BAĞIMLI BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

A STUDY ON THE DEPENDENT COMPOUND POISSON PROCESSES

GAMZE ÖZEL

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

İSTATİSTİK Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2009

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **İSTATİSTİK ANABİLİM DALI 'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :…......................................
Prof. Dr. Öniz TOKTAMIŞ

Üye :.…......................................
Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU

Üye :…......................................
Prof. Dr. Hülya BAYRAK

Üye :…......................................
Prof. Dr. Reşat KASAP

Üye :…......................................
Doç. Dr. Gül ERGÜN

ONAY

Bu tez ...../...../..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof. Dr. ERDEM YAZGAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Aileme

BAĞIMLI BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

Gamze Özel

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, $\{N_t, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(0)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$, $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçleri olmak üzere, $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i, \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right)$, $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_i \right)$, $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right)$ biçiminde tanımlanan bağımlı iki değişkenli birleşik Poisson süreçlerinde X_i ve Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenlerinin kesikli, aynı dağılımlı, bağımsız olduğu durum için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonlarını elde etmektir. Çalışmada ayrıca $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ bağımsız homojen Poisson süreçleri olmak üzere, $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right)$ biçiminde tanımlanan bağımsız iki değişkenli birleşik Poisson süreci için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun, $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ ve $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonlarının elde edilmesi de amaçlanmıştır.

İkinci Bölüm'de birleşik raslantı değişkenleri, birleşik Poisson süreçleri ve iki değişkenli birleşik raslantı vektörleri, iki değişkenli birleşik Poisson süreçleri tanıtılmış; önceki çalışmalara yer verilmiştir.

Üçüncü Bölüm'de, bağımlı iki değişkenli birleşik Poisson süreçleri için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonlarının; bağımsız iki değişkenli birleşik Poisson süreci için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun, $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ ve $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonlarının nasıl elde edildikleri açıklanmış; olasılıkların Oracle veritabanında hazırlanan programlar yardımıyla elde edildiği sayısal örnekler verilmiştir.

Dördüncü Bölüm'de, çalışmanın sonuçları sunulmuş ve tartışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Poisson Süreçleri, Birleşik Poisson Süreci, Bağımlılık Yapıları, Oracle Veritabanı.

Danışman: Prof. Dr. Ceyhan İnal, Hacettepe Üniversitesi, İstatistik Bölümü, Olasılık Teorisi ve Olasılık Süreçleri Anabilim Dalı

A STUDY ON THE DEPENDENT COMPOUND POISSON PROCESSES

Gamze Özel

ABSTRACT

The aim of this study is to obtain the joint probability functions of the dependent bivariate compound Poisson processes defined by $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i, \sum_{i=1}^{N_t} Y_i\right)$, $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_i\right)$, $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i\right)$ where $\{N_t, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(0)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$, $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ are homogenous Poisson processes and X_i, Y_i, $i = 1, 2, \ldots,$ are discrete, independent, identically distributed random variables. In this study, it is also aimed to obtain the joint probability function of $S_t^{(1)}$ and $S_t^{(2)}$, the probability functions of $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ and $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$ for the independent bivariate compound Poisson process $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i\right)$ where $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ and $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ are homogeneous Poisson processes.

In the Second Chapter, compound random variables, compound Poisson processes, and bivariate compound random vectors, bivariate compound Poisson processes are introduced and related previous studies are given.

In the Third Chapter, the joint probability functions of $S_t^{(1)}$ and $S_t^{(2)}$ for the dependent bivariate compound Poisson processes and the joint probability functions of $S_t^{(1)}$ and $S_t^{(2)}$, the probability functions of $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ and $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$ are derived for the independent bivariate compound Poisson processes and the numerical examples which are obtained with prepared programs in Oracle database are given.

In the Fourth Chapter, the results of this study are presented and discussed.

Keywords: Poisson Processes, Compound Poisson Process, Dependency Structures, Oracle Database.

Advisor: Prof. Dr. Ceyhan İnal, Hacettepe University, Department of Statistics, Probability Theory and Stochastic Processes Division

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasına değerli katkı ve eleştirileri ile çalışmaya yön veren danışmanım Sayın Prof. Dr. Ceyhan İNAL'a,

Çalışmanın gerçekleşmesi için gerekli ortamı hazırlayan ve mesleğimde yetişmemde büyük katkıları olan H.Ü. İstatistik Bölümü Başkanı Sayın Prof. Dr. Süleyman GÜNAY'a,

Tez izleme komitesi üyesi olarak sağladığı değerli katkı ve eleştirileri için Sayın Prof. Dr. Öniz TOKTAMIŞ, Sayın Prof. Dr. Salih ÇELEBİOĞLU ve tezin değerlendirilmesindeki katkılarından dolayı diğer Sayın Jüri üyelerine,

Çalışmamda kullanılan bilgisayar programının yazımında yardımlarını esirgemeyen ve tezimin her aşamasında yanımda olan Sayın Dr. Yüksel Akay ÜNVAN'a,

Bana her konuda yardımcı olan, emeğini ve zamanını esirgemeyen Sayın Doç. Dr. Tülay SARAÇBAŞI, manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim Sayın Doç. Dr. Gül ERGÜN, Sayın Öğr. Gör. Dr. Serpil AKTAŞ ve bugünkü bilgi düzeyine ulaşmamda katkıları büyük olan tüm değerli HOCALARIM'a,

Hiçbir zaman manevi desteklerini esirgemeyen değerli arkadaşlarım Arş. Gör. Nihal ATA, Arş. Gör. Semra TÜRKAN, Arş. Gör. Esra POLAT, Arş. Gör. Derya ÇALIŞKAN, Arş. Gör. Nursel KOYUNCU, Merve ÇİMEN ve diğer tüm çalışma arkadaşlarıma,

Ankara'da beni yalnız bıraksa da, on iki yıldır varlığından güç aldığım değerli dostum Burcu KIYAK'a

Uzakta olmalarına rağmen, her koşulda yanımda olan değerli AİLEM'e

içtenlikle TEŞEKKÜR EDERİM...

İÇİNDEKİLER DİZİNİ **Sayfa**

ŞEKİLLER DİZİNİ **Sayfa**

1. GİRİŞ

Poisson süreçleri, olasılıksal (stochastic) süreçlerde önemli bir yer tutar ve biyoloji, tıp, jeoloji, sismoloji, meteoroloji, endüstri, finans, sigortacılık gibi birçok alanda uygulanır. Poisson süreçleri taşıdıkları özelliklere göre, homojen (homogeneous) Poisson süreci, homojen olmayan Poisson süreci ve birleşik (compound) Poisson süreci adını alır.

Poisson süreçlerinin temeli olan homojen Poisson sürecinde olaylar, bazı aksiyomlar altında, bağımsız olarak ortaya çıkarlar ve birim zamanda ortaya çıkması beklenen olay sayısı zaman içinde değişmez. N_t, $(0, t]$ zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısını göstermek üzere $\{N_t, t \geq 0\}$ Poisson süreci aşağıda verilen aksiyomları sağlar (Haight, 1967):

- Herhangi t uzunluğundaki bir zaman aralığında N_t'deki her değişme bir birim büyüklüğündedir;
- $t, s \geq 0$ için, $N_{t+s} - N_t$, N_t'den bağımsızdır;
- $t, s \geq 0$ için, $N_{t+s} - N_t$'nin dağılımı t'den bağımsızdır, s'ye bağlıdır;
- $N_0 = 0$'dır.

Yukarıda verilen aksiyomları sağlayan homojen bir Poisson sürecinde N_t'nin olasılık fonksiyonu,

$$P(N_t = i) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^i}{i!}, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.1}$$
$$= 0, \qquad \text{ö.d.}$$

yazılabilir. Burada λ, birim zamanda ortaya çıkması beklenen olay sayısıdır. Eşitlik (1.1)'den yararlanarak N_t'nin beklenen değer ve varyansı aşağıdaki gibi bulunur:

$$E(N_t) = \lambda t, \quad V(N_t) = \lambda t.$$

Homojen olmayan Poisson sürecinde λ zamanın sürekli bir fonksiyonudur. N_t, $(0,t]$ zaman aralığında ortaya çıkan olay sayısını göstermek üzere, $\{N_t, t \geq 0\}$ ile gösterilen homojen olmayan Poisson süreci aşağıdaki aksiyomları sağlar:

- $N_0 = 0$'dir;
- Ortalama oran, t'nin diferansiyellenebilir bir fonksiyonudur ve $\lambda(t)$ ile gösterilir;
- $N_{t_2} - N_{t1}$, N_{t_1}'den bağımsızdır.

N_t'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
P(N_t = i) &= e^{-\Lambda_t} \frac{(\Lambda_t)^i}{i!}, & i &= 0,1,2,... \\
&= 0, & &\text{ö.d.}
\end{aligned}
$$

Burada Λ_t,

$$\Lambda_t = \int_0^t \lambda(u)du$$

biçiminde tanımlanır.

Homojen olmayan Poisson süreci için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibidir (Synder and Miller, 1991):

$$E(N_t) = \Lambda_t, \quad V(N_t) = \Lambda_t.$$

Birleşik Poisson sürecine ilişkin ilk çalışma Feller (1957) tarafından yapılmıştır. $\{N_t, t \geq 0\}$, homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci olsun. t zaman doğrusu boyunca ortaya çıkan her olaya X_i, $i = 1,2,...$, ile gösterilen aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri bağlansın ve bu raslantı değişkenleri $\{N_t, t \geq 0\}$ sürecinden de bağımsız olsun. Buna göre,

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

biçiminde tanımlanan $\{S_t, t \geq 0\}$ sürecine birleşik Poisson süreci adı verilir.

$\{S_t, t \geq 0\}$ sürecinin birleşik Poisson süreci olabilmesi için aşağıda verilen aksiyomların sağlanması gerekir:

- $t, s \geq 0$ için, $S_{t+s} - S_t$, S_t'den bağımsızdır;
- $t, s \geq 0$ için, $S_{t+s} - S_t$'nin dağılımı yalnızca s'ye bağlıdır, t'ye bağlı değildir.

Birleşik Poisson sürecinde X_i, $i = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenleri kesikli ise, S_t raslantı değişkeni kesikli; sürekli ise, S_t raslantı değişkeni de süreklidir. S_t kesikli olduğunda olasılık fonksiyonunu, sürekli olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmakta güçlüklerle karşılaşılmaktadır. $\{N_t, t \geq 0\}$, λ parametresi ile homojen Poisson süreci ve X_i, $i = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenlerinin kesikli olduğu durum için S_t'nin olasılık fonksiyonu Özel (2005)'in çalışmasında elde edilmiş; fonksiyonunun uygulanabilirliğini göstermek için Özel ve İnal (2008a)'ın çalışmasında deprem verileri kullanılmıştır. Ayrıca S_t'nin önceden belirlenen bir değeri veya sınırı ilk aşma zamanının birikimli dağılım fonksiyonu Özel ve İnal (2007) tarafından elde edilmiştir.

Bazı durumlarda iki birleşik Poisson sürecinin birlikte incelenmesi gerekebilir. Bu durumlar için, X_i, $i = 1, 2, \ldots$, aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olmak üzere aşağıda verilen iki değişkenli birleşik Poisson süreçleri tanımlanabilir:

Model 1: $$\left(S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \;,\; S_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right), \tag{1.2}$$

Model 2: $$\left(S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} X_i \;,\; S_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_i \right), \tag{1.3}$$

Model 3: $$\left(S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i \;,\; S_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right). \tag{1.4}$$

Bu modellerde $\{S_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{S_t^{(2)}, t \geq 0\}$ süreçleri bağımlıdır. Eşitlik (1.2)'de bağımlılık $\{N_t, t \geq 0\}$ sürecinden; Eşitlik (1.3)'te bağımlılık $\{N_t^{(0)}, t \geq 0\}$ sürecinden kaynaklanmaktadır; $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$ bağımsız homojen ya da homojen olmayan Poisson süreçleridir. Eşitlik (1.4)'te $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ bağımlı homojen ya da homojen olmayan Poisson süreçleridir.

Önceki çalışmalar incelendiğinde, $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun elde edilemediği görülmüştür (Rolski et al., 1998). Aşağıda verilen S_1 ve S_2 raslantı değişkenleri için bileşik olasılık fonksiyonlarına ulaşılması amaçlanmıştır:

Model 1: $$\left(S_1 = \sum_{i=1}^{N} X_i \;,\; S_2 = \sum_{i=1}^{N} Y_i \right), \tag{1.5}$$

Model 2: $$\left(S_1 = \sum_{i=1}^{N_0+N_1} X_i \;,\; S_2 = \sum_{i=1}^{N_0+N_2} Y_i \right), \tag{1.6}$$

Model 3: $$\left(S_1 = \sum_{i=1}^{M_1} X_i \;,\; S_2 = \sum_{i=1}^{M_2} Y_i \right). \tag{1.7}$$

Eşitlik (1.5)'te verilen N raslantı değişkeni Poisson dağılımlı; Eşitlik (1.6)'da verilen N_0, N_1, N_2 raslantı değişkenleri bağımsız ve Poisson dağılımlı; Eşitlik (1.7)'de verilen M_1, M_2 raslantı değişkenleri bağımlı ve Poisson dağılımlıdır.

Eşitlik (1.5)'te verilen S_1 ve S_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu Ambagaspitiya (1999) ve Sundt (1999)'un çalışmalarında; Eşitlik (1.6)'da verilen S_1 ve S_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu Hesselager (1996)'in çalışmasında; Eşitlik (1.7)'de verilen S_1 ve S_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu Wang (1999)'ın çalışmasında Panjer eşitliklerine dayanan yinelemeli eşitlikler ile elde edilmiştir. Ancak bu eşitliklerden yararlanarak Eşitlik (1.2)-Eşitlik (1.4)'teki $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonlarının kapalı biçimlerine ulaşılamadığı görülmüştür. Bu nedenle bu çalışmada, Eşitlik (1.2)-Eşitlik (1.4)'teki $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonlarının Poisson süreçlerinin homojen; X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenlerinin kesikli; X_i, Y_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenlerinin de bağımsız oldukları durum için elde edilmesi amaçlanmıştır. Çalışmada, Özel (2005)'in ve Özel ve İnal (2008a)'nın çalışmasında verilen tek değişkenli birleşik Poisson sürecine ilişkin olasılık fonksiyonu yardımıyla $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu elde edilmiştir. Ayrıca,

Model 4: $\left(S_t^{(1)} = \sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i \text{ , } S_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right)$

biçiminde tanımlanan iki değişkenli birleşik Poisson sürecinde $\{M_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 1, 2$, süreçlerinin bağımsız homojen Poisson süreçleri olduğu durum için, $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun, $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ ve $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonlarının elde edilmesi de amaçlanmıştır.

Çalışmanın İkinci Bölümü'nde, birleşik raslantı değişkenleri, birleşik Poisson süreçleri ve iki değişkenli birleşik raslantı vektörleri, iki değişkenli birleşik Poisson süreçleri tanıtılmış; önceki çalışmalara yer verilmiştir. Üçüncü Bölüm'de, bağımlı iki değişkenli birleşik Poisson süreçleri için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonlarının; bağımsız iki değişkenli birleşik Poisson süreci için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun, $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ ve $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonlarının nasıl elde edildikleri açıklanmıştır. Daha sonra bu çalışmada elde edilen fonksiyonlar için Oracle veritabanında (Versiyon: Oracle FORMS 6i REPORTS 6i) programlar hazırlanmıştır. Bu programlar yardımıyla yapılan sayısal örneklerde olasılıkların daha kolay hesaplanabildiği belirtilmiştir. Dördüncü Bölüm'de, çalışmanın sonuçları sunulmuş ve tartışılmıştır.

2. BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ

2.1. Birleşik Raslantı Değişkenleri ve Birleşik Poisson Süreçleri

Bu kesimde, önce birleşik raslantı değişkenleri, sonra birleşik raslantı değişkenlerinden yararlanarak tanımlanan birleşik Poisson süreçleri açıklanacaktır.

2.1.1. Birleşik raslantı değişkenleri

N, kesikli bir raslantı değişkeni; $X_1,\ldots,X_N$, aynı dağılımlı, bağımsız ve aynı zamanda N'den bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olmak üzere, aşağıda verilen raslantı değişkeni tanımlansın:

$$S = X_1 + \ldots + X_N .$$

S'ye birleşik raslantı değişkeni adı verilir. $X_1, X_2,\ldots$ kesikli raslantı değişkenleri ise, S'nin olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$\begin{aligned} g_S(z) &= E(z^S) \\ &= E\left(z^{\sum_{i=1}^{N} X_i} \right) \\ &= E[E(z^{\sum_{i=1}^{N} X_i})/N = n)] \\ &= E[(g_X(z))^N] \\ &= g_N(g_X(z)) \end{aligned} \qquad (2.1)$$

olur. Burada, $g_S(z)$, S'nin; $g_N(z)$, N'nin; $g_X(z)$ de X_i, $i = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık çıkaran fonksiyonudur (Karlin and Taylor, 1975).

$S = X_1 + \ldots + X_N$ raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} p_S(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n) P(X_1 + \ldots + X_N = s / N = n), && s = 0, 1, 2, \ldots \\ &= 0, && \text{ö.d.} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Eşitlik (2.2)'den $p_S(s) = P(S = s)$, $s = 0, 1, 2, \ldots$, olasılıklarını elde etmek oldukça güçtür. Bu nedenle Panjer (1981) tarafından $p_S(s)$'ye ulaşmak için yinelemeli bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritmanın kullanılabilmesi için, a ve b değişmezler olmak üzere, $p_N(n)$'nin aşağıda verilen koşulu sağlaması gerekmektedir:

$$p_N(n) = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_N(n-1), \quad n > 1. \tag{2.3}$$

Eşitlik (2.3)'te verilen ilişkiyi sağlayan dağılımlara Panjer sınıfı dağılımlar adı verilir. Sundt ve Jewell (1981) tarafından Poisson, ikiterimli (binom) ve eksi ikiterimli dağılımlarının Panjer sınıfı dağılımlar oldukları gösterilmiştir. Burada, $a = 0$ ve $b = \lambda$ için, λ parametreli Poisson dağılımına; $a = (1-p)$ ve $b = (r-1)(1-p)$ için, p ve r parametreli eksi ikiterimli dağılıma; $a = -\dfrac{p}{1-p}$ ve $b = (n+1)\dfrac{p}{1-p}$ için, n ve p parametreli ikiterimli dağılıma ulaşılmaktadır (Panjer, 1981).

$p_N(n)$, Panjer sınıfı bir dağılım ve $X_1, \ldots, X_N$, aynı dağılımlı, bağımsız, kesikli raslantı değişkenleri ise, S raslantı değişkeninin olasılık fonksiyonu Eşitlik (2.1)'e göre aşağıda verilen eşitlikleri sağlar (Panjer, 1981):

$$\begin{aligned} p_S(0) &= g_S(0) = g_N(g_X(0)) = g_N(P(X = 0)), \\ p_S(s) &= \frac{1}{1 - a[P(X = 0)]} \sum_{x=1}^{s} \left(a + b\frac{x}{s}\right) p_X(x) p_S(s-x), \quad x = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.1.2. Birleşik Poisson dağılımı

N raslantı değişkeni λ parametresi ile Poisson dağılımlı olsun. Ortaya çıkan her olaya $X_1, X_2, \ldots$ ile gösterilen aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri bağlansın ve bu raslantı değişkenleri N raslantı değişkeninden de bağımsız olsunlar. Buna göre,

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{2.5}$$

biçiminde tanımlanan raslantı değişkeni birleşik Poisson dağılımlıdır. $X_1, X_2, ...$ raslantı değişkenleri kesikli ise, S'nin olasılık fonksiyonu Eşitlik (2.2)'ye göre,

$$\begin{aligned} p_S(s) &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} P(X_1 + ... + X_N = s / N = n), \quad && s = 0, 1, 2, ... \\ &= 0, && \text{ö.d.} \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Buradan olasılıklara ulaşmak oldukça güç olduğundan Panjer (1981) tarafından önerilen Eşitlik (2.4)'teki yinelemeli eşitlikler, birleşik Poisson dağılımı için $a = 0$ ve $b = \lambda$ alınarak aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\begin{aligned} p_S(0) &= e^{-\lambda[1-P(X=0)]}, \\ p_S(s) &= \lambda \sum_{x=1}^{s} \frac{x}{s} p_X(x) p_S(s-x), \quad x = 1, 2, ... \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ancak Eşitlik (2.6) da özellikle s'nin büyük değerleri için uzun hesaplamalar gerektirmektedir. $p_S(s)$'nin yinelemeli eşitliklere dayanmayan kapalı biçimi, Özel ve İnal (2008b)'ın çalışmasında, X_i, $i = 1, 2, ...$, kesikli raslantı değişkenlerinin sonlu $j = 0, 1, ..., m$ değerlerini $P(X_i = j) = p_j$, $j = 0, 1, ..., m$, olasılıkları ile aldıkları düşünülmüş, $\lambda_j = \lambda p_j$, $j = 0, 1, ..., m,$ alınarak S'nin olasılık fonksiyonu $m = 2$ için,

$$\begin{aligned} p_S(s) &= e^{-\lambda(1-p_0)}, && s = 0 \\ &= e^{-\lambda(1-p_0)} \sum_{i=0}^{[s/2]} \frac{\lambda_1^{(s-2i)} \lambda_2^i}{(s-2i)!\, i!}, && s = 1, 2, ... \\ &= 0, && \text{ö.d.} \end{aligned} \tag{2.7}$$

biçiminde ve bazı düzenlemelerden sonra $m > 2$ için, S'nin $0, 1, 2, ...$ değerlerini alması olasılıkları,

$$
\begin{aligned}
&P(S=0)=e^{-\lambda(1-p_0)},\\
&P(S=1)=e^{-\lambda(1-p_0)}\frac{\lambda_1}{1!},\\
&P(S=2)=e^{-\lambda(1-p_0)}\left[\frac{\lambda_1^2}{2!}+\frac{\lambda_2}{1!}\right],\\
&P(S=3)=e^{-\lambda(1-p_0)}\left[\frac{\lambda_1^3}{3!}+\frac{\lambda_1\lambda_2}{1!\,1!}+\frac{\lambda_3}{1!}\right],\\
&P(S=4)=e^{-\lambda(1-p_0)}\left[\frac{\lambda_1^4}{4!}+\frac{\lambda_1^2\lambda_2}{2!\,1!}+\frac{\lambda_1\lambda_3}{1!\,1!}+\frac{\lambda_2^2}{2!}+\frac{\lambda_4}{1!}\right],\\
&\quad\vdots
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

biçiminde bulunmuştur. Ayrıca Eşitlik (2.8)'deki eşitliklerin $m\to\infty$ için de geçerli oldukları gösterilmiştir. $X_1, X_2, \ldots$ raslantı değişkenlerinin geometrik dağılımlı olduğu durum için, Eşitlik (2.8)'deki $P(S=s)$, $s=0,1,2,\ldots$, olasılık fonksiyonu ve bu fonksiyonun 1997-2004 yılları arasında Hollanda'nın Groningen şehrinde meydana gelen trafik kazalarına dayalı uygulaması Özel ve İnal (2009)'un çalışmasında verilmiştir.

2.1.3. Birleşik Poisson süreçleri

$\{N_t, t\ge 0\}$, homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci olsun. t zaman doğrusu boyunca ortaya çıkan her olaya $X_1, X_2, \ldots$ ile gösterilen aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri bağlansın ve bu raslantı değişkenleri $\{N_t, t\ge 0\}$ sürecinden de bağımsız olsunlar. Buna göre,

$$
S_t=\sum_{i=1}^{N_t} X_i \tag{2.9}
$$

biçiminde tanımlanan $\{S_t, t\ge 0\}$ sürecine birleşik Poisson süreci adı verilir. $\{N_t, t\ge 0\}$ sürecinin homojen olmayan Poisson süreci olması durumunda $\{S_t, t\ge 0\}$ sürecine birleşik Cox süreci (compound Cox process) ya da birleşik yenileme süreci (compound renewal process) adı verilir.

X_i, $i = 1, 2, ...$, kesikli raslantı değişkenleri ve $\{N_t, t \geq 0\}$, λ parametreli homojen Poisson süreci ise, S_t'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{S_t}(s) = \begin{cases} e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(\lambda t)^n}{n!} P(X_1 + X_2 + ... + X_n = s / N_t = n), & s = 0, 1, 2, ... \\ = 0, & \text{ö.d.} \end{cases} \tag{2.10}$$

Eşitlik (2.10)'dan olasılıklara ulaşmak oldukça güç olduğundan $p_{S_t}(s)$'nin kapalı biçimi Özel (2005)'in çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, Eşitlik (2.9)'da X_i, $i = 1, 2, ...$, kesikli raslantı değişkenlerinin sonlu $j = 0, 1, ..., m$ değerlerini $P(X_i = j) = p_j$, $j = 0, 1, ..., m$, olasılıkları ile aldıkları düşünülmüş, $\lambda_j = \lambda p_j$, $j = 0, 1, ..., m$, alınarak S_t'nin olasılık fonksiyonu $m = 2$ için,

$$\begin{aligned} p_{S_t}(s) &= e^{-\lambda t(1-p_0)}, & s &= 0 \\ &= e^{-\lambda t(1-p_0)} \sum_{i=0}^{[s/2]} \frac{(\lambda_1 t)^{s-2i} (\lambda_2 t)^i}{(s-2i)!\, i!}, & s &= 1, 2, \ ... \\ &= 0, & &\text{ö.d.} \end{aligned} \tag{2.11}$$

biçiminde elde edilmiş ve $m > 2$ için S_t'nin $0, 1, 2, ...$ değerlerini alması olasılıkları, bazı düzenlemelerden sonra,

$$\begin{aligned} P(S_t = 0) &= e^{-\lambda t(1-p_0)}, \\ P(S_t = 1) &= e^{-\lambda t(1-p_0)} \frac{(\lambda_1 t)^1}{1!}, \\ P(S_t = 2) &= e^{-\lambda t(1-p_0)} \left[\frac{(\lambda_1 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_2 t)^1}{1!} \right], \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$P(S_t = 3) = e^{-\lambda t(1-p_0)}\left[\frac{(\lambda_1 t)^3}{3!} + \frac{(\lambda_1 t)^1(\lambda_2 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_3 t)^1}{1!}\right],$$

$$P(S_t = 4) = e^{-\lambda t(1-p_0)}\left[\frac{(\lambda_1 t)^4}{4!} + \frac{(\lambda_1 t)^2(\lambda_2 t)^1}{2!\,1!} + \frac{(\lambda_1 t)^1(\lambda_3 t)^1}{1!\,1!} + \frac{(\lambda_2 t)^2}{2!} + \frac{(\lambda_4 t)^1}{1!}\right],$$

$$\vdots$$

biçiminde bulunmuştur. Eşitlik (2.12)'de $s = 1, 2, ...$ için elde edilen $P(S_t = 1)$, $P(S_t = 2)$, … olasılıkları incelendiğinde sağ yandaki terimlerin s'nin $1, 2, ..., m$ tamsayıları cinsinden kaç farklı biçimde parçalanabileceğine bağlı olduğu görülür. Örneğin 1, (1) biçiminde; 2, $(1, 1)$, (2) biçiminde; 3, $(1, 1, 1)$, $(1, 2)$, (3) biçiminde; 4, $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 3)$, $(2, 2)$, (4) biçiminde; ... parçalanabilir. Sağ yandaki terimlerin paydalarındaki faktöriyeller de bu parçalanmayla uyumludur. Bu sonuca göre, sonlu $0, 1, 2, ..., m$ değerlerini alan X_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık dağılımlarının fonksiyonel biçimi ne olursa olsun $p_0 = P(X_i = 0)$, $p_1 = P(X_i = 1)$,..., $p_m = P(X_i = m)$ olasılıkları biliniyorsa, $P(S_t = s), s = 0, 1, 2, ...$, olasılıkları hesaplanabilir. Örneğin X_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenleri m ve p parametreleri ile ikiterimli dağılıma sahip olduklarında, Eşitlik (2.10)'a göre,

$$P(S_t = 1) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{nm}{1}p^1(1-p)^{nm-1}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

iken yukarıda elde edilen sonuçlara göre, bu olasılık,

$$P(S_t = 1) = e^{-\lambda t(1-p_0)}\frac{(\lambda_1 t)^1}{1!}$$

biçimindedir. Çalışmada ayrıca Eşitlik (2.12)'de elde edilen fonksiyonun $m \to \infty$ için de kullanılabileceği gösterilmiştir. Özel ve İnal (2008a)'ın çalışmasında, 1903-2005 zaman aralığında Türkiye'de oluşan ve 5.0 ve üzerinde büyüklüğe sahip 94 depremin 4.0 üzerinde büyüklüğe sahip olan toplam artçı şok sayılarına ait olasılıklar Eşitlik (2.12)'den Oracle veritabanında hazırlanmış program yardımıyla elde edilmiştir.

2.2. İki Değişkenli Birleşik Raslantı Vektörleri ve Birleşik Poisson Süreçleri

Bu kesimde, önce iki değişkenli birleşik raslantı vektörleri, sonra iki değişkenli birleşik Poisson süreçleri açıklanacaktır.

2.2.1. Bağımlı iki değişkenli birleşik raslantı vektörleri

Bazı durumlarda iki birleşik raslantı değişkeninin birlikte incelenmesi gerekebilir; başka bir deyişle iki değişkenli birleşik raslantı vektörüne gerek duyulabilir:

$$(S_1, S_2) = \left(\sum_{i=1}^{N_1} X_i, \sum_{i=1}^{N_2} Y_i \right).$$

S_1 ve S_2'nin bileşik olasılık fonksiyonu $p_{S_1,S_2}(s_1,s_2)$ ile gösterilir. S_1 ve S_2'nin bağımlı oldukları durum için, üç model (Model 1, Model 2, Model 3); bağımsız oldukları durum için, bir model (Model 4) tanımlanabilir.

Model 1

X_i, $i = 1, 2, ...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olsun. N kesikli raslantı değişkeni, X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinden bağımsız olmak üzere iki değişkenli birleşik raslantı vektörü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(S_1, S_2) = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i, \sum_{i=1}^{N} Y_i \right). \tag{2.13}$$

Homer (2006) tarafından iki değişkenli büyüklük (severity) modeli olarak adlandırılan bu modelde bağımlılık yapısı N'den kaynaklanmaktadır. Eşitlik (2.13)'teki birleşik raslantı vektöründe, X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenleri kesikli ise, bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu $g_{S_1,S_2}(z_1, z_2)$ aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$g_{S_1,S_2}(z_1, z_2) = E(z_1^{S_1} z_2^{S_2})$$

$$= E(z_1^{(X_1+X_2+...+X_N)} z_2^{(Y_1+Y_2+...+Y_N)})$$

$$= E(E_N(g_{X,Y}(z_1, z_2)^n / N = n))$$

$$= g_N(g_{X,Y}(z_1, z_2)) . \tag{2.14}$$

Burada $g_{X,Y}(z_1, z_2)$, X_i, $i = 1, 2,..., N$ ve Y_i, $i = 1, 2,..., N$'nin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonudur.

N raslantı değişkeni Panjer sınıfı bir dağılım, X_i, $i = 1, 2,..., N$ ve Y_i, $i = 1, 2,..., N$'nin bileşik olasılık fonksiyonu $p_{X,Y}(x, y)$ olsun. Buna göre, a ve b herhangi değişmezler olmak üzere, Ambagaspitiya (1999) tarafından aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı gösterilmiştir:

$$p_{S_1,S_2}(0,0) = g_N(p_{X,Y}(0,0)),$$

$$p_{S_1,S_2}(s_1, s_2) = \frac{1}{1 - ap_{X,Y}(0,0)} \sum_{x=1}^{s_1} \sum_{y=1}^{s_2} [a + b \frac{x}{s_1}] p_{X,Y}(x, y) p_{S_1,S_2}(s_1 - x, s_2 - y), \quad s_1 = 1, 2,...$$

(2.15)

$$p_{S_1,S_2}(s_1, s_2) = \frac{1}{1 - ap_{X,Y}(0,0)} \sum_{x=1}^{s_1} \sum_{y=1}^{s_2} [a + b \frac{y}{s_2}] p_{X,Y}(x, y) p_{S_1,S_2}(s_1 - x, s_2 - y), \quad s_2 = 1, 2,...$$

Bu eşitliklere seçenek olarak Sundt (1999) tarafından $s_1, s_2 = 1, 2,...$ için aşağıda verilen eşitlik önerilmiştir:

$$p_{S_1,S_2}(s_1, s_2) = \frac{1}{1 - ap_{X,Y}(0,0)} \sum_{x=1}^{s_1} \sum_{y=1}^{s_2} [a + b \frac{x + y}{s_1 + s_2}] p_{X,Y}(x, y) p_{S_1,S_2}(s_1 - x, s_2 - y) . \tag{2.16}$$

Model 2

X_i, $i = 1, 2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenleri (kesikli ya da sürekli) ve Y_i, $i = 1, 2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız raslantı değişkenleri (kesikli ya da sürekli) olsun. N_0, N_1, N_2 kesikli ve bağımsız raslantı değişkenleri, X_i, $i = 1, 2,...$ ve Y_i,

$i=1,2,...,$ raslantı değişkenlerinden bağımsız ve $M_1 = N_0 + N_1$ ve $M_2 = N_0 + N_2$ olmak üzere iki değişkenli birleşik raslantı vektörü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(S_1, S_2) = \left(\sum_{i=1}^{M_1} X_i, \sum_{i=1}^{M_2} Y_i \right). \tag{2.17}$$

Bu modelde bağımlılık N_0'dan kaynaklanmaktadır. N_0, N_1, N_2 bağımsız raslantı değişkenleri sırasıyla $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ parametreleri ile Poisson dağılımlı ise, M_1 ve M_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$p_{M_1,M_2}(m_1, m_2) = e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{k=0}^{\min(m_1,m_2)} \frac{(\lambda_0)^k}{k!} \frac{(\lambda_1)^{m_1-k}}{(m_1-k)!} \frac{(\lambda_2)^{m_2-k}}{(m_2-k)!}, \quad m_1, m_2 = 0,1,2,... \tag{2.18}$$

biçimindedir (Kocherlakota ve Kocherlakota, 1992). Eşitlik (2.18)'deki fonksiyona ilişkin bileşik olasılık çıkaran fonksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned} g_{M_1,M_2}(z_1, z_2) &= E(z_1^{M_1} z_2^{M_2}) \\ &= E(z_1^{N_0+N_1} z_2^{N_0+N_2}) \\ &= E((z_1 z_2)^{N_0}) E(z_1^{N_1}) E(z_2^{N_2}) \\ &= \exp[\lambda_0(z_1 z_2 - 1) + \lambda_1(z_1 - 1) + \lambda_2(z_2 - 1)]. \end{aligned}$$

Buna göre, X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...,$ raslantı değişkenleri kesikli ise, Eşitlik (2.17)'deki raslantı vektörünün bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$g_{S_1,S_2}(z_1, z_2) = g_{M_1,M_2}(g_X(z_1), g_Y(z_2)) \tag{2.19}$$

biçimindedir. Buradan bileşik olasılık fonksiyonuna ulaşılamamıştır (Homer, 2006); ancak Hesselager (1996) tarafından aşağıdaki eşitliklerin sağlandığı gösterilmiştir:

$$p_{S_1,S_2}(s_1, s_2) = \frac{\lambda_1}{s_1} \sum_{x=1}^{s_1} x p_X(x) p_{S_1,S_2}(s_1 - x, s_2) + \frac{\lambda_0}{s_1} \sum_{x=1}^{s_1} \sum_{y=0}^{s_2} x p_X(x) p_Y(y) p_{S_1,S_2}(s_1 - x, s_2 - y), \quad s_1 \geq 1$$

$$p_{S_1,S_2}(s_1,s_2)=\frac{\lambda_2}{s_1}\sum_{x=1}^{s_1} y p_Y(y) p_{S_1,S_2}(s_1,s_2-y)+\frac{\lambda_0}{s_2}\sum_{x=0}^{s_1}\sum_{y=1}^{s_2} y p_X(x) p_Y(y) p_{S_1,S_2}(s_1-x,s_2-y), \qquad s_2\geq 1. \tag{2.20}$$

Burada $p_X(x)$ ve $p_Y(y)$ sırasıyla X_i, $i=1,2,...,M_1$ ve Y_i, $i=1,2,...,M_2$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonlarıdır.

Model 3

X_i, $i=1,2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i=1,2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olsun. M_1 ve M_2 bağımlı raslantı değişkenleri X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...,$ raslantı değişkenlerinden bağımsız olmak üzere, iki değişkenli birleşik raslantı vektörü,

$$(S_1,S_2)=\left(\sum_{i=1}^{M_1} X_i, \sum_{i=1}^{M_2} Y_i\right) \tag{2.21}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu model, Homer (2006) tarafından iki değişkenli sayma modeli olarak adlandırılmıştır.

Eşitlik (2.21)'de X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...,$ raslantı değişkenleri kesikli olduğu durum için, bileşik olasılık çıkaran fonksiyon Wang (1999) tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$g_{S_1,S_2}(z_1,z_2)=g_{M_1,M_2}(g_X(z_1),g_Y(z_2)). \tag{2.22}$$

Burada $g_{M_1,M_2}(z_1,z_2)$, M_1 ve M_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu; $g_X(z_1)$, X_i, $i=1,2,...,M_1$, raslantı değişkenlerinin ve $g_Y(z_2)$, Y_i, $i=1,2,...,M_2$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık çıkaran fonksiyonlarıdır.

Eşitlik (2.22)'den yararlanarak kesin olasılıklara ulaşılamamıştır. Ancak Eşitlik (2.21)'de verilen model için,

$$p_{S_1,S_2}(s_1,s_2)=\sum_{m_1=0}^{\infty}\sum_{m_2=0}^{\infty}p_{M_1,M_2}(m_1,m_2)p_X(X_1+...+X_{M_1}=s_1/M_1=m_1)p_Y(Y_1+...+Y_{M_2}=s_2/M_2=m_2). \qquad (2.23)$$

yazılabilir. Burada $p_X(x)$ ve $p_Y(y)$ sırasıyla X_i, $i=1,2,...,M_1$ ve Y_i, $i=1,2,...,M_2$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık fonksiyonlarıdır. Eşitlik (2.23)'teki M_1 ve M_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu $p_{M_1,M_2}(m_1,m_2)$, Hesselager (1996) tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\begin{aligned}p_{M_1,M_2}(m_1,m_2)=&\left(a_0+\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_{12}}{m_1m_2}\right)p_{M_1,M_2}(m_1-1,m_2-1)\\&+\left(b_0+\frac{b_1}{m_1}\right)p_{M_1,M_2}(m_1-1,m_2)+\left(c_0+\frac{c_2}{m_2}\right)p_{M_1,M_2}(m_1,m_2-1),\end{aligned}$$

$$p_{M_1,M_2}(m_1,0)=\left(d_0+\frac{d_1}{m_1}\right)p_{M_1,M_2}(m_1-1,0),\qquad m_1=1,2,... \qquad (2.24)$$

$$p_{M_1,M_2}(0,m_2)=\left(e_0+\frac{e_2}{m_2}\right)p_{M_1,M_2}(0,m_2-1),\qquad m_2=1,2,...$$

Burada $a_0,a_1,a_2,a_{12},b_0,b_1,c_0,c_2,d_0,d_1,e_0,e_2$, değişmezlerdir.

Eşitlik (2.23) ve Eşitlik (2.24)'ten kesin olasılıklara ulaşmak güç olduğundan Vernic (2001) tarafından $a_0,a_1,a_2,a_{12},b_0,b_1,c_0,c_2$ değişmezler olmak üzere, aşağıdaki eşitliğin sağlandığı gösterilmiştir:

$$p_{S_1,S_2}(s_1,s_2)=\sum_{x=1}^{s_1}\sum_{y=1}^{s_2}\left(a_0+a_1\frac{x}{s_1}+a_2\frac{y}{s_2}+a_{12}\frac{xy}{s_1s_2}\right)p_X(x)p_Y(y)p_{S_1,S_2}(s_1-x,s_2-y)$$
$$+\sum_{x=1}^{s_1}\left(b_0+b_1\frac{y}{x}\right)p_X(x)p_{S_1,S_2}(s_1-x,s_2)$$
$$+\sum_{y=1}^{s_2}\left(c_0+c_2\frac{y}{x}\right)p_Y(y)p_{S_1,S_2}(s_1,s_2-y).$$

(2.25)

Model 1 için, Eşitlik (2.15) ve Eşitlik (2.16)'da; Model 2 için, Eşitlik (2.20)'de ve Model 3 için, Eşitlik (2.25)'te verilen $p_{S_1,S_2}(s_1,s_2)$ fonksiyonlarından $P(S_1=s_1,S_2=s_2)$, $s_1=s_2=0,1,2,...$, olasılıklarına ulaşmak oldukça güçtür.

Model 4

X_i, $i=1,2,...$, aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i=1,2,...$, aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olsun. μ_1 parametresi ile Poisson dağılımlı M_1 ve μ_2 parametresi ile Poisson dağılımlı M_2 bağımsız raslantı değişkenleri X_i,Y_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenlerinden de bağımsız olmak üzere iki değişkenli birleşik raslantı vektörü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(S_1,S_2)=\left(\sum_{i=1}^{M_1}X_i,\sum_{i=1}^{M_2}Y_i\right). \tag{2.26}$$

Eşitlik (2.26)'da X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenleri kesikli ise, S_1 ve S_2 raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}p_{S_1,S_2}(s_1,s_2)&=P(S_1=s_1,S_2=s_2)\\&=p_{S_1}(s_1)p_{S_2}(s_2).\end{aligned}$$

Burada $p_{S_1}(s_1)$ ve $p_{S_2}(s_2)$ sırasıyla S_1 ve S_2 raslantı değişkenlerinin olasılık fonksiyonlarıdır.

2.2.2. İki değişkenli birleşik Poisson süreçleri

Bazı durumlarda, $\{S_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{S_t^{(2)}, t \geq 0\}$ birleşik Poisson süreçlerinin birlikte incelenmesi gerebilir. Başka bir deyişle iki değişkenli birleşik Poisson süreci adı verilen,

$$(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i, \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right)$$

sürecine gerek duyulabilir. $\{S_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{S_t^{(2)}, t \geq 0\}$ süreçlerinin bağımlı oldukları durumlar için Model 1, Model 2, Model 3 ve bağımsız oldukları durum için bir model Model 4 tanımlanabilir.

Model 1

X_i, $i = 1, 2, ...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olsun. $\{N_t, t \geq 0\}$ homojen ya da homojen olmayan Poisson süreci, X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinden bağımsız olmak üzere iki değişkenli birleşik Poisson süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i, \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right). \tag{2.27}$$

Örnek (2-1): N_t, t zamanına dek ortaya çıkan deprem sayısı, X_i, $i = 1, 2, ...,$ i. depremden önce ortaya çıkan öncü deprem sayısı, Y_i, $i = 1, 2, ...,$ i. depremden sonra ortaya çıkan artçı deprem sayısı olmak üzere, Eşitlik (2.27)'de tanımlanan bağımlı iki değişkenli birleşik Poisson süreci, t zamanına dek ortaya çıkan toplam öncü ve toplam artçı deprem sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Model 2

X_i, $i = 1, 2, ...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olsun. $\{N_t^{(0)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen ya da homojen olmayan bağımsız Poisson süreçleri, X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenlerinden de bağımsız ve $M_1 = N_0 + N_1$ ve $M_2 = N_0 + N_2$ olmak üzere iki değişkenli birleşik Poisson süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_i \right). \tag{2.28}$$

Örnek (2-2): $N_t^{(0)}$, t zamanına dek II. derece deprem bölgesinde ortaya çıkan deprem sayısı, $N_t^{(1)}$, t zamanına dek I. derece deprem bölgesinde ortaya çıkan deprem sayısı, $N_t^{(2)}$, t zamanına dek III. derece deprem bölgesinde ortaya çıkan deprem sayısı olsun. X_i, $i = 1, 2, ...$, II. ve III. derece deprem bölgelerindeki hasarlı bina sayısı, Y_i, $i = 1, 2, ...$, I. ve II. derece deprem bölgelerinde ölen kişi sayısı olmak üzere, Eşitlik (2.28)'deki iki değişkenli birleşik Poisson süreci, t zamanına dek ortaya çıkan toplam hasarlı bina ve ölen kişi sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Model 3

X_i, $i = 1, 2, ...$, aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1, 2, ...$, aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olsun. $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen ya da homojen olmayan bağımlı Poisson süreçleri, X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenlerinden bağımsız olmak üzere, iki değişkenli birleşik Poisson süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right). \tag{2.29}$$

Örnek (2-3): Bir mağazanın I. katında giyecek satışı, II. katında ev eşyaları satışı yapılmaktadır. $M_t^{(1)}$, t zamanına dek I. kata gelen kişi sayısı; $M_t^{(2)}$, t zamanına dek II. kata gelen kişi sayısı ve X_i, $i = 1, 2, ...$, I. kata gelen i. kişinin satın aldığı ürün sayısı;

Y_i, $i = 1,2,...,$ II. kata gelen i. kişinin satın aldığı ürün sayısı olsun. Eşitlik (2.29)'daki iki değişkenli birleşik Poisson süreci, I. ve II. katta satın alınan ürün sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Bundan önceki çalışmalarda Model 1, Model 2, Model 3'teki $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık (ya da olasılık yoğunluk) fonksiyonunun kapalı biçimine ulaşılamamıştır. Üçüncü Bölüm'de bu üç model için, Poisson süreçlerinin homojen; X_i, $i = 1,2,...$ ve Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin kesikli olduğu durumda bileşik olasılık fonksiyonlarının nasıl elde edildikleri açıklanacaktır.

Model 4

X_i, $i = 1,2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1,2,...,$ aynı dağılımlı, bağımsız (kesikli ya da sürekli) raslantı değişkenleri olsun. $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ bağımsız homojen ya da homojen olmayan Poisson süreçleri X_i, Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinden de bağımsız olmak üzere bağımsız iki değişkenli birleşik Poisson süreci aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right). \tag{2.30}$$

Örnek (2-4): $M_t^{(1)}$, t zamanına dek oluşan şehir içi trafik kazası sayısı, X_i, $i = 1,2,...,$ i. şehir içi trafik kazasında ölen kişi sayısı; $M_t^{(2)}$, t zamanına dek oluşan şehir dışı trafik kazası sayısı, Y_i, $i = 1,2,...,$ i. şehir dışı trafik kazasında ölen kişi sayısı olmak üzere, Eşitlik (2.30)'da verilen iki değişkenli birleşik Poisson süreci, t zamanına dek oluşan şehir içi ve dışı trafik kazalarındaki toplam ölen kişi sayılarının birlikte incelenmesi için kullanılabilir.

Eşitlik (2.30)'da X_i, $i = 1,2,...$ ve Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenleri kesikli ise, $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(s_1,s_2) = P(S_t^{(1)} = s_1, S_t^{(2)} = s_2)$$
$$= p_{S_t^{(1)}}(s_1)p_{S_t^{(2)}}(s_2). \qquad (2.31)$$

Burada $p_{S_t^{(1)}}(s_1)$ ve $p_{S_t^{(2)}}(s_2)$ sırasıyla $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin olasılık fonksiyonlarıdır.

$p_{S_t^{(1)}}(s_1)$ ve $p_{S_t^{(2)}}(s_2)$ bilinmediğinde Eşitlik (2.31)'den $p_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(s_1,s_2)$ bileşik olasılık fonksiyonuna ulaşılamaz. Üçüncü Bölüm'de, Poisson süreçlerinin homojen oldukları durum için bu fonksiyonun nasıl elde edildiği açıklanacaktır.

Eşitlik (2.30)'da verilen bağımsız iki birleşik Poisson sürecinin toplamı,

$$Z_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i + \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \qquad (2.32)$$

biçiminde tanımlanabilir.

Örnek (2-5): $M_t^{(1)}$, t zamanına dek oluşan şehir içi trafik kazası sayısı, X_i, $i = 1, 2, ...,$ i. şehir içi trafik kazasında ölen kişi sayısı; $M_t^{(2)}$, t zamanına dek oluşan şehir dışı trafik kazası sayısı, Y_i, $i = 1, 2, ...,$ i. şehir dışı trafik kazasında ölen kişi sayısı olmak üzere, Eşitlik (2.32)'de verilen iki değişkenli birleşik Poisson sürecinin toplamını gösteren Z_t raslantı değişkeni şehir içi ve dışı trafik kazalarında ölen kişi sayılarının toplamına ait dağılımın incelenmesi için kullanılabilir.

Eşitlik (2.30)'da verilen bağımsız iki birleşik Poisson sürecinin farkı,

$$D_t = S_t^{(1)} - S_t^{(2)} = \sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i - \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \qquad (2.33)$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek (2-6): $M_t^{(1)}$, A takımının t zamanına dek oynadığı maç sayısı; $M_t^{(2)}$, B takımının t zamanına dek oynadığı maç sayısı, X_i, $i=1,2,...$, A takımının i. maçta attığı gol sayısı, Y_i, $i=1,2,...$, B takımının i. maçta attığı gol sayısı olmak üzere, D_t raslantı değişkeni iki takımın t zamanına dek attıkları toplam gol sayıları arasındaki farkın dağılımının incelenmesi için kullanılabilir.

Üçüncü Bölüm'de Eşitlik (2.32) ve Eşitik (2.33)'te Poisson süreçlerinin homojen; X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenlerinin kesikli olduğu durum için, Z_t'nin ve D_t'nin olasılık fonksiyonlarının nasıl elde edildikleri açıklanacaktır.

3. İKİ DEĞİŞKENLİ BİRLEŞİK POISSON SÜREÇLERİ

Bu bölümde, Eşitlik (2.27), (2.28) ve (2.29)'da verilen iki değişkenli birleşik Poisson süreçlerinde Poisson süreçlerinin homojen; X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenlerinin kesikli oldukları durum için bileşik olasılık fonksiyonlarının ve Eşitlik (2.30)'da verilen iki değişkenli birleşik Poisson sürecinde gene Poisson süreçlerinin homojen; X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenlerinin kesikli oldukları durum için bileşik olasılık fonksiyonunun ve $S_t^{(1)}+S_t^{(2)}$'nin, $S_t^{(1)}-S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonlarının nasıl elde edildikleri açıklanacaktır.

3.1. Model 1 için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin Bileşik Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (2.27)'de $\{N_t, t\geq 0\}$, λ parametreli homojen Poisson süreci; X_i, $i=1,2,...,N_t$, aynı dağılımlı, bağımsız kesikli raslantı değişkenleri ve Y_i, $i=1,2,...,N_t$, de aynı dağılımlı, bağımsız kesikli raslantı değişkenleri olsun. $P(X_i=k)=p_k$, $k=0,1,2,...,m$ ve $P(Y_i=j)=q_j$, $j=0,1,2,...,r$, alınırsa,

$$p_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(s_1,s_2)=P(S_t^{(1)}=s_1,S_t^{(2)}=s_2)$$

$$=P\left(\sum_{i=1}^{N_t}X_i=s_1,\sum_{i=1}^{N_t}Y_i=s_2\right)$$

$$=\sum_n P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=s_1,\sum_{i=1}^{n}Y_i=s_2\right)P(N_t=n)$$

$$\begin{aligned}&=P(N_t=0)+P(N_t=1)P(X_1=s_1,Y_1=s_2)\\&\quad+P(N_t=2)P(X_1+X_2=s_1,Y_1+Y_2=s_2)\\&\quad+P(N_t=3)P(X_1+X_2+X_3=s_1,Y_1+Y_2+Y_3=s_2)+...\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=P(N_t=0)+P(N_t=1)P(X_1=s_1)P(Y_1=s_2)\\&\quad+P(N_t=2)P(X_1+X_2=s_1)P(Y_1+Y_2=s_2)\\&\quad+P(N_t=3)P(X_1+X_2+X_3=s_1)P(Y_1+Y_2+Y_3=s_2)+...\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1,z_2)=\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}P\left(\sum_{i=1}^{N_t}X_i=s_1,\sum_{i=1}^{N_t}Y_i=s_2\right)z_1^{s_1}z_2^{s_2}$$

$$=\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=s_1,\sum_{i=1}^{n}Y_i=s_2\right)P(N_t=n)z_1^{s_1}z_2^{s_2}$$

$$=\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}[P(S_t^{(1)}=s_1,S_t^{(2)}=s_2)\,/P(N_t=0)]P(N_t=0)z_1^{s_1}z_2^{s_2}$$
$$+\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=s_1,\sum_{i=1}^{n}Y_i=s_2\right)P(N_t=n)z_1^{s_1}z_2^{s_2}$$

$$=[P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=0)/P(N_t=0)]P(N_t=0)z_1^{0}z_2^{0}$$
$$+\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i=s_1,\sum_{i=1}^{n}Y_i=s_2\right)P(N_t=n)z_1^{s_1}z_2^{s_2}$$

$$=P(N_t=0)+P(N_t=1)\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}P(X_1=s_1)P(Y_1=s_2)z_1^{s_1}z_2^{s_2}$$
$$+P(N_t=2)\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}P(X_1+X_2=s_1)\,P(Y_1+Y_2=s_2)z_1^{s_1}z_2^{s_2}$$
$$+P(N_t=3)\sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}P(X_1+X_2+X_3=s_1)P(Y_1+Y_2+Y_3=s_2)z_1^{s_1}z_2^{s_2}+\ldots$$

$$=P(N_t=0)+P(N_t=1)g_X(z_1)g_Y(z_2)+P(N_t=2)[g_X(z_1)]^2[g_Y(z_2)]^2+\ldots \quad (3.1)$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g_X(z_1)$, X_i, $i=1,2,...,N_t$, raslantı değişkenlerinin; $g_Y(z_2)$, Y_i, $i=1,2,...,N_t$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık çıkaran fonksiyonlarıdır. N_t raslantı değişkeninin olasılık çıkaran fonksiyonunun,

$$g_{N_t}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}P(N_t=i)z^i=e^{\lambda t(z-1)} \quad (3.2)$$

olduğu düşünülerek Eşitlik (3.1)'den,

$$g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1,z_2)=g_{N_t}(g_X(z_1)g_Y(z_2)) \tag{3.3}$$

yazılabilir. Buna göre, Eşitlik (3.2) ve Eşitlik (3.3)'ten,

$$\begin{aligned} g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1,z_2) &= e^{\lambda t[g_X(z_1)g_Y(z_2)-1]} \\ &= e^{-\lambda t}e^{\lambda t[g_X(z_1)g_Y(z_2)]} \\ &= e^{-\lambda t}e^{\lambda t(p_0+p_1z_1+\ldots+p_mz_1^m)(q_0+q_1z_2+\ldots+q_rz_2^r)} \\ &= e^{-\lambda t}e^{\lambda t(p_0q_0+p_0q_1z_2+\ldots+p_0q_rz_2^r+p_1q_0z_1+p_1q_1z_1z_2+\ldots+p_1q_rz_1z_2^r+p_mq_0z_1^m+\ldots+p_mq_rz_1^mz_2^r)} \end{aligned} \tag{3.4}$$

bulunur. $p_{s_t^{(1)},s_t^{(2)}}(s_1,s_2)$ bileşik olasılık fonksiyonuna ulaşmak için aşağıda verilen eşitliklerden yararlanılabilir:

$$\begin{aligned} &P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=0)=g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(0,0), \\ &P(S_t^{(1)}=s_1,S_t^{(2)}=s_2)=\frac{\left.\dfrac{\partial^{s_1+s_2}g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1,z_2)}{\partial z_1^{s_1}\partial z_2^{s_2}}\right|_{z_1=z_2=0}}{s_1!\,s_2!}\ ,\ s_1=1,2,\ldots,\ \ s_2=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{3.5}$$

Eşitlik (3.4) ve Eşitlik (3.5)'ten elde edilen bazı olasılıklar aşağıda verilmiştir:

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=0)=e^{-\lambda t}e^{\lambda tp_0q_0}=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)},$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=1)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[q_1\left((\lambda t)\frac{p_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=2)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[q_1^2\left((\lambda t)^2\frac{p_0^2}{2!}\right)+q_2\left((\lambda t)\frac{p_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=3)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[q_1^3\left((\lambda t)^3\frac{p_0^3}{3!}\right)+q_1q_2\left((\lambda t)^2\frac{p_0^2}{2!}\right)+q_3\left((\lambda t)\frac{p_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=4)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[q_1^4\left((\lambda t)^4\frac{p_0^4}{4!}\right)+q_1^2q_2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^3}{3!}\right)+q_1q_3\left((\lambda t)^2\frac{p_0^2}{2!}\right)+q_2^2\left((\lambda t)^2\frac{p_0^2}{2!}\right)\right.$$

$$\left.+q_4\left((\lambda t)\frac{p_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=0)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1\left((\lambda t)\frac{q_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=0)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1^2\left((\lambda t)^2\frac{q_0^2}{2!}\right)+p_2\left((\lambda t)\frac{q_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=0)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1^3\left((\lambda t)^3\frac{q_0^3}{3!}\right)+p_1p_2\left((\lambda t)^2\frac{q_0^2}{2!}\right)+p_3\left((\lambda t)\frac{q_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=4,S_t^{(2)}=0)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1^4\left((\lambda t)^4\frac{q_0^4}{4!}\right)+p_1^2p_2\left((\lambda t)^3\frac{q_0^3}{3!}\right)+p_1p_3\left((\lambda t)^2\frac{q_0^2}{2!}\right)+p_2^2\left((\lambda t)^2\frac{q_0^2}{2!}\right)\right.$$

$$\left.+p_4\left((\lambda t)\frac{q_0}{1!}\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=1)=e^{-\lambda t(1-p_oq_0)}\left[p_1q_1\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=2)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1q_1^2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)+p_1q_2\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=3)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1q_1^3\left((\lambda t)^4\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\right)+p_1q_1q_2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)\right.$$

$$\left.+p_1q_3\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=4)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1q_1^4\left((\lambda t)^5\frac{p_0^4}{4!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^4\frac{p_0^3}{3!}\right)+p_1q_1^2q_2\left((\lambda t)^4\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\right)\right.$$

$$+p_1q_1q_3\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)+p_1q_2^2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)$$

$$\left.+p_1q_4\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=1)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\left[p_1^2q_1\left((\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^2\frac{q_0}{1!}\right)+p_2q_1\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\right],$$

$$
\begin{aligned}
P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=2)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\Bigg[&p_1^2q_1^2\left((\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\right)\\
&+p_1^2q_2\left((\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^2\frac{q_0}{1!}\right)+p_2q_1^2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)\\
&+p_2q_2\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=3)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\Bigg[&p_1^2q_1^3\left((\lambda t)^5\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\right)\\
&+p_1^2q_1q_2\left((\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\right)+p_2q_1^3\left((\lambda t)^4\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\right)\\
&+p_2q_1q_2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)+p_1^2q_3\left((\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^2\frac{q_0}{1!}\right)\\
&+p_2q_3\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=4)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\Bigg[&p_1^2q_1^4\left((\lambda t)^6\frac{p_0^4}{4!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^5\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\right)\\
&+p_2q_1^4\left((\lambda t)^5\frac{p_0^4}{4!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^4\frac{p_0^3}{3!}\right)+p_1^2q_1^2q_2\left((\lambda t)^5\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\right)\\
&+p_2q_1^2q_2\left((\lambda t)^4\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\right)+p_1^2q_1q_3\left((\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\right)\\
&+p_2q_1q_3\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)+p_1^2q_2^2\left((\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\right)\\
&+p_2q_2^2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)+p_2q_4\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=1)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\Bigg[&p_1^3q_1\left((\lambda t)^4\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^3}{3!}+(\lambda t)^3\frac{q_0^2}{2!}\right)+p_1p_2q_1\left((\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^2\frac{q_0}{1!}\right)\\
&+p_3q_1\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\Bigg],
\end{aligned}
$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=2)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\Bigg[p_1^3q_1^2\left((\lambda t)^5\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^3}{3!}+(\lambda t)^4\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{q_0}{1!}\right)$$
$$+p_1^3q_2\left((\lambda t)^4\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^3}{3!}+(\lambda t)^3\frac{q_0^2}{2!}\right)+p_1p_2q_1^2\left((\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\right)$$
$$+p_1p_2q_2\left((\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^2\frac{q_0}{1!}\right)+p_2q_1q_2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\frac{p_0}{1!}\right)$$
$$+p_3q_1^2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)+p_3q_2\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\Bigg],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=3)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)}\Bigg[p_1^3q_1^3\left((\lambda t)^6\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0^3}{3!}+(\lambda t)^5\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^4\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\right)$$
$$+p_1^3q_1q_2\left((\lambda t)^5\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^3}{3!}+(\lambda t)^4\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{q_0}{1!}\right)+p_1^3q_3\left((\lambda t)^4\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^3}{3!}+(\lambda t)^3\frac{q_0^2}{2!}\right)$$
$$+p_1p_2q_1^3\left((\lambda t)^5\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)$$
$$+p_1p_2q_1q_2\left((\lambda t)^4\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\right)+p_1p_2q_3\left((\lambda t)^3\frac{p_0}{1!}\frac{q_0^2}{2!}+(\lambda t)^2\frac{q_0}{1!}\right)$$
$$+p_3q_1^3\left((\lambda t)^4\frac{p_0^3}{3!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\right)+p_3q_1q_2\left((\lambda t)^3\frac{p_0^2}{2!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\right)$$
$$+p_3q_3\left((\lambda t)^2\frac{p_0}{1!}\frac{q_0}{1!}+(\lambda t)\right)\Bigg],$$
$$\vdots$$

$P(S_t^{(1)}=s_1,S_t^{(2)}=s_2)$ olasılıkları $s_1,s_2\geq 3,4,...$ değerleri için de benzer biçimde hesaplanabilir. Bu olasılıklar incelendiğinde, Eşitlik (2.12)'den yararlanılabileceği görülmüştür. Bu amaçla Eşitlik (2.12)'de $\lambda_k=\lambda p_k$, $k=1,2,...,m$, alınır; $e^{-\lambda t(1-p_0)}$ katsayısı ve yukarıdaki olasılıklarda köşeli parantez içindeki terimlerin paydalarındaki faktöriyeller dikkate alınmaz ise, aşağıda verilen a_ℓ, $\ell=1,2,...,$ değerleri elde edilir:

$$a_1=(p_1\lambda t),$$
$$a_2=(p_1\lambda t)^2+(p_2\lambda t), \qquad (3.6)$$
$$a_3=(p_1\lambda t)^3+(p_1\lambda t)(p_2\lambda t)+(p_3\lambda t),$$
$$a_4=(p_1\lambda t)^4+(p_1\lambda t)^2(p_2\lambda t)+(p_1\lambda t)(p_3\lambda t)+(p_2\lambda t)^2+(p_4\lambda t),$$
$$\vdots$$

Eşitlik (3.6)'daki $(p_k\lambda t)^i$, $i=1,2,...,$ olasılığı $k=1,2,...,m$ için öğeleri $\frac{q_0^i}{i!}$'e bağlı ve

$$\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} \frac{q_0^i}{i!} \\ \frac{q_0^{i-1}}{(i-1)!} \\ \vdots \\ q_0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i=1,2,...$$

biçiminde tanımlı $\mathbf{V}_i$, $i=1,2,...$, vektörü ile çarpılırsa, aşağıda verilen $\mathbf{A}_\ell$, $\ell=1,2,...,$ vektörlerine ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= (p_1\lambda t)\mathbf{V}_1, \\
\mathbf{A}_2 &= (p_1\lambda t)^2\mathbf{V}_2 + (p_2\lambda t)\mathbf{V}_1, \\
\mathbf{A}_3 &= (p_1\lambda t)^3\mathbf{V}_3 + (p_1\lambda t)(p_2\lambda t)\mathbf{V}_2 + (p_3\lambda t)\mathbf{V}_1, \\
\mathbf{A}_4 &= (p_1\lambda t)^4\mathbf{V}_4 + (p_1\lambda t)^2(p_2\lambda t)\mathbf{V}_3 + (p_1\lambda t)(p_3\lambda t)\mathbf{V}_2 + (p_2\lambda t)^2\mathbf{V}_2 + (p_4\lambda t)\mathbf{V}_1, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Burada,

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{q_0}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{q_0^2}{2!} \\ \frac{q_0}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} \frac{q_0^3}{3!} \\ \frac{q_0^2}{2!} \\ \frac{q_0}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} \frac{q_0^4}{4!} \\ \frac{q_0^3}{3!} \\ \frac{q_0^2}{2!} \\ \frac{q_0}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots$$

biçimindedir.

Benzer biçimde, Eşitlik (2.12)'de $(\lambda_j t)$ yerine q_j, $j = 1, 2, ..., r$, alınır; $e^{-\lambda t(1-q_0)}$ katsayısı ve $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, $\ell, h = 1, 2, ...,$ olasılıklarında köşeli parantez içinde verilen terimlerin paydalarındaki faktöriyeller dikkate alınmaz ise, aşağıda verilen b_h, $h = 1, 2, ...,$ değerleri elde edilir:

$$\begin{aligned} b_1 &= q_1, \\ b_2 &= q_1^2 + q_2, \\ b_3 &= q_1^3 + q_1 q_2 + q_3, \\ b_4 &= q_1^4 + q_1^2 q_2 + q_1 q_3 + q_2^2 + q_4, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.8}$$

Eşitlik (3.8)'de q_j^i, $i = 1, 2, ...,$ olasılığı $j = 1, 2, ..., r$ için öğeleri $\frac{(\lambda t p_0)^i}{i!}$'e bağlı ve

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda t p_0)^i}{i!} \\ \frac{(\lambda t p_0)^{i-1}}{(i-1)!} \\ \vdots \\ (\lambda t p_0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

biçiminde tanımlı $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, \ldots$, vektörü ile çarpılırsa aşağıda verilen $\mathbf{B}_h$, $h = 1, 2, \ldots$, vektörlerine ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= q_1 \mathbf{W}_1, \\
\mathbf{B}_2 &= q_1^2 \mathbf{W}_2 + q_2 \mathbf{W}_1, \\
\mathbf{B}_3 &= q_1^3 \mathbf{W}_3 + q_1 q_2 \mathbf{W}_2 + q_3 \mathbf{W}_1, \\
\mathbf{B}_4 &= q_1^4 \mathbf{W}_4 + q_1^2 q_2 \mathbf{W}_3 + q_1 q_3 \mathbf{W}_2 + q_2^2 \mathbf{W}_2 + q_4 \mathbf{W}_1, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Burada,

$$
\mathbf{W_1}=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda t p_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{W_2}=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda t p_0)^2}{2!}\\ \dfrac{(\lambda t p_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{W}_3=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda t p_0)^3}{3!}\\ \dfrac{(\lambda t p_0)^2}{2!}\\ \dfrac{(\lambda t p_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{W}_4=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda t p_0)^4}{4!}\\ \dfrac{(\lambda t p_0)^3}{3!}\\ \dfrac{(\lambda t p_0)^2}{2!}\\ \dfrac{(\lambda t p_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\ \ldots
$$

biçimindedir. Eşitlik (3.7) ve Eşitlik (3.9)'daki vektörleri toplayabilmek için vektörlerin boyutları en büyük boyuta göre, eksik öğeler yerine 0 (sıfır) alınarak eşitlenmiştir.

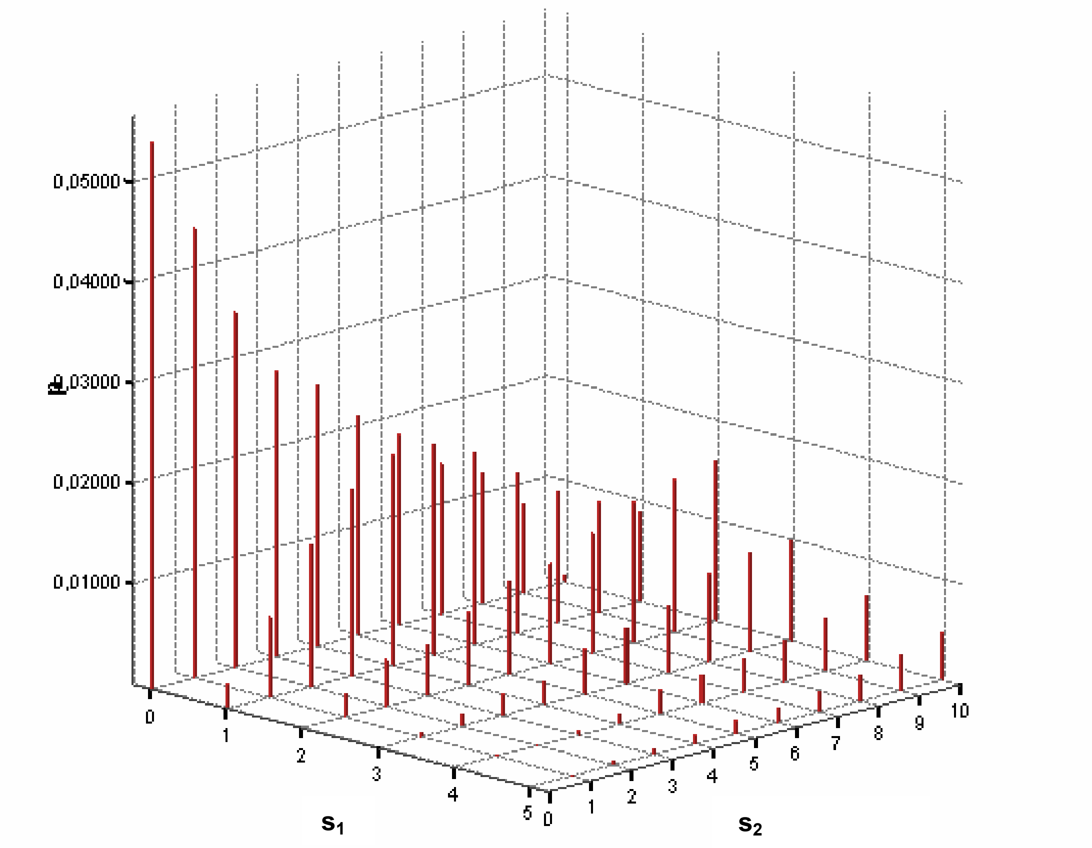
Eşitlik (3.7)'den ve Eşitlik (3.9)'dan bileşik olasılık fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
&P(S_t^{(1)}=0, S_t^{(2)}=0)=e^{-\lambda t(1-p_0q_0)},\\
&P(S_t^{(1)}=\ell, S_t^{(2)}=h)=e^{\,\lambda t(1\text{-}p_0q_0)}\mathbf{A}'_\ell\mathbf{B}_h,\quad \ell,h=1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (3.10)'da da $\ell<h$ ise, $\mathbf{A}_\ell$'de eksik öğeler yerine 0 (sıfır); $\ell>h$ ise, $\mathbf{B}_h$'de eksik öğeler yerine 0 (sıfır) alınarak $\mathbf{A}_\ell$ ve $\mathbf{B}_h$'nin boyutları eşitlenmiştir. Eşitlik (2.12), $m\to\infty$ için geçerli olduğundan Eşitlik (3.10) da $m\to\infty$ ve $r\to\infty$ için geçerlidir.

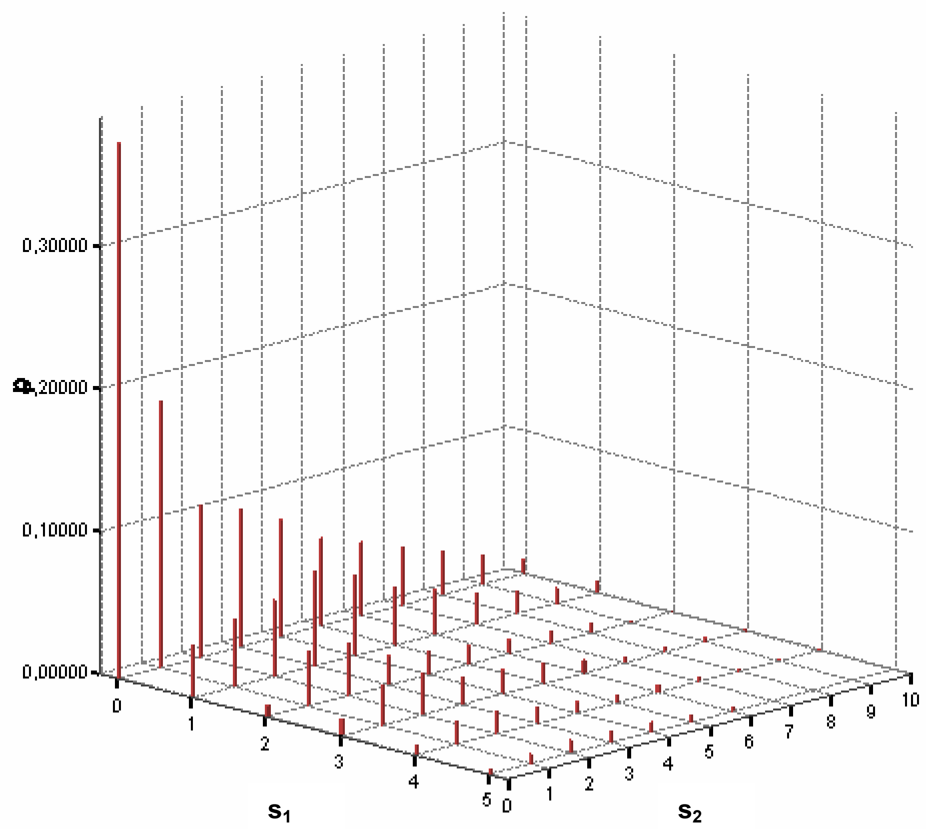
Eşitlik (3.10)'da verilen $P(S_t^{(1)}=\ell, S_t^{(2)}=h)$, $\ell,h=1,2,\ldots,$ olasılıklarını hesaplayan bir program Oracle veritabanında hazırlanmış; sayısal örnekler Örnek (3.1), Örnek (3.2) ve Örnek (3.3)'te ve Oracle program kodları EK. 1'de, Oracle programına ilişkin ekran görüntüleri EK. 7'de verilmiştir.

Örnek (3.1): $\{N_t, t \geq 0\}$, $\lambda = 0.3$ parametresi ile homojen Poisson süreci ve X_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $\theta_1 = 0.5$; Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $\theta_2 = 3$ ile Poisson dağılımlı olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.10)'dan elde edilen olasılıklar Şekil 3.1'de verilmiştir.



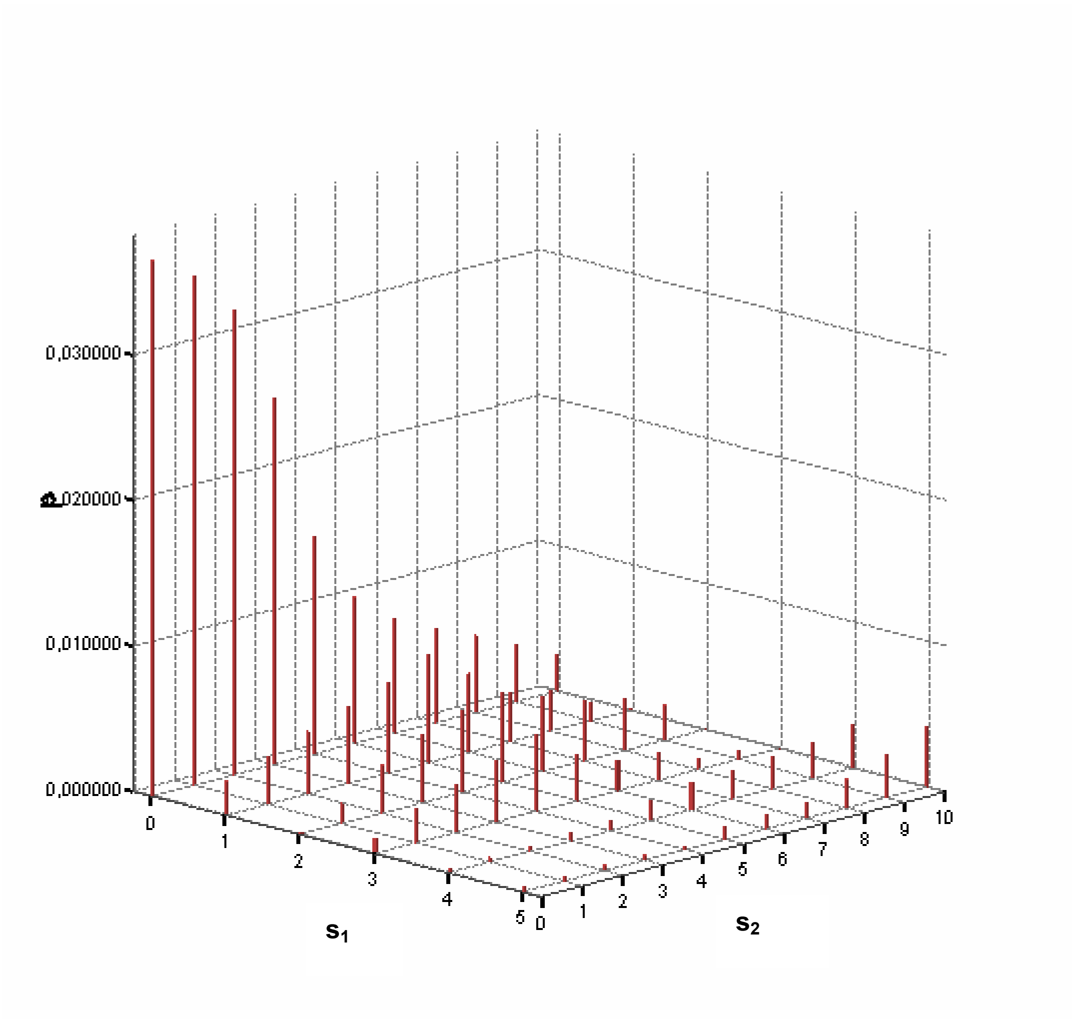
Şekil 3.1. $\lambda = 0.3$; $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 3$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları

Örnek (3.2): $\{N_t, t \geq 0\}$, $\lambda = 0.1$ parametresi ile homojen Poisson süreci; X_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $(m_1 = 5, p_1 = 0.3)$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $(m_2 = 10, p_2 = 0.2)$ ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.10)'dan elde edilen olasılıklar Şekil 3.2'de verilmiştir.



Şekil 3.2. $\lambda = 0.1$; $(m_1 = 5, p_1 = 0.3)$, $(m_2 = 10, p_2 = 0.2)$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları

Örnek (3.3): $\{N_t, t \geq 0\}$, $\lambda = 0.1$ parametresi ile homojen Poisson süreci; X_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $\alpha_1 = 0.02$ ve Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $\alpha_2 = 0.05$ ile geometrik dağılımlı olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.10)'dan elde edilen olasılıklar Şekil 3.3'te verilmiştir.



Şekil (3-3). $\lambda = 0.1$; $\alpha_1 = 0.02$, $\alpha_2 = 0.05$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0, 1, 2, \ldots,$ olasılıkları

3.2. Model 2 için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin Bileşik Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (2.8)'de $\{N_t^{(i)}, t \geq 0\}$, $i = 0, 1, 2$, λ_i parametresi ile bağımsız homojen Poisson süreçleri; X_i, $i = 1, 2, \ldots, N_t^{(0)} + N_t^{(1)}$, aynı dağılımlı, bağımsız kesikli raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1, 2, \ldots, N_t^{(0)} + N_t^{(2)}$, de aynı dağılımlı, bağımsız kesikli raslantı değişkenleri; olsun. $P(X_i = k) = p_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$ ve $P(Y_i = j) = q_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots, r$, alınırsa,

$$p_{S_t^{(1)}, S_t^{(2)}}(s_1, s_2) = P(S_t^{(1)} = s_1, S_t^{(2)} = s_2)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)} + N_t^{(1)}} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)} + N_t^{(2)}} Y_i = s_2 \right)$$

$$=\sum_{n_1}\sum_{n_2} P\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{n_2} Y_i = s_2\right) P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=n_1, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=n_2)$$

$$\begin{aligned}
&= P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=0, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=0)\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=0, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=1)P(Y_1=s_2)+\ldots\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=1, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=0)P(X_1=s_1)+\ldots\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=1, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=1)P(X_1=s_1, Y_1=s_2)+\ldots\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=2, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=2)P(X_1+X_2=s_1, Y_1+Y_2=s_2)+\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=0, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=0)\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=0, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=1)P(Y_1=s_2)+\ldots\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=1, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=0)P(X_1=s_1)+\ldots\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=1, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=1)P(X_1=s_1)P(Y_1=s_2)+\ldots\\
&\quad + P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=2, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=2)P(X_1+X_2=s_1)P(Y_1+Y_2=s_2)+\ldots
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1,z_2) = \sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_i = s_2\right) z_1^{s_1} z_2^{s_2}$$

$$= \sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}\sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{n_2} Y_i = s_2\right) P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=n_1, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=n_2) z_1^{s_1} z_2^{s_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty} \left[P(S_t^{(1)}=s_1, S_t^{(2)}=s_2)\,/\,P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=0, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=0)\right]\\
&\quad P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=0, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=0) z_1^{s_1} z_2^{s_2} + \sum_{s_1}^{\infty}\sum_{s_2}^{\infty}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{n_1} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{n_2} Y_i = s_2\right)\\
&\quad P(N_t^{(0)}+N_t^{(1)}=n_1, N_t^{(0)}+N_t^{(2)}=n_2) z_1^{s_1} z_2^{s_2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 0) \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 1) P(Y_1 = s_2)\, z_2^{s_2} + \ldots \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 0) P(X_1 = s_1)\, z_1^{s_1} + \ldots \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 1) P(X_1 = s_1) P(Y_1 = s_2)\, z_1^{s_1} z_2^{s_2} + \ldots \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 2, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 2) P(X_1 + X_2 = s_1) P(Y_1 + Y_2 = s_2)\, z_1^{s_1} z_2^{s_2} + \ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(2)} = 0) \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 0, N_t^{(1)} = 1)\, g_Y(z_2) \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 0)\, g_X(z_1) + \ldots \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 1, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 1)\, g_X(z_1)\, g_Y(z_2) + \ldots \\
&+ P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = 2, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = 2)\, (g_X(z_1))^2\, (g_Y(z_2))^2 + \ldots
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

biçiminde yazılabilir. Burada $g_X(z_1)$, X_i, $i = 1, 2, \ldots, N_t^{(0)} + N_t^{(1)}$, raslantı değişkenlerinin; $g_Y(z_2)$, Y_i, $i = 1, 2, \ldots, N_t^{(0)} + N_t^{(2)}$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık çıkaran fonksiyonlarıdır.

$N_t^{(0)} + N_t^{(1)}$ ve $N_t^{(0)} + N_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
g_{N_t^{(0)}+N_t^{(1)},N_t^{(0)}+N_t^{(2)}}(z_1, z_2) &= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} P(N_t^{(0)} + N_t^{(1)} = i, N_t^{(0)} + N_t^{(2)} = j) z_1^i z_2^j \\
&= E(z_1^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} z_2^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}}) \\
&= E(z_1^{N_t^{(1)}}) E(z_2^{N_t^{(2)}}) E((z_1 z_2)^{N_t^{(0)}}) \\
&= e^{\lambda_1 t(z_1-1)+\lambda_2 t(z_2-1)+\lambda_0 t(z_1 z_2-1)}
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

biçiminde elde edilir. Eşitlik (3.11) ve Eşitlik (3.12)'den,

$$
g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1, z_2) = g_{N_t^{(0)}+N_t^{(1)},N_t^{(0)}+N_t^{(2)}}(g_X(z_1), g_Y(z_2)) \tag{3.13}
$$

yazılabilir. Buna göre, Eşitlik (3.12) ve Eşitlik (3.13)'ten,

$$g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1,z_2)=e^{\lambda_1 t(g_X(z_1)-1)+\lambda_2 t(g_Y(z_2)-1)+\lambda_0 t(g_X(z_1)g_Y(z_2)-1)}$$

$$=e^{\lambda_1 t(p_0+p_1z_1+p_2z_1^2+\ldots+p_mz_1^m-1)+\lambda_2 t(q_0+q_1z_2+q_2z_2^2+\ldots+q_rz_2^r-1)+\lambda_0 t((p_0+p_1z_1+p_2z_1^2+\ldots+p_mz_1^m)(q_0+q_1z_2+q_2z_2^2+\ldots+q_rz_2^r)-1)}$$

$$=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{\lambda_1 t(p_0+p_1z_1+\ldots+p_mz_1^m)+\lambda_2 t(q_0+q_1z_2+\ldots+q_rz_2^r)+\lambda_0 t((p_0+p_1z_1+\ldots+p_mz_1^m)(q_0+q_1z_2+\ldots+q_rz_2^r))} \tag{3.14}$$

bulunur. $p_{s_t^{(1)},s_t^{(2)}}(s_1,s_2)$ bileşik olasılık fonksiyonuna ulaşmak için aşağıda verilen eşitlikten yararlanılabilir:

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=0)=g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(0,0),$$

$$P(S_t^{(1)}=s_1,S_t^{(2)}=s_2)=\frac{\left.\dfrac{\partial^{s_1+s_2}g_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(z_1,z_2)}{\partial z_1^{s_1}\partial z_2^{s_2}}\right|_{z_1=z_2=0}}{s_1!\,s_2!},\quad s_1=1,2,\ldots,\quad s_2=1,2,\ldots \tag{3.15}$$

Eşitlik (3.14) ve Eşitlik (3.15)'ten elde edilen bazı olasılıklar aşağıda verilmiştir:

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\lambda_0p_0q_0)t},$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\lambda_0p_0q_0)t}\left[q_1\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\lambda_0p_0q_0)t}\left[q_1^2\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)^2}{2!}+q_2\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=3)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\lambda_0p_0q_0)t}\left[q_1^3\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)^3}{3!}+q_1q_2\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)^2}{2!}\right.$$
$$\left.+q_3\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=4)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\lambda_0p_0q_0)t}\left[q_1^4\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)^4}{4!}+q_1^2q_2\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)^3}{3!}\right.$$
$$\left.+q_1q_3\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)^2}{2!}+q_2^2\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)^2}{2!}+q_4\frac{(\lambda_2t+\lambda_0tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^2\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+p_2\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^3\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^3}{3!}+p_1p_2\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}\right.$$
$$\left.+p_3\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=4,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^4\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^4}{4!}+p_1^2p_2\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^3}{3!}\right.$$
$$\left.+p_1p_3\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+p_2^2\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+p_4\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1q_1\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1q_1^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)+p_1q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=3)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1q_1^3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\right)+p_1q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)$$
$$\left.+p_1q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=4)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1q_1^4\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^4}{4!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right.\right.$$
$$\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\right)+p_1q_1^2q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\right)$$
$$+p_1q_1q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)$$
$$+p_1q_2^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)$$
$$\left.+p_1q_4\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^2 q_1\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right)+p_2 q_1\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^2 q_1^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)^2\right)+p_1^2 q_2\left(\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}\right)+p_2 q_1^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)+p_2 q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=3)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^2 q_1^3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1^2 q_1 q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)^2\right)$$

$$+p_2 q_1^3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_2 q_1 q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)^2\right)$$

$$+p_1^2 q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_2 q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=4)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^2 q_1^4\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^4}{4!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_1^2 q_1^2 q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)+p_2 q_1^4\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^4}{4!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\right)$$

$$+p_2 q_1^2 q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_1^2 q_1 q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)^2\right)$$

$$+p_2 q_1 q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)$$

$$+p_2 q_2^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_2 q_4\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^3 q_1\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^3}{3!}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}\right)+p_1 p_2 q_1\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_3 q_1\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 t q_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^3q_1^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^3}{3!}\right.\right.$$

$$+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}+\left.\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1p_2q_1^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+(\lambda_0 t)^2\right)$$

$$+p_1^3q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^3}{3!}+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_2q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_3q_1^2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_3q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=3)=e^{\ (\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\left[p_1^3q_1^3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^3}{3!}\right.\right.$$

$$+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+\left.(\lambda_0 t)^2\right)$$

$$+p_1p_2q_1^3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1^3q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^3}{3!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1^3q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^3}{3!}+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_1p_2q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+(\lambda_0 t)^2\right)$$

$$+p_1p_2q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}\right)$$

$$+p_3q_1^3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_3q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_3q_3\left(\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1 t+\lambda_0 tq_0)}{1!}+(\lambda_0 t)\right)\right],$$

$$\vdots$$

Bu olasılıklar incelendiğinde, gene Eşitlik (2.12)'den yararlanılabileceği görülmüştür. Bu amaçla Eşitlik (2.12)'de $\lambda_k = \lambda p_k$, $k = 1, 2, ..., m$, alınır; $e^{-\lambda t(1-p_0)}$ katsayısı ve yukarıdaki olasılıklarda köşeli parantez içindeki terimlerin paydalarındaki faktöriyeller dikkate alınmaz ise, aşağıda verilen a_ℓ, $\ell = 1, 2, ...,$ değerleri elde edilir:

$$
\begin{aligned}
&a_1 = p_1, \\
&a_2 = p_1^2 + p_2, \\
&a_3 = p_1^3 + p_1 p_2 + p_3, \\
&a_4 = p_1^4 + p_1^2 p_2 + p_1 p_3 + p_2^2 + p_4, \\
&\vdots
\end{aligned}
\qquad (3.16)
$$

Eşitlik (3.16)'daki p_k^i, $i = 1, 2, ...,$ olasılığı $k = 1, 2, ...$ için öğeleri $\frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^i}{i!}$,'ye bağlı ve

$$
\mathbf{V}_i = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^i}{i!} \\ \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^{i-1}}{(i-1)!} \\ \vdots \\ (\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ...
$$

biçiminde tanımlı $\mathbf{V}_i$, $i = 1, 2, ...,$ vektörü ile çarpılırsa aşağıda aşağıda verilen $\mathbf{A}_\ell$, $\ell = 1, 2, ...,$ vektörlerine ulaşılır:

$$\mathbf{A}_1 = p_1 \mathbf{V}_1,$$

$$\mathbf{A}_2 = p_1^2\mathbf{V}_2 + p_2\mathbf{V}_1, \tag{3.17}$$
$$\mathbf{A}_3 = p_1^3\mathbf{V}_3 + p_1p_2\mathbf{V}_2 + p_3\mathbf{V}_1,$$
$$\mathbf{A}_4 = p_1^4\mathbf{V}_4 + p_1^2p_2\mathbf{V}_3 + p_1p_3\mathbf{V}_2 + p_2^2\mathbf{V}_2 + p_4\mathbf{V}_1,$$
$$\vdots$$

Burada,

$$\mathbf{V}_1 = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^2}{2!} \\ \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V}_3 = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^3}{3!} \\ \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^2}{2!} \\ \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^4}{4!} \\ \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^3}{3!} \\ \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)^2}{2!} \\ \frac{(\lambda_1 t + \lambda_0 t q_0)}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

biçimindedir.

Benzer olarak, Eşitlik (2.12)'de $(\lambda_j t)$ yerine q_j, $j = 1, 2, \ldots, r$, alınır; $e^{-\lambda t(1-q_0)}$ katsayısı ve $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, $\ell, h = 1, 2, \ldots$, olasılıklarında köşeli parantez içinde verilen terimlerin paydalarındaki faktöriyeller dikkate alınmaz ise, aşağıda verilen b_h, $h = 1, 2, \ldots$, değerleri elde edilir:

$$b_1 = q_1,$$
$$b_2 = q_1^2 + q_2, \tag{3.18}$$
$$b_3 = q_1^3 + q_1q_2 + q_3,$$
$$b_4 = q_1^4 + q_1^2q_2 + q_1q_3 + q_2^2 + q_4,$$
$$\vdots$$

Eşitlik (3.18)'de q_j^i, $i = 1, 2, ...,$ olasılığı $j = 1, 2, ...$ için öğeleri $\frac{(\lambda_2 t + \lambda_0 t p_0)^i}{i!}$'ye bağlı ve

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \frac{(\lambda_2 t + \lambda_0 t p_0)^i}{i!} \\ \frac{(\lambda_2 t + \lambda_0 t p_0)^{i-1} (\lambda_0 t)^{i-1}}{(i-1)!} \\ \vdots \\ (\lambda_0 t) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ...$$

biçiminde tanımlı $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, ...,$ vektörü ile çarpılırsa aşağıda verilen $\mathbf{B}_h$, $h = 1, 2, ...,$ vektörlerine ulaşılır:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= q_1 \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{B}_2 &= q_1^2 \mathbf{W}_2 + q_2 \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{B}_3 &= q_1^3 \mathbf{W}_3 + q_1 q_2 \mathbf{W}_2 + q_3 \ \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{B}_4 &= q_1^4 \mathbf{W}_4 + q_1^2 q_2 \mathbf{W}_3 + q_1 q_3 \mathbf{W}_2 + q_2^2 \mathbf{W}_2 + q_4 \mathbf{W}_1, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.19}$$

Burada,

$$
\mathbf{W}_1=\begin{bmatrix}\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{W}_2=\begin{bmatrix}\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2}{2!}\\ \frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)(\lambda_0 t)}{1!1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{W}_3=\begin{bmatrix}\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3}{3!}\\ \frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2(\lambda_0 t)^2}{2!2!}\\ \frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)(\lambda_0 t)}{1!1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{W}_4=\begin{bmatrix}\frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^4}{4!}\\ \frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^3(\lambda_0 t)^3}{3!3!}\\ \frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)^2(\lambda_0 t)^2}{2!2!}\\ \frac{(\lambda_2 t+\lambda_0 t p_0)(\lambda_0 t)}{1!1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\ldots
$$

biçimindedir.

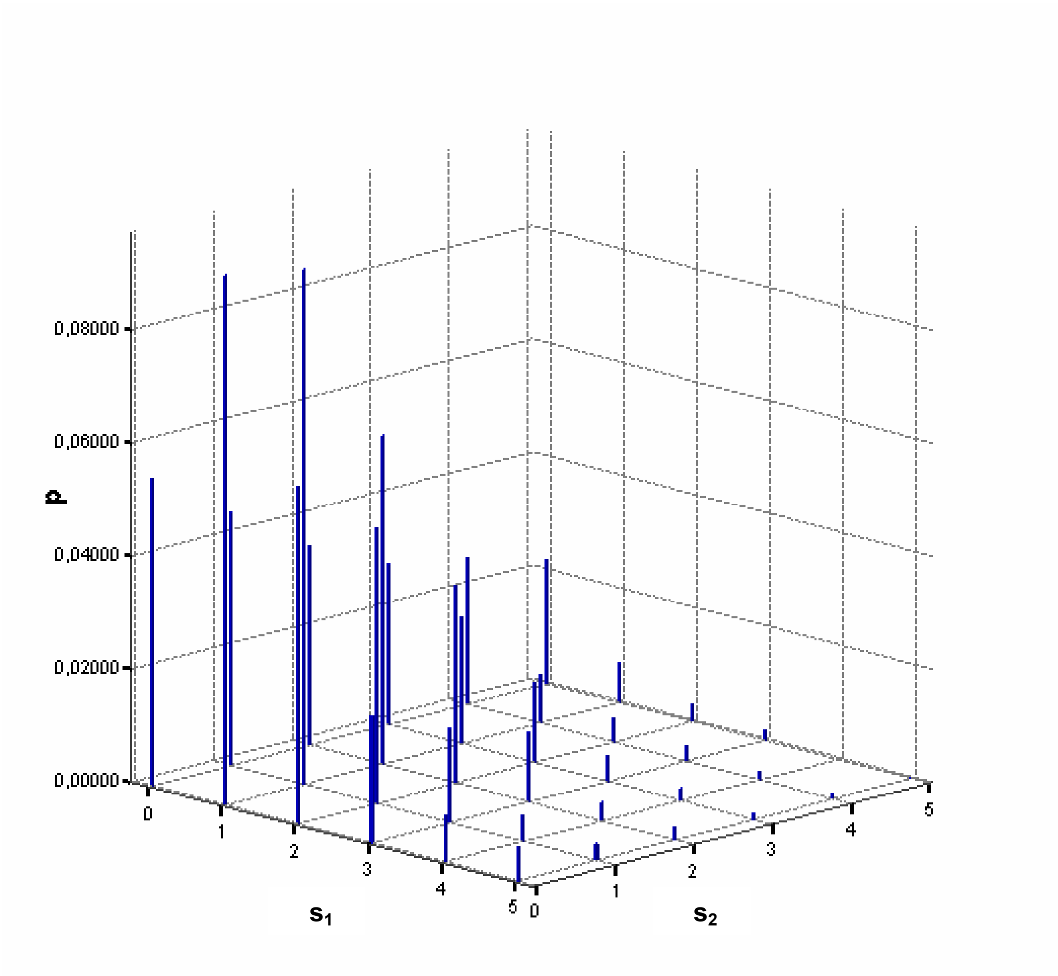
Eşitlik (3.17) ve Eşitlik (3.19)'dan bileşik olasılık fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
&P(S_t^{(1)}=0, S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t},\\
&P(S_t^{(1)}=\ell, S_t^{(2)}=h)=e^{\ (\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1 p_0+\lambda_2 q_0+\lambda_0 p_0 q_0)t}\mathbf{A}'_\ell\mathbf{B}_h, \quad \ell, h=1,2,...
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

biçiminde elde edilir. Gene Eşitlik (3.20) de $m\to\infty$ ve $r\to\infty$ için geçerlidir.

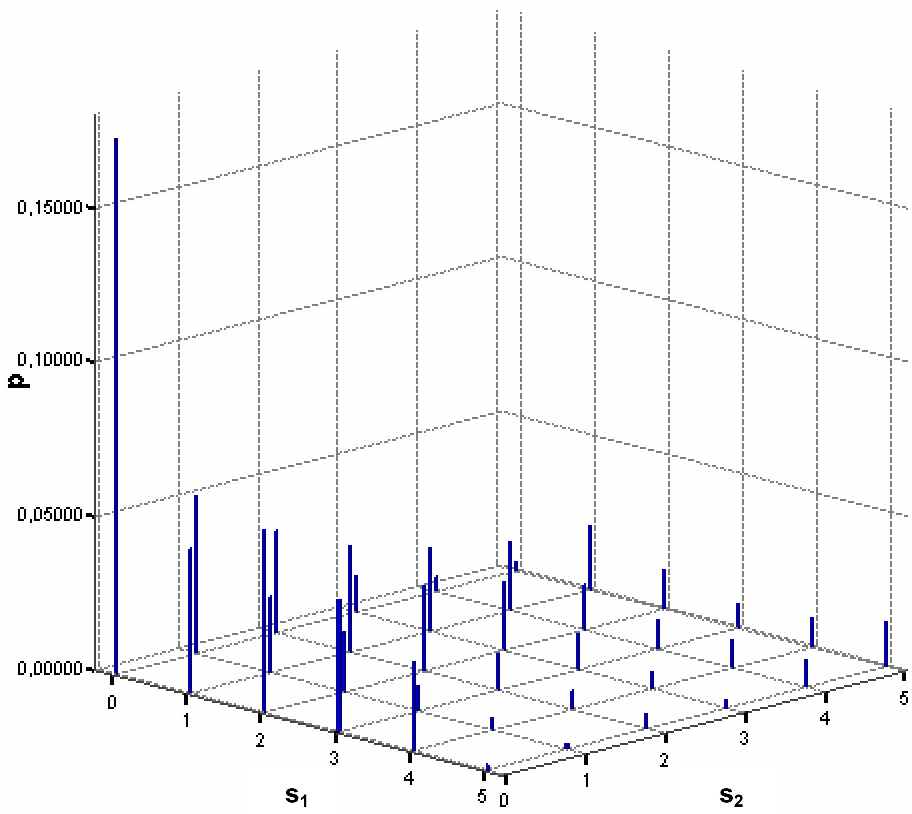
Eşitlik (3.20)'de verilen $P(S_t^{(1)}=\ell, S_t^{(2)}=h)$, $\ell, h=1,2,...$, olasılıklarını hesaplayan bir program Oracle veritabanında hazırlanmış; sayısal örnekler Örnek (3.4), Örnek (3.5) ve Örnek (3.6)'da ve Oracle program kodları EK. 2'de, Oracle programına ilişkin ekran görüntüleri Ek. 7'de verilmiştir.

Örnek (3.4): $\{N_t^{(0)}, t\geq 0\}$, $\lambda_0=0.2$ parametresi ile; $\{N_t^{(1)}, t\geq 0\}$, $\lambda_1=0.3$ parametresi ile; $\{N_t^{(2)}, t\geq 0\}$, $\lambda_2=0.1$ parametresi ile homojen Poisson süreçleri ve X_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenlerinin $\theta_1=0.25$; Y_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenlerinin $\theta_2=0.5$ ile Poisson dağılımlı olduğu durumda $t=10$ için Eşitlik (3.20)'den elde edilen olasılıklar Şekil 3.4'te gösterilmiştir.



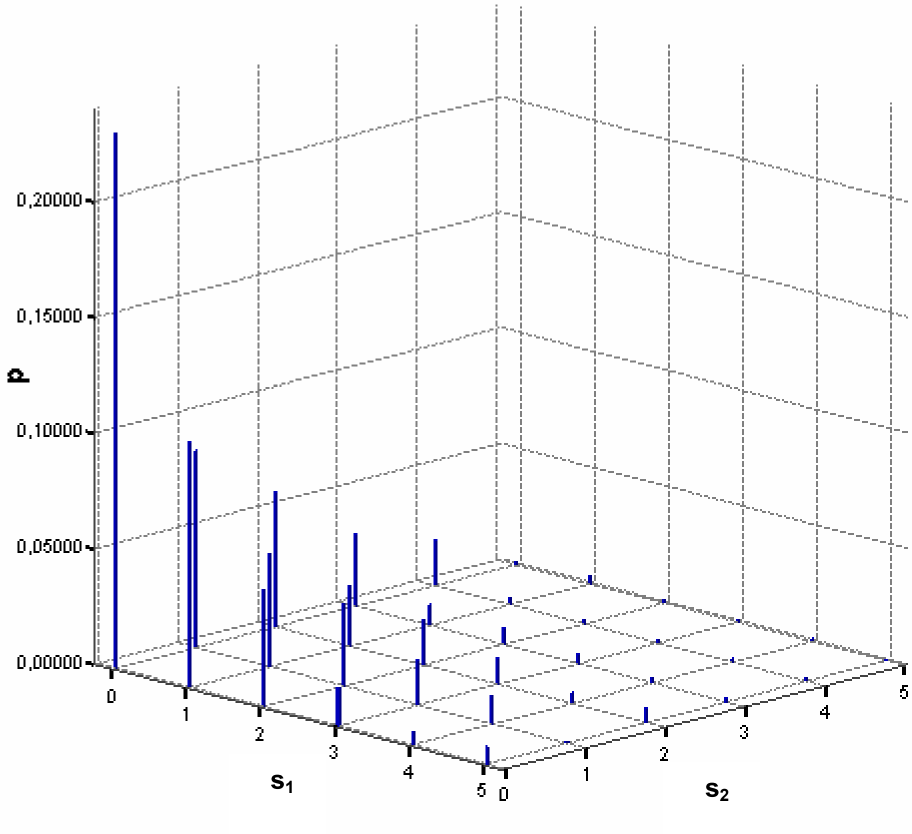
Şekil 3.4. $\lambda_0 = 0.2$, $\lambda_1 = 0.3$, $\lambda_2 = 0.1$; $\theta_1 = 0.25$, $\theta_2 = 0.5$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları

Örnek (3.5): $\{N_t^{(0)}, t \geq 0\}$, $\lambda_0 = 0.06$ parametresi ile; $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\lambda_1 = 0.07$ parametresi ile; $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$, $\lambda_2 = 0.08$ parametresi ile homojen Poisson süreçleri ve X_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $(m_1 = 10, p_1 = 0.1)$; Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $(m_2 = 10, p_2 = 0.2)$ ile ikiterimli dağılıma sahip olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.20)'den elde edilen olasılıklar Şekil 3.5'te gösterilmiştir.



Şekil 3.5. $\lambda_0 = 0.06$, $\lambda_1 = 0.07$, $\lambda_2 = 0.08$; $(m_1 = 10, p_1 = 0.1)$, $(m_2 = 10, p_2 = 0.2)$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları

Örnek (3.6): $\{N_t^{(0)}, t \geq 0\}$, $\lambda_0 = 0.09$ parametresi ile; $\{N_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\lambda_1 = 0.08$ parametresi ile; $\{N_t^{(2)}, t \geq 0\}$, $\lambda_2 = 0.2$ parametresi ile homojen Poisson süreçleri ve X_i , $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $\alpha_1 = 0.5$; Y_i , $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $\alpha_2 = 0.75$ ile geometrik dağılımlı olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.20)'den elde edilen olasılıklar Şekil 3.6'da gösterilmiştir.



Şekil 3.6. $\lambda_0 = 0.09$, $\lambda_1 = 0.08$, $\lambda_2 = 0.2$; $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.75$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları

3.3. Model 3 için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin Bileşik Olasılık Fonksiyonu

Eşitik (2.29)'da $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, μ_1 parametresi ile ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$, μ_2 parametresi ile bağımlı homojen Poisson süreçleri; X_i, $i = 1,2,...,M_t^{(1)}$, aynı dağılımlı, bağımsız, kesikli raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1,2,...,M_t^{(2)}$, de aynı dağılımlı, bağımsız, kesikli raslantı değişkenleri olsun. Burada $M_t^{(1)}$ ve $M_t^{(2)}$ raslantı değişkenleri arasındaki bağımlılığı ρ ile gösterelim. $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ süreçleri artan süreçler olduklarından bağımlılık pozitiftir. Bu nedenle $(0 < \rho < 1)$'dir. $P(X_i = k) = p_k$, $k = 0,1,2,...,m$ ve $P(Y_i = j) = q_j$, $j = 0,1,2,...,r$, alınırsa,

$$\begin{aligned} p_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(s_1,s_2) &= P(S_t^{(1)} = s_1, S_t^{(2)} = s_2) \\ &= P\left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i = s_2\right) \end{aligned}$$

$$= \sum_{m_1} \sum_{m_2} P\left(\sum_{i=1}^{m_1} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{m_2} Y_i = s_2 \right) P(M_t^{(1)} = m_1, M_t^{(2)} = m_2)$$

$$\begin{aligned}
&= P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0) + P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 1)P(Y_1 = s_2) + \ldots \\
&\quad + P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 0)P(X_1 = s_1) + \ldots \\
&\quad + P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 1)P(X_1 = s_1, Y_1 = s_2) + \ldots \\
&\quad + P(M_t^{(1)} = 2, M_t^{(2)} = 2)P(X_1 + X_2 = s_1, Y_1 + Y_2 = s_2) + \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0) \\
&\quad + P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 1)P(Y_1 = s_2) + \ldots \\
&\quad + P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 0)P(X_1 = s_1) + \ldots \\
&\quad + P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 1)P(X_1 = s_1)P(Y_1 = s_2) + \ldots \\
&\quad + P(M_t^{(1)} = 2, M_t^{(2)} = 2)P(X_1 + X_2 = s_1)P(Y_1 + Y_2 = s_2) + \ldots
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu,

$$g_{S_t^{(1)}, S_t^{(2)}}(z_1, z_2) = \sum_{s_1}^{\infty} \sum_{s_2}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i = s_2 \right) z_1^{s_1} z_2^{s_2}$$

$$= \sum_{s_1}^{\infty} \sum_{s_2}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{m_1} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{m_2} Y_i = s_2 \right) P(M_t^{(1)} = m_1, M_t^{(2)} = m_2) z_1^{s_1} z_2^{s_2}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{s_1}^{\infty} \sum_{s_2}^{\infty} [P(S_t^{(1)} = s_1, S_t^{(2)} = s_2) / P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0)] \; P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0) z_1^{s_1} z_2^{s_2} \\
&+ \sum_{s_1}^{\infty} \sum_{s_2}^{\infty} \sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2=1}^{\infty} P\left(\sum_{i=1}^{m_1} X_i = s_1, \sum_{i=1}^{m_2} Y_i = s_2 \right) P(M_t^{(1)} = m_1, M_t^{(2)} = m_2) z_1^{s_1} z_2^{s_2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(2)} = 0) \\
&+ P(M_t^{(1)} = 0, M_t^{(1)} = 1)\, P(Y_1 = s_2)\, z_2^{s_2} + \ldots \\
&+ P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 0)\, P(X_1 = s_1)\, z_1^{s_1} + \ldots \\
&+ P(M_t^{(1)} = 1, M_t^{(2)} = 1)\, P(X_1 = s_1)\, P(Y_1 = s_2)\, z_1^{s_1} z_2^{s_2} + \ldots \\
&+ P(M_t^{(1)} = 2, M_t^{(2)} = 2)\, P(X_1 + X_2 = s_1)\, P(Y_1 + Y_2 = s_2)\, z_1^{s_1} z_2^{s_2} + \ldots
\end{aligned}$$

$$= P(M_t^{(1)}=0, M_t^{(2)}=0) + P(M_t^{(1)}=0, M_t^{(2)}=1) g_Y(z_2) + P(M_t^{(1)}=1, M_t^{(2)}=0) g_X(z_1)$$
$$+ P(M_t^{(1)}=1, M_t^{(2)}=1) g_X(z_1) g_Y(z_2) + P(M_t^{(1)}=2, M_t^{(2)}=2)[g_X(z_1)]^2 [g_Y(z_2)]^2 + \ldots$$

$$= g_{M_t^{(1)}, M_t^{(2)}}(g_X(z_1), g_Y(z_2)) \tag{3.21}$$

elde edilir. Burada $g_X(z_1)$, X_i, $i = 1, 2, \ldots, M_t^{(1)}$, raslantı değişkenlerinin; $g_Y(z_2)$, Y_i, $i = 1, 2, \ldots, M_t^{(2)}$, raslantı değişkenlerinin ortak olasılık çıkaran fonksiyonlarıdır.

$M_t^{(1)}$ ve $M_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık çıkaran fonksiyonu Cox (2006) tarafından aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$g_{M_t^{(1)}, M_t^{(2)}}(z_1, z_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} P(M_t^{(1)} = i, M_t^{(2)} = j) z_1^i z_2^j$$
$$= e^{\lambda_1 t(z_1 - 1) + \lambda_2 t(z_2 - 1) + \rho t(z_1 z_2 - 1)}. \tag{3.22}$$

Eşitlik (3.22)’den,

$$g_{S_t^{(1)}, S_t^{(2)}}(z_1, z_2) = e^{\lambda_1 t(g_X(z_1) - 1) + \lambda_2 t(g_Y(z_2) - 1) + \rho t(g_X(z_1) g_Y(z_2) - 1)}$$
$$= e^{\lambda_1 t(p_0 + p_1 z_1 + p_2 z_1^2 + \ldots + p_m z_1^m - 1) + \lambda_2 t(q_0 + q_1 z_2 + q_2 z_2^2 + \ldots + q_r z_2^r - 1) + \rho t((p_0 + p_1 z_1 + p_2 z_1^2 + \ldots + p_m z_1^m)(q_0 + q_1 z_2 + q_2 z_2^2 + \ldots + q_r z_2^r) - 1)}$$
$$= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \rho)t} e^{\lambda_1 t(p_0 + p_1 z_1 + \ldots + p_m z_1^m) + \lambda_2 t(q_0 + q_1 z_2 + \ldots + q_r z_2^r) + \rho t((p_0 + p_1 z_1 + \ldots + p_m z_1^m)(q_0 + q_1 z_2 + \ldots + q_r z_2^r))} \tag{3.23}$$

bulunur. $p_{s_t^{(1)}, s_t^{(2)}}(s_1, s_2)$ bileşik olasılık fonksiyonuna ulaşmak için aşağıda verilen eşitliklerden yararlanılabilir:

$$P(S_t^{(1)} = 0, S_t^{(2)} = 0) = g_{S_t^{(1)}, S_t^{(2)}}(0, 0),$$

$$\tag{3.24}$$

$$P(S_t^{(1)} = s_1, S_t^{(2)} = s_2) = \frac{\left. \dfrac{\partial^{s_1 + s_2} g_{S_t^{(1)}, S_t^{(2)}}(z_1, z_2)}{\partial z_1^{s_1} \partial z_2^{s_2}} \right|_{z_1 = z_2 = 0}}{s_1! \, s_2!}, \quad s_1 = 1, 2, \ldots, \quad s_2 = 1, 2, \ldots$$

Eşitlik (3.23) ve Eşitlik (3.24)'ten elde edilen bazı olasılıklar aşağıda verilmiştir:

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t},$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[q_1\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[q_1^2\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}+q_2\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=3)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[q_1^3\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}+q_1q_2\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\right.$$
$$\left.+q_3\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=0,S_t^{(2)}=4)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[q_1^4\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^4}{4!}+q_1^2q_2\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\right.$$
$$\left.+q_1q_3\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}+q_2^2\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}+q_4\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1^2\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+p_2\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1^3\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}+p_1p_2\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\right.$$
$$\left.+p_3\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=4,S_t^{(2)}=0)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1^4\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^4}{4!}+p_1^2p_2\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}\right.$$
$$\left.+p_1p_3\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+p_2^2\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+p_4\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1q_1\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right),\right.$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1q_1^2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)\right.$$

$$\left.+p_1q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=3)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1q_1^3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\right)\right.$$

$$+p_1q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_1q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=1,S_t^{(2)}=4)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1q_1^4\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^4}{4!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\right)\right.$$

$$+p_1q_1^2q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_1q_1q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1q_2^2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_1q_4\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1^2q_1\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right)\right.$$

$$\left.+p_2q_1\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1^2q_1^2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+(\rho t)^2\right)+p_1^2q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right)+p_2q_1^2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_2q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=3)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1^2q_1^3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\right.\right.$$

$$+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\left.\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1^2q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+(\rho t)^2\right)$$

$$+p_2q_1^3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_2q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1^2q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_2q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=2,S_t^{(2)}=4)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\left[p_1^2q_1^4\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^4}{4!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\right.\right.$$

$$+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\left.\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_1^2q_1^2q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right.$$

$$\left.+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)+p_2q_1^4\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^4}{4!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\right)$$

$$+p_2q_1^2q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_1^2q_1q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+(\rho t)^2\right)$$

$$+p_2q_1q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_2q_2^2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$\left.+p_2q_4\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\right],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=1)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\Bigg[p_1^3q_1\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}$$

$$+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\Bigg)+p_1p_2q_1\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\Bigg)$$

$$+p_3q_1\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\Bigg)\Bigg],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=2)=e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\rho p_0q_0)t}\Bigg[p_1^3q_1^2\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}$$

$$+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\Bigg)$$

$$+p_1p_2q_1^2\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+(\rho t)^2\Bigg)$$

$$+p_1^3q_2\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\Bigg)$$

$$+p_2q_1q_2\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\Bigg)$$

$$+p_3q_1^2\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\Bigg)$$

$$+p_3q_2\Bigg(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\Bigg)\Bigg],$$

$$P(S_t^{(1)}=3,S_t^{(2)}=3)=e^{-(\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2)t}e^{(\lambda_1p_0+\lambda_2q_0+\lambda_0p_0q_0)t}\Bigg[p_1^3q_1^3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}\right.$$

$$+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\left.(\rho t)^2\right)$$

$$+p_1p_2q_1^3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1^3q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right)$$

$$+p_1^3q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^3}{3!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_1p_2q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+(\rho t)^2\right)$$

$$+p_1p_2q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)^2}{2!}+\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}\right)$$

$$+p_3q_1^3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^3}{3!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\right)$$

$$+p_3q_1q_2\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)^2}{2!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\right)$$

$$+p_3q_3\left(\frac{(\lambda_2t+\rho tp_0)}{1!}\frac{(\lambda_1t+\rho tq_0)}{1!}+\rho t\right)\Bigg],$$

$\vdots$

Bu olasılıklar incelendiğinde, gene Eşitlik (2.12)'den yararlanılabileceği görülmüştür. Bu amaçla Eşitlik (2.12)'de $\lambda_k=\lambda p_k$, $k=1,2,...,m$, alınır; $e^{-\lambda t(1-p_0)}$ katsayısı ve yukarıdaki olasılıklarda köşeli parantez içindeki terimlerin paydalarındaki faktöriyeller dikkate alınmaz ise, aşağıda verilen a_ℓ, $\ell=1,2,...,$ değerleri elde edilir:

$$\begin{aligned}
&a_1=p_1,\\
&a_2=p_1^2+p_2, \qquad\qquad (3.25)\\
&a_3=p_1^3+p_1p_2+p_3,\\
&a_4=p_1^4+p_1^2p_2+p_1p_3+p_2^2+p_4,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Eşitlik (3.25)'teki p_k^i, $i=1,2,...$, olasılığı $k=1,2,...$ için öğeleri $\dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^i}{i!}$'ye bağlı ve

$$\mathbf{V}_i=\begin{bmatrix} \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^i}{i!} \\ \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^{i-1}}{(i-1)!} \\ \vdots \\ (\lambda_1 t+\rho t q_0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i=1,2,...$$

biçiminde tanımlı $\mathbf{V}_i$, $i=1,2,...$, vektörü ile çarpılırsa aşağıda verilen $\mathbf{A}_\ell$, $\ell=1,2,...$, vektörlerine ulaşılır:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= p_1\mathbf{V}_1, \\
\mathbf{A}_2 &= p_1^2\mathbf{V}_2 + p_2\mathbf{V}_1, \\
\mathbf{A}_3 &= p_1^3\mathbf{V}_3 + p_1p_2\mathbf{V}_2 + p_3\mathbf{V}_1, \\
\mathbf{A}_4 &= p_1^4\mathbf{V}_4 + p_1^2p_2\mathbf{V}_3 + p_1p_3\mathbf{V}_2 + p_2^2\mathbf{V}_2 + p_4\mathbf{V}_1, \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Burada,

$$
\mathbf{V}_1=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{V}_2=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^2}{2!}\\ \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{V}_3=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^3}{3!}\\ \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^2}{2!}\\ \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\quad
\mathbf{V}_4=\begin{bmatrix}\dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^4}{4!}\\ \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^3}{3!}\\ \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)^2}{2!}\\ \dfrac{(\lambda_1 t+\rho t q_0)}{1!}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix},\ldots
$$

biçimindedir.

Benzer olarak, Eşitlik (2.12)'de $(\lambda_j t)$ yerine q_j, $j=1,2,\ldots,r$, alınır; $e^{-\lambda t(1-q_0)}$ katsayısı ve $P(S_t^{(1)}=\ell, S_t^{(2)}=h)$, $\ell, h=1,2,\ldots,$ olasılıklarında köşeli parantez içinde verilen terimlerin paydalarındaki faktöriyeller dikkate alınmaz ise, aşağıda verilen b_h, $h=1,2,\ldots,$ değerleri elde edilir:

$$
\begin{aligned}
b_1 &= q_1,\\
b_2 &= q_1^2+q_2,\\
b_3 &= q_1^3+q_1q_2+q_3,\\
b_4 &= q_1^4+q_1^2q_2+q_1q_3+q_2^2+q_4,\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

Eşitlik (3.27)'deki q_j^i, $i=1,2,\ldots,$ olasılığı $j=1,2,\ldots$ için öğeleri $\dfrac{(\lambda_2 t+\rho t p_0)^i}{i!}$'ye bağlı ve

$$\mathbf{W}_i = \begin{bmatrix} \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)^i}{i!} \\ \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)^{i-1}(\rho t)^{i-1}}{(i-1)!(i-1)!} \\ \vdots \\ (\rho t)^i \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, ...$$

biçiminde tanımlı $\mathbf{W}_i$, $i = 1, 2, ...,$ vektörü ile çarpılırsa aşağıda verilen $\mathbf{B}_h$, $h = 1, 2, ...,$ vektörlerine ulaşılır:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= q_1 \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{B}_2 &= q_1^2 \mathbf{W}_2 + q_2 \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{B}_3 &= q_1^3 \mathbf{W}_3 + q_1\, q_2\, \mathbf{W}_2 + q_3\, \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{B}_4 &= q_1^4 \mathbf{W}_4 + q_1^2 q_2 \mathbf{W}_3 + q_1 q_3 \mathbf{W}_2 + q_2^2 \mathbf{W}_2 + q_4 \mathbf{W}_1, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.28}$$

Burada,

$$\mathbf{W}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)}{1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)^2}{2!} \\ \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)(\rho t)}{1!1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)^3}{3!} \\ \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)^2(\rho t)^2}{2!2!} \\ \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)(\rho t)}{1!1!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{W}_4 = \begin{bmatrix} \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)^4}{4!} \\ \dfrac{(\lambda_2 t + \rho t p_0)^3(\rho t)^3}{3!3!} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Eşitlik (3.26) ve Eşitlik (3.28)'den bileşik olasılık fonksiyonu,

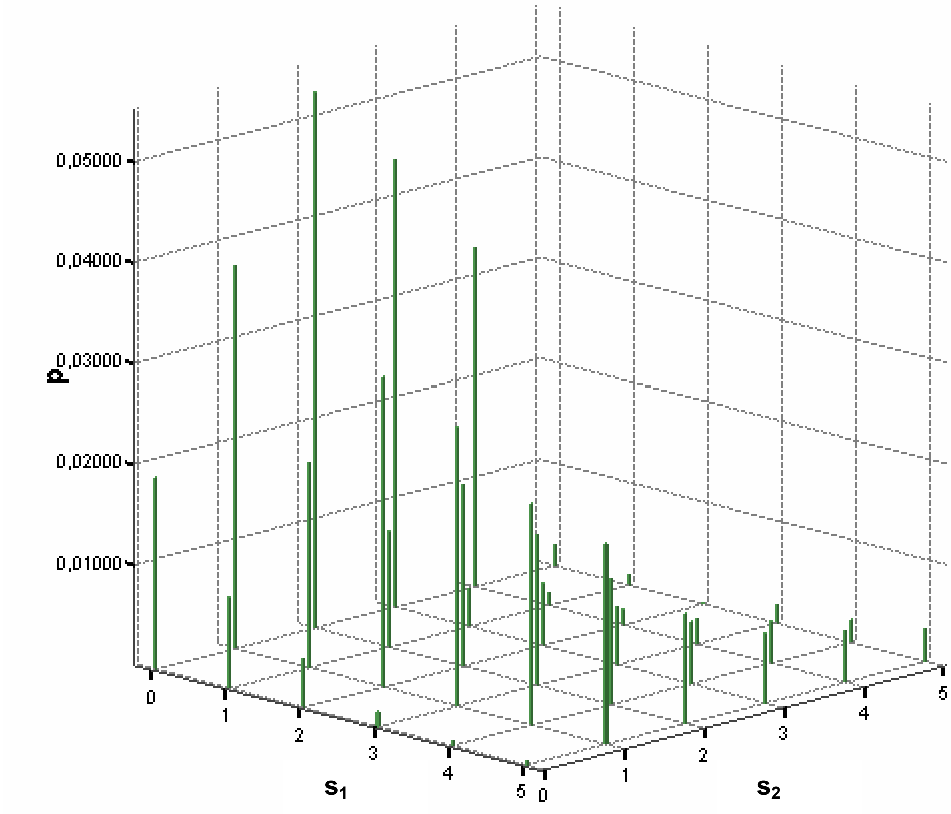
$$P(S_t^{(1)} = 0, S_t^{(2)} = 0) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\rho)t} e^{(\lambda_1 p_0 + \lambda_2 q_0 + \rho p_0 q_0)t},$$

$$P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h) = e^{\ (\lambda_1+\lambda_2+\rho)t} e^{(\lambda_1 p_0 + \lambda_2 q_0 + \rho p_0 q_0)t} \mathbf{A}_\ell \mathbf{B}_h, \quad \ell, h = 1, 2, ... \tag{3.29}$$

elde edilir. Gene Eşitlik (3.29) da $m \to \infty$ ve $r \to \infty$ için geçerlidir.

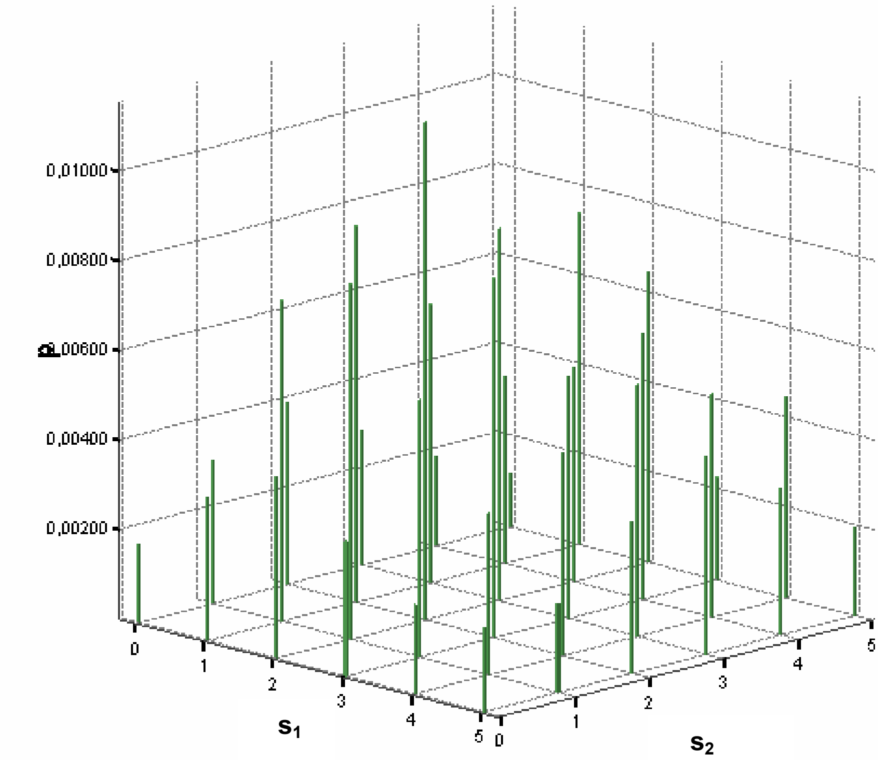
Eşitlik (3.29)'da verilen $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0, 1, 2, ...,$ olasılıklarını hesaplayan bir program Oracle veritabanında hazırlanmış; sayısal örnekler Örnek (3.7), Örnek (3.8) ve Örnek (3.9)'da, Oracle program kodları EK. 3'te, Oracle programına ilişkin ekran görüntüleri Ek. 7'de verilmiştir.

Örnek (3.7): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\mu_1 = 0.5$ parametresi ile; $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$, $\mu_2 = 0.1$ parametresi ile homojen Poisson süreçleri ve X_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $\theta_1 = 0.8$; Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenlerinin $\theta_2 = 0.6$ ile Poisson dağılımlı; $\rho = 0.1$ olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.29)'dan elde edilen olasılıklar Şekil 3.7'de gösterilmiştir.



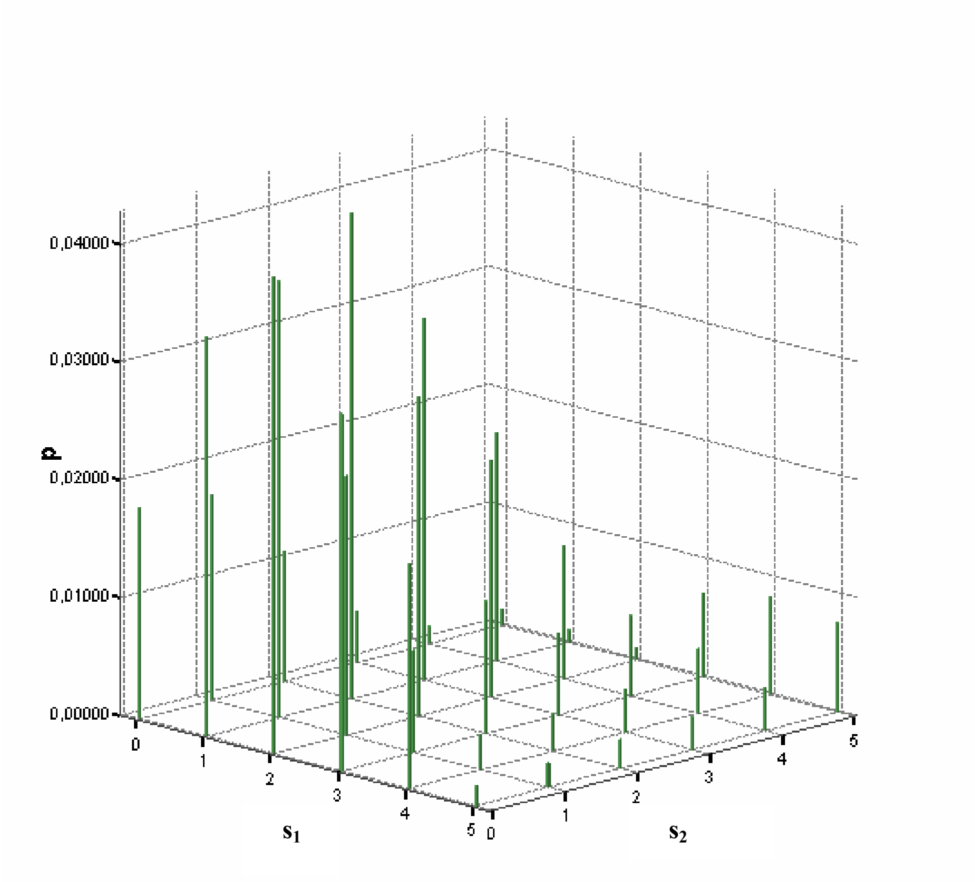
Şekil 3.7. $\mu_1 = 0.5$, $\mu_2 = 0.1$; $\theta_1 = 0.8$, $\theta_2 = 0.6$, $\rho = 0.1$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları

Örnek (3.8): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\mu_1 = 0.3$ parametresi ile; $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$, $\mu_2 = 0.2$ parametresi ile homojen Poisson süreçleri ve X_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $(m_1 = 6, p_1 = 0.1)$; Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $(m_2 = 5, p_2 = 0.5)$ ile ikiterimli dağılımlı; $\rho = 0.5$ olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.32)'den elde edilen olasılıklar Şekil 3.8'de gösterilmiştir.



Şekil (3-8). $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.2$; $(m_1 = 6, p_1 = 0.1)$, $(m_2 = 5, p_2 = 0.5)$, $\rho = 0.5$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları

Örnek (3-9): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\mu_1 = 0.05$ parametresi ile; $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$, $\mu_2 = 0.2$ parametresi ile homojen Poisson süreçleri ve X_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $\alpha_1 = 0.85$ ve Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenlerinin $\alpha_2 = 0.75$ ile geometrik dağılımlı; $\rho = 0.95$ olduğu durumda $t = 10$ için Eşitlik (3.32)'den elde edilen olasılıklar Şekil 3.9'da gösterilmiştir.



Şekil (3-9). $\mu_1 = 0.05$, $\mu_2 = 0.2$; $\alpha_1 = 0.85$, $\alpha_2 = 0.75$, $\rho = 0.95$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları

Şekil (3-7)-Şekil (3.9)'da verilen olasılıklar birlikte incelendiğinde, $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçleri arasındaki korelasyon katsayısı $\rho = 0.5$ iken, elde edilen fonksiyonel biçimin iki değişkenli normal dağılıma benzediği görülmüştür. Ayrıca Şekil (3-1)-Şekil (3.9)'da verilen olasılıklar birlikte incelendiğinde, aynı zaman noktasında ortaya çıkan olay sayısı az ise, bu olayların herbirine bağlı olarak ortaya çıkan olay sayılarının da az olduğu görülmüştür. Bu nedenle $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, olasılıklarının ℓ ve h'nin büyük değerleri için ortaya çıktığı sonucuna ulaşılmıştır.

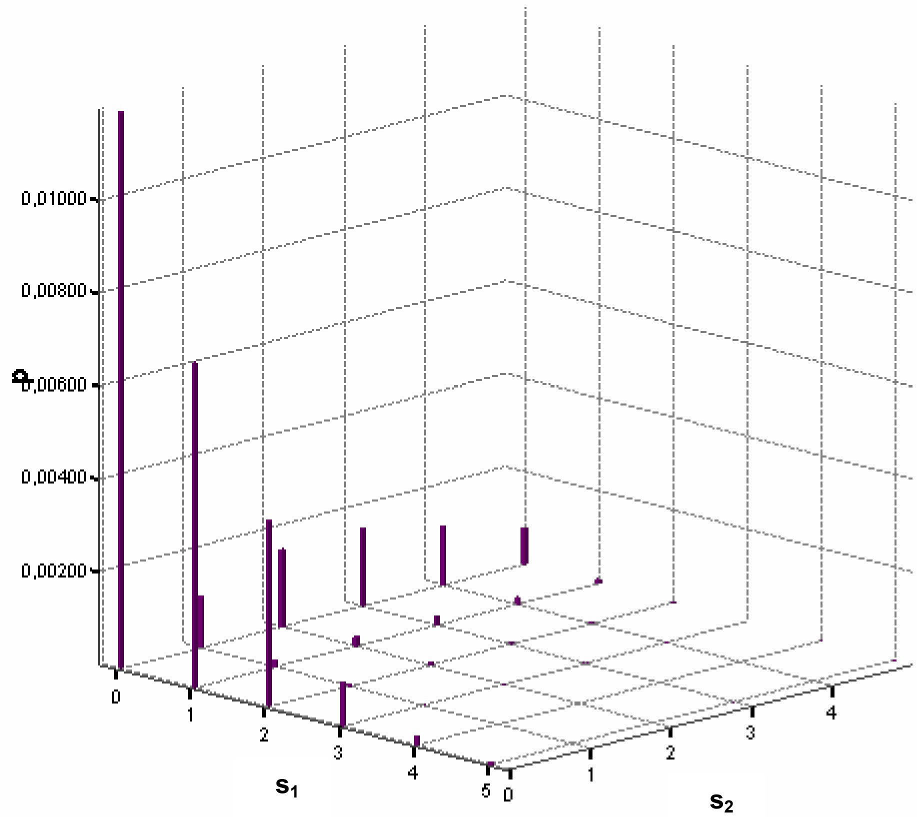
3.4. Model 4 için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin Bileşik Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (2.30)'da $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, μ_1 parametresi ile ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$, μ_2 parametresi ile bağımsız homojen Poisson süreçleri; X_i, $i = 1,2,...,M_t^{(1)}$, aynı dağılımlı, bağımsız kesikli raslantı değişkenleri ve Y_i, $i = 1,2,...,M_t^{(2)}$, de aynı dağılımlı, bağımsız kesikli raslantı değişkenleri olsun. $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$p_{S_t^{(1)},S_t^{(2)}}(\ell,h) = P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$$
$$= p_{S_t^{(1)}}(\ell)p_{S_t^{(2)}}(h). \qquad (3.30)$$

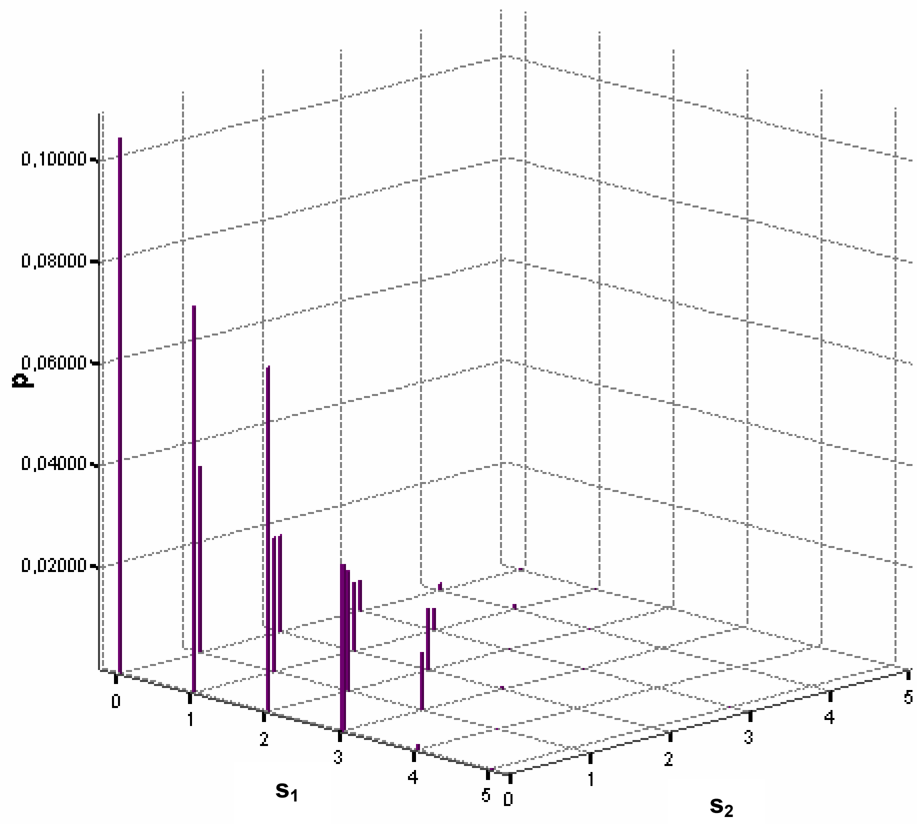
Burada $p_{S_t^{(1)}}(\ell)$ ve $p_{S_t^{(2)}}(h)$ olasılık fonksiyonları Eşitlik (2.12)'den elde edilebilir.
$P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıklarını hesaplayan bir program Oracle veritabanında hazırlanmış; sayısal örnekler Örnek (3.10), Örnek (3.11), Örnek (3.12)'de ve Oracle program kodları EK. 4'te, Oracle programına ilişkin ekran görüntüleri Ek. 7'de verilmiştir.

Örnek (3.10): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.07$; X_i, $i = 1,2,...$ ve Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenleri de sırasıyla $\theta_1 = 0.5$ ve $\theta_2 = 3$ parametreleri ile Poisson dağılımına sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 10$ için Eşitlik (3.34)'ten elde edilen $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları Şekil 3.10'da gösterilmiştir.



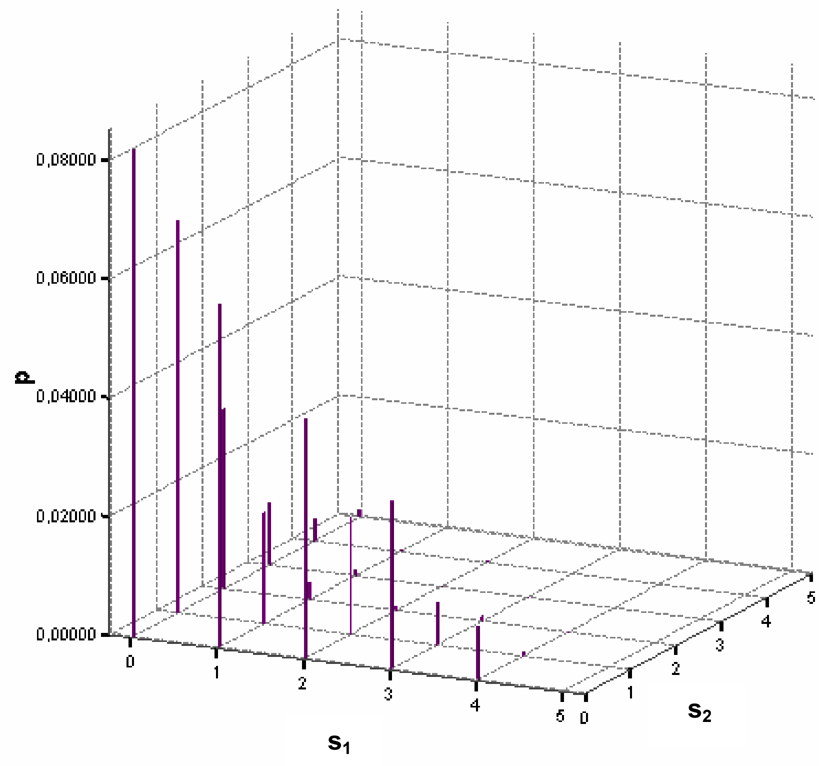
Şekil 3.10. $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.07$; $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 3$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0, 1, 2, \ldots,$ olasılıkları

Örnek (3.11): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.09$; X_i, $i = 1, 2, \ldots$ ve Y_i, $i = 1, 2, \ldots,$ raslantı değişkenleri de sırasıyla $(m_1 = 5,\ p_1 = 0.3)$ ve $(m_2 = 10,\ p_2 = 0.1)$ parametreleri ile ikiterimli dağılıma sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 10$ için Eşitlik (3.30)'dan yararlanarak elde edilen $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0, 1, 2, \ldots,$ olasılıkları Şekil 3.11'de gösterilmiştir.



Şekil 3.11. $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.09$; $(m_1 = 5,\ p_1 = 0.3)$, $(m_2 = 10,\ p_2 = 0.1)$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları

Örnek (3.12): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0.5$; X_i, $i = 1,2,...,M_t^{(1)}$ ve Y_i, $i = 1,2,...,M_t^{(2)}$, raslantı değişkenleri de sırasıyla $\alpha_1 = 0.95$ ve $\alpha_2 = 0.70$ parametreleri ile geometrik dağılıma sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 10$ için Eşitlik (3.30)'dan elde edilen $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0,1,2,...,$ olasılıkları Şekil 3.12'de gösterilmiştir.



Şekil (3-12). $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 0.5$; $\alpha_1 = 0.95$, $\alpha_2 = 0.70$ ve $t = 10$ için $P(S_{10}^{(1)} = \ell, S_{10}^{(2)} = h)$, $\ell, h = 0, 1, 2, \ldots$, olasılıkları

$\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin bağımlı olduğu durumda Şekil (3.7)-Şekil (3.9)'da verilen olasılıklar ile $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin bağımsız olduğu durumda Şekil (3.10)-Şekil (3.12)'de verilen olasılıklar karşılaştırıldığında, ℓ, h'nin küçük değerleri için $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$ olasılıklarının daha büyük olduğu ancak ℓ, h'nin büyük değerleri için $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$ olasılıklarının daha küçük olduğu görülmüştür.

3.5. Model 4 için $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$'nin Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (2.32)'de, Poisson süreçleri homojen; X_i, $i = 1, 2, \ldots$ ve Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, kesikli raslantı değişkenleri olsun. Z_t'nin olasılık fonksiyonunu elde edebilmek için $Z_t^{(1)} = S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ ve $Z_t^{(2)} = S_t^{(2)}$ olarak alınırsa, $Z_t^{(1)}$ ve $Z_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
p_{Z_t^{(1)},Z_t^{(2)}}(z_1,z_2) &= P(Z_t^{(1)}=z_1, Z_t^{(2)}=z_2) \\
&= P(S_t^{(1)}+S_t^{(2)}=z_1, S_t^{(2)}=z_2) \\
&= P(S_t^{(1)}=z_1-z_2, S_t^{(2)}=z_2) \\
&= p_{S_t^{(1)}}(z_1-z_2)p_{S_t^{(2)}}(z_2).
\end{aligned}
$$

Buradan $Z_t^{(1)}=S_t^{(1)}+S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki eşitlikten elde edilir:

$$p_{Z_t^{(1)}}(z_1)=\sum_{z_2} p_{S_t^{(1)}}(z_1-z_2)p_{S_t^{(2)}}(z_2). \tag{3.31}$$

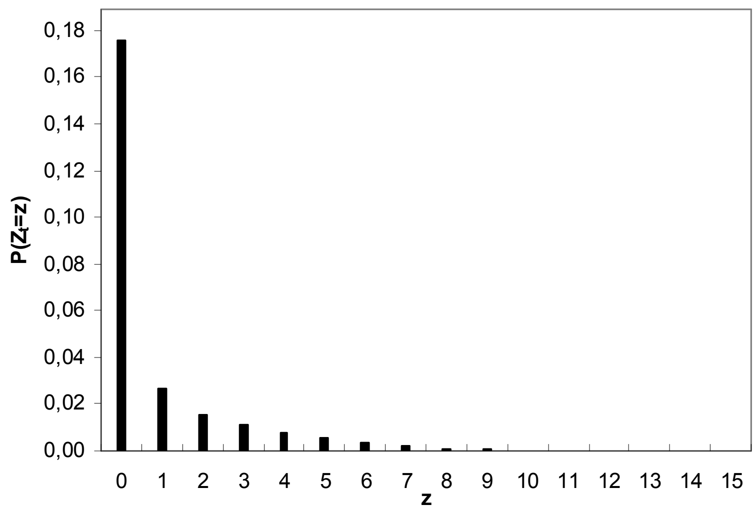
Eğer X_i, $i=1,2,...,M_t^{(1)}$ ve Y_i, $i=1,2,...,M_t^{(2)}$, kesikli raslantı değişkenleri pozitif değerler alıyorsa,

$$p_{Z_t^{(1)}}(z_1)=\sum_{z_2=0}^{z_1} p_{S_t^{(1)}}(z_1-z_2)p_{S_t^{(2)}}(z_2) \tag{3.32}$$

yazılabilir. Burada $p_{S_t^{(1)}}(.)$ ve $p_{S_t^{(2)}}(.)$ olasılık fonksiyonları gene Eşitlik (2.12)'den elde edilebilir.

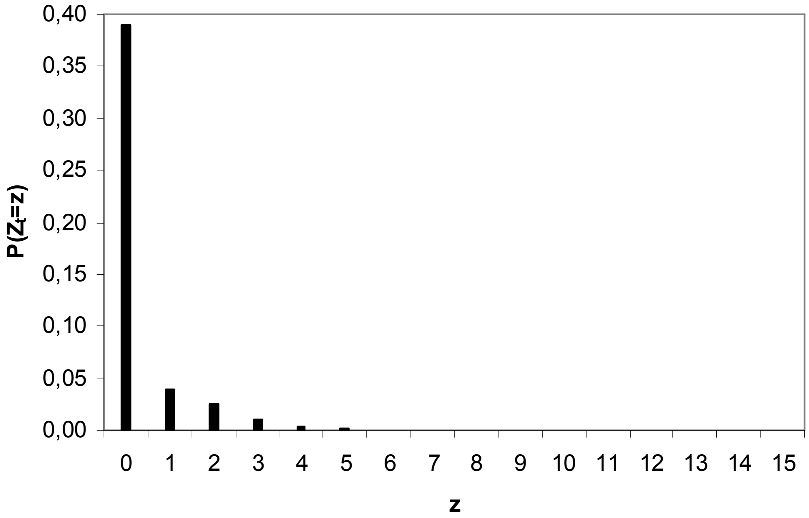
Örnek (3.13), Örnek (3.14) ve Örnek (3.15)'te Eşitlik (3.32)'de verilen olasılık fonksiyonunun uygulanabilirliği Oracle veritabanında hazırlanan program yardımıyla gösterilmiştir. Oracle program kodları EK. 5'te, Oracle programına ilişkin ekran görüntüleri Ek. 7'de verilmiştir.

Örnek (3.13): $\{M_t^{(1)}, t\geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t\geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1=0.4$, $\mu_2=0.2$; X_i, $i=1,2,...$ ve Y_i, $i=1,2,...$, raslantı değişkenleri de sırasıyla $\theta_1=0.5$ ve $\theta_2=3$ parametreleri ile Poisson dağılımına sahip raslantı değişkenleri olsun. $t=5$ için Eşitlik (3.32)'den yararlanarak elde edilen $P(Z_t^{(1)}=z_1)$, $z_1=0,1,2,...,$ olasılıkları Şekil 3.13'te gösterilmiştir.



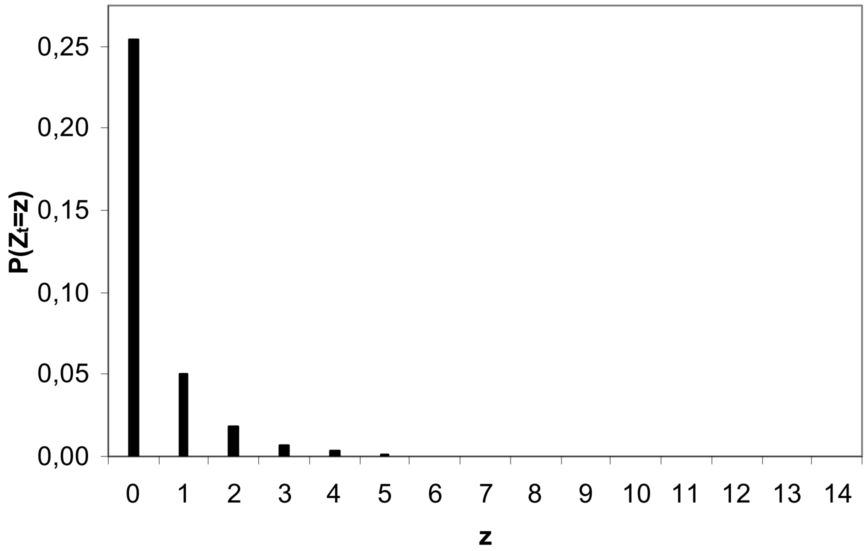
Şekil 3.13. $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.2$; $\theta_1 = 0.5$, $\theta_2 = 3$ ve $t = 5$ için $P(Z_5^{(1)} = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2, \ldots$, olasılıkları

Örnek (3.14): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 0.25$, $\mu_2 = 0.004$; X_i, $i = 1, 2, \ldots$ ve Y_i, $i = 1, 2, \ldots$, raslantı değişkenleri de sırasıyla $(m_1 = 6, p_1 = 0.2)$ ve $(m_2 = 10, p_2 = 0.75)$ parametreleri ile ikiterimli dağılıma sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 5$ için Eşitlik (3.32)'den yararlanarak elde edilen $P(Z_t^{(1)} = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2, \ldots$, olasılıkları Şekil 3.14'te gösterilmiştir.



Şekil 3.14. $\mu_1 = 0.25$, $\mu_2 = 0.004$; $(m_1 = 6, p_1 = 0.2)$, $(m_2 = 10, p_2 = 0.75)$ ve $t = 5$ için $P(Z_5^{(1)} = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2, \ldots$, olasılıkları

Örnek (3.15): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.8$; X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ raslantı değişkenleri de sırasıyla $\alpha_1 = 0.615$ ve $\alpha_2 = 0{,}85$ parametreleri ile geometrik dağılıma sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 5$ için Eşitlik (3.32)'den elde edilen $P(Z_t^{(1)} = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları Şekil 3.15'te gösterilmiştir.



Şekil 3.15. $\mu_1 = 0.4$, $\mu_2 = 0.8$; $\alpha_1 = 0.615$, $\alpha_2 = 0{,}85$ ve $t = 5$ için $P(Z_5^{(1)} = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları

3.6. Model 4 için $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin Olasılık Fonksiyonu

Eşitlik (2.33)'te, Poisson süreçleri homojen; X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...,$ kesikli raslantı değişkenleri olsun. $D_t = S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonunu elde edebilmek için, $D_t^{(1)} = S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$ ve $D_t^{(2)} = S_t^{(1)}$ olarak alınırsa, $D_t^{(1)}$ ve $D_t^{(2)}$ raslantı değişkenlerinin bileşik olasılık fonksiyonu,

$$
\begin{aligned}
p_{D_t^{(1)}, D_t^{(2)}}(d_1, d_2) &= P(D_t^{(1)} = d_1, D_t^{(2)} = d_2) \\
&= P(S_t^{(1)} - S_t^{(2)} = d_1, S_t^{(1)} = d_2) \\
&= P(S_t^{(1)} = d_1 + d_2, S_t^{(2)} = d_2) \\
&= p_{S_t^{(1)}}(d_1 + d_2) p_{S_t^{(2)}}(d_2)
\end{aligned}
$$

olur. Buna göre, $D_t^{(1)} = S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibi elde edilebilir:

$$p_{D_t^{(1)}}(d_1) = \sum_{d_2}^{\infty} p_{S_t^{(1)}}(d_1 + d_2) p_{S_t^{(2)}}(d_2). \tag{3.33}$$

Eşitlik (2.33)'te tanımlanan $D_t^{(1)}$ raslantı değişkeni negatif ve pozitif değerler alabililr. X_i, $i = 1, 2, ..., M_t^{(1)}$ ve Y_i, $i = 1, 2, ..., M_t^{(2)}$, kesikli raslantı değişkenleri pozitif değerler alıyorsa, $d = 0, 1, 2, ...$ için aşağıda verilen eşitlikler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
P(D_t^{(1)} = -d) &= p_{S_t^{(1)}}(0) p_{S_t^{(2)}}(d) + p_{S_t^{(1)}}(1) p_{S_t^{(2)}}(d+1) + p_{S_t^{(1)}}(2) p_{S_t^{(2)}}(d+2) + ..., \\
P(D_t^{(1)} = d) &= p_{S_t^{(1)}}(d) p_{S_t^{(2)}}(0) + p_{S_t^{(1)}}(d+1) p_{S_t^{(2)}}(1) + p_{S_t^{(1)}}(d+2) p_{S_t^{(2)}}(2) + ..., \\
P(D_t^{(1)} = 0) &= p_{S_t^{(1)}}(0) p_{S_t^{(2)}}(0) + p_{S_t^{(1)}}(1) p_{S_t^{(2)}}(1) + p_{S_t^{(1)}}(2) p_{S_t^{(2)}}(2) + ...
\end{aligned} \tag{3.34}$$

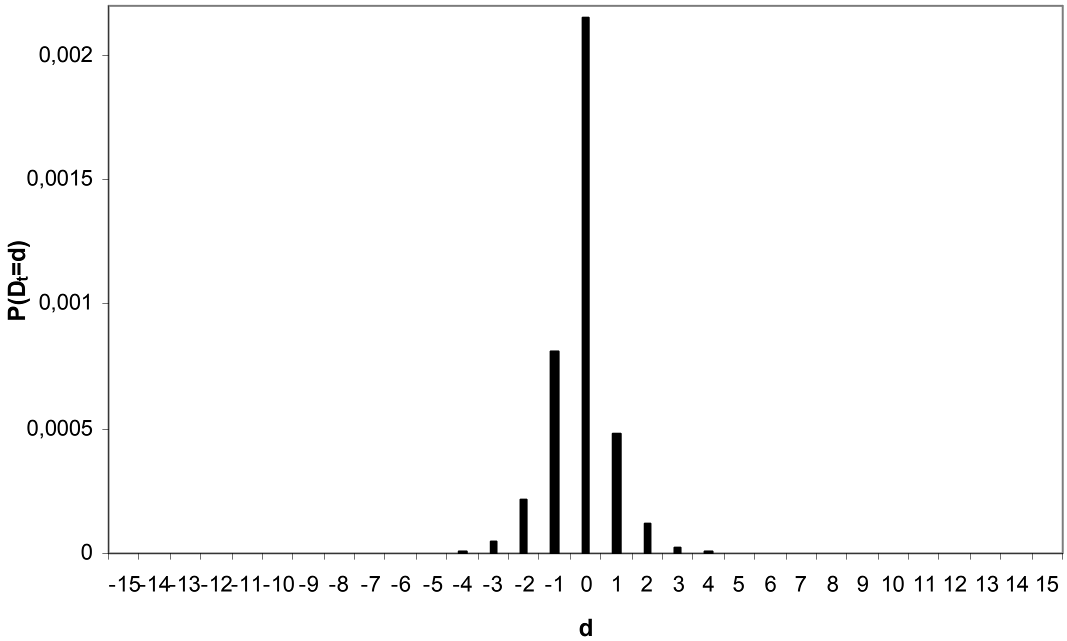
ya da

$$\begin{aligned}
P(D_t^{(1)} = -d) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{S_t^{(1)}}(i) p_{S_t^{(2)}}(d+i), \\
P(D_t^{(1)} = d) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{S_t^{(1)}}(d+i) p_{S_t^{(2)}}(i), \\
P(D_t^{(1)} = 0) &= \sum_{i=0}^{\infty} p_{S_t^{(1)}}(i) p_{S_t^{(2)}}(i).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Burada $p_{S_t^{(1)}}(.)$ ve $p_{S_t^{(2)}}(.)$ olasılık fonksiyonları gene Eşitlik (2.12)'den elde edilebilir.

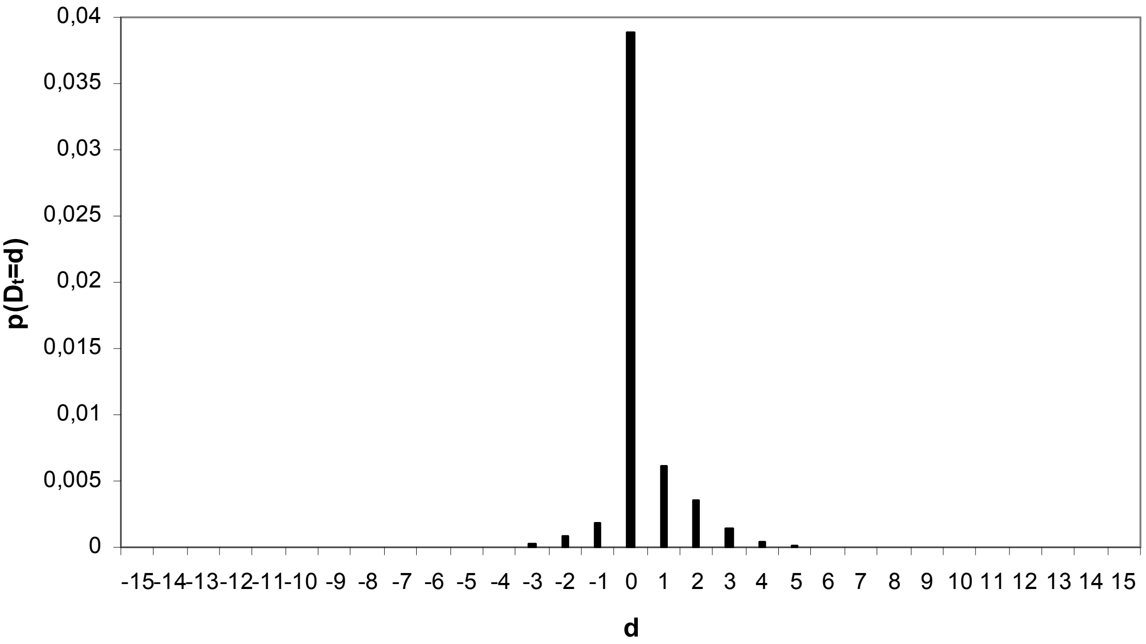
Eşitlik (3.35)'te verilen $P(D_t^{(1)} = d)$, $d = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...,$ olasılıklarını hesaplayan bir program Oracle veritabanında hazırlanmış; sayısal örnekler Örnek (3.16), Örnek (3.17) ve Örnek (3.18)'de verilmiştir. Oracle program kodları EK. 6'da, Oracle programına ilişkin ekran görüntüleri de Ek. 7'de verilmiştir.

Örnek (3.16): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$; X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenleri de sırasıyla $\theta_1 = 0.3$ ve $\theta_2 = 0.2$ parametreleri ile Poisson dağılımına sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 10$ için Eşitlik (3.42)'den elde edilen $P(D_t^{(1)} = d)$, $d = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları Şekil 3.16'da gösterilmiştir.



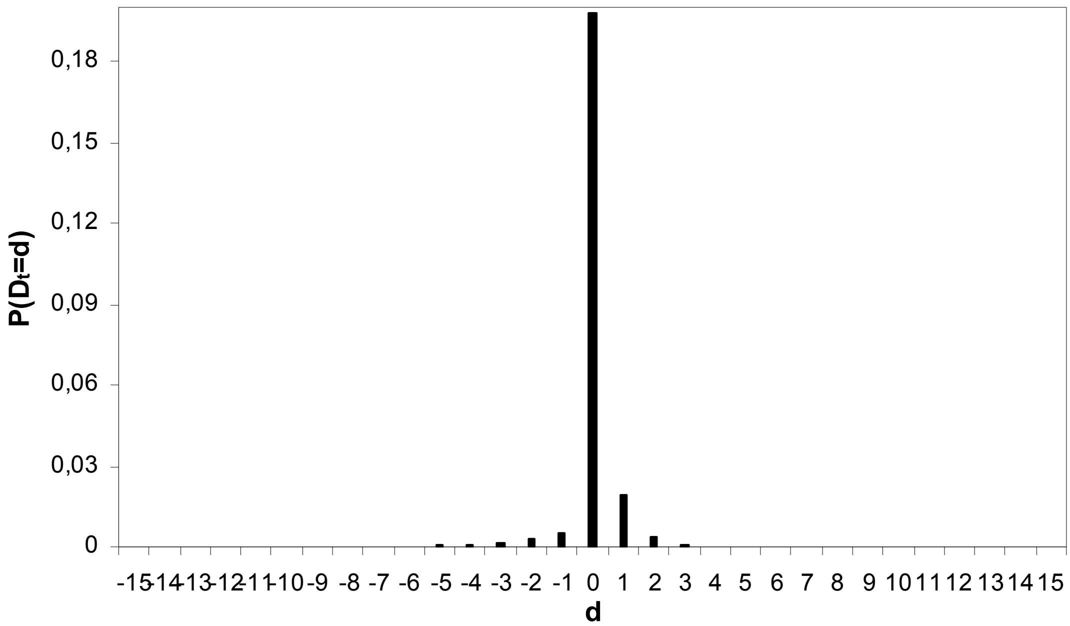
Şekil 3.16. $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$; $\theta_1 = 0.3$, $\theta_2 = 0.2$ ve $t = 10$ için $P(D_{10}^{(1)} = d)$, $d = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları

Örnek (3.17): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.4$; X_i, $i = 1, 2, ...$ ve Y_i, $i = 1, 2, ...$, raslantı değişkenleri de sırasıyla $(m_1 = 7,\ p_1 = 0.2)$ ve $(m_2 = 10,\ p_2 = 0.1)$ parametreleri ile ikiterimli dağılıma sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 10$ için Eşitlik (3.35)'ten elde edilen $P(D_t^{(1)} = d)$, $d = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları Şekil 3.17'de gösterilmiştir.



Şekil 3.17. $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 0.4$; $(m_1 = 7,\ p_1 = 0.2)$, $(m_2 = 10,\ p_2 = 0.1)$ ve $t = 10$ için $P(D_{10}^{(1)} = d)$, $d = ...,-2,-1,0,1,2,...,$ olasılıkları

Örnek (3.18): $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin parametreleri sırasıyla $\mu_1 = 0.75$, $\mu_2 = 0.1$; X_i, $i = 1,2,...$ ve Y_i, $i = 1,2,...,$ raslantı değişkenleri de sırasıyla $\alpha_1 = 0.85$ ve $\alpha_2 = 0.5$ parametreleri ile geometrik dağılıma sahip raslantı değişkenleri olsun. $t = 10$ için Eşitlik (3.35)'ten elde edilen $P(D_t^{(1)} = d)$, $d = ...,-2,-1,0,1,2,...,$ olasılıkları Şekil 3.18'de gösterilmiştir.



Şekil 3.18. $\mu_1 = 0.75$, $\mu_2 = 0.1$; $\alpha_1 = 0.85$, $\alpha_2 = 0.5$ ve $t = 10$ için $P(D_{10}^{(1)} = d)$, $d = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...,$ olasılıkları

Bu bölümde verilen tüm örneklerde $\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h) = 1$, $\sum_{z_1=0}^{\infty} P(Z_t = z_1) = 1$, $\sum_{d=-\infty}^{\infty} P(D_t = d) = 1$'in sağlandığı görülmüştür.

4. SONUÇ VE TARTIŞMA

$$(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i, \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right), \quad (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_i \right), \quad (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right)$$

biçiminde tanımlanan bağımlı iki değişkenli birleşik Poisson süreçlerinde $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonlarının fonksiyonel biçimine ve $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right)$ biçiminde tanımlanan bağımsız iki değişkenli birleşik Poisson süreci için $S_t^{(1)}$ ve $S_t^{(2)}$'nin bileşik olasılık fonksiyonunun, $S_t^{(1)} + S_t^{(2)}$ ve $S_t^{(1)} - S_t^{(2)}$'nin olasılık fonksiyonlarının fonksiyonel biçimlerine de ulaşmanın oldukça güç olduğu belirtilmişti.

Bu çalışmanın Üçüncü Bölümü'nde verilen sonuçlara göre, Poisson süreçleri homojen; X_i ve Y_i, $i = 1, 2, ...$, kesikli raslantı değişkenleri ise,

$$(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t} X_i, \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right), \quad (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{N_t^{(0)}+N_t^{(2)}} Y_i \right), \quad (S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right)$$

biçiminde tanımlanan bağımlı iki değişkenli birleşik Poisson süreçleri için $P(S_t^{(1)} = s_1, S_t^{(2)} = s_2)$, $s_1, s_2 = 0, 1, 2, ...$ ve $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)}) = \left(\sum_{i=1}^{M_t^{(1)}} X_i, \sum_{i=1}^{M_t^{(2)}} Y_i \right)$ biçiminde tanımlanan bağımsız iki değişkenli birleşik Poisson süreci için $P(S_t^{(1)} = s_1, S_t^{(2)} = s_2)$, $s_1, s_2 = 0, 1, 2, ...$; $P(Z_t = S_t^{(1)} + S_t^{(2)} = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2...$; $P(D_t = S_t^{(1)} - S_t^{(2)} = d)$, $d = ... -2, -1, 0, 1, 2...$, olasılıklarını hesaplama olanağını veren fonksiyonlara ulaşılabileceği görüldü. Oracle veritabanında hazırlanan programlar yardımıyla olasılıkların hesaplandığı örneklerle de bu fonksiyonların uygulanabilirliği gösterildi.

Şekil (3-7)-Şekil (3.9)'da verilen olasılıklar birlikte incelendiğinde, $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$ ve $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçleri arasındaki korelasyon katsayısı $\rho = 0.5$ iken, elde edilen fonksiyonel biçimin iki değişkenli normal dağılıma benzediği görülmüştür. Ayrıca Şekil (3-1)-Şekil (3.9)'da verilen olasılıklar birlikte incelendiğinde, aynı zaman noktasında ortaya çıkan olay sayısı az ise, bu olayların herbirine bağlı olarak ortaya çıkan olay sayılarının da az olduğu görülmüştür. Bu nedenle $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$, olasılıklarının ℓ ve h'nin büyük değerleri için ortaya çıktığı sonucuna ulaşılmıştır. $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin bağımlı olduğu durumda Şekil (3.7)-Şekil (3.9)'da verilen olasılıklar ile $\{M_t^{(1)}, t \geq 0\}$, $\{M_t^{(2)}, t \geq 0\}$ homojen Poisson süreçlerinin bağımsız olduğu durumda Şekil (3.10)-Şekil (3.12)'de verilen olasılıklar karşılaştırıldığında, ℓ, h'nin küçük değerleri için $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$ olasılıklarının daha büyük olduğu ancak ℓ, h'nin büyük değerleri için $P(S_t^{(1)} = \ell, S_t^{(2)} = h)$ olasılıklarının daha küçük olduğu görülmüştür.

Daha sonra yapılması düşünülen çalışmalar,

- Gerçek verilere ulaşılabilirse, örneğin Özel ve İnal (2008a)'nın çalışmasında kullanılan Türkiye'de ortaya çıkan depremlere ilişkin artçı deprem sayılarına ek olarak öncü deprem sayıları da bulunabilirse, elde edilen olasılık fonksiyonlarının bu verilere uygulanması,

- Bu çalışmanın Üçüncü Bölümü'nde verilen olasılık fonksiyonlarının X_i, Y_i, $i = 1, 2, \ldots,$ raslantı değişkenlerinin bağımlı oldukları durum için elde edilmesi

biçimindedir.

Bu çalışmanın bundan sonra yapılması düşünülen bağımlı birleşik Poisson süreçleri konusundaki çalışmalara temel oluşturacağını ve yol göstereceğini umarız.

KAYNAKLAR

Ambagaspitiya, R.S., 1999, On the distributions of two classes of correlated aggregate claims, Insurance: Mathematics and Economics, 24, 301-338.

Cox, D., 2006, Selected Statistical Papers of Sir David Cox: Design of Investigations, Statistical Methods and Applications, Volume 1, Cambridge University Press.

Feller, W., 1957, An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Volume II, John Wiley and Sons Inc., New York.

Haight, F.A., 1967, Handbook of the Poisson Distribution, John Wiley and Sons Inc., New York.

Hesselager, O., 1996, Recursions for certain bivariate counting distributions and their compound distributions, Astin Bulletin, 24, 19-32.

Homer, D., 2006, Aggregating bivariate claim severities with numerical Fourier inversion, Casualty Actuarial Society Forum.

Karlin, S., Taylor, H. E., 1975, A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, NewYork.

Kocherlakota, S., Kocherlakota, K., 1992, Bivariate Discrete Distributions, Marcel Dekker, NewYork.

Özel, G., 2005, Birleşik Poisson Süreci Üzerine Bir Çalışma, H.Ü. Bilim Uzmanlığı Tezi.

Özel, G., İnal, C., 2007, Cumulative distribution of first exit time for a compound Poisson process, Bulletin of the International Statistical Institute, LXII, 2890-2893.

Özel, G., İnal, C., 2008a, The probability function of the compound Poisson process and an application to aftershock sequence in Turkey, Environmetrics, 19, 1, 79-85.

Özel, G., İnal, C., 2008b, The probability function of the compound Poisson distribution using integer partitions and Ferrer's Graph, Bulletin of Statistics and Economics, Spring Vol. 2.

Özel, G., İnal, C., 2009, The probability function of geometric Poisson distribution, Journal of Statistical Computation and Simulation, Online Basıldı.

Panjer, H.H., 1981, Recursive evaluation of a family of compound distributions, Astin Bulletin, 12, 22-26.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J., 1998, Stochastic Processes for Insurance and Finance, John Wiley & Sons, New York.

Sundt, B., 1999, On multivariate Panjer's recursions, Astin Bulletin, 29, 29-46.

Sundt, B., Jewell, W.S., 1981, Further Results on Recursive Evaluation of Compound Distributions, Astin Bulletin, 12, 27-39.

Synder, D.L., Miller, M.I., 1991, Random Point Processes in Time and Space, Spring-Verlag, New York.

Vernic, R., 2001, Evaluating the bivariate compound generalized Poisson distribution, Annals of Statistics of Ovidius Constanta University, 9(2), 181-192.

Wang, S, 1999, Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms, Proceeding of the Casualty Actuarial Society, 57-133.

EKLER DİZİNİ

EK 1. MODEL 1 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI

```
FUNCTION POISSON RETURN number IS
 cursor c1( s number) is
      select *
      from   fnc_poisson2 where fRow=s;

 cursor c2 is
      select *
      from   fnc_poisson2 order by fRow;

 cursor c3 is
      select *
      from   fnc_poisson order by fRow;

r1                   c1%rowtype;
r2                   c2%rowtype;
r3                   c3%rowtype;
F0                   NUMBER;
F1                   NUMBER;
F                    NUMBER;
LamdaP_i             NUMBER;
LamdaP_n             NUMBER;
L0                   NUMBER;
lamda1               NUMBER;
e                    NUMBER;
f_final              NUMBER;
p0                   NUMBER;
S                    VARCHAR2(1000);
subscript            VARCHAR2(1000);
term                 NUMBER;
k                    NUMBER;
i                    NUMBER;
j                    NUMBER;
m                    NUMBER;
n                    NUMBER;
p                    NUMBER := 0;
z                    NUMBER;
a                    VARCHAR2 (1);
q                    NUMBER;
c                    NUMBER;
d                    NUMBER;
L                    NUMBER;
us                   NUMBER := 1;
y_denom              NUMBER;
denom                NUMBER;

BEGIN
i               := 1;
LamdaP_i        := 0;
e               := 2.718281;
y_denom         := 1;

DELETE FROM fnc_poisson;
DELETE FROM fnc_poisson2;
```

EK 1. MODEL 1 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
SELECT LamdaP  INTO LAMDA1  FROM FNC_LAMDAP  WHERE LROW=1;
F0 := Power(e,-:lamda);

insert into fnc_poisson  values (0,0,0,0,F0);
k := 1;
loop
      if  k=1 then
            F := lamda1;
      else
            i := k-2;
            n := 2;
            F := power(lamda1,k)/fact(k);
            loop
            begin
            select lamdaP into LamdaP_n from fnc_lamdaP WHERE lrow = n;
            exception when no_data_found then
                  message('The value of lambda is not defined in the
system for n='||n||');
            end;
            F := F + (power(lamda1,i)/fact(i))* (LamdaP_n);
            i := i-1;
            n := n+1;
            exit when i < 0;
      end loop;
end if;
insert into fnc_poisson (fRow,A) values (k,F);
F := 0;
k := k+1;
exit when k > :fNumber;
end loop;
k := 4 ;
        loop
            i := k-2;
            m := 1;
            n := 2;
              subcript  := null;
           select lamdaP into LamdaP_i from fnc_lamdaP WHERE lrow = i ;
      select lamdaP into LamdaP_n from fnc_lamdaP WHERE lrow = n ;
           F :=LamdaP_i*LamdaP_n;
           subscript  := i||'.'||n;
           us := 1;
           if i=n then us:=us+1; end if;
           y_denom := nvl(fact(us),1);
           if F >0 THEN
           insert into fnc_poisson2 values (k,m,y_denom,F,subscript);
           update fnc_poisson  set B = NVL(B,0) + F/y_denom where
fRow=k;
            m := m+1;
           end if;
           open c1(i);
                              loop
                              fetch c1 into r1;
                              exit when c1%notfound;
                              z:=n;
                              p:=0;
                              loop       .
                                if instr(r1.subscript,z-1)>0 then
```

EK 1. MODEL 1 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
                                        p:=p+1;
                                        end if;
                                        z:=z-1;
                                        exit when z=1 or p>0;
                              end loop;
                              if p=0 then
                               subscript := r1.subscript||'.'||n;
                   F      :=r1.value*LamdaP_n;

 Denom := COUNTCHAR(r1.subscript,n)+1;
                   y_denom:= r1.denom*fact(denom)/fact(denom-1);
                     if F >0 THEN
                      insert into fnc_poisson2 values
(k,m,nvl(y_denom,1),F,subscript);
                      update fnc_poisson  set B = NVL(B,0) + F/y_denom
where fRow=k;
                      y_denom :=1;
                      m:=m+1;
                     end if;
                               end if;
                             end loop;
                      close c1;
                      i := i-1;
                      n := n+1;
                      p := 0;
                      exit when i < k-trunc(k/2);
                  end loop;
          k := k + 1;
          exit when k > :fNumber;
    end loop;
    F := 0;
    i := 1;
    loop
      j := i-1;
      n := 1;
     loop
     open c1(j);
      loop
       fetch c1 into r1;
       exit when c1%notfound;
       F := F + power(lamda1,n)/fact(n)*r1.value/r1.denom;
      end loop;
      close c1;
      j := j-1;
      n := n+1;
      exit when j < 3;
     end loop;
     update fnc_poisson set C =NVL( F,0) where fRow = i;
     F := 0;
     i := i+1;
     exit when i > :fNumber;
   end loop;

   update fnc_poisson set value=nvl(NVL(a,0)+NVL(b,0)+NVL(c,0),0)*F0
where fRow> 0;

   MESSAGE('stop'); PAUSE;
```

```
   go_block('fnc_poisson');
   execute_query;
   return F;
END ;
FUNCTION fact(n number) RETURN number IS
fact number;
i    number;
BEGIN
      i:=1;
      fact := 1;
  loop
      fact :=fact* i;
            i:=i+1;
      exit when i>n;
  end loop;

  return fact;
END;
```

EK 2. MODEL 2 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI

```
FUNCTION POISSON RETURN number IS

 cursor c1( s number) is
      select *
      from   fnc_poisson2 where fRow=s;

 cursor c2 is
      select *
      from   fnc_poisson2 order by fRow;

 cursor c3 is
      select *
      from   fnc_poisson order by fRow;

r1                   c1%rowtype;
r2                   c2%rowtype;
r3                   c3%rowtype;
F0                   NUMBER;
F1                   NUMBER;
F                    NUMBER;
LamdaP_i             NUMBER;
LamdaP_n             NUMBER;
L0                   NUMBER;
lamda1               NUMBER;
e                    NUMBER;
f_final              NUMBER;
p0                   NUMBER;
S                    VARCHAR2(1000);
subscript            VARCHAR2(1000);
term                 NUMBER;
k                    NUMBER;
i                    NUMBER;
j                    NUMBER;
m                    NUMBER;
n                    NUMBER;
p                    NUMBER := 0;
z                    NUMBER;
a                    VARCHAR2 (1);
q                    NUMBER;
c                    NUMBER;
d                    NUMBER;
L                    NUMBER;
us                   NUMBER := 1;
y_denom              NUMBER;
denom                NUMBER;

BEGIN
i              := 1;
LamdaP_i       := 0;
e              := 2.718281;
y_denom        := 1;

DELETE FROM fnc_poisson;
DELETE FROM fnc_poisson2;
```

EK 2. MODEL 2 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
SELECT LamdaP  INTO LAMDA1  FROM FNC_LAMDAP  WHERE LROW=1;
F0 := Power(e,-:lamda);

insert into fnc_poisson  values (0,0,0,0,F0);
k := 1;
loop
      if  k=1 then
            F := lamda1;
      else
            i := k-2;
            n := 2;
            F := power(lamda1,k)/fact(k);
            loop
            begin
            select lamdaP into LamdaP_n from fnc_lamdaP WHERE lrow = n;
            exception when no_data_found then
                  message('The value of lambda is not defined in the
system for n='||n||');
            end;
            F := F + (power(lamda1,i)/fact(i))* (LamdaP_n);
            i := i-1;
            n := n+1;
            exit when i < 0;
      end loop;
end if;
insert into fnc_poisson (fRow,A) values (k,F);
F := 0;
k := k+1;
exit when k > :fNumber;
end loop;
k := 4 ;
        loop
            i := k-2;
            m := 1;
            n := 2;
              subcript  := null;
         select lamdaP into LamdaP_i from fnc_lamdaP WHERE lrow = i ;
      select lamdaP into LamdaP_n from fnc_lamdaP WHERE lrow = n ;
           F :=LamdaP_i*LamdaP_n;
           subscript  := i||'.'||n;
           us := 1;
           if i=n then us:=us+1; end if;
           y_denom := nvl(fact(us),1);
           if F >0 THEN
           insert into fnc_poisson2 values (k,m,y_denom,F,subscript);
           update fnc_poisson  set B = NVL(B,0) + F/y_denom where
fRow=k;
            m := m+1;
           end if;
           open c1(i);
                              loop
                              fetch c1 into r1;
                              exit when c1%notfound;
                              z:=n;
                              p:=0;
                              loop       .
                                if instr(r1.subscript,z-1)>0 then
```

EK 2. MODEL 2 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
                                        p:=p+1;
                                        end if;
                                        z:=z-1;
                                        exit when z=1 or p>0;
                              end loop;
                              if p=0 then
                               subscript := r1.subscript||'.'||n;
                   F      :=r1.value*LamdaP_n;

 Denom := COUNTCHAR(r1.subscript,n)+1;
                   y_denom:= r1.denom*fact(denom)/fact(denom-1);
                     if F >0 THEN
                      insert into fnc_poisson2 values
(k,m,nvl(y_denom,1),F,subscript);
                      update fnc_poisson  set B = NVL(B,0) + F/y_denom
where fRow=k;
                      y_denom :=1;
                      m:=m+1;
                     end if;
                               end if;
                             end loop;
                      close c1;
                      i := i-1;
                      n := n+1;
                      p := 0;
                      exit when i < k-trunc(k/2);
                  end loop;
          k := k + 1;
          exit when k > :fNumber;
    end loop;
    F := 0;
    i := 1;
    loop
      j := i-1;
      n := 1;
     loop
     open c1(j);
      loop
       fetch c1 into r1;
       exit when c1%notfound;
       F := F + power(lamda1,n)/fact(n)*r1.value/r1.denom;
      end loop;
      close c1;
      j := j-1;
      n := n+1;
      exit when j < 3;
     end loop;
     update fnc_poisson set C =NVL( F,0) where fRow = i;
     F := 0;
     i := i+1;
     exit when i > :fNumber;
   end loop;

   update fnc_poisson set value=nvl(NVL(a,0)+NVL(b,0)+NVL(c,0),0)*F0
where fRow> 0;

   MESSAGE('stop'); PAUSE;
   go_block('fnc_poisson');
```

EK 2. MODEL 2 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
   execute_query;
   return F;
END ;

FUNCTION fact (n number) RETURN number IS
fact number;
i number;
BEGIN
      i:=1;
      fact:= 1;
   loop
      fact:= fact*I;
           i:=i+1;
      exit when i>n;
   end loop;

   return fact;
END;
FUNCTION COUNTCHAR (p_string char, p_string1 char) RETURN number IS
i   number :=1;
say number :=0;
type t_vector is table of varchar2(10) index by binary_integer;
v_value t_vector;
BEGIN
             loop
               V_VALUE(i):=substr (p_string, i, 1);
               if v_value(i):=p_string1 then
                  say :=say+1;
                 end if;
               i:= i+1;
               exit when i-1> length(p_string);
              endloop;
return say;
END;
```

EK 3. MODEL 3 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI

```
FUNCTION POISSON RETURN number IS

 cursor c1( s number) is
      select *
      from   fnc_poisson2 where fRow=s;

 cursor c2 is
      select *
      from   fnc_poisson2 order by fRow;

 cursor c3 is
      select *
      from   fnc_poisson order by fRow;

r1                   c1%rowtype;
r2                   c2%rowtype;
r3                   c3%rowtype;
F0                   NUMBER;
F1                   NUMBER;
F                    NUMBER;
LamdaP_i             NUMBER;
LamdaP_n             NUMBER;
L0                   NUMBER;
lamda1               NUMBER;
e                    NUMBER;
f_final              NUMBER;
p0                   NUMBER;
S                    VARCHAR2(1000);
subscript            VARCHAR2(1000);
term                 NUMBER;
k                    NUMBER;
i                    NUMBER;
j                    NUMBER;
m                    NUMBER;
n                    NUMBER;
p                    NUMBER := 0;
z                    NUMBER;
a                    VARCHAR2 (1);
q                    NUMBER;
c                    NUMBER;
d                    NUMBER;
L                    NUMBER;
us                   NUMBER := 1;
y_denom              NUMBER;
denom                NUMBER;

BEGIN
i               := 1;
LamdaP_i        := 0;
e               := 2.718281;
y_denom         := 1;

DELETE FROM fnc_poisson;
DELETE FROM fnc_poisson2;
```

EK 3. MODEL 3 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
SELECT LamdaP  INTO LAMDA1  FROM FNC_LAMDAP  WHERE LROW=1;
F0 := Power(e,-:lamda);

insert into fnc_poisson  values (0,0,0,0,F0);
k := 1;
loop
      if  k=1 then
            F := lamda1;
      else
            i := k-2;
            n := 2;
            F := power(lamda1,k)/fact(k);
            loop
            begin
            select lamdaP into LamdaP_n from fnc_lamdaP WHERE lrow = n;
            exception when no_data_found then
                  message('The value of lambda is not defined in the
system for n='||n||');
            end;
            F := F + (power(lamda1,i)/fact(i))* (LamdaP_n);
            i := i-1;
            n := n+1;
            exit when i < 0;
      end loop;
end if;
insert into fnc_poisson (fRow,A) values (k,F);
F := 0;
k := k+1;
exit when k > :fNumber;
end loop;
k := 4 ;
        loop
            i := k-2;
            m := 1;
            n := 2;
              subcript  := null;
           select lamdaP into LamdaP_i from fnc_lamdaP WHERE lrow = i ;
      select lamdaP into LamdaP_n from fnc_lamdaP WHERE lrow = n ;
           F :=LamdaP_i*LamdaP_n;
           subscript  := i||'.'||n;
           us := 1;
           if i=n then us:=us+1; end if;
           y_denom := nvl(fact(us),1);
           if F >0 THEN
           insert into fnc_poisson2 values (k,m,y_denom,F,subscript);
           update fnc_poisson  set B = NVL(B,0) + F/y_denom where
fRow=k;
            m := m+1;
           end if;
           open c1(i);
                              loop
                              fetch c1 into r1;
                              exit when c1%notfound;
                              z:=n;
                              p:=0;
                              loop         .
                                if instr(r1.subscript,z-1)>0 then
```

EK 3. MODEL 3 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
Dim N() As Integer
Dim m As Integer, t As Integer, k As Integer
Dim Sayfa As Worksheet

Sub Data_Al()
  Dim L(6) As Single, g0 As Single, i As Integer, j As Integer
  Dim satir As Integer, kolon As Integer

  Set Sayfa = Sheet1

  k := Page.Cells(6, 3)
  m := Page.Cells(5, 3)
  t := Page.Cells(4, 3)
  g0:= Page.Cells(15, 30)

  row : = 8
  i := 0
  Do Until Page.Cells(satir, 3)
     i := i + 1
     row := row + 1
  Loop
  value_number := i
  ReDim N(value_number, k)

  For i := 1 To value_number
     For j := 1 To k
        N(i, j) := 0
     Next j
  Next

  For i := 1 To 6
    L(i) := Page.Cells(i + 6, 30)
  Next i

  row := 8
  i := 0
  Do Until Page.Cells(row, 3)
     i := i + 1
     column := 3
     Do Until Page.Cells(satir, kolon) = ""
        j := Page.Cells(satir, kolon)
        'j<:=m olmalı
        N(i, j) := N(i, j) + 1
        column := column + 1
     Loop
     row = row + 1
  Loop
   Discret_Func_Compute g0, L, N

End Sub

Sub Kesikli_Func_Compute(g0 As Single, L() As Single, N() As Integer)
    Dim Sum As Double, Terim As Double, i As Integer, j As Integer
    Dim nom As Double, denom As Double
    Sum = 0
    For i = 1 To value_number
      Term = 0
      nom = 1
```

EK 3. MODEL 3 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
     denom = 1
     For j = 1 To k
        If N(i, j) <> 0 Then
           If j <= 7 Then
              nom = denom * (L(j) * t) ^ N(i, j)
            denom = denom * Application.WorksheetFunction.Fact(N(i, j))
           Else
              pay = 0
           End If
        End If
     Next j
     Terim = nom / denom
     Sum = Sum + Term
   Next i
   Sum = Sum * g0
END;
```

EK 4. MODEL 4 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI

```
FUNCTION HIZLI_PSN (y_fsayi number,y_t number,y_lamda number) RETURN
number IS

 cursor c1( s number) is
         select *
         from   fnc_poisson2 where fsira=s;

 cursor c2 is
         select *
         from   fnc_poisson2 order by fsira;

 cursor c3 is
         select *
         from   fnc_poisson order by fsira;


r1          c1%rowtype;
r2          c2%rowtype;
r3          c3%rowtype;

F0          NUMBER;
F1          NUMBER;
F           NUMBER;
LamdaPt_i NUMBER;
LamdaPt_n NUMBER;
L0          NUMBER;
lamda1 NUMBER;
t           NUMBER;
e           NUMBER;
f_son       NUMBER;
p0          NUMBER;
S           VARCHAR2(1000);
indis       VARCHAR2(1000);
terim       NUMBER;
k           NUMBER;
i           NUMBER;
j           NUMBER;
m           NUMBER;
n           NUMBER;
p           NUMBER := 0;
z           NUMBER;
a           varchar2(1);
q           NUMBER;
y_b         NUMBER;
y_c         NUMBER;
d           NUMBER;
L           NUMBER;
us          NUMBER := 1;
y_payda     NUMBER;
payda       NUMBER;
Y_SAYI      NUMBER;

BEGIN

i             := 1;
LamdaPt_i     := 0;
e             := 2.71828182845;
t             := y_t;
```

EK 4. MODEL 4 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
y_payda     := 1;

DELETE FROM fnc_poisson;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
DELETE FROM fnc_poisson2;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

--Her fonksiyon için tekrar eden formülasyon bölümünün hesabı:
----------
SELECT LamdaPt    INTO P0      FROM FNC_LAMDAPT  WHERE LSIRA=0;  --P0
SELECT LamdaPt/y_t INTO LAMDA1  FROM FNC_LAMDAPT  WHERE LSIRA=1;  --
lamda*p
SELECT MAX(LSIRA) INTO Y_SAYI  FROM FNC_LAMDAPT WHERE LamdaPt>0;


F0 := Power(e,-y_lamda*t*(1-p0));

insert into fnc_poisson  values (0,0,0,0,F0);
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

k := 1;

loop
        if  k=1 then
                F := lamda1*t; --F1
        else
                i := k-2;
                n := 2;
                F := power(lamda1*t,k)/fact(k);
                loop
                begin

                         select lamdaPt into LamdaPt_n from fnc_lamdaPt
WHERE lsira = n ;

                  exception when no_data_found then
                         message('Sistemde n='||n||' için lamda değeri
tanımlı değildir.');
                  end;

                  F   := F + (power(lamda1*t,i)/fact(i))* (LamdaPt_n);

                  i := i-1;
                  n := n+1;
                  exit when i < 0;
          end loop;
        end if;

  insert into fnc_poisson (fsira,A) values (k,F);
  F := 0;
  k := k+1;

  exit when k > y_fsayi;
end loop;
-- :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
```

EK 4. MODEL 4 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
'0';

k := 4 ;
loop
        i := k-2;
        m := 1;
        n := 2;
        indis  := null
                loop
                        select lamdaPt into LamdaPt_i from fnc_lamdaPt
WHERE lsira = i ;
                        select lamdaPt into LamdaPt_n from fnc_lamdaPt
WHERE lsira = n ;

                        F :=LamdaPt_i*LamdaPt_n;

                        indis  :='.'||i||'.'||n||'.';
                        us := 1;
                    if i=n and n<=y_sayi then us:=us+1; end if;
                        y_payda := nvl(fact(us),1);

                        if F >0 THEN
            insert into fnc_poisson2 values (k,y_payda,F,indis);
                        :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';

                        m := m+1;
                        end if;
                        open c1(i);
                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;

                                z:=n;
                                p:=0;
                if n<=y_sayi then
                        loop
                                        y_c:=z-1;
                       if instr(r1.indis,'.'||y_c||'.') >0 then
                                        p:=p+1;
                                                exit;
                                        end if;
                                        z:=z-1;
                                        exit when z=1 or p>0;
                                end loop;
                                if p=0
                                       indis  := r1.indis||n||'.';
                                         F :=r1.deger*LamdaPt_n;
            payda := countchar(r1.indis,n)+1;
          --payda :=1;
            if payda = 0 then y_payda := r1.payda;
            else
               y_payda := r1.payda*fact(payda)/fact(payda-1);
            end if;
```

EK 4. MODEL 4 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
-----------------
if F >0 THEN

---------------
                                insert into fnc_poisson2 values
(k,nvl(y_payda,1),F,indis);
                         :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';
           Y_PAYDA :=1;
           m:=m+1;-
end if;
end if;
                        end loop;
                        close c1;
                        i := i-1; --
                        n := n+1;
                        p := 0;
                        exit when i < k-trunc(k/2);
                end loop;
        k := k + 1;
        exit when k > y_fsayi;
end loop;

k :=4;
i :=1;
loop
              select sum(deger/payda) into y_b from fnc_poisson2 where
fsira=k;
                         update fnc_poisson  set B = y_b where fsira=k;
                 :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';
     n:=1;
     i:=k;
     loop
             y_c :=power(lamda1*t,n)/fact(n);
                     update fnc_poisson set c
=nvl(c,0)+nvl(y_c,0)*nvl(y_b,0) where fsira=i+1;
                    :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';
                     i:=i+1;
                     n:=n+1;
             exit when i>y_fsayi;
     end loop;

k:=k+1;
exit when k>y_fsayi;
end loop;

update fnc_poisson set deger=nvl(NVL(a,0)+NVL(b,0)+NVL(c,0),0)*F0 where
fsira > 0;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :='0';

MESSAGE('İŞLEM TAMAM!'); PAUSE;
go_block('fnc_poisson');
execute_query;

return F;
```

EK 4. MODEL 4 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
END ;

ECLARE
        RESULT varchar2(500);
        xy number;
        i number;
        j number;
        y_dur number;

        cursor c1(i number) is
         select *
         from   fnc_poissong1 where sira=i;

  cursor c2 is
         select *
         from   fnc_poissong1 order by sira;

r1       c1%rowtype;
r2       c2%rowtype;

BEGIN
--RESULT := psn();
delete from fnc_poissong1;
delete from fnc_poissong1sonuc;

 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi1 ,:t1,:lamda1);

insert into fnc_poissong1(sira,xdeger)  (select fsira,deger from
fnc_poisson);

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi2 ,:t2,:lamda2);

update fnc_poissong1 a set ydeger=(select deger from fnc_poisson where
fsira=a.sira);

if :fsayi1<:fsayi2 then
         insert into  fnc_poissong1 (sira,ydeger) (select fsira,deger
from fnc_poisson
where fsira>:fsayi1);
end if;

 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
i:=0;
y_dur :=greatest(:fsayi1,:fsayi2);

                LOOP
                        exit when i>y_dur;
                        open c1(i);
                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;

                                open c2;
                        loop
```

EK 4. MODEL 4 İÇİN ORACLE PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
                                fetch c2 into r2;
                                exit when c2%notfound;
                                xy
:=(nvl(r1.xdeger,0)*nvl(r2.ydeger,0));
      insert into  fnc_poissong1sonuc values
(r1.sira,r1.xdeger,r2.sira,r2.ydeger,xy);
       :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';

                          end loop;
                  close c2;

                        end loop;
                  close c1;

  i:=i+1;
  END LOOP;
GO_BLOCK('FNC_POISSON');
EXECUTE_QUERY;
END;
:LSIRA1 :=0;
GO_BLOCK('FNC_LAMDAPT');
go_item('lsira1');
DELETE FROM fnc_LAMDAPT;
:system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level := '0';
SHOW_VIEW('CAN_LAMDA');
:LSIRA2 :=0;
GO_BLOCK('FNC_LAMDAPT2');
go_item('lsira2');
DELETE FROM fnc_LAMDAPT2;
:system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level := '0';
SHOW_VIEW('CAN_LAMDA2');
```

EK 5. MODEL 4 İÇİN $P(Z_t = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2, ...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI

```
FUNCTION HIZLI_PSN (y_fsayi number,y_t number,y_lamda number) RETURN
number IS

 cursor c1( s number) is
         select *
         from   fnc_poisson2 where fsira=s;

 cursor c2 is
         select *
         from   fnc_poisson2 order by fsira;

 cursor c3 is
         select *
         from   fnc_poisson order by fsira;

r1          c1%rowtype;
r2          c2%rowtype;
r3          c3%rowtype;

F0          NUMBER;
F1          NUMBER;
F           NUMBER;
LamdaPt_i   NUMBER;
LamdaPt_n   NUMBER;
L0          NUMBER;
lamda1      NUMBER;
t           NUMBER;
e           NUMBER;
f_son       NUMBER;
p0          NUMBER;
S           VARCHAR2(1000);
indis       VARCHAR2(1000);
terim       NUMBER;
k           NUMBER;
i           NUMBER;
j           NUMBER;
m           NUMBER;
n           NUMBER;
p           NUMBER := 0;
z           NUMBER;
a           varchar2(1);
q           NUMBER;
y_b         NUMBER;
y_c         NUMBER;
d           NUMBER;
L           NUMBER;
us          NUMBER := 1;
y_payda     NUMBER;
payda       NUMBER;
Y_SAYI      NUMBER;
```

EK 5. MODEL 4 İÇİN $P(Z_t = z_1)$, $z_1 = 0, 1, 2, ...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
BEGIN

i           := 1;
LamdaPt_i   := 0;
e           := 2.71828182845;
t           := y_t;
y_payda     := 1;

DELETE FROM fnc_poisson;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
DELETE FROM fnc_poisson2;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';


SELECT LamdaPt    INTO P0      FROM FNC_LAMDAPT  WHERE LSIRA=0;  --P0
SELECT LamdaPt/y_t INTO LAMDA1  FROM FNC_LAMDAPT  WHERE LSIRA=1;  --
lamda*p
SELECT MAX(LSIRA) INTO Y_SAYI  FROM FNC_LAMDAPT WHERE LamdaPt>0;

F0 := Power(e,-y_lamda*t*(1-p0));

insert into fnc_poisson  values (0,0,0,0,F0);
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

k := 1;

loop
        if  k=1 then
                F := lamda1*t; --F1
        else
                i := k-2;
                n := 2;
                F := power(lamda1*t,k)/fact(k);
                loop
                begin

                select lamdaPt into LamdaPt_n from fnc_lamdaPt WHERE
lsira = n ;

                exception when no_data_found then
              message('Sistemde n='||n||' için lamda değeri tanımlı
değildir.');
                  end;

                  F   := F + (power(lamda1*t,i)/fact(i))* (LamdaPt_n);
                                      i := i-1;
                  n := n+1;
                  exit when i < 0;
          end loop;
        end if;
insert into fnc_poisson (fsira,A) values (k,F);
  F := 0;
  k := k+1;
```

EK 5. MODEL 4 İÇİN $P(Z_t = z_1)$, $z_1 = 0,1,2,...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
-- :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
k := 4 ;
loop
        i := k-2;
        m := 1;
        n := 2;
        indis  := null;
               loop
               select lamdaPt into LamdaPt_i from fnc_lamdaPt WHERE
lsira = i ;
               select lamdaPt into LamdaPt_n from fnc_lamdaPt WHERE
lsira = n ;

                        F :=LamdaPt_i*LamdaPt_n;
                        indis  :='.'||i||'.'||n||'.';
                        us := 1;
                        if i=n and n<=y_sayi then us:=us+1; end if;
                        y_payda := nvl(fact(us),1);

                        if F >0 THEN
                        insert into fnc_poisson2 values
(k,y_payda,F,indis);
        :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';

                        m := m+1;
                        end if;
                        open c1(i);
                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;
                                z:=n;
                                p:=0;
                if n<=y_sayi then
                        loop.
                                        y_c:=z-1;
                                        if instr(r1.indis,'.'||y_c||'.')
>0 then
                                        p:=p+1;
                                                exit;
                                        end if;
                                        z:=z-1;
                                        exit when z=1 or p>0;
                                end loop;
                                if p=0  then
                                        indis  := r1.indis||n||'.';
                                         F :=r1.deger*LamdaPt_n;
            payda := countchar(r1.indis,n)+1;
            payda :=1;
            if payda = 0 then y_payda := r1.payda;
            else
               y_payda := r1.payda*fact(payda)/fact(payda-1);
            end if;
```

EK 5. MODEL 4 İÇİN $P(Z_t = z_1)$, $z_1 = 0,1,2,...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
---------------
--if F >0 THEN
---------------

           insert into fnc_poisson2 values (k,nvl(y_payda,1),F,indis);
     :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
           Y_PAYDA :=1;
      m:=m+1;
end if;
end if;
                        end loop;
                        close c1;
                        i := i-1;
                        n := n+1;
                        p := 0;
                        exit when i < k-trunc(k/2);
                end loop;
        k := k + 1;
        exit when k > y_fsayi;
end loop;

k :=4;
i :=1;
loop
             select sum(deger/payda) into y_b from fnc_poisson2 where
fsira=k;
                                 update fnc_poisson set B = y_b where
fsira=k;
     :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
n:=1;
     i:=k;
     loop
             y_c :=power(lamda1*t,n)/fact(n);
      update fnc_poisson set c =nvl(c,0)+nvl(y_c,0)*nvl(y_b,0)
where fsira=i+1;
      :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';
                     i:=i+1;
                     n:=n+1;
             exit when i>y_fsayi;
     end loop;
k:=k+1;
exit when k>y_fsayi;
end loop;
update fnc_poisson set deger=nvl(NVL(a,0)+NVL(b,0)+NVL(c,0),0)*F0
where fsira > 0;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';
```

EK 5. MODEL 4 İÇİN $P(Z_t = z_1)$, $z_1 = 0,1,2,...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
MESSAGE('İŞLEM TAMAM!'); PAUSE;
go_block('fnc_poisson');
execute_query;

return F;
END ;
DECLARE
        RESULT varchar2(500);
        xy number;
        yz number;
        i number;
        j number;
        y_dur number;
         cursor c1(i number) is
         select *
         from   fnc_poissong1 where sira=i;

  cursor c2 is
         select *
         from   fnc_poissong1 order by sira;
r1          c1%rowtype;
r2          c2%rowtype;

BEGIN
--RESULT := psn();
delete from fnc_poissong1;
delete from fnc_poissong1sonuc;

:system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';
RESULT :=hızlı_psn(:fsayi1 ,:t1,:lamda1);

insert into fnc_poissong1(sira,xdeger)  (select fsira,deger from
fnc_poisson);

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi2 ,:t2,:lamda2);

update fnc_poissong1 a set ydeger=(select deger from fnc_poisson
where fsira=a.sira);

if :fsayi1<:fsayi2 then

insert into  fnc_poissong1 (sira,ydeger) (select fsira,deger from
fnc_poisson
where fsira>:fsayi1);
end if;
:system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';
```

EK 5. MODEL 4 İÇİN $P(Z_t = z_1)$, $z_1 = 0,1,2,...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
i :=:fsayi2;--greatest(:fsayi1,:fsayi2);
select nvl(ydeger,0) into yz from fnc_poissong1 where
sira=:fsayi2;

                LOOP
                        exit when i=0;
                        open c1(i);
                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;
                                xy :=(nvl(r1.xdeger,0)*nvl(yz,0));
      insert into  fnc_poissong1sonuc values
(r1.sira,r1.xdeger,:fsayi2,yz,xy);
       :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';
                        end loop;
                  close c1;
  i:=i-1;
                END LOOP;
select sum(NVL(carpim,0)) into :toplam from fnc_poissong1sonuc ;

GO_BLOCK('FNC_POISSON');
EXECUTE_QUERY;
END;
```

EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI

```
FUNCTION HIZLI_PSN (y_fsayi number,y_t number,y_lamda number) RETURN
number IS

 cursor c1( s number) is
         select *
         from   fnc_poisson2 where fsira=s;
 cursor c2 is
         select *
         from   fnc_poisson2 order by fsira;

 cursor c3 is
         select *
         from   fnc_poisson order by fsira;

r1          c1%rowtype;
r2          c2%rowtype;
r3          c3%rowtype;

F0          NUMBER;
F1          NUMBER;
F           NUMBER;
LamdaPt_i   NUMBER;
LamdaPt_n   NUMBER;
L0          NUMBER;
lamda1      NUMBER;
t           NUMBER;
e           NUMBER;
f_son       NUMBER;
p0          NUMBER;
S           VARCHAR2(1000);
indis       VARCHAR2(1000);
terim       NUMBER;
k           NUMBER;
i           NUMBER;
j           NUMBER;
m           NUMBER;
n           NUMBER;
p           NUMBER := 0;
z           NUMBER;
a           varchar2(1);
q           NUMBER;
y_b         NUMBER;
y_c         NUMBER;
d           NUMBER;
L           NUMBER;
us          NUMBER := 1;
y_payda     NUMBER;
payda       NUMBER;
Y_SAYI      NUMBER;
BEGIN
i            := 1;
LamdaPt_i    := 0;
e            := 2.71828182845;
t            := y_t;
y_payda      := 1;
```

EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
DELETE FROM fnc_poisson;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
DELETE FROM fnc_poisson2;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';


SELECT LamdaPt    INTO P0      FROM FNC_LAMDAPT  WHERE LSIRA=0;  --P0
SELECT LamdaPt/y_t INTO LAMDA1  FROM FNC_LAMDAPT  WHERE LSIRA=1;  --
lamda*p
SELECT MAX(LSIRA) INTO Y_SAYI  FROM FNC_LAMDAPT WHERE LamdaPt>0;

F0 := Power(e,-y_lamda*t*(1-p0));

insert into fnc_poisson  values (0,0,0,0,F0);
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

k := 1;

loop
        if  k=1 then
                F := lamda1*t; --F1
        else
                i := k-2;
                n := 2;
                F := power(lamda1*t,k)/fact(k);
                loop
                begin

                      select lamdaPt into LamdaPt_n from fnc_lamdaPt
WHERE lsira = n ;

                  exception when no_data_found then
                   message('Sistemde n='||n||' için lamda değeri tanımlı
değildir.');
                  end;

                  F   := F + (power(lamda1*t,i)/fact(i))* (LamdaPt_n);

                  i := i-1;
                  n := n+1;
                  exit when i < 0;
          end loop;
        end if;

  insert into fnc_poisson (fsira,A) values (k,F);
  F := 0;
  k := k+1;

  exit when k > y_fsayi;
end loop;
-- :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
```

EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
k := 4 ;
        m := 1;
        n := 2;
        indis  := null
               -- 1.durum:
                loop

                     select lamdaPt into LamdaPt_i from fnc_lamdaPt
WHERE lsira = i ;
                     select lamdaPt into LamdaPt_n from fnc_lamdaPt
WHERE lsira = n ;

                        F :=LamdaPt_i*LamdaPt_n;
                        indis  :='.'||i||'.'||n||'.';
                        us := 1;
                        if i=n and n<=y_sayi then us:=us+1; end if;
                        y_payda := nvl(fact(us),1);

                        if F >0 THEN
                        insert into fnc_poisson2 values
(k,y_payda,F,indis);
               :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';

                        m := m+1;
                        end if;
--2.durum:
                        open c1(i);

                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;

                                z:=n;
                                p:=0;
                if n<=y_sayi then
                        loop
                                        y_c:=z-1;
                                        if instr(r1.indis,'.'||y_c||'.')
>0 then
                                        p:=p+1;
                                                exit;
                                        end if;
                                        z:=z-1;
                                        exit when z=1 or p>0;
                                end loop;
                                if p=0  then
                                        indis  := r1.indis||n||'.';
                                         F :=r1.deger*LamdaPt_n;
            payda := countchar(r1.indis,n)+1;
          --payda :=1;
            if payda = 0 then y_payda := r1.payda;
            else
               y_payda := r1.payda*fact(payda)/fact(payda-1);
            end if;
```

EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, ...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
---------------

--if F >0 THEN

---------------
                                insert into fnc_poisson2 values
(k,nvl(y_payda,1),F,indis);
            :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';
           Y_PAYDA :=1;
                                        m:=m+1;
end if;
end if;
                        end loop;
                        close c1;
                        i := i-1;
                        n := n+1;
                        p := 0;
                        exit when i < k-trunc(k/2);
                end loop;
        k := k + 1;
        exit when k > y_fsayi;
end loop;

k :=4;
i :=1;
loop
              select sum(deger/payda) into y_b from fnc_poisson2 where
fsira=k;
                                 update fnc_poisson  set B = y_b where
fsira=k;
        :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';
     n:=1;
     i:=k;
     loop
             y_c :=power(lamda1*t,n)/fact(n);
            update fnc_poisson set c =nvl(c,0)+nvl(y_c,0)*nvl(y_b,0)
where fsira=i+1;
              :system.message_level := '25';   commit;
:system.message_level := '0';
                     i:=i+1;
                     n:=n+1;
             exit when i>y_fsayi;
     end loop;

k:=k+1;
exit when k>y_fsayi;
end loop;

update fnc_poisson set deger=nvl(NVL(a,0)+NVL(b,0)+NVL(c,0),0)*F0 where
fsira > 0;
 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';
```

EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, ...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
MESSAGE('İŞLEM TAMAM!'); PAUSE;
go_block('fnc_poisson');
execute_query;

return F;
END ;
DECLARE
        RESULT varchar2(500);
        xy number;
        yz number;
        r number;
        j number;
        y_dur number;

        cursor c1(i number) is
         select *
         from   fnc_poissong1 where sira=r;

  cursor c2 is
         select *
         from   fnc_poissong1 order by sira;

r1         c1%rowtype;
r2         c2%rowtype;

BEGIN
--RESULT := psn();
delete from fnc_poissong1;
delete from fnc_poissong1sonuc;

 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi1 ,:t1,:lamda1);

insert into fnc_poissong1(sira,xdeger)  (select fsira,deger from
fnc_poisson);

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi2 ,:t2,:lamda2);

update fnc_poissong1 a set ydeger=(select deger from fnc_poisson where
fsira=a.sira);

if :fsayi1<:fsayi2 then
         insert into  fnc_poissong1 (sira,ydeger) (select fsira,deger
from fnc_poisson
where fsira>:fsayi1);
end if;

 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';


r :=0;
y_dur := :son;
```

EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
                LOOP
                        exit when r>y_dur;
                        open c1(r);
                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;

                        begin
      select nvl(ydeger,0) into yz from fnc_poissong1 where sira=:d+r;
                        exception when no_data_found then
                                yz :=0;
                        end;
                                xy :=(nvl(r1.xdeger,0)*nvl(yz,0));
      insert into  fnc_poissong1sonuc values (r,r1.xdeger,:d+r,yz,xy);
       :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';

                        end loop;
                  close c1;

      r:=r+1;
                END LOOP;

select sum(NVL(carpim,0)) into :toplam from fnc_poissong1sonuc ;

GO_BLOCK('FNC_POISSON');
EXECUTE_QUERY;
END;

************************************************************************
BEGIN
--RESULT := psn();
delete from fnc_poissong1;
delete from fnc_poissong1sonuc;

 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi1 ,:t1,:lamda1);

insert into fnc_poissong1(sira,xdeger)  (select fsira,deger from
fnc_poisson);

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi2 ,:t2,:lamda2);

update fnc_poissong1 a set ydeger=(select deger from fnc_poisson where
fsira=a.sira);

if :fsayi1<:fsayi2 then
         insert into  fnc_poissong1 (sira,ydeger) (select fsira,deger
from fnc_poisson
where fsira>:fsayi1);
end if;

:system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level := '0';
```

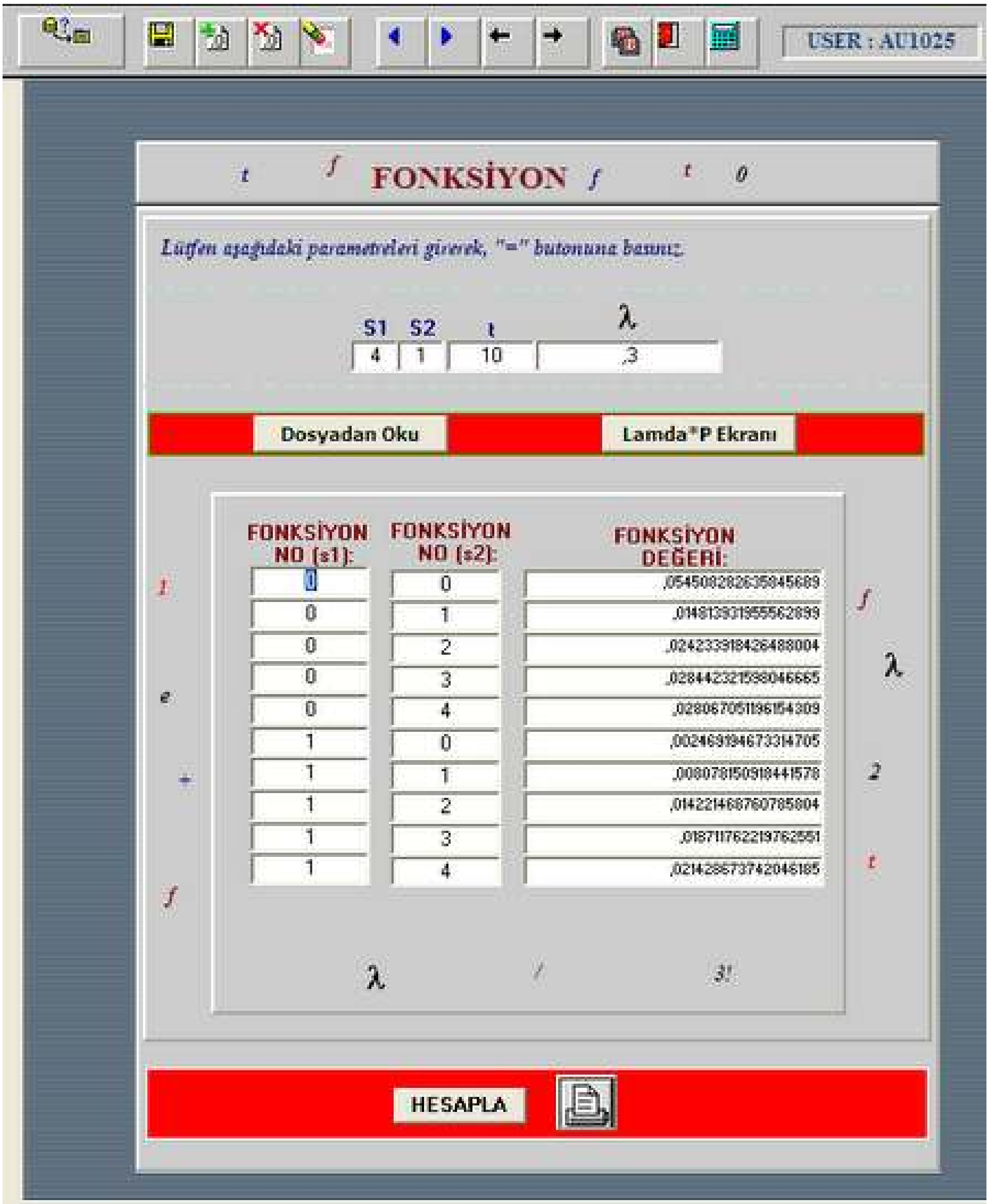
EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
r :=0;
y_dur := :son;

                LOOP
                        exit when r>y_dur;
                        open c1(r);
                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;

                        begin
      select nvl(xdeger,0) into yz from fnc_poissong1 where sira=:d+r;
                        exception when no_data_found then
                                yz :=0;
                        end;
                                xy :=(nvl(r1.ydeger,0)*nvl(yz,0));
      insert into  fnc_poissong1sonuc values (:d+r,yz,r,r1.ydeger,xy);
       :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';

                        end loop;
                  close c1;

      r:=r+1;
                END LOOP;

select sum(NVL(carpim,0)) into :toplam from fnc_poissong1sonuc ;

GO_BLOCK('FNC_POISSON');
EXECUTE_QUERY;
END;

************************************************************************

BEGIN
--RESULT := psn();
delete from fnc_poissong1;
delete from fnc_poissong1sonuc;

 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi1 ,:t1,:lamda1);

insert into fnc_poissong1(sira,xdeger)  (select fsira,deger from
fnc_poisson);

RESULT :=hızlı_psn(:fsayi2 ,:t2,:lamda2);

update fnc_poissong1 a set ydeger=(select deger from fnc_poisson where
fsira=a.sira);

if :fsayi1<:fsayi2 then
         insert into  fnc_poissong1 (sira,ydeger) (select fsira,deger
from fnc_poisson
where fsira>:fsayi1);
```

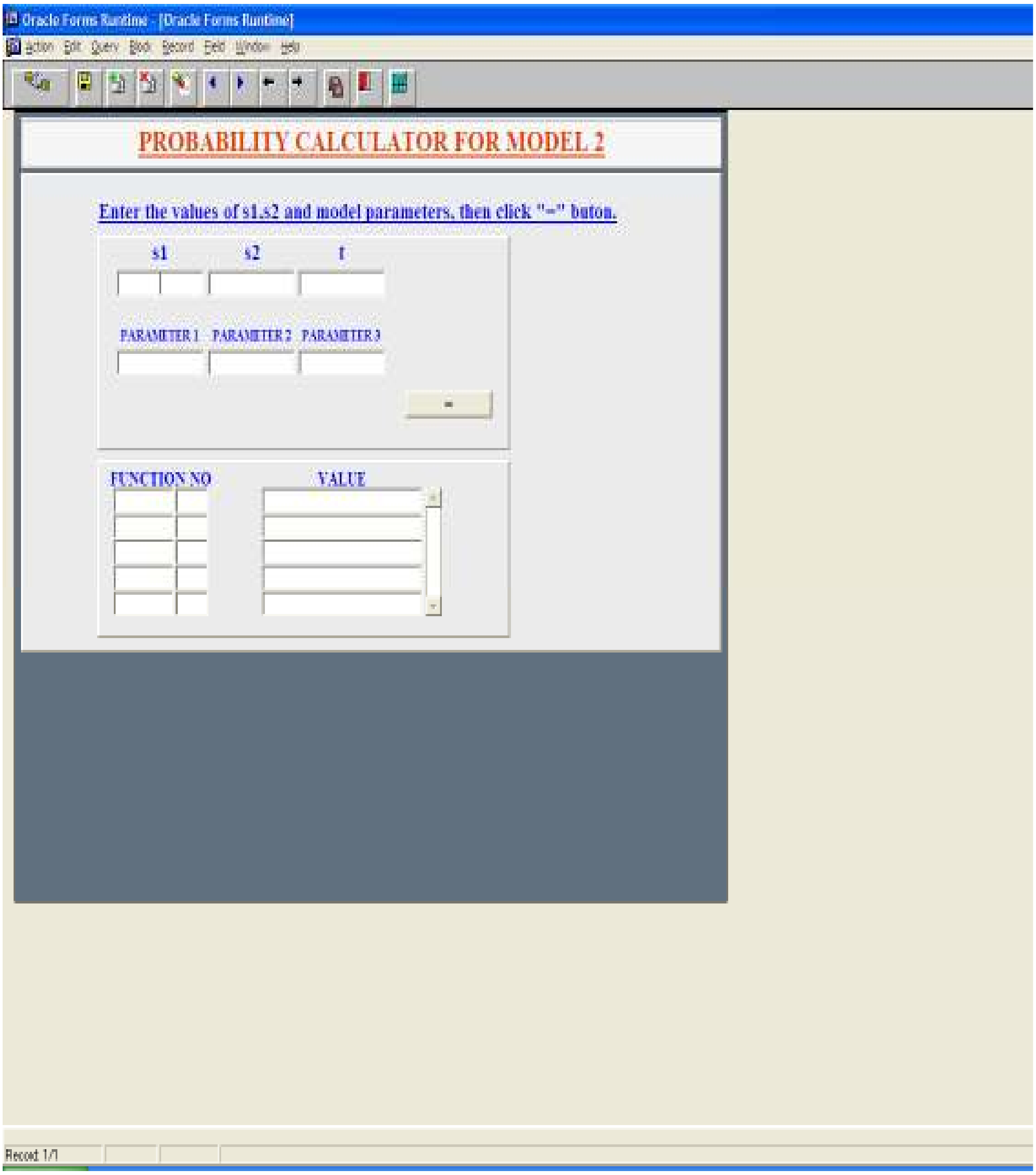
EK 6. MODEL 4 İÇİN $P(D_t = d)$, $d = -2, -1, 0, 1, 2, ...$ OLASILIKLARINA İLİŞKİN PROGRAM KODLARI (devam ediyor)

```
end if;

 :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level :=
'0';

r :=0;
y_dur := :son;

                LOOP
                        exit when r>y_dur;
                        open c1(r);
                        loop
                                fetch c1 into r1;
                                exit when c1%notfound;

                                xy
:=(nvl(r1.xdeger,0)*nvl(r1.ydeger,0));
      insert into  fnc_poissong1sonuc values
(r,r1.xdeger,r,r1.ydeger,xy);
       :system.message_level := '25';   commit;   :system.message_level
:= '0';

                        end loop;
                  close c1;
      r:=r+1;
                END LOOP;

select sum(NVL(carpim,0)) into :toplam from fnc_poissong1sonuc ;

GO_BLOCK('FNC_POISSON');
EXECUTE_QUERY;
END;
```

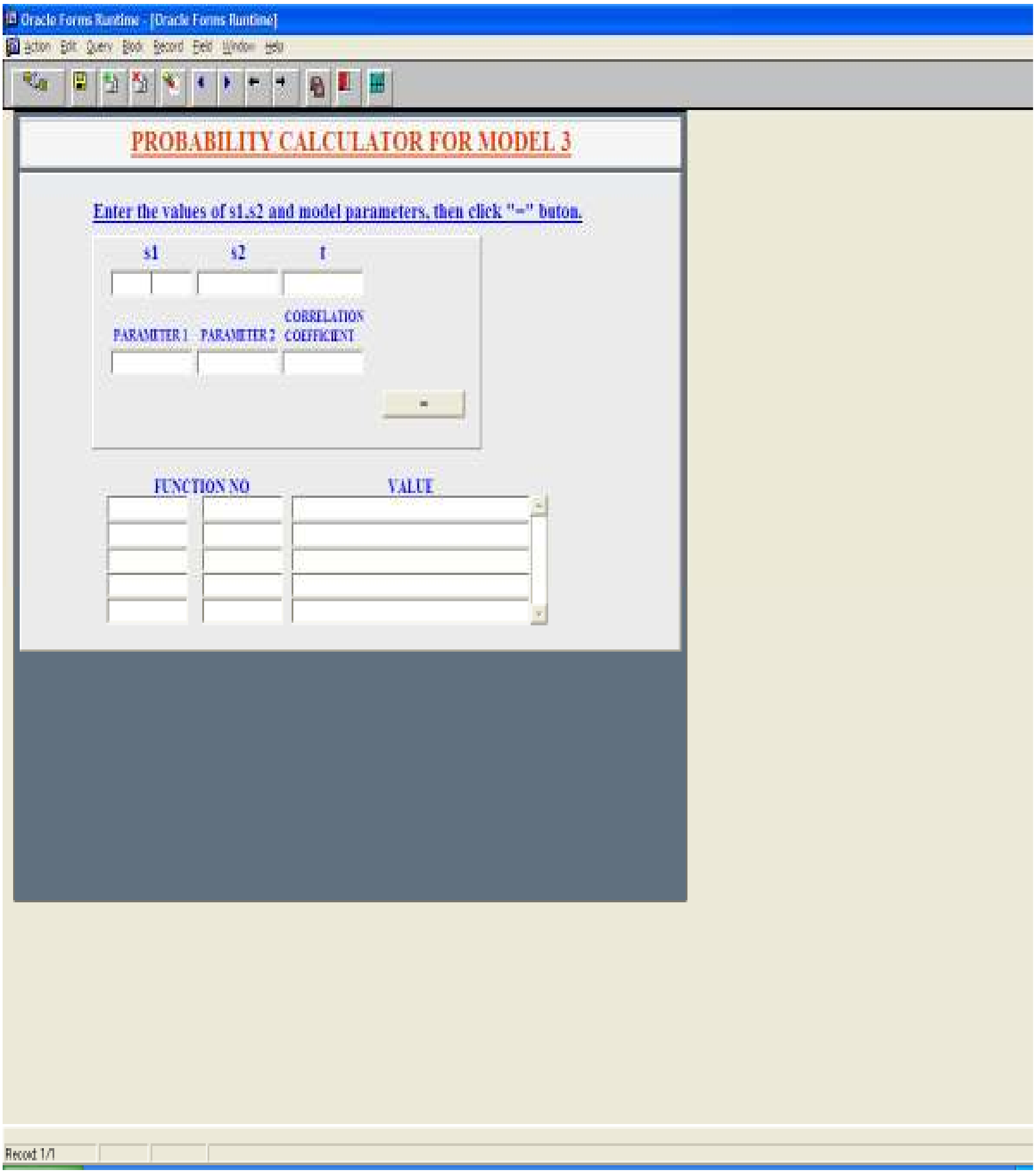
EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ



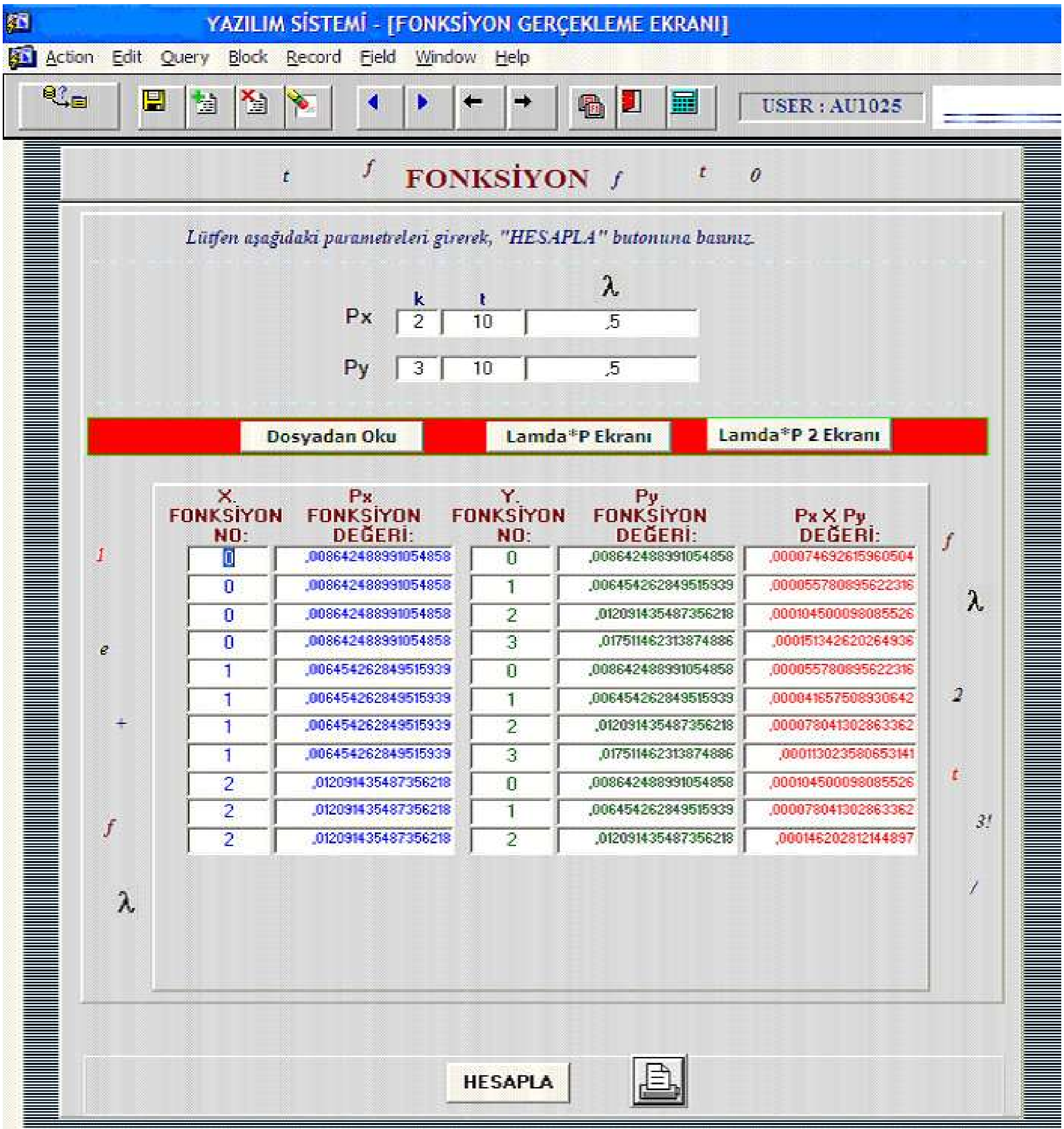
EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



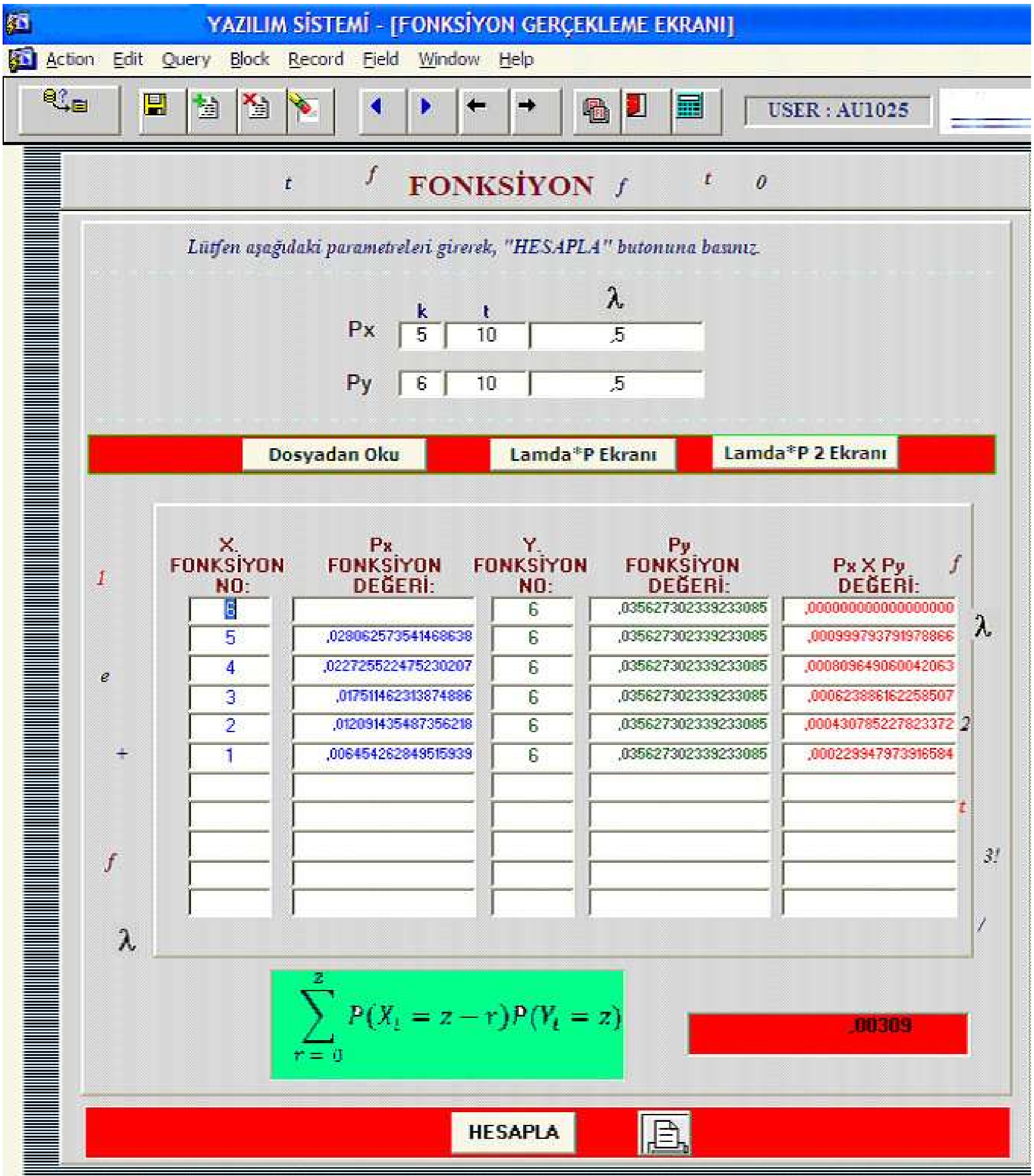
EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



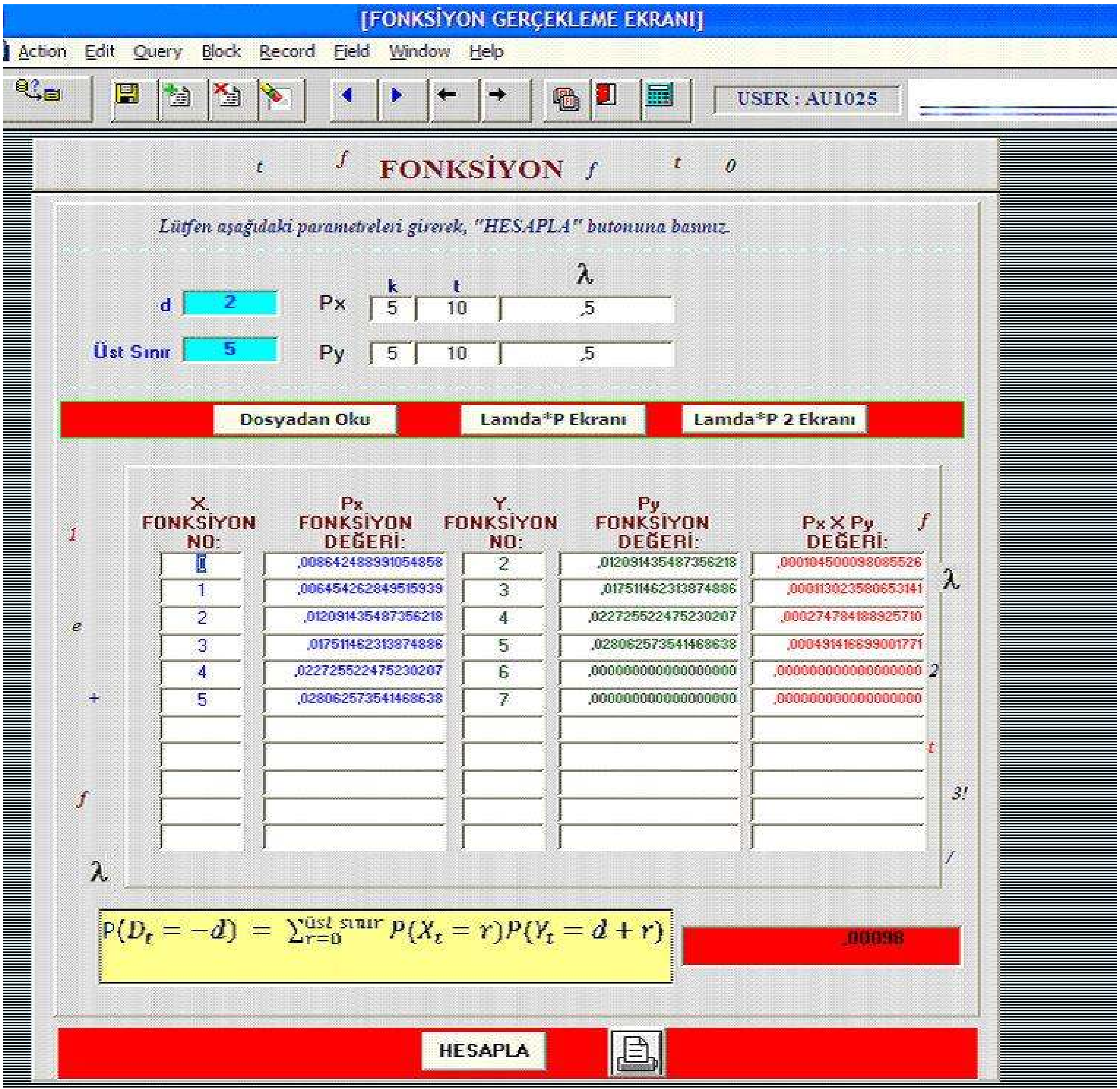
EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



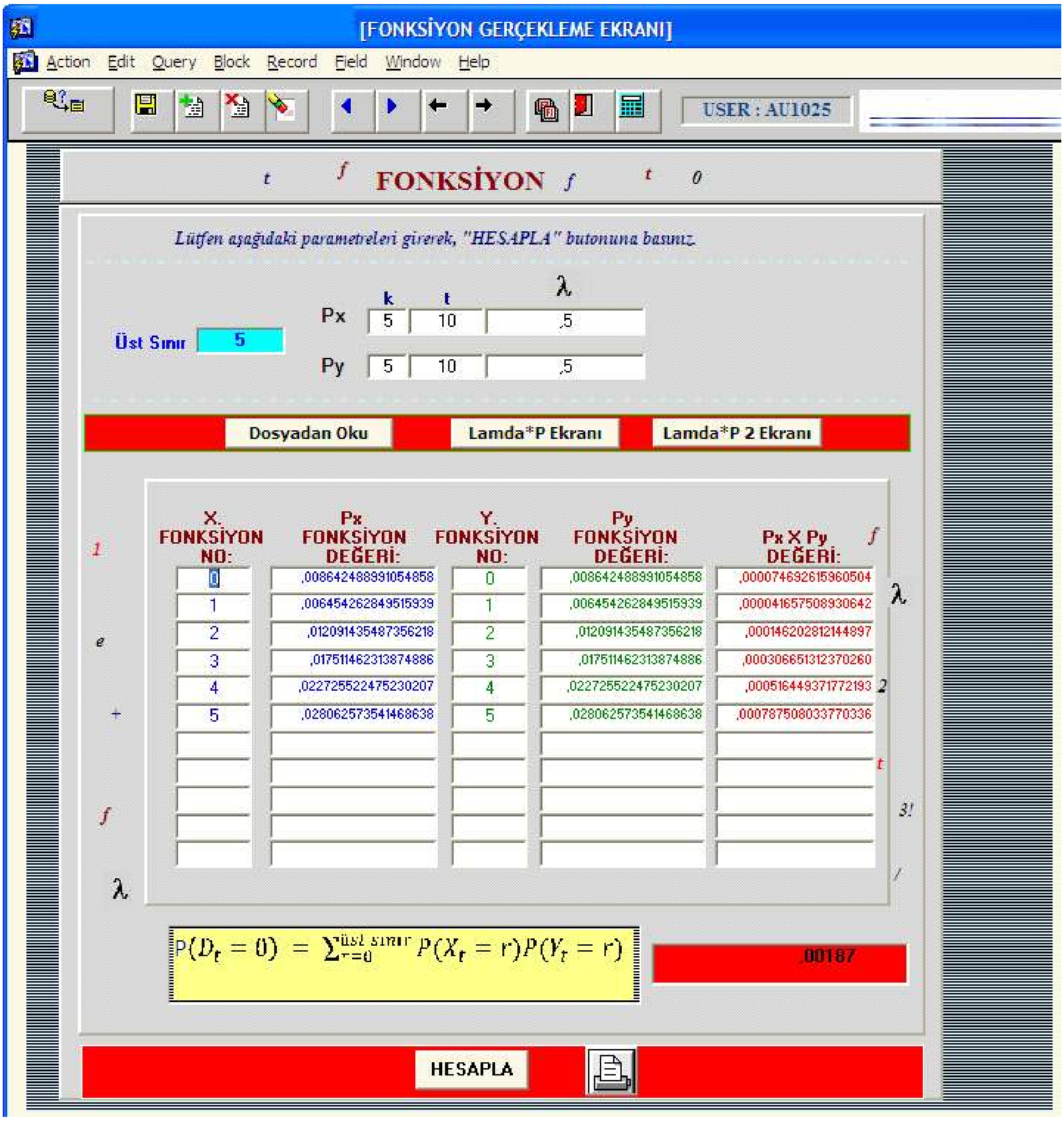
EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



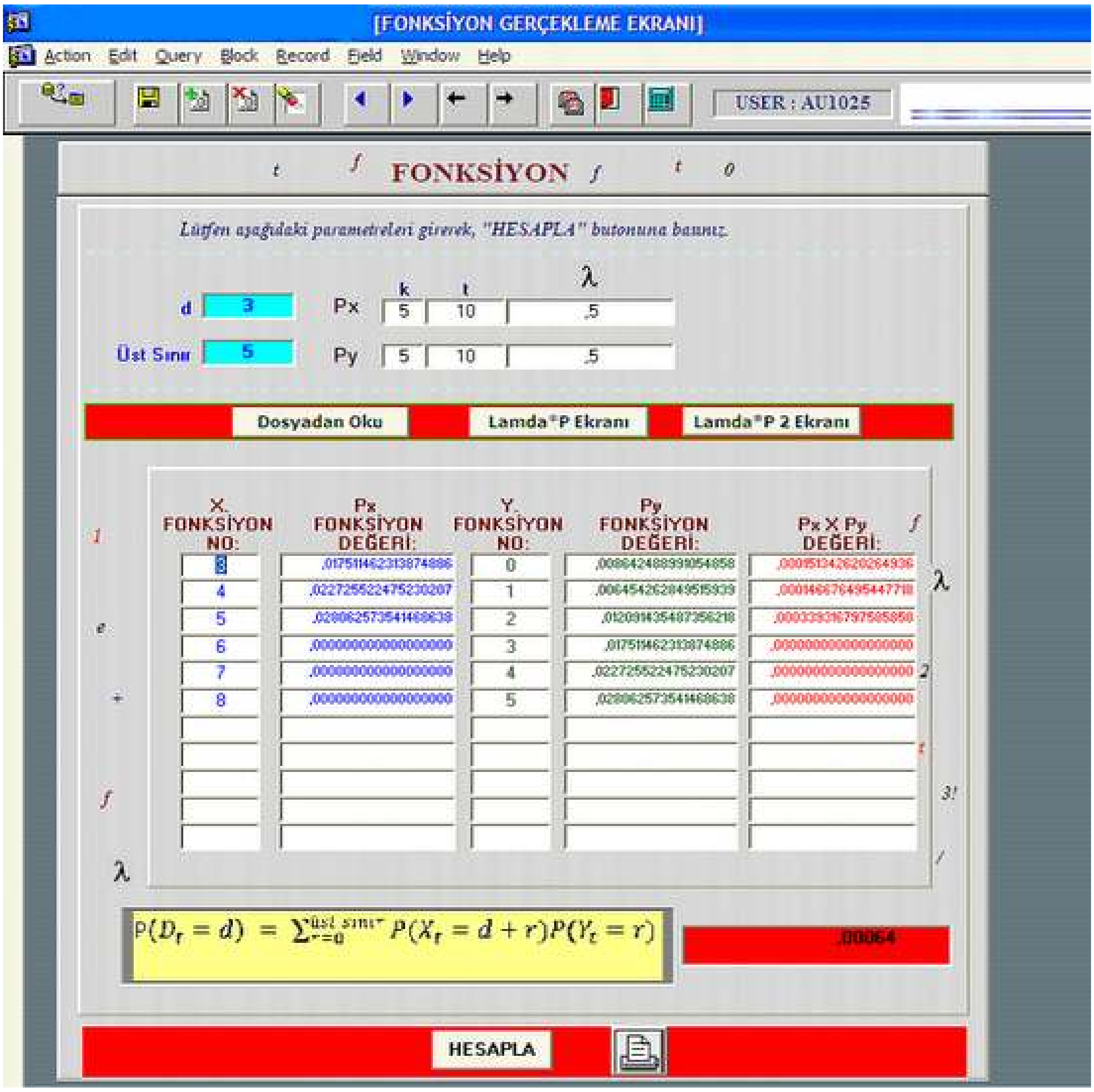
EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



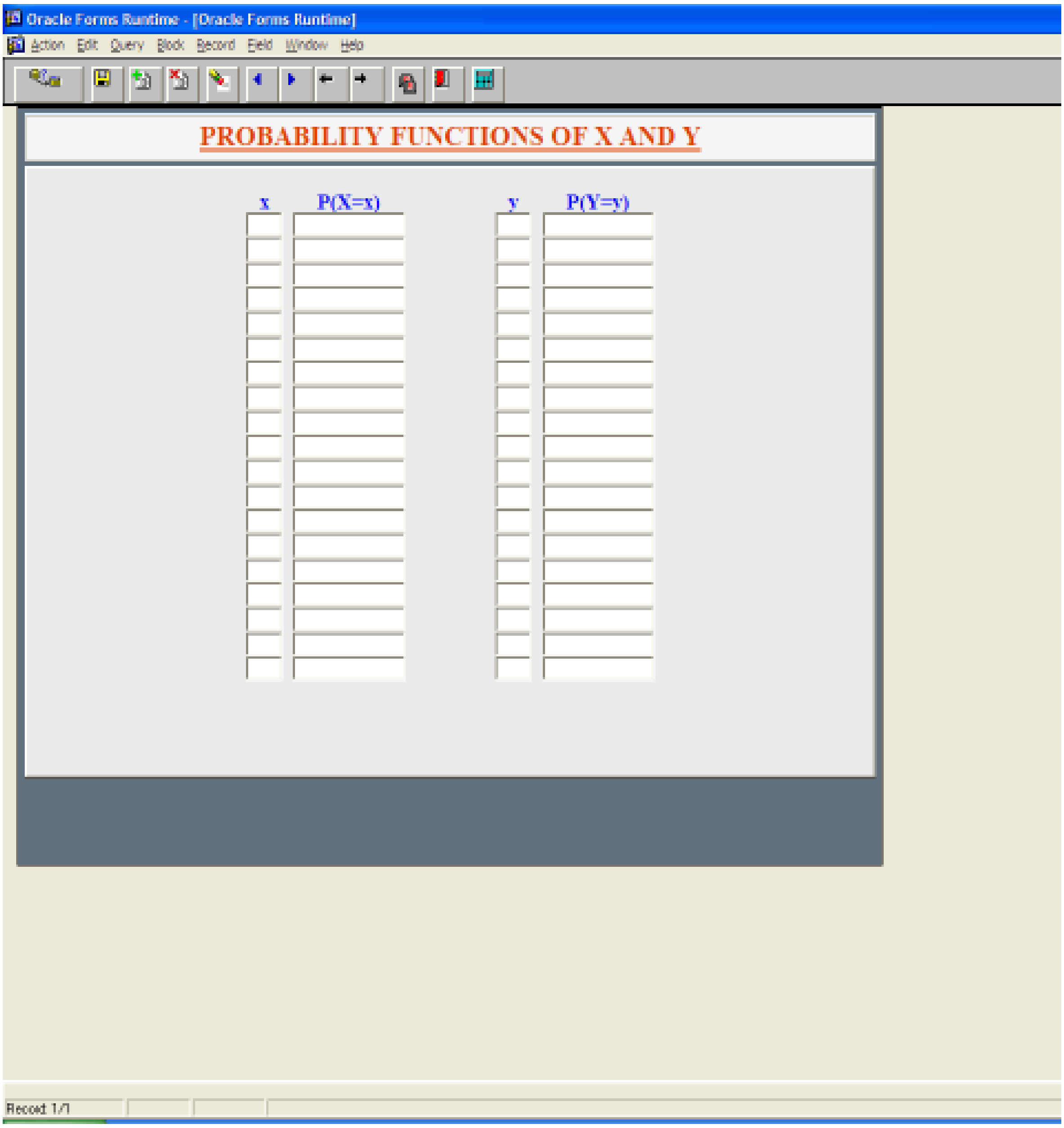
EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



EK 7. ORACLE PROGRAMLARINA İLİŞKİN EKRAN GÖRÜNTÜLERİ (devam ediyor)



ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı	:	Gamze Özel
Doğum Yeri	:	Aydın
Doğum Yılı	:	1981
Medeni Hali	:	Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	:	1993 -1997	Eskişehir Cumhuriyet Lisesi
Lisans	:	1997 -1999	Osmangazi Üniversitesi İstatistik Bölümü
		1999 -2002	Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü
Yüksek Lisans	:	2002- 2005	Hacettepe Üniversitesi İstatistik Bölümü

Yabancı Dil	:	İngilizce	
İş Tecrübesi	:	2002 - …	H.Ü. İstatistik Bölümü Araştırma Görevlisi