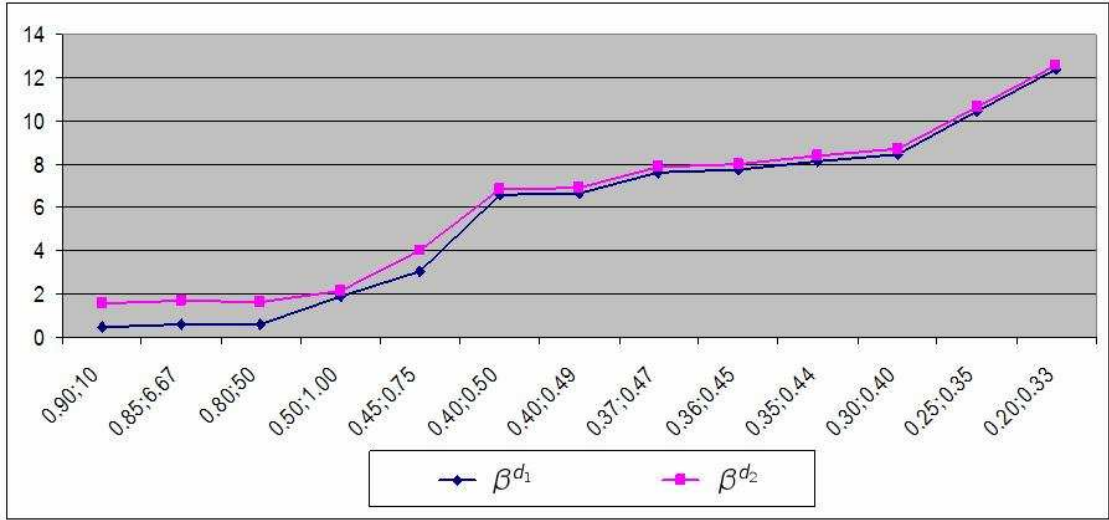
Şekil 5.4., Şekil 5.5. ve Şekil 5.6. incelendiğinde şekillerin bağımlılık durumundakine benzerlik gösterdiği görülmektedir. μ^S 'nin 1'den büyük değerleri için skorların önsel dağılımının bilgi içeren önsel olduğu söylenebilir. μ^S 'nin 0.5 ile 0.44 arasındaki değerleri için ise bilgi içermeyen önsel dağılım elde edildiği söylenebilir. μ^S 'nin 0.44'ten küçük değerleri için ise elde edilen kestirimlerin önsel dağılımın yapısının bozulmasından dolayı güvenilir olmadığı söylenebilir. Ayrıca, bağımsızlığa ilişkin önsel bilgi, çözümlemeyi basitleştirdiğinden elde edilen çizimler daha açıktır. Bu durum özellikle ana etki parametreleri için oluşturulmuş olan Şekil 5.5.'te görülmektedir. Ana etki parametrelerinin tümü için η 'nin 0.8'den büyük değerleri için bilgi içeren önsel dağılım elde edilmektedir. $\beta_{m_1}^{c_2}$ ve $\beta_{m_2}^{c_2}$ dışındaki ana etki parametreleri için η 'nin 0.37 ile 0.30 arasındaki değerleri için bilgi içermeyen önsel dağılım elde edilmektedir.



Şekil 5.4. Bağımsızlık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.5. Bağımsızlık durumunda ana etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.6. Bağımsızlık durumunda ilişki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.

Bilgi içermeyen önsel dağılım $\beta_{m_1}^{c_2}$ için η 'nin 0.30'dan küçük değerlerinde, $\beta_{m_2}^{c_2}$ için η 'nin 0.45'ten küçük değerlerinde elde edilmektedir. Bu iki ana etki parametresi için η 'nin sıfıra çok yakın değerlerinde kestirimler güvenilir duruma gelmektedir. İlişki parametreleri için ise η 'nin 0.80'den ve μ^S 'nin 5'ten büyük değerleri için bilgi içeren önsel dağılım elde edilmektedir. Bilgi içermeyen önsel dağılım ise 0.40;0.49 ile 0.30;0.40 ikilileri arasında elde edilmektedir. 0.30;0.40 ikilisinden daha küçük değerleri içeren ikililer için elde edilen sonsal kestirimlerin güvenilir olduğu söylenemez. Bu durum ile karşılaşılacağı Kesim 3.3.1.'deki kuramsal tartışmada da öngörülmüştür.

0.90;10, 0.36;0.45 ve 0.20;0.33 ikilileri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri Çizelge 5.3. (sayfa 95) ile verilmiştir.

Tüm \hat{R} değerleri 1'e yakın ve 1.2'den küçük olduğundan tüm parametreler için yakınsamanın sağlandığı ve üretilmiş olan Gibbs dizilerinin sonsal çıkarsamalar için kullanılabileceği söylenebilir. Çizelge 5.3.'te 0.90;10 ikilisine karşılık gelen değerler incelendiğinde sonsal kestirimlerin önsel bilgiye yakın olduğu görülmektedir. 0.36;0.45 ikilisi için bilgi içermeyen önsel dağılım belirlenmiş olduğu düşünüldüğünde bu ikiliye karşılık gelen kestirimlerin örneklem bilgisini yansıttığı söylenebilir.

Bu durumda, yaş değişkeninin düzeylerine ilişkin hiyerarşide 40 yaş altı düzeyinin diğer düzeye göre daha yüksekte olduğu, sigara içme durumuna ilişkin hiyerarşide sigara kullan-

Çizelge 5.3. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

Parametre	$\eta. = 0.90; \mu' = 10$		$\eta. = 0.36; \mu' = 0.45$		$\eta. = 0.20; \mu' = 0.33$	
	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}
$x_{d_1}^1$	-1.1940	1.0114	11.4307	1.0353	19.9740	1.0104
$x_{d_1}^2$	-0.1695	1.0060	8.3953	1.0283	15.7795	1.0098
$x_{d_2}^1$	-1.2412	1.0100	9.2713	1.0147	16.9464	1.0150
$x_{d_2}^2$	-0.1800	1.0087	-17.7651	1.0160	-30.5895	1.0111
$x_{d_2}^3$	0.7398	1.0083	12.3211	1.0189	20.0839	1.0076
$x_{d_3}^1$	-1.2806	1.0126	12.4703	1.0275	21.2525	1.0113
$x_{d_3}^2$	-0.2194	1.0121	6.9644	1.0077	13.4115	1.0106
$x_{d_3}^3$	0.7850	1.0107	-13.9478	1.0957	-26.0067	1.0076
β_{\emptyset}	0.5575	1.0114	3.2243	1.0088	6.6043	1.0073
$\beta_{m_1}^{c_2}$	-0.4759	1.0089	1.4200	1.0116	4.6090	1.0111
$\beta_{m_1}^{c_3}$	-0.4967	1.0076	-10.2516	1.0110	2.0350	1.0096
$\beta_{m_2}^{c_3}$	-0.5166	1.0081	2.0259	1.0083	1.9581	1.0084
$\beta_{m_1}^{c_4}$	-0.4538	1.0101	2.1004	1.0161	5.4222	1.0109
$\beta_{m_2}^{c_4}$	-0.4919	1.0088	-0.2625	1.0099	2.0732	1.0128
β^{d_1}	0.4549	1.0119	7.7659	1.0456	12.3629	1.0085
β^{d_2}	1.5536	1.0133	8.0132	1.0150	12.5739	1.0099

maya devam ediyor olmanın en üstte olduğu, nefes alma test sonuçlarına ilişkin düzeylerin hiyerarşisinde ise normalden anormale doğru azalma olduğu söylenebilir. Çizelge 5.3.'te skorlara ilişkin elde edilen sonuçlar Çizelge 5.1.'dekiler ile karşılaştırıldığında skor kestirimlerinin büyüklüklerinde bağımsızlığa ilişkin önsel bilginin etkisi görülmektedir. Yaş, SiD ve NTS değişkenlerine ilişkin skorların sıralamaları her iki durumda da aynıdır. Buradan bu veri kümesi için bağımsızlığa ilişkin önsel bilginin skorların sıralamaları üzerinde etkili olmadığı söylenebilir.

Ana etki parametreleri incelendiğinde 40-59 yaş arasında olmanın, hiç sigara kullanmamış olmanın, sınırda ve anormal nefes alma test sonuçlarına sahip olmanın negatif etkisinin bulunduğu söylenebilir. Ana etki parametrelerinin bağımsızlık durumundaki sonsal kestirimleri bağımlılık durumunda elde edilen sonsal kestirimler ile karşılaştırıldığında $\beta_{m_1}^{c_2}$ dışındaki parametrelerin kestirimlerinin bağımsızlığa ilişkin önsel bilgiden hem yön hem de büyüklük olarak çok etkilenmediği görülmektedir. $\beta_{m_1}^{c_2}$ 'nin sonsal kestirimi ise sadece büyüklük bakımından etkilenmektedir. İlişki parametrelerinin bağımsızlık durumundaki kestirimleri, bağımlılık durumunda elde edilen kestirimler

ile karşılaştırıldığında sonuçların bağımsızlığa ilişkin önsel bilgiden çok etkilenmediği görülmektedir.

Son olarak ikinci önsel bilgi için elde edilecek örneklem bilgisinin tutarlı olup olmadığı incelenmiştir. Bu inceleme için ikinci önsel bilgi olarak Kesim 5.1.1.'de kullanılan önsel bilgi kullanılmıştır. 0.90;20, $\eta;$ μ ikilisi için önsel bilgiye çok yakın sonsal kestirimler elde edilmiştir. 0.35;0.512 ikilisi için ise yukarıda örneklem bilgisi olduğu belirtilen sonsal kestirimlere çok yakın sonsal kestirimler elde edilmiştir. Bu kestirimler Çizelge 5.4. ile verilmiştir.

Çizelge 5.4. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için 0.35;0.512 ikilisine ve ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

Parametre	$x_{d_1}^1$	$x_{d_1}^2$	$x_{d_2}^1$	$x_{d_2}^2$	$x_{d_2}^3$	$x_{d_3}^1$	$x_{d_3}^2$	$x_{d_3}^3$
Kestirim	11.9774	9.8407	9.8802	-18.6381	12.6937	12.7909	8.0280	-7.3003
\hat{R}	1.0063	1.0105	1.0081	1.0088	1.0130	1.0104	1.0071	1.0114
Parametre	β_0	$\beta_{m_1}^{c_2}$	$\beta_{m_1}^{c_3}$	$\beta_{m_2}^{c_3}$	$\beta_{m_1}^{c_4}$	$\beta_{m_2}^{c_4}$	β^{d_1}	β^{d_2}
Kestirim	3.9725	3.3836	-13.6715	-0.5696	4.0600	1.7467	7.9841	7.7777
\hat{R}	1.0112	1.0089	1.0125	1.0102	1.0114	1.0060	1.0064	1.0087

Çizelge 5.4. ile verilen sonsal kestirimler, Çizelge 5.3.'te verilenler ile karşılaştırıldığında elde edilen sonsal kestirimlerin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bazı parametreler için görülen farklılık her parametre için önsel bilgiye olan güvenin ayrı ayrı belirlenmesine karşın örnek olarak yapılan çözümlerinde tüm parametreler için aynı duyarlılığın kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Sonuç olarak bu örnek için bağımsızlık durumunda da Kesim 3.3.1.'de yapılan tartışma ile tutarlı sonuçlar elde edildiği söylenebilir.

5.2. Örnek 2 : Ağrı Şiddeti

İkinci örnek için bir karma çizelge üzerinde durulmuştur. Veri kümesi ameliyat, hastane ve ağrı şiddeti değişkenlerinin çaprazlanmasından oluşmaktadır. Bu çaprazlama kategorik veri çözümlemesinde sık kullanılmaktadır ve Grizzle et al. (1969) tarafından verilmiştir. Bu olumsuzluk çizelgesi için tüm değişkenlerin nominal olduğu varsayımı ile log-doğrusal model çözümlemesi yapıldığında sadece ana etkilerin bulunduğu bağımsızlık modeli bile uygun bulunabilmektedir. Bağımsızlık modelinin yanı sıra çeşitli ilişki modelleri de veri kümesi için uygun çıkmaktadır (Agresti, 1984). Veri kümesindeki

"Ameliyat" ve "Hastane" değişkenleri nominal, "Ağrı Şiddeti" değişkeni ise ordinal olarak alınmıştır. Ameliyat değişkeni "A", "B", "C" ve "D" olmak üzere 4, Hastane değişkeni "1", "2", "3" ve "4" olmak üzere 4 ve Ağrı Şiddeti değişkeni "Yok", "Az" ve "Orta" olmak üzere 3 düzeye sahiptir. Ameliyat değişkeni, bir tür ülser tedavisinde midenin hiç bir parçası alınmadan (A), %25'i (B), %50'si (C) ve %75'i (D) alınarak yapılan tedavileri ifade etmektedir. Ameliyat değişkeninin düzeyleri arasında bir sıralama olmakla birlikte örneğin, askeri rütbelere benzer bir hiyerarşi yoktur. Midenin %50'sinin alınması için ilk önce %25'inin alınması zorunluluğu yoktur. Bu örnekte birden çok nominal değişken ile çalışılmak amaçlandığından ameliyat değişkeni nominal olarak alınmıştır. Çözümleme önsel olarak skorlar dışındaki parametrelerin bağımlı olduğu bilgisinin bulunduğu (Bağımlılık durumu) ve bulunmadığı (Bağımsızlık durumu) durumlar için ayrı ayrı yapılmıştır.

Bu veri kümesi için $S = \{S_1, S_2, S_3\}$, $K_1 = K_2 = \{1, 2, 3, 4\}$, $K_3 = \{1, 2, 3\}$, $|K_1| = |K_2| = 4, |K_3| = 3$ ve $\wp(S) = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}, \{S_1, S_2, S_3\}\}$ biçimindedir. İlgilenilen model $m = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}\}$ olsun. Bu durumda $m = m^* \cup m^{NO}$, $m^* = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}\}$, $c_1 = \{\emptyset\}$, $c_2 = \{S_1\}$, $c_3 = \{S_2\}$, $c_4 = \{S_3\}$, $c_5 = \{S_1, S_2\}$, $m^{NO} = \{S_1, S_3\}$ ve $e_1 = \{S_1, S_3\}$ biçimindedir. $M^{c_1} = \{m_1^{c_1}\} = \{(1)\}$, $i = 2, 3$ olmak üzere $M^{c_i} = \{m_1^{c_i}, m_2^{c_i}, m_3^{c_i}\} = \{(1), (2), (3)\}$, $M^{c_4} = \{m_1^{c_4}, m_2^{c_4}\} = \{(1), (2)\}$, $M^{c_5} = \{m_1^{c_5}, m_2^{c_5}, \dots, m_9^{c_5}\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$ ve $M^{e_1} = \{m_1^{e_1}, m_2^{e_1}, m_3^{e_1}\} = \{(1), (2), (3)\}$ biçimindedir. Bu tanımlamalar altında LD modelin parametre vektörü $(\beta_m)^T = (\beta^{c_1}, \dots, (\beta^{c_5})^T, (\beta^{e_1})^T)$ biçimindedir. Burada β^{c_1} genel ortalama terimidir. β^{c_2}, β^{c_3} ve β^{c_4} sırasıyla ameliyat, hastane ve ağrı şiddeti değişkenlerinin ana etkilerini, β^{c_5} ameliyat ile hastane arasındaki etkileşimi, β^{e_1} ise satır etki parametrelerini ifade etmektedir. Ayrıca $e_1' = \{S_3\}$ için $x_{e_1'}^1, x_{e_1'}^2, x_{e_1'}^3$ skorları tanımlanır.

5.2.1. Örnek 2: Bağımlılık durumu

Parametrelerin ve skorların kendi aralarında bağımsızlığına ilişkin önsel bilginin bulunmadığı durumda skorlar, ana etki, nominal etkileşim, satır etki ve tekdüze ilişki parametreleri için Kesim 3.3.1.'de verilmiş olan yaklaşım kullanılmıştır.

Ağrı şiddeti değişkenine ilişkin skorlar arasında zayıf ve artı yönlü ilişki olduğunu yansıtmak için tüm g_{ts}^S değerleri 0.1 olarak alınmıştır. Ana etki ve etkileşim parametrelerinin hem kendi içinde hem de birbiri arasında zayıf ve artı yönlü ilişki olduğunu yansıtmak için tüm g_{ts}^* değerleri 0.1 olarak alınmıştır. Satır etki parametrelerinin kendi aralarında zayıf ve artı yönlü ilişkili olduğunu yansıtmak için tüm g_{ts}^{NO} değerleri 0.1 olarak alınmıştır. Bu değerlerin belirlenmesinde Kesim 3.3.1.'deki tartışma dikkate alınmıştır. $\nu' = 1.4262$ olarak alınmıştır. Bu değere karşılık gelen $F(\nu') = -0.0349$ ve $F^{[1]}(\nu') = 1.0009$ 'dur. Bu düzenlemeler ile $\delta^S = 0.8303$, $\delta^* = 0.7496$ ve $\delta^{NO} = 0.4254$ olarak elde edilmiştir. Skorların büyüklüklerinin 1, 2, 3 biçiminde sıralanacağı, ameliyat değişkeninin ilk üç düzeyinin orta derecede ve artı yönlü etkiye sahip olduğu, hastane değişkeninin ilk üç düzeyinin yüksek derecede artı yönlü etkiye sahip olduğu, ağrı şiddeti değişkeninin düzeylerinin artan büyüklükte etkiye sahip olduğu ve ameliyat hastane etkileşiminin tüm düzeylerinin birbirine yakın etkiye sahip olduğu önsel bilgisi bulunsun ve bu bilgi 0.5, 1, 1, 1, 3, 3, 3, -1.5, 0.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5 değerleri ile ifade edilsin. Satır etki parametrelerine ilişkin önsel bilgi bu parametrelerin kullanılması ile elde edilecek koşullu odds oranından yararlanılarak ifade edilebilir. Ameliyatın birinci düzeyinin ikinci düzeyine göre ağrı şiddetinde bir düzeylik artış yaratma oddsu 2 kat, ikinci düzeyin üçüncü düzeye göre ağrı şiddetinde bir düzeylik artış yaratma oddsu 4 kat olsun. Bu durumda $\beta_{(3)}^{e_1} - \beta_{(2)}^{e_1} = 1.386$ ve $\beta_{(2)}^{e_1} - \beta_{(1)}^{e_1} = 0.693$ olarak bulunur. $\beta_{(3)}^{e_1}$ ya da $\beta_{(1)}^{e_1}$ bir sabite eşitlenerek diğer satır etki parametreleri için önsel bilgi ifade edilebilir. $\beta_{(1)}^{e_1}$ 'in 0.5 olduğunu belirten bir önsel bilgi bulunsun. Bu durumda $\beta_{(2)}^{e_1}$ ve $\beta_{(3)}^{e_1}$ için önsel bilgi sırasıyla 1.193 ve 2.579 olarak elde edilir.

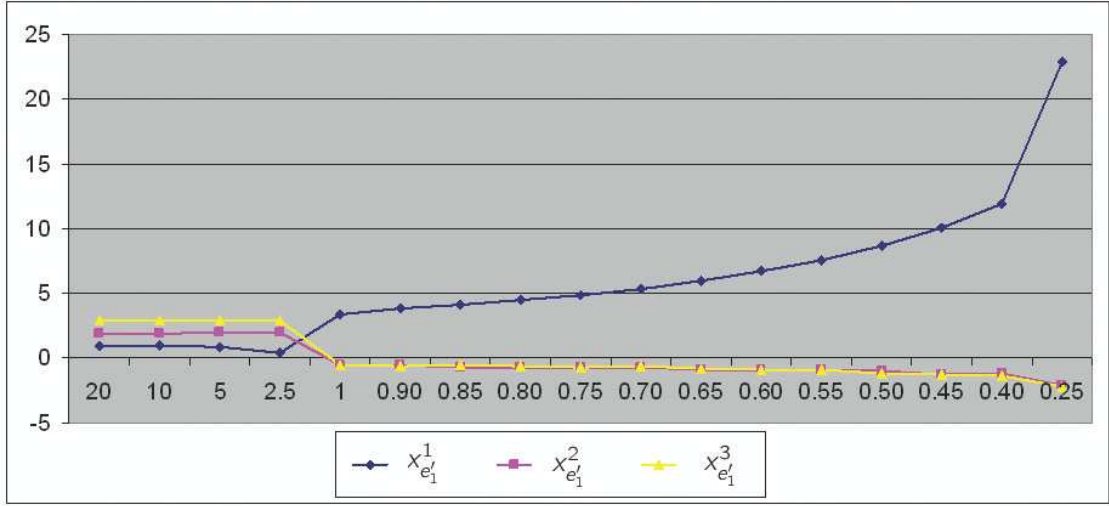
Bu düzenlemeler ile Gibbs örnekleme algoritması Kesim 3.3.1. ve Kesim 3.4.1.'de verilmiş olan tam koşullu dağılımlar kullanılarak, birinci örnek ile aynı koşullarda çalıştırılmıştır. Birinci örnekte yapılan inceleme ile aynı amaçla μ' , 20, 10, 5, 2.5, 1, 0.90, 0.85, 0.80, 0.75, 0.70, 0.65, 0.60, 0.55, 0.50, 0.45, 0.40 ve 0.25 olarak alınmış

ve her μ değeri için sonsal kestirimler elde edilmiştir. Bu değerlere karşılık her skor, ana etki, nominal etkileşim ve satır etki parametresinin sonsal kestirimlerinin çizimleri oluşturulmuştur. Skorlar, ana etki, nominal etkileşim, satır etki parametreleri için elde edilen çizimler sırasıyla Şekil 5.7. (sayfa 100), Şekil 5.8. (sayfa 100) ve Şekil 5.9. (sayfa 101) ile verilmiştir.

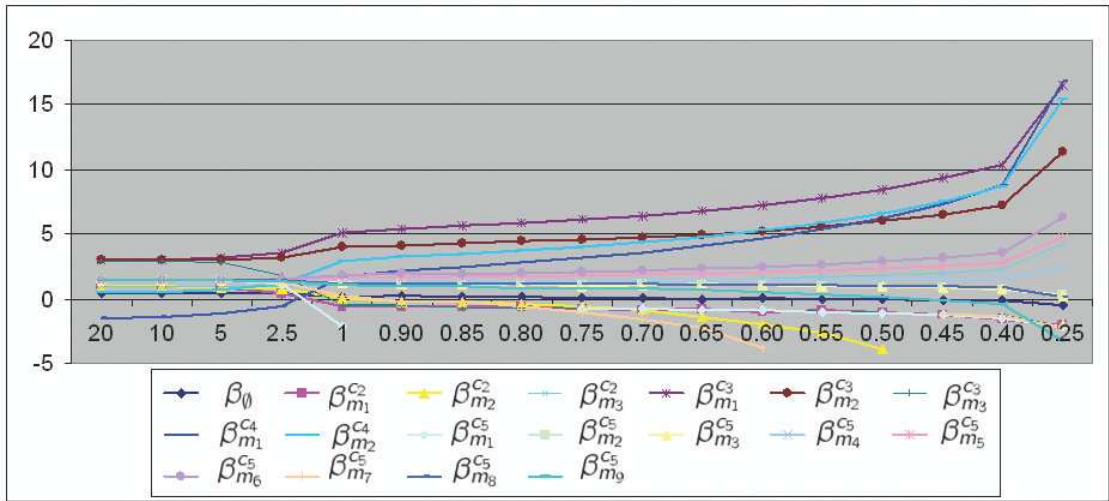
Şekil 5.7., Şekil 5.8. ve Şekil 5.9. incelendiğinde sonsal kestirimlerin birbirine paralele yakın olduğu iki kesim görülmektedir. Skorlar, ana etki, nominal etkileşim ve satır etki parametreleri için μ 'nün 2.5'ten küçük değerlerinin bilgi içeren önsel dağılım verdiği görülmektedir. 1 ile 0.70 arasındaki değerler için ise skorlar, ana etki, nominal etkileşim ve satır etki parametreleri için bilgi içermeyen önsel dağılımlar elde edildiği söylenebilir. μ 'nün 0.35'ten küçük değerleri için elde edilen sonsal kestirimler tam koşullu dağılımların yapısının bozulması nedeniyle çok büyükmektedir.

μ 'nün 20, 0.75 ve 0.3 değerleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri Çizelge 5.5. (sayfa 102)'te verilmiştir.

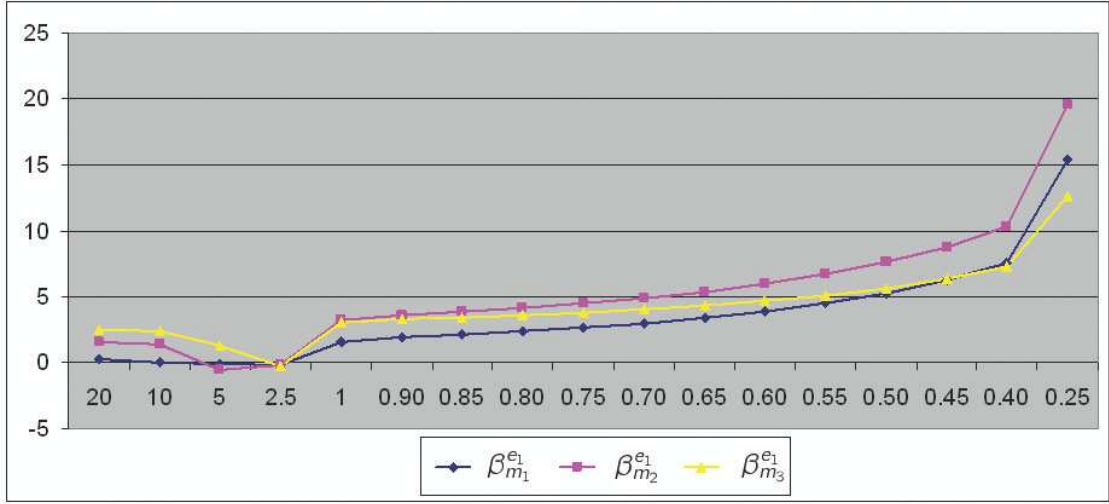
Tüm \hat{R} değerleri 1'e yakın ve 1.2'den küçük olduğundan tüm parametreler için yakınsamanın sağlandığı ve parametre uzayının kapsanan kısmının yeterli olduğu söylenebilir. Bu durumda üretilmiş olan Gibbs örneklemi sonsal kestirimler için kullanılabilir. $\mu = 20$ için tüm parametrelerin sonsal kestirimleri önsel bilgiye çok yakındır. Bilgi içeren bir önsel dağılım belirlemek için μ 'nün 20 değeri uygundur. $\mu = 0.75$ alınarak oluşturulan önsel dağılımın kullanılmasıyla elde edilen sonuçlara göre, örneklemin skorlara ilişkin taşıdığı bilginin skorların sıra numaralarından çok farklı olduğu ve ağrı şiddeti değişkeninin düzeyleri arasında ters yönlü bir hiyerarşi bulunduğu söylenebilir. Ancak ilk bakışta ağrı şiddetinin yok, az ve orta düzeyleri arasındaki hiyerarşinin artan yapıda olduğu düşünülmektedir. Örnekleme taşınan bilginin bunun aksi yönünde olması, deneklerin ağrı şiddeti düzeyini belirtirken aslında kendileri açısından ağrının verdiği rahatlık düzeyini skorladıkları düşünülebilir. Burada da önerilmiş olan yaklaşımın, örneklemin taşıdığı bilgiyi ortaya çıkarma açısından önemi ortaya çıkmaktadır. Ameliyat değişkeninin ilk iki ve son düzeylerinin etkisi eksi yönlü iken diğer düzeylerinin etkisi artı yönlüdür. Hastane değişkeninin son iki düzeyi ve



Şekil 5.7. Bağımlılık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.8. Bağımlılık durumunda ana etki ve nominal etkileşim parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.9. Bağımlılık durumunda satır etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.

ağrı şiddeti değişkenlerinin sadece son düzeyinin etkisi eksi yönlüdür. Birinci ameliyat ve birinci hastane düzeyine, üçüncü ameliyat ve birinci hastane düzeyine ve bu iki değişkeninin son düzeylerine karşılık gelen etkileşimlerin etkisinin eksi yönlü olduğu söylenebilir.

Bu örnek için örneklem bilgisinin tutarlı olarak ortaya çıkarılıp çıkarılmadığını incelemek için sırasıyla skora, ana etki ve nominal etkileşimlere ve satır etki parametrelerine karşılık gelen ikinci önsel bilgi olarak $(-0.1, 1, 1.5)^T$, $(1.5, 0.2, 0.2, 0.2, 1, 1, 1, 0.5, -1.5, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8, 0.8)^T$ ve $(1, 1.4, 0.2)^T$ vektörleri kullanılmıştır. $\mu = 20$ için önsel bilgiye çok yakın sonsal kestirimler elde edilmiştir. $\mu = 0.65$ için ise yukarıda örneklem bilgisi olduğu belirtilen sonsal kestirimlere çok yakın sonsal kestirimler elde edilmiştir. Bu kestirimler Çizelge 5.6. ile verilmiştir.

Çizelge 5.6. ile verilen sonsal kestirimler Çizelge 5.5.'te verilenler ile karşılaştırıldığında elde edilen sonsal kestirimlerin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Ağrı şiddeti veri kümesi için de önerilen yaklaşım ile örneklem bilgisinin tutarlı biçimde ortaya çıkarıldığı söylenebilir.

Çizelge 5.5. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

Parametre	$\mu' = 20$		$\mu' = 0.75$		$\mu' = 0.3$	
	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}
$X_{d_1}^1$	0.9616	1.0092	4.8797	1.0095	17.7855	1.0129
$X_{d_1}^2$	1.9120	1.0086	-0.7335	1.0092	-1.8287	1.0105
$X_{d_1}^3$	2.9220	1.0138	-0.7522	1.0109	-1.7933	1.0134
β_{\emptyset}	0.4539	1.0109	0.0551	1.0079	-0.4870	1.0080
$\beta_{m_1}^{c_2}$	0.9477	1.0078	-0.7478	1.0079	-1.8281	1.0088
$\beta_{m_2}^{c_2}$	0.9533	1.0171	-0.5901	1.0070	-1.6328	1.0110
$\beta_{m_3}^{c_2}$	0.9559	1.0075	1.2687	1.0085	3.2196	1.0114
$\beta_{m_1}^{c_3}$	2.9858	1.0109	6.1296	1.0089	13.7125	1.0082
$\beta_{m_2}^{c_3}$	2.9594	1.0131	4.5677	1.0111	9.4844	1.0113
$\beta_{m_3}^{c_3}$	2.9390	1.0111	-0.7602	1.0075	-1.6243	1.0093
$\beta_{m_1}^{c_4}$	-1.4773	1.0059	3.1495	1.0119	13.1270	1.0108
$\beta_{m_2}^{c_4}$	0.4933	1.0071	4.0369	1.0127	12.3200	1.0071
$\beta_{m_1}^{c_5}$	1.4481	1.0115	-0.7435	1.0083	-1.6101	1.0100
$\beta_{m_2}^{c_5}$	1.4546	1.0068	1.1849	1.0124	0.5847	1.0081
$\beta_{m_3}^{c_5}$	1.4535	1.0068	1.0144	1.0079	0.6243	1.0104
$\beta_{m_4}^{c_5}$	1.4549	1.0091	1.3808	1.0078	1.8542	1.0080
$\beta_{m_5}^{c_5}$	1.4535	1.0087	1.8111	1.0098	3.8592	1.0074
$\beta_{m_6}^{c_5}$	1.4563	1.0120	2.1046	1.0099	4.9934	1.0088
$\beta_{m_7}^{c_5}$	1.4481	1.0092	-1.0363	1.0075	-1.7656	1.0114
$\beta_{m_8}^{c_5}$	1.4548	1.0099	1.1515	1.0123	0.5016	1.0112
$\beta_{m_9}^{c_5}$	1.4552	1.0095	0.8118	1.0134	-2.0666	1.0070
$\beta_{m_1}^{e_1}$	0.3066	1.0070	2.6403	1.0105	11.6791	1.0082
$\beta_{m_2}^{e_1}$	1.5329	1.0077	4.4832	1.0101	15.2422	1.0126
$\beta_{m_3}^{e_1}$	2.4557	1.0123	3.7981	1.0075	10.1400	1.0138

5.2.2. Örnek 2: Bağımsızlık durumu

Kesim 5.2.1.'de üzerinde çalışılan veri kümesi ve LD model için ana etki parametrelerinin, nominal etkileşim parametrelerinin ve satır etki parametrelerinin kendi içlerinde ve kendi aralarında bağımsız olduğu yönünde bir önsel bilgi var olsun. Ayrıca parametrelere ilişkin önsel bilgi bağımlılık durumundakinin aynı olsun.

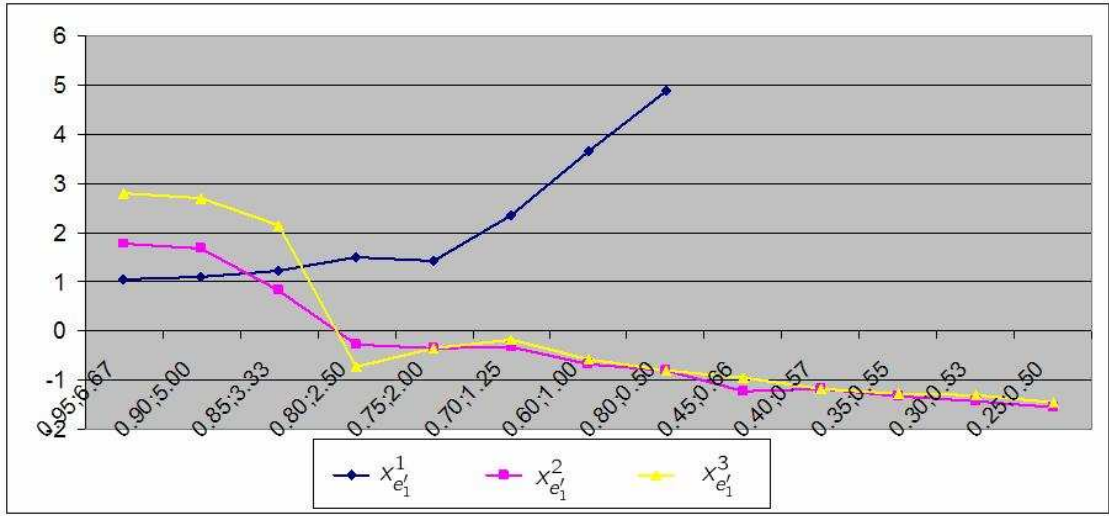
Önsel dağılımların belirlenmesinde Kesim 3.3.1.'de verilen yaklaşım kullanılmıştır. Kesim 5.2.1.'deki ile aynı amaçla bir duyarlık çözümlemesi yapılmıştır. Duyarlık çözümlemesinde kullanılan η . ve $\mu^S = (\mu^S)$ ikilileri 0.95;6.67, 0.90;5.00, 0.85;3.33, 0.80;2.50, 0.75;2.00, 0.70;1.25, 0.60;1.00, 0.80;0.50, 0.45;0.66, 0.40;0.57, 0.35;0.55, 0.30;0.53, 0.25;0.50, 0.20;0.44, 0.15;0.40, 0.10;0.35, 0.05;0.33 biçimindedir. Sonsal

Çizelge 5.6. Bağımlılık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

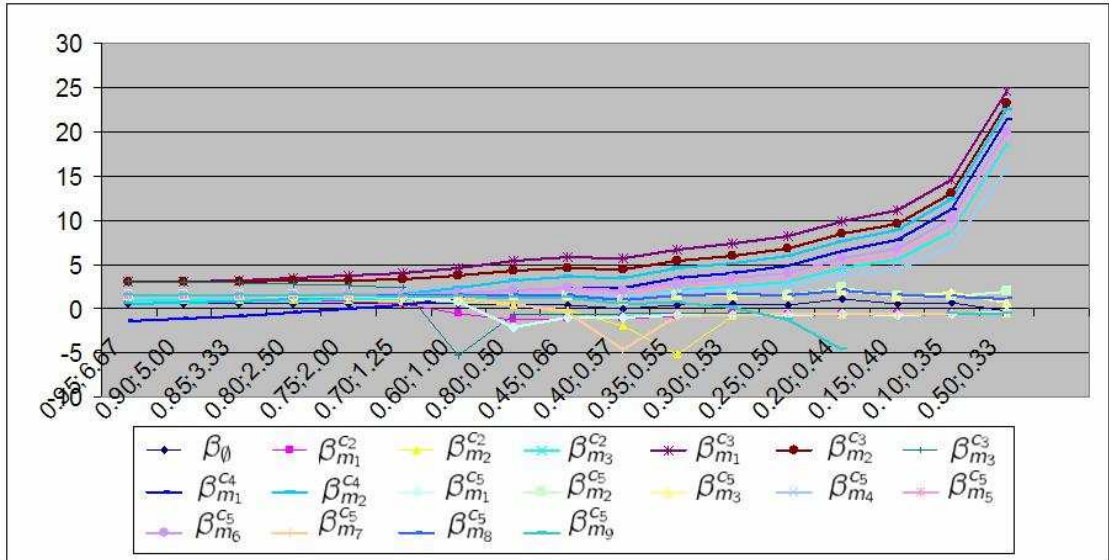
Parametre	$x_{d_1}^1$	$x_{d_1}^2$	$x_{d_1}^3$	β_{\emptyset}	$\beta_{m_1}^{c_2}$	$\beta_{m_2}^{c_2}$	$\beta_{m_3}^{c_2}$	$\beta_{m_1}^{c_3}$
Kestirim	4.0293	-0.8413	-0.7655	1.0380	-0.8108	-1.7486	0.5644	4.4441
\hat{R}	1.0069	1.0129	1.0105	1.0102	1.0062	1.0102	1.0111	1.0109
Parametre	$\beta_{m_2}^{c_3}$	$\beta_{m_3}^{c_3}$	$\beta_{m_1}^{c_4}$	$\beta_{m_2}^{c_4}$	$\beta_{m_1}^{c_5}$	$\beta_{m_2}^{c_5}$	$\beta_{m_3}^{c_5}$	$\beta_{m_4}^{c_5}$
Kestirim	2.7654	-0.8100	5.5683	2.3840	-0.8149	0.3641	0.3215	0.6505
\hat{R}	1.0087	1.0135	1.0143	1.0095	1.0116	1.0067	1.0138	1.0112
Parametre	$\beta_{m_5}^{c_5}$	$\beta_{m_6}^{c_5}$	$\beta_{m_7}^{c_5}$	$\beta_{m_8}^{c_5}$	$\beta_{m_9}^{c_5}$	$\beta_{m_1}^{e_1}$	$\beta_{m_2}^{e_1}$	$\beta_{m_3}^{e_1}$
Kestirim	1.1375	1.5356	-2.3463	0.4401	0.1037	3.3208	4.3515	1.5202
\hat{R}	1.0071	1.0076	1.0092	1.0066	1.0149	1.0108	1.0118	1.0089

kestirimlerin elde edilmesi için Gibbs örnekleme algoritması Kesim 5.2.1.'deki ile aynı koşullar altında işletilmiştir. Skorlar, ana etki parametreleri ve satır etki parametreleri için elde edilen çizimler sırasıyla Şekil 5.10. (sayfa 104), Şekil 5.11. (sayfa 104) ve Şekil 5.12. (sayfa 105) ile verilmiştir.

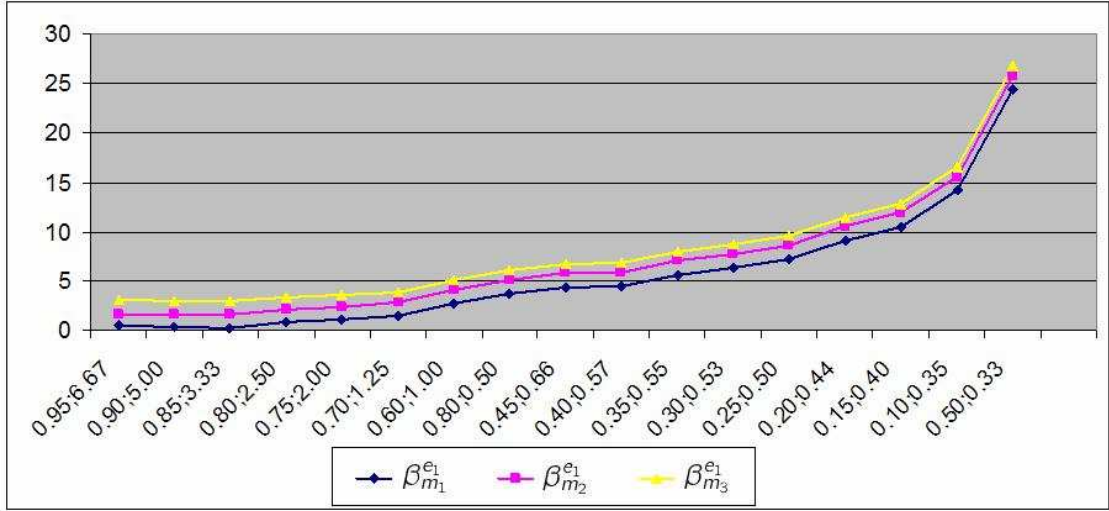
Şekil 5.10., Şekil 5.11. ve Şekil 5.12. incelendiğinde önceki örneklerden farklı durumların ortaya çıktığı görülmektedir. Skorlar için bilgi içeren önsel dağılım tanımlamak için μ 'nün 5'ten büyük değerlerinin kullanılması gerektiği görülmektedir. Bilgi içermeyen önsel tanımlamak için ağırlık şiddeti değişkeninin birinci düzeyine ilişkin skor için μ 'nün 2.5 ile 2 arasındaki değerlerinin, ikinci düzeye karşılık gelen skor için μ 'nün 2.5 ile 1.25 arasındaki değerlerinin, üçüncü düzeye karşılık gelen skor için ise μ 'nün 2 ile 1.25 arasındaki değerlerinin kullanılması gerektiği söylenebilir. μ 'nün 1.25'ten küçük değerleri için uygun sonuçlar elde edilememektedir. Bilgi içeren önsel dağılım, ana etki parametrelerinin tümü için η 'nın 0.90'dan büyük, 1'den küçük değerleri için elde edilmektedir. Bilgi içermeyen önsel dağılım ise $\beta_{m_9}^{c_5}$ için η 'nın 0.1 ile 0.05 arasındaki, $\beta_{m_3}^{c_2}, \beta_{m_1}^{c_3}, \beta_{m_2}^{c_3}, \beta_{m_1}^{c_4}, \beta_{m_2}^{c_4}, \beta_{m_4}^{c_5}, \beta_{m_5}^{c_5}, \beta_{m_6}^{c_5}$ için η 'nın 0.45 ile 0.40 arasındaki, $\beta_{m_1}^{c_1}, \beta_{m_2}^{c_5}, \beta_{m_3}^{c_5}, \beta_{m_8}^{c_5}$ için η 'nın 0.35 ile 0.25 arasındaki, $\beta_{m_1}^{c_2}, \beta_{m_3}^{c_3}, \beta_{m_1}^{c_5}$ için η 'nın 0.45'ten küçük, $\beta_{m_7}^{c_5}$ için η 'nın 0.35'ten küçük, $\beta_{m_2}^{c_2}$ için η 'nın 0.30'dan küçük değerleri için elde edilmektedir. Belirtilen değerlerden daha küçük değerlerin önsel dağılımın belirlenmesinde kullanılması sağlıklı bir yaklaşım olmamaktadır. Satır etki parametreleri için 0.85;3.33 değerinden daha büyük değer alan $\eta; \mu$ ikililerinde bilgi içeren önsel dağılım elde edilmektedir. Satır etki parametreleri için bilgi içermeyen önsel dağılım ise



Şekil 5.10. Bağımsızlık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.11. Bağımsızlık durumunda ana etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.12. Bağımsızlık durumunda satır etki parametrelerinin sonsal kestirimlerinin çizimi.

0.46;0.66 ile 0.40;0.57 ikilileri arasında değer alan ikililer için elde edilmektedir.

Bilgi içermeyen önsel dağılım tüm parametreler için aynı η . değeri ile elde edilemediğinden bilgi içermeyen çözümlene sonuçlarını elde etmek için $\beta_{m_0}^{c_5}$ için η . = 0.05, $\beta_{m_3}^{c_2}, \beta_{m_1}^{c_3}, \beta_{m_2}^{c_3}, \beta_{m_1}^{c_4}, \beta_{m_2}^{c_4}, \beta_{m_4}^{c_5}, \beta_{m_5}^{c_5}, \beta_{m_6}^{c_5}$ için η . = 0.60 ve geri kalan ana etki parametreleri için η . = 0.25 olarak alınmıştır. İlişki parametreleri için ise η . = 0.60 alınmıştır. Bilgi içeren çözümlene sonuçları için 0.95;6.67 ikilisi kullanılmıştır. Ayrıca 0.05;0.33 ikilisi için de sonuçlar verilmiştir. Elde edilen sonuçlar Çizelge 5.7. (sayfa 106) ile verilmiştir.

Çizelge 5.7. incelendiğinde tüm \hat{R} değerlerinin 1'e yakın ve 1.2'den küçük olduğu görülmektedir. Bu durumda parametre uzayının kapsanan bölümünün yeterli olduğu ve yakınsamanın sağlandığı söylenebilir; Çizelge 5.7. ile verilmiş olan parametre kestirimleri sonsal çıkarsamalar için uygundur. 0.95;6.67 ikilisi için elde edilen sonsal kestirimler önsel bilgiye çok yakın olduğundan bilgi içeren çözümlene yapılmış olduğunu söylenebilir. Bilgi içermeyen çözümlene sonuçlarına göre ağırlık şiddetinin "yok" düzeyinin bu değişkenin düzeyleri arasındaki hiyerarşideki yeri en üsttedir. Skorların sonsal kestirimleri büyüklük bakımından bağımsızlığa ilişkin bilgidan etkilenmiş ancak sıralama olarak çok az etkilenmiştir. Bu nedenle bağımlılık durumunda skorlar için yapılan yorumlar bağımsızlık durumunda da geçerlidir. Ana etki parametrelerinin bazılarının büyüklük bakımından bazılarının da hem yön hem büyüklük bakımından

Çizelge 5.7. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

Parametre	$\eta.; \mu' = 0.95; 6.67$		$\eta.; \mu' = *; 2$		$\eta.; \mu' = 0.05; 0.33$	
	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}	Kestirim	\hat{R}
$x_{d_1}^1$	1.0460	1.0091	2.4146	1.0293	17.7466	1.0095
$x_{d_1}^2$	1.7793	1.0133	-0.3859	1.0106	-2.3514	1.0067
$x_{d_1}^3$	2.8122	1.0085	-0.3478	1.0130	-2.2656	1.0064
β_{\emptyset}	0.4978	1.0127	0.5033	1.0098	-0.2335	1.0119
$\beta_{m_1}^{c_2}$	0.9922	1.0067	-0.5427	1.0085	-0.5040	1.0147
$\beta_{m_2}^{c_2}$	1.0003	1.0110	-0.6769	1.0074	-0.5261	1.0134
$\beta_{m_3}^{c_2}$	1.0011	1.0097	1.2042	1.0075	18.5719	1.0081
$\beta_{m_1}^{c_3}$	3.0276	1.0138	4.6406	1.0074	24.6284	1.0068
$\beta_{m_2}^{c_3}$	3.0097	1.0130	3.7094	1.0095	23.1698	1.0124
$\beta_{m_3}^{c_3}$	2.9929	1.0094	-0.5650	1.0133	-0.5955	1.0107
$\beta_{m_1}^{c_4}$	-1.4203	1.0086	1.2004	1.0125	21.3718	1.0084
$\beta_{m_2}^{c_4}$	0.5355	1.0064	2.4118	1.0097	22.4802	1.0087
$\beta_{m_1}^{c_5}$	1.4957	1.0096	-0.5988	1.0107	-0.4756	1.0117
$\beta_{m_2}^{c_5}$	1.5019	1.0076	1.6731	1.0088	1.8909	1.0099
$\beta_{m_3}^{c_5}$	1.4992	1.0065	1.4303	1.0091	0.6880	1.0096
$\beta_{m_4}^{c_5}$	1.5008	1.0094	1.5236	1.0143	15.8920	1.0088
$\beta_{m_5}^{c_5}$	1.5006	1.0077	1.6905	1.0111	19.2044	1.0074
$\beta_{m_6}^{c_5}$	1.5034	1.0073	1.8609	1.0106	20.0604	1.0104
$\beta_{m_7}^{c_5}$	1.4974	1.0098	-0.5795	1.0079	-0.5824	1.0079
$\beta_{m_8}^{c_5}$	1.4983	1.0068	1.4706	1.0085	1.1227	1.0073
$\beta_{m_9}^{c_5}$	1.5015	1.0091	-0.5444	1.0094	-0.5839	1.0072
$\beta_{m_1}^{e_1}$	0.4736	1.0101	2.3193	1.0133	24.4044	1.0083
$\beta_{m_2}^{e_1}$	1.6724	1.0104	3.7014	1.0235	25.8116	1.0078
$\beta_{m_3}^{e_1}$	3.0666	1.0145	4.7293	1.0180	26.7923	1.0085

*:Metinde belirtilen η . değerleri için.

bağımsızlık ile ilgili önsel bilgiden etkilendiği görülmektedir. Satır etki parametrelerinin ise bağımsızlığa ilişkin önsel bilgiden büyüklük bakımından az etkilendiği söylenebilir.

Örneklemdaki bilginin tutarlı olarak ortaya çıkarılıp çıkarılmadığını incelemek amacıyla yukarıda verilmiş olan ikinci önsel bilgi kullanılmıştır. $\eta.; \mu' = 0.95; 6.67$ ikilisi için önsel bilgiye çok yakın sonsal kestirimler elde edilmiştir. $0.40; 0.75$ ikilisi için ise yukarıda örneklem bilgisi olduğu belirtilen sonsal kestirimlere çok yakın sonsal kestirimler elde edilmiştir. Bu kestirimler Çizelge 5.8. ile verilmiştir.

Çizelge 5.8. ile verilen sonsal kestirimler Çizelge 5.7.'de verilenler ile karşılaştırıldığında

Çizelge 5.8. Bağımsızlık durumunda skorlar ve LD model parametreleri için ikinci önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri.

Parametre	$x_{d'_1}^1$	$x_{d'_1}^2$	$x_{d'_1}^3$	β_{\emptyset}	$\beta_{m_1}^{c_2}$	$\beta_{m_2}^{c_2}$	$\beta_{m_3}^{c_2}$	$\beta_{m_1}^{c_3}$
Kestirim	3.9893	-0.7234	-0.7530	0.8702	-0.6235	-2.5614	0.4366	3.6609
\hat{R}	1.0128	1.0100	1.0150	1.0095	1.0103	1.0121	1.0126	1.0107
Parametre	$\beta_{m_2}^{c_3}$	$\beta_{m_3}^{c_3}$	$\beta_{m_1}^{c_4}$	$\beta_{m_2}^{c_4}$	$\beta_{m_1}^{c_5}$	$\beta_{m_2}^{c_5}$	$\beta_{m_3}^{c_5}$	$\beta_{m_4}^{c_5}$
Kestirim	2.4179	-0.6015	4.3380	1.4858	-0.5147	0.2868	0.2617	0.6817
\hat{R}	1.0086	1.0115	1.0096	1.0131	1.0108	1.0122	1.0101	1.0065
Parametre	$\beta_{m_5}^{c_5}$	$\beta_{m_6}^{c_5}$	$\beta_{m_7}^{c_5}$	$\beta_{m_8}^{c_5}$	$\beta_{m_0}^{c_5}$	$\beta_{m_1}^{e_1}$	$\beta_{m_2}^{e_1}$	$\beta_{m_3}^{e_1}$
Kestirim	1.0250	1.3437	-4.8036	0.3251	-0.0559	4.3820	4.9988	3.3732
\hat{R}	1.0084	1.0150	1.0119	1.0125	1.0069	1.0143	1.0130	1.0151

elde edilen sonsal kestirimlerin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bazı gözelerde görülen farklılıklar rasgelelik ve tüm parametreler için aynı duyarlılığın kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Ağrı şiddeti veri kümesi için de önerilen yaklaşım ile örneklem bilgisinin uygun biçimde ortaya çıkarıldığı söylenebilir.

5.3. Örnek 3: Mutluluk Düzeyi

Beklenen göze sıklıklarının kestirimi için Kesim 3.3.2.'de verilmiş olan yaklaşımların uygulanışının açıklanması için bir mutluluk düzeyi - eğitim düzeyi çaprazlaması kullanılmıştır. Kullanılan veri kümesi Türkiye İstatistik Kurumu tarafından 2006 yılında yapılan Yaşam Memnuniyeti Araştırması'ndan alınmıştır ve EK 10'da verilmiştir. Olumsuzluk çizelgesini oluşturan iki değişken de ordinaldir. Mutluluk düzeyi değişkeni "Mutlu", "Orta" ve "Mutsuz" olmak üzere 3 düzeye, eğitim düzeyi değişkeni ise "Okur yazar değil", "Okur yazar/Okul bitirmeyen", "İlkokul mezunu", "İlköğretim/Ortaokul mezunu", "Lise/Dengi mezunu" ve "Yüksek okul/Üniversite mezunu" olmak üzere 6 düzeye sahiptir. Beklenen göze sıklıklarının kestirimi bağımlılık ve bağımsızlık durumları için ayrı ayrı yapılmıştır.

Veri kümesi için Kesim 2.2.'de verilen gösterimlere göre $S = \{S_1, S_2\}$, $K_1 = \{1, 2, 3\}$, $K_2 = \{1, \dots, 6\}$, $|K_1| = 3$, $|K_2| = 6$ ve $\wp(S) = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_1, S_2\}\}$ biçimindedir. İlgilenilen model $m = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_1, S_2\}\}$ olsun. Bu durumda $m = m^* \cup m^{\emptyset}$ ve $m^* = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}\}$ ve $c_1 = \{\emptyset\}$, $c_2 = \{S_1\}$, $c_3 = \{S_2\}$, $m^{\emptyset} = \{S_1, S_2\} = d_1$ biçimindedir. $M^{c_1} = \{m_1^{c_1}\} = \{(1)\}$, $M^{c_2} = \{m_1^{c_2}, m_2^{c_2}\} = \{(1), (2)\}$,

$M^{c_3} = \{m_1^{c_3}, \dots, m_5^{c_3}\} = \{(1), \dots, (5)\}$ biçimindedir. Bu tanımlamalar altında LD modelin parametre vektörü $(\beta_m)^T = (\beta^{c_1}, (\beta^{c_2})^T, (\beta^{c_3})^T, \beta^{d_1})$ biçimindedir. Burada β^{c_1} genel ortalama terimidir. β^{c_2} ve β^{c_3} sırasıyla mutluluk düzeyi ve eğitim düzeyi etkenlerinin ana etkilerini, β^{d_1} ise tekdüze ilişki parametresini ifade etmektedir. Ayrıca $d'_1 = \{S_1\}$ için $x_{d'_1}^1, x_{d'_1}^2, x_{d'_1}^3$, $d'_2 = \{S_2\}$ için $x_{d'_2}^1, \dots, x_{d'_2}^6$ skorları tanımlanır.

5.3.1. Örnek 3: Bağımlılık durumu

Ana etki ve tekdüze etkileşim parametrelerinin kendi içlerinde bağımsız olduğu önsel bilgisinin bulunmadığı durumda Kesim 3.3.2.1.'de verilmiş olan yaklaşım kullanılmıştır.

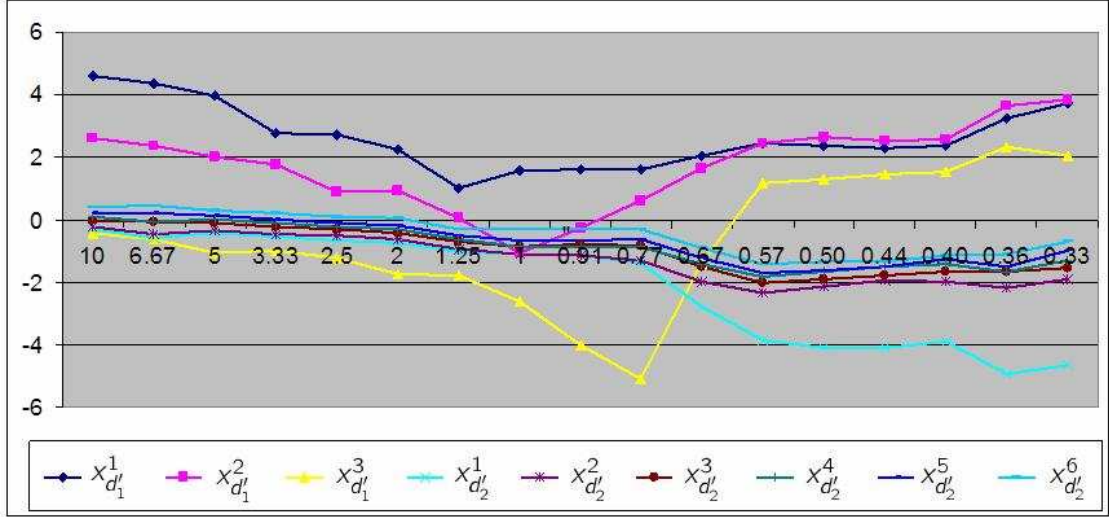
İlk olarak tekdüze etkileşim parametresi için önsel dağılım belirlenmiştir. Bir tane tekdüze etkileşim parametresi bulunmaktadır. Bu durumda G-ÇDLG dağılımı yerine log-gamma dağılımı kullanılacaktır. Tekdüze etkileşim parametresine ilişkin eğitimdeki bir düzey artışa karşılık mutluluk düzeyinde bir düzeylik artış olması olasılığının 1.5 kat arttığı önsel bilgisi bulunsun. Bilgi içermeyen bir önsel dağılım belirlemek için $\eta = 0.09$ alındığında $\nu^0 = 0.1$ ve $\lambda^0 = 31.673$ olarak elde edilir. Mutluluk düzeyine ilişkin skorların sırasıyla 5, 3 ve 0.1 ve eğitim düzeyine ilişkin skorların sırasıyla 0.1, 0.2, 0.4, 0.5, 0.6 ve 0.8 olduğu ve mutluluk düzeyi ve eğitim düzeyine karşılık gelen skorların kendi içlerinde zayıf ve artı yönlü ilişkili oldukları önsel bilgisi bulunsun. İlişki yapısını yansıtmak için köşegen dışı g_{ts}^S değerleri 0.1 olarak alınmıştır. Ana etki parametrelerine karşılık gelen önsel bilgi sırasıyla 1, 1, 0.5, -0.1, -0.2, -0.3, -0.4, 3.5 biçiminde olsun. Ayrıca ana etki parametrelerinin kendi içlerinde zayıf ve artı yönlü ilişkili oldukları önsel bilgisi var olsun. İlişki yapısını yansıtmak için köşegen dışı g_{ts}^* değerleri 0.1 olarak alınmıştır. Bu değerlerin belirlenmesinde Kesim 3.3.1.'deki tartışma dikkate alınmıştır. ν^S ve ν^* , 3.2033 olarak alınmıştır. Bu değerler için $\delta^S = 0.2887$ ve $\delta^* = 0.2520$ olarak elde edilmiştir.

Skorların ve beklenen göze sıklıklarının sonsal kestirimlerini elde etmek için Gibbs örnekleme algoritması ve MH algoritması birlikte kullanılmıştır. Skorların güncellenmesi için Gibbs örnekleme algoritması, beklenen göze sıklıklarının güncellenmesi için ise MH algoritması kullanılmıştır. Gibbs örnekleme algoritmasında skorlar için Kesim

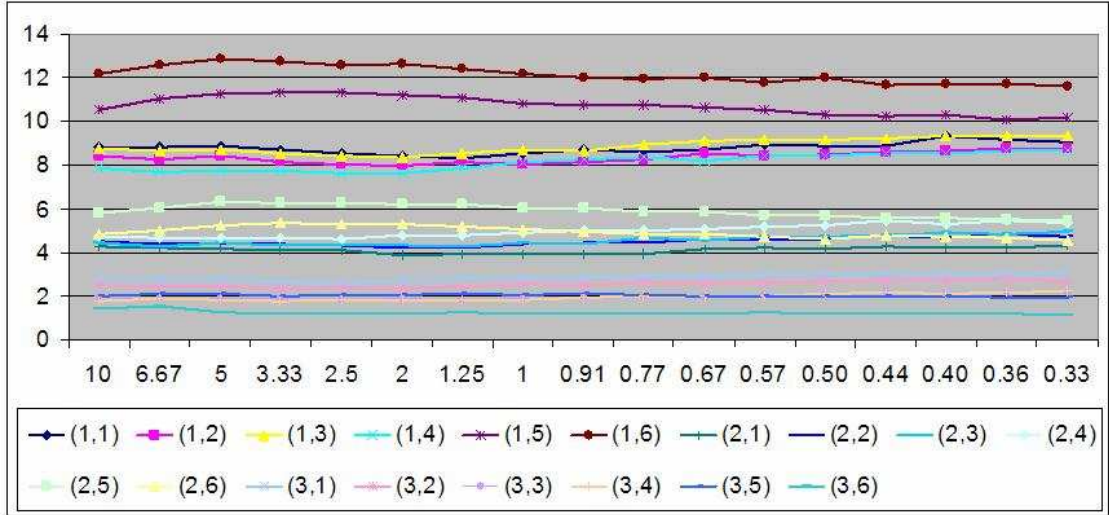
3.3.1.'de verilen tam koşullu dağılımlar kullanılmıştır. MH algoritmasında öneri dağılımı olarak Poisson dağılımı kullanılmıştır. Daha iyi yakınsama sağlamak ve parametre uzayının kapsanan kısmını en iyi düzeye çıkarmak için 10 paralel zincir üretilmiştir. Her zincir 1100 adım çalıştırılmıştır. İlk 100 adım başlangıç değerlerinin etkisini arıtmak amacıyla dışarıda bırakılmış ve otokorelasyonun etkisini azaltmak amacıyla her 10 adımda bir kayıt yapılmıştır. Yakınsama kontrolü için \hat{R} kullanılmıştır. Sonsal kestirimlerin μ' değerlerine duyarlılığını incelemek amacıyla μ' 'nün 10, 6.67, 5, 3.33, 2.5, 2, 1.25, 1, 0.91, 0.77, 0.67, 0.57, 0.50, 0.44, 0.4, 0.36, 0.33 değerleri için sonsal kestirimler elde edilmiştir. Sonsal kestirimlerin μ' değerlerine karşı çizimleri skorlar için Şekil 5.13. (sayfa 110), beklenen göze sıklıkları için Şekil 5.14. (sayfa 110) ile verilmiştir.

Şekil 5.13. incelendiğinde eğitim düzeyi değişkenine ilişkin skorların mutluluk düzeyine karşılık gelenlere göre daha dengeli olduğu görülmektedir. Mutluluk düzeyine karşılık gelen skorlar için μ' 'nün 5'ten büyük değerleri, eğitim düzeyine karşılık gelenler için ise μ' 'nün 2.5'ten büyük değerlerinin bilgi içeren önsel dağılım tanımlamak için kullanılabileceği söylenebilir. Tüm skorların 0.5 ile 0.4 arasındaki değerleri için ise bilgi içermeyen önsel dağılımlar elde edilmektedir. μ' 'nün 0.4'ten küçük değerleri için sağlıklı rasgele sayılar üretilemediğinden bu değerlerin önsel dağılımın belirlenmesinde kullanılmaması önerilebilir. Şekil 5.14.'ten beklenen göze sıklıkları için μ' 'nün değerlerine göre belirgin bir ayırım yapılamamaktadır. Ancak μ' 'nün 0.77'den küçük değerleri için sonsal kestirimlerde az miktarda değişme olduğu söylenebilir. Beklenen göze sıklıkları için önsel dağılım doğrudan belirlenmediğinden Şekil 5.14.'te kesin bir ayırımın olması da beklenmemektedir. μ' 'nün 10, 0.5 ve 0.25 değerleri için sonsal kestirimler ve \hat{R} değerleri Çizelge 5.9. (sayfa 111) ile verilmiştir.

Elde edilen tüm \hat{R} değerleri 1'e yakın ve 1.2'den küçük olduğundan yakınsamanın sağlandığı ve parametre uzayının kapsanan kısmının sonsal çıkarsama yapmak için yeterli olduğu söylenebilir. Ayrıca tüm kabul oranları, kullanılan öneri dağılımının uygun olduğu sonucuna ulaşılabilecek kadar yüksektir. Bu durumda Çizelge 5.9. ile verilmiş olan sonsal kestirimler yorumlama için uygundur. Çizelge 5.9. incelendiğinde $\mu' = 10$ için skorların sonsal kestirimlerinin önsel bilgiye yakın olduğu, dolayısıyla bu değer için bilgi içeren önsel belirlenmiş olduğu söylenebilir. $\mu' = 0.5$ için belirlenen önsel dağılım kullanılarak elde



Şekil 5.13. Bağımlılık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.14. Bağımlılık durumunda beklenen göze sıklıklarının sonsal kestirimlerinin çizimi.

Çizelge 5.9. Bağımlılık durumunda skorlar ve beklenen göze sıklıkları için sonsal kestirimler, \hat{R} değerleri ve kabul oranları.

Par.	$\mu_i = 10$			$\mu_i = 0.5$			$\mu_i = 0.25$		
	Kes.	\hat{R}	K.O.	Kes.	\hat{R}	K.O.	Kes.	\hat{R}	K.O.
$X_{d_1}^1$	4.5887	1.0183		2.3567	1.0069		12.8507	1.0090	
$X_{d_1}^2$	2.5968	1.0098		2.6337	1.0101		7.2496	1.0130	
$X_{d_1}^3$	-0.4216	1.0190		1.3018	1.0112		-37.0827	1.0084	
$X_{d_2}^1$	-0.3083	1.0135		-4.0717	1.0093		-1.6558	1.0079	
$X_{d_2}^2$	-0.2149	1.0171		-2.1211	1.0089		0.3390	1.0113	
$X_{d_2}^3$	-0.0217	1.0244		-1.8818	1.0096		4.0122	1.0093	
$X_{d_2}^4$	0.0887	1.0252		-1.6374	1.0077		3.8413	1.0148	
$X_{d_2}^5$	0.2073	1.0161		-1.6137	1.0107		5.4086	1.0075	
$X_{d_2}^6$	0.4003	1.0144		-1.3240	1.0152		7.2007	1.0081	
(1,1)	8.8220	1.0088	0.6694	8.8950	1.0146	0.8615	9.0660	1.0115	0.9323
(1,2)	8.4470	1.0109	0.6385	8.5030	1.0092	0.8458	8.7850	1.0097	0.9267
(1,3)	8.7480	1.0088	0.6290	9.1620	1.0097	0.8423	9.3260	1.0138	0.9280
(2,1)	7.8710	1.0114	0.5935	8.4490	1.0081	0.8269	8.8410	1.0134	0.9240
(2,2)	10.5370	1.0075	0.6171	10.3020	1.0148	0.8641	9.9620	1.0091	0.9636
(2,3)	12.1530	1.0088	0.6691	12.0050	1.0178	0.8959	11.6320	1.0087	0.9447
(3,1)	4.2490	1.0077	0.6557	4.1410	1.0153	0.8206	4.2260	1.0089	0.9015
(3,2)	4.4770	1.0094	0.6372	4.6210	1.0127	0.8106	4.8010	1.0165	0.9032
(3,3)	4.4420	1.0090	0.6191	4.7080	1.0093	0.8118	4.8970	1.0103	0.9088
(4,1)	4.7420	1.0091	0.5950	5.2540	1.0068	0.8072	5.4840	1.0083	0.9040
(4,2)	5.8260	1.0080	0.5987	5.6640	1.0082	0.8231	5.3060	1.0111	0.9408
(4,3)	4.8400	1.0095	0.6168	4.6370	1.0114	0.8349	4.6520	1.0147	0.9057
(5,1)	2.8080	1.0128	0.6482	2.9510	1.0066	0.8620	2.9630	1.0078	0.9230
(5,2)	2.4770	1.0106	0.6287	2.6560	1.0092	0.8401	2.7800	1.0121	0.9080
(5,3)	1.9130	1.0147	0.6271	2.1060	1.0157	0.7826	2.1670	1.0128	0.8646
(6,1)	1.7710	1.0138	0.6148	2.1180	1.0168	0.7763	2.0950	1.0087	0.8652
(6,2)	2.0150	1.0095	0.6206	1.9990	1.0138	0.6948	1.9870	1.0099	0.7665
(6,3)	1.4290	1.0084	0.6720	1.2050	1.0155	0.7073	1.2300	1.0092	0.7286

Par.:Parametre;Kes.:Kestirim;K.O.:Kabul Oranı

edilen sonsal kestirime göre, örneklemin skorlara ilişkin taşıdığı bilgi önsel bilgiden çok farklıdır. İlk iki mutluluk düzeyinin hiyerarşideki yeri birbirine yakın ve üçüncüden uzak ve yüksektir. $\mu' = 0.25$ için elde edilen değerler ise tam koşullu dağılımdaki bozulum nedeniyle kullanılabilir değerler değildir. Buradan da görüldüğü gibi, bu örnek için μ' 'ye 0.33'ten küçük değer atanması sağlıklı olmamaktadır.

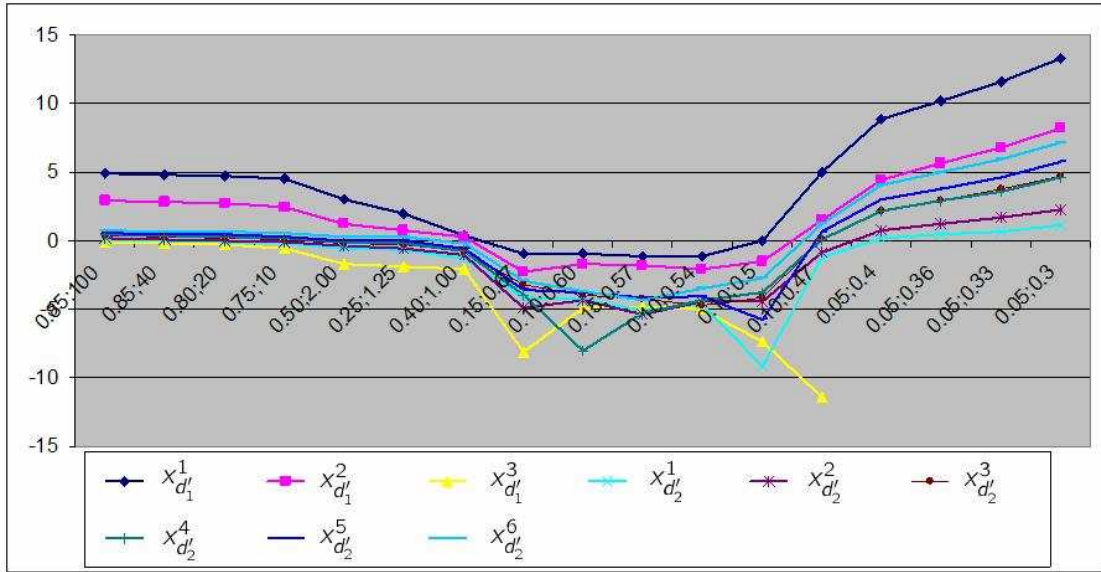
5.3.2. Örnek 3: Bağımsızlık durumu

Ana etki ve tekdüze etkileşim parametrelerinin kendi içlerinde bağımsız olduğu önsel bilgisinin bulunduğu durumda skorların ve beklenen göze sıklıklarının sonsal kestirimlerini elde etmek için Kesim 3.3.2.1.'de verilmiş olan yaklaşım kullanılmıştır.

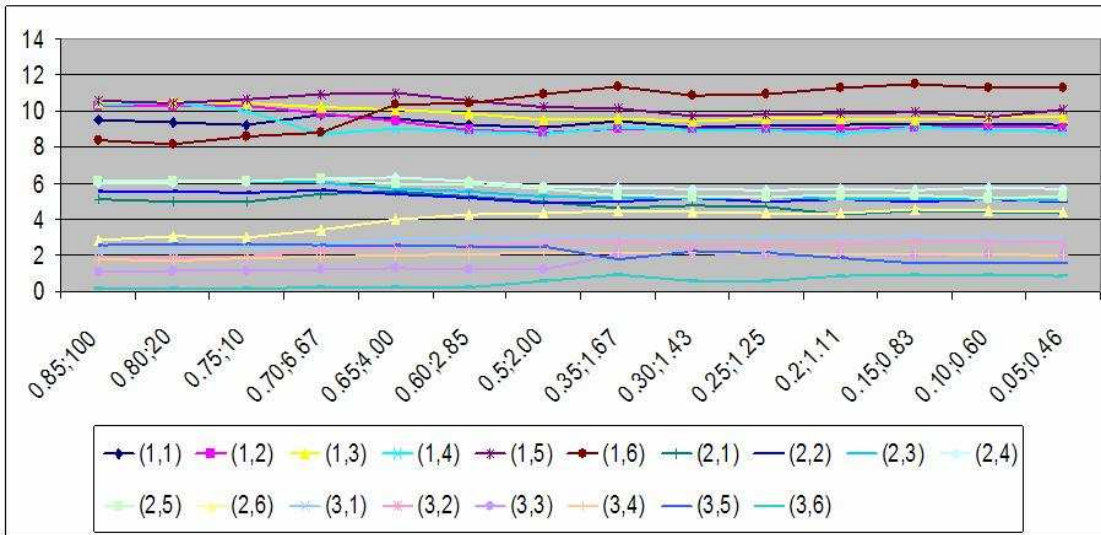
Kesim 5.3.1.'de verilen önsel bilgi bağımsızlık durumu için de geçerlidir. Tekdüze ilişki parametresine ilişkin önsel dağılımın parametreleri Kesim 5.3.1.'dekinin aynıdır. Sonsal kestirimlerin elde edilmesinde skorlar için Gibbs örnekleme algoritması, beklenen göze sıklıkları için MH algoritması bağımlılık durumundaki düzenlemeler ile uygulanmıştır. MH algoritmasında kullanılan öneri dağılımları da Kesim 5.3.1.'dekinin aynıdır.

İlk olarak Kesim 5.3.1.'deki ile aynı amaçla duyarlık çözümlemesi yapılmıştır. Skorlar için duyarlık çözümlemesinde kullanılan η . ve $\mu^S = (\mu^S)$ ikilileri 0.85;100, 0.85;40, 0.80;20, 0.75;10, 0.50;2.00, 0.25;1.25, 0.40;1.00, 0.15;0.67, 0.10;0.60, 0.15;0.57, 0.10;0.54, 0.10;0.50, 0.10;0.47, 0.05;0.40, 0.05;0.36, 0.05;0.33, 0.05;0.30 biçimindedir. Skorların sonsal kestirimlerinin bu ikililere karşı çizimi Şekil 5.15. (sayfa 113) ile verilmiştir. Beklenen göze sıklıkları için duyarlık çözümlemesinde kullanılan η . ve $\mu^S = (\mu^S)$ ikilileri 0.85;100, 0.80;20, 0.75;10, 0.70;6.67, 0.65;4.00, 0.60;2.85, 0.5;2.00, 0.35;1.67, 0.30;1.43, 0.25;1.25, 0.2;1.11, 0.15;0.83, 0.10;0.60, 0.05;0.46 biçimindedir. Beklenen göze sıklıklarının sonsal kestirimlerinin bu ikililere karşı çizimi Şekil 5.16. (sayfa 113) ile verilmiştir.

Şekil 5.15. incelendiğinde, bilgi içeren önsel dağılım elde etmek için diğer örneklere göre daha büyük olan μ' değerlerinin kullanılması gerektiği görülmektedir. $x_{d_2}^4$ dışındaki skorlar için μ' 'nün 0.6 ile 0.5 arasındaki değerlerinde bilgi içermeyen önsel dağılım elde edildiği görülmektedir. $x_{d_2}^4$ için ise μ' 'nün 0.57 ile 0.5 arasındaki değerlerinde bilgi



Şekil 5.15. Bağımsızlık durumunda skorların sonsal kestirimlerinin çizimi.



Şekil 5.16. Bağımsızlık durumunda beklenen göze sıklıklarının sonsal kestirimlerinin çizimi.

içermeyen önsel dağılım elde edilmektedir. 0.5'ten daha küçük değerler için elde edilen kestirimler güvenilir değildir. Şekil 5.15.'te, Şekil 5.13.'te olduğu gibi eğitim düzeyi değişkenine ilişkin skorların mutluluk düzeyine karşılık gelenlere göre daha dengeli olduğu görülmektedir. Bu durumda mutluluk düzeyine karşılık gelen skorlardaki hareketliliğin bağımsızlığa ilişkin bilgiden etkilenmediği söylenebilir. Şekil 5.16. incelendiğinde beklendiği gibi büyük dalgalanmalar görülmemektedir. $\eta;$ μ ikililerinin 0.85;100, 0.10;0.54 ve 0.05;0.30 değerleri için elde edilen sonsal kestirimler Çizelge 5.10. (sayfa 115) ile verilmiştir.

Elde edilen tüm \hat{R} değerleri 1'e yakın ve 1.2'den küçük olduğundan yakınsamanın sağlandığı ve parametre uzayının kapsanan kısmının sonsal çıkarsama yapmak için yeterli olduğu söylenebilir. Ayrıca kabul oranlarına bakıldığında öneri dağılımlarının uygun olduğu söylenebilir. Bu durumda, Çizelge 5.10. ile verilmiş olan sonsal kestirimler çıkarsama yapmak için uygundur.

Çizelge 5.10. incelendiğinde 0.85;100 için elde edilen sonsal kestirimlerin önsel bilgiye yakın olduğu görülmekte, dolayısıyla bilgi içeren bir çözümlene yapıldığı doğrulanmaktadır. Bilgi içermeyen çözümlene sonuçları için 0.10;0.54 ikilisi kullanıldığında elde edilen sonuçlara bakılır. Bu sonuçlar örneklem bilgisini yansıtmaktadır. Örnekleme taşıyan bilgiye göre tüm skorların eksi değer alması dikkat çekicidir. Eğitim düzeyine ilişkin hiyerarşi beklendiği gibi sonuçlara yansımıştır. Bağımsızlığa ilişkin önsel varsayımın eğitim düzeylerine karşılık gelen skorlar üzerinde sadece büyüklük bakımından etkili olduğu söylenebilir. Mutluluk düzeyine ilişkin skorlar açısından ise bu varsayımın hem büyüklük hem de yön açısından etkili olduğu söylenebilir. 0.05;0.30 ikilisi için elde edilen değerlerin ise mantıklı olmadığı söylenebilir. Bilgi içeren çözümlenede bağımlılık ve bağımsızlık durumlarında beklenen göze sıklıklarının kestirimlerinin bazı gözelerde birbirinden dikkat çekecek derecede farklı olması bağımsızlığa ilişkin önsel bilginin etkisini göstermektedir. Bilgi içermeyen durum için bağımlılık ve bağımsızlık durumlarında elde edilen beklenen göze sıklığı kestirimleri birbirine yakındır. Bu durum, sürece dahil edilen ve daha önce de belirtildiği gibi çok güçlü olan bağımsızlığa ilişkin önsel bilginin bilgi içermeyen çözümlenede büyük ölçüde arıtıldığının bir göstergesidir.

Çizelge 5.10. Bağımsızlık durumunda skorlar ve beklenen göze sıklıkları için sonsal kestirimler, \hat{R} değerleri ve kabul oranları.

Par.	$\eta; \mu' = 0.85; 100$			$\eta; \mu' = 0.10; 0.54$			$\eta; \mu' = 0.05; 0.30$		
	Kes.	\hat{R}	K.O.	Kes.	\hat{R}	K.O.	Kes.	\hat{R}	K.O.
$x_{d_1}^1$	4.9359	1.0557		-1.1748	1.0105		13.3236	1.0099	
$x_{d_1}^2$	2.9370	1.0609		-2.0772	1.0098		8.2183	1.0087	
$x_{d_1}^3$	-0.0654	1.0212		-4.9845	1.0105		-31.6578	1.0106	
$x_{d_2}^1$	0.0463	1.0582		-4.5973	1.0077		1.1243	1.0091	
$x_{d_2}^2$	0.1453	1.0546		-4.4446	1.0118		2.2278	1.0090	
$x_{d_2}^3$	0.3464	1.0202		-4.7406	1.0091		4.6804	1.0098	
$x_{d_2}^4$	0.4367	1.0434		-4.3856	1.0088		4.5842	1.0110	
$x_{d_2}^5$	0.5484	1.0347		-4.0355	1.0105		5.7430	1.0087	
$x_{d_2}^6$	0.7427	1.0276		-3.5087	1.0129		7.1320	1.0112	
(1,1)	9.5250	1.0086	0.5481	9.3540	1.0072	0.9865	9.3040	1.0143	0.9900
(1,2)	10.3390	1.0087	0.5417	8.8490	1.0135	0.9881	9.1360	1.0081	0.9877
(1,3)	10.5080	1.0080	0.5501	9.6170	1.0105	0.9900	9.4900	1.0087	0.9871
(2,1)	10.4020	1.0130	0.5477	8.9810	1.0109	0.9873	9.0930	1.0103	0.9901
(2,2)	10.6110	1.0103	0.5460	9.8610	1.0110	0.9875	9.7190	1.0106	0.9861
(2,3)	8.3560	1.0102	0.5408	11.5610	1.0127	0.9872	11.4490	1.0104	0.9875
(3,1)	5.0990	1.0098	0.5680	4.6120	1.0090	0.9887	4.5770	1.0106	0.9883
(3,2)	5.5280	1.0079	0.5680	4.8950	1.0123	0.9867	4.9770	1.0134	0.9883
(3,3)	6.1460	1.0157	0.5610	5.1170	1.0133	0.9893	5.1600	1.0103	0.9891
(4,1)	6.0100	1.0071	0.5644	5.7000	1.0063	0.9891	5.6430	1.0078	0.9899
(4,2)	6.0890	1.0104	0.5614	5.2820	1.0091	0.9878	5.2840	1.0118	0.9890
(4,3)	2.8780	1.0075	0.5732	4.4150	1.0094	0.9897	4.4170	1.0086	0.9882
(5,1)	2.2820	1.0084	0.6659	3.0950	1.0085	0.9857	2.9990	1.0117	0.9828
(5,2)	1.8320	1.0099	0.6413	2.7010	1.0075	0.9847	2.6850	1.0118	0.9826
(5,3)	1.0950	1.0059	0.6604	1.9840	1.0093	0.9827	2.0100	1.0095	0.9805
(6,1)	1.7510	1.0094	0.6086	2.0310	1.0097	0.9812	1.9570	1.0078	0.9800
(6,2)	2.5490	1.0120	0.6008	1.6420	1.0070	0.9830	1.5070	1.0144	0.9787
(6,3)	0.1750	1.0093	0.7332	0.9180	1.0084	0.9923	0.9290	1.0083	0.9852

Par.:Parametre;Kes.:Kestirim;K.O.:Kabul Oranı

5.4. Örnek 4: TSMZMC'nin Ağrı Şiddeti Verisine Uygulanması

Bu örnekte Örnek 2'de belirli bir model üzerinden Bayesci skor ve parametre kestirimi yapılmış olan ağrı şiddeti verisi için en iyi modelin belirlenmesi üzerinde durulmuştur. Veri kümesi ile ilgili gerekli bilgiler ve tanımlamalar Kesim 5.2.'de verilmiştir. Kesim 5.2.'de yapılmış olan tanımlamalara ek olarak model uzayını oluşturan hiyerarşik modeller ve bunlara karşılık gelen model numaraları Çizelge 5.11. ile verilmiştir. Çizelge 5.11.'de verilmiş olan modellerde S_3 içeren etkileşimler satır etki terimleridir. Diğer etkileşimler ise ana etkiler ile birlikte ele alınan nominal etkileşimlerdir. Oluşturulacak Markov zincirinde herhangi bir adımda bulunulan modelden bir sonraki adımda gidilmesi önerilebilecek modellere ilişkin geçiş olasılıkları Çizelge 5.12. (sayfa 117) ile verilmiştir. Çizelge 5.12.'de verilmiş olan geçiş olasılıkları herhangi bir modelden hiyerarşi ilkesi uyarınca ve modele sadece bir terimin eklenmesi ya da çıkarılması ile geçiş yapılabilecek modellere eşit olasılık atanarak elde edilmiştir. Hiyerarşi ilkesi uyarınca, modele tek terim eklenerek ya da çıkarılarak geçiş yapılması uygun olmayan modeller için ise ilgili olasılıklar 0 olarak alınmış ve Çizelge 5.12.'de karşılık gelen gözeler boş bırakılmıştır.

Çizelge 5.11. Hiyerarşik log-doğrusal modeller.

Model Numarası	Model
1	$m_1 = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_3\}\}$
2	$m_2 = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}\}$
3	$m_3 = \{\emptyset, \{S_2\}, \{S_3\}\}$
4	$m_4 = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_3\}, \{S_1, S_3\}\}$
5	$m_5 = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_1, S_2\}\}$
6	$m_6 = \{\emptyset, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$
7	$m_7 = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}\}$
8	$m_8 = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}\}$
9	$m_9 = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$
10	$m_{10} = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_3\}\}$
11	$m_{11} = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}\}$
12	$m_{12} = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$
13	$m_{13} = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_2, S_3\}\}$
14	$m_{14} = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$

Çizelge 5.12. Hiyerarşik log-doğrusal modeller için geçiş olasılıkları.

Anlık Durum	Geçilen Model													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	0.33			0.33			0.33							
2		0.33			0.33		0.33							
3			0.33			0.33	0.33							
4	0.33			0.33				0.33						
5		0.33			0.33			0.33						
6			0.33			0.33				0.33				
7	0.14	0.14	0.14				0.14	0.14	0.14	0.14				
8				0.2			0.2	0.2			0.2	0.2		
9					0.2		0.2		0.2		0.2		0.2	
10						0.2	0.2			0.2		0.2	0.2	
11								0.25	0.25		0.25			0.25
12								0.25		0.25		0.25		0.25
13									0.25	0.25			0.25	0.25
14											0.25	0.25	0.25	0.25

5.4.1. Örnek 4: Bağımlılık durumu

Ağrı şiddeti verisi için Kesim 5.2.'de m_{11} için çıkarsama yapılmıştır. En çok terim içeren m_{14} modeli ile m_{11} modeli arasındaki fark $\{S_2, S_3\}$ 'tür. Bu nedenle $\{S_2, S_3\}$ dışındaki tüm terimlere ilişkin önsel bilgiler Kesim 5.2.'de verilmiştir ve bu kesimde de aynı bilgiler kullanılacaktır.

$e_2 = \{S_2, S_3\}$ için ise birinci hastanenin ikinciye göre ağrı şiddetinde bir düzeylik artış yaratma oddsunun 2 kat, ikinci hastanenin üçüncüye göre ağrı şiddetinde bir düzeylik artış yaratma oddsunun yine 2 kat olduğu biçiminde bir önsel bilgi bulunsun. Bu durumda $\beta_{(3)}^{e_2} - \beta_{(2)}^{e_2} = 0.693$ ve $\beta_{(2)}^{e_2} - \beta_{(1)}^{e_2} = 0.693$ olarak bulunur. $\beta_{(3)}^{e_2}$ ya da $\beta_{(1)}^{e_2}$ bir sabite eşitlenerek diğer satır etki parametreleri için önsel bilgi ifade edilebilir. $\beta_{(1)}^{e_2}$ 'nin 1 olduğunu belirten bir önsel bilgi bulunsun. Bu durumda, $\beta_{(2)}^{e_2}$ ve $\beta_{(3)}^{e_2}$ için önsel bilgi sırasıyla 1.693 ve 2.386 biçiminde elde edilir. Bu önsel bilgileri ifade etmek için $\lambda^{\mathcal{N}^0} = (0.2643, 0.2760, 0.2882)^T$ olarak alınır. Tüm parametreler için bilgi içermeyen önsel tanımlamak amacıyla tüm μ 'ler 0.30 olarak alınmıştır.

Bu tanımlamalar ile TSMZMC yöntemi uygulanmıştır. Elde edilen sonsal model olasılıkları ve genel sonsal model olasılıkları Çizelge 5.13. (sayfa 118) ile verilmiştir.

Çizelge 5.13. Bağımlılık durumunda TSMZMC yöntemi ile elde edilen sorsal model olasılıkları.

Model	Başlangıç Modeli														Genel
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.0024	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0002
3	0	0	0.0742	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0053
4	0	0	0	0.0029	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0002
5	0	0.0827	0	0	1.0000	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0773
6	0	0	0.0004	0	0	0.0004	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0001
7	0.0016	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0001
8	0.0008	0.9150	0	0	0	0	0.0020	0.0020	0	0	0	0	0	0	0.0657
9	0	0	0.0020	0	0	0.0027	0	0	0.0004	0	0	0	0	0	0.0004
10	0	0	0	0.0004	0	0	0	0	0	0.0008	0	0	0	0	0.0001
11	0	0	0	0	0	0	0.0016	0.0016	0	0.0076	0.0036	0	0	0	0.0010
12	0	0	0	0.0008	0	0.0004	0	0	0	0	0	0.4003	0	0	0.0287
13	0.0028	0	0.0012	0	0	0	0	0	0.0057	0	0	0	0.0008	0	0.0008
14	0.9947	0	0.9223	0.9959	0	0.9965	0.9964	0.9964	0.9939	0.9916	0.9964	0.5997	0.9992	1.0000	0.8202
T.O.*	0.2461	0.2093	0.2561	0.2451	0.3279	0.255	0.2525	0.2525	0.2609	0.2486	0.2509	0.2538	0.2535	0.2511	0.2545

* Tekrarlama oranı

m_1, \dots, m_{14} modellerinin her biri başlangıç modeli olarak alınmış ve TSMZMC algoritması 10000 adım çalıştırılmıştır. Bu uygulama model uzayının kapsanan kısmının artırılması için yapılmıştır. Genel sonsal model olasılıkları ise algoritmanın her çalıştırılmasından elde edilen sonsal model olasılıklarının ortalaması alınarak elde edilmiştir.

Çizelge 5.13. incelendiğinde, tekrarlama oranlarına göre tüm başlangıç modelleri için yaklaşık dört adımda bir model değişikliği olduğu görülmektedir. Bu durum, kullanılan öneri dağılımlarının uygun olduğuna ilişkin bilgi verir. m_2 ve m_5 dışındaki başlangıç modelleri için m_{14} 'ün en yüksek sonsal model olasılığına sahip olduğu görülmektedir. Bu durum, farklı başlangıç modelleri ile çalışarak model uzayının kapsanan kısmının genişletilmesinin yararını ortaya koymaktadır. Eğer başlangıç modeli rasgele seçilseydi ve TSMZMC algoritması işletilseydi genel sonsal model olasılığı 0.1'den daha küçük olarak kestirilen bir model için çok yüksek sonsal model olasılığı elde edilebilecekti. Genel sonsal model olasılıkları incelendiğinde en yüksek olasılığa m_{14} modelinin sahip olduğu görülmektedir. Bu durumda ağrı şiddeti verisi için en uygun modelin $m_{14} = \{\emptyset, \{S_1\}, \{S_2\}, \{S_3\}, \{S_1, S_2\}, \{S_1, S_3\}, \{S_2, S_3\}\}$ olduğu söylenebilir. m_{14} 'e göre ameliyat-hastane etkileşimi ile ameliyat-ağrı şiddeti ve hastane-ağrı şiddeti ilişkileri anlamlıdır.

Ayrıca TSMZMC algoritması çeşitli μ' değerleri için de çalıştırılmıştır. 1.33'ten büyük μ' değerleri için elde edilen bilgi içeren önsellerin sonsal model olasılıkları üzerinde etkili olduğu, 1.33'ten küçük değerler için elde edilen bilgi içermeyen önsellerin sonsal model olasılıkları üzerinde etkili olmadığı görülmüştür. En iyi model hakkında güçlü önsel bilgi yokken parametreler hakkında güçlü önsel bilgi bulunması çelişkili bir durumdur. $\mu' = 10$ için yapılan çözümlemede $m_{13}, m_{11}, m_{10}, m_9$ 'a ait sonsal model olasılıkları birbirine çok yakın çıkmıştır. Bunun nedeni bahsedilen çelişkili durumdur.

TSMZMC yönteminde önsel ve sonsal dağılımlar önceki kesimlerde kullanılan dağılımlar olduğundan ve bilgi içerme durumunun bu dağılımlar kullanılarak uygun biçimde yansıtılabildiği önceki kuramsal tartışmalar ile söylenebileceğinden bu kesimde yeniden bir kuramsal tartışma yapılmamıştır.

Bilgi içermeyen bir çözülemeye ilişkin tutarlılık kontrolü için bir diğer yol farklı bir önsel bilgi kullanılarak çözüleme yapılmasıdır. Skorlara ilişkin ikinci önsel bilgi $(-1, 0, 1)^T$ vektörüyle, ana etki ve nominal etkileşim parametrelerine ilişkin ikinci önsel bilgi $(0.25, 0.1, 0.1, 0.1, 1.3, 1.3, 1.3, 1, 1.5, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75, 0.75)^T$ vektörüyle ve satır etki parametrelerine ilişkin ikinci önsel bilgi $(0.25, 0.193, 1.579, 0.1, 2.693, 1.386)^T$ vektörüyle verilsin. Bu önsel bilgi kullanıldığında ve $\mu = 0.33$ alındığında elde edilen sonsal model olasılıkları Çizelge 5.13. ile verilenlere çok yakındır. Bu durumda iki farklı önsel bilgi için elde edilen sonsal model olasılıklarının bilgi içermeyen bir çözüleme açısından tutarlı olduğu söylenebilir.

m_{14} modelinin parametrelerinin ve skorların sonsal kestirimleri, bu model için elde edilen sonsal kestirimlerin ortalaması alınarak elde edilmiştir. Her iki önsel bilgi için elde edilen sonsal kestirimler Çizelge 5.14. ile verilmiştir. Çizelge 5.14.'te "Kestirim 1" satırı, 1. önsel bilgi, "Kestirim 2" satırı ise 2. önsel bilgi kullanılarak elde edilen sonsal kestirimleri vermektedir. Ayrıca her iki önsel bilgi için de elde edilen \hat{R} değerleri sonsal çıkarsamalar için uygundur.

Çizelge 5.14. Bağımlılık durumunda m_{14} modeli için iki önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler.

Parametre	$x_{d_1}^1$	$x_{d_1}^2$	$x_{d_1}^3$	β_0	$\beta_{m_1}^{c_2}$	$\beta_{m_2}^{c_2}$	$\beta_{m_3}^{c_2}$	$\beta_{m_1}^{c_3}$
Kestirim 1	-2.1876	-1.3794	-0.3618	-7.3645	-1.8717	-9.7636	-5.4220	3.4081
Kestirim 2	-2.2978	-1.2388	-0.2083	-6.6301	-2.2106	-8.8897	-5.3706	1.8152
Parametre	$\beta_{m_2}^{c_3}$	$\beta_{m_3}^{c_3}$	$\beta_{m_1}^{c_4}$	$\beta_{m_2}^{c_4}$	$\beta_{m_1}^{c_5}$	$\beta_{m_2}^{c_5}$	$\beta_{m_3}^{c_5}$	$\beta_{m_4}^{c_5}$
Kestirim 1	-0.3631	-1.8326	3.1391	1.9335	-1.9490	-6.2943	-6.3883	-5.7924
Kestirim 2	-1.6077	-2.4075	4.8896	2.9244	-2.3835	-5.9216	-6.0348	-5.6260
Parametre	$\beta_{m_5}^{c_5}$	$\beta_{m_6}^{c_5}$	$\beta_{m_7}^{c_5}$	$\beta_{m_8}^{c_5}$	$\beta_{m_9}^{c_5}$	$\beta_{m_1}^{e_1}$	$\beta_{m_2}^{e_1}$	$\beta_{m_3}^{e_1}$
Kestirim 1	-4.8302	-4.0982	-11.2841	-6.5029	-7.1250	-0.4171	-0.3115	-1.0125
Kestirim 2	-4.7489	-4.1729	-9.6925	-6.1771	-6.5824	-1.0975	-1.6981	-1.2505
Parametre	$\beta_{m_1}^{e_2}$	$\beta_{m_2}^{e_2}$	$\beta_{m_3}^{e_2}$					
Kestirim 1	-1.5051	-1.0212	2.2529					
Kestirim 2	-2.1654	-1.3031	0.1490					

Çizelge 5.14. incelendiğinde iki önsel bilgi için elde edilen sonsal kestirimlerin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bazı parametreler için görülen farklılık tüm parametreler için aynı μ değerinin kullanılmasından kaynaklanmaktadır. Çizelge 5.14.'te verilen kestirimler m_{11} için Çizelge 5.5.'te verilen kestirimler ile karşılaştırıldığında bu iki model-

deki ortak parametrelerin sonsal kestirimlerinin farklı olduğu görülmektedir. Bunun nedeni model seçimi sırasında model belirsizliğinin de göz önünde bulundurulmasıdır. m_{11} modeli ile yapılan çözümlemede bu modelin en iyi model olduğuna ilişkin güçlü önsel bilgi vardır. Ancak TSMZMC yönteminden elde edilen sonuçlarda model belirsizliğinin etkisi en aza indirilmiştir.

Klasik yöntem ile ağrı şiddeti verisine uygun çok sayıda model bulunurken, TSMZMC yöntemi sadece bir modeli en iyi model olarak ortaya çıkarmaktadır. Bu durumda bu veri kümesinin modellenmesinde TSMZMC yönteminin klasik yaklaşımdan daha sağlıklı olduğu söylenebilir.

5.4.2. Örnek 4: Bağımsızlık durumu

Bu kesimde ağrı şiddeti verisi, model parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduklarına ilişkin önsel bilgi bulunduğu durumda çözümlenmiştir. Skorlar ve model parametrelerine ilişkin önsel bilgi Kesim 5.2. ve Kesim 5.4.1.'de verilmiştir. Bunlar 1. önsel bilgi olarak, Kesim 5.4.1.'de ikinci önsel bilgi olarak verilen bilgi ise bu kesimde 2. önsel bilgi olarak kullanılmıştır.

İlk olarak 1. önsel bilgi ve $\mu = 0.3$ için çözümleme yapılmıştır. TSMZMC algoritmasının bağımlılık durumundaki düzenlemelerle çalıştırılması sonucunda elde edilen sonsal model olasılıkları Çizelge 5.15. (sayfa 122) ile verilmiştir.

Çizelge 5.15. incelendiğinde tüm başlangıç modelleri için yine yaklaşık dört adımda bir model değişikliği olduğu görülmektedir. Kullanılan öneri dağılımlarının uygun olduğu söylenebilir. Bağımsızlık durumunda en yüksek sonsal model olasılığına sahip model m_{14} 'tür. Buradan sonsal model olasılıklarının model parametrelerinin kendi aralarında bağımsız olduklarına ilişkin önsel bilgiden etkilenmediği söylenebilir. m_{14} için Kesim 5.4.1.'de yapılan yorumlar burada da geçerlidir. Ayrıca çeşitli μ değerleri için yapılan çözümlemelerde 1.33'ten küçük değerlerden sonsal model olasılıklarının etkilenmediği görülmüştür. Bu konuda bağımlılık durumu için yapılan yorumlar burada da geçerlidir. 2. önsel bilgi ve $\mu = 0.33$ için yapılan çözümleme sonucunda da Çizelge 5.15.'tekinde yakın sonsal model olasılıkları elde edilmiştir.

Çizelge 5.15. Bağımsızlık durumunda TSMZMC yöntemi ile elde edilen sonsal model olasılıkları.

Model	Başlangıç Modeli														Genel
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
1	0.0008	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	< 0.0001
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0714
3	0	0	0.0012	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	< 0.0001
4	0.0021	0	0	0.0040	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0004
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0714
6	0	0	0.0008	0	0	0.0004	0	0	0	0	0	0	0	0	< 0.0001
7	0	0	0	0	0	0	0.0016	0	0	0	0	0	0	0	0.0001
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0024	0	0	0	0	0	0.0001
9	0	0	0.0048	0	0	0.0016	0.0008	0	0	0	0	0	0	0	0.0005
10	0.0029	0	0	0.0020	0	0	0	0	0	0.0004	0	0	0	0	0.0004
11	0	0	0	0	0	0	0	0.0033	0	0	0.0032	0	0	0	0.0005
12	0.0136	0	0.0016	0.0004	0	0.0078	0.0079	0	0	0.0127	0	0.0040	0	0	0.0034
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0012	0	0	0	0	0	< 0.0001
14	0.9805	0	0.9915	0.9935	0	0.9902	0.9896	0.9967	0.9964	0.9869	0.9968	0.9960	1	1	0.8513
T.O.*	0.2417	0.3329	0.2483	0.2479	0.328	0.2563	0.2513	0.2435	0.2506	0.2527	0.2504	0.2473	0.2451	0.2476	0.2603

* Tekrarlama oranı

Bu durumda sonsal model olasılıkları açısından μ 'nün kullanılan değerlerinin bilgi içermeyen bir çözümlene için uygun olduğu söylenebilir. Bağımsızlık durumunda her iki önsel bilgi için elde edilen sonsal kestirimler Çizelge 5.16. ile verilmiştir.

Çizelge 5.16. Bağımsızlık durumunda m_{14} modeli için iki önsel bilgiye karşılık gelen sonsal kestirimler.

Parametre	$x_{d_1}^1$	$x_{d_1}^2$	$x_{d_1}^3$	β_{\emptyset}	$\beta_{m_1}^{c_2}$	$\beta_{m_2}^{c_2}$	$\beta_{m_3}^{c_2}$	$\beta_{m_1}^{c_3}$
Kestirim 1	-2.2926	-1.2569	-0.2545	0.5584	-0.5716	-0.4734	2.4210	7.3454
Kestirim 2	-2.5201	-1.6400	-0.6054	0.2645	-0.6520	-0.5756	1.6120	5.3425
Parametre	$\beta_{m_2}^{c_3}$	$\beta_{m_3}^{c_3}$	$\beta_{m_1}^{c_4}$	$\beta_{m_2}^{c_4}$	$\beta_{m_1}^{c_5}$	$\beta_{m_2}^{c_5}$	$\beta_{m_3}^{c_5}$	$\beta_{m_4}^{c_5}$
Kestirim 1	5.9930	-0.5117	4.5382	5.1723	-0.5622	1.4542	1.4649	2.2422
Kestirim 2	4.0113	-0.5628	6.6886	6.0708	-0.5927	0.6794	0.8017	1.4509
Parametre	$\beta_{m_5}^{c_5}$	$\beta_{m_6}^{c_5}$	$\beta_{m_7}^{c_5}$	$\beta_{m_8}^{c_5}$	$\beta_{m_9}^{c_5}$	$\beta_{m_1}^{e_1}$	$\beta_{m_2}^{e_1}$	$\beta_{m_3}^{e_1}$
Kestirim 1	2.8973	3.4069	-0.5598	1.4566	0.2635	-6.5211	0.2063	-0.0817
Kestirim 2	2.1652	2.6549	-0.5881	0.7348	-0.4589	0.3422	0.0739	0.1025
Parametre	$\beta_{m_1}^{e_2}$	$\beta_{m_2}^{e_2}$	$\beta_{m_3}^{e_2}$					
Kestirim 1	-0.4299	0.4906	3.0769					
Kestirim 2	-0.7073	0.5164	3.2864					

Çizelge 5.16.'dan iki önsel bilgi için yapılan çözümlenmelerden yakın sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Bu durumda, skorlar ve model parametreleri için bilgi içermeyen Bayesci çözümlene yapıldığı düşünülebilir. Bağımlılık ve bağımsızlık durumlarında yapılan çözümlenmeler karşılaştırıldığında sadece skorların sonsal parametre kestirimlerinin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bu durumda bağımsızlığa ilişkin güçlü önsel bilginin parametre kestirimleri üzerinde etkili olduğu söylenebilir. Önsel bilginin çözümlene sürecine dahil edilmesi çözümlene sonucunda ulaşılan yorumları doğrudan etkilemektedir. Bu nedenle bağımsızlığa ilişkin çok güçlü önsel bilgi bulunmadıkça çözümlene için bağımlılık durumunun seçilmesi daha uygundur.

6. SONUÇ ve TARTIŞMA

Çalışmada, tümüyle ordinal değişkenlerin ve karma (ordinal ve nominal) değişkenlerin birlikte oluşturduğu olumsuzluk çizelgeleri için kurulan log-doğrusal modellerin parametrelerinin ve beklenen göze sıklıklarının Bayesci kestirimi ve Bayesci model seçimi üzerinde durulmuştur. Bu bağlamda ordinal değişkenlerin düzeylerine karşılık gelen skorların da raslantı değişkeni olduğu durum ele alınmıştır. Bayesci kestirim kapsamında oluşturulan önsel dağılımlar için değişebilirlik varsayımı göz önünde bulundurulmuştur. Daha sonra skorların raslantı değişkeni olduğu durumda model seçimi için bir tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo yaklaşımı geliştirilmiştir. Log-doğrusal modelde yer alan skorlara, ana etki, ilişki ve satır (sütun) etki parametrelerine ilişkin iki farklı bağımsızlık yapısı dikkate alınmıştır. Bunlar skorlar dışındaki tüm parametrelerin tam bağımsız olduğu ve skorların ve parametrelerin kendi grupları içinde bağımlı, grupların bağımsız olduğu durumlardır. Yapılan tüm çıkarımlar ve model seçimine ilişkin işlemler, her iki bağımsızlık yapısı için ayrı ayrı ele alınmıştır. Bilgi içeren önsel dağılımlar için önsel bilginin araştırmacıdan doğru olarak alındığı varsayımı yapılmaktadır.

Verilen yaklaşımlarda önsel dağılımların belirlenmesi sırasında önsel bilgiye olan güveni ifade eden parametrenin değeri dikkatle belirlenmelidir. Çünkü önsel dağılımın bilgi içeren ya da içermeyen önsel olması buna bağlıdır. Bu parametreye çeşitli değerler atanarak sonsal kestirimlerin elde edilmesi ve bunların çizgesel olarak incelenmesi ile bir duyarlık çözümlemesi yapılabilir. Bu duyarlık çözümlemesi ile parametreler için hangi değer aralıklarında bilgi içeren, hangilerinde bilgi içermeyen sonsal kestirimlerin elde edildiği görülebilir. Ayrıca bu parametre için hangi değerlerin kullanılmaması gerektiği de duyarlık çözümlemesinde görülebilir.

Çalışmanın amacına uygun olarak, olumsuzluk çizelgeleri ve log-doğrusal modellere ilişkin genel bilgi verilmiş ve ilgili log-doğrusal modeller için kullanılacak gösterimler tanıtılmıştır. Log-doğrusal modellerin yorumlanması üzerinde durulmuş ve ordinal değişkenler için skorların belirlenmesi problemi ve parametre kestirimine ilişkin genel bilgi verilmiştir.

Daha sonra Bayesci kestirimlere geçilmiştir. Tümüyle nominal değişkenlerden oluşan

çizelgeler üzerinden kurulan log-doğrusal modellerin parametrelerinin ve beklenen göze sıklıklarının kestirimi için yapılmış olan çalışmalara değinilmiştir. Oluşturulacak önsel dağılımlar için değışebilirlik varsayımı üzerinde durulmuş ve ordinal değışkenlerin oluşturduğu olumsuzluk çizelgeleri için kurulan log-doğrusal modellerin parametrelerinin Bayesci kestirimi yapılmıştır. Bu kestirim için ilk olarak uygun önsel dağılımlar önerilmiş ve önsel bilginin bu önseller kullanılarak ifade edilmesine ilişkin tartışmalar verilmiştir. Daha sonra, sonsal çıkarsamalar için gerekli olan tam koşullu dağılımların çıkarımı yapılmıştır. Bu çıkarımlar iki farklı bağımsızlık yapısı için ayrı ayrı elde edilmiş ve çıkarsama süreci algoritmalar ile ifade edilmiştir.

Log-doğrusal model parametreleri için belirlenen önsel bilgi kullanılarak beklenen göze sıklıklarının önsel dağılımının belirlenmesi ve Bayesci kestirimi üzerinde durulmuştur. Log-doğrusal model parametreleri için verilen önsel bilginin beklenen göze sıklıkları için de tutarlı olduğu gösterilmiştir. Önsel dağılım daha az sayıda parametre için belirlendiğinden bu yaklaşım daha kullanışlıdır.

Üçüncü Bölümde, yukarıda değinilen çıkarım ve öneriler, nominal ve ordinal değışkenlerin oluşturduğu karma olumsuzluk çizelgeleri üzerinden kurulan log-doğrusal modeller için her iki bağımsızlık yapısı altında verilmiştir.

Dördüncü Bölümde, skorların da raslantı değışkeni olduğu durumda model seçimi için kullanılacak tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo yöntemine ilişkin genel bilgi verilmiş ve daha önce önerilmiş önsellerden yararlanarak ilgilenilen durumlar için genel bir yaklaşım elde edilmiştir.

Beşinci Bölümde, önceki bölümlerde yapılan kuramsal çalışmaların kullanıma uygunluğunun çeşitli sayısal örnekler üzerinden incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaçla, ilk olarak sanayi işçilerinin nefes alma test sonuçlarını içeren ve tümüyle ordinal değışkenlerden oluşan bir olumsuzluk çizelgesi üzerinden her iki bağımsızlık yapısı için model parametrelerinin Bayesci kestirimi yapılmıştır. İkinci sayısal örnek olarak iki nominal ve bir ordinal değışkenden oluşan ağırlı şiddeti veri kümesi üzerinden oluşturulan bir log-doğrusal modelin Bayesci parametre kestirimi yapılmıştır. Her iki sayısal örnekte

de önerilmiş olan yaklaşımlar ile önsel bilginin uygun biçimde yansıtıldığı ve bilgi içermeyen çözümlenme yapıldığında örneklemin içerdiği bilginin başarıyla ortaya çıkarıldığı görülmüştür. İki örnekte de kestirimlerin bağımsızlığa ilişkin varsayımlardan etkilendiği ve skorların sabit olarak belirlenmesi ile Bayesci yoldan kestirilmesi arasında önemli farklılıklar olduğu görülmüştür. Üçüncü sayısal örnekte TÜİK tarafından yayımlanan eğitim durumu - mutluluk düzeyi çaprazlaması kullanılmış ve bu olumsuzluk çizelgesi üzerinden skorların ve beklenen göze sıklıklarının Bayesci kestirimi yapılmıştır. Bu örnekte elde edilen sonuçlar önceki iki örnekte elde edilenler ile uyumludur. Son sayısal örnekte ağrı şiddeti veri kümesi üzerinden oluşturulan log-doğrusal modeller için model seçimi yapılmıştır. Ağrı şiddeti veri kümesinin log-doğrusal modeller ile yapılan klasik çözümlenmelerinde bir çok model bu veri kümesine uygun bulunmaktadır. Ağrı şiddeti veri kümesi için önerilmiş olan tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo yaklaşımı ile yapılan model seçimi sonucunda her iki bağımsızlık yapısı için uygun model olarak aynı model elde edilmiştir. Model seçimi için elde edilen sonsal model olasılıkları bağımsızlık yapısından çok etkilenmezken, elde edilen parametre kestirimleri bundan etkilenmiştir.

Bu çalışmayı ileriye götürececek araştırma önerileri,

- Tersinir sıçramalı Markov zinciri Monte Carlo yaklaşımı ile beklenen göze sıklıkları üzerinden çalışarak model seçimi ile beklenen göze sıklıklarının kestiriminin eşanlı olarak yapılması,
- Ordinal değişken içeren ve örneklem sıfırlarının bulunduğu seyrek (sparse) çizelgelerde beklenen göze sıklıklarının Bayesci yaklaşım ile kestirilmesi,
- Kullanılan önsel dağılımdaki duyarlık parametrelerini bir duyarlık çözümlenmesine gerek olmadan belirleyen bir yaklaşım geliştirilmesi

biçiminde verilebilir.

KAYNAKLAR

- Abramowitz, M., Stegun, I.A., 1971, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, 55, Washington.
- Agresti, A., 1984, Analysis of Ordinal Categorical Data, Wiley, New York.
- Agresti, A., 1999, Modelling ordered categorical data: Recent advances and future challenges, *Statistics in Medicine*, 2191-2027.
- Agresti, A., 2002, Categorical Data Analysis, Wiley, New York.
- Agresti, A., Hitchcock, D.B., 2005, Bayesian inference for categorical data analysis, *Statistical Methods and Applications*, 14, 297-330.
- Akaike, H., 1973, Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, In Proc. 2nd Int. Symp. Information theory (eds B.N. Petrov and F. Csaki), Budapest: Akademiai Kiado, 267-281.
- Albert, J.H., 1996, Bayesian selection of log-linear models, *The Canadian Journal of Statistics*, 24, 327-347.
- Bernardo, J.M., Smith, A.F.M., 1994, Bayesian Theory, Wiley, New York.
- Bishop, Y.M.M., Fienberg, S.E., Holland, P.W., 1975, Discrete Multivariate Analysis: Theory and Practice, The MIT Press, London.
- Bloch, D.A., Watson, G.S., 1967, Bayesian study of multinomial distribution., *The Annals of Mathematical Statistics*, 38, 1423-1435.
- Brooks, P. S., 1998, Markov chain Monte Carlo method and its application, *The Statistician*, 47, 69-100.
- Chen, M.-H., Dey, D.K., Ibrahim, J.G., 2004, Bayesian criterion based model assesment for categorical data, *Biometrika*, 91, 1, 45-63.
- Chen, M.-H., Shao, Q.-M., Ibrahim, J.G., 2000, Monte Carlo Methods in Bayesian Computation, Springer, New York.
- Chen, Z., Dunson, D.B., 2003, Random effects selection in linear mixed models. *Biometrics*, 59 762–769.
- Christensen, R., 1990, Log-linear Models, Springer-Verlag, New York.
- Chuang C., 1983, Multiplicative-interaction logit models for $I \times J \times 2$ three-way tables, *Communications in Statistics, Theory and Methods*, 12, 2871-2885.
- Dellaportas, P., Forster, J.J., 1999, Markov chain Monte Carlo model determination

- for hierarchical and graphical log-linear models, *Biometrika*, 86:615-633.
- Dellaportas, P., Forster, J.J., Ntzoufras, I., 2002, On Bayesian model and variable selection using MCMC, *Statistics and Computing*, 12, 27-36.
- Demirhan, H., 2004, Logaritmik Doğrusal Modellerde Parametrelerin ve Beklenen Göze Sıklıklarının Bayesci Kestirimi, basılmamış bilim uzmanlığı tezi, H.Ü., Ankara.
- Demirhan, H., Hamurkaroğlu, C., 2006, A Bayesian approach to the estimation of expected cell counts by using log linear models, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 35, 2, 325-335.
- Demirhan, H., Hamurkaroğlu, C., 2006a, Specification of hyper-parameters for normal prior distributions induced on log-linear parameters, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 35, 91-102.
- Demirhan, H., Hamurkaroğlu, C., 2008, Bayesian estimation of log odds ratios from $R \times C$ and $2 \times 2 \times K$ contingency tables, *Statistica Neerlandica*, 62, 4, 405-424.
- Erdemir, C., Kadilar, C., 2003, *Benzetim Tekniklerine Giriş*, Hacettepe Üniversitesi Yayınları, Ankara.
- Evans, M., Gilula, Z., Guttman, I., 1993, Computational issues in the Bayesian analysis of categorical data: Log-linear and Goodman's RC model, *Statistica Sinica*, 3, 391-406.
- Fishman G.S., 1995, *Monte Carlo: Concepts, Algorithm and Applications*, Springer, New York.
- Forster, J.J., Webb E.L., Bayesian Model Determination for Multivariate Ordinal and Binary Data, <http://www.maths.soton.ac.uk/staff/JJForster/Papers/ordinal.pdf>, Erişim tarihi: Mayıs, 2006.
- Forthofer, R.N., Lehnen, R.G., 1981, *Public Program Analysis*, Life Time Learning Pub., Belmont, sy. 21.
- Gamerman, D., 1997, *Markov Chain Monte Carlo Stochastic Simulation for Bayesian Inference*, Chapman and Hall, London.
- Gelfand, A.E., Ghosh, S.K., 1998, Model choice: A minimum posterior predictive loss approach, *Biometrika*, 85, 1-13.
- Gelman, A., 1996, Inference and monitoring convergence, in *Markov Chain Monte Carlo* (eds. W.R. Gilks, S. Richardson, D.J. Spiegelhalter), Chapman&Hall/CRC, London.

- Gelman, A., Carlin, J.B., Stern, H.S., Rubin, D.B., 2003, *Bayesian Data Analysis*, Second Edition, Chapman&Hall/CRC, New York.
- Goodman, L.A., 1979, Simple models for analysis of association in cross-classifications having ordered categories, *JASA*, 74, 537-552.
- Goodman, L.A., 1983, The analysis of dependence in cross-classifications having ordered categories, using log-linear models for frequencies and log-linear models for odds, *Biometrics*, 39, 149-160.
- Graubard, B.I., Korn, E.L., 1987, Choice of column scores testing independence in ordered 2xK contingency tables, *Biometrics*, 43, 471-476.
- Green, P.J., 1995, Reversible jump Markov chain Monte Carlo computation and Bayesian model determination, *Biometrika*, 82, 4, 711-732.
- Green, E.G., Park, T., 2004, Bayesian methods for contingency tables using Gibbs sampling, *Statistical Papers*, 45, 33-50.
- Grizzle, J.E., Starmer, C.F., Koch, G.G., 1969, Analysis of categorical data by linear models, *Biometrics*, 25, 489-504.
- Hoeting, J.A., Madigan, D., Raftery, A.E., Volinsky, C.T., 1999, Bayesian model averaging: A tutorial, *Statistical Science*, 14, 4, 382-417.
- Ibrahim, J.G., Chen, M.-H., Sinha, D., 2001, Criterion based methods for Bayesian model assessment, *Statistica Sinica*, 11, 419-443.
- Iliopoulos, G., Kateri M., Ntzoufraz, I., 2007, Bayesian estimation of unrestricted and order-restricted association models for a two-way contingency table, *Computational Statistics and Data Analysis*, 51, 9, 4643-4655.
- James, F., 1990, A review of pseudorandom number generators, *Computer Physics Communications*, 60, 3, 329-344.
- Kateri, M., Nicolaou, A., Ntzoufraz, I., 2005, Bayesian inference for the RC(m) association model, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 14, 116-138.
- Khuri, A., 2003, *Advanced Calculus for Statistics*, New York, Wiley.
- King, R., Brooks, S.P. 2001, Prior induction in log-linear models for general contingency table analysis, *The Annals of Statistics* 29, 3:715-747.
- Knuiman, M.W., Speed, T.P. 1988, Incorporating prior information into the analysis of contingency tables, *Biometrics* 44:1061-1071.
- Kotz, S., Balakrishnan, N., Johson, N.L., 1995, *Continuous Univariate Distributions*,

- Vol.2, Wiley, New York.
- Kotz, S., Balakrishnan, N., Johnson, N.L., 2000, Continuous Multivariate Distributions, Vol.1, Wiley, New York.
- Laird, N.M., 1978, Empirical Bayes methods for two-way contingency tables, *Biometrika*, 65, 581-590.
- Leighty, R.M., Johnson, W.J. 1990, A Bayesian log-linear model analysis of categorical data, *Journal of Official Statistics* 6, 2:133-155.
- Lenonard, T. 1975, Bayesian estimation methods for two-way contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B* 37:23-37.
- Lindley, D.V., 1964, The Bayesian analysis of contingency tables. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 34,1-41.
- Liu, I., Agresti, A., 2005, The analysis of ordered categorical data: Overview and a Survey of recent developments, *Test*, 14, 1-73.
- Madigan, D., Raftery, A.E., 1994, Model selection and accounting for model uncertainty in graphical models using Occam's window, *JASA*, 89, 1535-1546.
- Marsaglia, G., Zaman, A., 1987, Toward a Universal Random Number Generator, Florida State University Report: FSU-SCRI-87-50.
- Murata, N., Yoshizawa, S., Amari, S., 1994, Network information criterion-determining the number of hidden units for artificial neural network models, *IEEE Trans. Neur. Netwrks*, 5, 865-872.
- Nazaret, W. 1987, Bayesian log-linear estimates for three-way contingency tables. *Biometrika* 74:401-410.
- Nomoto, S., Kishi, Y., Nanba, S. 2004, Multivariate gamma distributions and their numerical evaluations for M-branch selection diversity study, *Electronics and Communications in Japan, Part 1*, 87, 8, 1-12.
- R Project, <http://www.r-project.org/>, erişim tarihi: Mayıs 2007.
- Raftery, A.E., 1996, Approximate Bayes factors and accounting for model uncertainty in generalized linear models, *Biometrika*, 83, 251-266.
- Schmelzer, T., Trefethen, L.N., 2007, Computing the gamma function using contour integrals and rational approximations, *Siam Jounl of Numerical Analysis*, 45, 2, 558-571.
- Schwartz, W. 1978, Estimating the dimension of a model, *The Annals of Statistics*, 6,

- 461-466.
- Smith, O.E., Adelfang, S.I., Tubbs, J.D., 1982, A bivariate gamma probability distribution with application to gust modelling, NASA Technical Report TM-82483.
- Spiegelhalter, D.J., Best, N.G., Carlin, B.P., van der Linde, A., 2002, Bayesian measures of model complexity and fit, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 64, 4, 583-639.
- Spiegelhalter, D.J., Smith, A.F.M., 1982, Bayes factors for linear and log-linear models with vague prior information, *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 44, 377-387.
- Takeuchi, K., 1976, Distribution of informational statistics and a criterion for model fitting, *Suri-Kagaku*, 153, 12-18.
- Walsh, B., 2002, Markov Chain Monte Carlo and Gibbs sampling, lecture notes for EEB 596z, nitro.biosci.arizona.edu/courses/EEB596/handouts/gibbs.pdf, erişim tarihi: Ekim, 2003.
- Weisstein, E. W., "Digamma Function." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/DigammaFunction.html>, Son erişim tarihi: Haziran, 2009-a.
- Weisstein, E. W., "Trigamma Function." From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/TrigammaFunction.html>, Son erişim tarihi: Haziran, 2009-b.
- Wolfram Research, <http://functions.wolfram.com/webMathematica/FunctionEvaluation.jsp?name=PolyGamma>, Son erişim tarihi: Haziran, 2009-a.
- Wolfram Research, <http://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/Pochhammer>, Son erişim tarihi: Haziran, 2009-b.
- Yanai, H., Takane, Y., Ishii, H., 2006, Nonnegative determinant of a rectangular matrix: Its definition and applications to multivariate analysis, *Linear Algebra and its Applications*, 417, 259-274.
- Yardımcı, A., 1992, Çoklubağlantılı Çoklu Doğrusal Regresyonda Bayes Yaklaşımı, Basılmamış Bilim Uzmanlığı Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Zhuchkov, A., <http://www.torry.net/authorsmore.php?id=3453>, Erişim tarihi: Temmuz 2007.

EKLER DİZİNİ

EK 1. $\Gamma(\cdot)$ FONKSİYONU İÇİN KULLANILAN YAKLAŞIM

EK 2. GIBBS ÖRNEKLEMESİ ALGORİTMASI

EK 3. METROPOLIS-HASTINGS ALGORİTMASI

EK 4. ÇOK DEĞİŞKENLİ LOG-GAMMA DAĞILIMININ NORMALLEŞTİRİLMESİ

EK 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ LOG-GAMMA DAĞILIMLI RASLANTI DEĞİŞKENİNİN BEKLENEN DEĞERİ ve VARYANSI

EK 6. GENELLEŞTİRİLMİŞ LOG-GAMMA DAĞILIMINDAN RASGELE SAYI ÜRETİLMESİ ve REDDETME YÖNTEMİ

EK 7. GENELLEŞTİRİLMİŞ ÇOK DEĞİŞKENLİ LOG-GAMMA DAĞILIMLI RASLANTI DEĞİŞKENLERİNİN MARJİNAL BEKLENEN DEĞERİ, VARYANSI ve İLİŞKİ YAPISI

EK 8. ÇALIŞMADA KULLANILAN GENEL ARAMA ALGORİTMASI

EK 9. POCHHAMMER SEMBOL

EK 10. MUTLULUK DÜZEYİ VERİ KÜMESİ

EK 1. $\Gamma(\cdot)$ Fonksiyonu için Kullanılan Yaklaşım

$\Gamma(\nu + n)$ fonksiyonuna sayısal bir yaklaşım geliştirmek için bağılanım (regression) modellemesi kullanılmıştır. Kullanılan model $y = \beta_0(\beta_1)^n(\beta_2)^\nu \epsilon$ biçimindedir. Bu yapıda bir modelin seçilmesinin nedeni, sonsal çıkarsamalar için uygun bir tam koşullu dağılımın bu yapıdaki bir model ile elde edilebiliyor olmasıdır. Model $\log(y) = \log(\beta_0) + \log(\beta_1)n + \log(\beta_2)\nu + \log(\epsilon)$ biçiminde doğrusallaştırılmıştır. y , $\Gamma(\nu + n)$ için MS Excel ile hesaplanan değerler olmak üzere $\log(\beta_0)$, $\log(\beta_1)$ ve $\log(\beta_2)$ 'nin en küçük kareler kestirimleri elde edilmiştir.

a_t , toplamdaki t . terim olmak üzere, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}/a_n) < 1$ olduğundan Eş. 3.33'te görülen toplam yakınsaktır. İlk birkaç teriminden sonra seriyi oluşturan terimlerin payda değerleri pay değerlerine göre çok büyümekte ve serinin terimleri hızla sıfıra yaklaşmaktadır. Bu durumda, $\Gamma(\nu + n)$ için kullanılacak yaklaşımın n 'nin sıfıra yakın değerleri için diğer değerlere göre daha iyi sonuç vermesi gerekmektedir. Yaklaşım için $n = 1, 1.5, 2, 2.5, \dots, 9.5, 10$ ve $\nu = 0.9, 1, 1.05, 1.1, \dots, 4.95, 5$ değerlerinde $\Gamma(\nu + n)$ hesaplanmış ve doğrusallaştırılmış olan bağılanım modeli üzerinden $\log(\beta_0)$, $\log(\beta_1)$ ve $\log(\beta_2)$ kestirilmiştir. Sonuç olarak elde edilen yaklaşım $\Gamma(\nu + n) \approx \exp(-7.24663 + 2.07728n + 1.9922\nu)$ biçimindedir.

$\Gamma(\nu + n) \approx \exp(-7.24663 + 2.07728n + 1.9922\nu)$ (Y1) ile Abramowitz and Stegun (1971) tarafından verilen $\Gamma(\nu + n) \approx \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{\nu+n-1/2}$ (Y2) yaklaşımı çalışmada üzerinde durulan tam koşullu dağılım dikkate alınarak karşılaştırılmıştır. Karşılaştırma için E , MS Excel ile bulunan $\Gamma(\nu + n)$ değerini göstermek üzere her (n, ν) ikilisi için $(Y1 - E)/E$ ve $(Y2 - E)/E$ değerleri (ortalama görelî hata değerleri) hesaplanmış ve bu değerlerin aritmetik ortalaması bulunmuştur. Y1 ve Y2 için bulunan ortalama görelî hatalar sırasıyla 0.465965571 ve 0.502733044'tür. Bu durumda ele alınan (n, ν) ikilileri için Y1'in Y2'den daha iyi bir yaklaşım olduğu söylenebilir. Y2, Stirling yaklaşımına dayanmaktadır ve bu yaklaşımın gamma fonksiyonu için halen güçlü bir yaklaşım olduğu belirtilmektedir (Schmelzer and Trefethen, 2007). Çalışmanın amacına uygun olarak düşünüldüğünde, Y1, Y2'den daha iyi olduğunun Y1'in kullanılabileceği söylenebilir.

EK 2. Gibbs Örnekleme Algoritması

İlk olarak $\beta^0 = (\beta_1^0, \dots, \beta_p^0)$ başlangıç değerleri seçilir. Yakınsama hızını artırmak için başlangıç değerlerinin dağılımının merkezine yakın seçilmesi önerilmektedir (Walsh, 2002). Daha sonra ard arda

β_1^1 için $p(\beta_1 | \beta_2^0, \beta_3^0, \dots, \beta_p^0)$ tam koşullu dağılımından,

β_2^1 için $p(\beta_2 | \beta_1^1, \beta_3^0, \dots, \beta_p^0)$ tam koşullu dağılımından,

⋮

β_p^1 için $p(\beta_p | \beta_1^0, \beta_2^0, \dots, \beta_{p-1}^0)$ tam koşullu dağılımından,

rasgele seçimler yapılır. Bunun sonucunda β^0 'dan β^1 'e geçilmiş ve bir döngü tamamlanmış olur. Bu adımlar devam ettirilir ve β^0, \dots, β^n Gibbs dizisi oluşturulur. n yakınsamanın sağlandığı döngü ile belirlenir. Gibbs örnekleme algoritmasının uygulanması sırasında bir tane uzun zincir oluşturulabileceği gibi daha kısa, çok sayıda zincir de oluşturulabilir. Birden çok zincir oluşturmanın yararı örneklem uzayının sadece bir bölgesinde değil birçok farklı bölgesinde çalışarak örneklem uzayının tamamının kapsanmasıyla kestirimlerdeki yanın azaltılmasıdır (Brooks, 1998). Bu durumda k . zincir için $\beta^{0k}, \dots, \beta^{nk}$ Gibbs dizisi elde edilir.

Yakınsama kontrolü için birden çok zincirin oluşturulması durumunda gizil ölçek indirgeme ölçütü kullanılabilir. m tane paralel zincir oluşturun. Her zincirde n gözlem kaydedilsin. $i = 1, \dots, n$ ve $k = 1, \dots, m$ olmak üzere β^{ik} kestirilecek parametreye ilişkin k . zincirdeki i . gözlemi ifade etsin. j . parametre için zincir içi ve zincirler arası varyanslar

$$B_j = \frac{n}{m-1} \sum_{k=1}^m (\bar{\beta}_j^{k\cdot} - \bar{\beta}_j^{\cdot\cdot})^2 \quad (\text{EK 2.1})$$

ve

$$W_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m s_{jk}^2 \quad (\text{EK 2.2})$$

biçimindedir. Eş. EK 2.1 ve EK 2.2'de $\bar{\beta}_j^{:k} = \frac{1}{n} \sum_{i=a}^n \beta_j^{ik}$, $\bar{\beta}_j = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{\beta}_j^{:k}$ ve $s_{jk}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=a}^n (\beta_j^{ik} - \bar{\beta}_j^{:k})^2$ biçimindedir. Her parametreye ilişkin marjinal sonsal varyans

$$\widehat{V}(\beta_j|y) = \frac{n-1}{n} W_j + \frac{1}{n} B_j$$

ile elde edilir. $n \rightarrow \infty$ durumunda W_j , $V(\beta_j|y)$ 'ye yakınsar. Bu durumda gizil ölçek indirgeme ölçütü

$$\widehat{R}_j = \left(\frac{\widehat{V}(\beta_j|y)}{W_j} \right)^{1/2}$$

biçiminde verilmektedir (Gelman, 1996; Gelman et al., 2003). Yakınsama sağlanması durumunda \widehat{R}_j , 1'e yaklaşır. Yakınsama durumu \widehat{R}_j 'nin 1'e yakınlık miktarı ile değerlendirilebilir. Gelman (1996), \widehat{R}_j 'nin 1.2'nin altında ve 1'e yakın olduğu durumda j . parametre için yakınsamanın sağlandığı yorumunun yapılabileceğini belirtmektedir.

Yakınsama sağlandıktan sonra sonsal parametre kestirimi $\widetilde{\beta}_j$,

$$\widetilde{\beta}_j = \frac{1}{m(n-a)} \sum_{k=1}^m \sum_{i=a}^n \beta_j^{ik}$$

ile bulunur (Gamerman, 1997). Burada $1 < a < n$ biçimindedir. Bunun nedeni başlangıç değerlerinin denge dağılımı üzerindeki etkisini azaltmak için Gibbs dizisindeki başından a tane döngünün (burn-in period) dışarıda bırakılmasıdır. Ayrıca Gibbs dizisi oluşturulurken otokorelasyonu azaltmak amacıyla her m döngüde bir kayıt yapılabilir (Walsh, 2002).

EK 3. Metropolis-Hastings Algoritması

İlgilenilen $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_p)$ vektörü p elemanlı olsun. $i = 1, \dots, p$ için algoritmanın her adımında $\boldsymbol{\beta}$ 'nin ilgilenilen elemanı β_i olsun, Metropolis-Hastings algoritması $q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*)$ öneri dağılımının belirlenmesi ile başlar. Burada $\boldsymbol{\beta}_{-i} = (\beta_j, j \neq i)$ ve $\boldsymbol{\beta}_{-i}^* = (\beta_j^*, j \neq i)$ için $\boldsymbol{\beta}_{-i} = \boldsymbol{\beta}_{-i}^*$ biçimindedir. $q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*)$ dağılımından bir aday nokta üretilir ve $\boldsymbol{\beta}^*$ 'da yerine yazılır; $\boldsymbol{\beta}^* = (\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_i^*, \beta_{i+1}, \dots, \beta_p)$. Üretilmiş olan aday nokta α olasılığı ile kabul edilir.

$$\alpha(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*) = \text{enk} \left[1, \frac{p(\boldsymbol{\beta}^*)q(\boldsymbol{\beta}^*, \boldsymbol{\beta})}{p(\boldsymbol{\beta})q(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}^*)} \right].$$

Üretilen aday nokta kabul edilmezse yeni bir aday nokta üretilir ve işlemlere yakınsama sağlanıncaya kadar devam edilir (Brooks, 1998).

EK 4. Çok Değişkenli Gamma Dağılımının Normalleştirilmesi

Çok değişkenli gamma dağılımı için yaklaşık olarak verilen fonksiyonun olasılık yoğunluk fonksiyonu özelliğini sağlaması için

$$k \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \delta^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} (1-\delta)^n \prod_{j=1}^p \frac{1}{\Gamma(\nu+n)} \left(\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right)^{\nu+n-1} \exp \left\{ -\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right\} dy_j = 1 \quad (\text{EK 4.1})$$

olmalıdır. Eş. EK 4.1'den

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \delta^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} (1-\delta)^n \prod_{j=1}^p \frac{1}{\Gamma(\nu+n)} \left(\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right)^{\nu+n-1} \exp \left\{ -\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right\} dy_j \\ &= \frac{\delta^\nu}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)^{1-p}}{n!} (1-\delta)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^p \left(\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right)^{\nu+n-1} \exp \left\{ -\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right\} dy_j, \end{aligned} \quad (\text{EK 4.2})$$

Eş. EK 4.2'de $y_j/\lambda_j\delta = u_j$ dönüşümü yapıldığında,

$$\begin{aligned} & \frac{\delta^\nu}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)^{1-p}}{n!} (1-\delta)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \prod_{j=1}^p (u_j)^{\nu+n-1} e^{-u_j} \delta \lambda_j du_j \\ &= \frac{\delta^{\nu+p}}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)^{1-p}}{n!} (1-\delta)^n (\Gamma(\nu+n))^p \prod_{j=1}^p \lambda_j \quad (\text{EK 4.3}) \\ &= \delta^{\nu+p} \left(\prod_{j=1}^p \lambda_j \right) \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} (1-\delta)^n \end{aligned}$$

elde edilir. Eş. EK 4.3'te görülen toplam $(1 - (1 - \delta))^{-\nu}$ 'nün negatif binom açılımına eşittir. Bu durumda normalleştirme sabiti $k = (\delta^p \prod_{j=1}^p \lambda_j)^{-1}$ biçiminde elde edilir.

EK 5. Log-Gamma Dağılımlı Raslantı Değişkeninin Beklenen Değeri ve Varyansı

X sürekli raslantı değişkeni için $X \sim \text{Gamma}(\nu, \lambda)$ olsun. Bu durumda $Y = \log X$ biçiminde tanımlanan Y raslantı değişkeni için $Y \sim \text{Log-Gamma}(\nu, \lambda)$ olur ve

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = E(e^{t \log X}) = E(X^t) \quad (\text{EK 5.1})$$

elde edilir. Log-Gamma dağılımlı bir raslantı değişkenin moment çıkaran fonksiyonu Gamma dağılımlı bir raslantı değişkeni için Eş. EK 5.1'de verilmiş olan beklenen değere eşittir. Bu durumda,

$$M_Y(t) = E(X^t) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda^\nu \Gamma(\nu)} x^{t+\nu-1} e^{-x/\lambda} dx \quad (\text{EK 5.2})$$

biçimindedir. Eş. EK 5.2'de $x/\lambda = u$ dönüşümü yapılırsa

$$M_Y(t) = E(X^t) = \frac{(\lambda)^{t+\nu}}{\lambda^\nu \Gamma(\nu)} \int_0^{\infty} u^{t+\nu-1} e^{-u} du = \frac{(\lambda)^t \Gamma(t+\nu)}{\Gamma(\nu)} \quad (\text{EK 5.3})$$

elde edilir. Eş. EK 5.3'ten

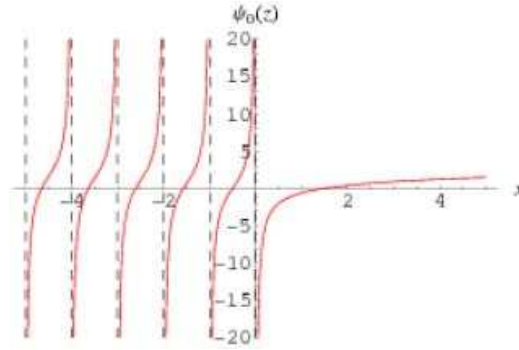
$$\begin{aligned} E(Y) &= \left. \frac{dM_Y(t)}{dt} \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left[\lambda^t \log(\lambda) \Gamma(t+\nu) + \Gamma(t+\nu) F(\nu+t) \lambda^t \right]_{t=0} \\ &= \log(\lambda) + F(\nu) \end{aligned} \quad (\text{EK 5.4})$$

biçiminde elde edilir. Eş. EK 5.4'te $F(\cdot)$ digamma fonksiyonudur ve çizimi Şekil EK 5.1 ile verilmiştir (Weisstein, 2009-a). Eş. EK 5.3'ten

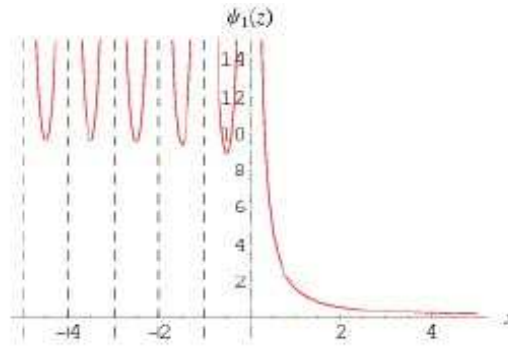
$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \left. \frac{d^2 M_Y(t)}{dt^2} \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \left[\lambda^t (\log(\lambda))^2 \Gamma(t+\nu) + \Gamma(t+\nu) F(\nu+t) \lambda^t \log(\lambda) \right. \\ &\quad \left. + [\Gamma(t+\nu) (F(\nu+t))^2 + \Gamma(t+\nu) F^{[1]}(\nu+t)] \lambda^t \right. \\ &\quad \left. + \lambda^t \log(\lambda) \Gamma(t+\nu) F(\nu+t) \right]_{t=0} \\ &= (\log(\lambda))^2 + 2 \log(\lambda) F(\nu) + (F(\nu))^2 + F^{[1]}(\nu) \end{aligned} \quad (\text{EK 5.5})$$

yazılabilir. Eş. EK 5.5'te $F^{[1]}(\cdot)$ trigamma fonksiyonudur ve çizimi Şekil EK 5.2 ile verilmiştir (Weisstein, 2009-b). Eş. EK 5.4 ve EK 5.5'ten $V(Y) = F^{[1]}(\nu)$ elde edilir.

Eğer dönüşüm $Y = \log(X)/\mu$ biçiminde tanımlanırsa Y raslantı değişkeni için $Y \sim \text{G-Log-Gamma}(\nu, \lambda, \mu)$ olur. Bu durumda $E(Y) = [\log(\lambda) + F(\nu)]/\mu$ ve $V(Y) = F^{[1]}(\nu)/\mu^2$ olarak elde edilir.



Şekil EK 5.1. Digamma fonksiyonunun çizimi



Şekil EK 5.2. Trigamma fonksiyonunun çizimi

EK 6. Genelleştirilmiş Log-Gamma Dağılımından Rasgele Sayı Üretilmesi ve Reddetme Yöntemi

$X \sim \text{Gamma}(\nu, \lambda)$ ise $Y = \log(X)/\mu \sim \text{G-Log-Gamma}(\nu, \lambda, \mu)$ biçimindedir. G-Log-Gamma(ν, λ, μ) dağılımlı Y raslantı değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(y) = \frac{\mu}{\lambda^\nu \Gamma(\nu)} \exp \left\{ \nu \mu y - \frac{1}{\lambda} e^{\mu y} \right\}, y \in \mathbb{R},$$

beklenen değeri $E(Y) = (\log(\lambda) + F(\nu))/\mu$ ve varyansı $V(Y) = F^{[1]}(\nu)/\mu^2$ biçimindedir.

Genelleştirilmiş log-gamma dağılımından rasgele sayı üretmek için gamma dağılımından rasgele sayı üretilip logaritması alınır ve μ 'ye bölünür. Gamma dağılımından rasgele sayı üretmek için aşağıdaki algoritma kullanılır (Erdemir ve Kadılar, 2003):

Gamma(ν, λ) dağılımından rasgele sayı üretme algoritması

- A1. ν ve λ değerleri alınır.
- A2. $i = 0$ ve $p = 1$ atanır.
- A3. $i = i + 1$ alınır.
- A4. Tekbiçimli(0, 1)'den bir rasgele sayı U_i üretilir.
- A5. $p = p \cdot U_i$ hesaplanır.
- A6. Eğer $i < \lambda$ ise A3.'e gidilir.
- A7. $x = (-1/\nu) \log p$ hesaplanır.
- A8. Durulur.

Herhangi bir $f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonundan rasgele sayı üretmek için Fishman (1995, sy. 172) tarafından verilen reddetme algoritması aşağıdaki gibidir:

Reddetme yöntemi ile herhangi bir $f(x)$ 'ten rasgele sayı üretme algoritması

- RA1. $f(x)$, $f(x) = cg(x)h(x)$ olacak biçimde ayrıştırılır. Burada c bir sabit, $a < x < b$ olmak üzere $h(x)$ bir olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $g(x)$ bir fonksiyondur.
- RA2. $h(x)$ 'ten bir X üretilir.
- RA3. Tekbiçimli(0, 1)'den bir rasgele sayı U üretilir.

RA4. $g(x)$ hesaplanır.

RA5. Eğer $U > g(x)$ ise RA2.'ye gidilir; değilse RA6.'ya gidilir.

RA6. X kabul edilir ve durulur.

Reddetme yönteminin çalışmada ele alınan konulara uygulanışını açıklamak için bağımlılık durumunda Eş. 3.34 ve bağımsızlık durumunda Eş. 3.39 ile verilmiş olan olasılık yoğunluk fonksiyonlarından rasgele sayı üretimi üzerinde durulacaktır. Eş. 3.34'ten reddetme yöntemi ile rasgele sayı üretmek için reddetme algoritmasında

$$\begin{aligned}
 f(x_{d_i}) &= \exp \left\{ (\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d_i}) x_{d_i} - s b t^S e^{\mu_{d_i}^S x_{d_i}} \right\}, \\
 h(x_{d_i}) &= a \exp \left\{ \nu^S \mu_{d_i}^S x_{d_i} - s b t^S e^{\mu_{d_i}^S x_{d_i}} \right\}, x_{d_i} \in \mathbb{R}, \\
 g(x_{d_i}) &= \exp \left\{ - \text{mut}(S_{d_i}) x_{d_i} \right\}
 \end{aligned} \tag{EK 6.1}$$

olarak alınır. Burada a orantı sabiti, $\text{mut}(\cdot)$ mutlak değer, $(\nu^S \mu_{d_i}^S + S_{d_i}) < 0$, $\nu^S \mu_{d_i}^S > 0$ ve $h(x_{d_i})$, G-Log-Gamma($\nu^S \mu_{d_i}^S, 1/s b t^S, \mu_{d_i}^S$) dağılımına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu ile orantılıdır. Orantı sabiti a , reddetme algoritmasındaki c sabitinde yer alır.

Eş. 3.39'dan reddetme yöntemi ile rasgele sayı üretmek için reddetme algoritmasında

$$\begin{aligned}
 f(\beta_{m_i}^c) &= \exp \left\{ (\nu_{m_i}^c - 1 + S_c) \beta_{m_i}^c - \exp\{\beta_{m_i}^c\} / \lambda_{m_i}^c \right\}, \\
 h(\beta_{m_i}^c) &= b \exp \left\{ \nu_{m_i}^c \beta_{m_i}^c - \exp\{\beta_{m_i}^c\} / \lambda_{m_i}^c \right\}, \beta_{m_i}^c \in \mathbb{R}, \\
 g(\beta_{m_i}^c) &= \exp \left\{ - \text{mut}(S_c - 1) \beta_{m_i}^c \right\}
 \end{aligned} \tag{EK 6.2}$$

olarak alınır. Burada b orantı sabiti, $(\nu_{m_i}^c - 1 + S_c) < 0$, $\nu_{m_i}^c > 0$ ve $h(\beta_{m_i}^c)$, Log-Gamma($\nu_{m_i}^c, \lambda_{m_i}^c$) dağılımına ilişkin olasılık yoğunluk fonksiyonu ile orantılıdır. Orantı sabiti b , reddetme algoritmasındaki c sabitinde yer alır.

EK 7. Genelleştirilmiş Çok Değişkenli Log-gamma Dağılımlı Raslantı Değişkenlerinin Marjinal Beklenen Değeri, Varyansı ve İlişki Yapısı

$Z \sim G\check{C}DLG(\nu, \delta, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ ise Z raslantı değişkeninin bileşik moment çıkararak fonksiyonu $M_Z(\mathbf{t}) = E(e^{\sum_{j=1}^p Z_j t_j})$ eşitliği ile elde edilir. Bu eşitlikte $Z_j = \log(Y_j/\delta)/\mu_j$ yerine konulduğunda

$$\begin{aligned} M_Z(\mathbf{t}) &= E \left[\left(\frac{Y_1}{\delta} \right)^{t_1/\mu_1} \cdots \left(\frac{Y_p}{\delta} \right)^{t_p/\mu_p} \right] \\ &= k \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left[\prod_{j=1}^p \left(\frac{y_j}{\delta} \right)^{t_j/\mu_j} \right] \delta^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} (1-\delta)^n \\ &\quad \times \prod_{j=1}^p \frac{1}{\Gamma(\nu+n)} \left(\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right)^{\nu+n-1} \exp \left\{ -\frac{y_j}{\lambda_j \delta} \right\} dy_j. \end{aligned} \quad (\text{EK 7.1})$$

Eş. EK 7.1'de $k = (\delta^p \prod_{j=1}^p \lambda_j)^{-1}$ biçimindedir. $y_j/(\lambda_j \delta) = u_j$ dönüşümü sonucunda

$$\begin{aligned} M_Z(\mathbf{t}) &= k \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left(\prod_{j=1}^p (\lambda_j u_j)^{t_j/\mu_j} \right) \delta^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} (1-\delta)^n \left(\prod_{j=1}^p \delta \lambda_j \right) \prod_{j=1}^p \frac{1}{\Gamma(\nu+n)} \\ &\quad \times (u_j)^{\nu+n-1} \exp\{-u_j\} du_j \\ &= \left(\delta^p \prod_{i=1}^p \lambda_i \right)^{-1} \delta^{\nu+p} \left(\prod_{j=1}^p \lambda_j^{(t_j/\mu_j)+1} \right) \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} \\ &\quad \times (1-\delta)^n \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(\nu+n+t_j/\mu_j)}{\Gamma(\nu+n)} \\ &= \delta^\nu \left(\prod_{j=1}^p \lambda_j^{t_j/\mu_j} \right) \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} (1-\delta)^n \prod_{j=1}^p \frac{\Gamma(\nu+n+t_j/\mu_j)}{\Gamma(\nu+n)}. \end{aligned} \quad (\text{EK 7.2})$$

elde edilir. r . marjinal merkezsiz moment için, Eş. EK 7.2'den

$$\begin{aligned} M_Z(0, \dots, t_i, \dots, 0) &= \delta^\nu \lambda_i^{t_i/\mu_i} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)n!} (1-\delta)^n \frac{\Gamma(\nu+n+t_i/\mu_i)}{\Gamma(\nu+n)} \\ &= \delta^\nu \lambda_i^{t_i/\mu_i} \frac{\Gamma(\nu+t_i/\mu_i)}{\Gamma(\nu)} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\nu+n+t_i/\mu_i)}{\Gamma(\nu+t_i/\mu_i)n!} (1-\delta)^n \\ &= \delta^\nu \lambda_i^{t_i/\mu_i} \frac{\Gamma(\nu+t_i/\mu_i)}{\Gamma(\nu)} \delta^{-\nu-t_i/\mu_i} \\ &= (\lambda_i/\delta)^{t_i/\mu_i} \frac{\Gamma(\nu+t_i/\mu_i)}{\Gamma(\nu)} \end{aligned} \quad (\text{EK 7.3})$$

biçiminde elde edilir. Eş. EK 7.3'ten Z_i 'nin r . marjinal merkezsiz momenti

$$\begin{aligned}\mu'_{i_r} &= \frac{\partial^r M_Z(0, \dots, t_i, \dots, 0)}{\partial t_i^r} \Big|_{t_i=0} \\ &= \left[\frac{(\lambda_i/\delta)^{t_i/\mu_i}}{\Gamma(\nu)} \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} \left[\frac{\log(\lambda_i/\delta)}{\mu_i} \right]^{r-k} \frac{\partial^k \Gamma(\nu + t_i/\mu_i)}{\partial t_i^k} \right]_{t_i=0}\end{aligned}\quad (\text{EK 7.4})$$

biçiminde elde edilir. Eş. EK 7.4'te $r = 1$ için Z_i 'nin beklenen değeri

$$\begin{aligned}\mu'_{i_1} &= \frac{(\lambda_i/\delta)^{t_i/\mu_i}}{\Gamma(\nu)\mu_i} \left[\log(\lambda_i/\delta)\Gamma(\nu + t_i/\mu_i) + \Gamma(\nu + t_i/\mu_i)F(\nu + t_i/\mu_i) \right]_{t_i=0} \\ &= \frac{1}{\mu_i} [\log(\lambda_i/\delta) + F(\nu)],\end{aligned}\quad (\text{EK 7.5})$$

biçiminde elde edilir. Burada $F(\nu)$ digamma fonksiyonunun ν için aldığı değerdir. Eş. EK 7.4'te $r = 2$ için Z_i 'nin ikinci merkezsiz momenti,

$$\begin{aligned}\mu'_{i_2} &= \frac{(\lambda_i/\delta)^{t_i/\mu_i}}{\Gamma(\nu)(\mu_i)^2} \left[[\log(\lambda_i/\delta)]^2 \Gamma(\nu + t_i/\mu_i) \right. \\ &\quad \left. + 2 \log(\lambda_i/\delta) \frac{\partial \Gamma(\nu + t_i/\mu_i)}{\partial t_i} + \frac{\partial^2 \Gamma(\nu + t_i/\mu_i)}{\partial t_i^2} \right]_{t_i=0} \\ &= \frac{(\lambda_i/\delta)^{t_i/\mu_i}}{\Gamma(\nu)(\mu_i)^2} \left[[\log(\lambda_i/\delta)]^2 \Gamma(\nu + t_i/\mu_i) + 2 \log(\lambda_i/\delta) \Gamma(\nu + t_i/\mu_i) F(\nu + t_i/\mu_i) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma(\nu + t_i/\mu_i) [F(\nu + t_i/\mu_i)]^2 + \Gamma(\nu + t_i/\mu_i) F^{[1]}(\nu + t_i/\mu_i) \right]_{t_i=0} \\ &= \frac{1}{(\mu_i)^2} \left[[\log(\lambda_i/\delta)]^2 + 2 \log(\lambda_i/\mu_i) F(\nu) + [F(\nu)]^2 + F^{[1]}(\nu) \right] \\ &= \frac{1}{(\mu_i)^2} \left[[\log(\lambda_i/\delta) + F(\nu)]^2 + F^{[1]}(\nu) \right],\end{aligned}\quad (\text{EK 7.6})$$

biçiminde elde edilir. Burada $F^{[1]}(\nu)$ trigamma fonksiyonunun ν için aldığı değerdir. Marjinal varyans Eş. EK 7.5. ve EK 7.6'dan

$$\begin{aligned}V(Z_i) &= \mu'_{i_2} - (\mu'_{i_1})^2 \\ &= \frac{1}{(\mu_i)^2} \left[[\log(\lambda_i/\delta) + F(\nu)]^2 + F^{[1]}(\nu) \right] - \frac{1}{(\mu_i)^2} [\log(\lambda_i/\delta) + F(\nu)]^2 \\ &= \frac{1}{(\mu_i)^2} F^{[1]}(\nu)\end{aligned}\quad (\text{EK 7.7})$$

biçiminde elde edilir. Trigamma fonksiyonunun çizimi EK 5'te verilmiştir.

$i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, p, i \neq j$ olmak üzere $E(Z_i Z_j)$ 'yi elde etmek için Eş. EK 7.2'de verilen bileşik moment çıkaran fonksiyon kullanılmıştır.

$$M_Z(0, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, 0) = \delta^\nu \lambda_1^{t_i/\mu_i} \lambda_2^{t_j/\mu_j} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)^n}{\Gamma(\nu+n)\Gamma(\nu)n!} \Gamma(\nu+n+t_i/\mu_i) \Gamma(\nu+n+t_j/\mu_j) \quad (\text{EK 7.8})$$

Eş. EK 7.8'den

$$\left. \frac{\partial^2 M_Z(0, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, 0)}{\partial t_i \partial t_j} \right|_{t_i=t_j=0} = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \left\{ \log(\lambda_i)(1 + \log(\lambda_j)) + \delta^\nu \log(\lambda_j) \right. \\ \left. \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-\delta)^n}{\Gamma(\nu+n)\Gamma(\nu)n!} \Gamma(\nu+n) F(\nu+n) \left(1 + \frac{F(\nu+n)}{\log(\lambda_j)} \right) \right\} \quad (\text{EK 7.9})$$

biçiminde elde edilir. $Cov(Z_i, Z_j)$ ise Eş. EK 7.9 ve EK 7.5'ten

$$Cov(Z_i, Z_j) = \frac{1}{\mu_i \mu_j} \left\{ \log(\lambda_i) \log(\lambda_j) + \delta^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(1-\delta)^n}{\Gamma(\nu)n!} \Gamma(\nu+n) F(\nu+n) \right. \right. \\ \left. \left. \times (\log(\lambda_i) + \log(\lambda_j) + F(\nu+n)) \right] - [\log(\lambda_i/\delta) + F(\nu)] \right. \\ \left. \times [\log(\lambda_j/\delta) + F(\nu)] \right\} \quad (\text{EK 7.10})$$

ve Z_i ve Z_j arasındaki korelasyon katsayısı ρ_{ij}^Z , Eş. EK 7.6 ve EK 7.10'dan

$$Corr(Z_i, Z_j) = \frac{1}{F^{[1]}(\nu)} \left\{ \log(\lambda_i) \log(\lambda_j) + \delta^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(1-\delta)^n}{\Gamma(\nu)n!} \Gamma(\nu+n) F(\nu+n) \right. \right. \\ \left. \left. \times (\log(\lambda_i) + \log(\lambda_j) + F(\nu+n)) \right] - [\log(\lambda_i/\delta) + F(\nu)] \right. \\ \left. \times [\log(\lambda_j/\delta) + F(\nu)] \right\} \quad (\text{EK 7.11})$$

biçiminde elde edilir. Eş. EK 7.11'deki toplam terimi için bazı yaklaşımlar uygulanarak daha sade bir eşitlik elde edilebilir. Ayrıca EK 8'de verilmiş algoritma kullanılarak sayısal bir yaklaşım yapılabilir.

EK 8. Çalışmada Kullanılan Genel Arama Algoritması

$\rho_{p \times p}$ matrisini kullanarak $\rho_{p \times p}^{\ominus}$ matrisini, bu matrisin elemanları belirli sınırlar arasında olacak biçimde listeleyen algoritma verilmiştir. Algoritmada ilişki katsayılarının oluşturduğu p boyutlu tanım uzayı çok sayıda nokta alınarak taranmaktadır.

Genel arama algoritması

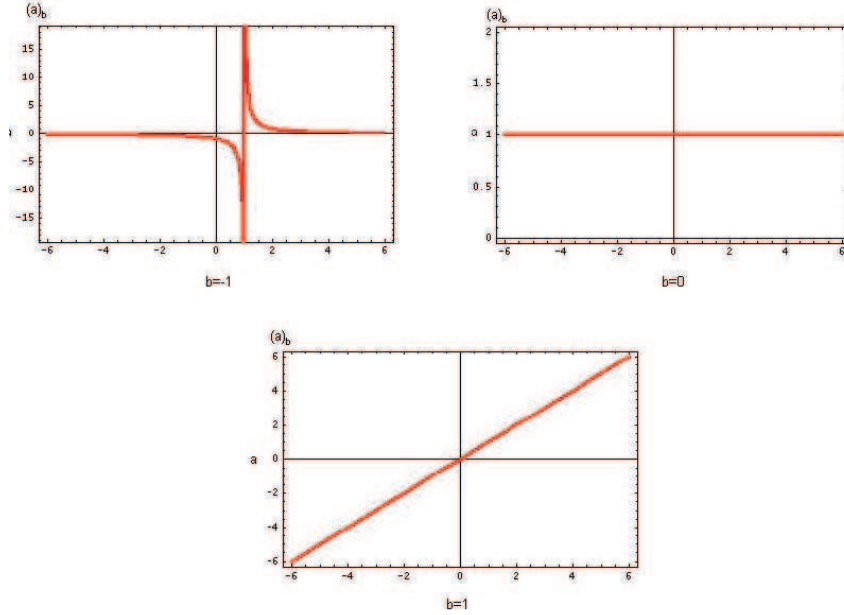
- A1. p , $\rho_{p \times p}^{\ominus}$ 'nin elemanları için istenen alt ve üst sınırlar, ν , önsel bilgi, artış miktarı okunur.
- A2. $\rho_{p \times p}$ için denenecek $\binom{p}{2}$ tane eleman vardır. Toplam deneme kombinasyonu sayısı $[(1/\text{artış miktarı}) + 1]^{\binom{p}{2}}$ biçiminde hesaplanır.
- A3. Denenecek tüm elemanların değeri 0'a eşitlenir.
- A4. i , $\binom{p}{2}$ 'ye eşitlenir.
- A5. Tüm deneme kombinasyonları denedi ise durulur, değilse A6'ya geçilir.
- A6. i . elemanın değeri artış miktarı kadar artırılır.
- A7. i . elemanın değeri 1'e eşit ise i . elemanın değeri 0'a eşitlenir, $i - 1$. elemanın değeri artış miktarı kadar artırılır, A6'ya dönülür; değilse A8'e geçilir.
- A8. ρ oluşturulur.
- A9. A8'de oluşturulan ρ kullanılarak δ hesaplanır.
- A10. A9'da hesaplanan δ ve A1'de okunan önsel bilgi kullanılarak λ oluşturulur.
- A11. ν , δ ve λ kullanılarak ρ^{\ominus} oluşturulur.
- A12. ρ^{\ominus} 'nin tüm elemanları A1'de okunan alt ve üst sınırlar arasında ise ρ^{\ominus} yazdırılır, değilse A6'ya dönülür.

EK 9. Pochhammer Sembol

Pochhammer Sembol ile ilgili bilgiler, hesaplamalar ve çizimler Wolfram (2009-b)'de verilmiştir. Pochhammer Sembol,

$$(a)_b = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)}$$

biçiminde tanımlanır. Pochhammer Sembol'ün çeşitli b değerleri için çizimi aşağıda verilmiştir.



$b = -1, 0, 1$ için Pochhammer Sembol çizimleri.

EK 10. Mutluluk Düzeyi Veri Kümesi

Çözümlemede kullanılan mutluluk düzeyi - eğitim düzeyi çaprazlaması aşağıda verilmiştir.

Eğitim düzeyi	Mutluluk düzeyi		
	Mutlu	Orta	Mutsuz
Okur yazar değil	9	5	3
Okur yazar / Okul bitirmeyen	9	4	3
İlkokul mezunu	9	6	2
İlköğretim / Ortaokul mezunu	10	5	2
Lise / Dengi mezunu	11	4	1
Yüksekokul / Üniversite mezunu	10	5	2

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Haydar Demirhan

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 14.08.1979

Medeni Durumu : Evli

Eğitim ve Akademik Durumu :

Yüksek Lisans : 2002-2004, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Lisans : 1997-2002, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü

Lise : 1992-1996, Yenimahalle Batıkent Lisesi

Yabancı Dil : İngilizce

İş Deneyimi :

2002-... Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü