KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

n −BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DOĞRULAR AİLESİ İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Tufan ÖZDİN

ŞUBAT 2014
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

n −BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DOĞRULAR AİLESİ İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

Yüksek Matematikçi Tufan ÖZDİN

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 13.01.2014
Tezin Savunma Tarihi : 03.02.2014

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV

Trabzon 2014

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalında

Tufan ÖZDİN Tarafından Hazırlanan

n −BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DOĞRULAR AİLESİ

İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 14 / 01 / 2014 gün ve 1537 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda

DOKTORA TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR …..……………………………

Üye : Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV …..……………………………

Üye : Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ ……..…………………………

Üye : Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ …..……………………………

Üye : Prof. Dr. Ziya YAPAR ……..………………………….

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

“*n*-Boyutlu Öklid Uzayında Doğrular Ailesi İnvanyartlarının Tam Sistemleri” adlı bu tez çalışması, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında “Doktora Tezi” olarak hazırlanmıştır.

Konunun belirlenmesinde ve çalışma süresince her türlü bilgiyi benden esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV (Cevat HACIEV)’e teşekkür eder saygılarımı sunarım. Tez aşamasında görüş ve tavsiyelerini aldığım tez izleme jüri üyeleri değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Abdullah ÇAVUŞ ve Sayın Prof. Dr. Mustafa ALTUNBAŞ’a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca Tez savunmama katılan hocalarım Sayın Prof. Dr. Ertuğrul ÖZDAMAR ve Sayın Prof. Dr. Ziya YAPAR’a kıymetli vakitlerini ayırdıkları için teşekkür ederim. Benden yardımını esirgemeyen Öğr. Gör. Hüsnü Anıl ÇOBAN’ a teşekkür ederim. Her zaman desteklerini hissettiğim görev yapmakta olduğum Erzincan Üniversitesin’deki kıymetli dostlarım ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak her zaman hem manevi hem de maddi yardımlarını benden esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

Tufan ÖZDİN

Trabzon 2014

TEZ BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “*n*-Boyutlu Öklid Uzayında Doğrular Ailesi İnvaryantlarının Tam Sistemleri” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV’in sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 03/02/2014

Tufan ÖZDİN

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

n −BOYUTLU ÖKLİD UZAYINDA DOĞRULAR AİLESİ İNVARYANTLARININ TAM SİSTEMLERİ

Tufan ÖZDİN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
2014, 105 Sayfa

Bu tezde, n-boyutlu Öklid uzayının $Iz(n)$ tüm izometriler grubu ve $O(n)$ tüm ortogonal dönüşümler grubu için aşağıdaki temel sonuçlar elde edildi.

1) n −boyutlu reel vektör uzayında, doğruya eğrinin özel hali olarak bakılarak ve eğrinin 3 tane farklı tanımı kullanılarak doğrunun 3 tane farklı tanımı verildi. Doğru için verilen bu üç tanımdan üçüncüsü biraz değiştirilerek doğrunun yeni bir tanımı verildi. Buna, kısaca 4. tip doğru diyelim. Doğrunun bu tanımları arasındaki ilişkiler incelendi.

2) n −boyutlu Öklid uzayında noktalar ve parametrik doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi incelendi ve polinomyal invaryantlarının tam sistemleri bulundu.

3) Noktalar, 2. tip ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi, sadece noktalar ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemine indirgendi.

4) Noktalar ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin polinomyal invaryantları halkasının sonlu üreteçli olduğu gösterildi ve üreteçler sayısına ait eşitsizlik verildi.

5) n −boyutlu Öklid uzayında bir veya iki doğrudan oluşan sistemin $Iz(n)$ ve $O(n)$ gruplarına göre polinomyal invaryantları halkasının üreteçleri bulundu ve polinomyal invaryantlarının tam sistemleri bulundu.

Anahtar Kelimeler: İnvaryant, Doğru, Eğri, Öklid Geometri.

PhD. Thesis

SUMMARY

COMPLETE SYSTEMS OF INVARIANTS OF A LINES FAMILY
IN AN $n-$DIMENSIONAL EUCLIDEAN SPACE

Tufan ÖZDİN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Djavvat KHADJİEV
2014, 105 Pages

In this thesis, for groups $G = Iz(n)$ and $G = O(n)$, where $Iz(n)$ is the group of all isometries and $O(n)$ is the group of all orthogonal transformations of $n-$dimensional Euclidean space, the following main results have been obtained:

1) Using three different concepts of a curve in differential geometry, three different concepts of a line have been obtained. Using the third concept of a line, the forth definitions of a line is given. Correlations between concepts of a line are investigated.

2) The problem of equivalence of points and parametric lines in the n-dimensional Euclidean space with respect to groups $Iz(n)$ and $O(n)$ is investigated and complete systems of polynomial $G-$invariants have been obtained.

3) The problem of equivalence of points, 2nd type lines and 4th type lines in the n-dimensional Euclidean space with respect to groups $Iz(n)$ and $O(n)$ is reduced to that problem for points and 4th type lines.

4) It is proved that the ring of polynomial $G-$invariants of a family of points and lines in the $n-$dimensional Euclidean space has a finite number of generators. The inequality for the number of generators is given.

5) For a family consisting of one or two 4th type lines in $n-$dimensional Euclidean space, generators of the ring of polynomial $G-$invariants and complete systems of polynomial $G-$invariants have been found.

Key Words: Invariant, Line, Curve, Euclidean Geometry.

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\langle x, y\rangle$	x ile y vektörlerinin iç çarpımı
$\|x\|$	x vektörünün normu
$\left(a_{ij}\right)_{n\times m}; i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m; a_{ij} \in \mathbb{R}$	$n \times m$ tipinde reel katsayılı bir matris
$A^T = \left(a_{ji}\right)_{m\times n}$	$A = \left(a_{ij}\right)_{n\times m}$ matrisinin transpozesi
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu reel vektör uzayı
$Iz(n)$	n boyutlu Öklid uzayında tüm izometriler kümesi
$LIz(n)$	n boyutlu Öklid uzayında tüm lineer izometrilerinin kümesi
$Tr(n)$	n boyutlu uzayda tüm ötelemeler kümesi
$O(n)$	n boyutlu ortogonal dönüşümler grubu
$G: X$	G grubunun X kümesi üzerindeki etkisi
$x \overset{G}{\sim} y$	x elemanı y elemanına G −denktir
$\{x_i: i = 1, \dots, k\}$	k tane noktadan oluşan aile
$\{x_i: i = 1, \dots, k\} \overset{G}{\sim} \{y_i: i = 1, \dots, k\}$	$\{x_i: i = 1, \dots, k\}$ ailesi $\{y_i: i = 1, \dots, k\}$ ailesine G −denktir
Gx	x noktasının G −yörüngesi
$\mathbb{R}[x]$	Reel katsayılı tek bilinmeyenli polinomlar halkası
$\mathbb{R}[x]^G$	Reel katsayılı tek bilinmeyenli G −invaryant polinomlar halkası
$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$	m-tane bilinmeyenli reel katsayılı polinomlar halkası
$\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]^G$	m-tane bilinmeyenli reel katsayılı G −invaryant polinomlar halkası
$G_1 \leq G$	G_1, G grubunun alt grubu
$G_1 \lhd G$	G_1, G grubunun normal alt grubu
$\mathcal{E}$	$\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ kümesi

$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\{u, v\}_\alpha$	α doğrusunun kanonik parametrizasyonu
$\blacksquare$	İspatın sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Bu tezin temel amaçları:

1) Doğruya diferansiyel geometrideki eğrinin özel hali olarak bakılarak, doğru kavramını geliştirmektir.

2) n −boyutlu Öklid uzayında noktalar ve doğrulardan oluşan aile için $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre invaryantların tam sistemlerini bulmaktır.

Doğru kavramı, matematiğin temel kavramlarından biridir. Bu kavram, antik matematikçiler tarafından genişliği ve derinliği olmayan nesne olarak tanımlanmıştır. Öklid (M.Ö.365 – M.Ö.300) bir doğruyu, "genişliği olmayan uzunluk" ve Öklid geometrisinin kanıtlanmayan temel özelliklerinden biri olarak tanımlamıştır [8, 9]. Böylece 17. yy'a kadar doğru, bir boyutlu derinliği ve genişliği olmayan aynı doğrultu boyunca uzanan noktalar olarak tanımlanmıştır. 19. yy'ın sonlarında gelişen Öklid dışındaki geometrilerde de doğru kavramı, Öklid geometrisine yakın bir şekilde tanımlanmıştır [6, 9, 15]. Doğrunun özellikleri başvurulan aksiyomlar tarafından belirlenir. Bu yaklaşım sayesinde geometriyi kullananlara bir esneklik sağlar.

Doğrulara ait çalışmalar oldukça fazladır. Doğrular teorisine ait temel bilgiler Pottman ve Wallner'in [31] kitabında verilmiştir. Bu kitapta verilen bilgiler doğrular geometrisindeki çalışmaların, esasen projektif geometriye (yani, afin uzaydaki sıfır noktasından geçen doğrular ailesine) ve Öklid uzayındaki doğrusal yüzeylere, doğruların kongruanslarına ve doğruların komlekslerine ait olduğunu gösterir. 3-boyutlu Öklid uzayında doğrusal yüzeylere ait elde edilen temel sonuçlardan biri 1925 yılında Sannia tarafından bulunan doğrusal yüzeylerin Öklid invaryantlarının tam sistemidir ([31, s.275]).

Doğru kavramı, analitik geometride iki farklı şekilde tanımlanır. Bunlardan birincisi, parametrik doğru (yani bir dönüşümün değer kümesi şeklinde) diğeri ise verilen bir lineer denklemin çözümünü sağlayan tüm noktaların kümesi şeklindedir.

Matematik analizde ve diferansiyel geometride doğru, eğrinin bir özel halidir. Bugüne kadar matematik analizde ve diferansiyel geometride eğrinin 3 tane faklı tanımı verilmiştir. Bunlardan birincisi, parametrik eğri (yani $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesindeki bir (a, b)

aralığın $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayına sürekli dönüşümü veya sürekli türevi mevcut olan dönüşümü) şeklindedir. Bu şekildeki tanım O'Neill [24, s.15] kitabı ile Khadjiev ve Pekşen'nin [20] makalesinde verilmiştir. Eğrinin ikinci tanımı, sürekli parametrik eğrinin görüntü kümesi şeklindedir. Bu şekildeki tanım, 1882'de C. Jordan tarafından verilmiştir. 1890'da Peano, görüntü kümesi $\mathbb{R}^2$'deki $[0,1]^2$ kare olan sürekli parametrik eğriye örnek vermiştir. Bundan etkilenerek 1897'de F. Klein şöyle yazmıştır: "Keyfi bir eğri nedir?...Söylenebilir ki şu anda matematikte bu kavramdan daha karanlık ve belirsiz bir kavram yoktur…". Bundan sonra yapılan çalışmalarda türevi mevcut ve türevi sürekli olan dönüşümün görüntü kümesi için Peano örneğinin benzerinin mevcut olmadığı ispat edilmiştir. Buna göre eğri, türevi mevcut ve türevi sürekli olan dönüşümün görüntü kümesi olarak tanımlanmıştır. Bazı kitaplarda buna dönüşümün bire-bir olma şartı da eklenilmiştir. Guggenheimer'in [11, s.21] kitabında eğrilerin $G-$denklik tanımı verilirken eğrinin görüntü kümesi şeklindeki tanımı kullanılmıştır. Eğrinin üçüncü tanımında ise eğri, parametre değişimi grubuna göre denk olan parametrik eğrilerin ailesi şeklinde verilmiştir. Eğrinin bu şekildeki tanımı, 1906'da M. Frechet tarafından verilmiştir ve bu tanım Alexandrov ve Reshetnyak'in [2, s.5-6], Kühnel'in [22, s.9], Klingenberg'in [21, s.9] kitaplarında ve Khadjiev ve Pekşen'in [20, 28] makalelerinde kullanılmıştır.

Tezde, doğruya eğrinin özel hali olarak bakılarak ve eğrinin 3 tane farklı tanımı kullanılarak, doğrunun 3 tane farklı tanımı verildi. Doğru için verilen bu 3 tane tanımdan üçüncüsü doğru için yeni bir tanımdır. Bu üçüncü tanım biraz değiştirilerek doğrunun daha önemli yeni bir tanımı daha verildi. Buna, kısaca 4. tip doğru diyelim. Tezde ayrıca doğrunun tanımları arasındaki ilişkiler incelendi.

Tezde $n-$boyutlu Öklid uzayında noktalar ve parametrik doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi incelendi ve polinomyal invaryantlarının tam sistemleri bulundu. Öklid uzayında noktalar ve parametrik doğrulardan (yani 1.tip doğrulardan) oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre polinomyal invaryantlarının tam sistemlerini bulma problemi, invaryantlar teorisi açısından basit bir problem olsa da bu probleme ait sonuçlar bugüne kadar yapılan çalışmalarda net şekilde verilmemiştir. Bundan dolayı tezde bu problem incelendi ve tam çözümü verildi.

Klasik invaryant teorisinde sonlu tane noktalardan oluşan ailenin $O(n)$ grubuna göre polinomyal invaryantlarının tam sistemi, tüm polinomyal $O(n)$ invaryantları halkasının üreteç sistemi şeklinde bulunmuştur. Bu üreteç sistem 1897'de E. Study tarafından verilmiştir. Bunu, daha sonra iyi bir şekilde H. Weyl [33] kitabında geliştirmiş ve açık bir şekilde vermiştir. $O(n)$ ve psevdo ortogonal gruplarının invaryantları [7, 18, 26, 27]'de ki çalışmalarda incelenmiştir.

$\mathbb{R}^n$ uzayında $n+1$ tane vektör için $Iz(n)$ izometriler grubuna göre denklik probleminin çözümü, M. Berger'in 1987 yılında yayınlanan kitabında [5] verilmiştir.

M. Karataş, [16] yüksek lisans tezinde $n-$boyutlu Öklid geometrisinde noktaların invaryantlarını bulma problemini incelemiştir. G. Kaya [17] yüksek lisans tezinde, $O(n)$ ve $Iz(n)$ grupları için noktalar sisteminin denklik problemini çözmüştür.

R. Höfer'de Reel Geometrilerde m tane noktanın invaryantlarını bulma ile uğraşmış ve bu noktaların yörüngelerini, Gram matrisler ve daha başka denklikler yardımıyla ifade etmiştir.

1988'de D. Khadjiev ve R. Apirov'un [3] makalesinde $G-$invaryant rasyonel fonksiyonlardan oluşan cismin üreteçleri problemini $G=O(n)$ ve $G=Iz(n)$ grupları için çözmüştür.

4. tip doğru invaryant teorinin incelenecek yapısı olmadığından dolayı 4. tip doğrulardan oluşan ailenin denklik problemi invaryantlar teorisi dışında kaldı. Diferansiyel geometride sadece tek bir eğri inceleniyor, eğriler ailesinin denklik problemi incelenmiyor. Bundan dolayı 4. tip doğrulardan oluşan ailenin denklik problemi klasik diferansiyel geometride de incelenmemiş bir problemdir. Parametrik eğriler ailesinin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi, D. Khadjiev'in [18] kitabında incelendi ve çözüldü.

Tezde $n-$boyutlu Öklid uzayında noktalar, 2. tip ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi incelendi. Noktalar, 2. tip ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi, sadece noktalar ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemine indirgendi.

Klasik diferansiyel geometride eğriler teorisinde, eğrinin invaryant parametrizasyonları kullanılmıştır. Öklid geometrisindeki eğriler teorisinde, eğrinin invaryant parametrizasyonu, eğrinin yay uzunluğu şeklinde tanımlanmıştır ve kullanılmıştır. Eğrinin invaryant parametrizasyonu, Psevdo-Öklid, centro-afin ve equi-afin geometrilerde de tanımlanmıştır ve kullanılmıştır ([4, 19, 28, 29, 30]). Eğri invaryant parametrizsyonunun genel tanımı, D. Khadjiev'in [18] kitabında verilmiştir. Psevdo-Öklid geometrisi için eğrinin invaryant parametrizasyonu Pekşen, Khadjiev ve Ören'in [30] makalesinde verilmiştir.

Tezde 4. tip doğru için eğrinin invaryant parametrizasyonun benzeri olan kanonik parametrik doğru tanımlandı. Kanonik parametrik doğrular kullanılarak, noktalar ve 4.tip doğrulardan oluşan ailenin polinomyal invaryantı tanımlandı. Noktalar ve 4.tip doğrulardan oluşan ailenin polinomyal invaryantları halkasının sonlu üreteçli olduğu gösterildi ve üreteçler sayısına ait eşitsizlik verildi.

İnvaryant polinomlar halkasının sonlu üreteçli olup-olmadığı invaryantlar teorisinin eski ve temel problemlerinden biridir.

İnvaryant teori alanındaki çalışmalara 1850-1870 yılları arasında başlanmıştır. Bu çalışmaların temelinde, G-invaryant polinomlardan oluşan $R[x]^G$ halkasının sonlu üreteçli olup olmadığının incelenmesi yer almıştır. Bu problem ilk defa 1860'lı yıllarda binary formları için verilmiştir (Gordan teoremi). 1900'de David Hilbert, Paris'teki uluslararası konferansta sunduğu 23 problemden 14.'sünde, hangi G grupları için $R[x]^G$ invaryantlar halkasının sonlu üreteçli olduğu problemini ortaya koymuştur. Daha sonra 1962'de M. Nagata, $R[x]^G$'nin, G'nin lineer reduktif olması koşulunda sonlu üreteçli olduğunu göstermiştir. Lineer reduktif olmayan G grupları için $R[x]^G$'nin sonlu üreteçli olabilmesinin şartları da D. Khadjiev, F. Grosshans ve V. L. Popov'in çalışmalarında verilmiştir.

Tezde bir veya iki tane 4. tip doğrudan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi incelendi ve polinomyal invaryantlarının tam sistemi bulundu.

1.2. Öklid Uzayı

Bu bölümdeki tanım, teorem ve örnekler için [1], [10], [12] ve [14]'teki kitapları kaynak olarak göz önüne aldık. $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi olsun.

Tanım 1.2.1. E bir reel vektör uzayı olmak üzere bir $\varphi: E \times E \to \mathbb{R}$ dönüşümü

i) $\forall x, y, z \in E$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\varphi(x+y,z) = \varphi(x,z) + \varphi(y,z),$$
$$\varphi(\alpha x, y) = \alpha\varphi(x,y).$$

ii) φ simetrik form. Yani, $\forall x, y \in E$ için

$$\varphi(x,y) = \varphi(y,x).$$

iii) φ pozitif tanımlı. Yani, $\forall x \in E$ için

$$\varphi(x,x) \geq 0 \text{ ve } \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

aksiyomlarını sağlıyorsa $\varphi: E \times E \to \mathbb{R}$ dönüşümüne E de bir skaler (iç) çarpım denir. (E, φ) ikilisine ise bir iç çarpım uzayı denir.

Örnek 1.2.2. $\mathbb{R}^n$ toplama ve skalerle çarpma işlemi sırası ile şu şekilde tanımlansın. $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için

$$+: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Bu şekilde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında n −boyutlu $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayını göz önüne alalım. $\mathbb{R}^n$'de tanımlanan

$$\langle\, ,\rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto \langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

standart iç çarpım dönüşümü iç çarpım aksiyomlarını sağlar. Böylece $\mathbb{R}^n$ sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayıdır.

Tanım 1.2.3. Sonlu boyutlu iç çarpım uzayına Öklid Uzayı denir.

Örnek 1.2.2'de tanımlanan $\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ standart iç çarpım dönüşümü ile $\mathbb{R}^n$ bir Öklid uzayıdır.

Tanım 1.2.4. E iç çarpım uzayında $x \in E$ için

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

sayısına x vektörünün normu (uzunluğu) denir.

$\langle x, x\rangle \geq 0$ olduğundan $\sqrt{\langle x, x\rangle}$ tanımlıdır. Biz bu sayının negatif olmayan değerini alacağız.

Önerme 1.2.5. (Cauchy-Schwarz Eşitsizliği) $\forall x, y \in E$ için

i) $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$

ii) $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \Leftrightarrow x$ ile y lineer bağımlıdır.

Önerme 1.2.6. (Norm Aksiyomları) E iç çarpım uzayında tanımlanan $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ifadesi aşağıdakileri gerçekler:

$\forall x, y \in E$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için,

i) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tanım 1.2.7. $\|x\| = 1$ ise x vektörüne birim vektör denir.

Tanım 1.2.8. E iç çarpım uzayında x ve y sıfırdan farklı iki vektör olsun. x ile y vektörleri arasındaki açı,

$$cos\theta = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.2.9. E iç çarpım uzayında x ve y iki vektör olsun. Eğer, $\langle x, y \rangle = 0$ ise x ve y vektörlerine ortogonal (dik) vektörler denir ve $x \perp y$ biçiminde yazılır.

Tanım 1.2.10. E iç çarpım uzayında k tane vektörden oluşan $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ vektör sistemi verilsin. Eğer $\forall i, j = 1,2, \dots, k$ için, $i \neq j$ olmak üzere, $\langle x_i, x_j \rangle = 0$ ise $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ sistemine ortogonal sistem denir.

Tanım 1.2.11. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset E$ vektör sistemi verilsin. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$$

vektörüne $x_1, x_2, \dots, x_k$ vektörlerinin lineer toplamı (lineer birleşimi) denir.

Tanım 1.2.12. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset E$ olsun. $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,2, \dots, k$ için

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_k x_k = 0 \text{ iken } \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$$

ise $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ sistemine lineer bağımsızdır denir.

Teorem 1.2.13. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset E$ ortogonal ve $i = 1, \dots, k$ için $x_i \neq 0$ olan sistemse $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ lineer bağımsızdır.

Tanım 1.2.14. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset E$ sistemi verilsin. $i, j = 1, \dots, k$ için

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

ise bu sisteme, ortonormal sistem denir.

Teorem 1.2.15. Keyfi Öklid uzayında ortonormal taban mevcuttur.

Teorem 1.2.16. Sonlu boyutlu uzayda, keyfi ortonormal sistem, ortonormal tabana kadar genişletilebilir.

Sonuç 1.2.17. n-boyutlu keyfi Öklid uzayı $\mathbb{R}^n$'ye izomorftur.

1.3. $Iz(n)$ ve $O(n)$ Grupları

Bu bölümdeki tanım, teorem ve örnekler için [1], [10], [12], [13], [14], [16] ve [17]'deki kaynakları göz önüne aldık.

Tanım 1.3.1. X boştan farklı bir küme ve

$$d: X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

i) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

ii) $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = d(y,x)$.

iii) $\forall x, y, z \in X$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (Üçgen Eşitsizliği).

Bu taktirde $d$fonksiyonuna X de bir metrik ve (X,d) ikilisine ise bir metrik uzay denir.

Örnek 1.3.2. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$; $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ için, $d(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ ise d fonksiyonu $\mathbb{R}^n$'de bir metriktir.

Sonuç 1.3.3. $(\mathbb{R}^n, d)$ bir metrik uzaydır.

Tanım 1.3.4. $\mathbb{R}^n$ Öklid uzayında $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri verilsin

$$d(x,y) = \|x - y\|$$

reel sayısına x ve y vektörleri arasındaki uzaklık denir.

Tanım 1.3.5. (X, d) bir metrik uzay olsun. $F: X \to X$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için

$$d\big(F(x), F(y)\big) = d(x, y)$$

koşulunu sağlıyor ise F dönüşümüne X metrik uzayında bir izometri denir.

Örnek 1.3.6.

1) $\mathbb{R}^n$ uzayında keyfi bir $a \in \mathbb{R}^n$sabit vektörünü alalım.

$$T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

dönüşümü $T_a(x) = x + a$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşüme $\mathbb{R}^n$'de bir öteleme dönüşümü denir. Keyfi öteleme dönüşümü $\mathbb{R}^n$'de bir izometridir.

2) $\mathbb{R}^2$ uzayında $D_\theta: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dönme dönüşümü, $x = (x_1, x_2)$ olmak üzere,

$$D_\theta(x) = (x_1 cos\theta - x_2 sin\theta, x_1 sin\theta + x_2 cos\theta)$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{R}^2$'de dönme dönüşümü bir izometridir.

3) $\mathbb{R}^n$ uzayında $I: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I(x) = x$ birim dönüşümü izometridir.

Not 1.3.7. $\mathbb{R}^n$ uzayında tanımlı tüm izomerilerin kümesini $Iz(n)$ ile gösterelim. Yani,

$$Iz(n) \coloneqq \{F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n | F\ bir\ izometri\}$$

dir.

Önerme 1.3.8. $F_1, F_2 \in Iz(n)$ ise F_1 ve F_2 dönüşümlerinin bileşkesi $F_1 \circ F_2 \in Iz(n)$ dir.

Önerme 1.3.9. $(Iz(n),\circ)$ fonksiyonların bileşke işlemine göre birimli bir yarı gruptur, yani bir monoidtir.

Önerme 1.3.10. Keyfi $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ izometrisi birebirdir.

Tanım 1.3.11. V ve W iki vektör uzayı ve $L: V \to W$ dönüşümü $\forall x, y \in V$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

i) $L(x + y) = L(x) + L(y)$.

ii) $L(\alpha x) = \alpha L(x)$.

koşullarını gerçekliyorsa $L: V \to W$ dönüşümüne bir lineer dönüşüm denir.

Örnek 1.3.12.

1) $\mathbb{R}^n$ uzayındaki birim dönüşüm bir lineer dönüşümdür.

2) $\mathbb{R}^2$ uzayındaki dönme dönüşümü bir lineer dönüşümdür.

Tanım 1.3.13. $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü hem lineer hem de bir izometri ise F'ye bir lineer izometri denir. $\mathbb{R}^n$'deki tüm lineer izometrilerinin kümesi;

$$LIz(n) = \{F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid F \ bir \ lineer \ izometri\}$$

ile gösterilir.

Örnek 1.3.14. $\mathbb{R}^2$ uzayındaki dönme dönüşümü bir lineer izometridir.

Önerme 1.3.15. $F_1, F_2 \in LIz(n)$ ise $F_1 \circ F_2 \in LIz(n)$ dir.

Önerme 1.3.16. $(LIz(n), \circ)$ fonksiyonların bileşke işlemine göre bir monoidtir.

Sonuç 1.3.17. $(LIz(n), \circ)$, $(Iz(n), \circ)$ monoidinin bir alt monoididir.

Önerme 1.3.18. $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü birebir ve lineer ise F örtendir.

Sonuç 1.3.19. Keyfi $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineer izometrisi örtendir.

Sonuç 1.3.20. Keyfi $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lineer izometrisinin F^{-1} tersi mevcuttur ve F^{-1}'de lineer izometridir.

Sonuç 1.3.21. $(LIz(n), \circ)$ bir gruptur.

Not 1.3.22. $\mathbb{R}^n$'deki tüm ötelemeler kümesini $Tr(n)$ ile gösterelim.

Önerme 1.3.23. $(Tr(n), \circ)$ dönüşümlerin bileşke işlemine göre değişmeli bir gruptur.

Önerme 1.3.24. $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T_a(x) = x + a$ ötelemesinin lineer izometri olması için gerek ve yeter koşul $a = 0$ olmasıdır.

Sonuç 1.3.25. I, $\mathbb{R}^n$ uzayında birim dönüşüm olmak üzere $Tr(n) \cap LIz(n) = \{I\}$ dır.

Önerme 1.3.26. Keyfi öteleme örtendir.

Tanım 1.3.27. $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle F(x), F(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

koşulunu sağlıyor ise F dönüşümüne bir ortogonal dönüşüm denir.

Not 1.3.28. $\mathbb{R}^n$'deki tüm ortogonal dönüşümler kümesini $O(n)$ ile gösterelim.

Teorem 1.3.29. $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dönüşümü için aşağıdaki koşullar denktir.

i) F ortogonal dönüşümdür.

ii) F lineer izometridir.

iii) F izometri ve $F(0) = 0$ dır.

Sonuç 1.3.30. Lineer izometriler grubu, ortogonal dönüşümler grubu ile çakışıktır.

Teorem 1.3.31. Keyfi $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ izometrisi için $F = T_a \circ C$ olacak şekilde tek türlü $T_a \in Tr(n)$ ve tek türlü $C \in O(n)$ dönüşümleri vardır.

Sonuç 1.3.32. Keyfi $F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ izometrisinin F^{-1} tersi mevcuttur ve F^{-1}'de izometridir.

Sonuç 1.3.33. $(Iz(n), \circ)$ bir gruptur.

Önerme 1.3.34. $Iz(n)$ grubu

$$Iz(n) = \{F: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n : F(x) = g(x) + b, g \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$$

şeklindedir.

Önerme 1.3.35. $F \in O(n)$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $\mathbb{R}^n$'de bir ortonormal sistem ise $\{F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)\}$ de bir ortonormal sistemdir.

Önerme 1.3.36. F, $\mathbb{R}^n$'de bir lineer dönüşüm olsun. Eğer, $\mathbb{R}^n$'deki bir $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ortonormal taban için $\{F(e_1), F(e_2), \dots, F(e_n)\}$ ortonormal sistem ise F ortogonal dönüşümüdür.

Tanım 1.3.37. $A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ bir matris olsun. Eğer, $AA^T = A^T A = I$ ise A matrisine ortogonal matris denir.

Önerme 1.3.38. $\mathbb{R}^n$ nin keyfi ortonormal sistemleri $\{e_1, \dots, e_n\}$ ve $\{f_1, \dots, f_n\}$ olmak üzere, $F(e_i) = f_i$ $(i = 1, \dots, n)$ olacak şekilde tek F ortogonal dönüşümü mevcuttur.

1.4. Bir Grubun Bir Küme Üzerindeki Etkisi

Bu bölümdeki tanım, teorem ve örnekler için [16], [17], [23], [25] ve [33]'teki kaynakları göz önüne aldık.

Tanım 1.4.1. $(G, \cdot)$ bir grup, X bir küme ve $G \times X = \{(g, x): g \in G, x \epsilon X\}$ olmak üzere $\varphi: G \times X \longrightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer,

i) $\forall g_1, g_2 \in G$ ve $\forall x \in X$ için

$$\varphi(g_1 \cdot g_2, x) = \varphi(g_1, \varphi(g_2, x))$$

ii) $e \in G$ birim eleman ve $\forall x \in X$ için

$$\varphi(e, x) = x$$

ise φ dönüşümüne G grubunun X kümesi üzerindeki etkisi denir ve bu etki $G{:}X$ ile gösterilir. $\varphi(g, x)$ ifadesini gx ile gösterelim.

Örnek 1.4.2.

1) $X = \mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ olsun. $(\mathbb{R}^*,\cdot)$ reel sayılardaki çarpma işlemine göre gruptur. $G{:}X = \mathbb{R}^*{:}\mathbb{R}$ etkisini $g \in \mathbb{R}^*$ reel sayısının $x \in \mathbb{R}$ reel sayısı ile çarpımı olarak alalım. Yani,

$$\begin{aligned} \varphi{:}\ & \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (g, x) \mapsto \varphi(g, x) = gx \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu bir etkidir. Çünkü,

i) $\varphi\big(g_1, \varphi(g_2, x)\big) = g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x = \varphi(g_1 g_2, x)$, $\forall g_1, g_2 \in \mathbb{R}^*$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $\varphi(1, x) = 1x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ve $1 \in \mathbb{R}^*$ birim eleman,

dır.

2) $X = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2){:}\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\right\}$ ve $G = O(2) = \left\{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : A \text{ ortogonal matris};\ a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$ ikinci mertebeden ortogonal matrisler kümesini alalım. $G = O(2)$ kümesi, matrislerin çarpma işlemine göre gruptur. $G = O(2)$ grubunun $X = \mathbb{R}^2$ kümesi üzerindeki $G{:}X = O(2){:}\mathbb{R}^2$ etkisini, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi{:}\ & O(2) \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (g, x) \mapsto \varphi(g, x) = gx \end{aligned}$$

ile yani g matrisinin x sütun matrisi ile çarpımı olarak tanımlayalım. Bu bir etkidir.

Gerçekten,

i) $\forall g_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \in O(2)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^2$ için,

$$\varphi(g_1,\varphi(g_2,x)) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ex_1 + fx_2 \\ gx_1 + hx_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} (ae+bg)x_1 + (af+bh)x_2 \\ (ce+dg)x_1 + (cf+dh)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g_1g_2x = \varphi(g_1g_2,x)$$

ii) $\forall x \in \mathbb{R}^2$ ve $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in O(2)$ birim elemanı için,

$$\varphi(I,x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x$$

dır.

3) $X = \mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n): x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}: x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}\right\}$ ve

$$G = O(n) = \left\{A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}: A\ ortogonal\ matris;\ a_{ij} \in \mathbb{R}; i,j = 1,\dots,n\right\}$$

$n-$inci mertebeden ortogonal matrisler kümesini alalım. $G = O(n)$ kümesi, matrislerin çarpma işlemine göre gruptur. $G = O(n)$ grubunun $X = \mathbb{R}^n$ kümesi üzerindeki $G{:}X = O(n){:}\mathbb{R}^n$ etkisini, $g = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi: O(n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (g,x) &\mapsto \varphi(g,x) = gx \end{aligned}$$

ile yani g matrisinin x sütun matrisi ile çarpımı olarak tanımlayalım. Bu bir etkidir.

4) $X = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_m): x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1,\dots,m\}$ ve $G = O(n) = \left\{A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}: A\ ortogonal\ matris;\ a_{ij} \in \mathbb{R}; i,j = 1,\dots,n\right\}$ $n-$inci mertebeden ortogonal matrisler kümesini alalım. $G = O(n)$ grubunun $X = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ kümesi üzerindeki $G{:}X = O(n){:}X$ etkisini $g = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ve $x = (x_1,\dots,x_m)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \varphi: O(n) \times X &\longrightarrow X \\ (g,x) &\mapsto \varphi(g,x) = gx = g(x_1,\dots,x_m) = (gx_1,\dots,gx_m) \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu bir etkidir.

Gerçekten,

i) $\forall g_1, g_2 \in O(n)$ ve $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in X = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ alalım. $O(n)$ grup olduğundan $g_1 g_2 \in O(n)$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\varphi(g_1 g_2, x) &= ((g_1 g_2)x_1, \dots, (g_1 g_2)x_m) = (g_1(g_2 x_1), \dots, g_1(g_2 x_m)) \\ &= g_1(g_2 x_1, \dots, g_2 x_m) = g_1\big(g_2(x_1, \dots, x_m)\big) = \varphi\big(g_1, \varphi(g_2, x)\big)\end{aligned}$$

ii) $\forall x = (x_1, \dots, x_m) \in X = \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n$ ve $I \in O(n)$ birim elemanı için,

$$\varphi(I, x) = I(x_1, \dots, x_m) = (Ix_1, \dots, Ix_m) = (x_1, \dots, x_m) = x$$

dır.

5) $X = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\right\}$

kümesini ve $G = Iz(n) = \{F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : F(x) = g(x) + b, g \in O(n), b \in \mathbb{R}^n\}$ grubunu alalım. $G = Iz(n)$ grubunun $X = \mathbb{R}^n$ kümesi üzerindeki $G : X = Iz(n) : \mathbb{R}^n$ etkisini, $g \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ve $x = (x_1, \dots, x_m)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\varphi : Iz(n) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (F, x) &\mapsto \varphi(F, x) = Fx = gx + b\end{aligned}$$

ile tanımlayalım. Bu bir etkidir.

1.5. Noktalar Sisteminin G −Denkliği ve G −Yörüngesi

Bu bölümdeki tanım, teorem ve örnekler için [16], [17], [32] ve [33]'teki kaynakları göz önüne aldık.

Tanım 1.5.1. X bir küme, G bir grup ve $G : X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer $x, y \in X$ için $y = g \cdot x$ olacak şekilde $g \in G$ varsa x ve y elemanları G −denk'tir denir ve $x \overset{G}{\sim} y$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1.5.2. $G = \{-1,1\}$ grubunun $X = \mathbb{R}$ üzerindeki

$$\varphi(g,x) = gx$$

etkisini alalım. Bu etkiye göre $2 \overset{G}{\sim} -2$ dir. Çünkü, $x = 2$ ve $y = -2$ için $2 = (-1)2$ ve $-1 \in G$ dir. Fakat 2 ve 3 sayıları $3 \neq (\mp 1)2$ olduğundan $G-$denk değildir.

Önerme 1.5.3. G grubunun bir X kümesi üzerindeki etkisi verilmiş olsun. Bu taktirde $\forall x, y \in X$ için $x \overset{G}{\sim} y$ bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.5.4. $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathbb{R}^n$'de iki vektör sistemi, G bir grup ve $G{:}\,\mathbb{R}^n$ etkisi verilmiş olsun. Eğer $\forall i = 1,2, \dots, m$ için $y_i = gx_i$ olacak şekilde $g \in G$ varsa $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$ sistemlerine $G-$denk sistemler denir ve $\{x_1, \dots, x_m\} \overset{G}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\}$ ile gösterilir.

Önerme 1.5.5. $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathbb{R}^n$'de iki vektör sistemi, G bir grup ve $G{:}\,\mathbb{R}^n$ etkisi verilmiş olsun. Bu taktirde $\{x_1, \dots, x_m\} \overset{G}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\}$ bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 1.5.6. G bir grup, $H \subset X$ ve $G{:}\,X$ etkisi verilmiş olsun. Eğer $\forall h \in H$ ve $\forall g \in G$ için $gh \in H$ ise $H \subset X$ altkümesine $G-$invaryant alt küme denir.

Bu tanımda H olarak $H = \{x_0\} \subset X$ alındığında $\forall g \in G$ için $gx_0 = x_0$ ise x_0 noktasına $G-$invaryant nokta denir.

Tanım 1.5.7. G bir grup, $x \in X$ ve $G{:}\,X$ etkisi verilmiş olsun.

$$Gx = \{g \cdot x : g \in G\}$$

kümesine x noktasının $G-$yörüngesi denir.

Örnek 1.5.8. $G = \{-1,1\}$, $X = \mathbb{R}$ ve Örnek 1.5.2'deki $G{:}\,\mathbb{R}$ etkisini alalım. Bir $x \in \mathbb{R}$ noktasının $G-$yörüngesi $Gx = \{\pm x : x \in \mathbb{R}\}$ şeklindedir.

Önerme 1.5.9. $G{:}\,X$ etkisi verilmiş olsun. Keyfi $x \in X$ elemanının $G-$yörüngesi bir $G-$invaryant alt kümedir.

Önerme 1.5.10. $G{:}\,X$ etkisi verilmiş olsun. Keyfi $x \in X$ elemanının $G-$yörüngesi Gx olmak üzere Gx in kendisinden farklı $G-$invaryant alt kümesi yoktur.

Sonuç 1.5.11. Keyfi $a \in Gx$ için $Ga = Gx$ dir.

Önerme 1.5.12. G bir grup ve $G{:}\,X$ etkisi verilmiş olsun. $x, y \in X$ $(x \neq y)$ noktalarının yörüngeleri Gx ve Gy olmak üzere $Gx \cap Gy \neq \emptyset$ ise $Gx = Gy$ dir. Başka bir ifadeyle $Gx \neq Gy$ ise $Gx \cap Gy = \emptyset$ dir.

1.6. G −İnvaryant Fonksiyonlar

Bu bölümdeki tanım, teorem ve örnekler için [16], [17], [23], [25] ve [33]'teki kaynakları göz önüne aldık.

Tanım 1.6.1. X kümesi, G grubu ve $G\colon X$ etkisi verilmiş olsun. $f\colon X \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall g \in G$ ve $\forall x \in X$ için $f(g \cdot x) = f(x)$ ise f fonksiyonuna G −invaryant fonksiyon denir.

Örnek 1.6.2.

1) $G = \{-1,1\}$, $X = \mathbb{R}$ ve Örnek 1.5.2'deki $G\colon \mathbb{R}$ etkisini alalım. $f(x) = x^2$ fonksiyonu, $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$f(1 \cdot x) = f(x),$$
$$f\big((-1) \cdot x\big) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

koşullarını sağladığından G −invaryant fonksiyondur. Fakat $f(x) = x^3$ fonksiyonu bir G −invaryant fonksiyon değildir. Çünkü

$$f\big((-1)x\big) = (-x)^3 = -x^3 \neq f(x)$$

dir.

2) $X = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2)\colon x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2\}$, $G = Iz(2) = \{F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\colon F(x) = h(x) + b, h \in O(2), b \in \mathbb{R}^2\}$ ve Örnek 1.4.2 (5)'teki $Iz(2)\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ etkisini alalım. $f\colon X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$ ile verilsin. $\forall g \in G$ için,

$$\begin{aligned} f(Fx_1, Fx_2) &= \|Fx_1 - Fx_2\| = \|(gx_1 + b) - (gx_2 + b)\| = \|gx_1 - gx_2\| \\ &= \|g(x_1 - x_2)\| = \|x_1 - x_2\| = f(x_1, x_2) \end{aligned}$$

olduğundan $f(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$, bir G −invaryant fonksiyondur.

Tanım 1.6.3. X kümesi, G grubu ve $G\colon X$ etkisi verilmiş olsun. $C = \{f_i\colon i = 1, \ldots, k\}$ bir G −invaryant fonksiyonlar sistemi olsun. X kümesinin x ve y elemanları için $f_i(x) = f_i(y)$ $(i = 1, \ldots, k)$ iken $x \overset{G}{\sim} y$ ise C sistemine G −invaryant fonksiyonların bir tam sistemi denir.

G −invaryant fonksiyonların tam sistemine örnek, Örnek 1.7.1.7'de verilecektir.

Tanım 1.6.4. K bir küme olsun ve K üzerinde toplama, çarpma ve reel sayılarla çarpım işlemleri tanımlansın. Eğer

i) $(K, +, \cdot)$ halka.

ii) $(K, +, \lambda\,\cdot)$ $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı.

iii) $\forall x, y \in K$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \cdot (x \cdot y) = (\lambda \cdot x) \cdot y = x \cdot (\lambda \cdot y)$.

ise $\{K, +, \cdot, \lambda\,\cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ sistemine bir $\mathbb{R}$ $-$cebir denir.

Örnek 1.6.5. $+$ ve $\cdot$ $\mathbb{R}$'deki doğal işlemler olmak üzere, $\{\mathbb{R}, +, \cdot, \lambda\,\cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$ $-$cebirdir.

Örnek 1.6.6. Katsayıları $\mathbb{R}$'den olan tüm bir bilinmeyenli polinomlar halkasını $\mathbb{R}[x]$ ile gösterelim. Bu durumda, $+$, $\cdot$, ve $\lambda\,\cdot$ sırasıyla $\mathbb{R}[x]$'deki polinomların toplaması, polinomların çarpması ve bir polinom ile bir reel sayının çarpılması olmak üzere $\{\mathbb{R}[x], +, \cdot, \lambda\,\cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$ $-$cebirdir.

Örnek 1.6.7. Katsayıları $\mathbb{R}$'den olan tüm m bilinmeyenli polinomlar halkası $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ olsun. Bu durumda, $+$, $\cdot$, ve $\lambda\,\cdot$ sırasıyla $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$'deki polinomların toplaması, polinomların çarpması ve bir polinom ile bir reel sayının çarpılması olmak üzere $\{\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m], +, \cdot, \lambda\,\cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$bir $\mathbb{R}$ $-$cebirdir.

Not 1.6.8. G bir grup ve bir $G{:}\,\mathbb{R}$ etkisi verilmiş olsun. Tüm bir bilinmeyenli G $-$invaryant polinomların kümesini $\mathbb{R}[x]^G$ ile gösterelim. Ayrıca, $G{:}\,\mathbb{R}^n$ etkisi verilmek üzere, katsayıları $\mathbb{R}$'den olan tüm m bilinmeyenli G $-$invaryant polinomlar kümesini $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]^G$ ile gösterelim.

Önerme 1.6.9. G bir grup, bir $G{:}\,\mathbb{R}^n$ etkisi verilmiş ve $x \overset{G}{\sim} y$ olsun. Bu taktirde, $\forall f \in \mathbb{R}[x]^G$ için $f(x) = f(y)$ dir.

Tanım 1.6.10. $\{K, +, \cdot, \lambda\,\cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$ $-$cebir ve $K_1 \subset K$ olsun. $\{K_1, +, \cdot, \lambda\,\cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$ $-$cebir ise K_1 alt kümesine K'nın bir $\mathbb{R}$ $-$alt cebiri denir.

Önerme 1.6.11. G bir grup, bir $G{:}\,\mathbb{R}$ etkisi verilmiş olsun. $\mathbb{R}[x]^G$, $\mathbb{R}[x]$'nin bir $\mathbb{R}$ $-$alt cebiridir.

Önerme 1.6.12. G bir grup, bir $G{:}\,\mathbb{R}^n$ etkisi verilmiş olsun. $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]^G$, $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$'nin bir $\mathbb{R}$ $-$alt cebiridir.

Önerme 1.6.13. $\{K, +, \cdot, \lambda\,\cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}$ $-$cebir ve $\{K_\tau : \tau \in T\}$, K nın $\mathbb{R}$ $-$alt cebirlerinin bir ailesi olsun. Bu taktirde, $\bigcap_{\tau \in T} K_\tau$ bir $\mathbb{R}$ $-$alt cebirdir.

Not 1.6.14. $\{K, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}-$cebir ve $S \subset K$ olsun. K_τ lar S'yi kapsayan K'nın $\mathbb{R}-$alt cebirleri olmak üzere, $\bigcap_{s\subset K_\tau} K_\tau$ $\mathbb{R}-$alt cebirini $[S]_\mathbb{R}$ şeklinde gösterelim. S'yi kapsayan en az bir tane K'nın $\mathbb{R}-$alt cebir vardır bu ise K'nın kendisidir.

Tanım 1.6.15. $\{K, +, \cdot, \lambda \cdot, \lambda \in \mathbb{R}\}$ bir $\mathbb{R}-$cebir ve $S \subset K$ olsun. $[S]_\mathbb{R} = K$ ise S'ye K'nın üreteç sistemi denir.

Örnek 1.6.16. $K = \mathbb{R}[x]$ olsun. $S = \{1, x\}$ alalım. Burada 1, K'nın birimidir.

$$[S]_\mathbb{R} = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n\}$$

olup $[S]_\mathbb{R} = K$ dır.

Örnek 1.6.17. $K = \mathbb{R}[x]$ olsun. $S = \{x\}$ alalım.

$$[S]_\mathbb{R} = \{a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots, n\}$$

olup $[S]_\mathbb{R} \neq K$ dır.

Örnek 1.6.18. $K = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ olsun. $S = \{1, x_1, \dots, x_m\}$ alınırsa $[S]_\mathbb{R} = K$ olur.

1.7. Noktalar Sistemi İçin $O(n)$ ve $Iz(n)$ Denklik Problemleri

Bu bölüm [17] ve [33]'ten alınmıştır.

1.7.1. Noktalar Sistemi İçin $O(n) -$ Denklik Problemi

Bu bölümde, $O(n): \mathbb{R}^n$ etkisini Örnek 1.4.2 (3)'teki gibi alalım.

Tanım 1.7.1.1. $O(n)$ ortogonal dönüşümler grubu ve $O(n): X$ etkisi verilmiş olsun. Katsayıları $\mathbb{R}$'den olan tüm m bilinmeyenli $O(n)-$invaryant polinomlar kümesini $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]^{O(n)}$ ile gösterelim.

Teorem 1.7.1.2. $x_1, x_2, \dots, x_m$ ler $\mathbb{R}^n$'de bilinmeyen vektörler olsun. Bu taktirde,

$$\langle x_i, x_j \rangle;\ i, j = 1,2, \dots, m; i \leq j$$

sistemi, $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_m]^{O(n)}$ $\mathbb{R}-$cebirinin üreteç sistemidir.

Tanım 1.7.1.3. $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathbb{R}^n$'de iki nokta sistemi olsun. Eğer $\forall i = 1,2, \dots, m$ için $y_i = gx_i$ olacak şekilde $g \in O(n)$ varsa $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$ nokta sistemlerine $O(n)-$denk denir ve $\{x_1, \dots, x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\}$ ile gösterilir.

Teorem 1.7.1.4. $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathbb{R}^n$'de iki vektör sistemi olsun. Bu takdirde,

$$\{x_1, \dots, x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\} \Leftrightarrow \forall i, j = 1, \dots, m; i \leq j \text{ için } \langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$$

dir.

Örnek 1.7.1.5. $\mathbb{R}^2$'de $\{x_1, x_2\}$ ve $\{y_1, y_2\}$ noktalar sistemi için

1) $x_1 = (2,3)$, $x_2 = (3,4)$ ve $y_1 = (1,3)$, $y_2 = (4,5)$ olarak alalım. $\langle x_1, x_1 \rangle = 13$, $\langle y_1, y_1 \rangle = 10$ ve dolayısıyla $\langle x_1, x_1 \rangle \neq \langle y_1, y_1 \rangle$ olduğundan $\{x_1, x_2\} = \{(2,3), (3,4)\} \overset{O(2)}{\nsim} \{y_1, y_2\} = \{(1,3), (4,5)\}$ dır.

2) $x_1 = (2,3)$, $x_2 = (3,4)$ ve $y_1 = (3,2)$, $y_2 = (4,3)$ olarak alalım. $\langle x_1, x_1 \rangle = \langle y_1, y_1 \rangle = 13$, $\langle x_1, x_2 \rangle = \langle y_1, y_2 \rangle = 18$, $\langle x_2, x_2 \rangle = \langle y_2, y_2 \rangle = 25$ olduğundan $\{x_1, x_2\} = \{(2,3), (3,4)\} \overset{O(2)}{\sim} \{y_1, y_2\} = \{(3,2), (4,3)\}$ dır.

Tanım 1.7.1.6. $O(n): \mathbb{R}^n$ etkisini alalım. Bu etkiye göre tüm invaryant fonksiyonları alalım. $C = \{f_i(x_1, \dots, x_m): i = 1, \dots, k\}$, $O(n)$ invaryant fonksiyonlar sistemi olsun. $\{x_1, \dots, x_m\}$, $\{y_1, \dots, y_m\}$ için $f_i(x_1, \dots, x_m) = f_i(y_1, \dots, y_m)$ $(i = 1, \dots, k)$ iken $\{x_1, \dots, x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\}$ ise $C = \{f_i(x_1, \dots, x_m): i = 1, \dots, k\}$ sistemine $\{x_1, \dots, x_m\}$ için $O(n)$ invaryant fonksiyonlarının tam sistemi denir.

Örnek 1.7.1.7. Teorem 1.7.1.4'ten $C = \{\langle x_i, x_j \rangle: i, j = 1, \dots, m, i \leq j\}$, $\{x_1, \dots, x_m\}$ için $O(n)$ grubuna göre invaryantların tam sistemidir.

1.7.2. Noktalar Sistemi İçin $Iz(n) -$ Denklik Problemi

Bu bölümde, $Iz(n): \mathbb{R}^n$ etkisini Örnek 1.4.2 (5)'teki gibi alalım.

Tanım 1.7.2.1. $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathbb{R}^n$'de iki nokta sistemi olsun. Eğer $\forall i = 1, 2, \dots, m$ için $y_i = Fx_i$ olacak şekilde $F \in Iz(n)$ varsa $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$ nokta sistemlerine $Iz(n)$ −denk denir ve $\{x_1, \dots, x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\}$ ile gösterilir.

Teorem 1.7.2.2. $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathbb{R}^n$'de iki vektör sistemi ve $m > 1$ olsun. Bu takdirde,

$$\{x_1, \dots, x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\}$$
$$\Leftrightarrow \{x_1 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m, 0\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1 - y_m, \dots, y_{m-1} - y_m, 0\}$$
$$\Leftrightarrow \{x_1 - x_m, \dots, x_{m-1} - x_m\} \overset{O(n)}{\sim} \{y_1 - y_m, \dots, y_{m-1} - y_m\}$$

dır.

Teorem 1.7.2.3. $\{x_1, \dots, x_m\}$ ve $\{y_1, \dots, y_m\}$, $\mathbb{R}^n$'de iki nokta sistemi ve $m > 1$ olsun. Bu takdirde,

$$\{x_1, \dots, x_m\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{y_1, \dots, y_m\} \Leftrightarrow \langle x_i - x_m, x_j - x_m \rangle = \langle y_i - y_m, y_j - y_m \rangle, \forall i, j = 1, \dots m - 1$$

dır.

1.8. Eğrinin Tanımları

Tanım 1.8.1. $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $x: I \to \mathbb{R}^n$ sürekli dönüşümüne bir sürekli parametrik eğri (sürekli yol) denir.

1882'de C. Jordan, eğri tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 1.8.2. (C. Jordan) $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $x: I \to \mathbb{R}^n$ sürekli parametrik eğri olsun. $Gör(x)$ ile $\mathbb{R}^n$'deki

$$\{x(t): t \in \mathbb{R}\}$$

kümesini gösterelim. $Gör(x)$ kümesine eğri (Jordan eğrisi) denir.

1890'da Peano, $x: I \to \mathbb{R}^2$, $Gör(x) = \{(a_1, a_2): 0 \leq a_1 \leq 1, 0 \leq a_2 \leq 1\}$ eşitliğini sağlayan Jordan eğrisi örneğini vermiştir. Bu örnek, eğrinin geometrik tasviri ile yani, "eni olmayan uzunluk" (Öklid) tanımıyla çelişmekteydi.

Bundan dolayı Tanım 1.8.1 ve Tanım 1.8.2, diferansiyel geometride şu şekilde verilir.

Tanım 1.8.3. $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere türevi mevcut ve türevi sürekli olan $x: I \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne C^1 −parametrik eğri (C^1 −yol) denir.

Tanım 1.8.4. $I = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere her mertebeden türevi mevcut olan $x: I \to \mathbb{R}^n$ dönüşümüne C^∞ −parametrik eğri (C^∞ −yol) denir.

Tanım 1.8.5. $x: I \to \mathbb{R}^n$ bir C^1 −parametrik eğri olmak üzere $Gör(x)$ kümesine C^1 −eğri (Jordan C^1 −eğrisi) denir.

Matematik analizde, C^1 −eğriler için Peano örneği benzerinin mevcut olmadığı gösterilmektedir.

Guggenheimer [11, s. 21]'de eğrilerin G denklik tanımını verirken Tanım 1.8.5'i kullanmıştır.

1906'da M. Frechet eğri tanımını aşağıdaki gibi vermiştir.

Tanım 1.8.6. $\mathbb{R}^n$'de tanım kümesi $I_1 = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ olan $x(t)$ ve $I_2 = (c, d) \subseteq \mathbb{R}$ olan $y(t)$ C^∞ −parametrik eğriler verilmiş olsun. Eğer,

$$\forall r \in I_2 \text{ için } \varphi'(r) > 0 \text{ ve } y(r) = x\big(\varphi(r)\big)$$

olacak şekilde bir $\varphi: I_1 \to I_2$ C^1 −diffeomorfizması mevcut ise $x(t)$ ve $y(t)$ parametrik eğrilerine C^1 −denk denir. C^1 −denk olan parametrik eğriler ailesine eğri (yönlü eğri, parametrik olmayan eğri, 3. tip eğri) denir. Bu ailedeki parametrik eğriye 3. tip eğrinin parametrizasyonu denir.

Bu şekildeki tanım, Kühnel'in [22, s.8] kitabı ile Khadjiev ve Pekşen'in [20, 28] makalelerinde kullanılmıştır. Bu tanıma yakın olan sürekli eğri (parametrik olmayan) tanımı, Guggenheimer'in [11, s.2] kitabında verilmiştir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde G grubu olarak $O(n)$ ortogonal dönüşümler grubunu veya $Iz(n)$ izometriler grubunu alacağız.

2.1. Parametrik Doğru ve Doğru Kavramları

Bu bölümde doğruya diferansiyel geometrideki eğrinin özel hali olarak bakılacak ve Bölüm 1.8'de verilen diferansiyel geometrideki 3 farklı tanımı kullanılarak doğrunun 4 farklı tanımı verilecektir.

Tanım 2.1.1. $\forall t \in \mathbb{R}$ için

$$D(t) = u + tv$$

olacak şekilde $u \in \mathbb{R}^n$ ve $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ varsa $D: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sürekli dönüşümüne $\mathbb{R}^n$'de bir parametrik doğru (1. tip doğru) denir.

Tanım 2.1.2. $\mathbb{R}^n$'de $x(t)$ parametrik eğrisi olarak $D = u + tv$ parametrik doğrusunu alalım. $Gör(D)$ ile $\mathbb{R}^n$'deki

$$\{u + tv : t \in \mathbb{R}\}$$

kümesini gösterelim. $Gör(D)$ Jordan eğrisine $\mathbb{R}^n$'de görüntü doğru (2. tip doğru) denir.

Tanım 2.1.3. Parametrizasyonları içinde $D = u + tv$ parametrik doğrusu olan 3. tip eğriye 3. tip doğru (yönlü doğru) denir.

Bu tanım, doğrunun yeni bir tanımıdır. Şimdi 3. tip doğru tanımını kullanarak doğrunun yeni bir tanımını daha vereceğiz.

Tanım 2.1.4. $\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + tv_2$ parametrik doğruları verilsin. Eğer, $u_1 = u_2$ ve $v_1 = v_2$ ise D_1 ve D_2 parametrik doğrularına aynı (eşit) parametrik doğrular denir ve $D_1 = D_2$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. $\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ parametrik doğruları olsunlar. Eğer, $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\varphi(t) = ct + d,\ c \in \mathbb{R} - \{0\},\ d \in \mathbb{R}$ ve $D_1(t) = D_2(\varphi(t))$ olacak şekilde mevcut ise D_1 ve D_2 parametrik doğrularına P −denk parametrik doğrular denir ve $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.6. $\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ parametrik doğrular olsunlar.

$$D_1 \overset{P}{\sim} D_2 \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ ve } \exists d \in \mathbb{R} \text{ öyle ki } u_1 = u_2 + dv_2 \text{ ve } v_1 = cv_2$$

dır.

İspat:$\Rightarrow$: $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ parametrik doğrular olsun. Bu durumda $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\varphi(t) = ct + d,\ c \in \mathbb{R} - \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$ ve $D_1(t) = D_2(\varphi(t))$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan,

$$u_1 + tv_1 = u_2 + (ct + d)v_2 \Rightarrow u_1 + tv_1 = u_2 + dv_2 + t\,cv_2$$

dir. Tanım 2.1.4'ten, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $d \in \mathbb{R}$ öyle ki, $v_1 = cv_2$ ve $u_1 = u_2 + dv_2$ dir.

$\Leftarrow$: $\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ parametrik doğruları verilsin ve $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki $u_1 = u_2 + dv_2$ ve $v_1 = cv_2$ olsun. Bu durumda,

$$u_1 + tv_1 = u_2 + dv_2 + t\,cv_2 \Rightarrow u_1 + tv_1 = u_2 + (ct + d)v_2$$

dir. Buradan, $\exists \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\varphi(t) = ct + d,\ c \in \mathbb{R} - \{0\},\ d \in \mathbb{R}$ için Tanım 2.1.4'e göre $D_1(t) = D_2(\varphi(t))$ dir. Dolayısıyla, $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ dir.■

Önerme 2.1.7. P −denk parametrik doğrular bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: P −denk parametrik doğrular bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz. Şimdi bunları gösterelim;

$\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$, $D_2 = u_2 + sv_2$ ve $D_3 = u_3 + qv_3$ parametrik doğrular olsun.

i) $D_1 \overset{P}{\sim} D_1$ dir. $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = t$ birim dönüşümünü almak yeterlidir.

ii) $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ olsun. $D_2 \overset{P}{\sim} D_1$ olduğunu gösterelim.

$D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ olduğundan, $\exists \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = ct + d,\ c \in \mathbb{R} - \{0\},\ d \in \mathbb{R}$ dönüşümü mevcuttur öyle ki $D_1(t) = D_2\big(\varphi(t)\big)$ dir.

$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = ct + d$ dönüşümü birebir ve örten olduğundan tersi mevcuttur ve $\varphi^{-1}(t) = \frac{1}{c}t - \frac{d}{c}$ şeklindedir. Burada $\frac{1}{c} \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $-\frac{d}{c} \in \mathbb{R}$ dir. Buna göre,

$$D_1(\varphi^{-1}(t)) = D_2\left(\varphi(\varphi^{-1}(t))\right) \Rightarrow D_1(\varphi^{-1}(t)) = D_2(t) \Rightarrow D_2 \overset{P}{\sim} D_1$$

dir.

iii) $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ ve $D_2 \overset{P}{\sim} D_3$ olsun. $D_1 \overset{P}{\sim} D_3$ olduğunu gösterelim.

$D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ olduğundan, $\exists \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(t) = ct + d,\ c \in \mathbb{R} - \{0\},\ d \in \mathbb{R}$ dönüşümü mevcuttur öyle ki

$$D_1(t) = D_2(\varphi(t))$$

ve

$D_2 \overset{P}{\sim} D_3$ olduğundan, $\exists \psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\psi(s) = c's + d'$, $c' \in \mathbb{R} - \{0\}$, $d' \in \mathbb{R}$ dönüşümü mevcuttur öyle ki

$$D_2(s) = D_3(\psi(s))$$

dir. $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ve $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ olduğundan $\psi \circ \varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mevcut ve

$$(\psi \circ \varphi)(t) = \psi(ct + d) = c'ct + c'd + d'$$

şeklindedir ve ayrıca $c'c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $c'd + d' \in \mathbb{R}$ dir. O halde,

$$D_1(t) = D_2(\varphi(t)) = D_3\left(\psi(\varphi(t))\right) = D_3((\psi \circ \varphi)(t)) \Rightarrow D_1 \overset{P}{\sim} D_3$$

dir.■

Tanım 2.1.8. $P-$denk parametrik doğrular ailesine doğru (parametrik olmayan doğru) (4.tip doğru) denir ve bu

$$\alpha \coloneqq \{D_\tau : \tau \in \mathrm{T}, D_\tau, P - denk\ doğrular\}$$

şeklinde gösterilir. Burada, D_τ ya $\alpha-$doğrusunun parametrizasyonu denir.

Not 2.1.9. $D(t) = u + tv$, $\mathbb{R}^n$'de bir parametrik doğru olsun. D'yi kapsayan 4. tip α doğrusunu $[D]_P$ şeklinde göstereceğiz.

Önerme 2.1.10. $\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ parametrik doğrular olsun. Bu taktirde,

$$D_1 \overset{P}{\sim} D_2 \Leftrightarrow G\ddot{o}r(D_1) = G\ddot{o}r(D_2)$$

dir.

İspat: $\Rightarrow$: $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ olsun. Bu durumda $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü $\varphi(t) = ct + d$, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$, $d \in \mathbb{R}$ ve $D_1(t) = D_2(\varphi(t))$ olacak şekilde mevcuttur. Buradan,

$$G\ddot{o}r(D_1) \subseteq G\ddot{o}r(D_2)$$

dir. $D_1(t) = D_2(\varphi(t))$ eşitliğinden $D_2(s) = D_1(\varphi^{-1}(s))$ olur. Burada, $s = \varphi(t) = ct + d$ ve $t = \varphi^{-1}(s) = \frac{1}{c}s - \frac{d}{c}$ dir. Buradan,

$$G\ddot{o}r(D_2) \subseteq G\ddot{o}r(D_1)$$

dir. $G\ddot{o}r(D_1) \subseteq G\ddot{o}r(D_2)$ ve $G\ddot{o}r(D_2) \subseteq G\ddot{o}r(D_1)$ den $G\ddot{o}r(D_1) = G\ddot{o}r(D_2)$ olur.

$\Leftarrow$: $G\ddot{o}r(D_1) = G\ddot{o}r(D_2)$ olsun. $G\ddot{o}r(D_1) = G\ddot{o}r(D_2)$ olduğundan $t = 0$ için

$$D_1(0) = u_1 \in G\ddot{o}r(D_2) \Rightarrow u_1 = D_2(s_1) = u_2 + s_1 v_2$$

olacak şekilde $s_1 \in \mathbb{R}$ vardır. Benzer şekilde $t = 1$ için

$$D_1(1) = u_1 + v_1 \in G\ddot{o}r(D_2) \Rightarrow u_1 + v_1 = D_2(s_2) = u_2 + s_2 v_2$$

olacak şekilde $s_2 \in \mathbb{R}$ vardır. $u_1 = u_2 + s_1 v_2$ ve $u_1 + v_1 = u_2 + s_2 v_2$ den

$$v_1 = u_2 + s_2 v_2 - u_1 = u_2 + s_2 v_2 - u_2 - s_1 v_2 = (s_2 - s_1) v_2$$

bulunur. Gösterelim ki, $s_2 - s_1 \neq 0$ dır. Eğer, $s_2 - s_1 = 0$ olsaydı $s_2 = s_1$ ve $D_1(0) = D_1(1)$ olurdu. Buradan $u_1 = u_1 + v_1$ ve $v_1 = 0$ bulunur. Bu bir çelişkidir. Çünkü parametrik doğrularda $v_1 \neq 0$ dır. Dolayısıyla $s_2 - s_1 \neq 0$ dır. Buradan,

$$u_1 = u_2 + s_1 v_2 \text{ ve } v_1 = (s_2 - s_1) v_2$$

yani, $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ dir.■

Sonuç 2.1.11. $\mathbb{R}^n$'de $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ parametrik doğrular olsun. Bu taktirde,

$$[D_1]_P = [D_2]_P \Leftrightarrow Gör(D_1) = Gör(D_2)$$

dir.

İspat: $\Rightarrow$: $[D_1]_P = [D_2]_P$ olsun. O halde, $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ dir. Önerme 2.1.10'dan

$$Gör(D_1) = Gör(D_2)$$

dir.

$\Leftarrow$: $Gör(D_1) = Gör(D_2)$ olsun. Bu taktirde Önerme 2.1.10'dan $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ dir. Yani, $[D_1]_P = [D_2]_P$ dir.■

Bu sonuca göre aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 2.1.12. α, $\mathbb{R}^n$'de bir doğru ve $D \in \alpha$ olsun. $Gör(D)$ kümesini $Gör(\alpha)$ ile gösterelim.

Sonuç 2.1.11'e göre $Gör(\alpha)$ kümesi $D \in \alpha$ seçimine bağlı değildir.

Sonuç 2.1.13.

1) $\mathbb{R}^n$'de $D = u + tv$ keyfi parametrik doğru ve α doğru olmak üzere,

$$Gör(\alpha) = Gör(D) \Leftrightarrow D \in \alpha$$

dır.

2) $\mathbb{R}^n$'de α ve β doğrular olmak üzere,

$$\alpha = \beta \Leftrightarrow Gör(\alpha) = Gör(\beta)$$

dır.

Tanım 2.1.14. $D = u + tv$, $\mathbb{R}^n$'de parametrik doğru olsun. Eğer,

$$\langle v, v\rangle = 1 \text{ ve } \langle u, v\rangle = 0$$

ise bu parametrik doğruya kanonik parametrik doğru denir.

Teorem 2.1.15. Keyfi α doğrusunun kanonik parametrizasyonu mevcuttur. Yani, $D = u + tv$ olmak üzere $\langle v, v\rangle = 1$ ve $\langle u, v\rangle = 0$ olacak şekilde $D \in \alpha$ mevcuttur.

İspat: $D' = u' + tv'$ şeklinde parametrik doğru ve $D' \in \alpha$ olsun. $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ için

$v = cv'$ ve $u = u' + dv'$

vektörlerini göz önüne alalım. $\langle v, v\rangle = 1$ ve $\langle u, v\rangle = 0$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ sayılarını seçelim:

$$\underbrace{\langle v, v\rangle}_{1} = \langle cv', cv'\rangle \Rightarrow c^2\langle v', v'\rangle = 1 \Rightarrow c^2 = \frac{1}{\langle v', v'\rangle} \Rightarrow c = \pm\sqrt{\frac{1}{\langle v', v'\rangle}}$$

dır. $v' \neq 0$ olduğundan, $\langle v', v'\rangle \neq 0$ dır. Buna göre $c \neq 0$ olur. Yani, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ dir.

$$\underbrace{\langle u, v\rangle}_{0} = \langle u' + dv', cv'\rangle \Rightarrow \langle dv', cv'\rangle + \langle u', cv'\rangle = 0 \Rightarrow cd\langle v', v'\rangle + c\langle u', v'\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{c}_{\neq 0}\,(d\langle v', v'\rangle + \langle u', v'\rangle) = 0 \Rightarrow d\langle v', v'\rangle + \langle u', v'\rangle = 0$$

$$\Rightarrow d = -\frac{\langle u', v'\rangle}{\langle v', v'\rangle}$$

dır. $v' \neq 0$ olduğundan $\langle v', v'\rangle \neq 0$ dır. Buna göre $d \in \mathbb{R}$ dir.

O halde, $c = \pm\sqrt{\frac{1}{\langle v', v'\rangle}}$ ve $d = -\frac{\langle u', v'\rangle}{\langle v', v'\rangle}$ alınırsa,

$v = cv'$ ve $u = u' + dv'$, $\langle v, v\rangle = 1$ ve $\langle u, v\rangle = 0$

olur. Buradan $D = u + tv$ olmak üzere $D \overset{P}{\sim} D'$ dır. Dolayısıyla $D \in \alpha$ dir.■

Teorem 2.1.16. Bir α doğrusu içinde sadece iki tane kanonik parametrik doğru vardır. Bunlar, $\langle v, v\rangle = 1$ ve $\langle u, v\rangle = 0$ olmak üzere, $D_1 = u + tv$ ve $D_2 = u - tv$ şeklindedir.

İspat: Teorem 2.1.15'e göre $\langle v, v\rangle = 1$ ve $\langle u, v\rangle = 0$ olacak şekilde $D_1 = u + tv$, $D_1 \in \alpha$ vardır. Bu taktirde $D_2 = u - tv$ parametrik doğrusu ve $\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = -t$ dönüşümü için $D_2 = D_1(\varphi(t))$ dir. Yani, $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ ve $D_2 \in \alpha$ dir. Dolayısıyla $D_1 = u + tv$ ve $D_2 = u - tv$, α doğrusunda iki kanonik parametrik doğrudur.

Şimdi, $D' = u' + tv'$, α doğrusunda kanonik parametrik doğru olsun. Buradan, $\langle v', v' \rangle = 1$ ve $\langle u', v' \rangle = 0$ dır.

$D_1, D_2, D' \in \alpha$ olduğundan $D_1 \overset{P}{\sim} D'$ ve $D_2 \overset{P}{\sim} D'$ dir.

$D_1 \overset{P}{\sim} D'$ olduğundan $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki $cv' = v$ ve $u' + dv' = u$ dır. Buradan,

$$\underbrace{\langle v, v \rangle}_{1} = \langle cv', cv' \rangle \Rightarrow c^2 \underbrace{\langle v', v' \rangle}_{1} = 1 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

$$\underbrace{\langle u, v \rangle}_{0} = \langle u' + dv', cv' \rangle \Rightarrow \langle dv', cv' \rangle + \langle u', cv' \rangle = 0 \Rightarrow cd \underbrace{\langle v', v' \rangle}_{1} + c \underbrace{\langle u', v' \rangle}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow cd = 0 \Rightarrow d = 0$$

bulunur. Yani, $D_1 \overset{P}{\sim} D'$ ise $c = \pm 1$ ve $d = 0$ elde edilir. Buradan, $D' = u \pm tv$ dır. Yani, $D' = D_1$ veya $D' = D_2$ olur.

Sonuç olarak, α doğrusunun sadece iki tane kanonik parametrik doğrusu mevcuttur.■

Not 2.1.17. Bir α doğrusu ve α doğrusunun bir kanonik parametrik doğrusu $D = u + tv$ ile verilsin. Bu durumda, D nin α doğrusunun kanonik parametrizasyonu olduğunu $\{u, v\}_\alpha$ ile göstereceğiz.

2.2. n −Boyutlu Öklid Uzayında Parametrik Doğruların G −Denklik Problemi

Tanım 2.2.1. $\mathbb{R}^n$ de $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u'_1, \dots, u'_l; v'_1, \dots, v'_k\}$ nokta sistemleri verilsin ve $l > 1$ olsun. Eğer $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u'_i = gu_i + b \text{ ve } v'_j = gv_j$$

olacak şekilde bir $g \in O(n)$ ve bir $b \in \mathbb{R}^n$ mevcut ise $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u'_1, \dots, u'_l; v'_1, \dots, v'_k\}$ sistemlerine $yarı - Iz(n)$ $\left(Iz_y(n)\right)$ −denk sistemler denir ve

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{u'_1, \dots, u'_l; v'_1, \dots, v'_k\}$$

ile gösterilir.

Önerme 2.2.2. $Iz_y(n)$ −denk bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $Iz_y(n)$ −denk bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz. Şimdi bunları gösterelim;

$\mathbb{R}^n$'de $A = \{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$, $B = \{u'_1, \dots, u'_l; v'_1, \dots, v'_k\}$ ve $C = \{u''_1, \dots, u''_l; v''_1, \dots, v''_k\}$ nokta sistemlerini alalım.

i) $A \overset{Iz_y(n)}{\sim} A$ dir. Gerçekten, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u_i = Iu_i + 0 \text{ ve } v_j = Iv_j$$

yazılabilir. $I \in O(n)$ ve $0 \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $A \overset{Iz_y(n)}{\sim} A$ dir.

ii) $A \overset{Iz_y(n)}{\sim} B$ olsun. $B \overset{Iz_y(n)}{\sim} A$ olduğunu gösterelim.

$A \overset{Iz_y(n)}{\sim} B$ olduğundan $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u'_i = gu_i + b \text{ ve } v'_j = gv_j$$

dir. Buna göre,

$$u'_i = gu_i + b \Rightarrow u'_i - b = gu_i \Rightarrow u_i = g^{-1}(u'_i - b) \Rightarrow u_i = g^{-1}u'_i - g^{-1}b$$

ve

$$v'_j = gv_j \Rightarrow v_j = g^{-1}v'_j$$

dir. Burada $g \in O(n)$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $g^{-1} \in O(n)$ ve $g^{-1}b \in \mathbb{R}^n$ dir. O halde, $B \overset{Iz_y(n)}{\sim} A$ dir.

iii) $A \overset{Iz_y(n)}{\sim} B$ ve $B \overset{Iz_y(n)}{\sim} C$ olsun. $A \overset{Iz_y(n)}{\sim} C$ olduğunu gösterelim.

$A \overset{Iz_y(n)}{\sim} B$ olduğundan $\exists g_1 \in O(n)$ ve $\exists b_1 \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u'_i = g_1u_i + b_1 \text{ ve } v'_j = g_1v_j$$

ve

$B \overset{Iz_y(n)}{\sim} C$ olduğundan $\exists g_2 \in O(n)$ ve $\exists b_2 \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u_i'' = g_2 u_i' + b_2 \text{ ve } v_j'' = g_2 v_j'$$

dir. Buna göre,

$$u_i'' = g_2 u_i' + b_2 = g_2(g_1 u_i + b_1) + b_2 = g_2 g_1 u_i + g_2 b_1 + b_2$$

ve

$$v_j'' = g_2 v_j' = g_2 g_1 v_j$$

dir. Burada, $g_1, g_2 \in O(n)$ ve $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $g_2 g_1 \in O(n)$ ve $g_2 b_1 + b_2 \in \mathbb{R}^n$ dir. O halde, $A \overset{Iz_y(n)}{\sim} C$ dir.

Sonuç olarak, $Iz_y(n)$ −denk bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.■

Teorem 2.2.3. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ nokta sistemleri verilsin ve $l > 1$ olsun.

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\} \Leftrightarrow$$
$$\{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u_1' - u_l', \dots, u_{l-1}' - u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dır.

İspat: ⇒: $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ olsun. Bu taktirde, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} u_i' = g u_i + b \\ v_j' = g v_j \end{cases}$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ dir. Buradan, $i = 1, \dots, l-1$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$u_i' - u_l' = (g u_i + b) - (g u_l + b) = g u_i - g u_l = g(u_i - u_l)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{cases} u_i' - u_l' = g(u_i - u_l) & i = 1, \dots, l-1 \\ v_j' = g v_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

dir. O halde, Tanım 1.7.1.3'ten

$$\{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u'_1 - u'_l, \dots, u'_{l-1} - u'_k; v'_1, \dots, v'_k\}$$

dir.

⇐: $\{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u'_1 - u'_l, \dots, u'_{l-1} - u'_l; v'_1, \dots, v'_k\}$ olsun. Bu taktirde,

$$\begin{cases} u'_i - u'_l = g(u_i - u_l) & i = 1, \dots, l-1 \\ v'_j = gv_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ dir. $u'_l, u_l \in \mathbb{R}^n$ olduğundan ve $g \in O(n)$ bilindiğinden dolayı $u'_l - gu_l \in \mathbb{R}^n$ dir. O halde, $b = u'_l - gu_l$ olmak üzere, $i = 1, \dots, l-1$ için

$$u'_i - u'_l = g(u_i - u_l) = gu_i - gu_l \Rightarrow \underbrace{u'_l - gu_l}_{b} = u'_i - gu_i \Rightarrow u'_i - gu_i = b$$

dir. Dolayısıyla, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} u'_i = gu_i + b \\ v'_i = gv_i \end{cases}$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ dir. Buradan

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{u'_1, \dots, u'_l; v'_1, \dots, v'_k\}$$

dir. ■

Teorem 2.2.4. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$, $l > 1$, noktalar sistemi için $Iz_y(n)$ grubuna göre invaryantların tam sistemi

$$C = \left\{\langle u_i - u_l, u_j - u_l\rangle, \langle u_i - u_l, v_t\rangle, \langle v_t, v_q\rangle; 1 \leq i \leq j \leq l-1, 1 \leq t \leq q \leq k\right\}$$

dır.

İspat: $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u'_1, \dots, u'_l; v'_1, \dots, v'_k\}$ sistemleri verilsin ve $1 \leq i \leq j \leq l-1$, $1 \leq t \leq q \leq k$ için

$$\langle u_i - u_l, u_j - u_l \rangle = \langle u_i' - u_l', u_j' - u_l' \rangle$$
$$\langle u_i - u_l, v_t \rangle = \langle u_i' - u_l', v_t' \rangle$$
$$\langle v_t, v_q \rangle = \langle v_t', v_q' \rangle$$

olsun. Bu eşitliklerden Teorem 1.7.1.4'e göre

$$\{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u_1' - u_l', \dots, u_{l-1}' - u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dir. Buradan Teorem 2.2.3'e göre

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dir. Sonuç olarak $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ noktalar sistemi için $Iz_y(n)$ grubuna göre invaryantların tam sistemi

$$C = \left\{\langle u_i - u_l, u_j - u_l \rangle, \langle u_i - u_l, v_t \rangle, \langle v_t, v_q \rangle; 1 \le i \le j \le l-1, 1 \le t \le q \le k\right\}$$

dır.■

Tanım 2.2.5. $\mathbb{R}^n$'de $i = 1, \dots, k$ için $D_i = u_i + tv_i$ ve $D_i' = u_i' + tv_i'$ olmak üzere $\{D_1, \dots, D_k\}$ ve $\{D_1', \dots, D_k'\}$ parametrik doğrular sistemleri verilsin ve $G \le Iz(n)$ olsun. Eğer

$$D_i' = gD_i\,, (i = 1, \dots, k) \text{ yani, } u_i' + tv_i' = g(u_i + tv_i), (i = 1, \dots, k)$$

olacak şekilde bir $g \in G$ mevcut ise $\{D_1, \dots, D_k\}$ ve $\{D_1', \dots, D_k'\}$ parametrik doğrular sistemlerine G −denk parametrik doğrular sistemleri denir ve $\{D_1, \dots, D_k\} \overset{G}{\sim} \{D_1', \dots, D_k'\}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.6. $\mathbb{R}^n$'de $i = 1, \dots, k$ için $D_i = u_i + tv_i$ ve $D_i' = u_i' + tv_i'$ olmak üzere $\{D_1, \dots, D_k\}$ ve $\{D_1', \dots, D_k'\}$ parametrik doğrular sistemleri verilsin.

$$\{D_1, \dots, D_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{D_1', \dots, D_k'\} \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dır.

İspat:⇒: $\{D_1, \ldots, D_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{D_1', \ldots, D_k'\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(n)$ öyle ki $i = 1, \ldots, k$ için

$$D_i' = gD_i$$

dir. Buna göre,

$$D_i' = gD_i \Rightarrow u_i' + tv_i' = g(u_i + tv_i) \Rightarrow u_i' + tv_i' = gu_i + tgv_i$$

olur. Buradan, Tanım 2.1.4'ten, $i = 1, \ldots, k$ için

$$\begin{cases} u_i' = gu_i \\ v_i' = gv_i \end{cases}$$

dir. O halde, Tanım 1.7.1.3'ten $\{u_1, \ldots, u_k; v_1, \ldots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u_1', \ldots, u_k'; v_1', \ldots, v_k'\}$ dir.

⇐: $\{u_1, \ldots, u_k; v_1, \ldots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u_1', \ldots, u_k'; v_1', \ldots, v_k'\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1, \ldots, k$ için

$$\begin{cases} u_i' = gu_i \\ v_i' = gv_i \end{cases}$$

dir. Buradan,

$$u_i' + tv_i' = gu_i + tgv_i \Rightarrow u_i' + tv_i' = g(u_i + tv_i) \Rightarrow D_i' = gD_i$$

elde edilir. Yani, $\{D_1, \ldots, D_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{D_1', \ldots, D_k'\}$ dir.■

Teorem 2.2.7. $\mathbb{R}^n$'de $i = 1, \ldots, k$ için $D_i = u_i + tv_i$ olmak üzere $\{D_1, \ldots, D_k\}$ parametrik doğrular sistemi için $O(n)$ grubuna göre invaryantların tam sistemi

$$C = \left\{\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_t\rangle, \langle v_t, v_q\rangle; 1 \leq i \leq j \leq k, 1 \leq t \leq q \leq k\right\}$$

dır.

İspat: $\mathbb{R}^n$'de $i = 1, \ldots, k$ için $D_i = u_i + tv_i$ ve $D_i' = u_i' + tv_i'$ olmak üzere $\{D_1, \ldots, D_k\}$ ve $\{D_1', \ldots, D_k'\}$ parametrik doğrular sistemleri verilsin.
$1 \leq i \leq j \leq k$, $1 \leq t \leq q \leq k$ için

$$\langle u_i, u_j \rangle = \langle u_i', u_j' \rangle$$
$$\langle u_i, v_t \rangle = \langle u_i', v_t' \rangle$$
$$\langle v_t, v_q \rangle = \langle v_t', v_q' \rangle$$

olsun. Bu eşitliklerden Teorem 1.7.1.4'e göre

$$\{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dir. Buradan Teorem 2.2.6'ya göre

$$\{D_1, \dots, D_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{D_1', \dots, D_k'\}$$

dir. Sonuç olarak $\{D_1, \dots, D_k\}$ parametrik doğrular sistemi için $O(n)$ grubuna göre invaryantların tam sistemi

$$C = \{\langle u_i, u_j \rangle, \langle u_i, v_t \rangle, \langle v_t, v_q \rangle; 1 \leq i \leq j \leq k, 1 \leq t \leq q \leq k\}$$

dır.■

Teorem 2.2.8. $\mathbb{R}^n$'de $i = 1, \dots, k$, $k > 1$, için $D_i = u_i + tv_i$ ve $D_i' = u_i' + tv_i'$ olmak üzere $\{D_1, \dots, D_k\}$ ve $\{D_1', \dots, D_k'\}$ parametrik doğrular sistemleri verilsin.

$$\{D_1, \dots, D_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{D_1', \dots, D_k'\} \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dır.

İspat: $\Rightarrow$: $\{D_1, \dots, D_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{D_1', \dots, D_k'\}$ olsun. O halde, $\exists F \in Iz(n)$ öyle ki, $i = 1, \dots, k$ için

$$D_i' = FD_i$$

dir. $F \in Iz(n)$ olduğundan $F(x) = gx + b$ olacak şekilde, $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ dır. Buna göre, $i = 1, \dots, k$ için

$$D_i' = FD_i \Rightarrow u_i' + tv_i' = F(u_i + tv_i) \Rightarrow u_i' + tv_i' = g(u_i + tv_i) + b$$
$$\Rightarrow u_i' + tv_i' = gu_i + b + tgv_i$$

dir. Buradan, Tanım 2.1.4'ten, $i = 1, \dots, k$ için $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ öyle ki,

$$\begin{cases} u_i' = gu_i + b \\ v_i' = gv_i \end{cases}$$

dır. Yani, Tanım 2.2.1'den $\{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{Izy(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$ dir.

$\Leftarrow$: $\{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{Izy(n)}{\sim} \{u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$ olsun. Bu durumda, $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} u_i' = gu_i + b \\ v_i' = gv_i \end{cases}$$

dir. Buradan, $F(x) = gx + b$ yani, $F \in Iz(n)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_i' + tv_i' &= gu_i + b + tgv_i \Rightarrow u_i' + tv_i' = g(u_i + tv_i) + b \\ &\Rightarrow u_i' + tv_i' = F(u_i + tv_i) \Rightarrow D_i' = FD_i \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak, $\exists F \in Iz(n)$ öyle ki, $i = 1, \dots, k$ için $D_i' = FD_i$ dir. Yani, $\{D_1, \dots, D_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{D_1', \dots, D_k'\}$ dir.■

Teorem 2.2.9. $\mathbb{R}^n$'de $i = 1, \dots, k$, $k > 1$, için $D_i = u_i + tv_i$ olmak üzere $\{D_1, \dots, D_k\}$ parametrik doğrular sistemi için $Iz(n)$ grubuna göre tam invaryantlar sistemi

$$C = \{\langle u_i - u_k, u_j - u_k\rangle, \langle u_i - u_k, v_t\rangle, \langle v_t, v_q\rangle; 1 \le i \le j \le k-1, 1 \le t \le q \le k\}$$

dır.

İspat: İspat, Teorem 2.2.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır.■

2.3. n −Boyutlu Öklid Uzayında Noktalar ve Parametrik Doğrular Ailesinin G −Denklik Problemi

Tanım 2.3.1. $x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_m' \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $D_1, \dots, D_k, D_1', \dots, D_k'$ $i = 1, \dots, k$ için $D_i = u_i + tv_i$ ve $D_i' = u_i' + tv_i'$ şeklinde parametrik doğrular olmak üzere $\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\}$ ve $\{x_1', \dots, x_m', D_1', \dots, D_k'\}$ sistemleri verilsin ve $G \le Iz(n)$ olsun. Eğer

$$\begin{cases} x_i' = gx_i & i = 1, \dots, m \\ D_j' = gD_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

olacak şekilde bir $g \in G$ mevcut ise $\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\}$ ve $\{x_1', \dots, x_m', D_1', \dots, D_k'\}$ sistemlerine G −denk sistemler denir ve $\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\} \overset{G}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', D_1', \dots, D_k'\}$ ile gösterilir.

Teorem 2.3.2. $x_1, \dots, x_m, x_1', \dots, x_m' \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $D_1, \dots, D_k, D_1', \dots, D_k'$ $i = 1, \dots, k$ için $D_i = u_i + tv_i$ ve $D_i' = u_i' + tv_i'$ şeklinde parametrik doğrular olsunlar. Bu taktirde,

$$\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', D_1', \dots, D_k'\}$$

$$\Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dır.

İspat:⇒: $\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', D_1', \dots, D_k'\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(n)$ öyle ki $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} x_i' = gx_i \\ D_j' = gD_j \end{cases}$$

dir. Buna göre, $j = 1, \dots, k$ için

$$D_j' = gD_j \Rightarrow u_j' + tv_j' = g\left(u_j + tv_j\right) \Rightarrow u_j' + tv_j' = gu_j + tgv_j$$

olur. Buradan, Tanım 2.1.4'ten, $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} u_j' = gu_j \\ v_j' = gv_j \end{cases}$$

dir. Buna göre, $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} x_i' = gx_i \\ u_j' = gu_j \\ v_j' = gv_j \end{cases}$$

dir. O halde, Tanım 1.7.1.3'ten

$$\{x_1,\dots,x_m,u_1,\dots,u_k;v_1,\dots,v_k\}\overset{O(n)}{\sim}\{x'_1,\dots,x'_m,u'_1,\dots,u'_k;v'_1,\dots,v'_k\}$$

dir.

$\Leftarrow$: $\{x_1,\dots,x_m,u_1,\dots,u_k;v_1,\dots,v_k\}\overset{O(n)}{\sim}\{x'_1,\dots,x'_m,u'_1,\dots,u'_k;v'_1,\dots,v'_k\}$ olsun. Bu durumda $\exists g\in O(n)$ öyle ki, $i=1,\dots,m$ ve $j=1,\dots,k$ için

$$\begin{cases} x'_i = gx_i \\ u'_j = gu_j \\ v'_j = gv_j \end{cases}$$

dir. Buradan, $j=1,\dots,k$ için

$$u'_j + tv'_j = gu_j + tgv_j \Rightarrow u'_j + tv'_j = g(u_j+tv_j) \Rightarrow D'_j = gD_j$$

elde edilir. Buna göre,

$$\begin{cases} x'_i = gx_i \\ D'_j = gD_j \end{cases}$$

dir. Yani, $\{x_1,\dots,x_m,D_1,\dots,D_k\}\overset{O(n)}{\sim}\{x'_1,\dots,x'_m,D'_1,\dots,D'_k\}$ dir.■

Teorem 2.3.3. $x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $i=1,\dots,k$ için $D_i=u_i+tv_i$ parametrik doğrular olmak üzere $\{x_1,\dots,x_m,D_1,\dots,D_k\}$ için $O(n)$ grubuna göre tam invaryantlar sistemi

$$C=\big\{\langle x_q,x_r\rangle,\langle x_r,u_i\rangle,\langle u_i,u_j\rangle,\langle x_r,v_t\rangle,\langle u_i,v_t\rangle,\langle v_t,v_q\rangle;1\le q\le r\le m,\\ 1\le i\le j\le k,1\le t\le q\le k\big\}$$

dır.

İspat: İspat, Teorem 2.2.7'nin ispatına benzer şekilde yapılır.■

Teorem 2.3.4. $x_1,\dots,x_m,x'_1,\dots,x'_m\in\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $D_1,\dots,D_k,D'_1,\dots,D'_k$ $i=1,\dots,k$ için $D_i=u_i+tv_i$ ve $D'_i=u'_i+tv'_i$ şeklinde parametrik doğrular olmak üzere $\{x_1,\dots,x_m,D_1,\dots,D_k\}$ ve $\{x'_1,\dots,x'_m,D'_1,\dots,D'_k\}$ sistemleri verilsin.

$$\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', D_1', \dots, D_k'\}$$

$$\Leftrightarrow \{x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dır.

İspat: $\Rightarrow$: $\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', D_1', \dots, D_k'\}$ olsun. O halde $\exists F \in Iz(n)$ öyle ki, $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} x_i' = Fx_i \\ D_j' = FD_j \end{cases}$$

dir. $F \in Iz(n)$ olduğundan $F(x) = gx + b$ olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ dır. Buna göre, $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$x_i' = F(x_i) \Rightarrow x_i' = gx_i + b$$

ve

$$\begin{aligned} D_j' = FD_j \Rightarrow u_j' + tv_j' = F\big(u_j + tv_j\big) &\Rightarrow u_j' + tv_j' = g\big(u_j + tv_j\big) + b \\ &\Rightarrow u_j' + tv_j' = gu_j + b + tgv_j \end{aligned}$$

dir. Buradan, Tanım 2.1.6'dan, $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} u_j' = gu_j + b \\ v_j' = gv_j \end{cases}$$

dır. Buna göre, $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} x_i' = gx_i + b \\ u_j' = gu_j + b \\ v_j' = gv_j \end{cases}$$

dir. Yani, Tanım 2.2.1'den

$$\{x_1, \dots, x_m, u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{x_1', \dots, x_m', u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dir.

$\Leftarrow$: $\{x_1,\dots,x_m,u_1,\dots,u_k;v_1,\dots,v_k\} \overset{Iz_y(n)}{\sim} \{x'_1,\dots,x'_m,u'_1,\dots,u'_k;v'_1,\dots,v'_k\}$ olsun. Bu durumda, $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1,\dots,m$ ve $j = 1,\dots,k$ için

$$\begin{cases} x'_i = gx_i + b \\ u'_j = gu_j + b \\ v'_j = gv_j \end{cases}$$

dir. Buradan, $F(x) = gx + b$ yani, $F \in Iz(n)$ olmak üzere, $i = 1,\dots,m$ ve $j = 1,\dots,k$ için

$$x'_i = gx_i + b = Fx_i$$

ve

$$u'_j + tv'_j = gu_j + b + tgv_j \Rightarrow u'_j + tv'_j = g(u_j + tv_j) + b \Rightarrow u'_j + tv'_j = F(u_j + tv_j) \Rightarrow D'_i = FD_i$$

dir. Sonuç olarak, $\exists F \in Iz(n)$ öyle ki, $i = 1,\dots,m$ ve $j = 1,\dots,k$ için

$$\begin{cases} x'_i = Fx_i \\ D'_j = FD_j \end{cases}$$

dir. Yani, $\{x_1,\dots,x_m,D_1,\dots,D_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{x'_1,\dots,x'_m,D'_1,\dots,D'_k\}$ dir.■

Sonuç 2.3.5. $x_1,\dots,x_m,x'_1,\dots,x'_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $D_1,\dots,D_k,D'_1,\dots,D'_k$ $i = 1,\dots,k$ için $D_i = u_i + tv_i$ ve $D'_i = u'_i + tv'_i$ şeklinde parametrik doğrular olmak üzere $\{x_1,\dots,x_m,D_1,\dots,D_k\}$ ve $\{x'_1,\dots,x'_m,D'_1,\dots,D'_k\}$ sistemleri verilsin ve $m > 1$ olsun.

$$\{x_1,\dots,x_m,D_1,\dots,D_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{x'_1,\dots,x'_m,D'_1,\dots,D'_k\}$$
$$\Leftrightarrow \{x_1 - x_m,\dots,x_{m-1} - x_m,u_1 - x_m,\dots,u_k - x_m;v_1,\dots,v_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{x'_1 - x'_m,\dots,x'_{m-1} - x'_m,u'_1 - x'_m,\dots,u'_k - x'_m;v'_1,\dots,v'_k\}$$

dır.

İspat: Teorem 2.2.3 ile Teorem 2.3.4'ün sonucudur.

Teorem 2.3.6. $x_1, \dots, x_m, \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $i = 1, \dots, k$ için $D_i = u_i + tv_i$ parametrik doğrular ve $m > 1$ olmak üzere $\{x_1, \dots, x_m, D_1, \dots, D_k\}$ için $Iz(n)$ grubuna göre tam invaryantlar sistemi

$$C = \left\{ \begin{matrix} \langle x_q - x_m, x_r - x_m \rangle, \langle x_r - x_m, u_i \rangle, \\ \langle u_i - x_m, u_j - x_m \rangle, \langle x_r - x_m, v_t \rangle, \langle u_i - u_l, v_t \rangle, \langle v_t, v_q \rangle \end{matrix} ; 1 \leq q \leq r \leq m-1, \right.$$
$$\left. 1 \leq i \leq j \leq k, 1 \leq t \leq q \leq k \right\}$$

dir.

İspat: İspat, Teorem 2.2.4'ün ispatına benzer şekilde yapılır.■

2.4. n −Boyutlu Öklid Uzayında Doğruların G −Denklik Problemi

Not 2.4.1. $G \leq Iz(n)$, $g \in G$ ve $D = u + tv$ $\mathbb{R}^n$'de bir parametrik doğru olsun. Bu taktirde gD ile üretilen $[gD]_P$ doğrusunu $g[D]_P$ şeklinde gösterelim.

Önerme 2.4.2. $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$'de parametrik doğrular ve $g \in O(n)$ olsun. Bu durumda,

$$D_1 \overset{P}{\sim} D_2 \Leftrightarrow gD_1 \overset{P}{\sim} gD_2$$

yani,

$$[D_1]_P = [D_2]_P \Leftrightarrow g[D_1]_P = g[D_2]_P$$

dir.

İspat: $\Rightarrow$: $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ olsun. Bu durumda Önerme 2.1.6'dan $u_1 = u_2 + dv_2$ ve $v_1 = cv_2$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ dır. $g \in O(n)$ olduğundan,

$$D_1 = u_1 + tv_1 \Rightarrow gD_1 = g(u_1 + tv_1) \Rightarrow gD_1 = gu_1 + tgv_1$$
$$D_2 = u_2 + tv_2 \Rightarrow gD_2 = g(u_2 + tv_2) \Rightarrow gD_2 = gu_2 + tgv_2$$

dir. Ayrıca,

$$cv_2 = v_1 \Rightarrow g(cv_2) = g(v_1) \Rightarrow cgv_2 = gv_1$$

ve

$$u_2 + dv_2 = u_1 \Rightarrow g(u_2 + dv_2) = g(u_1) \Rightarrow gu_2 + dgv_2 = gu_1$$

dir. Sonuç olarak, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $d \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$cgv_2 = gv_1 \text{ ve } gu_2 + dgv_2 = gu_1$$

dir. Dolayısıyla, Önerme 2.1.6'dan $gD_1 \overset{P}{\sim} gD_2$ dir.

$\Leftarrow$: $gD_1 \overset{P}{\sim} gD_2$ olsun. O halde, $gD_1 = gu_1 + tgv_1$ ve $gD_2 = gu_2 + tgv_2$ olmak üzere, $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki,

$$gu_2 + dgv_2 = gu_1 \text{ ve } cgv_2 = gv_1$$

dir. $g \in O(n)$ olduğundan, $g^{-1} \in O(n)$ dir. Buna göre,

$$cgv_2 = gv_1 \Rightarrow g(cv_2) = g(v_1) \Rightarrow g^{-1}g(cv_2) = g^{-1}g(v_1) \Rightarrow cv_2 = v_1$$

ve

$$\begin{aligned} gu_2 + dgv_2 = gu_1 &\Rightarrow g(u_2 + dv_2) = g(u_1) \Rightarrow g^{-1}g(u_2 + dv_2) = g^{-1}g(u_1) \\ &\Rightarrow u_2 + dv_2 = u_1 \end{aligned}$$

dir. Yani, $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki, $cv_2 = v_1$ ve $u_2 + dv_2 = u_1$ dir. Dolayısıyla, Önerme 2.1.6'dan $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ dir.■

Önerme 2.4.3. $D_1 = u_1 + tv_1$ ve $D_2 = u_2 + sv_2$ olacak şekilde $\mathbb{R}^n$'de parametrik doğrular ve $F \in Iz(n)$ olsun. Bu durumda

$$D_1 \overset{P}{\sim} D_2 \Leftrightarrow FD_1 \overset{P}{\sim} FD_2$$

yani,

$$[D_1]_P = [D_2]_P \Leftrightarrow F[D_1]_P = F[D_2]_P$$

dir.

İspat: $\Rightarrow$: $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ olsun. Bu durumda Önerme 2.1.6'dan $u_1 = u_2 + dv_2$ ve $v_1 = cv_2$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ dır. $F \in Iz(n)$ olduğundan, $F(x) = g(x) + b$ olacak şekilde $g \in O(n)$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ vardır.

$$D_1 = u_1 + tv_1 \Rightarrow FD_1 = F(u_1 + tv_1) \Rightarrow FD_1 = g(u_1 + tv_1) + b \Rightarrow FD_1 = gu_1 + b + tgv_1$$

$$D_2 = u_2 + tv_2 \Rightarrow FD_2 = F(u_2 + tv_2) \Rightarrow FD_2 = g(u_2 + tv_2) + b \Rightarrow FD_2 = gu_2 + b + tgv_2$$

dir. Ayrıca,

$$cv_2 = v_1 \Rightarrow g(cv_2) = g(v_1) \Rightarrow cgv_2 = gv_1$$

ve

$$u_2 + dv_2 = u_1 \Rightarrow g(u_2 + dv_2) = g(u_1) \Rightarrow gu_2 + dgv_2 = gu_1$$

dir. Sonuç olarak, $c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $d \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$gu_2 + dgv_2 + b = gu_1 + b \text{ ve } cgv_2 = gv_1$$

dir. Dolayısıyla, Önerme 2.1.6'dan $FD_1 \overset{P}{\sim} FD_2$ dir.

$\Leftarrow$: $FD_1 \overset{P}{\sim} FD_2$ olsun. O halde, $FD_1 = gu_1 + b + tgv_1$ ve $FD_2 = gu_2 + b + tgv_2$ olmak üzere, $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki,

$$gu_2 + dgv_2 + b = gu_1 + b \text{ ve } cgv_2 = gv_1$$

dir. Burada, $F \in Iz(n)$ olduğundan $g \in O(n)$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $F(x) = g(x) + b$ biçimindedir. $g \in O(n)$ olduğundan, $g^{-1} \in O(n)$ dir. Buna göre,

$$cgv_2 = gv_1 \Rightarrow g(cv_2) = g(v_1) \Rightarrow g^{-1}g(cv_2) = g^{-1}g(v_1) \Rightarrow cv_2 = v_1$$

ve

$$gu_2 + dgv_2 + b = gu_1 + b \Rightarrow gu_2 + dgv_2 = gu_1 \Rightarrow g(u_2 + dv_2) = g(u_1)$$
$$\Rightarrow g^{-1}g(u_2 + dv_2) = g^{-1}g(u_1) \Rightarrow u_2 + dv_2 = u_1$$

dir. Yani, $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki, $cv_2 = v_1$ ve $u_2 + dv_2 = u_1$ dir. Dolayısıyla, Önerme 2.1.6'dan $D_1 \overset{P}{\sim} D_2$ dir.■

Önerme 2.4.4. $\alpha = \{D_\tau : \tau \in T\}$ bir doğru ve $g \in O(n)$ olsun. Bu taktirde,

$$g\alpha \coloneqq \{gD_\tau : \tau \in T\}$$

ailesi de bir doğrudur.

İspat: İlk önce $\forall \tau, \vartheta \in T$ için $gD_\tau \overset{P}{\sim} gD_\vartheta$ olduğunu gösterelim.

$\forall \tau, \vartheta \in T$ için $D_\tau, D_\vartheta \in \alpha$ için $D_\tau \overset{P}{\sim} D_\vartheta$ dir. Bu taktirde Önerme 2.4.2'den $gD_\tau \overset{P}{\sim} gD_\vartheta$ dir. Dolayısıyla, $g\alpha = \{gD_\tau : \tau \in T\}$ bir P −denklik sınıfının alt kümesidir.

Şimdi, bu alt kümenin, bu alt kümeyi kapsayan P −denklik sınıfına eşit olduğunu gösterelim. Bunun için D parametrik doğrusu $\exists \tau_0 \in T$ için $D \overset{P}{\sim} gD_{\tau_0}$ şeklinde ise $\mu \in T$ olmak üzere $D = gD_\mu$ biçiminde yazılabileceğini göstermeliyiz.

$g \in O(n)$ olduğundan $g^{-1} \in O(n)$ dir. Önerme 2.4.2'den,

$$D \overset{P}{\sim} gD_{\tau_0} \Rightarrow g^{-1}D \overset{P}{\sim} g^{-1}gD_{\tau_0} \Rightarrow g^{-1}D \overset{P}{\sim} D_{\tau_0}$$

dır. α-doğrusu denklik sınıfı olduğundan, $g^{-1}D \in \alpha$ dir. Yani, $\mu \in T$ olmak üzere $g^{-1}D = D_\mu$ olacak şekilde $D_\mu \in \alpha$ vardır. O halde, $\mu \in T$ için $D = gD_\mu$ dir.

Dolayısıyla, $g\alpha = \{gD_\tau : \tau \in T\}$ bir doğrudur.■

Önerme 2.4.5. $\alpha = \{D_\tau : \tau \in T\}$ bir doğru ve $F \in Iz(n)$ olsun. Bu taktirde,

$$F\alpha \coloneqq \{FD_\tau : \tau \in T\}$$

ailesi de bir doğrudur.

İspat: İlk önce $\forall \tau, \vartheta \in T$ için $FD_\tau \overset{P}{\sim} FD_\vartheta$ olduğunu gösterelim.

$\forall \tau, \vartheta \in T$ için $D_\tau, D_\vartheta \in \alpha$ için $D_\tau \overset{P}{\sim} D_\vartheta$ dir. Bu taktirde Önerme 2.4.3'ten $FD_\tau \overset{P}{\sim} FD_\vartheta$ dir. Dolayısıyla, $F\alpha = \{FD_\tau : \tau \in T,\}$ bir P −denklik sınıfının alt kümesidir.

Şimdi, bu alt kümenin, bu alt kümeyi kapsayan P −denklik sınıfına eşit olduğunu gösterelim. Bunun için, D parametrik doğrusu $\exists\tau_0 \in T$ için $D \overset{P}{\sim} FD_{\tau_0}$ şeklinde ise $\mu \in T$ olmak üzere $D = FD_\mu$ biçiminde yazılabileceğini göstermeliyiz.

$F \in Iz(n)$ olduğundan $F^{-1} \in Iz(n)$ dir. Önerme 2.4.3'ten,

$$D \overset{P}{\sim} FD_{\tau_0} \Rightarrow F^{-1}D \overset{P}{\sim} F^{-1}FD_{\tau_0} \Rightarrow F^{-1}D \overset{P}{\sim} D_{\tau_0}$$

dır. α-doğrusu denklik sınıfı olduğundan, $F^{-1}D \in \alpha$ dir. Yani, $\mu \in T$ olmak üzere $F^{-1}D = D_\mu$ olacak şekilde $D_\mu \in \alpha$ vardır. O halde, $\mu \in T$ için $D = FD_\mu$ dir.

Dolayısıyla, $F\alpha = \{FD_\tau : \tau \in T\}$ bir doğrudur.■

Önerme 2.4.6. $\{u, v\}_\alpha$, α doğrusunun kanonik parametrizasyonu ise $g \in O(n)$ olmak üzere, $\{gu, gv\}_{g\alpha}$, $g\alpha$ doğrusunun kanonik parametrizasyonudur.

İspat: $\{u, v\}_\alpha$, α doğrusunun kanonik parametrizasyonu ise $\langle v, v\rangle = 1$ ve $\langle u, v\rangle = 0$ dır. Şimdi, $g \in O(n)$ olmak üzere, $\langle gv, gv\rangle = 1$ ve $\langle gu, gv\rangle = 0$ olduğunu gösterelim.

$$\langle gv, gv\rangle = \langle v, v\rangle = 1 \text{ ve } \langle gu, gv\rangle = \langle u, v\rangle = 0$$

olur. Buradan, $\{gu, gv\}_{g\alpha}$, $g\alpha$ doğrusunun kanonik parametrizasyonudur.■

Önerme 2.4.7. $\{u, v\}_\alpha$, α doğrusunun kanonik parametrizasyonu ise $F \in Iz(n)$ için $F\alpha$ doğrusunun kanonik parametrizasyonu $F(x) = gx + b$, $g \in O(n)$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, $\{gu + b - \langle b, gv\rangle gv, gv\}_{F\alpha}$ dır.

İspat: $\{u, v\}_\alpha$, α doğrusunun kanonik parametrizasyonu ise $\langle v, v\rangle = 1$ ve $\langle u, v\rangle = 0$ dır. $F(x) = gx + b$, $g \in O(n)$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$D_1(t) = F(\{u, v\}_\alpha) = F(u + tv) = gu + b + tgv, \varphi(t) = t - \langle b, gv\rangle$$

ve

$$D_2(t) = D_1(\varphi(t)) = (gu + b - \langle b, gv\rangle gv) + tgv$$

Şimdi, $\langle gu + b - \langle b, gv\rangle gv, gv\rangle = 0$ ve $\langle gv, gv\rangle = 1$ olduğunu gösterelim.

$$\langle gv, gv\rangle = \langle v, v\rangle = 1$$

ve

$$\begin{aligned}\langle gu+b-\langle b,gv\rangle gv,gv\rangle &= \langle gu,gv\rangle+\langle b,gv\rangle-\langle\langle b,gv\rangle gv,gv\rangle\\ &= \langle gu,gv\rangle+\langle b,gv\rangle-\langle b,gv\rangle\langle gv,gv\rangle\\ &= \underbrace{\langle u,v\rangle}_{0}+\langle b,gv\rangle-\langle b,gv\rangle\underbrace{\langle v,v\rangle}_{1}=\langle b,gv\rangle-\langle b,gv\rangle=0\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\{gv, gu+b-\langle b,gv\rangle gv\}_{F\alpha}$, $F\alpha$ doğrusunun kanonik parametrizasyonudur.■

Tanım 2.4.8. α ve α', $\mathbb{R}^n$'de iki doğru ve $G \leq Iz(n)$ olsun. Eğer

$$\alpha' = g\alpha$$

olacak şekilde bir $g \in G$ mevcut ise α ve α' doğrularına $G-$denk doğrular denir ve $\alpha \overset{G}{\sim} \alpha'$ ile gösterilir.

Problem: α ve α', $\mathbb{R}^n$'de iki doğru olsun.

1) Ne zaman $\alpha \overset{O(n)}{\sim} \alpha'$ dır?

2) Ne zaman $\alpha \overset{Iz(n)}{\sim} \alpha'$ dır?

Teorem 2.4.9. $\mathbb{R}^n$'de α ve α' doğuları sırası ile $\{u,v\}_\alpha$ ve $\{u',v'\}_{\alpha'}$ kanonik parametrizasyonları ile verilsin. Bu durumda,

$$\alpha \overset{O(n)}{\sim} \alpha' \Leftrightarrow \exists g \in O(n) \text{ öyle ki } v' = \pm gv \text{ ve } u' = gu$$

dır.

İspat: $\Rightarrow$: $\alpha \overset{O(n)}{\sim} \alpha'$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.4.8'den,

$$\alpha' = g\alpha$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ dır. $\{u,v\}_\alpha$ ve $\{u',v'\}_{\alpha'}$ olduğundan $\langle v,v\rangle = 1$, $\langle u,v\rangle = 0$ ve $\langle v',v'\rangle = 1$, $\langle u',v'\rangle = 0$ dır.

$\alpha' = g\alpha$ olduğundan $\{u',v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{gu,gv\}_{g\alpha}$ dır. Gerçekten, $\alpha' = g\alpha$ olduğundan keyfi $x+sy \in \alpha'$ için $x+sy \in g\alpha$ dır. Buradan,

$$x+sy \in \alpha' \Rightarrow \{x,y\} \overset{P}{\sim} \{u',v'\}_{\alpha'} \text{ ve } x+sy \in g\alpha \Rightarrow \{x,y\} \overset{P}{\sim} \{gu,gv\}_{g\alpha}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\{u', v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{gu, gv\}_{g\alpha} \Rightarrow \{u', v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{gu, gv\}_{g\alpha}$$

dır. Buradan Önerme 2.1.6'ya göre,

$\{u', v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{gu, gv\}_{g\alpha} \Rightarrow v' = cgv$ ve $u' = dgv + gu$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ dır.

O halde,

$$1 = \langle v', v' \rangle = \langle cgv, cgv \rangle = c^2 \langle gv, gv \rangle = c^2 \underbrace{\langle v, v \rangle}_{1} = c^2 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

ve

$$0 = \langle u', v' \rangle = \langle dgv + gu, cgv \rangle = cd \langle gv, gv \rangle + c \langle gu, gv \rangle = cd \underbrace{\langle v, v \rangle}_{1} + c \underbrace{\langle u, v \rangle}_{0}$$
$$= cd \Rightarrow \underbrace{c}_{\pm 1} d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Dolayısıyla, $v' = \pm gv$ ve $u' = gu$ dır.

$\Leftarrow$: $v' = \pm gv$ ve $u' = gu$ olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ olsun.

Keyfi $x + sy \in \alpha'$ alalım ve $x + sy \in g\alpha$ olduğunu gösterelim.

$x + sy \in \alpha'$ olduğundan $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u', v'\}_{\alpha'}$ dir. O halde, $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = cv'$ ve $x = dv' + u'$ dır.

$$y = cv' = c(\pm gv) = \pm cgv = c'gv \ \ (c' = \pm c \neq 0)$$
$$x = dv' + u' = d(\pm gv) + gu = \pm dgv + gu = d'gv + gu \ \ (d' \in \mathbb{R})$$

dır. Yani, $\exists c' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c'gv$ ve $x = d'gv + gu$ olur. Buradan, $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{gu, gv\}_{g\alpha}$ dır. Buna göre $x + sy \in g\alpha$ ve dolayısıyla

$$\alpha' \subseteq g\alpha \qquad (2.1)$$

bulunur.

Şimdi keyfi $x' + ty' \in g\alpha$ alalım ve $x' + ty' \in \alpha'$ olduğunu gösterelim.

$x' + ty' \in g\alpha$ olduğundan $\{x', y'\} \overset{P}{\sim} \{gu, gv\}_{g\alpha}$ dir. O halde, $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki $y' = cgv$ ve $x' = dgv + gu$ dır.

$$y' = cgv = c(\pm v') = \pm cv' = c'v' \ (c' = \pm c \neq 0)$$
$$x' = dgv + gu = d(\pm v') + u' = \pm dv' + u' = d'v' + u' \ \ (d' = \pm d \in \mathbb{R})$$

dır. Yani, $\exists c' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c'v'$ ve $x = d'v' + u'$ olur. Buradan, $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u', v'\}_{\alpha'}$ dır. Buna göre $x' + ty' \in \alpha'$ ve dolayısıyla

$$g\alpha \subseteq \alpha' \tag{2.2}$$

bulunur.

(2.1) ve (2.2) den $\exists g \in O(n)$ öyle ki $\alpha' = g\alpha$ dir. Yani, $\alpha \overset{O(n)}{\sim} \alpha'$ dır.■

Teorem 2.4.10. $\mathbb{R}^n$'de α ve α' doğuları sırası ile $\{u, v\}_\alpha$ ve $\{u', v'\}_{\alpha'}$ kanonik parametrizasyonları ile verilsin. Bu durumda,

$$\alpha \overset{Iz(n)}{\sim} \alpha' \Leftrightarrow \exists g \in O(n), \exists b \in \mathbb{R}^n \text{ öyle ki } u' = gu + b - \langle b, gv\rangle gv \text{ ve } v' = \pm gv$$

dır.

İspat: $\Rightarrow$: $\alpha \overset{Iz(n)}{\sim} \alpha'$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.4.8'den,

$$\alpha' = F\alpha$$

olacak şekilde $\exists F \in Iz(n)$ dır. $F \in Iz(n)$ olduğundan, $F(x) = g(x) + b$ olacak şekilde $g \in O(n)$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ vardır. $\{u, v\}_\alpha$ ve $\{u', v'\}_{\alpha'}$ olduğundan $\langle v, v\rangle = 1$, $\langle u, v\rangle = 0$ ve $\langle v', v'\rangle = 1$, $\langle u', v'\rangle = 0$ dır.

$\alpha' = F\alpha$ olduğundan $\{u', v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{gu + b, gv\}_{F\alpha}$ dır. Gerçekten, $\alpha' = F\alpha$ olduğundan keyfi $x + sy \in \alpha'$ için $x + sy \in F\alpha$ dır. Buradan,

$$x + sy \in \alpha' \Rightarrow \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u', v'\}_{\alpha'} \text{ ve } x + sy \in F\alpha \Rightarrow \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{gu + b, gv\}_{F\alpha}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\{u', v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{gu + b, gv\}_{F\alpha} \ \Rightarrow \{u', v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{gu + b, gv\}_{F\alpha}$$

dır. Buna göre,

$\{u',v'\}_{\alpha'} \overset{P}{\sim} \{gu+b,gv\}_{F\alpha} \Rightarrow \; u' = dgv + gu + b$ ve $v' = cgv$ olacak şekilde $\exists c \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ dır.

O halde,

$$1 = \langle v',v'\rangle = \langle cgv,cgv\rangle = c^2\langle gv,gv\rangle = c^2 \underbrace{\langle v,v\rangle}_{1} = c^2 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$$

ve

$$\begin{aligned} 0 = \langle\, u',v'\rangle = \langle gu+b+dgv,cgv\rangle &= c\langle gu,gv\rangle + c\langle b,gv\rangle + cd\langle gv,gv\rangle \\ &= c\underbrace{\langle u,v\rangle}_{0} + c\langle b,gv\rangle + cd\underbrace{\langle v,v\rangle}_{1} = cd + c\langle b,gv\rangle \\ &\Rightarrow \underbrace{c}_{\pm 1}(d+\langle b,gv\rangle) = 0 \Rightarrow d + \langle b,gv\rangle = 0 \Rightarrow d = -\langle b,gv\rangle \end{aligned}$$

Dolayısıyla, $u' = gu + b - \langle b,gv\rangle gv$ ve $v' = \pm gv$ dır.

$\Leftarrow$: $u' = gu + b - \langle b,gv\rangle gv$ ve $v' = \pm gv$ olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ olsun.

Keyfi $x+sy \in \alpha'$ alalım ve $x+sy \in F\alpha$ olduğunu gösterelim.

$x+sy \in \alpha'$ olduğundan $\{x,y\} \overset{P}{\sim} \{u',v'\}_{\alpha'}$ dir. O halde, $\exists c \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = cv'$ ve $x = dv' + u'$ dır.

$$\begin{aligned} y &= cv' = c(\pm gv) = \pm cgv = c'gv \;\; (c' = \pm c \neq 0) \\ x &= dv' + u' = d(\pm gv) + gu + b - \langle b,gv\rangle gv = (\pm d - \langle b,gv\rangle)gv + gu + b \\ &= d'gv + gu + b \; (d' = \pm d - \langle b,gv\rangle \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

dır. Yani, $\exists c' \in \mathbb{R}-\{0\}$ ve $\exists d' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c'gv$ ve $x = d'gv + gu + b$ olur. Buradan, $\{x,y\} \overset{P}{\sim} \{gu+b,gv\}_{F\alpha}$ dır. Buna göre $x+sy \in F\alpha$ ve dolayısıyla

$$\alpha' \subseteq F\alpha \tag{2.3}$$

bulunur.

Şimdi keyfi $x'+ty' \in F\alpha$ alalım ve $x'+ty' \in \alpha'$ olduğunu gösterelim.

$x' + ty' \in F\alpha$ olduğundan $\{x,y\} \overset{P}{\sim} \{gu+b, gv\}_{F\alpha}$ dir. O halde, $\exists c \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d \in \mathbb{R}$ öyle ki $y' = cgv$ ve $x' = dgv + gu + b$ dır.

$$
\begin{aligned}
y' &= cgv = c(\pm v') = \pm cv' = c'v' \ (c' = \pm c \neq 0) \\
x' &= dgv + gu + b = d(\pm v') + u' - b + \langle b, gv \rangle v \\
&\qquad\qquad = d(\pm v') + u' - b + \langle b, gv \rangle (\pm v') = (\pm d \pm \langle b, gv \rangle) v' + u' \\
&\qquad\qquad = d'v' + u' \ \ (d' = \pm d \pm \langle b, gv \rangle \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

dır. Yani, $\exists c' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c'v'$ ve $x = d'v' + u'$ olur. Buradan, $\{x,y\} \overset{P}{\sim} \{u', v'\}_{\alpha'}$ dır. Buna göre $x' + ty' \in \alpha'$ ve dolayısıyla

$$F\alpha \subseteq \alpha' \tag{2.4}$$

bulunur.

(2.3) ve (2.4) den $\exists F \in Iz(n)$ öyle ki $\alpha' = g\alpha$ dir. Yani, $\alpha \overset{Iz(n)}{\sim} \alpha'$ dır.■

Tanım 2.4.11. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ $\mathbb{R}^n$'de iki doğru sistemi olsun ve $G \leq Iz(n)$ olsun. Eğer, $i = 1, \dots, k$ için

$$\alpha'_i = g\alpha_i$$

olacak şekilde bir $g \in G$ mevcut ise $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ doğru sistemlerine G −denk doğrular sistemi denir ve $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{G}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.12. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ $\mathbb{R}^n$'de iki doğru sistemi ve $i = 1, \dots, k$ için α_i ve α'_i doğrularının kanonik parametrizasyonları sırasıyla $\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$ ve $\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i}$ olsun. Bu durumda,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\} \Leftrightarrow \exists g \in O(n) \text{ öyle ki, } \varepsilon_i \in \mathcal{E} = \{-1, +1\} \text{ olmak üzere,}$$
$$u'_i = gu_i \text{ ve } v'_i = \varepsilon_i g v_i \ (i = 1, \dots, k)$$

dır.

İspat: ⇒: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.4.11'den $i = 1, \dots, k$ için

$$\alpha'_i = g\alpha_i$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ dır. $\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$ ve $\{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'}$ olduğundan $i = 1, \dots, k$ için $\langle v_i, v_i \rangle = 1$, $\langle u_i, v_i \rangle = 0$ ve $\langle v_i', v_i' \rangle = 1$, $\langle u_i', v_i' \rangle = 0$ dır.

$\alpha_i' = g\alpha_i$ olduğundan $i = 1, \dots, k$ için, $\{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'} \overset{P}{\sim} \{gu_i, gv_i\}_{g\alpha_i}$ dır. Gerçekten, $i = 1, \dots, k$ için $\alpha_i' = g\alpha_i$ olduğundan keyfi $x + sy \in \alpha_i'$ için $x + sy \in g\alpha_i$ dır. Buradan,

$$x + sy \in \alpha_i' \Rightarrow \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'} \text{ ve } x + sy \in g\alpha_i \Rightarrow \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{gu_i, gv_i\}_{g\alpha_i}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'} \overset{P}{\sim} \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{gu_i, gv_i\}_{g\alpha_i'} \Rightarrow \{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'} \overset{P}{\sim} \{gu_i, gv_i\}_{g\alpha_i}$$

dır. Buna göre, $i = 1, \dots, k$ için,

$\{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'} \overset{P}{\sim} \{gu_i, gv_i\}_{g\alpha_i} \Rightarrow v_i' = c_i g v_i$ ve $u_i' = d_i g v_i + g u_i$ olacak şekilde $\exists c_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i \in \mathbb{R}$ dır.

O halde, $i = 1, \dots, k$ için,

$$1 = \langle v_i', v_i' \rangle = \langle c_i g v_i, c_i g v_i \rangle = {c_i}^2 \langle g v_i, g v_i \rangle = {c_i}^2 \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1} = {c_i}^2$$

$$\Rightarrow {c_i}^2 = 1 \Rightarrow c_i = \pm 1 \in \mathcal{E}$$

ve

$$0 = \langle u_i', v_i' \rangle = \langle d_i g v_i + g u_i, c_i g v_i \rangle = c_i d_i \langle g v_i, g v_i \rangle + c_i \langle g u_i, g v_i \rangle$$
$$= c_i d_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1} + c_i \underbrace{\langle u_i, v_i \rangle}_{0} = c_i d_i \Rightarrow \underbrace{c_i}_{\pm 1} d_i = 0 \Rightarrow d_i = 0$$

dır. Dolayısıyla, $i = 1, \dots, k$ için, $u_i' = g u_i$ ve $v_i' = \varepsilon_i g v_i$ dır.

$\Leftarrow$: $i = 1, \dots, k$ için, $u_i' = g u_i$ ve $v_i' = \varepsilon_i g v_i$ olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ olsun. $i = 1, \dots, k$ için, keyfi $x + sy \in \alpha_i'$ alalım ve $x + sy \in g\alpha_i$ olduğunu gösterelim. $x + sy \in \alpha_i'$ olduğundan $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'}$ dir. O halde, $\exists c_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$y = c_i v_i' \text{ ve } x = d_i v_i' + u_i' \; (i = 1, \dots, k)$$

dır.

$$y = c_i v_i' = c_i(\varepsilon_i g v_i) = \varepsilon_i c_i g v_i = c_i' g v_i \;\; (c_i' = \varepsilon_i c_i \neq 0)$$

$$x = d_i v_i' + u_i' = d_i(\varepsilon_i g v_i) + g u_i = \varepsilon_i d_i g v_i + g u_i = d_i' g v_i + g u_i \ \ (d_i' = \varepsilon_i d_i \in \mathbb{R})$$

dır. Yani, $\exists c_i' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c_i' g v_i$ ve $x = d_i' g v_i + g u_i$ olur. Buradan, $i = 1, \dots, k$ için, $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{g u_i, g v_i\}_{g\alpha_i}$ dır. Buna göre, $i = 1, \dots, k$ için, $x + sy \in g\alpha_i$ ve dolayısıyla

$$\alpha_i' \subseteq g\alpha_i \quad (i = 1, \dots, k) \tag{2.5}$$

bulunur.

Şimdi, $i = 1, \dots, k$ için, keyfi $x' + ty' \in g\alpha_i$ alalım ve $x' + ty' \in \alpha_i'$ olduğunu gösterelim.

$x' + ty' \in g\alpha_i$ olduğundan $\{x', y'\} \overset{P}{\sim} \{g u_i, g v_i\}_{g\alpha_i}$ dir. O halde, $\exists c_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$y' = c_i g v_i \text{ ve } x' = d_i g v_i + g u_i \ (i = 1, \dots, k)$$

dır.

$$y = c_i g v_i = c_i\left(\tfrac{1}{\varepsilon_i} v_i'\right) = \tfrac{c_i}{\varepsilon_i} v_i' = c_i' v_i' \ (c_i' = \tfrac{c_i}{\varepsilon_i} \neq 0)$$

$$x = d_i g v_i + g u_i = d_i\left(\tfrac{1}{\varepsilon_i} v_i'\right) + u_i' = \tfrac{d_i}{\varepsilon_i} v_i' + u_i' = d_i' v_i' + u_i' \ \ \left(d_i' = \frac{d_i}{\varepsilon_i} \in \mathbb{R}\right)$$

dır. Yani, $\exists c_i' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c_i' v_i'$ ve $x = d_i' v_i' + u_i'$ olur. Buradan, $i = 1, \dots, k$ için, $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'}$ dır. Buna göre, $i = 1, \dots, k$ için, $x' + ty' \in \alpha_i'$ ve dolayısıyla

$$g\alpha_i \subseteq \alpha_i' \quad (i = 1, \dots, k) \tag{2.6}$$

bulunur.

(2.5) ve (2.6) dan $\exists g \in O(n)$ öyle ki $i = 1, \dots, k$ için, $\alpha_i' = g\alpha_i$ dir. Yani, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{\alpha_1', \dots, \alpha_k'\}$ dır.■

Teorem 2.4.13. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha_1', \dots, \alpha_k'\}$ $\mathbb{R}^n$'de iki doğru sistemi ve $i = 1, \dots, k$ için α_i ve α_i' doğrularının kanonik parametrizasyonları sırasıyla $\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$ ve $\{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'}$ olsun. Bu durumda,

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\} \Leftrightarrow \exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $\varepsilon_i \in \mathcal{E} = \{-1, +1\}$ olmak üzere,

$$v'_i = \varepsilon_i g v_i \text{ ve } u'_i = g u_i + b - \langle b, g v_i \rangle g v_i \ (i = 1, \dots, k)$$

dır.

İspat: $\Rightarrow$: $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ olsun. Bu durumda, Tanım 2.4.11'den, $i = 1, \dots, k$ için

$$\alpha'_i = F\alpha_i$$

olacak şekilde $\exists F \in Iz(n)$ dır. $F \in Iz(n)$ olduğundan $F(x) = gx + b$ olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ dır.

$\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$ ve $\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i}$ olduğundan $i = 1, \dots, k$ için $\langle v_i, v_i \rangle = 1$, $\langle u_i, v_i \rangle = 0$ ve $\langle v'_i, v'_i \rangle = 1$, $\langle u'_i, v'_i \rangle = 0$ dır.

$\alpha'_i = F\alpha_i$ olduğundan $i = 1, \dots, k$ için, $\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i} \overset{P}{\sim} \{g u_i + b, g v_i\}_{F\alpha_i}$ dır. Gerçekten, $i = 1, \dots, m$ için $\alpha'_i = F\alpha_i$ olduğundan keyfi $x + sy \in \alpha'_i$ için $x + sy \in F\alpha_i$ dır. Buradan,

$$x + sy \in \alpha'_i \Rightarrow \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i} \text{ ve } x + sy \in F\alpha_i \Rightarrow \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{g u_i + b, g v_i\}_{F\alpha_i}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i} \overset{P}{\sim} \{x, y\} \overset{P}{\sim} \{g u_i + b, g v_i\}_{F\alpha_i} \Rightarrow \{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i} \overset{P}{\sim} \{g u_i + b, g v_i\}_{F\alpha_i}$$

dır. Buna göre, $i = 1, \dots, k$ için,

$\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i} \overset{P}{\sim} \{g u_i + b, g v_i\}_{F\alpha_i} \Rightarrow v'_i = c_i g v_i$ ve $u'_i = d_i g v_i + g u_i + b$ olacak şekilde $\exists c_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i \in \mathbb{R}$ dır.

O halde, $i = 1, \dots, k$ için,

$$1 = \langle v'_i, v'_i \rangle = \langle c_i g v_i, c_i g v_i \rangle = {c_i}^2 \langle g v_i, g v_i \rangle = {c_i}^2 \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1} = {c_i}^2 \Rightarrow {c_i}^2 = 1 \Rightarrow c_i = \pm 1 \Rightarrow c_i \in \mathcal{E}$$

ve

$$
\begin{aligned}
0 = \langle u_i', v_i' \rangle &= \langle d_i g v_i + g u_i + b\,, c_i g v_i \rangle \\
&= c_i d_i \langle g v_i, g v_i \rangle + c_i \langle g u_i, g v_i \rangle + c_i \langle b, g v_i \rangle \\
&= c_i d_i \underbrace{\langle v_i, v_i \rangle}_{1} + c_i \underbrace{\langle u_i, v_i \rangle}_{0} + c_i \langle b, g v_i \rangle = c_i (d_i + \langle b, g v_i \rangle) \\
&\Rightarrow \underbrace{c_i}_{\pm 1} (d_i + \langle b, g v_i \rangle) = 0 \Rightarrow d_i + \langle b, g v_i \rangle = 0 \Rightarrow d_i = -\langle b, g v_i \rangle
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla, $i = 1, \dots, k$ için, $v_i' = \varepsilon_i g v_i$ ve $u_i' = g u_i + b - \langle b, g v_i \rangle g v_i$ dır.

$\Leftarrow$: $i = 1, \dots, k$ için, $\varepsilon_i \in \mathcal{E}$ olmak üzere, $v_i' = \varepsilon_i g v_i$ ve $u_i' = g u_i + b - \langle b, g v_i \rangle g v_i$ olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$i = 1, \dots, k$ için, keyfi $x + sy \in \alpha_i'$ alalım ve $x + sy \in F\alpha_i$ olduğunu gösterelim.

$x + sy \in \alpha_i'$ olduğundan $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u_i', v_i'\}_{\alpha_i}$ dir. O halde, $\exists c_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$y = c_i v_i' \text{ ve } x = d_i v_i' + u_i' \ (i = 1, \dots, k)$$

dır.

$$
\begin{aligned}
y &= c_i v_i' = c_i (\varepsilon_i g v_i) = \varepsilon_i c_i g v_i = c_i' g v_i \ \ (c_i' = \varepsilon_i c_i \neq 0) \\
x &= d_i v_i' + u_i' = d_i (\varepsilon_i g v_i) + g u_i + b - \langle b, g v_i \rangle g v_i \\
&= (\varepsilon_i d_i - \langle b, g v_i \rangle) g v_i + g u_i + b \\
&= d_i' g v_i + g u_i + b \ (d_i' = \varepsilon_i d_i - \langle b, g v_i \rangle \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

dır. Yani, $\exists c_i' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c_i' g v_i$ ve $x = d_i' g v_i + g u_i$ olur. Buradan, $i = 1, \dots, k$ için, $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{g u_i + b, g v_i\}_{F\alpha_i}$ dır. Buna göre, $i = 1, \dots, k$ için, $x + sy \in F\alpha_i$ ve dolayısıyla

$$\alpha_i' \subseteq F\alpha_i \quad (i = 1, \dots, k) \tag{2.7}$$

bulunur.

Şimdi, $i = 1, \dots, k$ için, keyfi $x' + ty' \in F\alpha_i$ alalım ve $x' + ty' \in \alpha_i'$ olduğunu gösterelim.

$x' + ty' \in F\alpha_i$ olduğundan $\{x', y'\} \overset{P}{\sim} \{gu_i + b, gv_i\}_{F\alpha_i}$ dir. O halde, $\exists c_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i \in \mathbb{R}$ öyle ki

$$y' = c_i g v_i \text{ ve } x' = d_i g v_i + g u_i + b \ (i = 1, \dots, k)$$

dır.

$$y = c_i g v_i = c_i \left(\frac{1}{\varepsilon_i} v_i'\right) = \frac{c_i}{\varepsilon_i} v_i' = c_i' v_i' \ (c_i' = \frac{c_i}{\varepsilon_i} \neq 0)$$

$$x = d_i g v_i + g u_i + b = d_i \left(\frac{1}{\varepsilon_i} v_i'\right) + u_i' - b + \frac{1}{\varepsilon_i}\langle b, \frac{1}{\varepsilon_i} v_i'\rangle v_i' + b$$

$$= \left(\frac{d_i}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_i}\langle b, \frac{1}{\varepsilon_i} v_i'\rangle\right) v_i' + u_i' = d_i' v_i' + u_i' \ \ (d_i' = \frac{d_i}{\varepsilon_i} + \frac{1}{\varepsilon_i}\langle b, \frac{1}{\varepsilon_i} v_i'\rangle \in \mathbb{R})$$

dır. Yani, $\exists c_i' \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $\exists d_i' \in \mathbb{R}$ öyle ki $y = c_i' v_i'$ ve $x = d_i' v_i' + u_i'$ olur. Buradan, $i = 1, \dots, k$ için, $\{x, y\} \overset{P}{\sim} \{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'}$ dır. Buna göre, $i = 1, \dots, k$ için, $x' + ty' \in \alpha_i'$ ve dolayısıyla

$$F\alpha_i \subseteq \alpha_i' \quad (i = 1, \dots, k) \tag{2.8}$$

bulunur.

(2.7) ve (2.8) den $\exists g \in O(n)$ öyle ki $i = 1, \dots, k$ için, $\alpha_i' = F\alpha_i$ dir. Yani, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{\alpha_1', \dots, \alpha_k'\}$ dır.■

Tanım 2.4.14. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ nokta sistemleri verilsin ve $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ olsun. Eğer $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u_i' = g u_i \text{ ve } v_j' = \varepsilon_j g v_j$$

olacak şekilde bir $g \in O(n)$ ve bir $\varepsilon_j \in \mathcal{E}$ mevcut ise $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u_1',, \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ nokta sistemlerine $(O(n), \mathcal{E}^k)$ −denk sistemler denir ve

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n), \mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

ile gösterilir.

Teorem 2.4.15. $(O(n), \mathcal{E}^k)$ −denk bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $(O(n), \mathcal{E}^k)$ −denk bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz. Şimdi bunları gösterelim;

$\mathbb{R}^n$'de $A = \{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$, $B = \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ ve $C = \{u_1'', \dots, u_l''; v_1'', \dots, v_k''\}$ nokta sistemlerini alalım.

i) $A \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} A$ dir. Gerçekten, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$u_i = Iu_i$ ve $v_j = 1v_j$

yazılabilir. $I \in O(n)$ ve $1 \in \mathcal{E}$ olduğundan. $A \overset{Iz_y(n)}{\sim} A$ dir.

ii) $A \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ olsun. $B \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} A$ olduğunu gösterelim.

$A \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ olduğundan, $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$u_i' = gu_i$ ve $v_j' = \varepsilon_j g v_j$

dir. Buna göre,

$u_i' = gu_i \Rightarrow u_i = g^{-1}u_i'$

ve

$$v_j' = \varepsilon_j g v_j \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_j} v_j' = g v_j \Rightarrow v_j = g^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_j} v_j'\right) \Rightarrow v_j = \frac{1}{\varepsilon_j} g^{-1} v_j'$$

dir. Burada $g \in O(n)$ ve $\varepsilon_j \in \mathcal{E}$ olduğundan $g^{-1} \in O(n)$ ve $\frac{1}{\varepsilon_j} \in \mathcal{E}$ dir. O halde, $B \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} A$ dir.

iii) $A \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ ve $B \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} C$ olsun. $A \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} C$ olduğunu gösterelim.

$A \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ olduğundan, $\exists g_1 \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$u_i' = g_1 u_i$ ve $v_j' = \varepsilon_j g_1 v_j$

ve

$B \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} C$ olduğundan, $\exists g_2 \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_i' \in \mathcal{E}$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$u_i'' = g_2 u_i'$ ve $v_j'' = \varepsilon_j' g_2 v_j'$

dir. Buna göre,

$$u_i'' = g_2 u_i' = g_2(g_1 u_i) = g_2 g_1 u_i$$

ve

$$v_j'' = \varepsilon_j' g_2 v_j' = \varepsilon_j' g_2(\varepsilon_j g_1 v_j) = \varepsilon_j' \varepsilon_j g_2 g_1 v_j$$

dir. Burada, $g_1, g_2 \in O(n)$ ve $\varepsilon_j', \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ olduğundan $g_2 g_1 \in O(n)$ ve $\varepsilon_j' \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ dir. O halde, $A \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} C$ dir.

Sonuç olarak, $(O(n), \mathcal{E}^k)$ −denk bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.■

Tanım 2.4.16. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ nokta sistemleri verilsin. $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ olsun. Eğer $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$u_i' = g u_i + b$ ve $v_j' = \varepsilon_j g v_j$

olacak şekilde bir $g \in O(n)$, bir $b \in \mathbb{R}^n$ ve bir $\varepsilon_i \in \mathcal{E}$ mevcut ise $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ nokta sistemlerine $(Iz(n), \mathcal{E}^k)$ −denk sistemler denir ve

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

ile gösterilir.

Teorem 2.4.17. $(Iz(n), \mathcal{E}^k)$ −denk bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: $(Iz(n), \mathcal{E}^k)$ −denk bağıntısının denklik bağıntısı olduğunu göstermek için yansıma, simetri ve geçişme özelliklerini sağladığını göstermeliyiz. Şimdi bunları gösterelim;

$\mathbb{R}^n$'de $A = \{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$, $B = \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ ve $C = \{u_1'', \dots, u_l''; v_1'', \dots, v_k''\}$ nokta sistemlerini alalım.

i) $A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} A$ dir. Gerçekten, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u_i = Iu_i + 0 \text{ ve } v_j = 1v_j$$

yazılabilir. $I \in O(n)$, $1 \in \varepsilon$ ve $0 \in \mathbb{R}^n$ olduğundan. $A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} A$ dir.

ii) $A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ olsun. $B \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} A$ olduğunu gösterelim.
$A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ olduğundan, $\exists g \in O(n)$, $\exists \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ ve $\exists b \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u_i' = gu_i + b \text{ ve } v_j' = \varepsilon_j g v_j$$

dir. Buna göre,

$$u_i' = gu_i + b \Rightarrow u_i' - b = gu_i \Rightarrow u_i = g^{-1}(u_i' - b) \Rightarrow u_i = g^{-1}u_i' - g^{-1}b$$

ve

$$v_j' = \varepsilon_j g v_j \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_j} v_j' = g v_j \Rightarrow v_j = g^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon_j} v_j'\right) \Rightarrow v_j = \frac{1}{\varepsilon_j} g^{-1} v_j'$$

dir. Burada $g \in O(n)$, $\varepsilon_j \in \mathcal{E}$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $g^{-1} \in O(n)$, $\frac{1}{\varepsilon_j} \in \mathcal{E}$ ve $g^{-1}b \in \mathbb{R}^n$ dir. O halde, $B \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} A$ dir.

iii) $A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ ve $B \overset{(\mathcal{E}^k,Iz(n))}{\sim} C$ olsun. $A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} C$ olduğunu gösterelim.

$A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} B$ olduğundan, $\exists g_1 \in O(n)$, $\exists \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ ve $b \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u_i' = g_1 u_i + b \text{ ve } v_j' = \varepsilon_j g_1 v_j$$

ve

$B \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} C$ olduğundan, $\exists g_2 \in O(n)$, $\exists \varepsilon_i' \in \mathcal{E}$ ve $b' \in \mathbb{R}^n$ öyle ki, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için,

$$u_i'' = g_2 u_i' + b' \text{ ve } v_j'' = \varepsilon_j' g_2 v_j'$$

dir. Buna göre,

$$u_i'' = g_2 u_i' + b' = g_2(g_1 u_i + b) + b' = g_2 g_1 u_i + g_2 b + b'$$

ve

$$v_j'' = \varepsilon_j' g_2 v_j' = \varepsilon_j' g_2 \big(\varepsilon_j g_1 v_j\big) = \varepsilon_j' \varepsilon_j g_2 g_1 v_j$$

dir. Burada, $g_1, g_2 \in O(n)$, $\varepsilon_j', \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ ve $b, b' \in \mathbb{R}^n$ olduğundan $g_2 g_1 \in O(n)$, $\varepsilon_j' \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ ve $g_2 b + b' \in \mathbb{R}^n$ dir. O halde, $A \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} C$ dir.

Sonuç olarak, $(Iz(n), \mathcal{E}^k)$ −denk bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.■

Teorem 2.4.18. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\}$ ve $\{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ sistemleri verilsin.

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$
$$\Leftrightarrow \{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l, 0; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1' - u_l', \dots, u_{l-1}' - u_l', 0; v_1', \dots, v_k'\}$$
$$\Leftrightarrow \{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1' - u_l', \dots, u_{l-1}' - u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dır.

İspat: **⇒:** $\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$ olsun. Bu taktirde, $i = 1, \dots, l$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} u_i' = g u_i + b \\ v_j' = \varepsilon_j g v_j \end{cases}$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$, $\exists b \in \mathbb{R}^n$ ve $\exists \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ dır. Buradan, $i = 1, \dots, l-1$

$$u_i' - u_l' = (g u_i + b) - (g u_l + b) = g u_l - g u_i = g(u_l - u_i)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\begin{cases} u_i' - u_l' = g(u_i - u_l) & i = 1, \dots, l-1 \\ v_j' = \varepsilon_j g v_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

dir. O halde, Tanım 2.4.14'ten

$$\{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1' - u_l', \dots, u_{l-1}' - u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dir.

$\Leftarrow$: $\{u_1 - u_l, \dots, u_{l-1} - u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1' - u_l', \dots, u_{l-1}' - u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$
olsun. Bu taktirde,

$$\begin{cases} u_i' - u_l' = g(u_i - u_l) & i = 1, \dots, l-1 \\ \quad v_j' = \varepsilon_j g v_j & j = 1, \dots, k \end{cases}$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ dır. $u_l', u_l \in \mathbb{R}^n$ olduğundan ve $g \in O(n)$ bilindiğinden dolayı $u_l' - gu_l \in \mathbb{R}^n$ dir. O halde, $b = u_l' - gu_l$ ile gösterelim.

$$u_i' - u_l' = g(u_i - u_l) = gu_i - gu_l \Rightarrow \underbrace{u_l' - gu_l}_{b} = u_i' - gu_i \Rightarrow u_i' - gu_i = b$$

Dolayısıyla, $i = 1, \dots, k$ ve $j = 1, \dots, k$ için

$$\begin{cases} u_i' = gu_i + b \\ v_j' = \varepsilon_j g v_j \end{cases}$$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$, $\exists b \in \mathbb{R}^n$ ve $\exists \varepsilon_j \in \mathcal{E}$ dır. Buradan,

$$\{u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_k\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1', \dots, u_l'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dir.■

Sonuç 2.4.19. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha_1', \dots, \alpha_k'\}$ $\mathbb{R}^n$'de iki doğru sistemi ve $i = 1, \dots, k$ için α_i, α_i' doğrularının kanonik parametrizasyonları sırasıyla $\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$, $\{u_i', v_i'\}_{\alpha_i'}$ ve $k > 1$ olsun. Bu durumda,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{\alpha_1', \dots, \alpha_k'\} \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u_1', \dots, u_k'; v_1', \dots, v_k'\}$$

dir.

İspat: Teorem 2.4.12 ve Tanım 2.4.14'ün sonucudur.

Sonuç 2.4.20. $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ $\mathbb{R}^n$'de iki doğru sistemi ve $i = 1, \dots, k$ için α_i ve α'_i doğrularının kanonik parametrizasyonları sırasıyla $\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$ ve $\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i}$ olsun. Bu durumda,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\} \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u'_1, \dots, u'_k; v'_1, \dots, v'_k\}$$
$$\Leftrightarrow \{u_1 - u_k, \dots, u_{k-1} - u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u'_1 - u'_k, \dots, u'_{k-1} - u'_k; v'_1, \dots, v'_k\}$$

dır.

İspat: Teorem 2.4.13, Tanım 2.4.16 ve Teorem 2.4.18'in sonucudur.

Tanım 2.4.21. $G \leq Iz(n)$ ve $A \subseteq \mathbb{R}^n$ alt kümesi verilsin. $g \in G$ için

$$gA = \{ga : a \in A\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ile tanımlansın. $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri için $B = gA$ olacak şekilde bir $g \in G$ mevcut ise A ve B kümelerine G −denk kümeler denir ve $A \overset{G}{\sim} B$ ile gösterilir. $A \overset{G}{\sim} B$ bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.4.22. $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $D_1, \dots, D_l, D_{l+1}, \dots, D_{l+k}$, $D'_1, \dots, D'_l, D'_{l+1}, \dots, D'_{l+k}$ parametrik doğrular olmak üzere,

$$\{x_1, \dots, x_m, G\ddot{o}r(D_1), \dots, G\ddot{o}r(D_l), [D_{l+1}]_P, \dots, [D_{l+k}]_P\}$$

ve

$$\{x'_1, \dots, x'_m, G\ddot{o}r(D'_1), \dots, G\ddot{o}r(D'_l), [D'_{l+1}]_P, \dots, [D'_{l+k}]_P\}$$

sistemleri verilsin ve $G \leq Iz(n)$ olsun. Eğer

$$x'_i = gx_i, i = 1, \dots, m$$
$$G\ddot{o}r(D'_s) = gG\ddot{o}rD_s, s = 1, \dots, l$$
$$[D'_j]_P = g[D_j]_P, j = l + 1, \dots, l + k$$

olacak şekilde bir $g \in G$ mevcut ise

$$\{x_1, \dots, x_m, G\ddot{o}r(D_1), \dots, G\ddot{o}r(D_l), [D_{l+1}]_P, \dots, [D_{l+k}]_P\}$$

ve

$$\{x'_1, \dots, x'_m, Gör(D'_1), \dots, Gör(D'_l), [D'_{l+1}]_P, \dots, [D'_{l+k}]_P\}$$

sistemlerine G −denk sistemler denir ve

$$\begin{Bmatrix} x_1, \dots, x_m, Gör(D_1), \dots, Gör(D_l), \\ [D_{l+1}]_P, \dots, [D_{l+k}]_P \end{Bmatrix} \overset{G}{\sim} \begin{Bmatrix} x'_1, \dots, x'_m, Gör(D'_1), \dots, Gör(D'_l), \\ [D'_{l+1}]_P, \dots, [D'_{l+k}]_P \end{Bmatrix}$$

ile gösterilir.

Önerme 2.4.23. $x_1, \dots, x_m, x'_1, \dots, x'_m \in \mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^n$'de $D_1, \dots, D_l, D_{l+1}, \dots, D_{l+k}$, $D'_1, \dots, D'_l, D'_{l+1}, \dots, D'_{l+k}$ parametrik doğrular olsun. Bu taktirde,

$$\begin{Bmatrix} x_1, \dots, x_m, Gör(D_1), \dots, Gör(D_l), \\ [D_{l+1}]_P, \dots, [D_{l+k}]_P \end{Bmatrix} \overset{G}{\sim} \begin{Bmatrix} x'_1, \dots, x'_m, Gör(D'_1), \dots, Gör(D'_l), \\ [D'_{l+1}]_P, \dots, [D'_{l+k}]_P \end{Bmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x_1, \dots, x_m, [D_1]_P, \dots, [D_l]_P, \\ [D_{l+1}]_P, \dots, [D_{l+k}]_P \end{Bmatrix} \overset{G}{\sim} \begin{Bmatrix} x'_1, \dots, x'_m, [D'_1]_P, \dots, [D'_l]_P, \\ [D'_{l+1}]_P, \dots, [D'_{l+k}]_P \end{Bmatrix}$$

dir.

İspat: Bu önermenin ispatı, Sonuç 2.1.11 ve Önerme 2.4.2'nin sonucudur.■

Bu önerme ile noktalar, 2. tip doğrular ve 4. tip doğrulardan oluşan sistemlerin G −denklik problemi, noktalar ve 4. tip doğrulardan oluşan sistemelerin G −denklik problemine indirgenir.

2.5. $\boldsymbol{G = O(n) \times \mathcal{E}^k}$ Grubu ve $\mathbb{R}[x]^G$ Halkasının Üreteç Sistemi

2.5.1. $\boldsymbol{G = O(n) \times \mathcal{E}^k}$ Grubu ve $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]^G$ Halkası

Önerme 2.5.1.1. $\mathcal{E} = \{-1, +1\}$ olsun. $(\mathcal{E}, \cdot)$, $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasındaki çarpma işlemine göre gruptur.

İspat: Açıktır.

Not 2.5.1.2. $G = O(n) \times \mathcal{E} = \{(g, \varepsilon) | g \in O(n), \varepsilon \in \mathcal{E}\}$ kümesi $O(n)$ ve $\mathcal{E}$ gruplarının direkt çarpımı olsun. G kümesi $O(n)$ ve $\mathcal{E}$ gruplarının direkt çarpımı olduğundan, $h_1 = (g_1, \varepsilon_1)$ ve $h_2 = (g_2, \varepsilon_2)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rccc} *: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (h_1, h_2) & \mapsto & h_1 * h_2 = (g_1 \circ g_2, \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2) \end{array}$$

ikili işlemi ile bir gruptur.

Önerme 2.5.1.3. $G = O(n) \times \mathcal{E}$ grubu ve $X = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ kümesi verilsin.

$$\begin{array}{llll} \varphi: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (h,x) & \mapsto & \varphi(h,x) = h.x = (g,\varepsilon).(u,v) = (gu, \varepsilon g v) \end{array}$$

bir etkidir. Burada $h = (g,\varepsilon) \in G$ ve $x = (u,v) \in X$ dir.

İspat:

i) $\forall h_1, h_2 \in G$ ve $\forall x \in X$ verilsin.

$h_1, h_2 \in G$ ise $g_1, g_2 \in O(n)$ ve $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{E}$ olmak üzere $h_1 = (g_1, \varepsilon_1)$ ve $h_2 = (g_2, \varepsilon_2)$ olsun. $x \in X$ ise $u, v \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (u,v)$ olsun.

$$\begin{aligned} \varphi\big(h_1, \varphi(h_2,x)\big) &= h_1.(h_2.x) = h_1.\big((g_2,\varepsilon_2).(u,v)\big) = h_1.(g_2u, \varepsilon_2 g_2 v) \\ &= (g_1,\varepsilon_1).(g_2u, \varepsilon_2 g_2 v) = \big(g_1(g_2u), \varepsilon_1 g_1(\varepsilon_2 g_2 v)\big) \\ &= \big((g_1 \circ g_2)(u), \varepsilon_1\varepsilon_2(g_1 \circ g_2)(v)\big) = (g_1 \circ g_2, \varepsilon_1\varepsilon_2).(u,v) \\ &= (h_1 * h_2).x = \varphi(h_1 * h_2, x) \end{aligned}$$

ii) $e = (I,1) \in G$ ve $\forall x \in X$ verilsin.

$$\varphi(e,x) = e.x = (I,1).(u,v) = \big(I(u), 1I(v)\big) = (u,v) = x \Rightarrow \varphi(e,x) = x$$

Sonuç olarak

$$\begin{array}{llll} \varphi: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (h,x) & \mapsto & \varphi(h,x) = h.x \end{array}$$

bir etkidir.■

Önerme 2.5.1.4. $\mathcal{E}^k = \mathcal{E} \times \ldots \times \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ grubunun k defa direkt çarpımı olsun. $O(n)$ ve $\mathcal{E}^k$ gruplarının direkt çarpımı olan $G = O(n) \times \mathcal{E}^k$ grubu ve $\mathbb{R}^n$'in kendisiyle $m + k$ defa direkt çarpımı olan $X = (\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n) = \{(u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_k) : u_i \in \mathbb{R}^n, v_j \in \mathbb{R}^n; i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, k\}$ kümesi verilsin.

$$\begin{array}{llll} \varphi: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (h,x) & \mapsto & \varphi(h,x) = h.x \end{array}$$

$h.x = (g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) = (gu_1, \dots, gu_m, \varepsilon_1 gv_1, \dots, \varepsilon_k gv_k)$ ile bir etkidir. Burada $h = (g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in G$ ve $x = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) \in X$ dir.

İspat:

i) $\forall h_1, h_2 \in G$ ve $\forall x \in X$ verilsin.

$h_1, h_2 \in G$ olduğundan $g_1, g_2 \in O(n)$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_k' \in \mathcal{E}$ olmak üzere $h_1 = (g_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$, $h_2 = (g_2, \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_k')$ ve $x \in X$ olduğundan $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $x = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)$ biçimindedir.

$$\begin{aligned}
\varphi\big(h_1, \varphi(h_2, x)\big) &= h_1.(h_2.x) = h_1.\big((g_2, \varepsilon_1', \dots, \varepsilon_k').(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)\big) \\
&= h_1.(g_2u_1, \dots, g_2u_m, \varepsilon_1' g_2 v_i, \dots, \varepsilon_k' g_2 v_k) \\
&= (g_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).(g_2u_1, \dots, g_2u_m, \varepsilon_1' g_2 v_i, \dots, \varepsilon_k' g_2 v_k) \\
&= \big(g_1(g_2u_1), \dots, g_1(g_2u_m), \varepsilon_1 g_1(\varepsilon_1' g_2 v_1), \dots, \varepsilon_k g_1(\varepsilon_k' g_2 v_k)\big) \\
&= \big((g_1 \circ g_2)u_1, \dots, (g_1 \circ g_2)u_m, \varepsilon_1\varepsilon_1'(g_1 \circ g_2)v_1, \dots, \varepsilon_k\varepsilon_k'(g_1 \\
&\circ g_2)v_k\big) = (g_1 \circ g_2, \varepsilon_1\varepsilon_1', \dots, \varepsilon_k\varepsilon_k').(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) \\
&= (h_1 * h_2).x = \varphi(h_1 * h_2, x)
\end{aligned}$$

ii) $e = (I, 1, \dots, 1) \in G$ ve $\forall x \in X$ verilsin.

$$\begin{aligned}
\varphi(e, x) = e.x &= (I, 1, \dots, 1).(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) = (Iu_1, \dots, , Iu_m, 1Iv_1, \dots, 1Iv_k) \\
&= (u_1, v_1, \dots, u_k, v_k) = x \Rightarrow \varphi(e, x) = x
\end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
\varphi:\ & G \times X \longrightarrow X \\
& (h, x) \mapsto \varphi(h, x) = h.x
\end{aligned}$$

bir etkidir.■

Önerme 2.5.1.4'teki etki Bölüm 2.4'te ortaya çıkmıştı.

Önerme 2.5.1.5. $e = (1, \dots, 1)$ olmak üzere $G_1 = O(n) \times e$ ve $G = O(n) \times \mathcal{E}^k$ olsun. Bu durumda G_1 grubu, G grubunun normal alt grubudur ($G_1 \lhd G$).

İspat: Önce $G_1 = O(n) \times e$ nin $G = O(n) \times \mathcal{E}^k$ nın alt grubu olduğunu gösterelim.

$\forall a, b \in G_1$ alalım. O halde $a = (g_1, 1, \dots, 1)$ ve $b = (g_2, 1, \dots, 1)$ olacak şekilde $\exists g_1, g_2 \in O(n)$ mevcuttur.

$$ab^{-1} = (g_1, 1, \dots, 1)(g_2^{-1}, 1, \dots, 1) = (g_1 \circ g_2^{-1}, 1, \dots, 1)$$

$g_2 \in O(n)$ olduğundan $g_2^{-1} \in O(n)$ dır ve $g_1 \in O(n)$ olduğundan $g_1 \circ g_2^{-1} \in O(n)$ olur. O halde $g = g_1 \circ g_2^{-1}$ dersek,

$$ab^{-1} = (g, 1, \dots, 1) \in O(n) \times e = G_1$$

dir. Yani, $G_1 \leq G$ dir.

Şimdi $G_1 \lhd G$ olduğunu gösterelim.

$\forall h \in G$ ve $\forall h_1 \in G_1$ alalım. $h \in G$ ise $h = (g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \mathcal{E}$ dır ve $h_1 \in G_1$ ise $h_1 = (g_1, 1, \dots, 1)$ olacak şekilde $\exists g_1 \in O(n)$ dır.

$$\begin{aligned} h^{-1}h_1h &= (g^{-1}, \varepsilon_1^{-1}, \dots, \varepsilon_k^{-1})(g_1, 1, \dots, 1)(g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \\ &= (g^{-1} \circ g_1 \circ g, \varepsilon_1^{-1}1\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k^{-1}1\varepsilon_k) \\ &= (g^{-1} \circ g_1 \circ g, \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k^{-1}\varepsilon_k) = \left(\underbrace{g^{-1} \circ g_1 \circ g}_{\in O(n)}, 1, \dots, 1\right) \in G_1 \\ &\Rightarrow G_1 \lhd G \end{aligned}$$

dir.■

Not 2.5.1.6. $O(n) \times \mathcal{E}^k$ grubu, $X = (\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n) = \{(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) : u_i \in \mathbb{R}^n, v_j \in \mathbb{R}^n; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k\}$ kümesi ve $O(n) \times \mathcal{E}^k : X$ etkisi Önerme 2.5.1.4'teki gibi verilmiş olsun. Katsayıları $\mathbb{R}$'den olan tüm $m + k$ bilinmeyenli $O(n) \times \mathcal{E}^k$ −invaryant polinomlar kümesini $\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ ile gösterelim. $m + k$ bilinmeyenli $O(n) \times \mathcal{E}^k$ −invaryant polinomlar, noktalar ve k tane doğrudan oluşan ailenin $O(n)$ −denklik probleminin çözümünde önemlidir.

Teorem 2.5.1.7. $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, k$ için $u_i, v_j \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k} = \left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times\mathcal{E}^k}$$

dır.

İspat: Önce $\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k} \subseteq \left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times\mathcal{E}^k}$ olduğunu gösterelim.

Keyfi $f \in \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ alalım.

Önerme 2.5.1.5'ten $O(n) \times e \lhd O(n) \times \mathcal{E}^k$ olduğundan

$$\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k} \subset \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}$$

dir. Buradan $f \in \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}$ dır. Ayrıca,

$$f\big((I \times \varepsilon)(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)\big) = f(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)$$

dır. Çünkü f, $O(n) \times \mathcal{E}^k$ ye göre invaryanttır özel olarak $I \times \mathcal{E}^k$ göre de invaryanttır. O halde,

$$\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k} \subseteq \left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times\mathcal{E}^k} \tag{2.9}$$

dir.

Şimdi, $\left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times\mathcal{E}^k} \subseteq \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ olduğunu gösterelim.

Keyfi $f \in \left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times\mathcal{E}^k}$ olsun. Bu durumda $\forall(g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in O(n) \times \mathcal{E}^k$ için

$$\begin{aligned}
&f\big((g, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)\big) \\
&\qquad = f\big((g, 1, \dots, 1)(I, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)\big) \\
&\qquad = f\big((g, 1)(u_1, \dots, u_m, \varepsilon_k v_k)\big) = f(u_1, \dots, u_m, \varepsilon_1 v_1, \dots, \varepsilon_k v_k) \\
&\qquad = f\big((I, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)\big) = f(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k)
\end{aligned}$$

dır. Yani,

$$f \in \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times \mathcal{E}^k}$$

dır. O halde,

$$\left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times \mathcal{E}^k} \subseteq \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times \mathcal{E}^k} \qquad (2.10)$$

dir.

(2.9) ve (2.10) dan

$$\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times \mathcal{E}^k} = \left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times \mathcal{E}^k}$$

dir.■

Sonuç 2.5.1.8.

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times \mathcal{E}^k} \\ &= \mathbb{R}\left[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_r\rangle, \langle v_r, v_s\rangle; i,j = 1, \dots, m; r,s = 1, \dots, k\right]^{I\times \mathcal{E}^k}\end{aligned}$$

dir.

İspat: Weyl'in [33, s.53-54, 63-65] kitabındaki Birinci Temel Teorem'e göre,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)} \\ &= \mathbb{R}\left[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_r\rangle, \langle v_r, v_s\rangle; i,j = 1, \dots, m; r,s = 1, \dots, k\right]\end{aligned}$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e} &= \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)} \\ &= \mathbb{R}\left[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_r\rangle, \langle v_r, v_s\rangle; i,j = 1, \dots, m; r,s = 1, \dots, k\right]\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k} = \left(\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times e}\right)^{I\times\mathcal{E}^k}$$
$$= \mathbb{R}\left[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_r\rangle, \langle v_r, v_s\rangle; i, j = 1, \dots, m; r, s = 1, \dots, k\right]^{I\times\mathcal{E}^k}$$

dir.■

Teorem 2.5.1.9. $\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ sonlu üreteçlidir.

İspat: $I \times \mathcal{E}^k$ sonlu grup olduğundan Weyl'in [33, s.275-276] kitabında verilen sonlu gruplar için Birinci Temel Teorem'e göre

$$\mathbb{R}\left[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_r\rangle, \langle v_r, v_s\rangle; i, j = 1, \dots, m; r, s = 1, \dots, k\right]^{I\times\mathcal{E}^k}$$

halkası sonlu üreteçlidir. Buradan Sonuç 2.5.1.8'e göre $\mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ halkası sonlu üreteçlidir.■

Teorem 2.5.1.10. $\mathbb{R}[u_1, v_1, \dots, u_k, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ nin üreteçleri sayısı

$$\frac{(2^k + 1)\dots\left(2^k + 2n(m + k)\right)}{1.2\dots\left(n(m + k)\right)}$$

sayısına eşit veya küçüktür.

İspat: Weyl'in [33, s.276] kitabında verilen sonlu gruplar için Birinci Temel Teorem'de verilen üreteçler sayısına ait eşitsizliğe göre üreteçlerin sayısı

$$\frac{(2^k + 1)\dots\left(2^k + 2n(m + k)\right)}{1.2\dots\left(n(m + k)\right)}$$

sayısına eşit veya küçüktür.■

Önerme 2.5.1.11. $\mathcal{E}^k = \mathcal{E} \times \dots \times \mathcal{E}$, $\mathcal{E}$ grubunun k defa direkt çarpımı olsun. $Iz(n)$ ve $\mathcal{E}^k$ gruplarının direkt çarpımı olan $G = Iz(n) \times \mathcal{E}^k$ grubu ve $\mathbb{R}^n$'in kendisiyle $m + k$ defa direkt çarpımı olan

$$X = (\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n) \times (\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n)$$
$$= \left\{(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k): u_i \in \mathbb{R}^n, v_j \in \mathbb{R}^n; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, k\right\}$$

kümesi verilsin. $Iz(n)$ grubunun elemanı $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(u) = gu + b$, $g \in O(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \varphi: & G \times X & \longrightarrow & X \\ & (h,x) & \mapsto & \varphi(h,x) = h.x \end{array}$$

$h.x = (F, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k).(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) = (gu_1 + b, \dots, gu_m + b, \varepsilon_1 g v_1, \dots, \varepsilon_k g v_k)$ ile bir etkidir. Burada $h = (F, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k) \in G$ ve $x = (u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k) \in X$ dir.

İspat: Teorem 2.4.17'te ispat edildi■

Teorem 2.5.1.12. $i = 1, \dots, m$ ve $j = 1, \dots, k$ için $u_i, v_j \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbb{R}[u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_k]^{Iz(n)\times\mathcal{E}^k} &= \mathbb{R}[u_1 - u_m, \dots, u_{m-1} - u_m, v_1, \dots, v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k} \\ &= \mathbb{R}\big[\langle u_i - u_m, u_j - u_m\rangle, \langle u_i - u_m, v_r\rangle, \langle v_r, v_s\rangle; i,j = 1, \dots, m-1; r,s \\ &\qquad = 1, \dots, k\big]^{I\times\mathcal{E}^k} \end{aligned}$$

dır.

İspat: Sonuç 2.4.20 ve Sonuç 2.5.1.8'in sonucudur.■

Teorem 2.5.1.10'un benzeri $Iz(n) \times \mathcal{E}^k$ grubu içinde doğrudur.

2.5.2. $\mathbb{R}[x]^{O(n)\times\mathcal{E}}$ Halkasının Üreteç Sistemi

Önerme 2.5.2.1. Bir $(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık alt aralığında tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ iki polinom ve $c \in (a,b)$ olsun. $x \neq c$ olmak üzere $\forall x \in (a,b)$ için $f(x) = g(x)$ ise $f(c) = g(c)$ dir.

İspat: Keyfi $x_n \to c$ dizisini alalım. $f(x)$ ve $g(x)$ polinomları reel değerli sürekli fonksiyonlar ve $\forall x \in (a,b)$ için $f(x) = g(x)$ olduğundan,

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(c)$$

dir.■

Teorem 2.5.2.2. Dereceleri sırası ile n ve m olan reel katsayılı iki polinom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ve $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ olsun. Eğer, $\delta > 0$ mevcut öyle ki $\forall x \in (0,\delta)$ için $p(x) = q(x)$ ise o zaman

1) $n = m$

2) $0 \leq i \leq n$ şeklindeki her i için $a_i = b_i$

dir.

İspat: Farz edelim ki $n \neq m$ olsun. Genelliği bozmadan $n < m$ olduğunu kabul edelim. $\forall x \in (0, \delta)$ için

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$
$$= b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$$

olduğundan bu eşitlik $x = 0$ için de geçerlidir. Çünkü $x \in (0, \delta)$ komşuluğunda tanımlı polinom $x = 0$ noktasında sürekli olduğundan $x = 0$ noktasında da $p(x) = q(x)$ tir. O halde son eşitlikte $x = 0$ yazarsak,

$$a_0 = b_0$$

elde ederiz. $a_0 = b_0$ olduğundan $\forall x \in (0, \delta)$ için

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x$$

bulunur. $x \neq 0$ olduğundan eşitliğin her iki tarafını x ile bölersek, $\forall x \in (0, \delta)$ için

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1 = b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^{m-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafındaki polinomlar $x = 0$ ın bir komşuluğunda tanımlı, sürekli ve $x \neq 0$ için eşittir. Böylece Önerme 2.5.2.1'de $c = 0$ alınarak bu iki polinom $x = 0$ noktasında da eşit olur. Yani, $\forall x \in (0, \delta)$ için,

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1 = b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^{m-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

dır. Bu son eşitlikte $x = 0$ yazarsak,

$$a_1 = b_1$$

elde ederiz. $a_1 = b_1$ olduğundan $\forall x \in (0, \delta)$ için

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_3 x^2 + a_2 x = b_m x^{m-1} + b_{m-1} x^{m-2} + \cdots + b_3 x^2 + b_2 x$$

bulunur. $x \neq 0$ olduğundan eşitliğin her iki tarafını x ile bölersek, $\forall x \in (0, \delta)$ için

$$a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + a_3 x + a_2 = b_m x^{m-2} + b_{m-1} x^{m-3} + \cdots + b_3 x + b_2$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafındaki polinomlar $x = 0$ ın bir komşuluğunda tanımlı, sürekli ve $x \neq 0$ için eşittir. Böylece Önerme 2.5.2.1'de $c = 0$ alınarak bu iki polinom $x = 0$ noktasında da eşit olur. Yani, $\forall x \in (0, \delta)$ için,

$$a_n x^{n-2} + a_{n-1} x^{n-3} + \cdots + a_3 x + a_2 = b_m x^{m-2} + b_{m-1} x^{m-3} + \cdots + b_3 x + b_2$$

dır. Bu son eşitlikte $x = 0$ yazarsak,

$$a_2 = b_2$$

elde ederiz. Süreci böyle devam ettirirsek, $0 \leq i \leq n$ şeklindeki her i için $a_i = b_i$ bulunur. Buradan,

$$b_m x^{m-n} + b_{m-1} x^{m-n-1} + \cdots + b_{n+1} x = 0$$

dır. $x \neq 0$ olduğunu varsayalım ve eşitliğin her iki tarafını x ile bölersek, $\forall x \in (0, \delta)$ için

$$b_m x^{m-n-1} + b_{m-1} x^{m-n-2} + \cdots + b_{n+1} = 0$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafındaki polinomlar $x = 0$ ın bir komşuluğunda tanımlı, sürekli ve $x \neq 0$ için eşittir. Böylece Önerme 2.5.2.1'de $c = 0$ alınarak bu iki polinom $x = 0$ noktasında da eşit olur. Yani, $\forall x \in (0, \delta)$ için,

$$b_m x^{m-n-1} + b_{m-1} x^{m-n-2} + \cdots + b_{n+1} = 0$$

dır. Bu son eşitlikte $x = 0$ yazarsak,

$$b_{n+1} = 0$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$b_m = b_{m-1} = \cdots = b_{n+1} = 0$$

dır. Yani, $der p(x) = der q(x) \Rightarrow n = m$ dir.■

Teorem 2.5.2.3. $\sum A_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$ ve $\sum B_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$, $x_1, x_2, \dots, x_n$ lerin polinomları olsun. Eğer, $i = 1,2, \dots n$ için $\delta_i > 0$ mevcut öyle ki $\forall x_i \in (0, \delta_i)$ için

$$\sum A_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} = \sum B_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

ise o zaman tüm $m_1, m_2, \dots, m_n$ ler için

$$A_{m_1 m_2 \dots m_n} = B_{m_1 m_2 \dots m_n}$$

dir.

İspat: n ye göre tümevarımla ispat edelim.

$n = 1$ olsun. Bu taktirde

$$\sum A_{m_1} x_1^{m_1} = \sum B_{m_1} x_1^{m_1}$$

olur. O halde Teorem 2.5.2.2'den tüm m_1 ler için $A_{m_1} = B_{m_1}$ dir.

Farz edelim teorem $n - 1$ için doğru olsun. Yani,

$$\sum A_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_{n-1}^{m_{n-1}} = \sum B_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_{n-1}^{m_{n-1}}$$

iken tüm $m_1, m_2, \dots, m_{n-1}$ ler için

$$A_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}} = B_{m_1 m_2 \dots m_{n-1}}$$

olsun.

Şimdi n için doğru olduğunu gösterelim. Tüm $m_1, m_2, \dots, m_n$ ler için

$$\sum A_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n} = \sum B_{m_1 m_2 \dots m_n} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_n^{m_n}$$

olsun.

$$\sum\left(\sum A_{m_1m_2\dots m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}}\right)x_n^{m_n}$$
$$=\sum\left(\sum B_{m_1m_2\dots m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}}\right)x_n^{m_n}$$
$$\Rightarrow\sum A_{m_1m_2\dots m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}}=\sum B_{m_1m_2\dots m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}\dots x_{n-1}^{m_{n-1}}$$
$$\Rightarrow A_{m_1m_2\dots m_n}=B_{m_1m_2\dots m_n}$$

■

Teorem 2.5.2.4. $\mathbb{R}[\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_1\rangle]^{I\times\mathcal{E}}=\mathbb{R}[\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle^2,\langle v_1,v_1\rangle]$ dır.

İspat: Keyfi $f\in\mathbb{R}[\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_1\rangle]^{I\times\mathcal{E}}$ alalım. Bu durumda bir $\varphi(z_1,z_2,z_3)$ polinomu için

$$f(x)=\varphi(\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_1\rangle)$$

şeklindedir ve $\forall h\in I\times\mathcal{E}$ için

$$f(x)=f(hx)$$

dir. Burada $\varepsilon_1\in\mathcal{E}$ olmak üzere $h=(I,\varepsilon_1)$ şeklindedir.

$$f(x)=f(hx)\Rightarrow\varphi(\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_1\rangle)=\varphi(\langle u_1,u_1\rangle,\varepsilon_1\langle u_1,v_1\rangle,\varepsilon_1^2\langle v_1,v_1\rangle)$$

olur. $\varepsilon_1\in\mathcal{E}$ olduğundan $\varepsilon_1=+1$ veya $\varepsilon_1=-1$ dir.

$\varepsilon_1=+1$ ise aşikardır.

$\varepsilon_1=-1$ olsun. Bu durumda

$$\varphi(\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_1\rangle)=\varphi(\langle u_1,u_1\rangle,-\langle u_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_1\rangle)$$
$$\Rightarrow\sum A_{m_1m_2m_3}\langle u_1,u_1\rangle^{m_1}\langle u_1,v_1\rangle^{m_2}\langle v_1,v_1\rangle^{m_3}$$
$$=\sum A_{m_1m_2m_3}\langle u_1,u_1\rangle^{m_1}(-1)^{m_2}\langle u_1,v_1\rangle^{m_2}\langle v_1,v_1\rangle^{m_3}$$
$$\Rightarrow\sum A_{m_1m_2m_3}\langle u_1,u_1\rangle^{m_1}\langle u_1,v_1\rangle^{m_2}\langle v_1,v_1\rangle^{m_3}$$
$$=\sum(-1)^{m_2}A_{m_1m_2m_3}\langle u_1,u_1\rangle^{m_1}\langle u_1,v_1\rangle^{m_2}\langle v_1,v_1\rangle^{m_3}\qquad(*)$$

dır. $y_1^2 = \langle u_1, u_1 \rangle$, $y_2^2 = \langle v_1, v_1 \rangle$ olsun. Buradan, $\langle u_1, v_1 \rangle = y_1 y_2 cos\varphi$ dir. $y_3 = cos\varphi$ alırsak,

$$\sum A_{m_1 m_2 m_3} y_1^{2m_1+m_2} y_2^{2m_3+m_2} y_3^{m_2} = \sum (-1)^{m_2} A_{m_1 m_2 m_3} y_1^{2m_1+m_2} y_2^{2m_3+m_2} y_3^{m_2}$$

olur. $\delta_1 > 0$ bir sayı olsun. $y_1^2 = \langle u_1, u_1 \rangle$ olduğundan $y_1 \in (0, \delta_1)$ keyfi seçilebilir. $\delta_2 > 0$ bir sayı olsun. $y_2^2 = \langle v_1, v_1 \rangle$ olduğundan $y_2 \in (0, \delta_2)$, y_1 den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir. $\delta_3 > 0$ bir sayı olsun. $y_1 = \|u_1\|$ ve $y_2 = \|v_1\|$ uzunluklarından bağımsız şekilde u_1 ve v_1 vektörleri arasındaki açı keyfi alınabilir olduğundan $y_3 \in (0, \delta_3)$, y_1 ve y_2 den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir.

Buradan Teorem 2.5.2.3'e göre

$$A_{m_1 m_2 m_3} = (-1)^{m_2} A_{m_1 m_2 m_3}$$

dır.

Buradan m_2 tek ise $A_{m_1 m_2 m_3} = 0$ dır. Dolayısıyla m_2 çift olmalıdır.

m_2 çift olsun. Bu durumda $\exists n \in \mathbb{N}$ için $m_2 = 2l$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\sum A_{m_1 m_2 m_3} \langle u_1, u_1 \rangle^{m_1} \langle u_1, v_1 \rangle^{m_2} \langle v_1, v_1 \rangle^{m_3}$$

invaryant polinomu,

$$\sum A_{m_1 m_2 m_3} \langle u_1, u_1 \rangle^{m_1} (\langle u_1, v_1 \rangle^2)^l \langle v_1, v_1 \rangle^{m_3}$$

biçiminde yazılabilir. Dolayısıyla bu keyfi polinom $\langle u_1, u_1 \rangle$, $\langle u_1, v_1 \rangle^2$ ve $\langle v_1, v_1 \rangle$ ile üretilir. Yani,

$$\mathbb{R}[\langle u_1, u_1 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_1 \rangle]^{I \times \mathcal{E}} \subseteq \mathbb{R}[\langle u_1, u_1 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle^2, \langle v_1, v_1 \rangle]$$

dır.

$\langle u_1, u_1 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle^2, \langle v_1, v_1 \rangle$ ler $I \times \mathcal{E}$ invaryant olduğundan,

$$\mathbb{R}[\langle u_1, u_1 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle^2, \langle v_1, v_1 \rangle] \subseteq \mathbb{R}[\langle u_1, u_1 \rangle, \langle u_1, v_1 \rangle, \langle v_1, v_1 \rangle]^{I \times \mathcal{E}}$$

dır. Dolayısıyla,

$$\mathbb{R}[\langle u_1, u_1\rangle, \langle u_1, v_1\rangle, \langle v_1, v_1\rangle]^{I\times\mathcal{E}} = \mathbb{R}[\langle u_1, u_1\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle v_1, v_1\rangle]$$

dir.■

2.5.3. $\mathbb{R}[x]^{O(n)\times\mathcal{E}^2}$ Halkasının Üreteç Sistemi

Teorem 2.5.3.1. $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^n$ için

$$\sum A_{m_{11}m_{12}\dots m_{44}}\langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}}\langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \dots \langle x_4, x_4\rangle^{m_{44}}$$
$$= \sum B_{m_{11}m_{12}\dots m_{44}}\langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}}\langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \dots \langle x_4, x_4\rangle^{m_{44}}$$

olsun. Bu taktirde tüm $m_{ij}, (1 \leq i < j \leq 4)$ ler için,

$$A_{m_{11}m_{12}\dots m_{44}} = B_{m_{11}m_{12}\dots m_{44}}$$

dir.

İspat: Önce bir vektör için ispatlayalım.

$$\sum A_{m_{11}}\langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}} = \sum B_{m_{11}}\langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}}$$

olsun. $y_1^2 = \langle x_1, x_1\rangle$ dersek,

$$\sum A_{m_{11}}y_1^{2m_{11}} = \sum B_{m_{11}}y_1^{2m_{11}}$$

olur. $y_1 = \|x_1\|$ olduğundan bir $\delta_1 > 0$ sayısı için $y_1 \in (0, \delta_1)$ olacak şekilde keyfi seçilebilir. O halde Teorem 2.5.2.2'den, tüm m_{11} ler için

$$A_{m_{11}} = B_{m_{11}}$$

dir.

Şimdi iki vektör için ispatlayalım,

$$\sum A_{m_{11}m_{12}m_{22}} \langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}} \langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \langle x_2, x_2\rangle^{m_{22}}$$
$$= \sum B_{m_{11}m_{12}m_{22}} \langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}} \langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \langle x_2, x_2\rangle^{m_{22}}$$

olsun.

$y_1^2 = \langle x_1, x_1\rangle$, $y_2^2 = \langle x_2, x_2\rangle$ olsun. Buradan, $\langle x_1, x_2\rangle = y_1 y_2 cos\varphi$ dir. $y_3 = cos\varphi$ alırsak,

$$\sum A_{m_{11}m_{12}m_{22}} y_1^{2m_1+m_2} y_2^{2m_3+m_2} y_3^{m_2} = \sum B_{m_{11}m_{12}m_{22}} y_1^{2m_1+m_2} y_2^{2m_3+m_2} y_3^{m_2}$$

olur. $\delta_1 > 0$ bir sayı olsun. $y_1^2 = \langle x_1, x_1\rangle$ olduğundan $y_1 \in (0, \delta_1)$ keyfi seçilebilir. $\delta_2 > 0$ bir sayı olsun. $y_2^2 = \langle x_2, x_2\rangle$ olduğundan $y_2 \in (0, \delta_2)$, y_1 den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir. $\delta_3 > 0$ bir sayı olsun. $y_1 = \|x_1\|$ ve $y_2 = \|x_2\|$ uzunluklarından bağımsız şekilde x_1 ve x_2 vektörleri arasındaki açı keyfi alınabilir olduğundan $y_3 \in (0, \delta_3)$, y_1 ve y_2 den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir.

Buradan Teorem 2.5.2.3'e göre tüm m_{11}, m_{12}, m_{22} ler için

$$A_{m_{11}m_{12}m_{22}} = B_{m_{11}m_{12}m_{22}}$$

dir.

Şimdi teoremi üç vektör için ispat edelim.

$$\sum A_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}} \langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \langle x_1, x_3\rangle^{m_{13}} \langle x_2, x_2\rangle^{m_{22}} \langle x_2, x_3\rangle^{m_{23}} \langle x_3, x_3\rangle^{m_{33}}$$
$$= \sum B_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}} \langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \langle x_1, x_3\rangle^{m_{13}} \langle x_2, x_2\rangle^{m_{22}} \langle x_2, x_3\rangle^{m_{23}} \langle x_3, x_3\rangle^{m_{33}}$$
$$\Rightarrow \sum \left(\sum A_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \langle x_1, x_3\rangle^{m_{13}} \langle x_2, x_3\rangle^{m_{23}} \langle x_3, x_3\rangle^{m_{33}}\right) \langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}} \langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \langle x_2, x_2\rangle^{m_{22}}$$
$$= \sum \left(\sum B_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \langle x_1, x_3\rangle^{m_{13}} \langle x_2, x_3\rangle^{m_{23}} \langle x_3, x_3\rangle^{m_{33}}\right) \langle x_1, x_1\rangle^{m_{11}} \langle x_1, x_2\rangle^{m_{12}} \langle x_2, x_2\rangle^{m_{22}}$$

dır. Bir önceki adımdan, tüm m_{11}, m_{12}, m_{22} ler için

$$\sum A_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \langle x_1, x_3 \rangle^{m_{13}} \langle x_2, x_3 \rangle^{m_{23}} \langle x_3, x_3 \rangle^{m_{33}}$$
$$= \sum B_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \langle x_1, x_3 \rangle^{m_{13}} \langle x_2, x_3 \rangle^{m_{23}} \langle x_3, x_3 \rangle^{m_{33}}$$

olur. $y_1^2 = \langle x_1, x_1 \rangle$, $y_2^2 = \langle x_2, x_2 \rangle$, $y_3^2 = \langle x_3, x_3 \rangle$ olsun. Bu durumda,

$\langle x_1, x_3 \rangle = \|x_1\| \|x_3\| \cos(x_1 x_3)$ ve $\langle x_2, x_3 \rangle = \|x_2\| \|x_3\| \cos(x_1 x_3)$

ve

$$\sum A_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \|x_1\|^{m_{13}} \|x_2\|^{m_{23}} \|x_3\|^{2m_{33}+m_{13}+m_{23}} (\cos(x_1 x_3))^{m_{13}} (\cos(x_2 x_3))^{m_{23}}$$
$$= \sum B_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} \|x_1\|^{m_{13}} \|x_2\|^{m_{23}} \|x_3\|^{2m_{33}+m_{13}+m_{23}} (\cos(x_1 x_3))^{m_{13}} (\cos(x_2 x_3))^{m_{23}}$$

dir. $\delta_1 > 0$ bir sayı olsun. $y_1^2 = \langle x_1, x_1 \rangle$ olduğundan $y_1 \in (0, \delta_1)$ keyfi seçilebilir. $\delta_2 > 0$ bir sayı olsun. $y_2^2 = \langle x_2, x_2 \rangle$ olduğundan $y_2 \in (0, \delta_2)$, y_1 den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir. $\delta_3 > 0$ bir sayı olsun. $y_3^2 = \langle x_3, x_3 \rangle$ olduğundan $y_3 \in (0, \delta_3)$, y_1 ve y_2 den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir. $\delta_4 > 0$ bir sayı olsun. $y_1 = \|x_1\|$, $y_2 = \|x_2\|$ ve $y_3 = \|x_3\|$ uzunluklarından bağımsız şekilde x_1 ve x_3 vektörleri arasındaki açı keyfi alınabilir olduğundan $\cos(x_1 x_3) \in (0, \delta_3)$; y_1, y_2 ve y_3 den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir. Benzer şekilde $\delta_5 > 0$ bir sayı olsun, $y_1 = \|x_1\|$, $y_2 = \|x_2\|$ ve $y_3 = \|x_3\|$ uzunluklarından ve $\cos(x_1 x_3)$ den bağımsız şekilde x_2 ve x_3 vektörleri arasındaki açı keyfi alınabilir olduğundan $\cos(x_2 x_3) \in (0, \delta_5)$; y_1, y_2, y_3 ve $\cos(x_1 x_3)$ den bağımsız şekilde, keyfi seçilebilir. Buradan Teorem 2.5.2.3'e göre tüm $m_{11}, m_{12}, m_{13}, m_{22}, m_{23}, m_{33}$ ler için

$$A_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}} = B_{m_{11}m_{12}m_{13}m_{22}m_{23}m_{33}}$$

dir.

Benzer şekilde dört vektör için ispat yapılır. Böylece teoremin ispatı biter. ■

Teorem 2.5.3.2.

$$\mathbb{R}\left[\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle,\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\right]^{I\times\mathcal{E}^2}$$
$$=\mathbb{R}\left[\begin{array}{c}\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle^2; i,j=1,2\\ \langle v_1,v_2\rangle^2,\langle v_i,v_i\rangle; i=1,2\\ \langle u_i,v_k\rangle\langle u_j,v_k\rangle; 1\le i,j\le 2, i\neq j, k=1,2\\ \langle v_1,v_2\rangle\langle u_i,v_1\rangle\langle u_j,v_2\rangle; i,j=1,2\end{array}\right]$$

dir.

İspat: Keyfi $f\in\mathbb{R}\left[\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle,\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\right]^{I\times\mathcal{E}^2}$ alalım. Bu durumda bir $\varphi(z_1,\dots,z_{10})$ polinomu için

$$f(x)=\varphi\big(\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle,\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\big)$$

şeklindendir ve $\forall h\in I\times\mathcal{E}^2$ için

$$f(x)=f(hx)$$

dir. Burada $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathcal{E}$ olmak üzere $h=\big((I,\varepsilon_1),(I,\varepsilon_2)\big)$ şeklindedir.

$$f(x)=f(hx)\Rightarrow\varphi\big(\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle,\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\big)$$
$$=\varphi\big(\langle u_i,u_j\rangle,\varepsilon_j\langle u_i,v_j\rangle,\varepsilon_i\varepsilon_j\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\big)$$

olur. $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\mathcal{E}$ olduğundan $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(+1,+1)$ veya $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\neq(+1,+1)$ dir.

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(+1,+1)$ ise aşikardır.

$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\neq(+1,+1)$ olsun. Bu durumda

$$\varphi\big(\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle,\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\big)=\varphi\big(\langle u_i,u_j\rangle,\varepsilon_j\langle u_i,v_j\rangle,\varepsilon_i\varepsilon_j\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\big)$$

$$\Rightarrow\sum A_{m_1m_2\dots m_{10}}\langle u_1,u_1\rangle^{m_1}\langle u_1,u_2\rangle^{m_2}\langle u_2,u_2\rangle^{m_3}\langle u_1,v_1\rangle^{m_4}\langle u_1,v_2\rangle^{m_5}\langle u_2,v_1\rangle^{m_6}\langle u_2,v_2\rangle^{m_7}\langle v_1,v_1\rangle^{m_8}\langle v_1,v_2\rangle^{m_9}\langle v_2,v_2\rangle^{m_{10}}$$
$$=\sum A_{m_1m_2\dots m_{10}}\langle u_1,u_1\rangle^{m_1}\langle u_1,u_2\rangle^{m_2}\langle u_2,u_2\rangle^{m_3}\varepsilon_1^{m_4}\langle u_1,v_1\rangle^{m_4}\varepsilon_2^{m_5}\langle u_1,v_2\rangle^{m_5}\varepsilon_1^{m_6}\langle u_2,v_1\rangle^{m_6}\varepsilon_2^{m_7}\langle u_2,v_2\rangle^{m_7}\langle v_1,v_1\rangle^{m_8}\varepsilon_1^{m_9}\varepsilon_2^{m_9}\langle v_1,v_2\rangle^{m_9}\langle v_2,v_2\rangle^{m_{10}}$$

$$\Rightarrow \sum A_{m_1 m_2 \dots m_{10}} \langle u_1, u_1\rangle^{m_1} \langle u_1, u_2\rangle^{m_2} \langle u_2, u_2\rangle^{m_3} \langle u_1, v_1\rangle^{m_4} \langle u_1, v_2\rangle^{m_5} \langle u_2, v_1\rangle^{m_6} \langle u_2, v_2\rangle^{m_7} \langle v_1, v_1\rangle^{m_8} \langle v_1, v_2\rangle^{m_9} \langle v_2, v_2\rangle^{m_{10}}$$

$$= \sum \varepsilon_1^{m_4+m_6+m_9} \varepsilon_2^{m_5+m_7+m_9} A_{m_1 m_2 \dots m_{10}} \langle u_1, u_1\rangle^{m_1} \langle u_1, u_2\rangle^{m_2} \langle u_2, u_2\rangle^{m_3} \langle u_1, v_1\rangle^{m_4} \langle u_1, v_2\rangle^{m_5} \langle u_2, v_1\rangle^{m_6} \langle u_2, v_2\rangle^{m_7} \langle v_1, v_1\rangle^{m_8} \langle v_1, v_2\rangle^{m_9} \langle v_2, v_2\rangle^{m_{10}}$$

Buradan, Teorem 2.5.3.1’den $A_{m_1 m_2 \dots m_{10}} = \varepsilon_1^{m_4+m_6+m_9} \varepsilon_2^{m_5+m_7+m_9} A_{m_1 m_2 \dots m_{10}}$ dır.

Buradan $m_4 + m_6 + m_9$ veya $m_5 + m_7 + m_9$ tek ise $A_{m_1 m_2 \dots m_{10}} = 0$ dır. Dolayısıyla aynı zamanda $m_4 + m_6 + m_9$ ve $m_5 + m_7 + m_9$ çift olmalıdır. Dolayısıyla keyfi $\varphi\big(\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_j\rangle, \langle v_i, v_j\rangle; i, j = 1,2\big)$, $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant polinom $m_4 + m_6 + m_9$ ve $m_5 + m_7 + m_9$ çift olan

$$(*) \quad \begin{cases} \langle u_1, u_1\rangle^{m_1} \langle u_1, u_2\rangle^{m_2} \langle u_2, u_2\rangle^{m_3} \langle u_1, v_1\rangle^{m_4} \langle u_1, v_2\rangle^{m_5} \langle u_2, v_1\rangle^{m_6} \langle u_2, v_2\rangle^{m_7} \\ \langle v_1, v_1\rangle^{m_8} \langle v_1, v_2\rangle^{m_9} \langle v_2, v_2\rangle^{m_{10}} \end{cases}$$

polinomlarıyla üretilir. Buna göre $\mathbb{R}\big[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_j\rangle, \langle v_i, v_j\rangle; i, j = 1,2\big]^{I \times \mathcal{E}^2}$ halkasının üreteçlerini bulmak için $(*)$ şeklindeki polinomların üreteçlerini bulmak yeterlidir.

$(*)$ şeklindeki polimomlar,

$$(**) \quad \{\langle u_1, u_1\rangle^{m_1} \langle u_1, u_2\rangle^{m_2} \langle u_2, u_2\rangle^{m_3} \langle v_1, v_1\rangle^{m_8} \langle v_2, v_2\rangle^{m_{10}}$$

ve

$$(***) \quad \{\langle u_1, v_1\rangle^{m_4} \langle u_1, v_2\rangle^{m_5} \langle u_2, v_1\rangle^{m_6} \langle u_2, v_2\rangle^{m_7} \langle v_1, v_2\rangle^{m_9}$$

aynı zamanda $m_4 + m_6 + m_9$ ve $m_5 + m_7 + m_9$ çift olmak üzere, şeklindeki polinomlarla üretilir.

$(**)$ şeklindeki polinomlar $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan $\langle u_1, u_1\rangle$, $\langle u_1, u_2\rangle$, $\langle u_2, u_2\rangle$, $\langle v_1, v_1\rangle$ ve $\langle v_2, v_2\rangle$ polinomlarıyla üretilir.

Şimdi $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç sistemlerini bulalım. Buna göre aşağıdaki durumlar mevcuttur.

$m_4 + m_6 + m_9$ ve $m_5 + m_7 + m_9$ çift olsun. Buradan aşağıdaki durumlar mevcuttur,

1. Durum: m_9 çift olsun. Bu durumda $m_4 + m_6$ ve $m_5 + m_7$ çifttir.

m_9 çift olduğundan $\exists n_9 \in \mathbb{N}$ için $m_9 = 2n_9$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\langle v_1, v_2\rangle^{m_9} = (\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9}$$

dir. Dolayısıyla $\langle v_1, v_2\rangle^{m_9}$ nın $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomu $\langle v_1, v_2\rangle^2$ dir.

i) m_9 çift, m_4 ve m_6 çift, m_5 ve m_7 çift olsun.

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4$, $m_5 = 2n_5$, $m_6 = 2n_6$ ve $m_7 = 2n_7$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned}&\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9}\\ &\qquad = (\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5}(\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}(\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

ii) m_9 çift, m_4 ve m_6 çift, m_5 ve m_7 tek

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4, m_5 = 2n_5 + 1$, $m_6 = 2n_6$ ve $m_7 = 2n_7 + 1$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned}&\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9}\\ &\qquad = \begin{matrix}\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_2\rangle(\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5}(\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}\\ (\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9}\end{matrix}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_2\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

iii) m_9 çift, m_4 ve m_6 tek, m_5 ve m_7 çift olsun.

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4 + 1, m_5 = 2n_5$, $m_6 = 2n_6 + 1$ ve $m_7 = 2n_7$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9}$$
$$= \langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_1\rangle(\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5}(\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}(\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_1\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

iv) m_9 çift, m_4 ve m_6 tek, m_5 ve m_7 tek olsun.

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4 + 1, m_5 = 2n_5 + 1,$ $m_6 = 2n_6 + 1$ ve $m_7 = 2n_7 + 1$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9}$$
$$= \langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_2\rangle(\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5}(\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}(\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_1\rangle, \langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_2\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

2. Durum: m_9 tek olsun. Bu durumda $m_4 + m_6$ ve $m_5 + m_7$ tektir.

m_9 tek olduğundan $\exists n_9 \in \mathbb{N}$ için $m_9 = 2n_9 + 1$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\langle v_1, v_2\rangle^{m_9} = \langle v_1, v_2\rangle(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9}$$

dır.

i) m_9 tek, m_4 tek ve m_6 çift, m_5 tek ve m_7 çift olsun.

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4 + 1,$ $m_5 = 2n_5 + 1,$ $m_6 = 2n_6$ ve $m_7 = 2n_7$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9} = \begin{matrix} \langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_1\rangle\langle u_1, v_2\rangle(\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5} \\ (\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}(\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9} \end{matrix}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_1\rangle\langle u_1, v_2\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

ii) m_9 tek, m_4 tek ve m_6 çift, m_5 çift ve m_7 tek olsun.

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4 + 1$, $m_5 = 2n_5$, $m_6 = 2n_6$ ve $m_7 = 2n_7 + 1$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9} = \begin{matrix} \langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_2\rangle(\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5} \\ (\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}(\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9} \end{matrix}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_2\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

iii) m_9 tek, m_4 çift ve m_6 tek, m_5 tek ve m_7 çift olsun.

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4$, $m_5 = 2n_5 + 1$, $m_6 = 2n_6 + 1$ ve $m_7 = 2n_7$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9} = \begin{matrix} \langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle(\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5} \\ (\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}(\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9} \end{matrix}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

iv) m_9 tek, m_4 çift ve m_6 tek, m_5 çift ve m_7 tek olsun.

Bu durumda $\exists n_4, n_5, n_6, n_7 \in \mathbb{N}$ için $m_4 = 2n_4$, $m_5 = 2n_5$, $m_6 = 2n_6 + 1$ ve $m_7 = 2n_7 + 1$ şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\begin{aligned}&\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9}\\ &\quad = \begin{matrix}\langle v_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle u_2, v_2\rangle(\langle u_1, v_1\rangle^2)^{n_4}(\langle u_1, v_2\rangle^2)^{n_5}(\langle u_2, v_1\rangle^2)^{n_6}\\ (\langle u_2, v_2\rangle^2)^{n_7}(\langle v_1, v_2\rangle^2)^{n_9}\end{matrix}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $(***)$ şeklindeki polinomların $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\langle v_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle u_2, v_2\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2$$

şeklindedir.

Dolayısıyla keyfi

$$\sum \begin{matrix} A_{m_1 m_2 \ldots m_{10}}\langle u_1, u_1\rangle^{m_1}\langle u_1, u_2\rangle^{m_2}\langle u_2, u_2\rangle^{m_3}\langle u_1, v_1\rangle^{m_4}\langle u_1, v_2\rangle^{m_5}\langle u_2, v_1\rangle^{m_6}\\ \langle u_2, v_2\rangle^{m_7}\langle v_1, v_1\rangle^{m_8}\langle v_1, v_2\rangle^{m_9}\langle v_2, v_2\rangle^{m_{10}}\end{matrix}$$

invaryant polinomunun $I \times \mathcal{E}^2$ invaryant olan üreteç polinomları,

$$\begin{matrix}\langle u_1, u_1\rangle, \langle u_1, u_2\rangle, \langle u_2, u_2\rangle, \langle v_1, v_1\rangle, \langle v_2, v_2\rangle\\ \langle u_1, v_1\rangle^2, \langle u_1, v_2\rangle^2, \langle u_2, v_1\rangle^2, \langle u_2, v_2\rangle^2, \langle v_1, v_2\rangle^2\\ \langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_1\rangle, \langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_2\rangle\\ \langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_1\rangle\langle u_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle\langle u_1, v_1\rangle\langle u_2, v_2\rangle,\\ \langle v_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle u_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle u_2, v_2\rangle\end{matrix}$$

dır. Yani,

$$\begin{aligned}&\mathbb{R}\left[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_j\rangle, \langle v_i, v_j\rangle; i, j = 1{,}2\right]^{I\times\mathcal{E}^2}\\ &\quad = \mathbb{R}\begin{bmatrix}\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_j\rangle^2; i, j = 1{,}2\\ \langle v_1, v_2\rangle^2, \langle v_i, v_i\rangle; i = 1{,}2\\ \langle u_i, v_k\rangle\langle u_j, v_k\rangle; 1 \le i, j \le 2, i \ne j, k = 1{,}2\\ \langle v_1, v_2\rangle\langle u_i, v_1\rangle\langle u_j, v_2\rangle; i, j = 1{,}2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

dır.■

Not 2.4.3.3. $\mathbb{R}\left[\langle u_i, u_j\rangle, \langle u_i, v_j\rangle, \langle v_i, v_j\rangle; i,j = 1,2\right]^{I\times\mathcal{E}^2}$ halkasının üreteç sistemindeki eleman sayısı 16 tanedir.

2.6. Bir Tane Doğrudan Oluşan Sistem İçin G − İnvaryantların Tam Sistemi

Teorem 2.6.1. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1; v_1\}$ ve $\{u_1'; v_1'\}$ sistemleri verilsin.

$$\{u_1; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\} \Leftrightarrow \begin{matrix} \langle u_1, u_1\rangle = \langle u_1', u_1'\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2 = \langle u_1', v_1'\rangle^2, \\ \langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle \end{matrix}$$

dır.

İspat: **⇒:** $\{u_1; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_1 \in \mathcal{E}$ öyle ki,

$$u_1 = gu_1' \text{ ve } v_1 = \varepsilon_1 g v_1'$$

dir. Buradan,

$$\begin{aligned} &\langle u_1, u_1\rangle = \langle gu_1', gu_1'\rangle = \langle u_1', u_1'\rangle \Rightarrow \langle u_1, u_1\rangle = \langle u_1', u_1'\rangle \\ &\langle u_1, v_1\rangle = \langle gu_1', \varepsilon_1 g v_1'\rangle = \varepsilon_1\langle gu_1', gv_1'\rangle = \varepsilon_1\langle u_1', v_1'\rangle \Rightarrow \langle u_1, v_1\rangle^2 = \langle u_1', v_1'\rangle^2 \\ &\langle v_1, v_1\rangle = \langle \varepsilon_1 g v_1', \varepsilon_1 g v_1'\rangle = {\varepsilon_1}^2\langle gv_1', gv_1'\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle \Rightarrow \langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle \end{aligned}$$

olur.

⇐: $\langle u_1, u_1\rangle = \langle u_1', u_1'\rangle, \langle u_1, v_1\rangle^2 = \langle u_1', v_1'\rangle^2$ ve $\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle$ olsun.

$$\begin{aligned} \langle u_1, v_1\rangle^2 = \langle u_1', v_1'\rangle^2 &\Rightarrow \langle u_1, v_1\rangle^2 - \langle u_1', v_1'\rangle^2 = 0 \\ &\Rightarrow (\langle u_1, v_1\rangle + \langle u_1', v_1'\rangle)(\langle u_1, v_1\rangle - \langle u_1', v_1'\rangle) = 0 \\ &\Rightarrow \langle u_1, v_1\rangle + \langle u_1', v_1'\rangle = 0 \text{ veya } \langle u_1, v_1\rangle - \langle u_1', v_1'\rangle = 0 \end{aligned}$$

O halde aşağıdaki durumlar mevcuttur:

I. Durum:

$$\left.\begin{aligned} \langle u_1, u_1\rangle &= \langle u_1', u_1'\rangle \\ \langle u_1, v_1\rangle &= \langle u_1', v_1'\rangle \\ \langle v_1, v_1\rangle &= \langle v_1', v_1'\rangle \end{aligned}\right\}$$

dir. Teorem 1.7.1.4'ten $\exists g \in O(n)$ öyle ki $u_1 = gu_1'$ ve $v_1 = gv_1'$ dir.

II. Durum:

$$\left.\begin{aligned} \langle u_1, u_1 \rangle &= \langle u_1', u_1' \rangle \\ \langle u_1, v_1 \rangle &= -\langle u_1', v_1' \rangle = \langle u_1', -v_1' \rangle \\ \langle v_1, v_1 \rangle &= \langle v_1', v_1' \rangle = \langle -v_1', -v_1' \rangle \end{aligned}\right\}$$

dir. Teorem 1.7.1.4'ten $\exists g \in O(n)$ öyle ki $u_1 = gu_1'$ ve $v_1 = g(-v_1') = -gv_1'$ dir.

Sonuç olarak $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_1 \in \mathcal{E}$ öyle ki, $u_1 = gu_1'$ ve $v_1 = \varepsilon_1 g v_1'$ dir. Yani, $\{u_1; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\}$ dir.■

Teorem 2.6.2. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1; v_1\}$ ve $\{u_1'; v_1'\}$ sistemleri verilsin.

$$\{u_1; v_1\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\} \Leftrightarrow \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_1', v_1' \rangle$$

dır.

İspat: Teorem 2.5.18'den

$$\begin{aligned} \{u_1; v_1\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\} &\Leftrightarrow \{u_1 - u_1; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1' - u_1'; v_1'\} \\ &\Leftrightarrow \{0; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{0; v_1'\} \end{aligned}$$

dır. Şimdi $\{0; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{0; v_1'\} \Leftrightarrow \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_1', v_1' \rangle$ olduğunu gösterelim.

$\Rightarrow$: $\{0; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{0; v_1'\}$ olsun. Bu durumda $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_1 \in \mathcal{E}$ öyle ki,

$$v_1 = \varepsilon_1 g v_1'$$

dir. Buradan,

$$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle \varepsilon_1 g v_1', \varepsilon_1 g v_1' \rangle = {\varepsilon_1}^2 \langle g v_1', g v_1' \rangle = \langle v_1', v_1' \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_1', v_1' \rangle$$

olur.

$\Leftarrow$:$\langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_1', v_1' \rangle$ olsun. Teorem 1.7.1.4'ten $\exists g \in O(n)$ öyle ki $v_1 = gv_1'$ dir. Buradan,

$$\{0; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{0; v_1'\}$$

dir.■

Sonuç 2.6.3. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1; v_1\}$ ve $\{u_1'; v_1'\}$ sistemleri

$$\langle v_1, v_1\rangle = 1, \langle u_1, v_1\rangle = 0, \langle v_1', v_1'\rangle = 1, \langle u_1', v_1'\rangle = 0$$

olacak şekilde verilsin.

$$\{u_1; v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\} \Leftrightarrow \langle u_1, u_1\rangle = \langle u_1', u_1'\rangle$$

dir.

İspat: Teorem 2.6.1'in sonucudur.■

Sonuç 2.6.4. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1; v_1\}$ ve $\{u_1'; v_1'\}$ sistemleri

$$\langle v_1, v_1\rangle = 1, \langle u_1, v_1\rangle = 0, \langle v_1', v_1'\rangle = 1, \langle u_1', v_1'\rangle = 0$$

olacak şekilde verilsin. O halde $\{u_1; v_1\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\}$ dir.

2.7. İki Tane Doğrudan Oluşan Sistem İçin $G-$ İnvaryantların Tam Sistemi

Teorem 2.7.1. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, u_2; v_1, v_2\}$ ve $\{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ sistemleri

$$\langle v_i, v_i\rangle = 1, \langle u_i, v_i\rangle = 0, \langle v_i', v_i'\rangle = 1, \langle u_i', v_i'\rangle = 0 \ \ (i = 1,2)$$

olacak şekilde verilsin.

$\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ ise, bu taktirde

$$(Q)\begin{cases} \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2) \\ \langle v_1, v_2\rangle^2 = \langle v_1', v_2'\rangle^2 & \\ \langle u_k, v_i\rangle^2 = \langle u_k', v_i'\rangle^2 & (1 \le i, k \le 2, i \ne k) \\ \langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle\langle u_2', v_1'\rangle\langle v_1', v_2'\rangle & \end{cases}$$

dır.

İspat: $\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ olsun. O halde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ öyle ki, $i = 1,2$ için,

$$u_i = gu_i' \text{ ve } v_i = \varepsilon_i g v_i'$$

dir. Buna göre,

$$\langle u_k, u_l \rangle = \langle gu_k', gu_l' \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle \Rightarrow \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle, (1 \leq k \leq l \leq 2)$$

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle \varepsilon_1 g v_1', \varepsilon_2 g v_2' \rangle = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \langle g v_1', g v_2' \rangle = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \langle v_1', v_2' \rangle \Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \langle v_1', v_2' \rangle^2$$

$$\langle u_k, v_i \rangle = \langle gu_k', \varepsilon_i g v_i' \rangle = \varepsilon_i \langle gu_k', g v_i' \rangle = \varepsilon_i \langle u_k', v_i' \rangle$$
$$\Rightarrow \langle u_k, v_i \rangle^2 = \langle u_k', v_i' \rangle^2, (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k)$$

$$\begin{aligned}\langle u_1, v_2 \rangle \langle u_2, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle gu_1', \varepsilon_2 g v_2' \rangle \langle gu_2', \varepsilon_1 g v_1' \rangle \langle \varepsilon_1 g v_1', \varepsilon_2 g v_2' \rangle \\ &= \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \langle gu_1', g v_2' \rangle \langle gu_2', g v_1' \rangle \langle g v_1', g v_2' \rangle \\ &= \langle gu_1', g v_2' \rangle \langle gu_2', g v_1' \rangle \langle g v_1', g v_2' \rangle = \langle u_1', v_2' \rangle \langle u_2', v_1' \rangle \langle v_1', v_2' \rangle\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle u_1, v_2 \rangle \langle u_2, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1', v_2' \rangle \langle u_2', v_1' \rangle \langle v_1', v_2' \rangle$$

■

Bu teoremin tersi de doğrudur.

Teorem 2.7.2. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, u_2; v_1, v_2\}$ ve $\{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ sistemleri

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \langle u_i, v_i \rangle = 0, \langle v_i', v_i' \rangle = 1, \langle u_i', v_i' \rangle = 0 \ \ (i = 1,2)$$

olacak şekilde verilsin. Eğer (Q) eşitlikleri sağlanıyor ise bu taktirde $\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ dir.

İspat: Bu teoremin ispatı için aşağıdaki durumlar mevcuttur. Bu durumlar için ayrı ayrı ispat verilecektir.

I. Durum: $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0, \langle u_1, v_2 \rangle \neq 0, \langle u_2, v_1 \rangle \neq 0$ olsun.

Hipotezden $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0, \langle u_1, v_2 \rangle \neq 0$ ve $\langle u_2, v_1 \rangle \neq 0$ olduğundan $\langle u_1, v_2 \rangle \langle u_2, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle \neq 0$ ve dolayısıyla $\langle u_1', v_2' \rangle \langle u_2', v_1' \rangle \langle v_1', v_2' \rangle \neq 0$ dır.

$$\left.\begin{array}{ll}\langle u_k, u_l\rangle = \langle u'_k, u'_l\rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_i\rangle = \langle v'_i, v'_i\rangle & (i = 1{,}2)\end{array}\right\} \quad (1)$$

olmak üzere, $\langle v_1, v_2\rangle^2 = \langle v'_1, v'_2\rangle^2$ ve $\langle u_k, v_i\rangle^2 = \langle u'_k, v'_i\rangle^2$ $(1 \leq i, k \leq 2, i \neq k)$ olduğundan aşağıdaki durumlar mevcuttur:

I.1. Durum: $\begin{array}{ll}\langle v_1, v_2\rangle = \langle v'_1, v'_2\rangle & \\ \langle u_k, v_i\rangle = \langle u'_k, v'_i\rangle & (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k)\end{array}$

olsun. Bu durum (1) koşulu ile

$$\begin{array}{c}\langle v_i, v_j\rangle = \langle v'_i, v'_j\rangle, (1 \leq i \leq j \leq 2) \\ \langle u_k, v_i\rangle = \langle u'_k, v'_i\rangle\ (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k) \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u'_k, u'_l\rangle\ (1 \leq k \leq l \leq 2)\end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1{,}2$ için

$$u_i = g u'_i \text{ ve } u_i = g v'_i$$

dir.

I.2. Durum: (i) $\begin{array}{ll}\langle v_1, v_2\rangle = -\langle v'_1, v'_2\rangle & \\ \langle u_k, v_i\rangle = \langle u'_k, v'_i\rangle & (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k)\end{array}$

olsun. Bu durumda,

$$\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = -\langle u'_1, v'_2\rangle\langle u'_2, v'_1\rangle\langle v'_1, v'_2\rangle \neq 0$$

olur ki bu,

$$\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = \langle u'_1, v'_2\rangle\langle u'_2, v'_1\rangle\langle v'_1, v'_2\rangle \neq 0$$

oluşu ile çelişir.

(ii) (k_0, i_0), $1 \leq k_0 \leq 2$, $1 \leq i_0 \leq 2$, $k_0 \neq i_0$ olacak şekilde mevcut öyle ki,

$$\langle u_{k_0}, v_{i_0}\rangle = -\langle u'_{k_0}, v'_{i_0}\rangle$$

olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= \langle v_1', v_2'\rangle\\ \langle u_{k_0}, v_{i_0}\rangle &= -\langle u_{k_0}', v_{i_0}'\rangle\\ \langle u_k, v_i\rangle &= \langle u_k', v_i'\rangle \qquad (k,i)\neq(k_0,i_0)\end{aligned}$$

olur. Bu durumda,

$$\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = -\langle u_1', v_2'\rangle\langle u_2', v_1'\rangle\langle v_1', v_2'\rangle \neq 0$$

olur ki bu,

$$\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle\langle u_2', v_1'\rangle\langle v_1', v_2'\rangle \neq 0$$

oluşu ile çelişir.

I.3. Durum: (i) $\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= -\langle v_1', v_2'\rangle\\ \langle u_1, v_2\rangle &= -\langle u_1', v_2'\rangle\\ \langle u_2, v_1\rangle &= \langle u_2', v_1'\rangle\end{aligned}$

olsun. Bu durum (1) koşulu ile

$$\begin{aligned}\langle u_k, u_l\rangle &= \langle u_k', u_l'\rangle \qquad (1\leq i\leq k\leq 2, i\neq k)\\ \langle u_1, v_2\rangle &= \langle u_1', -v_2'\rangle\\ \langle u_2, v_1\rangle &= \langle u_2', v_1'\rangle\\ \langle v_1, v_1\rangle &= \langle v_1', v_1'\rangle\\ \langle v_1, v_2\rangle &= \langle v_1', -v_2'\rangle\\ \langle v_2, v_2\rangle &= \langle -v_2', -v_2'\rangle\end{aligned}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$u_i = gu_i'$ $(i = 1{,}2)$, $v_1 = gv_1'$ ve $v_2 = g(-v_2') = -gv_2'$

dir.

(ii) $\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= -\langle v_1', v_2'\rangle\\ \langle u_1, v_2\rangle &= \langle u_1', v_2'\rangle\\ \langle u_2, v_1\rangle &= -\langle u_2', v_1'\rangle\end{aligned}$

olsun. Bu durum (1) koşulu ile

$$\begin{aligned}
\langle u_k, u_l\rangle &= \langle u'_k, u'_l\rangle \qquad (1 \le i \le k \le 2, i \ne k)\\
\langle u_1, v_2\rangle &= \langle u'_1, v'_2\rangle\\
\langle u_2, v_1\rangle &= \langle u'_2, -v'_1\rangle\\
\langle v_1, v_1\rangle &= \langle -v'_1, -v'_1\rangle\\
\langle v_1, v_2\rangle &= \langle -v'_1, v'_2\rangle\\
\langle v_2, v_2\rangle &= \langle v'_2, v'_2\rangle
\end{aligned}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$u_i = gu'_i$ $(i = 1{,}2)$, $v_1 = g(-v'_1) = -gv'_1$ ve $v_2 = gv'_2$

dir.

$$\text{(iii)}\quad \begin{aligned}
\langle v_1, v_2\rangle &= \langle v'_1, v'_2\rangle\\
\langle u_1, v_2\rangle &= -\langle u'_1, v'_2\rangle\\
\langle u_2, v_1\rangle &= -\langle u'_2, v'_1\rangle
\end{aligned}$$

Bu durum (1) koşulu ile

$$\left.\begin{aligned}
\langle u_k, u_l\rangle &= \langle u'_k, u'_l\rangle & (1 \le i \le k \le 2)\\
\langle u_k, v_i\rangle &= -\langle u'_k, v'_i\rangle & (1 \le i, k \le 2, i \ne k)\\
\langle v_i, v_j\rangle &= \langle v'_i, v'_j\rangle & (1 \le i \le j \le 2)
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}
\langle u_k, u_l\rangle &= \langle u'_k, u'_l\rangle & (1 \le i \le k \le 2)\\
\langle u_k, v_i\rangle &= \langle u'_k, -v'_i\rangle & (1 \le i, k \le 2, i \ne k)\\
\langle v_i, v_j\rangle &= \langle -v'_i, -v'_j\rangle & (1 \le i \le j \le 2)
\end{aligned}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1{,}2$ için

$u_i = gu'_i$ ve $v_i = g(-v'_i) = -gv'_i$

dir.

I.4. Durum: $\begin{aligned}\langle v_1, v_2\rangle &= -\langle v'_1, v'_2\rangle\\ \langle u_k, v_i\rangle &= -\langle u'_k, v'_i\rangle \quad (1 \le i, k \le 2, i \ne k)\end{aligned}$

olsun. Bu durumda,

$$\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = -\langle u'_1, v'_2\rangle\langle u'_2, v'_1\rangle\langle v'_1, v'_2\rangle \ne 0$$

olur ki bu,

$$\langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = \langle u'_1, v'_2\rangle\langle u'_2, v'_1\rangle\langle v'_1, v'_2\rangle \ne 0$$

oluşu ile çelişir.

II. Durum: $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0, \langle u_1, v_2\rangle \neq 0, \langle u_2, v_1\rangle = 0$ olsun.

$$\left.\begin{array}{ll} \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i', v_i'\rangle & (i = 1,2) \end{array}\right\} \quad (2)$$

olmak üzere, $\langle v_1, v_2\rangle^2 = \langle v_1', v_2'\rangle^2$ ve $\langle u_1, v_2\rangle^2 = \langle u_1', v_2'\rangle^2$ olduğundan aşağıdaki durumlar mevcuttur:

II.1. Durum: $\begin{array}{l} \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle \end{array}$

olsun. Bu durum (2) koşulu ile

$$\begin{array}{ll} \langle v_i, v_j\rangle = \langle v_i', v_j'\rangle & (1 \leq i \leq j \leq 2) \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle & \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', v_1'\rangle = 0 & \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1,2$ için

$u_i = g u_i'$ ve $v_i = g v_i'$

dir.

II.2. Durum: (i) $\begin{array}{l} \langle v_1, v_2\rangle = -\langle v_1', v_2'\rangle \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle \end{array}$

olsun. Bu durum (2) koşulu ile

$$\left.\begin{array}{ll} \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i', v_i'\rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2\rangle = -\langle v_1', v_2'\rangle & \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle & \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', v_1'\rangle = 0 & \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \langle v_1, v_1\rangle = \langle -v_1', -v_1'\rangle & \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle -v_1', v_2'\rangle & \\ \langle v_2, v_2\rangle = \langle v_2', v_2'\rangle & \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle & \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', -v_1'\rangle = 0 & \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$u_i = gu_i'$ $(i = 1,2)$, $v_1 = g(-v_1') = -gv_1'$ ve $v_2 = gv_2'$

dir.

(ii) $\begin{array}{l} \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1', v_2' \rangle \\ \langle u_1, v_2 \rangle = -\langle u_1', v_2' \rangle \end{array}$

olsun. Bu durum (2) koşulu ile

$$\left.\begin{array}{ll} \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i', v_j' \rangle & (1 \le i \le j \le 2) \\ \langle u_1, v_2 \rangle = -\langle u_1', v_2' \rangle & \\ \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2', v_1' \rangle = 0 & \\ \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \le k \le l \le 2) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \langle v_i, v_j \rangle = \langle -v_i', -v_j' \rangle & (1 \le i \le j \le 2) \\ \langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_1', -v_2' \rangle & \\ \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2', -v_1' \rangle = 0 & \\ \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \le k \le l \le 2) \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1,2$ için

$u_i = gu_i'$ ve $v_i = g(-v_i') = -gv_i'$

dir.

II.3. Durum: $\begin{array}{l} \langle v_1, v_2 \rangle = -\langle v_1', v_2' \rangle \\ \langle u_1, v_2 \rangle = -\langle u_1', v_2' \rangle \end{array}$

olsun. Bu durum (2) koşulu ile

$$\left.\begin{array}{ll} \langle v_i, v_i \rangle = \langle v_i', v_i' \rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2 \rangle = -\langle v_1', v_2' \rangle & \\ \langle u_1, v_2 \rangle = -\langle u_1', v_2' \rangle & \\ \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2', v_1' \rangle = 0 & \\ \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \le k \le l \le 2) \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_1', v_1' \rangle & \\ \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1', -v_2' \rangle & \\ \langle v_2, v_2 \rangle = \langle -v_2', -v_2' \rangle & \\ \langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_1', -v_2' \rangle & \\ \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2', v_1' \rangle = 0 & \\ \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \le k \le l \le 2) \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$$u_i = gu_i' \; (i = 1,2), v_1 = gv_1' \text{ ve } v_2 = g(-v_2') = -gv_2'$$

dir.

III. Durum: $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0, \langle u_1, v_2\rangle = 0, \langle u_2, v_1\rangle \neq 0$ olsun.

Bu durumun ispatı, II. duruma benzer şekilde yapılır.

IV. Durum: $\langle v_1, v_2\rangle = 0, \langle u_1, v_2\rangle \neq 0, \langle u_2, v_1\rangle \neq 0$ olsun.

$$\left.\begin{array}{ll} \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i', v_i'\rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle = 0 & \end{array}\right\} \quad (3)$$

olmak üzere, $\langle u_k, v_i\rangle^2 = \langle u_k', v_i'\rangle^2, (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k)$ olduğundan aşağıdaki durumlar mevcuttur:

IV.1. Durum: $\begin{array}{l} \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle \end{array}$

olsun. Bu durum (3) koşulu ile

$$\begin{array}{ll} \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i', v_i'\rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle = 0 & \\ \langle u_k, v_i\rangle = \langle u_k', v_i'\rangle & (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k) \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1,2$ için

$$u_i = gu_i' \text{ ve } v_i = gv_i'$$

dir.

IV.2. Durum: (i) $\begin{array}{l} \langle u_1, v_2\rangle = -\langle u_1', v_2'\rangle \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle \end{array}$

olsun. Bu durum (3) koşulu ile

$$\left.\begin{array}{ll}\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle & \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle = 0 & \\ \langle v_2, v_2\rangle = \langle v_2', v_2'\rangle & \\ \langle u_1, v_2\rangle = -\langle u_1', v_2'\rangle & \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', v_1'\rangle & \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll}\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle & \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', -v_2'\rangle = 0 & \\ \langle v_2, v_2\rangle = \langle -v_2', -v_2'\rangle & \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', -v_2'\rangle & \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', v_1'\rangle & \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2)\end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$$u_i = gu_i' \ (i = 1{,}2),\ v_1 = gv_1' \text{ ve } v_2 = g(-v_2') = -gv_2'$$

dir.

(ii) $\begin{array}{l}\langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle \\ \langle u_2, v_1\rangle = -\langle u_1', v_2'\rangle\end{array}$

olsun. II. Durum (i) koşuluna benzer şekilde Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$$u_i = gu_i' \ (i = 1{,}2),\ v_1 = g(-v_1') = -gv_1' \text{ ve } v_2 = gv_2'$$

dir.

IV.3. Durum: $\begin{array}{l}\langle u_1, v_2\rangle = -\langle u_1', v_2'\rangle \\ \langle u_2, v_1\rangle = -\langle u_1', v_2'\rangle\end{array}$

olsun. Bu durum (3) koşulu ile

$$\left.\begin{array}{ll}\langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i', v_i'\rangle & (i = 1{,}2) \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle = 0 & \\ \langle u_k, v_i\rangle = -\langle u_k', v_i'\rangle & (1 \le i, k \le 2, i \ne k) \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll}\langle v_i, v_i\rangle = \langle -v_i', -v_i'\rangle & (i = 1{,}2) \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle -v_1', -v_2'\rangle = 0 & \\ \langle u_k, v_i\rangle = \langle u_k', -v_i'\rangle & (1 \le i, k \le 2, i \ne k) \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2)\end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4’e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1,2$ için

$u_i = g u_i'$ ve $v_i = g(-v_i') = -g v_i'$

dir.

V. Durum: $\langle v_1, v_2 \rangle \neq 0, \langle u_1, v_2 \rangle = 0, \langle u_2, v_1 \rangle = 0$ olsun.

$$\left.\begin{array}{ll} \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_i \rangle = \langle v_i', v_i' \rangle & (i = 1,2) \\ \langle u_k, v_i \rangle = \langle u_k', v_i' \rangle = 0 & (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k) \end{array}\right\} \quad (4)$$

olmak üzere, $\langle v_1, v_2 \rangle^2 = \langle v_1', v_2' \rangle^2$ olduğundan aşağıdaki durumlar mevcuttur:

V.1. Durum: $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1', v_2' \rangle$

olsun. Bu durum (4) koşulu ile

$$\begin{array}{ll} \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_j \rangle = \langle v_i', v_j' \rangle & (1 \leq i \leq j \leq 2) \\ \langle u_k, v_i \rangle = \langle u_k', v_i' \rangle = 0 & (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k) \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4’e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1,2$ için

$u_i = g u_i'$ ve $v_i = g v_i'$

dir.

V.2. Durum: $\langle v_1, v_2 \rangle = -\langle v_1', v_2' \rangle$

olsun. Bu durum (4) koşulu ile

$$\left.\begin{array}{l}\langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle = -\langle v_1', v_2'\rangle \\ \langle v_2, v_2\rangle = \langle v_2', v_2'\rangle \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle = 0 \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', v_1'\rangle = 0 \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle \qquad (1 \le k \le l \le 2)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l}\langle v_1, v_1\rangle = \langle -v_1', -v_1'\rangle \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle -v_1', v_2'\rangle \\ \langle v_2, v_2\rangle = \langle v_2', v_2'\rangle \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle = 0 \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', -v_1'\rangle = 0 \\ \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle \qquad (1 \le k \le l \le 2)\end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$u_i = gu_i'$ $(i = 1,2)$, $v_1 = g(-v_1')$ ve $v_2 = gv_2'$

dir.

VI. Durum: $\langle v_1, v_2\rangle = 0, \langle u_1, v_2\rangle \neq 0, \langle u_2, v_1\rangle = 0$ olsun.

$$\left.\begin{array}{ll}\langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2) \\ \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i', v_i'\rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle = 0 & \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', v_1'\rangle = 0 & \end{array}\right\} \quad (5)$$

olmak üzere, $\langle u_1, v_2\rangle^2 = \langle u_1', v_2'\rangle^2$ olduğundan aşağıdaki durumlar mevcuttur:

VI.1. Durum: $\langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle$

olsun. Bu durum (5) koşulu ile

$$\begin{array}{ll}\langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2) \\ \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i', v_i'\rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1', v_2'\rangle = 0 & \\ \langle u_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle & \\ \langle u_2, v_1\rangle = \langle u_2', v_1'\rangle = 0 & \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1,2$ için

$u_i = gu_i'$ ve $v_i = gv_i'$

dir.

VI.2. Durum: $\langle u_1, v_2 \rangle = -\langle u_1', v_2' \rangle$

olsun. Bu durum (5) koşulu ile

$$\left.\begin{array}{ll} \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_i \rangle = \langle v_i', v_i' \rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1', v_2' \rangle = 0 & \\ \langle u_1, v_2 \rangle = -\langle u_1', v_2' \rangle & \\ \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2', v_1' \rangle = 0 & \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{ll} \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_1, v_1 \rangle = \langle v_1', v_1' \rangle & \\ \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1', -v_2' \rangle = 0 & \\ \langle v_2, v_2 \rangle = \langle -v_2', -v_2' \rangle & \\ \langle u_1, v_2 \rangle = \langle u_1', -v_2' \rangle & \\ \langle u_2, v_1 \rangle = \langle u_2', v_1' \rangle = 0 & \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki,

$u_i = gu_i'$ $(i = 1,2)$, $v_1 = g(-v_1')$ ve $v_2 = gv_2'$

dır.

VII. Durum: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0, \langle u_1, v_2 \rangle = 0, \langle u_2, v_1 \rangle \neq 0$ olsun.

Bu durumun ispatı, VI. duruma benzer şekilde yapılır.

VIII. Durum: $\langle v_1, v_2 \rangle = 0, \langle u_1, v_2 \rangle = 0, \langle u_2, v_1 \rangle = 0$ olsun.

Bu durumda

$$\begin{array}{ll} \langle u_k, u_l \rangle = \langle u_k', u_l' \rangle & (1 \leq k \leq l \leq 2) \\ \langle v_i, v_i \rangle = \langle v_i', v_i' \rangle & (i = 1,2) \\ \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1', v_2' \rangle = 0 & \\ \langle u_k, v_i \rangle = \langle u_k', v_i' \rangle = 0 & (1 \leq i, k \leq 2, i \neq k) \end{array}$$

olur. Teorem 1.7.1.4'e göre $\exists g \in O(n)$ öyle ki, $i = 1,2$ için

$u_i = gu_i'$ ve $v_i = gv_i'$

dir.

Sonuç olarak, $i = 1,2$ için

$u_i = gu_i'$ ve $v_i = \varepsilon_i g v_i'$

olacak şekilde $\exists g \in O(n)$ ve $\exists \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ vardır. O halde,

$$\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$$

dir.■

Teorem 2.7.3. $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, u_2; v_1, v_2\}$ ve $\{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ sistemleri

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1, \langle u_i, v_i \rangle = 0, \langle v_i', v_i' \rangle = 1, \langle u_i', v_i' \rangle = 0 \ \ (i = 1,2)$$

olacak şekilde verilsin.

$$\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \langle v_1', v_2' \rangle^2 \\ \langle u_1 - u_2, v_i \rangle^2 = \langle u_1' - u_2', v_i' \rangle^2; i = 1,2 \end{array}$$

dir.

İspat: Teorem 2.5.18'den

$$\begin{aligned} \{u_1, u_2; v_1, v_2\} &\overset{(Iz(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\} \\ &\Leftrightarrow \{u_1 - u_2, 0; v_1, v_2\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1' - u_2', 0; v_1', v_2'\} \end{aligned}$$

dır. Teorem 2.7.1 ve Teorem 2.7.2'den

$$\begin{aligned} \{u_1 - u_2, 0; v_1, v_2\} &\overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1' - u_2', 0; v_1', v_2'\} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle u_1 - u_2, 0 \rangle = \langle u_1' - u_2', 0 \rangle & \\ \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \langle v_1', v_2' \rangle^2 & \\ \langle u_1 - u_2, v_i \rangle^2 = \langle u_1' - u_2', v_i' \rangle^2 & i = 1,2 \\ \langle 0, v_i \rangle^2 = \langle 0, v_i' \rangle^2 & i = 1,2 \\ \langle u_1 - u_2, v_2 \rangle \langle 0, v_1 \rangle \langle v_1, v_2 \rangle = \langle u_1' - u_2', v_2' \rangle \langle 0, v_1' \rangle \langle v_1', v_2' \rangle & \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{array}{c} \langle v_1, v_2 \rangle^2 = \langle v_1', v_2' \rangle^2 \\ \langle u_1 - u_2, v_i \rangle^2 = \langle u_1' - u_2', v_i' \rangle^2; i = 1,2 \end{array} \end{aligned}$$

dir.■

3. İRDELEME

Doğru kavramı, matematiğin temel kavramlarından biridir. Bu kavram, antik matematikçiler tarafından genişliği ve derinliği olmayan nesne olarak tanımlanmıştır. Öklid, (M.Ö.365 – M.Ö.300) bir doğruyu “genişliği olmayan uzunluk” ve Öklid geometrisinin kanıtlanmayan temel özelliklerinden biri olarak tanımlamıştır. Böylece 17. yy’a kadar doğru, bir boyutlu derinliği ve genişliği olmayan aynı doğrultu boyunca uzanan noktalar olarak tanımlanmıştır. 19. yy’ın sonlarında gelişen Öklid dışındaki geometrilerde de doğru kavramı, Öklid geometrisine yakın bir şekilde tanımlanmıştır. Doğrunun özellikleri başvurulan aksiyomlar tarafından belirlenir. Bu yaklaşım sayesinde geometriyi kullananlara bir esneklik sağlar.

Analitik geometride ise iki farklı şekilde tanımlanır. Bunlardan birincisi, parametrik doğru (yani bir dönüşümün değer kümesi şeklinde) diğeri ise verilen bir lineer denklemin çözümünü sağlayan tüm noktaların kümesi şeklindedir.

Tezde, doğruya eğrinin özel hali olarak bakılarak ve eğrinin 3 tane farklı tanımı kullanılarak doğrunun 3 tane farklı tanımı verildi. Doğru için verilen bu 3 tane tanımdan üçüncüsü doğru için yeni bir tanımdır. Bu üçüncü tanım, biraz değiştirilerek doğrunun daha önemli yeni bir tanımı verildi. Buna, kısaca 4. tip doğru diyelim. Tezde, doğrunun bu tanımları arasındaki ilişkiler incelendi.

Tezde $n-$boyutlu Öklid uzayında noktalar ve parametrik doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi incelendi ve polinomyal invaryanlarının tam sistemleri bulundu. Öklid uzayında noktalar ve parametrik doğrulardan (yani 1. tip doğrulardan) oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre polinomyal invaryantlarının tam sistemlerini bulma problemi, invaryantlar teorisi açısından basit bir problem olsa da bu probleme ait sonuçlar bugüne kadar yapılan çalışmalarda net şekilde verilmedi. Bundan dolayı tezde bu problem incelendi ve tam çözümü verildi.

4. tip doğru invaryant teorinin incelenecek yapısı olmadığından dolayı 4. tip doğrulardan oluşan ailenin denklik problemi invaryantlar teorisi dışında kaldı. Diferansiyel geometride sadece tek bir eğri inceleniyorken, eğriler ailesinin denklik problemi incelenmiyor. Bundan dolayı 4. tip doğrulardan oluşan ailenin denklik problemi klasik diferansiyel geometride de incelenmemiş bir problemdir.

Tezde n −boyutlu Öklid uzayında noktalar, 2. tip ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi incelendi. Noktalar, 2. tip ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi, sadece noktalar ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemine indirgendi.

Klasik diferansiyel geometride eğrilerin teorisinde eğrinin invaryant parametrizasyonları kullanılmıştı. Öklid geometrisindeki eğriler teorisinde eğrinin invaryant parametrizasyonu, eğrinin yay uzunluğu şeklinde tanımlanmıştı ve kullanılmıştı.

Tezde 4. tip doğru için eğrinin invaryant parametrizasyonun benzeri olan kanonik parametrik doğru tanımlandı. Kanonik parametrik doğrular kullanılarak noktalar ve 4.tip doğrulardan oluşan ailenin polinomyal invaryantı tanımlandı. Noktalar ve 4. tip doğrulardan oluşan ailenin polinomyal invaryantları halkasının sonlu üreteçli olduğu gösterildi ve üreteçler sayısına ait eşitsizlik verildi.

Tezde bir veya iki 4. tip doğrudan oluşan ailenin $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre denklik problemi incelendi ve polinomyal invaryantlarının tam sistemi bulundu.

4. SONUÇLAR

Tezde aşağıdaki temel sonuçlar elde edilmiştir:

1) Eğriler için verilen üç farklı tanım kullanılarak doğrular için 3 farklı tanım verildi. Ayrıca verilen tanımlara ek olarak doğrunun yeni bir tanımı 4. tip doğru olarak verildi. (Tanım 2.1.1, Tanım 2.1.2, Tanım 2.1.3 ve Tanım 2.1.8)

2) $\mathbb{R}^n$'de parametrik (1. tip) doğrulardan oluşan sistemin $G-$denklik problemi incelendi ve bu problem, noktalar sisteminin denklik problemine indirgenildi. (Teorem 2.2.6 ve Teorem 2.2.8)

3) $\mathbb{R}^n$'de parametrik (1. tip) doğrulardan oluşan sistemin $O(n)$ ve $Iz(n)$ grubuna göre invaryantlarının tam sistemi verildi. (Teorem 2.2.7 ve Teorem 2.2.9)

4) $\mathbb{R}^n$'de noktalar ve parametrik doğrulardan oluşan sistemin $G-$denklik problemi incelendi ve bu problem, noktalar sisteminin denklik problemine indirgenildi. (Teorem 2.3.2, Teorem 2.3.4 ve Sonuç 2.3.5)

5) $\mathbb{R}^n$'de noktalar ve parametrik (1. tip) doğrulardan oluşan sistemin $O(n)$ ve $Iz(n)$ grubuna göre invaryantlarının tam sistemi verildi. (Teorem 2.3.3 ve Teorem 2.3.6)

6) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ $\mathbb{R}^n$'de iki doğru sistemi ve $i = 1, \dots, k$ için α_i ve α'_i doğrularının kanonik parametrizasyonları sırasıyla $\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$ ve $\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i}$ olsun. Bu durumda,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{O(n)}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\} \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n)\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u'_1, \dots, u'_k; v'_1, \dots, v'_k\}$$

dır. (Sonuç 2.4.19)

7) $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ve $\{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\}$ $\mathbb{R}^n$'de iki doğru sistemi ve $i = 1, \dots, k$ için α_i ve α'_i doğrularının kanonik parametrizasyonları sırasıyla $\{u_i, v_i\}_{\alpha_i}$ ve $\{u'_i, v'_i\}_{\alpha'_i}$ olsun. Bu durumda,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \overset{Iz(n)}{\sim} \{\alpha'_1, \dots, \alpha'_k\} \Leftrightarrow \{u_1, \dots, u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u'_1, \dots, u'_k; v'_1, \dots, v'_k\}$$
$$\Leftrightarrow \{u_1 - u_k, \dots, u_{k-1} - u_k; v_1, \dots, v_k\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^k)}{\sim} \{u'_1 - u'_k, \dots, u'_{k-1} - u'_k; v'_1, , \dots, v'_k\}$$

dır. (Sonuç 2.4.20)

8) Noktalar, 2. tip doğrular ve 4. tip doğrulardan oluşan sistemlerin $G-$denklik problemi, noktalar ve 4. tip doğrulardan oluşan sistemlerin $G-$denklik problemine indirgendi.(Önerme 2.4.23)

9)

$$\mathbb{R}[u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k} = \mathbb{R}\big[\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_r\rangle,\langle v_r,v_s\rangle; i,j=1,\dots,m; r,s=1,\dots,k\big]^{I\times\mathcal{E}^k}$$

dir. (Sonuç 2.5.1.8)

10) $\mathbb{R}[u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ sonlu üreteçlidir. (Teorem 2.5.1.9)

11) $\mathbb{R}[u_1,\dots,u_m,v_1,\dots,v_k]^{O(n)\times\mathcal{E}^k}$ nin üreteçleri sayısı

$$\frac{(2^k+1)\dots\left(2^k+2n(m+k)\right)}{1.2\dots\left(n(m+k)\right)}$$

sayısına eşit veya bu sayıdan küçüktür.(Teorem 2.5.1.10)

12) $\mathbb{R}[\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle,\langle v_1,v_1\rangle]^{I\times\mathcal{E}} = \mathbb{R}[\langle u_1,u_1\rangle,\langle u_1,v_1\rangle^2,\langle v_1,v_1\rangle]$ dır. (Teorem 2.5.2.4)

13)

$$\mathbb{R}\big[\langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle,\langle v_i,v_j\rangle; i,j=1,2\big]^{I\times\mathcal{E}^2} = \mathbb{R}\begin{bmatrix} \langle u_i,u_j\rangle,\langle u_i,v_j\rangle^2; i,j=1,2 \\ \langle v_1,v_2\rangle^2,\langle v_i,v_i\rangle; i=1,2 \\ \langle u_i,v_k\rangle\langle u_j,v_k\rangle; 1\le i,j\le 2, i\ne j, k=1,2 \\ \langle v_1,v_2\rangle\langle u_i,v_1\rangle\langle u_j,v_2\rangle; i,j=1,2 \end{bmatrix}$$

dir. (Teorem 2.5.3.2)

14) $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1;v_1\}$ ve $\{u_1';v_1'\}$ sistemleri verilsin.

$$\{u_1;v_1\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1';v_1'\} \Leftrightarrow \begin{matrix}\langle u_1,u_1\rangle=\langle u_1',u_1'\rangle,\langle u_1,v_1\rangle^2=\langle u_1',v_1'\rangle^2, \\ \langle v_1,v_1\rangle=\langle v_1',v_1'\rangle\end{matrix}$$

dır. (Teorem 2.6.1)

15) $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1; v_1\}$ ve $\{u_1'; v_1'\}$ sistemleri verilsin.

$$\{u_1; v_1\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^1)}{\sim} \{u_1'; v_1'\} \Leftrightarrow \langle v_1, v_1\rangle = \langle v_1', v_1'\rangle$$

dır. (Teorem 2.6.2)

16) $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, u_2; v_1, v_2\}$ ve $\{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ sistemleri

$$\langle v_i, v_i\rangle = 1, \langle u_i, v_i\rangle = 0, \langle v_i', v_i'\rangle = 1, \langle u_i', v_i'\rangle = 0 \ \ (i = 1,2)$$

olacak şekilde verilsin. $\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ ise, bu taktirde

$$(Q)\begin{cases} \langle u_k, u_l\rangle = \langle u_k', u_l'\rangle & (1 \le k \le l \le 2) \\ \langle v_1, v_2\rangle^2 = \langle v_1', v_2'\rangle^2 & \\ \langle u_k, v_i\rangle^2 = \langle u_k', v_i'\rangle^2 & (1 \le i, k \le 2, i \ne k) \\ \langle u_1, v_2\rangle\langle u_2, v_1\rangle\langle v_1, v_2\rangle = \langle u_1', v_2'\rangle\langle u_2', v_1'\rangle\langle v_1', v_2'\rangle & \end{cases}$$

olmasıdır. (Teorem 2.7.1)

17) $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, u_2; v_1, v_2\}$ ve $\{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ sistemleri

$$\langle v_i, v_i\rangle = 1, \langle u_i, v_i\rangle = 0, \langle v_i', v_i'\rangle = 1, \langle u_i', v_i'\rangle = 0 \ \ (i = 1,2)$$

olacak şekilde verilsin. Eğer (Q) eşitlikleri sağlanıyor ise bu taktirde $\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(O(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ dir. (Teorem 2.7.2)

18) $\mathbb{R}^n$'de $\{u_1, u_2; v_1, v_2\}$ ve $\{u_1', u_2'; v_1', v_2'\}$ sistemleri

$$\langle v_i, v_i\rangle = 1, \langle u_i, v_i\rangle = 0, \langle v_i', v_i'\rangle = 1, \langle u_i', v_i'\rangle = 0 \ \ (i = 1,2)$$

olacak şekilde verilsin.

$$\{u_1, u_2; v_1, v_2\} \overset{(Iz(n),\mathcal{E}^2)}{\sim} \{u_1', u_2'; v_1', v_2'\} \Leftrightarrow \begin{matrix} \langle v_1, v_2\rangle^2 = \langle v_1', v_2'\rangle^2 \\ \langle u_1 - u_2, v_i\rangle^2 = \langle u_1' - u_2', v_i'\rangle^2; i = 1,2 \end{matrix}$$

dir. (Teorem 2.7.3)

5. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, klasik geometriden farklı olarak doğru (parametrik olmayan doğru) kavramı geliştirildi. 1 veva 2 tane 4. tip doğru için invaryant polinomlar halkasının üreteçleri bulundu.

$n-$boyutlu Öklid uzayında noktalar ve farklı tipteki doğrulardan oluşan sistemler için $O(n)$ ve $Iz(n)$ gruplarına göre aşağıdaki problemlerin çözülmesi önemlidir.

1) İnvaryant polinomlar halkasının üreteçlerinin bulunması.

2) $G-$ denklik probleminin üreteçler ile çözülmesi.

3) İnvaryantların minimal tam sisteminin bulunması.

6. KAYNAKLAR

1. Akbulut, F., Lineer Cebir, Cilt I, 4.Baskı, Birsen Kitabevi, İstanbul, 1985.

2. Alexandrov, A. D. ve Reshetnyak, Y. G., General Theory of Irregular Curves, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1989.

3. Aripov, R. G. ve Khadzhiev (Khadjiev), D., A Complete System of Global Differential and Integral Invariants of a Curve in Euclidean Geometry.(Russian), Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., (2007), no. 7, 3-16; translation of Russian Math. (Iz. VUZ), 51, 7, (2007), 1–14

4. Bahar (Sağıroğlu), Y., Parametrik Eğrilerin Afin Diferansiyel İnvaryantları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2002.

5. Berger, M., Geometry-I. 2 volumes , Springer – Verlag , Berlin Heidelberg , 1987.

6. Coxeter, H. S. M, Introduction to Geometry (2nd ed.), John Wiley & Sons, New York 1969.

7. Domokos, M. ve Frenkel, P.E., On Orthogonal Invariants in Characteristic 2, Journal of Algebra, 274, 2 (2004) 662-688.

8. Euclid, Elements (tr . T.L.Heath.), 2 of Britannia Great Books, Encyclopedia Britannia, Chicago , 1982.

9. Faber, R. L., Foundations of Euclidean and Non-Euclidean Geometry, Marcel Dekker, New York,1983.

10. Greub, W. H., Linear Algebra, Third Edition, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1967.

11. Guggenheimer, H. W., Differential Geometry, Dover Publications Inc., New York, 1977.

12. Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir, 3. Baskı, Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, Ankara, 1985.

13. Hacısalihoğlu, H. H., Yüksek Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler, İnönü Üniversitesi Temel Bilimler Fakültesi Yayınları No.1, İstanbul, 1980.

14. Hoffman, K. ve Kunze, R., Linear Algebra, Upper Saddle River, N. J., Prentice Hall, 1971.

15. http://en.wikipedia.org/wiki/Line_(geometry), Lines (in Geometry), 28.11.2012.

16. Karataş, M., n-Boyutlu Öklid Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2005.

17. Kaya, G., n-Boyutlu Öklid ve Ortogonal Geometrilerde Noktalar Sistemlerinin Denklik Problemleri, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2008.

18. Khadjiev, D., An Application of the Invariant Theory to the Differential Geometry of Curves, Fan, Tashkent, 1988. (in Russian).

19. Khadjiev, D., Ören, İ. ve Pekşen, Ö., Generating Systems of Differential Invariants and the Theorem on Existence for Curves in the Pseudo-Euclidean Geometry, Turkish J. Math., 37, 1, (2013), 80–94.

20. Khadjiev, D., ve Pekşen, Ö., The Complete System of Global Integral and Differential Invariants for Equi-Affine Curves, Differential Geometry and Its Applications, 29 (2004) 167-175.

21. Klingenberg, W., A Course in Differential Geometry, Springer-Verlag, New York, 1978.

22. Kühnel, W., Differential Geometry Curves, Surfaces, Manifolds, AMS, 2006.

23. Neusel, M. D. Invariant Theory, Student Mathematical Library AMS, 1964.

24. O' Neill, B., Elementary Differential Geometry, Academic Press, New York and London, 1966.

25. Olver, P. J., Classical Invariant Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

26. Ören, İ., Minkowski Uzayzaman Geometrisinde Noktaların İnvaryantları, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2004.

27. Ören, İ., O(3.1) Orthogonal Grubu için Noktaların İnvaryantları, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2007.

28. Pekşen, Ö. ve Khadjiev, D., On Invariants of Curves in Centro-Affine Geometry, J. Math. Kyoto Univ., 44, 3, (2004), 603–613.

29. Pekşen, Ö. ve Khadjiev, D., On Invariants of Null Curves in the Pseudo-Euclidean Geometry, Differential Geometry and Its Applications, 29, (2011), 183–187.

30. Pekşen, Ö., Khadjiev, D., ve Ören, İ., Invariant Parametrizations and Complete Systems of Global Invariants of Curves in the Pseudo-Euclidean Geometry, Turkish J. Math., 36, (2012), no. 1, 147–160.

31. Pottmann, H. ve Wallner, J., Computational Line Geometry, Springer Verlag, Heidelberg, Berlin, 2001.

32. Springer, T.A., Invariant Theory, Springer-Verlag, New York, 1977.

33. Weyl, H., The Classical Groups, Their Invariants and Representations, 2nd ed., Princeton, New Jersey Princeton University Press, 1946.

ÖZGEÇMİŞ

Tufan ÖZDİN, 18.01.1982 tarihinde İstanbul'da doğdu. 1989-1999 yılları arasında ilk ve orta öğrenimini İstanbul ilinde tamamladı. 1999-2003 yılları arasında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünde lisans eğitimini tamamladı. 2004-2006 yılları arasında İYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsünde yabancı dil hazırlık eğitimini aldıktan sonra 2006-2008 yılları arasında GYTE Mühendislik ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2010 yılında KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Geometri Anabilim Dalında doktora eğitimine başladı. 2007 yılından itibaren Erzincan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisidir. Yabancı dili İngilizcedir.