ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN İNTEGRAL KONUSUNDA GÖRSEL VE ANALİTİK STRATEJİLERİ

UNDERGRADUATE STUDENTS' VISUAL AND ANALYTIC STRATEGIES IN INTEGRAL TOPIC

YASEMİN SAĞLAM

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :…......................................
Prof. Dr. Haluk SORAN

Üye (Danışman) :.…....................................
Prof. Dr. Ali BÜLBÜL

Üye :…..
Prof. Dr. Petek AŞKAR

Üye :...
Prof. Dr. Arif ALTUN

Üye :...
Doç. Dr. Behiye UBUZ

ONAY

Bu tez ...../...../..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Adil DENİZLİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN İNTEGRAL KONUSUNDA GÖRSEL VE ANALİTİK STRATEJİLERİ

Yasemin Sağlam

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin analiz dersi integral konusu kapsamında problem çözme sürecindeki görsel ve analitik düşünme stratejileri arasındaki bağlantıyı nasıl sağladıklarını araştırmak ve bu bağlantıyı sağlama sürecinde öğrencilere nasıl yardım edilebileceğini belirlemektir.

Çalışma 2008-2009 öğretim yılında Ankara'da bir üniversitenin matematik öğretmenliği programı ikinci sınıfta öğrenim görmekte olan ve Matematiksel Süreç Aracı'na göre tercihleri görsel yönde olmayan altı matematik öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmada bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılmıştır. Dört hafta olarak düzenlenen öğretim deneyi öncesinde ve sonrasında, katılımcıların görsel-analitik muhakeme kullanma şekillerinde meydana gelen değişimi belirlemek üzere birer klinik görüşme gerçekleştirilmiştir.

Çalışma sonunda katılımcıların analitik stratejileri tercih etmelerinin değişik nedenleri ortaya çıkmıştır. Bu nedenlerden bazıları, integral ile ilgili kimi özelliklerin analitik anlamda biliniyor olmasına karşılık grafiksel uygulamalarda karıştırılması, sorularda integral hesaplama yöntemlerinin daha yoğun olarak kullanılması ve ders öğretmenlerinin bu tür çözümlere verdiği değer şeklinde sıralanabilir. Katılımcıların öğretim deneyi sonucunda görsel strateji kullanma tercihlerindeki değişimlerin farklı düzeyde gerçekleştiği gözlenmiştir. Bu durum öğrencilerin önceki öğrenim hayatlarından getirdikleri matematiksel inançların farklılığı ile açıklanmıştır. Öğretim sürecinde görsel ve analitik muhakemeyi bir arada kullanmak hem öğrenmenin etkililiği artıracak hem de bu iki süreçten herhangi birinde meydana gelecek zorlukların üstesinden gelinmesini sağlayacaktır.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, integral, görsel strateji, analitik strateji, öğretim deneyi.

Danışman: Prof. Dr. Ali BÜLBÜL, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı.

UNDERGRADUATE STUDENTS' VISUAL AND ANALYTIC STRATEGIES IN INTEGRAL TOPIC

Yasemin Sağlam

ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate how university students connect the visual and analytic strategies in problem solving process and to gain insights into how students can be guided for establishing a better connection.

In this study, a conjecture-driven teaching experiment was conducted. Six second grade university students who were attending a mathematics teacher training program in Ankara in 2008-2009 fall semester were chosen for the experiment. The visual preferences of participants were determined by the means of Mathematical Processing Instrument. All participants had non-visual preferences. The experiment lasted for four weeks. Before and after the teaching experiment, clinical interviews were conducted to determine the effect of the teaching experiment on visual preferences of the participants.

As a result of the study, different reasons were identified for the preference of analytical strategies over visual ones by the participants. One of these reasons for this preference is that analytical methods are more commonly used in problem solving than visual methods and lecturers place emphasis mostly on analytical strategies. Consequently, analytical features of some mathematical concepts are better known than visual features of these concepts by the participants. The teaching experiment was observed to result in different preference changes in the participants. This difference among the participants can be partially explained by the difference of their mathematical beliefs gained through previous learning experiences. Combination of visual and analytic processes as in the teaching experiment will increase the effectiveness of learning and enable to overcome the difficulties which may arise from any one of these processes.

Keywords: Mathematics education, integral, visual strategy, analytic strategy, teaching experiment.

Advisor: Prof. Dr. Ali BÜLBÜL, Hacettepe University, Faculty of Education, Department of Secondary Science and Mathematics Education, Major in Mathematics Education.

TEŞEKKÜR

Araştırmamın her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen, değerli katkıları ve olumlu eleştirileriyle beni destekleyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali BÜLBÜL'e teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitelerinde yer alan, öneri ve olumlu eleştirileriyle farklı bakış açıları kazanmamı sağlayan Prof. Dr. Haluk Soran'a, Prof. Dr. Petek Aşkar'a ve bilgilerinden yararlandığım Doç. Dr. Behiye Ubuz'a teşekkür ederim.

Beni bu günlere getiren, çalışmamın her aşamasında gösterdikleri anlayış ve güvenle bana destek olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca araştırmam boyunca, gerek akademik anlamda fikir alışverişinde bulunduğum gerekse sıkıntı ve sevinçlerimi paylaştığım tüm arkadaşlarıma teşekkür ediyorum.

Doktora çalışmalarım sırasında Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkür ederim.

Son olarak değerli jüri üyelerine eleştiri, görüş ve önerileri için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ (devam ediyor)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

EKLER DİZİNİ

KISALTMALAR DİZİNİ

MSA	Matematiksel Süreç Aracı
ÇK	Çalışma Kağıdı
ÇK-1	Çalışma Kağıdı 1
ÇK-2	Çalışma Kağıdı 2
ÇK-3	Çalışma Kağıdı 3
ÇK-4	Çalışma Kağıdı 4

1. GİRİŞ

Matematik ve matematik eğitimi araştırmaları içinde görselleştirme veya görsel akıl yürütmeye ilişkin geniş bir alan yazın yer almaktadır. Görselleştirmenin matematik eğitimindeki geçmişinin çok eskiye dayanması ve bu alanda yapılan çalışmaların sayısının da buna bağlı olarak fazla olması, bu konunun farklı bakış açılarıyla incelenmesini sağlamıştır. Dolayısıyla matematik eğitiminde görselleştirmenin yerini öğrenmek isteyen bir araştırmacının, bu konu ile ilgili olarak farklı görüşlere ulaşma olasılığı yüksektir. Fakat bu faklılığın tek nedeni olarak araştırmacıların sahip olduğu farklı bakış açılarını göstermek doğru olmaz. Genel anlamda eğitim, özel anlamda ise matematik eğitiminin tarihsel süreç içinde gösterdiği gelişim ve değişmenin bu farklılıklara yol açtığı söylenebilir.

Başlangıçta, görselleştirmeye daha çok geometri ile ilgili bir strateji olarak bakılsa da daha sonra matematiğin pek çok alanındaki önemi ve gerekliliği anlaşılmıştır. Aynı zamanda görselleştirmenin matematik içindeki rolü, birçok matematikçi için tartışılmazdır. Paul Halmos (1987, akt. Stylianou and Silver, 2004)' a göre matematik öğrencisi olmak için görselleştirme yeteneği ile doğmuş olmak gerekmektedir. MacFarlane de benzer şekilde düşünmektedir:

> Bazen denir ki en yetenekli matematikçiler tamamıyla soyut düşünür ve onların şekilsel desteklere ihtiyacı yoktur. Fakat bu durum, bu yetenekli kişilerin kendi içsel 'kara tahtaları' olmasından kaynaklanıyor olabilir ve çok karmaşık yapıları, bunu yaptıklarını bile fark etmeden görselleştiriyor olabilirler (MacFarlane Smith, 1964, p. 132; akt. Aspinwall et al., 1997).

Analiz ise geçmişi antik çağa kadar uzanan, matematiğin temel taşlarından biri ve üst düzey matematiksel düşünme becerilerinin geliştirilmesi için bir geçiş kapısıdır. Geçmişinin bu kadar eskiye dayanması nedeniyle analizin tarihi antik, orta ve modern çağ gibi evrelere ayrılmıştır. Her ne kadar geçmişi antik çağa kadar uzanmış olsa da analizin tarihinin 17. yy sonlarına doğru Newton ve Leibniz ile başladığı kabul edilir.

Analizin matematik içindeki önemi tartışılmazdır. Temelinde yatan kavramların anlaşılabilmesi için cebir, geometri, trigonometri gibi diğer matematik konularıyla bağlantı gerektiren ve sonraki matematik konuları için "ilk basamak" niteliğinde olan analizin önemi, matematik eğitimine de yansımış, bu konuda yapılan çalışmaların artmasına neden olmuştur. Özellikle üniversitelerde, analiz dersi kapsamında öğrencilerin sadece işlemsel becerilerini geliştirmeye yönelik işlenen dersler yerine, daha çok kavramsal anlamalarını geliştirecek yönde derslerin düzenlenmesi için yapılan girişimler Amerika'da bir takım reform hareketlerine (analiz reformu) neden olmuş; standart ve reform analiz derslerinin karşılaştırılmasına yönelik birçok araştırma yapılmıştır. Bu reformda, analiz öğretimiyle ilgili olarak vurgulanan en önemli nokta, bir konuya hem sayısal hem grafiksel hem de sembolik olarak yaklaşılmasını öneren "3 kuralı" olmuştur (Daha sonra yazma da bu yaklaşımlar arasına girerek "4 kuralı" adını almıştır). Öğretimine bu kadar önem verilen analiz dersinin içeriği incelendiğinde aslında çok fazla görsel öğe içerdiği ve bir öğrencinin bu konuları anlayabilmesi için ne kadar çok görselleştirmeye ihtiyaç duyabileceği daha rahat anlaşılacaktır.

1.1. Görselleştirmenin Matematik Tarihi İçindeki Yerine Kısa Bir Bakış

Görselleştirmenin matematik tarihi içindeki yerine bakmak istersek eski Yunan matematiğine kadar uzanmamız gerekir. Euclid'in Elementleri'nde de görüldüğü gibi Yunan matematikçilerin zihinlerinde fiziksel gerçekliğin idealize edilmiş tek bir modeli vardır ve Euclid'in ispatları bu modele dayanır (Harel and Sowder; 2007). 17. yy'da etrafı şüphelerle sarılı olan analizin 19. yy'da sayısallaştırılması, Euclid dışı geometrilerin ortaya çıkışı gibi 19. yy da matematikte meydana gelen gelişmeler, matematikte daha formel yaklaşımlara yönelmeye neden olmuş; görsel olarak çok açık gibi görünen bazı ifadelerin yanıltıcı olabileceği sonucu ortaya çıkmıştır. Newton tarafından ortaya atılan "sürekli her fonksiyon türevlenebilir" savına karşılık alman matematikçi Weierstrass'ın 19 yy. sonlarına doğru sürekli fakat hiçbir yerde türevlenemeyen fonksiyon için bir örnek vermesi görsel ifadelere olan güveni sarsmıştır.

20. yy'ın sonlarına doğru görsel ifadelerin matematikteki eski önemine kavuşmaya başlamasının, özellikle iki alanda meydana gelen değişiklik ve gelişmelere bağlı olduğu söylenebilir. Bunlardan ilki bilgisayar teknolojisinde meydana gelen gelişmelerdir. Bu alandaki bilim adamları tarafından geliştirilen görselleştirme tekniklerinin, matematik üzerinde önemli etkileri olmuş; bilgisayar grafikleri araştırmacılara, bilginin hızlı bir görsel kavrama sağlayan grafik, tablo veya başka

formlarda sunulmasını olanaklı kılmıştır (Mancosu, 2005). Hoffman (1987, akt. Mancosu, 2005) sayısal olarak hesaplanan yüzeylerin bir şeklini oluşturmanın, daha sonra kurulacak olan matematiksel özellikleri için ipuçları verdiğini belirtmekte, şekil ve eşitlikler arasında hareket etmenin analiz sürecine rehberlik etmesi açısından oldukça yararlı olduğunu söylemektedir.

Görselleştirmeye olan ilginin yeniden ortaya çıkışındaki bir diğer neden de öğretme ve öğrenme sürecindeki rolünün tekrar farkına varılması olduğu söylenebilir (Stylianou and Silver, 2004). Üniversite matematiğinde, özellikle analiz gibi temel derslerdeki kavramların öğretiminde çoklu gösterim kullanılması yeniden önem kazanmıştır (Tucker and Leitzel,1995; akt. Stylianou and Silver 2004). Sadece üniversite matematiği değil, lise matematiğinde de çoklu gösterimin önemli olduğu NCTM'nin (National Council of Teachers of Mathematics) "okul matematiği için prensip ve standartları" arasında, gösterimlerle ilgili bir madde bulunmasıyla vurgulanmaktadır (Stylianou and Silver, 2004). Yalnızca matematik eğitimcileri değil matematikçiler tarafından da görsel ifadelerin bilişsel önemi fark edilmiştir (Mancosu, 2005). 70 matematikçiyle yapılan bir araştırmada problem çözerken kullandıkları düşünce stilini anlatmaları istenmiştir. Çalışmanın sonunda araştırmacı, matematikçilerin kullandıkları bu düşünce türlerini üç kategoride toplamıştır (Burton and Sinclair, 2004, s.55):

- Stil A: Görsel (veya resimlerle düşünen, çoğu zaman dinamik)
- Stil B: Analitik (veya kuralcı (formalistically), sembollerle düşünen)
- Stil C: Kavramsal (fikirlerle düşünen, sınıflayıcı)

Bu matematikçilerin alanlara göre dağılımı (parantez içindeki sayılar bayan/erkek matematikçilerin sayılarını göstermek üzere) Çizelge 1.1'de gösterilmiştir. Bu matematikçilerden 39'u birden fazla stil kullandıklarını, 25 tanesi ise sadece bir stil kullandıklarını söylemişlerdir. Bunlar ise düşünme stillerine göre Stil A 15 (9/6), Stil B 3 (2/1) ve Stil C 7 (4/3) olarak dağılmaktadır. 36 matematikçi ise bu stillerin ikisinin bir kombinasyonunu, üç matematikçi ise her üç düşünme stilini de kullandıklarını belirtmişlerdir.

Çizelge 1.1. Matematiğin alanlarına göre düşünme stilleri

	Pür	Uygulamalı	İstatistik	Toplam
Stil A	21 (11/10)	15 (5/10)	9 (5/4)	45 (21/24)
Stil B	11 (7/4)	11 (5/6)	6 (2/4)	28 (14/14)
Stil C	10 (6/4)	16 (6/10)	7 (4/3)	33 (16/17)
Toplam	42 (24/18)	42 (16/26)	22 (11/11)	106 (51/55)

Matematiksel düşünmenin görsel stiline sahip olmadıklarını iddia eden matematikçiler başka düşünme stillerinin varlıklarının farkındalarmış gibi görünseler de diğer birçoğu, herkesin matematik hakkında kendi düşündükleri gibi düşündükleri inancına sahiptirler (Burton and Sinclair, 2004, p. 56).

Sadece matematik alanında değil bilişsel psikolojide de görselleştirmeye olan ilgi artmıştır. Beynin aritmetiği nasıl yaptığı üzerine yapılan araştırmalarda görselleştirme boyutunun çok az olması birçok araştırmacının dikkatini çekmiş ve matematiğin nasıl kurulduğu ile ilgilenen birçok araştırmacıyı etkilemiştir (Mancosu, 2005).

1.2. Görselleştirme İle İlgili Bazı Tanımlar

Matematik eğitiminde görselleştirme ile ilgili çalışmaların fazla olması bu kavramla ilgili farklı tanımların yapılmasını da beraberinde getirmiştir. Görselleştirmenin, bu alanda çalışan araştırmacılar tarafından kabul gören ortak bir tanımını bulmak oldukça zordur. Araştırmacılar bu kavramı başarı, matematiksel yetenek, kavramsal anlama gibi farklı bakış açılarıyla incelemişler ve dolayısıyla farklı tanımlar ortaya koymuşlardır. Aslında bu farklılık sadece görselleştirme tanımında değil, görselleştirme ile ilgili uzamsal yetenek, görsel betimleme, görsel temsil gibi çeşitli kavramların tanımlarında da görülmekte ve görselleştirme ile ilgili araştırmalarda birbirleri yerine kullanılmaktadır.

1.2.1. Uzamsal yetenek

Lean ve Clements (1981, akt. Hacıömeroğlu, 2007)'e göre uzamsal yetenek, zihinsel şekilleri formülize edebilme ve bu şekilleri akılda manipüle edebilme yeteneğidir (s. 267).

McGee (1979 p. 896-897, akt. Hacıömeroğlu, 2007) uzamsal yetenek ile ilgili alan yazını gözden geçirmiş ve iki tür uzamsal yetenek tanımlamıştır:

1. Uzamsal görselleştirme; iki ve üç boyutlu nesneleri zihinde çevirme, manipüle etme ve bükme aktivitelerini içerir.

2. Uzamsal yönlendirme; nesnelerin düzenlemelerini görsel uyaran örüntüleri içinde anlama, uzamsal düzenlemelerin sunulduğu durumlarda yeteneğin değişmez kalması ve uzamsal yönlendirmelere kişinin vücuduna göre karar vermesidir.

1.2.2. Görsel betimleme

Lean ve Clements (1981), imajları (veya betimleme), bir nesnenin (duyu organlarına gösterilmediğinde) algılanması sonucu ortaya çıkan zihinsel aktiviteler olarak tanımlamış ve bu tanımdan yola çıkarak görsel betimlemeyi "aklın gözünde" bir resim şeklinde oluşan imajlar olarak tanımlamıştır.

Presmeg (1986) görsel betimlemeyi " görsel veya uzamsal bilgiyi betimleyen zihinsel şema" olarak tanımlamaktır. Bu tanım incelendiğinde, görselleştirme ile ilgili zihinsel betimleme, zihinsel şema, uzamsal yetenek gibi birçok kavramı da içinde barındırdığı görülmektedir ve bu anlamda kapsamının oldukça geniş olduğu söylenebilir. Ayrıca bu tanımdan yola çıkarak beş farklı betimlemeden bahsetmektedir:

1. Somut betimleme (akıldaki resimler): Oldukça zengin ve detaylı betimlemelerdir. Bu tür betimlemeler ayrıca bellekte yer alan özel üçgenler, bazı geometrik teoremlerin diyagramları, cebirsel fonksiyonların grafiksel betimlemelerini de içermektedir (Presmeg, 1986 akt. Hacıömeroğlu, 2007).

2. Kinestetik betimleme (fiziksel hareketler): Parabol gibi bir grafiği (öğrenciler genellikle parabolü ellerini kullanarak çizerler) veya örüntüyü ellerini ya da parmaklarını hareket ettirerek havada çizmelerini içeren kas aktivitelerini içermektedir.

3. Dinamik betimleme (betimlemenin kendisinin hareket ettiği veya dönüştürüldüğü): Bir dikdörtgenin paralelkenara dönüştürülmesi gibi aktiviteleri içeren dönüşümleri içermektedir.

4. Formüllerin bellek imajları: Bazı insanlar tahtaya ya da defterlerine yazdıkları formülleri zihinlerinde görebilmektedirler (Presmeg, 2006).

5. Örüntü betimlemesi: Bu tür betimlemede somut detaylar göz ardı edilir ve temel ilişkiler görsel uzamsal şemalardan tarif edilir.

Yine Presmeg (1986)'e göre bu tanım sözel, nümerik veya matematiksel sembollerin bir imaj oluşturmak için uzamsal olarak düzenlenmesi olasılığına izin vermektedir.

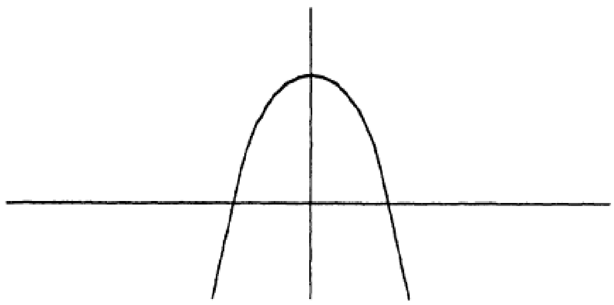
Matematiksel muhakemede ortaya çıkan diğer önemli betimleme türleri, prototipler, metonim ve metaforlardır (methapor) (Presmeg, 1992). Prototipler, bir kategorinin en iyi örneği olan zihinsel gösterimler (Lakoff, 1987, p. 43); metonimler, bir kategoriyi tamamıyla kapsamak için (sınırlı veya acil amaçlar için) alt kategorinin veya alt modelin kullanıldığı durum (Lakoff, 1987, p. 79); metaforlar ise bazı nesnelerin, matematiksel gösterimler yerine kullanılması (Presmeg [1992]'in çalışmasında yer alan öğrencinin, seferde bulunan bir geminin su seviyesini x-ekseni olarak alması gibi, benzetme) olarak tanımlanmıştır (akt. Presmeg, 1992). Prototipler, kişiden kişiye değişmekle birlikte ortak kültürü paylaşan bireyler tarafından ortak özellikler göstermektedir (Jonhson, 1987; akt. Presmeg, 1992). Öğrenciler bu tür gösterimleri kullanırken bir takım zorluklar yaşayabilmektedir. Eğer bu zorluklar ortaya çıkarsa çeşitli nedenlerden kaynaklanmaktadır. Presmeg (1992, 1986) bu zorlukları üç başlık altında toplamıştır:

1. Bir şeklin prototipinin özelliklerini taşımaması, bir imajın veya diyagramın, bir durumuna bağlı somutluğun (one case concretness)

düşüncenin ilgisiz detaylara bağlanmasına neden olması ya da yanlış veriyi göstermesi,

2. Verilen şekilde ikincil bir takım özelliklerin bulunması fakat bu özelliklerin genel durumda bulunmaması,
3. Kontrol edilemeyen görsel imajların ortaya çıkışı ve bu imajların, düşüncenin daha zengin parçalarının ortaya çıkmasını engellemesidir.

Bunun yanında prototipik imajlardan kaynaklanan ve istenen özelliğin tek durumda sağlanmasının neden olduğu bir takım zorluklar da vardır. Presmeg (1992)'in çalışmasında yer alan öğrenci için parabol, kolları aşağı doğru, simetri ekseninin y-ekseni olduğu tek bir prototipik parabol imajına (Şekil 1.1) sahiptir.



Şekil 1.1. Öğrencinin sahip olduğu prototipik parabol imajı (Presmeg, 1992)

Bu imaj, öğrencinin faklı şekillerde parabol içeren problemleri çözmesine engel olmaktadır. Yine bu çalışmasında Presmeg (1992), imajların soyut durumları betimlemek için iki şekilde kullanılabileceğini bulmuştur: Bunlardan ilki, somut görsel imajı, soyut bilginin taşıyıcısı yapmak; ikincisi ise yapının temel özelliklerini, detaya inmeden, örüntü betimleme kullanarak somutlaştırmaktır.

1.2.3. Görsel temsil

Temsiller, matematik eğitiminde geniş bir yere sahiptir. Seeger, Voight, ve Werschescio (1998; akt. Akkuş Çıkla, 2004) temsillerle ilgili tanımları şu şekilde özetlemiştir. Temsil;

- Özel bir konuyla birlikte herhangi bir zihinsel durum,
- Önceki zihinsel durumun, zihinsel olarak çoğalması,

- Resim, sembol veya işaret,
- Bireyin dili içinde öğrenmesi gereken bir sembolik araç,
- Başka bir şeyin yerine kullanılabilecek şey.

Temsiller genel olarak içsel ve dışsal olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Goldin ve Steingold (2001, akt. Hacıömeroğlu, 2007) dışsal temsillerin yapılandırılmış öğrenme ortamları ile birlikte (bilgisayara temelli microworldler gibi) tüm geleneksel sembol sistemlerini kapsadığını belirtirken içsel temsillerin, öğrencilerin bireysel olarak oluşturdukları yapıları, matematiksel işaretlere atanan anlamları, onların doğal dilini, görsel imajları ve problem çözme stratejilerini kapsadığını belirtmektedir.

Görselleştirme kavramı bazı özellikleriyle temsil kavramına benzer özellikler göstermektedir. Ancak temsil, çoğunlukla daha geniş bir alanı kapsayan aktiviteler anlamında kullanılmaktadır. Duval (1999) temsilleri, bir şey hakkındaki düzenli ve bütünsel inançlar, bir nesneyi belirten ve çağrıştıran çeşitli yollar ve bilginin nasıl kodlandığını göstermekte kullanılan kavram olarak tanımlamıştır. Görselleştirme ise daha çok imajlar ile fiziksel nesne ve olayların, deneysel sezgisi üzerinde durmakta gibi görünmektedir (Duval, 1999).

1.2.4. Görselleştirme

Ben-Chaim, Lappan ve Houang (1989, akt. Borba and Villarreal, 2005, p. 80)'a göre görselleştirme, şekilsel bilgiyi anlama ve yorumlama yeteneği ile soyut ilişkileri ve şekilsel olmayan bilgiyi görsel terimlere dönüştürme ve kavramsallaştırma yeteneklerini içerir

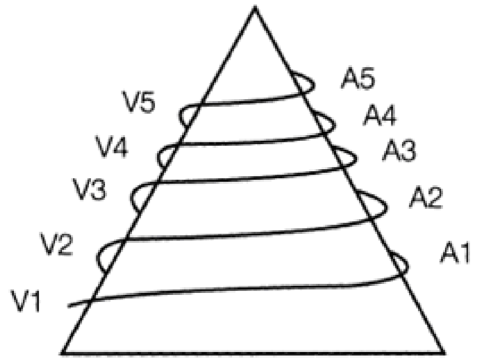
Zimmerman ve Cunningham (1991) matematiksel görselleştirmeyi "imajlar oluşturma süreci (zihinsel veya kalem ve kâğıt kullanarak veya teknoloji yardımıyla) ve bu imajları matematiksel keşif ve anlama için etkili bir şekilde kullanma" olarak tanımlamıştır. Bu tanıma benzer bir tanım da Arcavi (2003) tarafından yapılmıştır fakat Arcavi görselleştirmeyi bir ürün ve bir süreç yaratma, resimler ve imajlar üzerine yorum yapma ve düşünme olarak ifade etmiştir.

Zaskis, Dubinsky ve Dautermann (1996) görselleştirmeyi, bireyin içsel bir yapı ile erişimin duyularla sağlandığı şey arasında güçlü bir bağlantı kurma eylemi olarak tanımlamaktadır. Zaskis ve arkadaşlarına göre bu tür bağlantılar iki şekilde yapılır: İlki bireyin dışsal (erişimin duyularla sağlandığı deneyimler) olarak algıladığı bir nesne veya olayla, bir nesne veya sürecin zihinsel yapısı arasında kurulan bağlantıyı içerir. İkincisi ise bireyin aklındaki nesne veya süreçlerle tanımladığı; kağıt, yazı tahtası, bilgisayar ekranı gibi dış ortam araçları üzerinde oluşturduğu yapıları içerir. Aslında bu tanımda üzerinde durulan nokta, zihinsel ve dışsal olaylar arasındaki dönüşüm, bireyin bu ikisi arasında kurduğu bağlantıdır.

Zaskis, Dubinsky ve Dautermann (1996) görsel düşünmenin karşısında analitik düşünmenin (analiz) yer aldığını - ikisi arasında başka bir düşünme türünün var olup olmadığı sorusunu açık bırakarak- ifade etmiş ve şöyle tanımlamışlardır: Analitik düşünme, nesne veya süreçlerin, sembollerin yardımıyla veya yardımı olmadan zihinsel manipülasyonudur. Daha sonra görselleştirme ve analitik düşünmenin bir sentezi olarak matematiksel düşünme için bir model ortaya koymuşlardır: V/A (Visualization/Analysis; Görselleştirme/Analiz) Modeli.

Bu modelde görsel ve analitik düşünmenin farklı aşamaları ifade edilmiştir. Düşünme, bu modelde görselleştirme eylemiyle başlar; V_1. Bu aşama, bilgisayar ekranına, bir çizime veya her hangi bir resme bakmayı içerir ve zihinsel bir süreç veya nesne oluşturulur; ya da zihinsel bir süreci veya nesneyi ifade eden bir resim ya da dışsal bir araç oluşturma da bu aşamada görselleştirme olarak ifade edilir. Sonraki adım analiz aşamasıdır; A_1. V_1 basamağında oluşturulan nesne ve süreçlerin -Piaget'nin yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) kavramı anlamında- bazı koordinasyonlarını içerir. Bu analiz aşaması yeni yapıların oluşmasına neden olur. İkinci alt aşama olan V_2'de öğrenci V_1'de oluşturduğu şekle tekrar döner, fakat A_1 basamağı sonucunda bir takım değişiklikler olmuştur. V_2, oluşturulan resim için A_1'in bir uygulaması veya eski resmin yerini alacak yeni bir resim oluşturmaya yardımcıdır. Her iki durumda da matematiksel anlama zenginleşmiştir. Zaskis ve arkadaşları bu aşamaların V_1, A_1, V_2, A_2, V_3… şeklinde birbirini takip edeceğini öne sürmüşler ve bu süreci üçgensel bir şekille ifade etmişlerdir (Şekil 1.2.). Görselleştirme ve analiz basamaklarının üçgenin bir köşede birleşen iki kolu gibi gittikçe birbirine yaklaşmalarını ise şu şekilde açıklamışlardır:

Üçgenin en altında yer alan V_1 ve A_1 basamakları bireye ayrı iki basamak gibi görünebilirken, tekrar eden aşamalar boyunca düşünmenin bu iki boyutu birbirine daha çok yaklaşmakta ve V/A üçgeninin tepesinde birey tarafından birbiriyle daha ilişkili görünmeye başlamaktadır. Bu noktada analiz ve görsel anlamanın bir sentezi oluşmakta, hem birey hem de dışarıdan bir gözlemci için bu aşamaları birbirinden ayırmak artık oldukça zor olmaktadır.



Şekil 1.2. Görselleştirme/Analiz Modeli (Zaskis et al., 1996)

Nemirovsky ve Noble (1997) ise Zaskis, Dubinsky ve Dautermann'ın tanımındaki içsel ve dışsal ayrımının, oluşturulan yapının ne içsel ne de dışsal olması veya aynı anda her iki durumda da olması olasılığına izin vermediği için sınırlı olduğunu düşünmekte ve böyle bir yapının sadece akılda veya sadece dışsal olarak oluşturulabileceği fikrine karşı çıkmaktadırlar.

Görselleştirme ile ilgili çalışmalardan biri de Gutiérrez (1996) tarafından yapılmış ve matematikteki görselleştirmeyi "problemleri çözmek veya özellikleri kanıtlamak için gerçekleştirilen, fiziksel veya zihinsel olarak oluşturulan görsel veya uzamsal elementlerin kullanımına dayalı bir tür muhakeme aktivitesi" olarak tanımlamaktadır.

Farklı araştırmacılar tarafından yapılan bu tanımlar incelenirse bazı benzerlik ve farklılıklar tespit edilebilir. Matematik eğitimindeki görselleştirme bazı araştırmacılar tarafından öğrencilerin kavrayışı ile dışsal bir araç arasında iki yönlü yol izleyen bir süreç olarak düşünülürken (Gutiérrez, 1996; Zaskis et al., 1996; Zimmerman and Cunningham, 1991; Ben-Chaim et al., 1989) bazı araştırmacılar tarafından sadece tek yön üzerinde (Presmeg, 1986) durulmuştur (akt. Borba and Villarreal, 2005, p. 81). Bu tanımların bazılarında görselleştirmenin matematiksel keşif sürecindeki rolü ön plana çıkarken, bazılarında görselleştirmenin rolü ikinci plana düşmektedir (Borba and Villarreal, 2005, p. 81). Çünkü bu tanımlara göre matematiksel kavramlar, olası görsel betimlemelerinden önce gelmektedir ve dolaysıyla matematiksel kavramların oluşturulmasında görselleştirmenin herhangi bir fonksiyonu yoktur (Borba and Villarreal, 2005, p. 81).

Bu araştırmada görselleştirme kavramı, yukarıdaki bazı araştırmacılar (Gutiérrez, 1996; Zaskis et al., 1996; Zimmerman and Cunningham, 1991; Ben-Chaim et al., 1989 akt. Borba and Villarreal, 2005) tarafından tanımlandığı gibi, öğrencilerin kavrayışı ile dışsal bir araç arasında iki yönlü yol izleyen bir süreç olarak kabul edilecektir.

1.3. Araştırma Soruları

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde görsel ve analitik düşünme stratejileri arasındaki bağlantıyı nasıl sağladıklarını araştırmak ve bu bağlantıyı sağlama sürecinde öğrencilere nasıl yardım edilebileceğini belirlemektir. Araştırmanın amacı doğrultusunda yanıt aranacak sorular:

1. Tercihleri görsel yönde olmayan üniversite öğrencilerinin, analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde, görsel ve analitik muhakeme kullanma eğilimleri nasıldır? Bir muhakeme türünü daha baskın olarak kullanan öğrencilerin bu muhakemeyi kullanma nedenleri nelerdir?

2. Tercihleri görsel yönde olmayan üniversite öğrencilerinin, analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde, katıldıkları öğretim deneyinin, görsel ve analitik muhakeme kullanma stillerinde meydana getirdiği değişim nasıldır?

3. Tercihleri görsel yönde olmayan üniversite öğrencilerine, analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde, görsel ve analitik muhakeme arasındaki bağlantıyı daha etkili şekilde kurmalarına nasıl yardım edilebilir?

1.4. Araştırmanın Önemi

Görselleştirme ile ilgili araştırmalarda da ihmal edilen fakat oldukça önemli olan konulardan biri de bu alanın matematik öğretimi ile olan etkileşimidir (Presmeg, 2006). Matematik eğitiminde görselleştirmenin kullanımı ve gücünü geliştirebilecek etkili pedagoji belki de bu dönemdeki en acil çözüm bekleyen konu olarak nitelendirilebilir (Woolner, 1994, akt. Presmeg, 2006).

Analiz dersi özellikle matematik eğitimi için temel derslerden biridir. Matematik veya matematik eğitimi alanında ilerlemek isteyenler için daha sonraki konulara basamak niteliğindedir. Analizin birçok konusu ise görsel özellikler taşımaktadır. Buna rağmen üniversite matematiği alan öğrencilerin çoğu görselleştirmeye karşı isteksiz davranmakta (Eisenberg and Dreyfus, 1991), genellikle analitik çözümleri kullanmakta (belki öğretmenlerinin tercihlerini benimsedikleri için) (Zimmerman and Cunnimgham, 1991; akt. Selden and Selden, 1993), hem görsel hem de analitik stratejileri aynı anda kullanabilecek durumda olsalar bile bu ikisi arasında bağlantı kurmakta zorlanabilmektedirler (Zaskis et al.,1996).

Bu araştırmada da analizin, görsel özellikleri çoğunlukta olan integral konusu kullanılmıştır. Problemlerde kullanılan grafiksel gösterimlerde, integral konusunun görsel özelliklerinden yararlanılmıştır. Monk (2003, p. 252-256; akt. You, 2006) grafiksel gösterimlerin matematikteki gücünü beş maddede toplamıştır:

1. Grafik kullanımı, öğrencilerin konunun başka türlü ortaya çıkmayacak yönlerini keşfetmelerini sağlar.

2. Bir konunun gösterim süreci, o konuyla ilgili yeni soruların ortaya çıkmasını sağlar.

3. Öğrenciler tarafından öğrenilen bir konunun grafikler kullanılarak yeniden öğrenilmesi, öğrencilerin bu bağlamdaki anlamalarını derinleştirir.

4. Öğrenciler, grafiklerin özelliklerini kullanarak yeni kavramlar oluşturabilirler.

5. Öğrenciler grafik ve grafiğin içinde yer alan konudaki anlamalarını, tekrar ve etkileşimli keşif süreciyle detaylandırabilirler.

Matematik öğretmenleri ders sırasında ihtiyaç duyulduğunda fonksiyonların farklı gösterimlerini rahatlıkla kullanabilirken (Fererrini-Mundy and Lauten, 1993; akt. Cunnigham, 2005) öğrencilerin bu konuda yetersiz olduğu gözlenmiştir (Knuth, 2000; Eisenberg and Dreyfus, 1991).

Çalışma sonunda tercihleri görsel yönde olmayan öğrencilerin, hem görsel hem analitik stratejileri kullanma şansları olduğunda bunlar arasında geçiş yapabilmeleri ve görsel stratejileri de tercihleri arasına alabilmelerini sağlamaktır. Bunun bir sonucu olarak matematiksel anlamda kavramsal anlamada gelişecektir. Böylece araştırma sonucunda elde edilen bilgiler doğrultusunda, matematik alanında veya matematiğin kullanıldığı diğer alanlarda eğitim gören öğrencilere ve bu alanın eğitimcilerine daha çok yardım edilebilecektir.

1.5. Teorik Çerçeve ve Araştırmanın Varsayımı

1.5.1. Görselleştirmeye karşı direnç ve matematiksel inançlar

Görselleştirme matematikçiler tarafından sıklıkla kullanılan süreçlerden biridir. Burton ve Sinclair (2004, p. 55), araştırmasında matematikçilerin üç tür düşünme stiline (görsel, analitik ve kavramsal) sahip olduğunu ve bu düşünme stillerinden birinin de görsel düşünme olduğunu belirtmiştir. Stylianou (2000) da çalışmasında belirttiği gibi uzman (profesyonel matematikçiler) ve acemi (üniversite öğrencileri) matematikçilerin ileri düzeydeki matematiksel problemlerin çözümünde görsel betimlemeyi sıklıkla kullandıkları ancak bu iki tür kullanıcı arasında kullanım şekli açısından fark olduğunu sonucuna ulaşmıştır. Stylianou (2000) bu farkları şu şekilde sıralamıştır: Acemi matematikçiler bu stratejinin kullanım alanını daha çok matematiksel konunun yapısına dayandırmaktadır. Uzman matematikçiler ise bu stratejiyi kullanırken hem konunun yapısından hem de diğer matematiksel özelliklerin ayrıntılarından etkilenmektedirler. Ayrıca uzman matematikçiler görsel betimlemeyi, problem çözme sürecinin başında, problem uzayının niteliklerini keşfetmek, problem durumunu daha iyi anlamak, çözüm planını yönlendirmek ve geliştirmek amacıyla acemilere oranla daha sık kullanmaktadırlar. Bunun yanında uzman matematikçiler görsel betimlemeleri, ürettikleri çözümler ve varsayımlar arasında etkileşim kurmak için dinamik objeler olarak kullanırken acemi matematikçiler görsel betimlemeleri çözüm sürecine yardımcı olarak görmekte ve çok nadir olarak problem çözümüne başlarken ya da tamamlama aşamasında kullanmaktadırlar. Yine acemi matematikçiler, problem için her ne kadar bir görsel betimleme ortaya koysa da bunu çok az kullanmaktadırlar. Görüldüğü gibi uzman matematikçiler problem çözme süreçlerin hemen her aşamasında (kullanmak istedikleri sürece) görselleştirmeden yararlanmaktadırlar. Ancak yapılan araştırmalar göstermektedir ki öğrenciler, bu düşünme süreçlerini kullanma konusunda oldukça isteksiz davranmaktadırlar. Bunun yanında sembolizme yapılan vurgu ve analitik metotları öğretmenin daha kolay olması, öğrencilerin görselleştirmeye karşı isteksiz olmasına ve cebirsel ya da algoritmik yöntemleri, görsel düşünmeye tercih etmelerine neden olmaktadır (Eisenberg and Dreyfus, 1991). Eisenberg ve Dreyfus (1991) görselleştirmeye karşı direncin öğrenilmiş bir fenomen olduğu ve bu bilişsel süreci desteklemeyen bir öğretimin sonucu olabileceğini ileri sürmektedir. Bu durum bu şekilde yapılan bir eğitimin, öğrencilerin bu düşünce sistemine karşı olumsuz inançlar geliştirebileceği ve görsel muhakemeye karşı oluşan direncin altında yatan bir faktör olabileceği fikrini ortaya çıkarmaktadır. Çünkü öğrencilerin formel matematik hakkındaki inançlarını, geniş ölçüde onların sınıf içindeki deneyimleri oluşturmaktadır (Schoenfeld, 1992). Hatta inanç yapıları sadece öğrenciler için değil, öğretmenler için de önemlidir. Bir öğretmenin matematiksel girişim hakkındaki düşüncesi, o öğretmenin yaratacağı sınıf atmosferinin doğasını belirlemekte ve bu atmosfer aynı zamanda öğrencinin, matematiğin doğası hakkındaki inançlarını da şekillendirmektedir (Schoenfeld, 1992).

"Bireysel kavramsallaştırma ve matematiksel davranış yollarını şekillendiren bireysel anlama ve duygular" olarak tanımlanabilen inançlar Schoenfeld (1992)'in çalışmasında üç boyut altında incelenmektedir: Öğrenci inanışları, öğretmen inanışları ve genel sosyal inanışlar. Matematik denilince akla, bir şeyi bilmek ve doğru yanıtı hızlıca vermenin gelmesi kültürel bir varsayım olarak okul deneyimleri ile şekillenir. Öyle ki matematik yapmak, öğretmenin verdiği kuralları uygulamak, matematiği bilmek, hatırlamak ve doğru kuralı öğretmen bir soru sorduğunda uygulamak; matematiksel gerçek ise yanıtın öğretmen tarafından onaylanması olarak anlaşılır (Lampert basımda, p. 5; akt. Schoenfeld, 1992). Schoenfeld'e göre bu inançlar öğrencilerin şu düşüncelere sahip olmasına neden olmaktadır: Matematik problemlerini çözmek için sadece bir doğru yol vardır ve genellikle bu öğretmenin sınıfta gösterdiği kurallardır. Formel ispatın keşif süreci ile ilgisi yoktur.

Sıradan öğrenciler matematiği anlamayı beklememeli, onlar sadece basitçe ezberlemeli ve öğrendiklerini anlamadan, mekaniksel olarak uygulamalıdır. Bu tür inançlar öğrencilerin düşünce sisteminin yanlış yönde değişmesine neden olmaktadır.

1.5.2. Yapısalcı yaklaşım

Matematik eğitiminde yapısalcı yaklaşım, matematiksel fikirlerin bireylerin aktiviteleri sonucunda oluşan şemalarına dayanır ve matematik kişinin aktiviteleri ve o aktiviteler üzerine yansıtıcı düşünmeleri sonucunda oluşur. Bir öğretme durumunda matematiksel yapılar, öğrencileri aktiviteler ve deneyimlerde bulunmaya teşvik eden durumlardan etkilenir (Confrey, 1994, 1995, 1995; von Glasersfeld, 1984; akt.; Confrey and Lachance, 2000, p. 237). Bilginin oluşabilmesi için öğrencilerin farklı çözüm ve araçlar gerektiren aktiviteleri keşfetmeye ihtiyaçları vardır. Öğrencilerin bu aktivitelerle ilgili yapıları oluşturmak için kişilere ve araçlara ihtiyaçları vardır. Araştırmacı, oluşturulan bu yapılar için konuyla ilgili kendi anlamalarını ve öğrencilerin anlamalarını gözden geçirmelidir (Confrey and Lachance, 2000, p. 239). Çünkü öğrenme, gerçekleştiği ortamdan ayrı olarak düşünülemez. Yapısalcı yaklaşıma göre öğrenme ortamında meydana gelecek sosyal etkileşim öğrenmenin vazgeçilmezleri arasındadır. Von Glaserfeld (1989)'e göre öğrenme ortamında bulunan diğer kişiler, bireyin var olan görüşlerine meydan okuyan alternatif görüşler için mükemmel kaynaklardır ve bu yüzden yeni öğrenmelere temel oluşturacak uyarıcı güçlerdir. Bu tür sosyal ortamların bir diğer önemli özelliği de bireyin kendi görüşlerinin doğruluğu konusunda fikir sahibi olabilmesi ve güvenirliğini denetleyebilmesidir. Çünkü gerçek olarak kabul edilenler, çoğunluğun üzerinde görüş birliğine vardığı düşüncelerdir (Savery and Duffy, 1995). Yapısalcı yaklaşımından ortaya çıkan öğretimsel ilkeler aşağıdaki gibidir ve bu ilkeler aynı zamanda probleme dayalı öğretimin temel özelliklerinin bir yorumudur (Lebow, 1993 akt. Savery and Duffy, 1995):

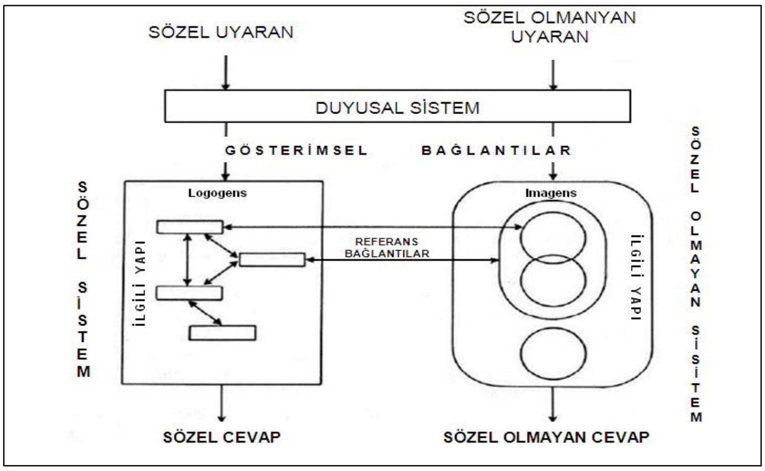
- Öğrenme aktiviteleri bir göreve (probleme) dayanır.
- Birey kendi öğrenmesinin sorumluluğunu alması için desteklenir.
- Uygun görevler belirlenir. Aktiviteler sırasında bireyin de problemler oluşturmasına izin verilir.

- Sonunda öğrenmenin gerçekleşeceği bilişsel olarak karmaşık ortamlar hazırlanır.
- Bireye kendi çözüm sürecini belirleme sorumluluğu verilir.
- Öğrenme ortamı bireyin düşünce sistemini destekleyen ve düşünce sistemine meydan okuyan bir şekilde düzenlenir. Öğretmen, Vygotsky (1978)'nin "yakınsal gelişim alanı" teorisinde olduğu gibi öğrenme aktivitelerine rehberlik etmeli, öğrencinin görüşlerine değer verdiği gibi eleştirmelidir de...
- Birey farklı görüşleri, diğer görüşlere karşı ve farklı bağlamlarda test etmeye özendirilmelidir.
- Öğrenilen konu ve öğrenme sürecine ilişkin öz düzenleme becerileri geliştirilmelidir.

Öğrencilerle gerçekleştirilen öğretme deneyinde, yapısalcı yaklaşımın öğretimsel ilkeleri göz önünde bulundurulmuştur. Çalışmada kullanılan problemlerde, görsel ve analitik stratejilerin etkileşimli olarak kullanılabilir olmasına ağırlık verilmiştir. Dolayısıyla Amerika'da analiz reformu olarak adlandırılan süreçte kullanılan Harvard metodunun (analiz konularına görsel, analitik ve numerik olarak yaklaşmak) özelliklerinden de yararlanılmıştır.

1.5.3. İkili kodlama teorisi

İkili kodlama teorisine (Dual Coding Theory) göre biliş, belirgin iki alt sistemde meydana gelen aktiviteleri içerir: Bunlardan ilki olan sözel sistem, dil ile ilgili sözel sistemler üzerine özelleşmiştir (Şekil 1.3). Betimsel sistem ise sözel olmayan nesne veya olaylar üzerine özelleşmiştir. Bu sistemlerin içsel gösterim birimlerini (logogens=sözcüklerden meydana gelen ve imagens=imajlardan meydana gelen) düzenlemekle görevli olduğu varsayılır. Bu birimler bir kelime veya bir şey düşünüldüğünde, hatırlandığında veya değiştirildiğinde aktive edilirler. Gösterim birimleri, dil ve nesnelerin görsel, işitsel, duyusal ve motor özellikleri için birer yaklaşım olarak özelleşmişlerdir. Yine bu gösterimler beynin duyusal giriş ve çıkış birimleriyle ilgili oldukları kadar birbirleriyle de ilişkilidir ve işlevlerini tek başlarına yerine getirebildikleri gibi sözel ve sözel olmayan davranışlara işbirliği içinde aracılık etmektedirler (Paivio, 2006b).



Şekil 1.3. İkili Kodlama Teorisi (Paivio, 2006a)

Bellek modellerine göre duyusal belleğimize dışarıdan gelen uyaranlar, uyarıcının niteliğine göre görsel ya da işitsel bellek tarafından kaydedilir. Fakat bunların bellekte tutulma süreleri oldukça sınırlıdır. Uyarıcının niteliği bu sürenin artmasına neden olabilir. Bu teoriye göre dışarıdan gelen bilgi bir veya birkaç sistem tarafından kodlanır. Belleğin gelen bilgileri kodlama kapasitesini geliştirmek için bilgi, birden fazla sisteme hitap edecek şekilde sunulmalıdır. Bu yüzden öğretim faaliyetlerini yürütürken bilgiyi sadece görsel ya da sadece işitsel kayıt sistemimize uyan şekilde değil de hem görsel hem de işitsel bileşenlerle sunmak daha yaralı olacaktır. İşitsel özelliklere sahip sunumları görsel yardımcılarla destekleme ve görsel materyalleri tartışma, ders materyallerinin algılanmasını arttırmak için akılcı bir yöntem gibi gözükmektedir (Brunning et al., 1995, p. 22).

1.5.4. Araştırmanın varsayımı

Tall (1991)'un da belirttiği gibi görselleştirme matematiğe negatif ve pozitif anlamda katkıda bulunmaktadır. Çünkü görselleştirme, çoğu zaman öğrendiğimiz bilgileri somutlaştırmamızı, teoremleri içselleştirmemizi sağlarken bazı durumlarda matematiğin ve görselleştirmenin kendi yapısı nedeniyle bir takım hatalar yapmamıza da neden olabilmektedir. Ancak daha önce yapılan araştırmalar incelendiğinde görülecektir ki bu süreç uzman matematikçiler tarafından bile sıklıkla kullanılmaktadır. Öğrencilerin görsel tercihleri incelendiğindeyse görsel tercihlere sahip olmayanlar kadar sahip olanların da var olduğu görülecektir. Böyle bir durumda öğrencilerin öğrenme sürecinde sıklıkla kullandıkları bu yapıyı köreltmek (derslerde kullanmayarak), görselleştirmenin sağladığı avantajlardan öğrencilerin yararlanmasına engel olmak demektir. Bu süreçte yaşanılan zorlukları tespit edip karşılaşılacak zorluklar hakkında önceden yaratılacak farkındalıklar, öğrencilerin bu süreçte daha başarılı olmasını sağlayacaktır. Dolayısıyla öğretme sürecinde görsel ve analitik muhakemeyi bir arada kullanmak, hem öğrenmenin etkililiğini artıracak hem de bu iki süreçten herhangi birinde meydana gelecek zorlukların üstesinden gelinmesini sağlayacaktır.

Görsel ve analitik muhakeme süreçlerinin kendine özgü çalışma şekilleri vardır ve öğrencilerin bu sistemlerinin farkında olması gerekmektedir. Bunun yanında problem çözme durumlarındaki matematiksel aktiviteler, farklı muhakeme sistemlerini gerektirebilir. Çünkü bir verinin gösterimi daha önceden var olan bir modele daha iyi uyum sağlayabildiği gibi her iki muhakeme türünün birlikte kullanılması gereken bir durum da ortaya çıkabilir (Duval, 1999). Bu araştırmada da görselleştirmeye karşı direncin öğrenilmiş bir fenomen olduğu ve öğrencilerin her iki süreci (görsel ve analitik) bir arada ve etkileşimli kullandıkları takdirde daha başarılı olacağı varsayılmıştır. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanımlarına bir tercih olarak bakılmış ve Presmeg (1986) tarafından geliştirilmiş olan Matematiksel Süreç Aracı (MSA) katılımcıların görsel tercihlerini belirlemek için kullanılmıştır. Bu yüzden görsel tercihleri MSA'na göre görsel yönde olmayan öğrencilere, dört haftalık bir öğretim deneyi planlanmıştır. Öğrencilerin integral konusunda, görsel süreçte yaşadıkları zorluklar, ilgili alan yazında yapılan taramalarla tespit edilmiş ve öğretim deneyi için bu yönde sorular hazırlanmıştır. Öğrencilerin görsel süreçleri kullanırken yapacakları hatalar konusunda farkındalıklarını arttırarak ve bu süreci analitik süreçle de destekleyerek, görsel strateji kullanımı konusundaki tercihlerinin olumlu yönde değiştirilebileceği ve dolayısıyla bu süreçte ve genel anlamda daha başarılı olacakları düşünülmüş ve araştırmanın varsayımı bu yönde oluşturulmuştur.

1.5.5. Pilot çalışma

Araştırmanın öğretim deneyi bölümünde kullanılan problemler, çalışmaya başlamadan önce öğrencilerin vereceği olası yanıtları, problemlerde anlaşılmayan noktaları, problemlerin öğrenci seviyesine uygunluğunu belirlemek amacıyla çalışmanın katılımcılarıyla aynı bölümde ancak altı ve sekizinci dönemde öğrenim görmekte olan beş öğrenciye uygulanmıştır. Uygulama sonucunda öğrencilerden gelen dönütler doğrultusunda bazı problemler çalışmadan çıkarılmış, bazılarının üzerinde düzeltmeler yapılmıştır.

Pilot çalışma da öğrencilerin en çok zorlandıkları problemler, çalışma kağıdı üç ve dörtte yer alanlar olmuştur. Bu durumun en önemli nedenlerinden biri, öğrencilerin bir fonksiyon ile türevi arasındaki cebirsel bağlantıları çok iyi, grafiksel bağlantıları ise belli düzeyde biliyor ve kullanıyor olmalarına rağmen benzer ilişkiyi bir fonksiyon ve integrali arasında daha önce hiç kurmamış olmalarıdır. Araştırmacı, çalışmanın ön hazırlıkları çerçevesinde, katılımcıların da içinde bulunduğu sınıfla birlikte integral konusunun anlatıldığı analiz derslerini dinlemiş ve gözlemlerde bulunmuştur. Gözlemler sırasında öğrencilerin fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkinin grafiksel boyutu hakkında bilgi sahibi oldukları belirlenmiştir. Ancak fonksiyon ve integrali arasındaki grafiksel ilişkinin ders sorumlusu tarafından incelenmediği gözlenmiştir. Dolayısıyla çalışma kağıdı dörtte yer alan soruların öğretim deneyinde yer almasının öğrenciler açısından uygun olacağına karar verilmiştir.

2. İLGİLİ ALANYAZIN

Şimdiye kadar görselleştirme üzerine yapılan araştırmalar öğrenci başarısı ve problem çözme becerileri (Campbell et al., 1995), bilgisayar ortamında görselleştirme (Tall, 2000; Malabar and Pountney, 2002), matematikte problem çözme (Stylianou, 2000), görselleştirmenin kavramsal anlamaya katkısı (Işık, 2007; Pinto and Tall, 2002; Herman, 2002; Konyalioğlu et al., 2005), görselleştirmenin bilişsel boyutu (Duval, 1999), görselleştirmenin kanıt sürecine etkisi (Rodd, 2000; Gibson, 1998) gibi çeşitli konular üzerinde yoğunlaşmıştır. Yine bu araştırmalarda görselleştirme ile ilgili olarak görsel uzamsal beceri, görsel betimleme gibi kavramlar kullanılmıştır.

Araştırmalarda görselleştirmeye bazen matematiksel bir yetenek bazen de bireysel bir tercih olarak bakılmış ve bireyleri bu yetenek veya tercihlerine göre sınıflama yoluna gidilmiştir. Krutetskii (1976, akt. Aspinwall et al.,1997) okul düzeyinde, matematiksel anlamda başarılı üç tür öğrenci profilinden söz etmiştir:

1. Analitik: Bu profiledeki öğrenciler, zayıf görsel bileşenler üzerine, baskın çok kuvvetli sözel ve mantıksal bileşenler kullanır. Uzamsal kavramları zayıftır. Problem çözmede görsel destek kullanamaz ve görsel desteğe ihtiyaç duymaz.
2. Geometrik: Bu profiledeki öğrenciler, vasat üstü sözel mantıksal bileşenler üzerine, baskın, çok kuvvetli görsel bileşenler kullanır. Problem çözme sürecinde görsel desteği kullanabilir ve bu desteğe ihtiyaç hisseder.
3. Harmonik: Bu profildeki öğrenciler, kuvvetli sözel-mantıksal ve görsel bileşenlerin dengesiyle hareket eder. Uzamsal kavramları kuvvetlidir.

   Alt tip (a) (Somut harmonik) Problem çözmede görsel desteği kullanabilen ama tercih etmeyen öğrenciler bu tiptedir.

   Alt tip (b) (Resimli harmonik) Problem çözmede görsel desteği kullanabilen ve tercih eden öğrenciler bu tiptedir.

Krutetskii'nin sınıflamasına benzer bir sınıflamayı Clements (1982, akt. Zaskis et al.,1996) de yapmış ancak grupları, görsel ifadeyi kullanmayı tercih eden (visualizer), sözel ifadeleri kullanmayı tercih eden (verbalizer) ve sözel ya da görsel ifadelerini birini diğerine tercih etmeyen karıştırıcılar (mixers) olarak isimlendirmiştir. Bu sınıflamalar her ne kadar kabul görse de problem çözme anlamında kişileri bu şekilde sınıflandırmak çok kullanışlı değildir (Aspinwal, Shaw and Presmeg, 1997). Çünkü matematiksel problem çözme, duruma özeldir ve kişinin kullandığı yaklaşım duruma bağlı olarak değişebilir (Aspinwal, Shaw and Presmeg, 1997).

Görselleştirme alanında farklı bir bakış açısı da Bishop'a aittir. Bishop (1983, p. 177; akt. Gutiérrez, 1996), görselleştirme içinde iki tür beceriden bahsetmektedir: Bunlardan ilki soyut ilişkilerin ve figürsel verinin görsel terimlere dönüşümü, görsel betimlemenin dönüşümü, öngörümü ve bir görsel betimlemenin başka bir görsel betimlemeye dönüşümü olarak tanımlanan, bilginin 'görsel uygulaması'dır. İkincisi ise görsel kural bilgisi, görsel imajların okunması ve yorumlanması olarak tanımlanan 'figürsel bilginin yorumlanması'dır.

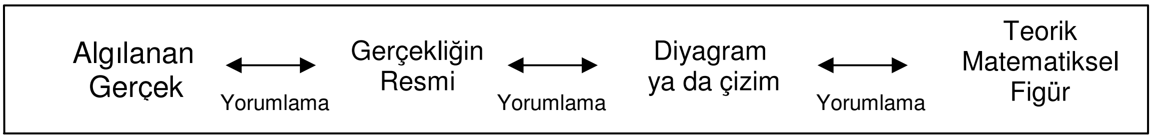
Bu çalışmada, üniversite öğrencilerinin, integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde, görsel ve analitik düşünme süreçleri arasındaki bağlantıyı nasıl sağladıkları ve bu bağlantıyı sağlama sürecinde öğrencilere nasıl yardım edilebileceği araştırılacaktır. Bu amaç doğrultusunda ilgili alan yazın üç başlık altında incelenecektir: Görselleştirme ve problem çözme, görselleştirme ve analiz, görselleştirme ve kavramsal anlama.

2.1. Görselleştirme ve Problem Çözme

Görselleştirme ile ilgili çalışmalar incelendiğinde, araştırmaların çoğunlukla görselleştirmenin problem çözme başarısına etkisi ve problem çözmedeki rolü gibi konunlar üzerine yoğunlaştığı görülmektedir. Problem çözme, matematik eğitimi araştırmalarında önemli bir yere sahiptir. Öğrencilerin problem çözme yeteneklerinin geliştirilmesi, matematik eğitiminin temel amaçlarından biridir.

Görselleştirmenin problem çözme sürecindeki önemine ilişkin ilk söylem Polya'nın 'Nasıl Çözmeli?' adlı kitabında 'bir diyagram çiz' stratejisinde yer almaktadır. Süreç içinde görselleştirmenin problem çözmedeki yeri zaman zaman değişse de son 20 yılda tekrar önemli bir faktör haline gelmeye başlamıştır. NCTM'nin (National Council of Teachers of Mathematics) okul matematiği için prensip ve standartları arasında, gösterimlerle ilgili bir madde bulunmasıyla bu durumu vurgulamaktadır (Stylianou and Silver, 2004).

Booth ve Thomas (2000), görsel uzamsal yetenekleri açısından farklı (düşük ve yüksek) ancak matematiksel başarıları açısından benzer olan iki grup öğrencinin sözel, aritmetik ve diyagramatik olarak sunulan aritmetik problemlerdeki başarılarını karşılaştırmışlardır. Görsel uzamsal yetenekleri daha yüksek olan grup, problemin sunuluş şekli ve kullanılan çözüm yönteminden bağımsız olarak daha başarılı olmuştur. Ancak araştırmacılar bu öğrencilerin bir resim veya diyagramla çalışmaları arasında fark olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Araştırmacılara göre gerçekliğin zihinsel görüntüsünden sonraki gösterimlere doğru ilerlemek, yorumlayıcı ve zihinsel bir süreç gerektirmektedir. Laborode (1993b, p. 49; akt. Booth and Thomas, 2000)'a göre çizim bir materyal olarak değerlendirilirken şekil, teorik bir nesne olarak karşımıza çıkmaktadır. Dolayısıyla matematiksel bir nesne olan çember şekliyle, elle çizilmiş bir çemberi yer değiştirdiğimizde, ikisi arasındaki geçiş yorum gerektirmektedir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Gerçeklikten matematiksel şekle hareketi gerektiren yorumlama basamakları (Booth and Thomas, 2000)

Yine Booth ve Thomas (2000)'ın çalışmasında görsel uzamasal yetenekleri yüksek olan öğrenciler, verilen diyagramı yorumlayarak sözel probleme doğru hareket edilen sorularda daha başarılı olurken, sözel problemi yorumlayarak grafik veya diyagram oluşturmakta başarılı olamamışlardır. Ancak bu durum her iki grup için de aynı özelliktedir. Araştırmacılara göre uzamasal yetenekler öğrencilere, görsel ve sözel olarak verilen bilgiyi analiz etmelerini ve yapılandırmalarını sağlarken, tersi kavramsal süreç yani sözel bir bilgiden uygun diyagram oluşturmak, daha zordur ve bu sürece aracılık eden başka yetenekler söz konusudur.

Stylianou (2000) çalışmasında uzman (profesyonel matematikçiler) ve acemi (üniversite öğrencileri) matematikçilerin ileri düzeydeki matematiksel problemlerin çözümünde, görsel betimlemeyi potansiyel ve gerçek anlamda ne kadar kullandıklarını araştırmıştır. Çalışma sonucunda, görsel betimlemenin hem uzman hem de acemi matematikçiler tarafından kullanılan bir strateji olduğu ortaya çıkmıştır. Ancak uzman ve acemi matematikçilerin bu stratejinin kullanım şekli birbirinden farklı özellikler göstermektedir. Uzman matematikçiler görsel betimlemeyi acemi matematikçilere oranla daha yoğun ve yapılandırmış olarak kullanmaktadırlar. Acemi matematikçilerin görsel betimlemeyi kullanma sıklığı ve şekli konunun yapısından etkilenmekte ve her ne kadar bir görsel betimleme ortaya koysalar da bundan çözüm sürecinin bir parçası olarak yararlanamamaktadırlar.

Campbell, Collis ve Watson (1995), problem çözmedeki başarının görsel imajların renkliliğinden çok mantıksal-işlemsel yeteneğe bağlı olduğunu belirlemişlerdir. Farklı genelleme ve soyutlama seviyelerindeki görsel stratejilerin, problem çözme sürecinde kullanıldığını ve bu stratejilerin kullanımının -soyutlama derecesine bağlı olarak- ya görsel imajların renkliliğine ya da mantıksal-işlemsel beceriye bağlı olarak değiştiğini belirtmişlerdir. Campbell, Collis ve Watson (1995)'a göre mantıksal işlemsel yapı ile bunun bağlı olduğu imaj şeması yakından ilgilidir ve en etkili öğretme stillerinde, görsel metotlarla birlikte soyutlamaya ve genelleştirmeye önem verilmelidir. Bu ikili vurgu, hem görsel düşünmenin yararlarından faydalanmayı sağlayacaktır hem de öğrencileri tek durumluk somut görsel imajların oluşturduğu sınırlılıklardan kurtaracaktır.

Üniversite öğrencilerinin problem çözme sürecinde, doğrusallık kavramını oluştururken kullandığı görselleştirme yollarını belirlemek için Stylianou ve Dubinsky (1999) tarafından bir araştırma yapılmıştır. Çalışma sonucunda, üniversite öğrencilerinin geometrik öğeler içeren görevlerle karşılaştıklarında, görselleştirme ve analitik süreçler birbiriyle etkileşim halinde olan, iki problem çözme şekli olarak kullanabildiklerini gözlemlemişlerdir. Bunun yanında öğrenciler esnek olarak hem analitik hem görsel süreci kullanabilirlerken bu iki süreç arasında geçiş yapmakta zorlandıklarını belirtmişlerdir. Stylianou ve Dubinsky (1999)'e göre bu geçişi yapmakta rahat olan öğrenciler, sonraki keşiflerinde daha çok ilerleyebilmektedirler. Özellikle öğrencilerin oluşturdukları imajları kullanarak doğrusallığın cebirsel özellikleri ile bağlantı kurmaya çalışmaları aşamasında önemli olan nokta, çalışmada kuramsal çerçeve olarak göz önüne alınan Görsel/Analitik (V/A) modeldeki ilk basamak olan A_1 aşamasının kullanılmasıdır.

Stylianou (2002) uzman matematikçilerin problem çözme ve kanıt yapma sürecindeki muhakeme süreçlerini inceledikleri çalışmasında, Zaskis ve arkadaşlarının V/A modelinde olduğu gibi görselleştirme ve analizin, matematiksel kavramları anlamayı geliştirmede iki ayrı uç değil birbiri ile etkileşim halinde olan düşünce şekilleri olduğunu destekleyen sonuçlar elde etmiştir.

Rösken ve Rolka (2006) çalışmalarında, öğrencilerin integral konusu kapsamında hangi görsel imajlara sahip olduklarını, verilen bir görselleştirmeye karşı nasıl davrandıklarını ve görselleştirmeyi hangi kapsamda kullandıklarını analiz dersi kapsamında araştırmışlardır. Araştırma sonucunda görselleştirmenin öğrenciler için önemli olduğu kadar bazı güçlükleri de beraberinde getirdiğini gözlemlemişlerdir. Bu yüzden matematik öğreniminde ve öğretiminde görselleştirmenin, matematiksel kavramlar ve onlar arasındaki ilişkiler için bir izomorfi göstermediği gerçeğinin farkında olmak açısından önemli olduğunu belirtmektedirler. Ayrıca görselleştirmeye yansıtıcı düşünmenin eşlik etmesi gerektiğini, böylece görselleştirmenin oluşturduğu zorluklardan öğrencilerin kurtulabileceğini ifade etmişlerdir.

Bir görselleştirme formu olan diyagramların, kanıt oluşturmak için üniversite öğrencileri tarafından nasıl kullanıldığının araştırıldığı bir çalışma da Gibson (1998) tarafından yapılmıştır. Gibson (1998) çalışmasında öğrencilerin kanıt yapma sürecinde diyagram kullanmaya ne kadar istekli olduklarını, hangi koşullar altında diyagramları kullandıklarını, kanıt yaparken diyagramları hangi yolla kullandıklarını ve kanıt sürecinde diyagramların öğrencilere neden yardımcı olabileceği sorularına yanıt aramıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin, verilen bilgiyi anlama, ifadelerin doğruluğunu sorgulama, yeni fikirler keşfetme ve fikirlerini yazma aktivitelerinde zorluk yaşamamak için diyagramları kullandıkları sonucuna varmıştır. Ayrıca somut, değiştirilebilir ve öğrencilerin bilgiyi anlamalarına daha uygun oldukları, düşüncedeki zihinsel yükü azalttıkları için diyagramların öğrencilerin düşünce sürecine yardımcı olduğu sonucuna ulaşmıştır.

Görsel ifadelerin problem çözme sürecinde kullanımı ile ilgili olarak Stylianou (2000), bilişsel çalışmalardaki iki farklı muhakeme (reasoning) türünden bahsetmektedir: Birincisi problemin bir parçası olarak verilen ve muhakeme sürecine yardımcı olan görsel ifadelerle yapılan muhakemedir. İkincisi ise problem çözücünün kendisi tarafından oluşturulan, problem çözme sürecinde bir araç olarak kullanılan görsel ifadelerle yapılan muhakemedir. Birincisinde problem çözücü, görsel biçimde verilen bilgiyi çözümleyip bu bilgiyi diğer bilgi türleriyle birleştirirken ikincisinde, kendisine farklı şekillerde verilen bilgileri görsel bilgi olarak kodlar ve muhakeme sürecinde kullanır. Larkin ve Simon (1987, akt. Stylianou, 2000)'a göre birinci türde yer alan muhakeme biçiminde, problem çözme süreci, insanların bilgi işleme sürecinin üç aşaması dikkate alınarak incelenebilir: Araştırma, tanıma ve çıkarsama. İnsanın kendi bellek sistemindeki bilgi arayışında, diyagramlarla yapılan araştırmalar diğer gösterim türleriyle yapılan araştırmalara oranla daha kısa sürebilir. Kişiye bir diyagram sunulduğunda bellek, hem o nesne hem de onun etrafında yapılanmış olan nesneleri arayacaktır. Oysa bilgi bir dizi sembol ve kelimeyle sunulduğunda veri, daha geniş bir şekilde dağıldığı için arama uzun sürecektir. Bilgi işleme sürecinin ikinci basamağında yer alan tanıma basamağı ise bilginin duyulara nasıl sunulduğuna karşı oldukça hassastır. Görsel olarak kodlanmış bir bilgiyi tanıma, görsel ifadeler kullanıldığında daha kolay olabilir. Araştırma ve tanıma basamaklarında olduğu kadar güçlü olmasa da görsel ifadelerin çıkarsama üzerinde de etkisi bulunmaktadır. Görsel ifade oluşturma şeklinde yapılan muhakemede problem çözücüler, zihinsel veya dışsal olarak şekiller oluşturmakta ve bunlardan çıkarımlarda bulunmaktadırlar. Qin ve Simon (1990, 1992, 1995; akt. Stylianou, 2000)'a göre zihinsel şekiller oluşturulurken daha önce var olan bilgilerden yaralanılmaktadır; dolayısıyla zihinsel betimleme, görsel bilinti ile önceki bilginin bir kombinasyonunu içermektedir.

Russel (1997) ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının problem çözme faaliyetleri sırasında görsel strateji kullanımlarını araştırmıştır. Russel, problem çözmenin üst bilişsel (metacognitive) bir aktivite olduğunu ve görsel stratejiler için tartışma bölümlerinin nesneler ve eylemler olduğunu ifade etmiştir. Üst bilişsel açıdan bakıldığında matematiksel görselleştirme için kullanışlı olan eylemler, seçilen ve organize edilen nesnelere dönüşmektedir. Bu seçme ve organize etme eylemi kişiye göre değişmesine rağmen, dört faktörün görsel muhakemede kritik bir role sahip olduğu görülmektedir: Matematiksel bilgi, uzamsal yetenek, ölçmenin amacı ve kontrol. Burada matematiksel bilgi, gösterimlerin sayısı, performans bileşenleri (Stenberg'in Triarchic modelinde yer alan, basit çalışan bellek işlemleri: arama, gözden geçirme, karşılaştırma vb.) ve bu bileşenlerin organizasyonu ile ilgilidir. Uzamsal yetenek, gösterimlerin kalitesi, performans bileşenleri ve problem çözücü için kullanışlı olan organizasyon ile ilgilidir. Ölçmenin amacı, problemi anlama ve gösterimi başlatan başlangıç muhakemesiyle ilgilidir. Son olarak kontrol yöntemi, problemi diğerlerine açıklama ve sonucu savunma ile ilgilidir.

Stylianou (2002) profesyonel matematikçilerin problem çözerken ve kanıt yaparken diyagram çizme stratejisini hangi sıklıkta ve nasıl kullandığını araştırmıştır. Araştırma sırasında, matematikçilerin kanıtlarını oluştururken, kanıtlarının alt görevlerini yerine getirirken diyagramların onlara nasıl yardım ettiğine özellikle dikkat edilmiştir. Araştırma sonunda matematikçilerin diyagram çizme davranışı Zaskis, Dubinsky ve Deutermann (1996)'ın çalışmasında ortaya koyduğu modeli (V/A modeli) destekleyen sonuçlara ulaşmıştır. Profesyonel matematikçiler görsel betimlemeleri basamaklar halinde (her bir basamağın etkinliğini kontrol ederek) sistematik ve iyi yapılandırılmış bir şekilde kullanırken analiz basamağını, görsel basamakta yaptıkları işlemleri kontrol etmek ve geliştirmek için kullanmaktadırlar. Bu süreç sonunda problem hemen hemen çözülmüş olmakta, geriye ise sonucu uygun şekilde ifade etmek kalmaktadır.

Uzman matematikçiler görselleştirme sürecini daha etkili şekilde kullanırken, deneyimsiz matematikçiler ise bu süreçte zorluklar yaşamaktadır (Stylianou and Dubinsky, 1999). Bu durum akla, deneyimsiz öğrencilerin görsel betimlemelerinden sonuçlar çıkarırken ve yeni bilgiyi önceki bilgilerle birleştirirken daha fazla yardıma ihtiyaç duyduğu sonucunu doğurmaktadır (Stylianou, 2002). Aynı çalışmada Stylianou, öğrencilerin benzer görsel betimleme stokları oluşturmaya ve matematiksel kavramların görsel stokları üzerinde olası işlemciler oluşturmaya ihtiyaçları olduğunu belirtmektedir. Eisenberg ve Dresyfus (1999, akt. Stylianou, 2002)'a göre ise bir öğrenci log|x|, sin(x) gibi fonksiyonları kullanırken bu fonksiyonlara ilişkin aklında bir diyagram da görmeli ve bu diyagram fonksiyonların analitik formülleri kadar baskın olmalıdır. Ayrıca öğrenciler simetri, periyot ve benzerlik gibi örüntüleri tanımada ve kullanmada yetenekli olmalıdırlar.

Görsel betimlemenin kullanıldığı durumlarda kavramsal anlamanın arttığını düşünen matematik eğitimcilerinin bu savı, her zaman doğru olmayabilmektedir. Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997) çalışmalarında, kontrol edilemeyen görsel imajların bazen matematiksel kavramlar için anlam oluşturma sürecini engelleyebileceğini, bu konuda öğrencilerin karşılaşabileceği zorluklara dikkat edilmesi gerektiğini belirtmektedirler. Bunun yanında Battista (1990), düşük başarılı öğrencilerin geometri ile ilgili konulara, analitik yaklaşıma oranla daha çok görsel yaklaştıklarını gözlemiştir.

Presmeg (1999) öğretmenlerin ve üniversite öğrencilerinin matematiksel problem çözerken görselleştirmeyi kullanma tercihlerinin bağlı olduğu örüntüleri belirlemek ve bu bireysel farkların neden olduğu pedagojik anlamı ortaya çıkarmak için yaptığı çalışmasında iki tür kavramdan bahsetmektedir: Matematiksel görsellik ve öğretme görselliği. Matematiksel görsellik, bireylerin rutin olmayan problemleri çözerken görsel yöntemleri kullanma tercihi olarak açıklanırken; öğretme görselliği, öğretmenlerin matematik öğretirken görsel yöntemleri kullanması ve bu yöntemleri kullanma konusunda öğrencilerini cesaretlendirmesi olarak açıklanmaktadır. Araştırmada ölçme aracı olarak daha önce yine Presmeg (1986) tarafından geliştirilen MSA (Mathematical Processing Instrument, kısaca MPI) kullanılmıştır. Araştırma sonuçlarına göre öğrencilerin matematiksel görselliğinin, öğretmenlerine oranla oldukça yüksek olduğu gözlenirken, öğretmenlerin matematiksel görsellik ile öğretme görselliği puanları arasında düşük bir korelasyon bulunmuştur. Yine Eisenberg ve Dreyfus (1991) tarafından ortaya konan araştırma sonuçlarına göre görselleştirmeye karşı isteksizliğin öğrenilmiş bir fenomen olduğu ve olası bir öğretimin bu tarz bilişsel bir süreci desteklemeyeceği ifade edilmektedir. Ayrıca problem çözme sırasında görsel yöntemleri tercih eden öğrenci sayısının hiç de az olmadığı ve onların bu ihtiyacının öğretmen adayları tarafından fark edilmesinin öğretmen eğitiminin önemli amaçlarından biri olduğu belirtilmektedir.

Alcock ve Simpson (2004), muhakeme sürecinde görsel betimlemeyi kullanan öğrencilerin, serilerin yakınsaklığı ve seriler konularındaki problemleri çözerken kullandıkları yaklaşımları araştırmışlardır. Araştırma soncunda öğrencilerin bu problemleri çözerken matematiksel davranışları ile öğrenci olarak kendi rollerini algılayışları arasında bir ilişki bulunmuş ve öğrencilerin görselleştirme eğilimi ile kendi rollerine ilişkin görüşlerini birleştiren ve onların matematiksel davranışlarını açıklamakta kullanılabilecek bir teori ortaya konulmuştur. Bu teoriye göre görsel imajlar üzerinde güçlü bir eğilimi olan öğrencilerin, materyali daha iyi anladıkları ve bunlarla ilgili problemleri doğru şekilde çözebildikleri belirlenmiştir. Fakat bu durum, öğrencilerin karmaşık formel materyalleri daha ciddi şekilde analiz etme gerekliliği algısını azaltabileceğini düşündürmektedir. Bu nedenle araştırmacılar, tercihleri görsel yönde olan öğrencilerin, matematiği öğrenme ile ilgili inançlarının, görsel ve cebirsel/sözel gösterimleri bütünleştirme sürecini aramayı harekete geçirmedikleri sürece, bu bütünleştirmeye eğilim göstermemelerine neden olabileceğini ifade etmektedirler. Yine benzer bir çalışma, Alcock ve Simpson (2005) tarafından seriler ve serilerin yakınsaklığı konusunda, tercihleri görsel yönde olmayan öğrencilerle yapılmıştır. Bu araştırmada başarılı çalışmaların, öğrencilerin üst düzey matematiksel yapıları hatırlamalarında ve tanımları farklı bağlamlarda kullanmalarında ortaya çıktığı ve içsel-dışsal otoritenin, çözümlerin güvenirliğini etkilediği ifade edilmektedir. Her iki çalışma karşılaştırıldığında ise görsel tercihleri her iki yönde (görsel ve görsel olmayan) olan öğrencilerde, belli seviyede başarı ve başarısızlığın var olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışmadaki reel analiz kursu boyunca araştırmacılar hem görsel hem görsel olmayan stratejilerle karşılaşmışlardır. Bu yüzden araştırmacılar, öğretmenlerin bir problem durumunu incelemeden önce öğrencilerin tercihleri hakkında bilgi sahibi olmalarının daha doğru olacağını belirtmektedirler.

Presmeg ve Balderas-Cañas (2001) ise araştırmalarında, matematik eğitimi yüksek lisans öğrencilerinin, rutin olmayan problemleri çözme sürecindeki görsel düşüncenin varlığını, kapsamını, rolünü ve sınırlılıklarını duyuşsal faktörler ve metaforlarla birlikte incelemişlerdir. Çalışmalarında görsel düşünce kanıtları olarak çizimler, sözel ifadeler ve el kol hareketlerini kullanan araştırmacılar, çalışma sonunda görselleştirmenin rolünün çözüm sürecinin dört ana aşamasında ortaya çıktığı sonucuna ulaşmışlardır: Hazırlık, çözüm, yorum ve geriye bakış. Görsel imajların türü ve problem çözme sürecindeki rolleri, görsel imajların kullanımı ile ilgili olarak fark etme ve çözme gibi görselleştirmenin iki farklı amacının birbirinden ayrılmasına neden olmuştur. Ayrıca önceki bilgiler (cebirsel ve analitik süreç), uzamsal muhakeme, -hem kolaylaştıran hem de sınırlayan bir faktör olarak- metaforlar ve duyuşsal faktörlerin öğrencilerin görselleştirmeyi kullanmalarında rol oynadıkları görülmüştür. Çalışma sürecinde öğrencilerin çözümleri tam olarak cebirsel gibi görünse de görsel imaj örneklerine rastlanmıştır. Ayrıca çalışmada kullanılan problemleri çözerken öğrencilerin kimi zaman bilişsel zorluklarla karşılaştıkları ve bu durumlarda görselleştirmeden, özellikle de diyagramlardan yararlandıkları ifade edilmiştir. Ayrıca araştırmacılar, öğrencilerin çözüm sürecinde herhangi bir şüphe ile karşılaştıklarında diyagramlarını kontrol ettiklerini ve bu diyagramların kontrol sürecindeki çözümün anlaşılması aşamasında önemli bir rol oynadığını belirtmektedirler. Araştırmacılar, Paivio (1971; akt. Presmeg and Balderas-Cañas, 2001)'nun çalışmasında belirttiği ve görev temelli görüşmelerde, görevin başarılmasına etki eden faktörler olarak ifade edilen görevin özellikleri, görevin belli şekilde yapılması ile ilgili yönergeler ve görüşülenin kişisel tercihlerine, bireyin daha önceki bilgilerini ve pedagojik deneyimlerini de eklemişlerdir. Çünkü bazı öğrenciler için cebirsel ve analitik süreçler bir itici kuvvet olduğu kadar kendilerine güven konusunda bir engel de olabilmektedir. Cebirsel çözümün gerekli olduğuna dair güçlü bir inancın olmadığı durumlarda öğrenciler görsel çözümlere daha açık olabilmektedirler.

George (1997), matematiksel açıdan yetenekli lise öğrencilerinin 'Analiz Yerleştirme Sınavı'nda problem çözerken, görsel betimlemelerden ne kadar yararlandıklarını ve bunun problem çözme başarısına olan etkisini araştırmıştır. Araştırma sonunda sınavda yüksek başarı gösteren öğrencilerin düşük başarı gösteren öğrencilere oranla ve kız öğrencilerin erkek öğrencilere oranla daha çok diyagram kullandığı gözlenmiştir. Bunun yanında kız öğrenciler verilen diyagramları değiştirerek daha karmaşık diyagramlar oluştururken, erkek öğrencilerin daha basit diyagramlar oluşturdukları gözlenmiştir. Ayrıca görsel betimlemeyi kullanan ve problem çözmede başarılı olan öğrencilerin diyagram oluşturmada ve değiştirmede daha esnek oldukları ve temel özellikleri ortaya çıkardıkları ifade edilmiştir. Öğrencilerin diyagram çizme frekansı ile diyagram çizme ve problem çözme başarısı arasındaki ilişkinin, analiz problemlerini çözmede görsel betimlerlerle yapılan muhakemenin önemini vurguladığı ve öğretmenlerin, matematiksel problem çözmede daha etkili görsel betimlemeler kullanmaları konusunda teşvik ettiği belirtilmektedir.

Herman (2002) ise öğrencilerin görsel öğrenme tercihlerinin, gösterim seçme ve çoklu gösterim kullanma becerisine olan etkisini araştırmıştır. Araştırma sonucunda öğrencilerin görsel öğrenme tercihleri ile son testteki problemler için başlangıçta seçtiği gösterimler arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır. Öğrencilerin ön test ve son test arasında yapılan uygulama soncunda, gruplar (görsel, harmonik/değişken ve görsel olmayan) arasında daha fazla çoklu gösterim kullanımına ilişkin anlamlı bir sonuç bulunamamıştır.

Weckbacher (2007) görselleştirmenin iki ve üç boyutlu geometri problemlerini çözmedeki rolünü araştırmıştır. Araştırma sonucunda uzamsal düşünce, lise öğrencilerinin problem çözme performansında anlamlı şekilde etkiliyken, öğrencilerin çoğunluğunun sözel ve görsel düşünce türünü daha çok tercih ettikleri gözlenmiştir. İki ve üç boyutlu geometri problemlerinde üstün başarı gösteren lise öğrencilerinin ise çoğunlukla yüksek görsel/yüksek uzamasal olarak sınıflandırılan öğrenciler olduğu belirtilmiştir.

Lowrie ve Kay (2009) ortaokul öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde kullandıkları yaklaşım farkı, görsel ve görsel olmayan yöntemlerin problem çözme başarısına olan etkisi ve problemin zorluk düzeyi azaltıldığında kullandıkları yöntemde değişiklik olup olmadığını araştırdıkları çalışmalarında 1020 öğrenciye 20 soru yöneltmiştir. Araştırma sonunda öğrencilerin çoğunluğunun, zor veya değişik sorularda görsel yöntemler kullandığı, görsel olmayan stratejilerin ise zorluk derecesi daha az sorularda kullanıldığını gözlemişlerdir.

Bir problem çözme süreci olarak bakıldığında, görselleştirmenin kanıt sürecine olan etkisi üzerine yapılmış çalışmalarda da araştırmacılar, farklı görüşlere sahiptir. Bu görüşler, görselleştirmenin kendi başına bir kanıt olabileceğini düşünenlerle, kanıtın yapılmasına yardımcı olacak bir parça olmaktan ileri gidemeyeceğini düşünen araştırmacılar arasında değişmektedir (Hanna and Sidoli, 2007).

2.2. Görselleştirme ve Analiz

Analiz matematiğin önemli kollarından biridir. Diğer matematik dallarına da temel oluşturma niteliğinde olan analiz, matematik eğitimi araştırmaları açısından da önemli bir yere sahiptir. Bu alanda yapılan araştırmalar, öğrencilerin analizin temel kavramlarını anlamaya ve bu kavramlarla ilgili problem çözme becerilerini geliştirmeye yöneliktir. Analiz dersinin kapsamında yer alan kavramlar incelendiğinde ne kadar çok görsel öğe (grafikler, diyagramlar vb.) içerdiği dikkat çekmektedir. Zimmerman (1991, akt. Herman, 2002) da görselleştirme yeteneğinin temel analiz kavramlarını (limit, türev ve integral) anlamada önemli olduğunu ve analizdeki birçok problemi başarıyla çözmenin diyagramlar ve grafikler şeklindeki görsel imajlara bağlı olduğunu belirtmektedir. Zimmerman'a göre analizde görsel düşünmenin ilk koşulu, diyagramlardan belirli özellikleri çıkarma, cebir ve geometrinin matematiksel fikirleri anlamada alternatif diller olduğunu ve kuralları anlamanın matematiksel grafiklerle ilgili olduğunu bilmedir.

Oberg (2000) analiz dersi alan üniversite öğrencilerinin integral kavramını nasıl anladıklarını araştırmıştır. İntegralin anlamına ilişkin belirlediği altı faklı görüş açısından (hesaplama, alan, toplam, bir [a,b] aralığındaki değişim, fonksiyon ve soyut bir nesne) öğrencilerin en çok 'alan' ve 'hesap', en az ise 'kapalı bir aralıkta değişim' anlamını benimsediklerini gözlemiştir. Araştırmadan çıkan şaşırtıcı sonuçlardan biri de ortalama veya ortalamanın altındaki öğrencilerin integral ile ilgili geliştirdikleri kavramsal yapıda belirli integrali, toplamın limiti veya toplam değişim olarak kavramsallaştırdıklarına ilişkin izler varken bu durumun, ortalamanın üstündeki öğrencilerde görülmemesi olmuştur. Bunun yanında öğrencilerin özel durumlara uygun bakış açısı geliştirmelerinin yeterince gelişmediği de gözlenmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin problem çözme sürecinde kendi bakış açılarıyla çözüme ulaşamadıkları durumlarda tıkandıkları ve herhangi bir gelişme gösteremedikleri ifade edilmiştir. Oberg (2000)'e göre bunun altında yatan neden öğrencilerin tamamıyla kendi bakış açılarına veya imajlarına kilitlendikleri için daha yararlı bakış açılarına yönelememeleri; dışarıdan bir yönlendirmeye ihtiyaç duymalarıdır. Araştırma sonuçlarından biri de cebirsel olarak verilen bir integral ifadesini çözmek için öğrencilerin geometrik yardım almaya isteksiz olmasıdır. Eğer bir belirli integral ifadesi cebirsel olarak verildiyse öğrenciler grafiksel veya geometrik metotlar yerine cebirsel metotları kullanmayı tercih etmektedirler. Ayrıca işaretli alan kavramı da öğrenciler için tanıdık bir ifade olmasına rağmen çok da iyi anlaşılmadığı gözlenmiştir. Oberg (2000)'e göre öğrencilerin belirli integrali daha iyi anlamaları için yukarıda sözü edilen altı görüş açısının da verilmesi gerekmektedir. Bu yüzden problem çözerken farklı bakış açılarının kullanılması ve öğrencilerden çözümlerini açıklamaları istenirken faklı bakış açılarına göre açıklama yapmalarının beklenmesinin, belirli integralin öğretimi açısından daha yararlı olacağı düşünülmektedir. Müfredat açısından bu noktalara önem vermek, öğrencilerin grafiksel veya geometrik çözümlere olan isteksizliğinin ortadan kalkması ve işaretli alan gibi kavramların anlaşılmasında ortaya çıkan bilişsel güçlüklerin giderilmesini sağlayacaktır.

González-Martín ve Camacho (2004, a), grafiksel anlamaya matematiksel önemini tekrar vermek ve öğrenciler tarafından kullanımını pekiştirmek amacıyla genelleştirilmiş integral konusunda çeşitli aktiviteler düzenlemişlerdir. Araştırmacılara göre öğretimde yapılacak bazı değişikliklerle öğrenciler, grafiksel anlamanın yararlarını ve sınırlılıklarını kendileri gördüklerinde, yapıcı ve ters örnekler üzerinde çalışıp sonuçların grafiksel yorumunu anladıklarında bu anlama yöntemini de hatırlayıp kabul edeceklerdir. Ayrıca öğretmenler tarafından kabul edilmesi de bu anlama yöntemine matematiksel önemini kazandıracaktır. González-Martín ve Camacho (2004, b)'nun genelleştirilmiş integral konusuyla ilgili diğer çalışmalarında öğrencilerin bu konuyla ilgili rutin olmayan problemlerde yaşadıkları zorlukları belirlemişlerdir. Araştırma sonucunda, öğrencilerin farklı gösterim sistemlerini birleştirmekte zorlandıkları, genelleştirilmiş integral konusunda öğrendiklerini, daha önce öğrendikleri konularla (belirli integral, dizler ve seriler gibi) bağdaştırmakta problemler yaşadıkları belirtilmiştir.

Sealey (2006) ise çalışmasında, öğrencilerin Riemann toplamlarını ve belirli integrali nasıl anladıklarını ve belirli integral ile ilgili problemleri çözmede eğri altında kalan alanı etkili bir araç olarak nasıl kullanabileceklerini belirlemiştir. Araştırmada düzenlenen iki gruptan birincisinin öğretim deneyi içindeki kavramları anlamaları iyi düzeydeyken diğer gruptaki öğrencilerinki çok kesin değildir. İkinci gruptaki öğrenciler eğri altındaki alan kavramını kullanmışlardır fakat bu anlama yarı yapılandırılmış durumdadır. Bu yüzden araştırmacı, bu gruptaki öğrencilerin 'eğri altında kalan alan' kavramı ile 'Riemann toplamı' yapısını ilişkilendiremeyebileceğini veya toplam ile ilgili soruları eğri altında kalan alan kavramını düşünmeden çözemeyebileceklerini düşünmektedir. Araştırmacıya göre eğri altında kalan alan kavramı, belirli integralin anlaşılması için yeterli olmamakla birlikte, belirli integralin temelinde yatan kavramları anlatmak için etkili bir araç olarak kullanılabilir ve bu kavramın eksikliği de çalışmada yer alan gruplardan birinde olduğu gibi sorunlara yol açabilir.

Sullivan (1997), üniversite öğrencilerinin grafikleri anlamalarını niteliksel olarak arttırmak için analiz derslerinde yansıtıcı düşünme aktivitelerinden yararlanmıştır. Bunun için analiz dersi içinde yansıtıcı düşünceyi geliştirecek nitelikte grafik aktiviteleri düzenlemiştir. Bu aktivitelerde grafikler ile ilgili üç bakış açısı ele alınmıştır: Fiziksel bir fenomenin özellikleri açıklamak için grafik kullanmak, grafiklerin niteliksel bir açıklamasını vermek ve grafiklerin niteliksel bir yorumunu vermek. Bu aktivitelere katılmadan önce öğrenciler grafikler ile ilgili olarak çok sayıda hata (grafiği bir resim olarak almak, nokta/aralık karmaşası ve doğrusallığa olan eğilim) yaptıkları gözlenirken, yansıtıcı düşünce aktivitelerine katıldıktan sonra öğrencilerin başarılarında artma gözlenmiştir. Ayrıca birçok öğrenci grafikleri anlama ve yorumlama konusunda kendilerini daha rahat hissettiklerini ve bu durumu da çalışmada yapılan aktivitelere bağladıklarını belirtmişlerdir.

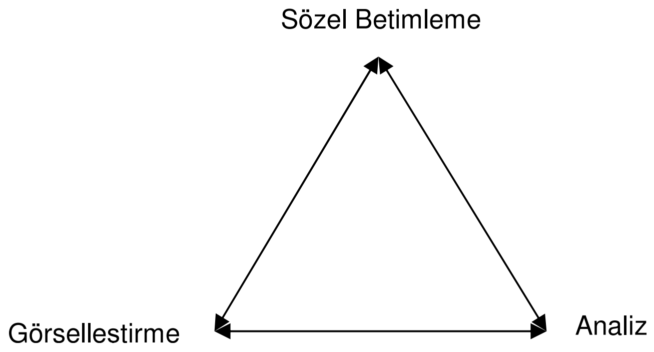
Öğrencilerin ders sırasında “integral hesabın temel teoremi”ni anlamalarının nasıl gerçekleştiği ve integral hesabın temel teoremini anlamanın ve kullanmanın neleri içerdiğinin incelendiği bir araştırma da Newman Smith (2008) tarafından yapılmıştır. Çalışmada integral hesabın temel teoremi ile ilgili üç boyutlu kuramsal bir çerçeve ortaya konmuştur. Bu boyutlar ise aşağıdaki gibidir:

- Temel anlama ve muhakeme becerileri,
- Bağıntılı muhakeme ve ortak zihinsel faaliyetler,
- İntegral hesabın temel teoremini anlamayla ilgili kavramsal problemler.

Bu kuramsal çerçeve öğrencilerin integral hesabın temel teoremini anlamalarını desteklemekte kullanılan aktiviteleri geliştirmekte kullanılmıştır. Çalışmadan elde edilen sonuçlar, bu kuramsal çerçevenin öğrencilerin muhakeme yeteneklerini, zihinsel faaliyetlerini ve integral hesabın temel teoremini anlamakta temel olduğu belirtilen kavramsal bakış açılarını tanımlamada ve geliştirmekte etkili olduğunu ortaya koymuştur.

Aspinwall, Hacıömeroğlu ve Presmeg (2008), analiz dersi öğrencilerinin düşünce süreçlerini anlamak için gerçekleştirdikleri çalışmalarında yeni bir ölçme aracından (Analiz için Matematiksel Süreç Aracı, kısaca MPIC) yararlanmışlardır. Analiz için

Matematiksel Süreç Aracı, Norma Presmeg tarafından geliştirilen MSA'nın katalizör ve model alındığı bir araçtır. Bu araç sayesinde oluşturulan yeni çerçeve, daha önceki çalışmalarda belirtilen ve öğrencilerin görsel ve analitik düşünme sistemini ifade eden eski ikili modele ek olarak sözel betimlemeden bahsetmektedir (Şekil 2.2).



Şekil 2.2. Zihinsel süreç üçgeni (Aspinwall et al., 2008)

Araştırmanın sonuçlarına göre başarılı öğrenciler, görselleştirme ve analizin kombinasyonunu başarılı bir şekilde kullanırken sözel-betimsel düşünme, görsel ve analitik düşünmeyi kullanmayı önemli ölçüde destekleyen bir faktör olarak karşımıza çıkmaktadır. Araştırmacılara göre öğrenciler kelimeleri, eşitlikleri, grafikleri ve tabloları görsel-analitik olarak anlamak için bir destekleyici olarak kullanmaktadırlar. Bazı öğrenciler ise sözel betimlemeleri, daha kullanışlı olduğu durumlarda görsel imajların veya matematiksel ifadelerin yerine kullanmaktadırlar.

Foley (1992) açık uçlu sorularla öğrencilerin belirli integral konusundaki kavramsal, işlemsel ve stratejik bilgilerini değerlendirmiştir. Çalışma sonunda öğrencilerin, integral-alan ve integral-türev arasında güçlü kavramsal bağlar kurduğu gözlenirken limit-Riemann toplamı arasındaki kavramsal bağın daha zayıf olduğu gözlenmiştir. Strateji ile ilgili sorularda ise öğrenciler genelde tek bir yöntem kullanmışlar, olası diğer yöntemlere başvurmamışlardır.

Giaquinto (1994) analizde sınırlı bir keşif aracı olarak gördüğü görselleştirmenin, matematiksel kanıt için bir fikir oluşmasını sağlayabileceğini ifade etmiş ve görselleştirmenin yararlı olabileceği alanlara şu örnekleri sunmuştur:

1. Analitik bir kavramın görsel ifadesi, o kavramın anlaşılmasını kuvvetlendirebilir. Görsel ifadeler, bu kavramların kavramsal organizasyonuna hizmet ediyor gibi görünmektedir. (Kavram uzantısı, farkında olmadan kavramın tanımı tarafından değil de görsel prototipi tarafından belirlenirse hata meydana gelebilir, fakat bu tür hatalar önlenebilir)
2. Bir f(x) fonksiyonunun grafiği verildiğinde, f(x)+k, f(x+k), $f^{-1}(x)$, |f(x)|, f(|x|) gibi operasyonları anlamamıza ve sembolik olarak verilen bu operasyonlar hakkında düşünmemizi sağlar.
3. Verilen girdilerin yaklaşık olarak yerini saptamamıza, süreksizlik türlerini kavramamıza, kök bulmamıza vb. yardım eder.
4. Yanlış yapmamıza engel olur.
5. Tahmin için zengin bir kaynaktır. (Giaquinto, özellikle bilgisayar şekillerinin, uzman matematikçiler tarafından kullanılarak bu ifadeyi doğrulayan çalışmaları beklemektedir.)

Hoffman (1987, akt. Mancosu, 2005) sayısal olarak hesaplanan yüzeylerin bir şeklini oluşturmanın, daha sonra kurulacak olan matematiksel özellikleri için ipuçları verdiğini belirtmekte, şekil ve eşitlikler arasında hareket etmenin analiz sürecine rehberlik etmesi açısından oldukça yararlı olduğunu söylemektedir.

2.3. Görselleştirme ve Kavramsal Anlama

Görselleştirme ile ilgili araştırmaların çoğu problem çözme süreci ile ilgili olmakla birlikte, öğrencilerin çeşitli kavramları anlama ve bunlarla ilgili kavramsal bir yapı oluşturma sürecinde de görselleştirmenin rolü incelenen konular arasındadır.

Konyalıoğlu, Konyalıoğlu, İpek ve Işık (2005), öğrencilerin vektör uzayları konusundaki kavramları anlamalarına, görselleştirme yaklaşımının etkilerini incelemişlerdir. Deney ve kontrol grubu ve son test desenli araştırmada, deney grubu öğrencilerine vektör uzayı konusu iki saat geometrik, bir saat cebirsel olarak anlatılırken kontrol grubu öğrencilerine iki saat cebirsel ve bir saat geometrik olarak anlatılmıştır. Çalışma sonunda deney ve kontrol grubunun işlemsel öğrenmeleri ile ilgili olarak anlamlı bir fark bulunmazken, deney grubu öğrencilerinin kavramsal öğrenmeleri istatistiksel olarak daha anlamlı bulunmuştur.

Bunun yanında öğrencilerin problem çözme performanslarında da farklılık gözlenmiştir. Öğrencilere vektör uzayları ile ilgili olarak aynı kavramsal tanımlar verilmiş olmasına rağmen araştırmacılara göre bu farklılığın nedeni, farklı deneyimlere bağlı olarak oluşan farklı kavram imajları olabilir. Deney grubundaki öğrencilerin problemleri çözebilmelerindeki esas faktörün vektör uzayları ile ilgili kavram imajlarının daha iyi olmasıdır. Görselleştirme yaklaşımıyla öğrenciler soyut kavramlar ve yarı somut yapılar arasındaki ilişkileri algılayabilir ve matematikteki soyut kavramları anlamlandırabilir. Dolayısıyla bu yaklaşım, öğrencilerin soyut kavramları anlamasını kolaylaştırabilir.

Presmeg tarafından gerçekleştirilen bir araştırmada (1991, akt. Presmeg, 2006) görsel tercihleri görselden, görsel olmayana kadar değişen matematik öğretmenlerinin öğretme görselliği ve bunun görsel öğrenciler üzerindeki etkileri belirlenmiştir. Öğretme görselliğine göre orta grupta yer alan öğretmelerin sınıflarında bulunan öğrenciler daha başarılı olmuşlardır. Bu çalışma, Zaskis, Dubinsky ve Deutermann (1996) tarafından yapılan araştırmanın sonucunu desteklemektedir. Onlara göre görsel/analtik süreç, öğrenme sürecini tanımlarken ya da bir ders planlarken uygun bir sınıflandırma olmayabilir. Onlar görselleştirme ve analizin birbirini destekleyen ve etkileşim halinde olan iki düşünce biçimi olduğunu ileri sürmektedirler.

Pinto ve Tall (2002), öğrencilerin formel matematiksel düşünceye nasıl geçtikleri ve matematiksel kavramlar için nasıl anlam oluşturduklarını araştırdıkları durum çalışmasında, bu sürecin her zaman bir sayısallaştırma (quantification) süreci sonunda gerçekleşmeyebileceği sonucuna ulaşmışlardır. Çalışmada yer alan öğrenci, ‘limit’ kavramının anlamına sadece semboller ile yapılan tanımından çok bu kavram için aklında oluşturduğu görsel imajlardan yararlanarak ulaşmaktadır. Bu süreçte öğrenci tarafından oluşturulan yeni bilgiler, bilişsel bir sürecin sonunda değil de öğrenci aklında daha önceden var olan zihinsel nesnelerin üzerinde yeniden düşünülmesi sonucunda oluşmaktadır. Böylece öğrenci, formel teoriye ait kendi yorumunu oluşturmaktadır.

Görselleştirme yaklaşımının, öğrencilerin karmaşık sayılar ile ilgili kavramlar konusundaki başarılarına, bu kavramları uzun süreli belleklerinde tutmalarına ve matematiğe karşı tutumlarına etkisini, geleneksel ders anlatım yöntemi ile karşılaştıran bir çalışma da İpek (2003) tarafından yapılmıştır. Çalışma sonunda deney grubundaki öğrencilerle kontrol grubundaki öğrenciler arasında, karmaşık sayı kavramlarını anlama bağlamındaki farkın, deney grubu lehine istatistiksel olarak anlamlı olduğu gözlenmiştir. Deney ve kontrol gruplarındaki öğrencilerin matematiğe karşı tutumları arasında anlamlı bir fark oluşmazken, öğrencilerin karmaşık sayılar ile ilgili kavramları uzun süreli belleklerinde tutmaları üzerinde, görselleştirme yaklaşımının önemli bir etkisinin olduğu ifade edilmiştir. Bunun yanında karmaşık sayılar ve karmaşık sayıların özellikleri konusunda görselleştirme yaklaşımının öğrencilerde kalıcı öğrenmeyi sağlamada önemli bir araç olduğu belirtilmiştir. Bu çalışmada kullanılan görselleştirme yaklaşımının, öğrencilerin yeni bilgilerini önceki bilgileriyle birleştirerek organize etmelerinde, kendi bilgilerini oluşturabilmelerinde ve karmaşık sayılarla ilgili problemlerin çözüm stratejileri birikimlerini arttırmada etkin bir rol oynadığı da ifade edilmektedir. İpek (2003)'e göre öğrencilerde görselleştirmeye olan eğilimi arttırmak için öğretmen, öğrencilere mevcut analitik bilgilerinin yetersiz olduğunu hissettirecek etkinlikler sağlamalı ve bilimsel düşünceye sahip olmaları konusunda yardımcı olmalıdır.

Dahlberg ve Housman (1997) üniversite öğrencilerinin yeni öğrendikleri bir kavramı nasıl yapılandırdıklarını belirlemek için gerçekleştirdikleri araştırmalarında, öğrencilerin fonksiyonlara ilişkin kullandıkları kavram imajının çoğunlukla cebirsel özellikler taşıdığını gözlemişlerdir. Çalışmanın aşamalarından biri olan örnek üretme basamağında öğrenciler, verilen özellikleri sağlayan tek fonksiyon olarak $f(x)=0$ fonksiyonunu örnek vermişler ancak fonksiyonun kavramının grafiksel boyutunu düşünmeye başladıktan sonra farklı örnekler oluşturmayı başarmışlardır.

Işık ve Konyalıoğlu (2005) görselleştirmenin matematik eğitiminde kullanılmasının öğrencileri bilişsel ve duyuşsal açıdan olumlu yönde etkileyebileceği, matematik eğitimine yeni bir boyut kazandıracağı, öğrencilerin dikkatini çekerek öğrenciyi güdüleyeceğini belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenmeyi somutlaştırarak öğrencilerin bilgilerini organize etmesinde ve kavramların soyut ve somut ifadelerinin ilişkilendirilmesinde yararlı bir yaklaşım olduğunu ifade etmişlerdir.

Tekin (2010) görselleştirme yaklaşımına dayalı çalışma yapraklarının öğrencilerin trigonometri başarılarına, anlamalarına ve matematiğe yönelik tutumlarına etkisi araştırmıştır. Bir anadolu lisesinde öğrenim gören öğrencilerle deney-kontrol grup desenli gerçekleştirdiği çalışma sonucunda, iki grubun trigonometri başarıları ve matematiğe yönelik tutumları arasında anlamlı fark olduğunu gözlemiştir. Ayrıca bir sonraki dönemde yapılan kalıcılık ölçümü, deney grubu lehine anlamlı fark ($p<0,05$) göstermiştir. Tekin (2010), görselleştirme yaklaşımının öğrencilerin trigonometri kavramlarını anlamalarında geleneksel öğretime göre daha etkili olduğunu ve görselleştirmenin bir süre geçtikten sonra bilgiyi hatırlama ve uygulama yeteneğine yardım ettiğini belirtmektedir.

Görselleştirmenin matematik ve matematik eğitimindeki potansiyel rolü üzerinde hala bir görüş birliğine varılamamış olmakla birlikte, matematiksel anlamaya katkı sağladığı evrensel olarak kabul edilen bir gerçektir (Hanna and Sidoli, 2007).

3. YÖNTEM

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin, analiz dersi integral konusu kapsamında görsel ve analitik düşünme stratejileri arasındaki bağlantıyı nasıl sağladıklarını araştırmak ve bu bağlantıyı sağlama sürecinde öğrencilere nasıl yardım edilebileceğini belirlemektir.

Çalışma 2008–2009 öğretim yılı bahar döneminde, Ankara'daki bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören altı öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Araştırmanın amacı doğrultusunda nitelikli veri elde edebilmek için öğrencilerle etkileşimde bulunmak gerekmektedir. Bu nedenle çalışmada, bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılmıştır. Bu yöntemdeki amaçlardan biri öğretim deneyi boyunca katılımcıların gelişimini anlamak ve belirlenen konu kapsamında öğrenmelerinin bir modelini oluşturmaktır. Bu nedenle öğretim deneyinin daha sonra geriye dönük olarak gözden geçirilmesi için her bir öğretim bölümünün görüntü ve ses kaydı alınmıştır.

Çalışmanın amacı doğrultusunda öğretim deneyi dört hafta olarak planlanmış ve etkinlik boyunca Ek 1'de gösterilen performans problemleri kullanılmıştır.

3.1. Varsayımdan Yola Çıkan Öğretim Deneyi

Eğitim araştırmaları değişik amaçlara hizmet etmelidir. Bu amaçlardan biri de matematiği öğretmek için yeni metotlar keşfetme, geliştirme ve test etmedir (Confrey and Lachance, 2000, p. 233).

Genellikle matematik, birçok öğrencinin matematiksel kavramları anlamalarını engelleyecek şekilde, gereksiz ve zamanından önce formel ve soyut boyutlarına vurgu yapılarak öğretilir (Confrey and Lachance, 2000, p. 233). Araştırmacı eğer başarılı bir dinleyici olmak istiyorsa öğrencilerin söylediklerinin ışığı altında kendi bakış açısını gözden geçirmeli, kendi öğretme ve öğrenme aktivitelerini bu kaynaklara dayandırarak yenilemelidir. Bu değişim, var olan matematiksel yapıların kültürel portesinde –çoğunlukla sembolik ve deneyim dışında var olan- oldukça zor olabilir. Bu durum araştırmacıların, öğrencilerin oluşturduğu yapıları duymasına engel olur ve dolayısıyla onları sınırlar. Ayrıca sınıf şartları hızlı matematiksel başarıya önem verdiği için bu seslerin yok olmasına ve öğrencilerin kendilerini engellenmiş hissetmelerine neden olmaktadır. Araştırmacı, sınıf ortamında ve matematiksel geleneklerden kaynaklanan bu sınırlamaların oluşmasını engellemek yerine, bu yeni yapıların oluşmasına izin vermeli ve desteklemelidir (Confrey, 1991, 1994; akt. Confrey and Lachance, 2000, p. 233). Yani uzmanların görüşlerinin, öğrencilerin sesleri ışığında değişmesi gerekmektedir (Confrey and Lachance, 2000, p. 234).

Öğretim deneyi, araştırmacının aktivitelerini organize ettiği, Piaget'nin klinik görüşmelerinden ortaya çıkan ve temel olarak keşfedici özellik gösteren kavramsal bir araçtır (Steffe and Thomson, 2000). Fakat öğrencilerin matematiksel bilgilerini çeşitli yollarla ve araçlarla etkileme amacında olduğu için öğretim deneyi, klinik görüşmelerden daha fazlasını içerir. Klinik görüşme, öğrencilerin var olan matematiksel bilgilerini anlamaya çalışırken öğretim deneyi, belli bir zaman diliminde öğrencilerde meydana gelen gelişmeyi anlamaya yöneliktir. Dolayısıyla öğretim deneyi, öncelikle öğrencilerin matematiksel aktivitelerini anlamak ve keşfetmek için ortaya konulmuş canlı bir yöntemdir. Bu bağlamda Steffe ve Thompson (2000) öğretim deneyi ile ilgili olarak iki kavramdan bahsetmektedir: İlki öğrencilerin matematiksel bir aktiviteye katıldıkları zaman söyledikleri ve yaptıkları (students' mathematics); ikincisi, bu aktiviteler sırasındaki öğrenci davranışlarının araştırmacı tarafından yorumlaması sonucunda ortaya çıkan model (mathematics of students). Bu yüzden işe, öğretim deneyi sırasında öğrencilerle çalışırken bize sağladıkları bağımsız katkılarına değer vererek başlanabilir. Öğrencilerin düşünme süreçlerinde oluşan hatalar, araştırmacı için hem bir sınırlama hem de problemleri için temel kaynaklardır. Araştırmacının asıl amacı, öğretim sırasında karşılaşılan bu sınırlamaları ortadan kaldırmaktır. Bunu yapmanın tek yolu da öğrencilerin düşünce şemalarını değiştirirken karşılaştıkları zorlukları ortadan kaldırmaktır. (Steffe and Thomson, 2000).

Bir öğretim deneyi aşağıdaki bölümlerden oluşur.

- Öğretim bölümleri
- Bireysel görüşmeler
- Birkaç hafta veya birkaç yıla kadar olan zaman periyodu (Cobb and Steffe, 1983; Confrey and Lachance, 2000).

Her bir öğretim bölümünde öğretici, katılımcı(lar) ve araştırmacıya yardımcı olacak bir gözlemci, her bir öğretim bölümünü kaydeden bir kayıt cihazı bulunur (Steffe and Thomson, 2000). Öğrenci sayısı bir kişiden bir sınıfa kadar değişir.

Bir araştırmacı için öğretim deneyi yöntemini kullanmanın öncelikli amacı, öğrencilerin matematiksel öğrenme ve muhakeme yöntemlerini ilk elden öğrenmektir (Steffe and Thompson, 2000). Böyle bir öğretimle sağlanan deneyim olmadan, öğrencilerin güçlü matematiksel kavram ve işlemleri nasıl oluşturduklarını anlamak mümkün olmayacak veya bu kavram ve işlemlerin araştırmacınınkinden açık bir şekilde farklı olduğundan şüphelenmek için bir temel oluşmayacaktır (Steffe and Thompson, 2000).

Öğretim deneyinin içinde araştırmacının esas rolü bir öğretmen gibi hareket etmektir. Bunun yanında araştırmacı, elde edilen bilgiyi analiz eden kişidir. Öğretim deneyi çoğu zaman öğrencinin ne öğrenebileceği ve bu öğrenmeyi kolaylaştırabilecek yollar ve araçlar bulmayı amaçlar. Araştırmacı, katılımcının/katılımcıların yaptığı işleri ve kullandığı dili yorumlayarak ortamlar oluşturmak, kritik sorular sormak ve öğrenmeyi cesaretlendirmek için çeşitli kararlar alır. Anında alınan bu kararlar öğretim deneyinin çalışma yöntemini gösterir ve araştırmacı bunları yapmakla yükümlüdür (Steffe, 1991).

Varsayım: Sözlük anlamı, yetersiz veya tamamlanmamış delillere dayalı olarak ortaya çıkan sonuçlar olan varsayım, Confrey ve Lachance (2000)'e göre matematik eğitiminde, bir takım matematiksel konuların içeriğine ve pedagojisine yaklaşımda bulunmak için oluşturulan yolların yeniden kavramsallaştırılmasında bir araçtır. Sıklıkla bu varsayım, araştırmacının var olan genel öğretim şeklinden memnun olmadığı durumlarda ortaya çıkar (Confrey and Lachance, 2000). Öğretim deneyi boyunca güçlü bir varsayım kişinin bakış açısını değiştirmeli ve yeni olaylar getirmeli, böylece önceki durumu rahatlatmalıdır.

Nicel araştırmaların formel hipotezlerinin aksine varsayım, kanıtlanması gereken bir iddia değildir. Bir teoriden hareket eden araştırmacı, ortaya konan deneyinin işe yarayıp yaramadığını, teorinin desteklenip desteklenmediğini tecrübe eder. Fakat araştırma devam ederken araştırmacı, deneyi gözden geçirip yeniden düzenleyebilir. Bu tür araştırmalarda varsayımın iki boyutu olmalıdır: Birincisi matematiksel konu, kısaca "ne öğretilmesi gerektiği", ikincisi ise "bu konunun nasıl öğretilmesi gerektiğine" yanıt veren, matematiksel konuya bağlı pedagojik bir boyuttur. Bu boyut sınıfın nasıl organize edilmesi gerektiği, hangi görevlerin, aktivitelerin ya da kaynakların verileceği konusunda araştırmacıyı yönlendirir (Confrey and Lachance, 2000, p. 235). Varsayımın dayalı olduğu teori, oluşturulan öğretim deneyinin yapısını ve kullanılacak aktivitelerin belirlenmesine yardımcı olur (Confrey and Lachance, 2000, p. 236).

Öğretim deneyi içinde araştırmacı bir taraftan asıl araştırma hipotezlerini test ederken bir yandan da öğretim bölümlerinde hipotezler oluşturup test eder. Yani öğretmen-araştırmacı, daha önce yapılmış öğretim deneyi kayıtlarını dinleyip gözden geçirirken sonraki öğretim bölümlerinde test etmek üzere bir ya da daha fazla hipotez oluşturabilir. Aslında araştırma hipotezleri, araştırmacının genel amacını ve katılımcılarını belirlemede ona yol gösteren bir araçtır. Fakat öğretim deneyi süresince, araştırmanın amacına en iyi şekilde hizmet etmesi ve öğrencilerle etkileşim sonucunda elde edilecek veriyi en iyi şekilde değerlendirebilmesi için bu hipotezleri unutmalıdır da (Steffe and Thomson, 2000)...

Modelleme süreci ise öğretim bölümlerinde ve problem çözme sırasında araştırmacının, öğrencilerin davranışlarını ve iletişim süreçlerini yorumlamasından oluşur. Öğrencilerin düşünmesinde meydana gelecek dengesizlik işaretleri, araştırmacıya model oluşturmak için kritik bir alan sunacaktır (Elstak, 2007).

Öğretim deneyi sırasında düşünülmesi ve yürütülmesi gereken dört desen ve uygulama öğesi belirlenmiştir. Konu, sınıf içi iletişim, öğretim ve değerlendirme (Confrey and Lachance, 2000, p. 241).

Bu özellikleriyle öğretim deneyinin öğretme sürecine etkileri oldukça fazladır:

1. Bu tür çalışmalar, matematik müfredatını tüm öğrencilere ulaşabilecek şekilde nasıl yeniden yapılandırmak istediğimizi açıkça ortaya koymaktadır.
2. Sınıf uygulamalarının sınırlı yanlarını eğitim araştırmalarının teorik desteği ile birleştirmek, uygulama ve pratik arasında daha güçlü bir köprü kurulmasını sağlayacaktır. Bu tür köprüler daha etkili ve verimli reform hareketlerinin oluşmasını sağlayacaktır.

3. Öğrencilerle nelerin başarılabileceğini diğerlerinin de fark etmesi açısından bu öğretim modeli matematik eğitiminde neler yapılabileceği hakkında bilgi vermektedir (Confrey and Lachance, 2000, p. 264).

3.2. Katılımcıların Belirlenmesi

Çalışmada amaçlı örneklem kullanılmıştır. Amaçlı örneklemenin kullanılması, zengin bilgiye sahip olan durumların derinlemesine çalışılmasına imkân sağlamaktadır. Böylece çalışmanın odaklandığı sorular daha iyi aydınlanacaktır (Patton, 2002) .

Katılımcıların belirlenmesinde bazı ölçütler göz önünde bulundurulmuştur. İlk olarak katılımcı öğrencilerin Analiz I ve Analiz II dersini almış ve bu dersleri başarıyla tamamlamış olmaları gerekmektedir. Bu ön koşuldaki amaç, öğrencilerin integral konusuyla ilgili yeterli kavramsal ve işlemsel bilgiye sahip olmalarını sağlamaktır. İkinci ölçüt ise öğrencilerin görsel strateji kullanma tercihleri olmuştur. Bunun için de MSA'dan yararlanılmıştır. MSA'nın B bölümünden aldıkları puanlara göre tercihleri görsel yönde olmayan öğrencilerden, altı katılımcı seçilerek çalışma sürdürülmüştür. MSA'nın B bölümünden alınabilecek toplam puan 24'tür. 12 puandan daha az alan katılımcıların tercihlerinin görsel yönde olmadığı belirtilmektedir.

Gülay: Katılımcılardan Gülay, MSA'dan 8 puan almıştır. Diğer katılımcılarla karşılaştırıldığında integral konusunun anlatıldığı Analiz II dersinde gösterdiği başarı, Hale'den sonra ikinci sırada yer almaktadır.

Hale: Hale'nin MSA'dan aldığı puan 10'dur. Analiz II dersinden gösterdiği başarı, diğer öğrencilere göre daha yüksektir.

Elif: Elif'in MSA'dan aldığı puan 8'dir. Analiz II dersi başarısıyla grup için de dördüncü sırada yer almaktadır.

Zehra: Zehra MSA'dan 8 puan almıştır. Analiz II dersi başarısı itibariyle grup içinde beşinci sıradadır.

Şeyda: Şeyda'nın MSA'dan aldığı puan da 10'dur. Analiz II dersi başarısı, grup içinde üçüncü sıradadır.

Funda: Funda'nın MSA'dan aldığı puan 6'dır. Bu özelliği ile grup içinde görsel tercihi en düşük olan öğrencidir. Analiz II dersi başarısı ise grup içinde altıncı sıradadır.

3.3. Matematiksel Süreç Aracı

MSA, öğrencilerin görsel tercihlerini belirlemede kullanılmak üzere Presmeg (1985) tarafından geliştirilmiş iki aşamalı bir araçtır. Bu aracın birinci aşaması üç bölümden (A, B, C) oluşmaktadır. Her bir bölüm de farklı düzeydeki öğrenciler ve öğretmenler için farklı sayıda sorular yer almaktadır. Soruların zorluk düzeyi de öğrenci düzeyine göre artmaktadır. A ve B Bölümü lise öğrencileri için B ve C bölümü ise lise öğretmenleri için oluşturulmuştur. Her bir bölümde bulunan soru sayısı şöyledir:

Bölüm A: 6 soru
Bölüm B: 12 soru
Bölüm C: 6 soru

MSA'nın ikinci aşaması ise birinci aşamada yer alan sorular için olası çözümler içeren bir araçtır. Bu araçta, her bir soru için üç ile altı arasında değişen çözüm yolu önerilmektedir.

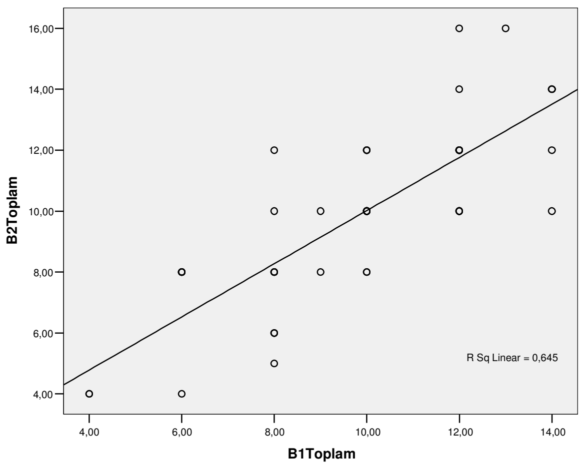
Uygulama sürecinde öğrencilere öncelikle MSA verilerek her bir problemi mümkün olduğu kadar açık bir şekilde yanıt kâğıdına çözmeleri istenmektedir. Öğrenciler araçta yer alan tüm soruları çözdükten sonra, MSA'nın ikinci aşaması verilerek daha önce çözdükleri problemler için, ölçekte yer alan olası çözüm şekillerinden kendi çözüm şekillerine en çok benzer olanı işaretlemeleri istenmektedir. Eğer öğrencinin çözüm yolu birden fazla çözüm yoluna benziyorsa diğer çözüm yollarını da işaretlemesine izin verilmektedir. Ölçekte verilen "hiçbiri" seçeneği de öğrencinin çözüm yolunun, araçtaki olası çözüm yollarından hiçbirine benzememesi durumu için verilmiştir. Araçtaki çözümler görsel olup olmamalarına göre değerlendirilmiştir. Grafik ve diyagram içeren çözümler görsel olarak nitelendirilirken nümerik ve sembolik olanlar görsel olmayan çözümler olarak nitelendirilmiştir. Aracın değerlendirme sürecinde ise öğrencilerin görsel çözümleri için 2 puan, görsel olmayan çözümleri için 0 puan, çözüm şekli açık değilse veya çözüm yoksa 1 puan verilmiştir. Bu puanlamaya göre bu ölçekten alınabilecek en yüksek puan bölümlere göre;

Bölüm A: 12 puan
Bölüm B: 24 puan
Bölüm C: 12 puan'dır.

Ölçeğin orijinal dili İngilizcedir ve uyarlama çalışması için ölçeği geliştiren Norma Presmeg'le e-posta yoluyla iletişim kurulmuş ve ölçeğin uyarlanabileceğine ilişkin gerekli izin alınmıştır. Daha sonra ölçeğin Türkçeye çevirme sürecine başlanmıştır. Öncelikle ölçeğin araştırmada kullanılmaya uygun kısmı olan B bölümü araştırmacı tarafından Türkçeye çevrilmiştir. Çünkü daha önce MSA kullanılarak yapılmış çalışmalarda, üniversite öğrencileri için B bölümü kullanılmıştır. Ölçeğin A ve C bölümleri için herhangi bir işlem yapılmamıştır. Türkçeye çevrilen ölçek, iki dil uzmanı ve İngilizce bilen bir alan uzmanı tarafından kontrol edilmiştir. Ölçek ilk geliştirildiğinde güvenirlik hesabı test yarılama tekniğiyle yapılmış ve 0.96'lık bir korelasyon katsayısı elde edilmiştir. Türkçeye çevrildikten sonra ölçeğin güvenirlik çalışması, 2008–2009 öğretim yılı güz döneminde Ankara'da bir üniversitede öğrenim gören 50 matematik öğretmeliği bölümü öğrencisiyle 19 gün arayla test-tekrar test tekniği kullanılarak yapılmıştır. Kolmgorov-Smirnov Test'ine göre öğrencilerin her iki uygulamada da testten aldığı puanlar (B1Toplam: ön test ve B2Toplam: son test) normal dağılım göstermektedir (Çizelge 3.1). Ayrıca serpme diyagramından (Şekil 3.1) da puanlar arasında doğrusal bir ilişki bulunduğu gözlenmektedir.

Çizelge 3. 1. Kolmogorov-Smirnov Testi

		B1Toplam	B2Toplam
N		50	50
Normal Parametreler [a,b]	Ortalama	9,8200	9,8600
	Std. Sapma	2,67024	2,89975
En Fazla Fark	Mutlak	,173	,139
	Pozitif	,112	,121
	Negatif	-,173	-,139
Kolmogorov-Smirnov Z		1,222	,985
Asimp. Anlamlılık (2-kuyruklu)		,101	,287



Şekil 3.1. Serpme Diyagramı

Elde edilen verilerin korelasyon analizi için uygun olduğu belirlendikten sonra SPSS 15.0 paket programıyla yapılan analizler sonucunda testin test-tekrar test güvenirlik sonuçları Çizelge 3.2.'de görülmektedir. Test-tekrar test güvenirliğini belirlemek için Pearson Korelasyon kullanılmıştır. 19 gün arayla yapılan ölçümler sonucunda elde edilen veriler arasında pozitif ve anlamlı bir ilişki ($r=0.803$, $p<0.01$) olduğu görülmektedir (Çizelge 3.2).

Çizelge 3. 2. Korelasyon

		B1Toplam	B2Toplam
B1Toplam	Pearson Korelasyon	1	,803(**)
	Anlamlılık (2-kuyruklu)		,000
	N	50	50
B2Toplam	Pearson Korelasyon	,803(**)	1
	Anlamlılık (2-kuyruklu)	,000	
	N	50	50

** Korelasyon 0.01 düzeyinde anlamlı (2-kuyruklu).

3.4. Verilerin Analizi

3.4.1. Klinik görüşmelerin analizi

Araştırmada yapılan klinik görüşmeler iki aşamada gerçekleştirilmiştir.

1. Aşama: Öğretim deneyine başlamadan önce gerçekleştirilen ön klinik görüşmeler

2. Aşama: Öğretim deneyinin bitiminde gerçekleştirilen son klinik görüşmeler.

Çalışmanın ilk aşamasında, araştırma problemleri doğrultusunda, katılımcıların seçileceği sınıf düzeyi, üçüncü yarıyıl olarak belirlenmiştir ve Ankara'da bir üniversitenin Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda öğrenim görmekte olan üçüncü yarıyıl öğrencilerinden altı kişi ile birer klinik görüşme yapılmıştır. Klinik görüşme, Piaget tarafından, öğrencilerin düşüncelerindeki zenginliği keşfetmek, temel aktivitelerini yakalamak ve bilişsel beceriyi değerlendirmek için geliştirilen ve matematik eğitiminde oldukça sık kullanılan bir yöntemdir (Baki vd., 2002)

Altı öğrenciyle yapılan ön klinik görüşmeler araştırmacı tarafından bilgisayar ortamına aktarılmış, yazılı metne çevrilmiş ve analiz edilmiştir. Analiz yöntemi olarak içerik analizi kullanılmıştır. İçerik analizi nitel araştırmalarda kullanılan analiz yöntemlerinden biridir. Bu yöntemde temel amaç toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu süreçte toplanan veriler önce kavramsallaştırılır, daha sonra da ortaya çıkan kavramlara göre mantıklı bir biçimde düzenlenir ve buna göre veriyi açıklayan temalar saptanır. Bu bağlamda nitel araştırma verileri dört basamakta incelenir (Yıldırım ve Şimşek, 2005):

1. Verilerin Kodlanması
2. Temaların bulunması
3. Kodların ve temaların düzenlenmesi
4. Bulguların tanımlanması ve yorumlanması

Kodlama aşamasında, öğrencilerin ön klinik görüşmelerde kullanılan soruları çözerken verdikleri yanıtlar araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Ön klinik görüşmelerde öğrencilerin söyledikleri ve yaptıkları işlemlerin analiz edilmesi sonucunda toplam dokuz kod (analitik muhakeme, analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa, görsel muhakeme, görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa, görsel destek, görsel muhakemede deneyim eksikliği, integralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik, görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı, integral-türev ilişkisi) oluşturulmuştur. Bu kodların bir kısmı daha önce alan yazında kullanılan tanımlar ve kavramlardan oluşturulurken (analitik muhakeme, görsel muhakeme, görsel destek, görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa, görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı, integral-türev ilişkisi), bir kısmı da (analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa, integralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik, görsel muhakemede deneyim eksikliği) araştırmacı tarafından oluşturulmuştur.

Öğrencilerin ön klinik görüşme sorularını çözerken verdikleri yanıtlar araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Araştırmacının kullandığı bu kodlar, kodlayıcılar arası tutarlılığın hesaplanması için tanımlanmış ve başka bir alan uzmanı tarafından tekrar kodlanmıştır. İki kodlayıcı arasındaki uyum SPSS 13.0 programı kullanılarak analiz edilmiş ve Cohen's kappa katsayısı hesaplanmıştır. Cohen's kappa katsayısı 0,853 bulunmuş ($p=0.00<0.05$) (Çizelge 3.3.) ve elde edilen bu değer doğrultusunda kodlayıcılar arası güvenirlik sağlanmıştır. Kodlayıcılar arası uyum ise Çizelge 3.4.'de verilmiştir. Ön klinik görüşmelerde kullanılan, ancak elde edilen veri açısından birinci sorudan farklı sonuçlar vermeyen üçüncü soru analizden çıkarılmıştır.

Çizelge 3. 3. Ön klinik görüşme-simetrik ölçümler

Simetrik Ölçümler		Değer	Asimp. Std. Hata[a]	Yaklaşık T[b]	Anlamlılık
Uyum ölçüsü	Kappa	,853	,041	17,858	,000
Geçerli durum sayısı N		92			

Çizelge 3. 4. Ön klinik görüşmeler için kodlayıcılar arası uyum tablosu

	Kodlayıcı 2							
Kodlayıcı 1	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	Analitik muhakeme	Görsel ve analitik muhakemeler arasi bağlantı	Görsel destek	Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	Görsel muhakeme	İntegral türev ilişkisi	Toplam
Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	9	0	0	0	0	0	0	9
Analitik muhakeme	1	25	0	0	0	0	0	26
Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı	1	1	18	2	0	1	0	23
Görsel destek	0	0	0	10	1	1	0	12
Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	0	0	0	0	4	0	0	4
Görsel muhakeme	0	0	0	2	0	11	0	13
İntegral türev ilişkisi	0	1	0	0	0	0	3	4
Toplam	11	27	18	14	5	13	3	92

Son Klinik Görüşmeler de benzer şekilde analiz edilmiştir. Öğrencilerin son klinik görüşme sorularını çözerken verdikleri yanıtlar, araştırmacı tarafından kodlanmıştır. Araştırmacının kullandığı bu kodlar, kodlayıcılar arası tutarlılığın hesaplanması için tanımlanmış ve başka bir alan uzmanı tarafından tekrar kodlanmıştır. İki kodlayıcı arasındaki uyum SPSS 13.0 programı kullanılarak analiz edilmiş ve Cohen's kappa katsayısı hesaplanmıştır. Cohen's kappa katsayısı 0,906 bulunmuş ($p=0.00<0.05$) ve elde edilen bu değer doğrultusunda kodlayıcılar arası güvenirlik sağlanmıştır. Kodlayıcılar arası uyum ise Çizelge 3.5 ve 3.6'da verilmiştir.

Çizelge 3. 5. Son klinik göüşme-simetrik ölçümler

Simetrik Ölçümler		Değer	Asimp. Std. Hata[a]	Yaklaşık T[b]	Anlamlılık
Uyum ölçüsü	Kappa	,906	,034	20,859	,000
Geçerli durum sayısı N		89			

Çizelge 3. 6. Son klinik görüşmeler için kodlayıcılar arası uyum tablosu

	Kodlayıcı 2									
Kodlayıcı 1	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmasa	Analitik muhakeme	Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmasa	Görsel muhakeme	Görsel muhakemede deneyim eksikliği	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı	İntegralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik	İntegral-türev ilişkisi	Tercihlerde değişim	Toplam
Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmasa	6	0	0	0	0	0	0	0	0	6
Analitik muhakeme	0	10	0	0	0	0	0	0	0	10
Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmasa	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3
Görsel muhakeme	0	0	0	23	1	1	1	0	0	26
Görsel muhakemede deneyim eksikliği	0	0	1	0	14	0	0	0	1	16
Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı	0	0	0	0	0	6	0	0	0	6
İntegralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik	0	0	0	0	1	0	10	0	0	11
İntegral-türev ilişkisi	0	0	0	1	0	0	0	3	0	4
Tercihlerde değişim	0	0	0	0	0	0	0	0	7	7
Toplam	6	10	4	24	16	7	11	3	8	89

3.4.2. Öğretim Deneyinin Analizi

Çalışmanın ikinci aşamasını oluşturan öğretim deneyi süresince görüntü ve ses kaydı alınmış; üç hafta boyunca da bir gözlemci çalışmaya katılmıştır. Öğretim deneyi süresince elde edilen görüntü kayıtları, araştırmacı notları ve katılımcılardan elde edilen notlar öğretim deneyinin verilerini oluşturmaktadır. Video kayıtları Lesh ve Lehrer (2000) tarafından öğretme deneyi için önerilen yöntem (telescoping analysis) dikkate alınarak analiz edilmiştir. Bu analiz, tüm bölümlere eşit önem verilerek yüzeysel bir analiz ile başlamakta ve daha çok zaman harcamayı gerektiren, daha küçük bölümlerin analizi ile devam etmektedir. (Lesh and Lehrer, 2000). Yine Lesh ve Lehrer (2000)'e göre analiz süreci altı aşamadan oluşmaktadır ve bu çalışmada gerçekleştirilen öğretim deneyi süresince elde edilen veriler aşağıda verilen altı basamakta analiz edilmiştir.

Yorumlama Aşaması 1: Araştırma sırasında bulunan gözlemcinin tuttuğu notların ve kaybolabilecek bilgilerin toplanmasından oluşur.

Yorumlama Aşaması 2: Video kayıtlarının sonraki bölüm için araştırmacı tarafından tekrar incelemesinden oluşur.

Yorumlama Aşaması 3: Her bir bölümün yazılı metne çevrilmesi ve bu bölümlerin özetlenmesinden oluşur. Uzun ve karmaşık video bölümlerinde örüntüleri ve eğilimleri fark etmek zor olabilir. Ancak dipnotlar alınmış yazılı metinler, araştırmacının önceki konularla karşılaştırma yapmasını kolaylaştırır.

Yorumlama Aşaması 4 ve 5: Bir problem çözme bölümünün birden fazla grupta ve bir grubun birden fazla problem çözme bölümdeki davranışlarının özetini çıkarmaktan oluşur.

Yorumlama Aşaması 6: Sonraki araştırmalar için ilginç ve umut verici bölümlerin, grupların veya problemlerin ek analizlerinin yapılmasından oluşur.

Öğretim deneyi sırasında alınan video kayıtları araştırmacıya birçok açıdan kolaylık sağlamaktadır (Lesh and Lehrer, 2000):

1. Video kayıtları görünmeyen birçok faktörün kaydedilmesi ve başka türlü fark edilemeyecek birçok faktörün fark edilmesini sağlayacaktır.

(Örneğin öğrencilerin yüzü, verdiği yanıtların özellikleri hakkında önemli delilller sunacaktır.)

2. Araştırma süresince gözlem yapan kişiler olsa bile bu kişiler daha sonra önemli hale gelebilecek detayları kaçırabilirler (Çünkü bazı olayların önemi, sonuçları ortaya çıkmadan fark edilemeyebilir).

3. Video kayıtları, zaman içinde meydana gelen değişimlerin gözlemlenmesine yardımcı olur. Araştırmacı video içinde ileri-geri hareket ederek bunu sağlar.

4. Video kayıtlar, bir video bölümünü farklı zamanlarda, farklı bakış açılarıyla birçok defa izleme olanağı sağlar. Bu da örüntülerin ve eğilimlerin (farklı bölümlerin izlenmesi sırasında) daha görünür hale gelmesini sağlar.

Bu araştırma sırasında alınan video kayıtlarında,

- Öğrenci davranışları ve tartışmaları kaydedilmiştir.
- Kayıtlar öğretmen gözünden yapılmıştır.
- Her bir ders ve derslerdeki her bir soru analiz birimi olarak kabul edilmiştir.

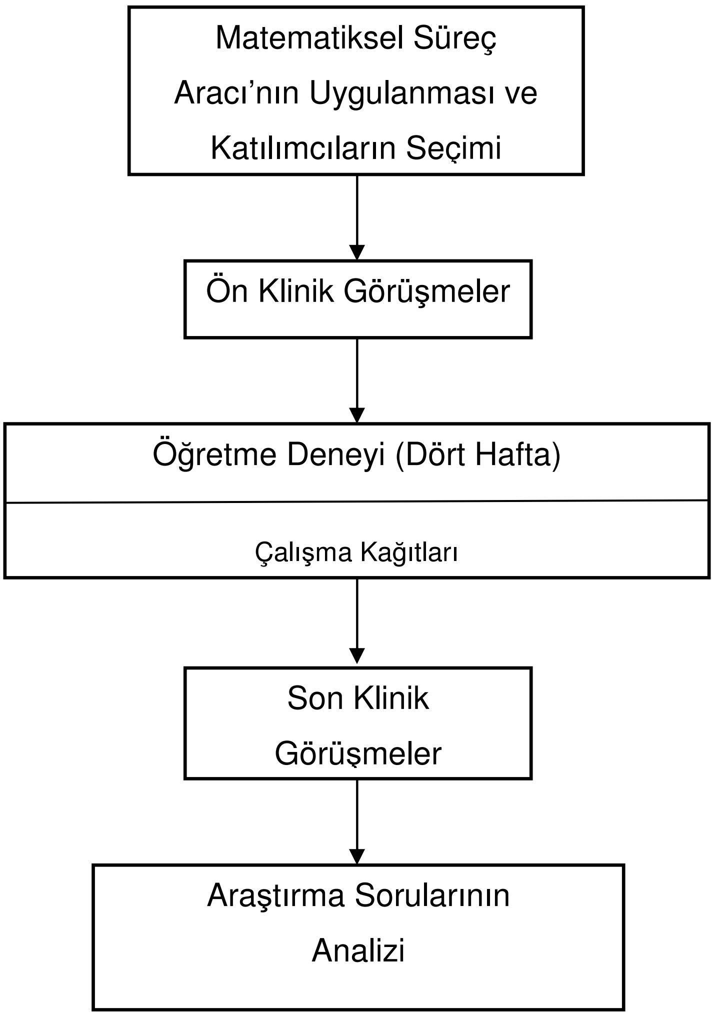
3.5. Güvenirlik ve Geçerlik

Nitel araştırmaların kabul edilen bir tanımını yazmak zor olsa da gözlem, görüşme gibi nitel veri toplama yöntemlerinin kullanıldığı, algıların ve olayların doğal ortamda gerçekçi ve bütüncül bir biçimde ortaya konmasına yönelik nitel bir sürecin izlendiği araştırma olarak tanımlanabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Nitel araştırmalarda kullanılan güvenirlik ve geçerlik, nicel araştırmalardan farklı özellikler göstermektedir. Bu nedenle güvenirlik ve geçerliği konusuda, araştırmanın niteliğini artırabilecek birtakım stratejilerden yararlanılmıştır.

Araştırmanın inandırıcılığını artırmak amacıyla öğretim deneyi sırasında her bir öğretim bölümünden elde edilen veriler sonraki öğretim bölümünün oluşturulması için kullanılmıştır. Yine öğretim deneyi için kullanılan analiz yöntemi verilerin analizin bu yönde olmasını sağlamaktadır. Bunun yanında ön ve son klinik görüşmelerin analizinde kodlama işlemi, başka bir alan araştırmacısı tarafından tekrar yapılmış ve kodlayıcılar arası tutarlılık sağlanmıştır. Çalışmanın katılımcılarından elde edilen veriler çeşitli şekillerde (klinik görüşme, görüşme, video kaydı, gözlem) toplanmıştır. Araştırmanın benzer ortamlara uygulabilirliğini artırmak amacıyla araştırma şartları, araştırmacının rolü, katılımcıların seçilmesinde göz önünde bulundurulan kriterler, verilerin toplanma ve analiz süreci ayrıntılı şekilde betimlenmiştir. Çalışmanın katılımcıları amaçlı örneklem kullanılarak tercihleri görsel yönde olmayan üniversite öğrencilerinden seçilmiştir. Öğrencilerin görsel tercihleri hem MSA hem de ön klinik görüşmelerle teyit edilmiştir.

3.6. Araştırmanın Akış Şeması

Araştırmanın akış şeması aşağıdaki gibidir.



Şekil 3.2. Araştırmanın akış şeması

4. BULGULAR

Bulgular bölümü üç başlık altında incelenecektir: Ön klinik görüşmelerin analizi, öğretim deneyinin analizi ve son klinik görüşmelerin analizi.

4.1. Ön Klinik Görüşmelerin Analizi

Katılımcıların ön klinik görüşmelerdeki her bir soru ile ilgili görüşme sonuçları önce ayrı ayrı değerlendirilecek, sonra da yine her bir soru için genel bir değerlendirme yapılacaktır. Son olarak da ön klinik görüşme sorularının tamamı için genel bir değerlendirme yapılacaktır.

4.1.1. Ön klinik görüşmelerin birinci sorusu

(-3,8) aralığında x-ekseni ile $y=x^2-3x-10$ eğrisi arasında kalan alanı bulunuz.

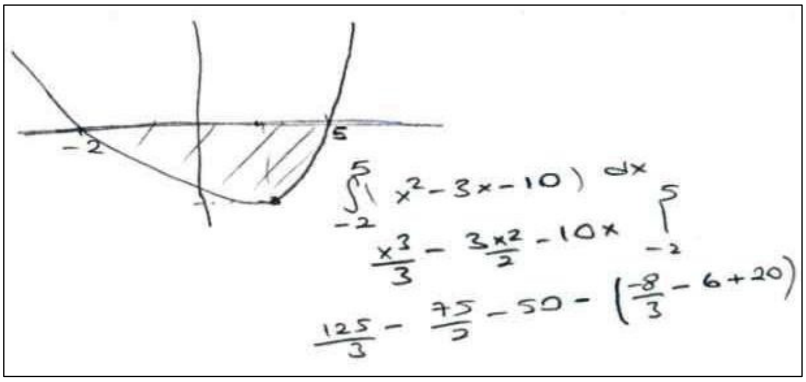
Birinci soru belirli integralin geometrik anlamına ilişkin bir sorudur. Öğrencilerden belirli bir aralıkta x-ekseni ile verilen bir eğri arasında kalan alanı hesaplamaları istenmiştir. Bu soru öğrencilerin görsel destekten ne kadar yararlandığını belirlemek amacıyla sorulmuştur.

Gülay: Gülay, birinci ön klinik görüşme sorusunu çözmeye, verilen eğrinin grafiğini çizerek başlamıştır. Gülay'ın grafikten yararlanma nedeni, verilen eğrinin eksenleri kestiği noktaları bulmak ve integralin sınırlarını belirlemektir. Dolayısıyla grafikten görsel bir destek olarak yararlanmaktadır. Aslında grafik çizerek elde ettiği bilgiyi, cebirsel işlem yaparak da bulabilmektedir. Fakat Gülay burada grafiksel bir destekten yararlanmayı tercih etmiştir. Bu durum, görsel muhakemenin bir alt boyutu olarak kabul edilebilir. Ancak öğrencinin, cebirsel işlem yapmak yerine grafik çizerek sınırları belirleme tercihi, daha sonraki söylemlerinde de görüldüğü gibi ders öğretmeninin çözüm şeklinin bu yönde olmasının bir sonucu olabilir. Bu durum Eisenberg ve Dreyfus (1991)'un ifade ettiği gibi öğrencilerin bilişsel tercihlerinin öğrenilmiş bir fenomen olduğu bulgusuyla tutarlıdır.

> G: Birinci soruda ilk grafik çizmek aklıma gelir. Önce fonksiyonun grafiğini çizerim.
> A: Peki şimdi bana neden grafik çizdiğini anlatır mısın? Bu soru grafik çizmeden de yapılamaz mıydı?
> G: Yapılabilirdi direkt ama yine de görmek istedim. x-ekseni dediği için, herhangi bir eğri istemediği için, doğru da istemediği için. Grafik çizmeden yapılabilirdi aslında ama…

A: Neden görmek istedin sana ne yarar sağlıyor o grafik?
G: Arasında kalan alan dediği için grafik üzerinde taramak daha güvenilir geldi hani o yüzden grafik çizeyim dedim. Bir de çizebileceğim bir grafikti. Hani çok da zor değil; parabol.
A: Çizemeyeceğin bir grafik olsaydı…
G: Çizmezdim, uğraşmazdım hani üsttekinden alttakini çıkarma yöntemi vardı integralde. Yani az çok tahmin ederek, direkt sınırları belirleyerek yapardım herhalde.

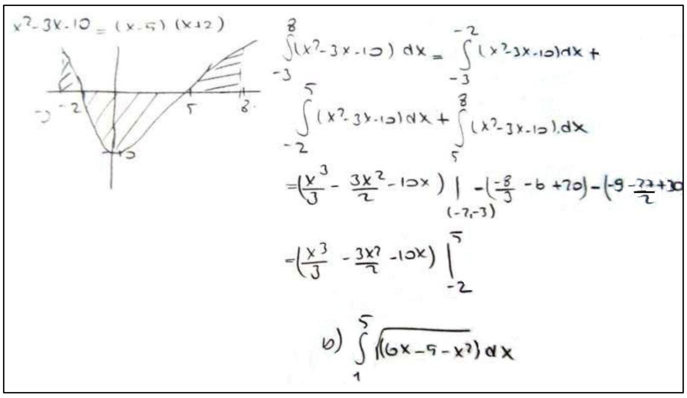
Öğrenci, grafik üzerinde sınırları belirlemenin daha güvenilir olduğunu ifade etmiştir. Ancak çözüm sırasında sorudaki sınırları dikkate almadan yalnızca eğrinin eksenleri kestiği noktalar ile x-ekseni arasında kalan alanı, integral hesaplama yöntemlerini kullanarak hesaplamıştır. Bu durum, Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997)'in kontrol edilemeyen görsel imajların öğrencinin düşünce sürecinde güçlük yaratabileceği bulgusuyla tutarlık göstermektedir.



Şekil 4.1. Birinci soru için Gülay'ın çözümü

Bu soru için çözüm sürecinde ortaya çıkan bir diğer sorun da öğrencinin integral değeri ile alan değeri arasındaki farkı bilmiyor olmasıdır. Soruda verilen eğrinin grafiği çizildiğinde, (-2,5) aralığında grafik x-ekseni altında kalmaktadır. Dolayısıyla grafiğin bu parçasından elde edilen integralin değeri negatif çıkacağı için eksi ile çarpılması gerekmektedir ancak öğrenci, çözümünü bu ayrıntıya dikkat etmeden yürütmüştür.

Elif: Gülay gibi Elif de çözüme grafiği çizerek başlamış ve eğri ile x-ekseni arasında kalan alanı tarayarak belirlemiştir. Başlangıçta verilen alanı, yalnızca (-2,5) aralığında almasına rağmen, x-ekseni üzerinde kalan parçaları da fark ederek çözüm sürecine eklemiştir. Elif için de grafik, integralin sınırlarını belirlemenin bir yoludur. Ancak Elif'in de integral değeri ile belirli integralin eğri altında kalan alan değerinin ne zaman pozitif ne zaman negatif olduğunu tam olarak kavramsallaştıramadığı gözlenmektedir. Elif, çözüm sürecinde görüldüğü gibi (Şekil 4.2) eğrinin x-ekseninin üstünde ve altında kalan bölümleri için belirli integrali parçalamış olmasına rağmen negatif parçalar için integral değerini eksi ile çarpmadığı gibi araştırmacının yaptığı işlem ile ilgili sorulara, "Toplama çıkarma olabilirdi gibi gelmişti ama fark etmiyor galiba diye düşünüyorum şimdi" şeklinde yanıt vererek aslında integralin sınırlarını -3 ve 8 seçerek de çözüm yapabileceğini belirtmiştir.



Şekil 4.2. Elif'in birinci soru için çözümü

E: İntegral zaten bu aralıktaki bu fonksiyonun arasında kalan alan değil mi? Öyle olması gerekiyor. Ama yine de bunu çizsek iyi olacak galiba.
A: Neden?
E: Çünkü altında ya da üstünde kalabilir. Değil mi?
A: Altında ya da üstünde kaldığını grafik çizmeden anlayamaz mısın?
E: Anlaşılabilir aslında… (*Grafiği çizmek için işlem yaptı ve grafiği çizdi).* Şöyle bir şey çıkacak herhalde. Büyük ihtimalle; yanlış da olmasın ama. Bölge zaten burasıymış. Çok fark etmiyormuş.
A: Ne yaptın şimdi?
E: İntegralini aldım yanlış değilse!
A: Grafiği nasıl kullandın?
E: Mesela dönen bir şey olsaydı, gerçi x^2 olduğu için çıkmaması gerekiyordu. Küplü falan olsaydı çıkardı. O zaman birisini çıkarmak zorunda kalabilirdim. Ya da çıkarmak değil de işaretleri farklı şekilde toplamak zorunda kalabilirdim.
A: Şimdi burada ne oldu?
E: Şimdi her taraftan altta kaldığı için, x ekseni ile arasında kalan dediği için burası oldu.
A: Orası nerden nereye kadar?
E: -2'den 5'e kadar. O yüzden çıkarılmasına gerek yoktu. Zaten x^2'li olduğu için…

A: Peki senin sınırların ne?
E: -3 ve 8. Evet. Bir de buraları var sahi. Biraz dikkatsizim galiba. Şimdi ayrı ayrı yapacağız demek ki."
(*Yaptığı işlemleri siler. Ve işaretlere dikkat etmeden integrali aralıklara göre parçalar)*
A: Peki ilk yaptığından farkı ne oldu bunun?
E: Bir farkı oldu gibi yok aslında bunun. Aslında buralar farklı çıkabilirdi (*Eğri üstünde kalan kısım*) Toplama çıkarma olabilirdi gibi gelmişti ama fark etmiyor galiba diye düşünüyorum şimdi. Zaten şimdi bir alanı bulurken oradan oraya (*sınırlar)* kadar, eksi olmadığı için toplamak pek bir şey değiştirmiyordur.

Hale: Soruya, verilen eğrinin grafiğini çizerek başlamayı tercih eden öğrencilerden biri de Hale'dir. Soruya bir katkısı olmasa bile Hale de grafik çizerek verilen eğriyi görmek istediğini belirtmiştir.

H: Ben önce şekil verildiyse çizmeyi yeğlerim.
A: Şekil verildiyse derken?
H: Mesela x^2-3x–10 eğrisi dendiğinde formülden önce bir şekille görmeyi yeğliyorum. Belki o an soruya bir katkısı olmuyor ama görmeyi istiyorum. Şekli görünce daha böyle bir şey oluyor. Kafamda daha iyi canlanıyor. Aslında benim için biraz zaman kaybı oluyor ama sorularda lüzumlu ya da lüzumsuz bir şekil çizebiliyorsam çizerim. Belki o an işime yaramıyordur. Ama öyle psikolojik bir şey… Öyle şey yapıyorum *(çözüyorum)* soruları.

Grafiği çizdikten sonra daha önceki katılımcılar gibi istenen bölgeyi grafik üzerinde tarayarak istenilen alanı bulmak için işlem yapmaya başlamıştır. Ancak istenilen bölgenin alanını hesaplarken, integral değeri ve eğri ile x-ekseni arasında kalan alanın değerinin pozitifliği ya da negatifliği konusunda Hale de sorun yaşamaktadır.

H: Eksenleri kestiği noktayı bulmaya çalışıyorum. y'yi 0'a eşitlediğim zaman (5,-2) noktasından geçer. Galiba şöyle bir şekil olsa gerek (*Elindeki verileri kullanarak grafiği çizdi)* (-3,8) aralığı demiş (*aralığı grafik üzerinde çizip istenen bölgeyi belirledi)*. x-ekseni ile eğri demiş. O zaman buralar herhalde. Şimdi galiba ayrı ayrı hesaplardım. Ya da topluca hesaplar mıydım? Geçen yıl olsa topluca hesaplardım herhalde ama. Şimdi daha farklı bir şey yapabilirim. Gerçi bakim hiç bölünüyor mu? -2'den 5'e.
A: Ne düşünüyorsun şu anda?
H: Yani arada hiç bölünüyor mu? Boşluk kalmadığı için -3'ten 8'e direkt denklemi yazabilirim aslında. Bu kadar şeyi yapmaya gerek yoktu aslında ama. Şekli görünce daha böyle bir şey oluyor. Kafamda daha iyi canlanıyor. Gerçi geçen yıl ki taze bilgilerim olsa direkt yazardım ama. Sınavda da yaparken hani kendimi riske atmamak için böyle bakıyorum. Bazen olur mesela burası boşta kalabilir. Şekle göre tahmin edilebilir az buçuk da. Ne bileyim. Her şey de öyle bir şekil çiziyorum. Lüzumlu ya da lüzumsuz… Aslında burada gerek de yokmuş şekli

çizmeye.($\int_{-2}^{8}(x^2-3x-10)dx$ *integralini hesaplamaya başladı)*) İlk başta şekil çizmek için hani böyle önce tepe noktasını buldum. Sonra eksenleri kestiği noktaları buldum. Parabolün zaten gidişatını bildiğim için çizdim. Bu şekli çizdim. Hani şu aralara falan baktım. Hani sınav anında o an şeyi bile düşünebilirdim. O stresle şunları (*aralıkları)* teker teker bile inceleyebilirdim. Hani toptan incelemek yerine. Ve sonra zaten baktım. Bir bütünmüş. Direkt integrali aldım. Bazen oluyor. Şekiller ayrık ayrık çıkabilir.

Şeyda: Ön klinik görüşmelerdeki birinci soruya başlarken grafik çizmeyen tek öğrenci Şeyda'dır. Şeyda her ne kadar görsel bir destek kullanmasa da verilen eğrinin denkleminin bir parabol denklemi olduğunu görüp grafiğini zihninde canlandırmıştır.

Ş: Direkt eğirinin şekli geldi gözümün önüne, parabol, altında kalan alan...

Şeyda soruyu çözmeye doğrudan, verilen fonksiyonun integralini istenen aralıkta, integral hesaplama yöntemlerini kullanarak başlamıştır. Daha önceki katılımcılarda gözlemlenen ve integral değeri ile eğri ve x-ekseni arasında kalan alan değerinin pozitifliği ya da negatifliği konusunda yaşanan güçlük Şeyda da gözlenmiştir.

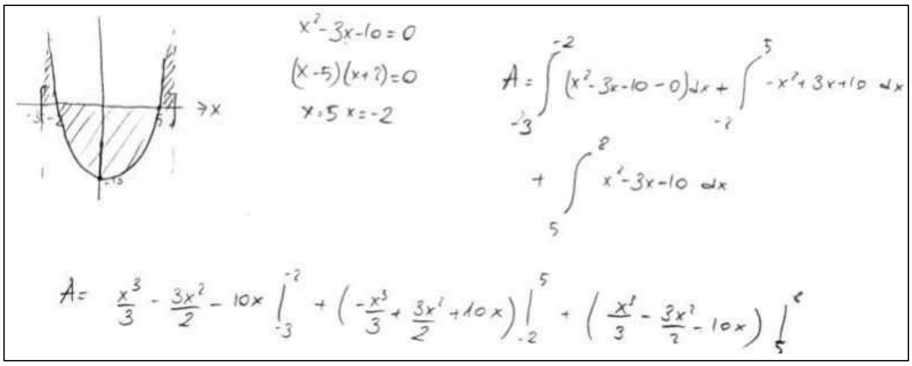
Ş: E…Ben bunu mesela, -3 ile +8 arasında böyle ortada bir şey olduğu için yarısının… Alan!
A: Alan? Ne oldu?
Ş: Hani birbirini götürüyor ya bazen… Ama hepsi dediği için olmaz, o yüzden sadece – 3 den 8 'e kadar integrali derdim. Önce yazmazdım. Belirsiz integrali çözerdim. *(çözüm yapıyor)*
A: Şimdi ne düşündün soruyu ilk gördüğünde, bana bundan bahset biraz.
Ş: … İlk başta sanki birbirini götürüyormuş gibi düşündüm ama sonuçta alan sorulduğu için öyle bir şey olmaz.

Zehra: Zehra da soruyu çözmeye, verilen eğrinin grafiğini çizerek başlamıştır. Daha önceki bazı katılımcıların belirttiği gibi Zehra'nın da grafik çizmesinin en büyük nedenlerinden biri istenilen alanı görmek ve sınırları belirlemektir.

A: Ne yapıyorsun şu anda?
Z: İstenilen alanı bulmak için şu anda grafikten yararlanacağım. x'in sınırlarını görürken daha rahat oluyor. Hani şurada *(sorunun ifadesi)* olduğu gibi verildiği takdirde çok anlaşılır olmayabiliyor. En azından nerede kaldığını daha kolay görebiliyoruz.

Zehra da başlangıçta grafik çiziminde hata yapmış ve soruda verilen sınırları gördüğünde hatasını fark etmiştir. Ancak, bölgeyi doğru tespit ettikten sonra integral değerini hesaplayarak istenen alanı bulmuştur.

Funda: Soruyu hatasız çözen tek öğrenci Funda'dır. Funda öncelikle verilen eğrinin x-eksenini kestiği noktayı cebirsel olarak bulmuş, bu değerleri grafik üzerinde yerine yerleştirmiş, eğrinin grafiğini çizmiş, istenilen alanı taramış ve integral değerini, istenen alanı bulmak için doğru bir şekilde hesaplamıştır.



Şekil 4.3. Birinci soru için Funda'nın çözümü

Funda, başlangıçta (-2,5) aralığının, (-3,8) aralığı tarafından kapsandığı için ilk aralığın yeterli olacağını düşünse de daha sonra sorunun çözümünde kullanılacak aralığı doğru tespit etmiştir.
Diğer katılımcıların aksine Funda, eğri altında kalan alan kavramını, üstte kalan eğriden, altta kalan eğrinin (bu soru için x-ekseni, yani y=0 doğrusu) çıkarılması olarak yapılandırdığı için sorunun doğru çözümüne ulaşabilmiştir. Bu durum aslında Funda'nın gerçekleştirdiği yapılandırma sürecinde görsel öğelerden yararlanmasının bir sonucudur. Diğer katılımcılar bunu tam olarak belirtmese de x-ekseni altında kalan alanın, integral kullanarak hesaplanmasını, yalnızca "eksi ile çarpmak" şeklinde zihinlerinde yapılandırmışlardır. Ve bu durum önceki şemalar içinde anlamlı bir yer bulamadığı için hatırlanamamaktadır.

<u>Ön klinik görüşme birinci soru için genel değerlendirme</u>

Görsel destek, katılımcılar tarafından en çok bu soruda kullanılmıştır. Analiz aşamasında bir tema olarak kullanılan görsel destek, problem çözme sürecinde bir grafikten yararlanılan ancak yalnızca bir aşamasında kullanılan, tamamında kullanılmayan bilişsel bir destek olarak tanımlanmıştır. Problem, grafik kullanılmadan da çözülebilir olmasına rağmen Şeyda dışındaki tüm katılımcılar, bu soruda sınırları belirlemek için görsel destekten yararlanmışlardır. Burada, sınırları belirlemenin tek amacı, grafiğin hangi aralıklarda x-ekseninin altında kaldığını görmektir. Ancak Funda dışındaki hiçbir katılımcı bu ayrımı kullanamamıştır. Katılımcılardan Gülay, Zehra ve Funda başlangıçta grafik çiziminde hata yaptıkları için sınırları da yanlış belirlemişlerdir.

Daha önce integral ile ilgili olarak yapılan araştırmalarda, belirli integralin anlamına ilişkin öğrenciler tarafından benimsenen farklı görüş açılarının (hesaplama, alan, toplama, x=a ve x=b arasındaki toplam değişim, fonksiyon, somut nesne) bulunduğu belirlenmiştir (Oberg, 2000). Belirlenen bu faklı görüş açıları arasında, öğrenciler tarafından en çok benimsenenlerden biri de integral ile alan kavramı arasındaki ilişkidir (Oberg, 2000; Ubuz, 1996). Bu araştırmada yer alan katılımcılar için de benzer durum söz konusudur. Ancak katılımcıların çoğunluğu integral-alan ilişkisine vurgu yapmakla beraber bu ilişkinin işlemsel ve grafiksel uygulamalarında sorunlar yaşamaktadırlar. Örneğin ön klinik görüşmelerde yer alan birinci soruda, verilen eğri ile x-ekseni arasında kalan alanı bulmak için Şeyda dışındaki katılımcıların hepsi birer grafik çizerek istenen alanı belirlemişlerdir. Katılımcılar için verilen eğrinin grafiğini çizmek, istenen bölgeyi belirlemenin bir yoludur. Katılımcılara bu soruda verilen eğrinin grafiğini neden çizdikleri sorulduğunda, istenen bölgeyi görmek istedikleri veya öyle alıştıkları için grafik çizdiklerini belirtmektedirler. Sorunun çözümü için grafiğin gerekli olup olmadığı sorulduğunda ise grafiğin bulunduğu bölgenin önemli olduğunu ifade etmelerine rağmen bu bilgiyi nasıl kullanacaklarını bilmemektedirler. Eğri altında kalan alanın, x-ekseninin altında veya üstünde olmasının bir fark yarattığını biliyor olsalar bile bu farkı çözüm sürecinde kullanamamışlardır. Altı katılımcıdan yalnızca ikisi eğri altında kalan alanı doğru belirleyip soruyu doğru olarak çözebilmiştir.

Görselleştirmenin sağladığı bilişsel avantajlar yanında, kavram oluşturma sürecinde bir takım sınırlılıklara veya problem çözme sürecinde bilişsel zorluklara neden olabileceği yönünde sonuçlara ulaşan araştırmalar mevcuttur (Bishop, 1986; Aspinwall et al., 1997; Rösken and Rolka, 2006). Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997) kontrol edilemeyen görsel imajların bazen matematiksel kavramlar için anlam oluşturma sürecini engelleyebileceğini, bu konuda öğrencilerin karşılaşabileceği zorluklara dikkat edilmesi gerektiğini belirtmektedirler. Rösken ve Rolka (2006) ise çalışmalarında öğrencilerin integral konusu kapsamında hangi görsel imajlara sahip olduklarını, verilen bir görselleştirmeye karşı nasıl davrandıklarını ve görselleştirmeyi hangi kapsamda kullandıklarını araştırmışlardır. Araştırma sonucunda görselleştirmenin öğrenciler için önemli olduğu kadar bazı güçlükleri de beraberinde getirdiğini gözlemlemişlerdir. Ayrıca görselleştirmeye yansıtıcı düşünmenin eşlik etmesi gerektiğini, böylece görselleştirmenin neden olabileceği zorluklardan kurtulabileceklerini ifade etmişlerdir.

Bu sorunun çözümünde de öğrenciler bazı durumlarda çözüm sürecinde kullandıkları bir grafikten kaynaklanan bilişsel bir karmaşa yaşamışlardır. Grafik oluştururken yaptıkları hatalar, soruları yanlış çözmelerine veya hata yapmalarına neden olmuştur. Soruyu hatasız çözen Funda'nın çözüm sürecinde hem analitik hem de görsel destekten yararlanması, araştırmanın varsayımı olan görsel ve analitik muhakemeyi etkileşimli olarak kullanan öğrencilerin problem çözme sürecinde daha başarılı olacağı varsayımını desteklemektedir.

Bu soruda katılımcıların söylemlerinden çıkan bir diğer sonuç da öğrencilerin grafik çizmek gibi görsel bir desteğe daha önceden bildikleri, kolay çizilebilir bir grafik olduğunda daha sık başvurduklarıdır.

Çizelge 4.1. Birinci soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel Destek	İntegralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı	Görsel İfadeye bağlı bilişsel karmaşa
Gülay	Belirli integrali, integral alma kurallarını kullanarak hesaplama	-	Sınırları belirlemek için verilen fonksiyonun grafiğini çizme	Pozitif ve negatif bölgedeki integral değerleri arasındaki farkı bilmeme	-	Grafiğe bakarak sınırları yanlış belirleme

Çizelge 4.1. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel Destek	İntegralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı	Görsel İfadeye bağlı bilişsel karmaşa
Elif	Belirli integrali, integral alma kurallarını kullanarak hesaplama	-	Sınırları belirlemek için verilen fonksiyonun grafiğini çizme	Pozitif ve negatif bölgedeki integral değerleri arasındaki farkı bilmeme	-	-
Hale	Belirli integrali, integral alma kurallarını kullanarak hesaplama	-	Sınırları belirlemek için verilen fonksiyonun grafiğini çizme	Pozitif ve negatif bölgedeki integral değerleri arasındaki farkı bilmeme	-	-
Şeyda	Belirli integrali, integral alma kurallarını kullanarak hesaplama	Grafiğin şeklini zihinde canlandırma	-	Pozitif ve negatif bölgedeki integral değerleri arasındaki farkı bilmeme	-	-
Zehra	Belirli integrali, integral alma kurallarını kullanarak hesaplama	-	Sınırları belirlemek için verilen fonksiyonun grafiğini çizme	Pozitif ve negatif bölgedeki integral değerleri arasındaki farkı bilmeme	-	Grafiğe bakarak sınırları yanlış belirleme
Funda	Belirli integrali, integral alma kurallarını kullanarak hesaplama	-	Sınırları belirlemek için verilen fonksiyonun grafiğini çizme	-	Grafiksel bilgi ve cebirsel bilgi arasındaki bağlantıyı kurarak alan hesaplama	Grafiğe bakarak sınırları yanlış belirleme

4.1.2. Ön klinik görüşmenin ikinci sorusu

Aşağıdaki integrallerin değerini hesaplayınız.

a) $\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})dx$ b) $\int_{1}^{5}\sqrt{6x-5-x^2}\,dx$

Ön klinik görüşmelerde kullanılan ikinci soruda iki belirli integralin değeri istenmektedir. Bu soru, hem görsel hem de analitik muhakeme kullanılarak çözülebilecek niteliktedir. Öğrenci, trigonometrik bir dönüşüm uygulayarak integrallerin değerini hesaplayabileceği gibi integrali hesaplanacak matematiksel ifadenin grafiği ile integralin geometrik anlamını kullanarak da bu soruları çözebilecektir. Bu sorunun amacı, öğrencinin her iki muhakeme (görsel ve analitik) türüyle çözülebilecek bir integral sorusu karşısında hangi muhakeme türünü benimsediğini belirlemektir.

Gülay: Gülay, sorunun a) şıkkını inceledikten sonra bir dönüşüm uygulayarak soruyu çözebileceğini düşünmüş ve uygun dönüşümü aramaya başlamıştır. Fakat yaptığı bir dönüşüm sırasında $\sqrt{1-x^2}$ ifadesinin bir çember gösterdiğini fark etmiş ve çözümünü bu çember üzerinde yürütmeye başlamıştır.

> A: Ne düşündün soruyu okuyunca?
>
> G: Buna muhtemelen dönüşüm uygulayacağım. 1-x^2'ye u derim. Oradan bir şeyler gelir mi? Öyle bir şeyler yaparım diye düşünüyorum. (*Yaptığı işlemleri karaladı*) Çember. $\sqrt{1-x^2}=y$ dersem y^2=1-x^2. Bunu da şekil üzerinde daha rahat görürüm herhalde. *(Ve çemberin grafiğini çizdi, yarıçapı bir merkezi başlangıç noktası olan çember çizdi.)* Bunu ilk göremediğim için direkt y değişkeni yapayım dedim. Daha sonra zaten çıkmadı. Daha sonra çember denklemi olduğu aklıma geldi.

b) şıkkı içinse başlangıçta çember denklemi olduğunu fark edememiş ve bu tür integral ifadeleri için bir formül olduğunu düşünüp bu formülü hatırlamaya çalışmış ancak bulamamıştır. Bu durumu “Muhtemelen ben bunun çözüm yönteminin formülünü ezberlediğim için hatırlamıyorum” şeklinde kendisi de ifade etmiştir. Yaptığı birkaç işlemden sonra bu sorunun da bir çember gösterdiğini fark edip işlemlerini bu çember üzerinden yürütmüştür. Diğer şıktan farklı olarak bu şıkta bir tereddüt yaşamıştır. Gülay bu soruda kendisinden istenen alanın tam bir çembere mi yoksa yarım bir çembere mi ait olduğuna karar verememiştir.

G:Yani 1 ile 5 olduğuna göre sınırlarım tam bir çemberin alanını istiyor. Ben niye yarım diye düşündüm. Merkezi (3,0), yarıçapı 2. Zaten 1 ile 5 arasındaki alanı istiyor. 1 ile 5 arasındaki alanı istiyor ama bu eksi alan olur mu? Bence -1, -5 demediğine göre bence bu tam bir çemberin alanını istiyor.

…

A: Neden şimdi tam bir çember olduğunu düşündün?
G: Direkt aklıma şey gelmişti. Hani bunun altı -1,-5 diye düşündüm ama niye böyle düşündüm bilmiyorum. Hani direkt yarısı diye aklıma geldi. Halbuki yarısı 0 ile burada olan sınırlar. Sınırları x ekseni altında aldım. O zaman muhtemelen benim a şıkkım da yanlış. Burada ne düşündüm? -1,1. Buradan ne geldi. 2 geldi. Bence bu da tam bir çemberin alanı…
A: Neden tam olduğunu düşünüyorsun?
G: Çünkü sınırlar -1 ve 1.
A: Yarım çember olduğunda ne olurdu peki?
G: Evet ne olurdu? Şöyle bir sınır isterdim. y-ekseninden bir sınır isterdim.

Gülay'ın bu tereddüde düşmesinin en büyük nedenlerinden biri $\sqrt{6x-5-x^2}=y \;\Rightarrow\; (x\text{-}3)^2+y^2=4$ işlemini yapmasıdır. Gülay bu iki ifadenin de gösterdiği grafiğin aynı olduğunu düşünmekte ve sınırlara göre istenen alanı belirlemeye çalışmaktadır. Oysa sorunun a) şıkkında $\sqrt{1-x^2}=y$ ifadesinin bir yarım çember olduğunda herhangi bir tereddüt yaşamamıştır. Yaşadığı bu karmaşayı a) şıkkında yaptığı işlemlere tekrar dönerek aşmıştır.

Elif: Elif soruyu okuduktan sonra çözüme, bir dönüşüm yapılarak ulaşılabileceğini düşünmüştür. Çünkü köklü ifadelerin integralinin, trigonometrik bir dönüşüm yapılarak alınabileceğini düşünmektedir

A: Tamam ne düşündüğünü söyle bana.
E: Zaten kareköklü fonksiyonlar olduğu zaman bunlar muhtemelen trigonometrik bir değişkenli oluyor. Zaten bunun yerine sin, cos yazarsan mutlaka bir yerden bir şey çıkıyor. Çünkü burada x yerine sinx yazdığımızda direkt sin^2 oluyor. Zaten bu da cos^2'ye eşit. Oradan cos de çıktığında cos^{2}xdx oluyor. Aslında bunların da bir şeyi vardı. Onları da şu an hatırlayamıyorum ama. Bunu da biz yapmıştık onu da biliyorum. Ama zaten kareköklü olunca ki böyle basit bir şey olunca trigonometrik bir şey oluyor. Gerçi bunda ($\int_1^5 \sqrt{6x-5-x^2}dx$) olmayacak bence ama.

Benzer şekilde sorunun b) şıkkı için de Elif, bu tür ifadelerin integralleri için bir formül olduğunu ve daha önce soruları, o formülü kullanarak çözebildiğini belirtmektedir.

E: Bu ancak bir değişken değiştirmeyle olabilir. Değişken değiştirsek bile, dx... zor yani. Direkt formülden yapılabilecek gibi bir şey.

Hale: Hale de sorunun her iki şıkkını trigonometrik bir dönüşüm yaparak çözmüştür. a) şıkkını x=sinθ dönüşümü uygulayarak çözerken, b) şıkkını önce tam kare ifadesine dönüştürmüş ardından u=2sinhα dönüşümü uygulayarak sonuca ulaşmıştır.

> A: Ne düşünüyorsun?
> H: Şey dönüşümü yapıyorduk ya. Tan veya sin dönüşümü yapıyorduk. Hani ondan hangisini elde edebilirim, beni neye götürür ona bakıyorum. Gerçi o dönüşümü yaparken... Burada da çıkmış olur. Deneyim bakim belki sonuca götürür. Önce belirsiz integralini çözmek daha çok işime gelir (*İntegralin toplam olan iki kısmını ayırdı ve ilk kısmı için)* Bu zaten x belli. Bu kısım için düşüncem. O zaman buraya cosx dönüşümünü yapsam. Nasıl yapıyorduk bir hatırlayayım. $x=\cos\theta$ ise $dx=-\sin\theta d\theta$ gelir. O zaman sin dönüşümü yapayım eksi gelmesin. $1-\sin^2\theta$'dan oraya $\cos^2\theta$ yazacağım. O $\cos\theta$ diye çıkacak. Cos'ün şeyini (*integralini*) bildiğim için yapacağım. Bir şeyler bir şeyler.

Şeyda: Şeyda, bu sorunun a) şıkkının trigonometrik bir dönüşüm yapılarak çözülebileceğini düşünürken b) şıkkında $\sqrt{ax^2+bx+c}$ türündeki ifadelerin integrallerini veren bir formül olduğunu düşünmekte, bu formülü hatırlamaya çalışmaktadır.

> Ş: Hım… *(Düşünüyor)…* Bunu da... E... Bunda x yerine trigonometrik bir ifade koyuyorduk… Ama hangisini koyuyorduk!
> A: Tamam bir dene bakalım. Dediğim gibi doğru ya da yanlış yapman beni çok da ilgilendirmiyor.
> Ş: Hı hı, anladım. E, mesela x yerine a, yani sadece "sinθ" koyduğumu düşünürdüm. İkincisinde de… Hım... *(Çözüm yapıyor)…* Burada!
> A: Ne düşünüyorsun?
> Ş: E... Bunun bir formülü var, sadece onu hatırlıyorum.
> A: Formül derken?
> Ş: Kök içinde ax^2 +bx+c diye bir ifade olduğu zaman kullandığımız bir ifade var. Hocam bunda da gerçekten integralleme yöntemlerinde direkt ax^2 +bx+c' yi veren bir şey var yani.

Görüldüğü gibi bu soruda da Şeyda'nın kullandığı çözüm yönteminde daha çok analitik stratejiler hakimdir. Hesaplanması istenen integral için düşündüğü ilk yöntem ilgili formülü hatırlamaktır ve çözümün ancak bu şekilde yapılacağını düşündüğü için bu yöntem üzerinde de oldukça ısrarlı davranmıştır.

Zehra: Zehra bu sorunun her iki şıkkını da trigonometrik bir dönüşüm uygulayıp, integral hesaplama yöntemlerini kullanarak çözmüştür. b) şıkkındaki ifadeyi tam kareye dönüştürmüş, daha sonra a) şıkkındaki çözüm yöntemini tekrarlayarak sorunun yanıtına ulaşmıştır.

Funda: Funda da Zehra gibi her iki şıkkı, trigonometrik bir dönüşüm yaptıktan sonra integral hesaplama yöntemlerini kullanarak çözmüştür.

<u>Ön klinik görüşme ikinci soru için genel değerlendirme</u>

İkinci soru için araştırmanın katılımcılarının klinik görüşmeler sırasında yaptıkları işlemler ve söylemlerinden elde edilen veriler incelendiğinde, katılımcıların analitik muhakemeyi daha yoğun olarak kullandığı dikkat çekmektedir. Katılımcıların görsel olmayan tercihlere sahip oldukları dikkate alındığında aslında bu beklenen bir durumdur. Katılımcıların hepsi, sorularla ilk karşılaştıklarında daha önceden var olan analitik şemalarını devreye sokmuşlardır. Örneğin katılımcıların tamamı karekök içindeki bir ifadenin integralinin alınması söz konusu olduğu durumlarda, sorunun trigonometrik bir dönüşüm kullanılarak çözülmesi gerektiği yönünde yanıt vermişlerdir. Bu durum kimi zaman görsel bir destek (fonksiyonların grafikleri) ile desteklense de çözüm, çoğunlukla analitik muhakemenin oluşturduğu süreçlerden oluşmaktadır. Öğrenciler, daha önceden oluşturdukları analitik şemaların hâkim olduğu bu süreçte zaman zaman aritmetik hatalar yapsa da çoğu zaman başarı sağlamaktadırlar. Bunun yanında öğrencilerin bu tür süreçlere ilişkin deneyimleri, görsel süreçlerin aksine oldukça fazladır. Çünkü kullandıkları dönüşümün işe yaramadığı durumlarda farklı dönüşümleri işe koşabilmektedirler.

Daha önce de belirtildiği gibi görselleştirmenin sağladığı bilişsel avantajlar yanında, kavram oluşturma sürecinde bir takım sınırlılıklara veya problem çözme sürecinde bilişsel zorluklara neden olabileceği yönünde sonuçlara ulaşan araştırmalar da mevcuttur (Bishop, 1986; Aspinwall et al., 1997; Rösken and Rolka, 2006). Ancak öğrencilerin yaşadığı bilişsel zorluklar her zaman görsel imajlardan kaynaklanmamakta bazı durumlarda da bu zorluklara öğrencilerin sahip olduğu analitik bilgi eksikliği neden olmaktadır. Örneğin Gülay ikinci sorunun çözümü için öncelikle analitik muhakeme kullanmış ancak uygun dönüşümü bulmadan önce bu ifadenin bir çember denklemi olduğunu fark etmiş ve sorunun a) şıkkının çözümünü bu sürece bağlı kalarak yapmıştır. Ancak sorunun b) şıkkında yine çember denklemi olduğunu fark edip benzer süreci uygulamasına rağmen, integrali alınacak matematiksel ifadenin yarım çember mi tam çember mi gösterdiğine karar verememiş ve a) şıkkında da yaptığı işlemin yanlış olabileceğini düşünmüştür.

Öğrencinin b) şıkkında yaşadığı karmaşanın en büyük nedenlerinden biri bu ifadeye ilişkin çok fazla kavramsal yapıya sahip olmamasıdır. a) şıkkındaki matematiksel ifade, yarım çemberin grafiğini göstermek üzere analiz derslerinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu yüzden öğrenci bu kavramsal yapıya ilişkin yalnızca $\sqrt{1-x^2}=y$ ifadesiyle karşılaşmakta ve altında yatan matematiksel anlamı çok fazla sorgulamamaktadır. Böylece karşısına çıkan ilk farklı durumda bilişsel bir karmaşa yaşamaktadır. Bu durum aslında, bu ifadenin grafiksel gösteriminden değil, $\sqrt{1-x^2}=y, \quad y^2+x^2=1$ analitik ifadesindeki kavramsal eksiklikten kaynaklanmaktadır. Benzer durum son klinik görüşmelerde tekrar kullanılan üçüncü soruda da yaşanmıştır.

Öğrencilerin yaşadığı bu bilişsel zorluk bazı durumlarda görsel ifadelerin sağladığı destek sayesinde çözüme kavuşurken bazen de araştırmacının sorduğu sorular sayesinde aşılmıştır. Bu durum Arcavi (2003)'nin çalışmasında belirttiği gibi görselleştirmenin aynı zamanda sembolik ve (doğru olmayan) sezgi arasındaki ikilemi çözmenin olası yollarından biri olduğu ve formel çözümlerde kolaylıkla es geçilebilecek kavramsal desteği tekrar kazanmada bir yol olduğu iddiasını desteklemektedir.

Çizelge 4.2. İkinci soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

	Analitik Muhakeme	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	Görsel Muhakeme	Görsel İfadeye bağlı bilişsel karmaşa	Görsel Destek	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı
Gülay	Başlangıçta soruyu çözmek için gerekli trigonometrik dönüşümü bulmaya çalışma	b şıkkında, cebirsel ifadedeki dönüşümden kaynaklanan bilişsel karmaşa	Soruyu integralin geometrik anlamını kullanarak çözme	Grafiğe bakarak sınırları yanlış belirleme	Ders hocasının kullanımı nedeniyle görsel destek alma isteği ancak bu soruda kullanmama	İntegral ile grafiğin gösterdiği geometrik şekil arasında bağlantı kurma

Çizelge 4.2. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	Görsel Muhakeme	Görsel İfadeye bağlı bilişsel karmaşa	Görsel Destek	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı
Elif	Trigonometrik dönüşüm, çarpanlara ayırma kullanarak integral hesaplama	-	-	-	-	-
Hale	Trigonometrik dönüşüm kullanarak integral hesaplama	-	-	-	-	-
Şeyda	Trigonometrik dönüşüm kullanarak integral hesaplama, formül kullanma	-	-	-	-	-
Zehra	Trigonometrik dönüşüm kullanarak integral hesaplama	-	-	-	-	-
Funda	Trigonometrik dönüşüm kullanarak integral hesaplama	-	-	-	-	-

Çizelgede de görüldüğü gibi Gülay dışında, öğrencilerin hepsi soruyu analitik muhakeme (trigonometrik dönüşüm veya ilgili formül hatırlama) kullanarak çözmeye çalışmışlardır. a) şıkkında uygun dönüşümü bulan Hale, Zehra, Funda soruyu trigonometrik dönüşüm kullanarak çözmüş ve sonuca ulaşmışlardır. Şeyda ve Elif uygun dönüşümü bulamadıkları için soruyu yarım bırakmak zorunda kalmışlardır. Gülay ise soruyu integralin geometrik anlamını kullanarak çözmüş ve sonuca ulaşmıştır. b) şıkkı da a) şıkkında olduğu gibi soru Hale, Zehra, Funda tarafından, yine trigonometrik dönüşüm kullanılarak çözülmüş, Gülay ise a) şıkkında kullandığı yöntemi kullanmıştır.

4.1.3. Ön klinik görüşmenin üçüncü sorusu

$y=\sqrt{3-x}$ Eğrisinin (-1,3) aralığında x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?

Üçüncü soru da integralin geometrik anlamına ilişkin bir sorudur. Verilen bir eğrinin belli bir aralıkta x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi istenmektedir. Öğrenciler bu soruyu yalnızca analitik muhakeme kullanarak çözebilecekleri gibi görsel ve analitik muhakemeyi etkileşimli kullanarak çözüme ulaşabilirler. Bu sorunun amacı öğrencilerin, yalnızca analitik veya görsel ve analitik muhakemenin etkileşimli kullanımıyla çözülebilecek bir soruyu çözerken hangi yöntemi kullandıklarını ya da kullanmayı tercih ettiklerini belirlemektir.

Gülay: Gülay, birinci soruda olduğu gibi bu soruya da grafik çizerek başlamak istemiştir. Ancak onun için $y=\sqrt{3-x}$ ise y^2=3-x işlemini yaptıktan sonra y^2=3-x'in grafiğini çizmek o kadar da kolay değildir. ax^2+bx+c=y türündeki ifadelerin grafikleri Gülay için daha tanıdıktır ve bu yüzden soruya bir grafik çizerek başlamak fikrinden vazgeçmiştir.

> A: Ne düşünüyorsun?
> G: Grafiği nasıl çizeceğimi. Şu x^2+3=y olsaydı çok daha kolayıma gidiyordu ama.
> A: Grafik çizmen gerekiyor mu peki? İhtiyacın var mı? Neden grafik çizmek istiyorsun?
> G: Görmek istiyorum neyi çözeceğimi, hangi aralık var. İntegralde genelde şekil çiziyorum çözerken.

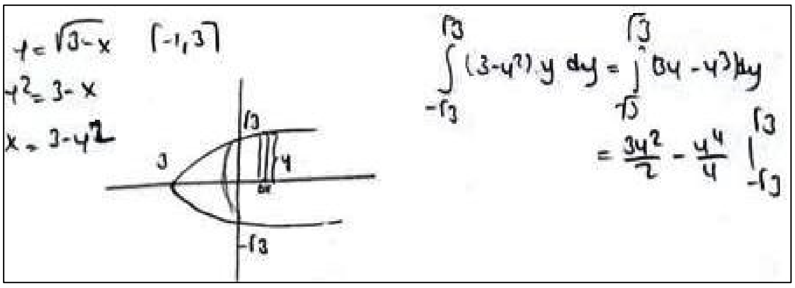
Görüldüğü gibi Gülay, kullanacağı görsel desteği bile ancak daha önceden bildiği bir grafik söz konusu olduğunda kullanmayı tercih etmektedir. Bu yüzden öğrencinin grafik çizerek verilen eğriyi görmek istemesi aslında çok da güçlü bir ihtiyaç değildir. Çünkü şeklini çizemeyeceğini ya da çizerse yanlış çizebileceğini düşündüğü için çizmekten vazgeçmiş ve bu soru için daha önceden bildiği formülü kullanmayı tercih etmiştir.

> A: Benim merak ettiğim grafik çizmek istedin ama çizemedin. Ama yine de yaptın. Diğer sorulardan farkı ne o zaman bunun?

G: Bu biraz da formüle edilmiş gibi. Hani karesini alıyorduk diye hatırladım. Onların çıkarılış aşamasında uzun uzun anlatılırken hani $f^2(x)$ dx ya da işte x^2dx ya da y^2dx dönen cismin hacimlerinde dönel cismin hacmi falan vardı. Onların daha formülize edilmiş halleri vardı. O yüzden hani şekil yapmadan bulabilirim dedim. Bu da hani çok karmaşık bir soru da değil. Basit bir eğri… Hani daha zor bir eğri olsaydı daha farklı şekilde düşünebilirdim.
A: Daha farklı derken nasıl?
G: Yani çizebilseydim yine şekil çizerdim. Burada tıkandığım için çizemedim çizebileceğim bir şekil olsaydı yine çizerdim.

Elif: Elif, bir eğrinin, bir eksen etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacminin nasıl hesaplandığını hatırlamamaktadır. Bu yüzden hesaplamayı içeren formülü ona hatırlatacak bir grafik çizmek istemiştir

E: Bunu hiç hatırlamıyorum. Ama şeklini çizersek belki bir şeyler çağrıştırabilir. Verilen fonksiyon üzerinde işlem yaptı *($y^2 = 3 - x$ ve bu denkleme ilişkin grafik çizmek istedi ancak grafiğin x-eksenin kestiği noktada hata yaptı)*



Şekil 4.4. Elif'in üçüncü soru için çözümü

Ancak Elif'in çizdiği grafik (Şekil 4.4) istediği formülü hatırlamasına yardımcı olmamıştır. Çünkü Elif, bu kavramı öğrenirken kullanılan grafiksel anlatıma çok da önem vermemektedir ve dolayısıyla çizdiği bu grafiği, aradığı formülü elde etmek için kullanamamıştır. Onun yerine formülü hatırlamaya çalışmış fakat doğru formülü hatırlayamamıştır.

A: Ne düşündün?
E: Bunun formülü vardı. Yani formülü yazıyorsun çıkıyor. $\int_{-1}^{3}(\sqrt{3-x})xdx$ miydi öyle bir şeydi sanırsam. Yoksa x^2 miydi? x'di galiba. Bunların bir formülü vardı sürekli biz ondan yapıyorduk. Ama bu diye hatırlıyorum. Tabi, ne kadar doğru bilmiyorum. Şöyle döndürüyorduk. Şuradan bir x alıyorduk. Şuna y diyorduk. (*Çizdiği grafik üzerinde bir dikdörtgen çizdi, x-eksenini kestiği noktaya x dedi, dikdörtgenin uzun kenarına y dedi*) Gerçi buradaki y değeri o da olabilir.

A: Peki soruyu görünce ne düşündün bana onu anlatır mısın?
E: Direkt bunun bir formülünü hatırlamam gerektiğini düşündüm. Bu şekli çizmenin bile burada çok büyük bir faydası olmuyordu. Aralıkları bildikten sonra zaten, yani formülden yazdıktan sonra direkt çıkıyordu. Ama burada x'i döndürünce x'li yapıyorduk galiba, y'de döndürünce y'li yazıyorduk fonksiyonda. Çok iyi hatırlamıyorum.

Hale: Hale, bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi ile oluşan cismin hacminin nasıl bulunduğu hatırlamamaktadır. Silindir veya kabuk yöntemini kullanması gerektiğini bilmekte, silindir yönteminin çıkarılışına ilişkin bazı bilgileri hatırlamakta ancak bunları kullanarak ilgili formülü oluşturamamaktadır. Bu yüzden bu soruyu çözmeden bırakmıştır.

Şeyda: Şeyda da Hale gibi bu sorunun formülden yapılabileceğini, bunun için iki yöntem olduğunu (silindir ve kabuk yöntemi) ama onları da hatırlamadığı için soruyu çözemeyeceğini söylemiştir. Yöntemi hatırlatacak bir şey olup olmadığı sorulduğunda, hatırlamadığı formülün çıkarılışına ilişkin bir grafik çizmek istemiş ancak yine de çözüme ulaşamamıştır.

Ş: Direkt formülden biliyorum bunları da… Ama gerçekten hatırlamıyorum formülleri şu anda. Hatta x- ekseni olduğu zaman dx ya da dy mi ikisinden birini alıyorduk. Ama hatırlamıyorum, bunda da, hatta iki yöntem vardı, birisi kabuk yöntemiydi birisi silindir yöntemiydi.
A: Peki şey var. Yöntemi sana hatırlatacak bir şey yok muydu?
Ş: Vardı… Şöyle mesela çiziyorduk bir eğriyi. Farz edelim böyle (*Bir grafik çiziyor*). Bir silindir yapıyorduk. Mesela bunu x-ekseni etrafında döndürürsek, yine böyle bir şey oluşuyordu. Neye delta x diyorduk *(Sesli düşünüyor).* Nasıl… Çıkış yolunu bu olduğunu hatırlıyorum, silindir yönteminde. Bir değer mi veriyorduk? Hatırlamıyorum…

Görüldüğü gibi Şeyda, kullandığı formülün çıkarılışına ilişkin grafiksel bir strateji olduğunun farkındandır ancak bu stratejiyi etkili şekilde kullanacak bilgiye sahip değildir ya da bu stratejinin onu çözüme ulaştıracağı konusunda emin değildir.

Zehra: Zehra soruyu, bir eksen etrafında döndürülen bir eğrinin oluşturduğu hacmi veren formülü kullanarak çözmüştür. Soruyu çözmeye başlamadan önce, verilen fonksiyonun grafiğini çizmiştir ancak bu grafik onun çözüm sürecine hiçbir katkı sağlamamış ve bu durumu şu şekilde ifade etmiştir.

A: Peki çizdiğin grafik, ki başlangıçta zorlandın, o grafik olmasaydı çözemez miydin yapamaz mıydın bu soruyu?

Z: Yapardım. Fark etmiyor yine aynı şey geliyor ama ekstradan yaptığımız hiçbir aralık yok yani. Bir yerleri toplamamız çıkartmamız eklememiz gerekmiyor. Benim daha kolayıma geliyor.

Funda: Funda da soruyu çözmeye, verilen fonksiyonun grafiğini çizerek başlamıştır. Grafiği sadece sınırları belirlemek için kullanmış ve bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucunda oluşan cismin hacmini veren formülü kullanmıştır. Ancak formülü yanlış hatırladığı için doğru sonuca ulaşamamıştır.

<u>Ön klinik görüşme üçüncü soru için genel değerlendirme</u>

Ön klinik görüşmelerde kullanılan üçüncü soru için öğrencilerden dördü (Zehra, Funda, Şeyda, Elif) çözüme başlamadan önce görsel destek (verilen eğrinin grafiği) veya görsel muhakeme kullanmışlardır. Öğrencilerden Funda ve Zehra bu grafiği, integralin sınırlarını belirlemek için kullanırken Elif ve Şeyda, daha önceden bildikleri ve hacim hesaplamada kullandıkları silindir yöntemi ile ilgili formülü hatırlamak için çizmişlerdir. Gülay soruyu çözmek için doğrudan formül kullanmış, Hale ise başlangıçta ilgili formülü hatırlamaya çalışmış ancak hatırlayamadığı için soruyu çözmeden bırakmıştır.

Her ne kadar öğrenciler soruyu çözerken görsel destek almışlarsa da çoğunlukla daha önceden öğrendikleri formülü hatırlamaya çalışmışlar ve bu formülü $(\int_a^b y^2 dx)$ kullanarak soruyu çözmüşlerdir. Çizdikleri grafikleri, verilen formülü hatırlamak için kullanmak isteseler de bunu başaramamışlardır.

Öğrenciler, integral ile ilgili uygulamalarda çoğu zaman o uygulamaya ilişkin formül ezberleme yoluna gitmekte, elde edilen formüle ilişkin çoğu zaman herhangi bir zihinsel yapılandırma kullanmamakta veya formülün elde edilişinde kullanılan grafiksel yönteme çok değer vermemektedirler. Kimi zaman da öğrencilerin tercih ettiği çözümler analitik özellikler taşısa da görsel destek almaya ihtiyaç duymaktadırlar.

Çizelge 4.3. Üçüncü soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel Destek	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı	Görsel İfadeye bağlı bilişsel karmaşa
Gülay	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini $(\int_a^b y^2dx)$ formülünü kullanarak bulma	-	-	-	-
Elif	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini $(\int_a^b y^2dx)$ formülünü kullanarak bulma	Grafiği verilen eğri üzerinde hacim hesaplamaya ilişkin formülü bulmaya çalışma	Verilen eğrinin grafiğini çizme	-	-
Hale	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini veren formülünü hatırlamaya çalışma	-	-	-	-
Şeyda	-	Grafiği verilen eğri üzerinde hacim hesaplamaya ilişkin formülü bulmaya çalışma	-	-	-
Zehra	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini $(\int_a^b y^2dx)$ formülünü kullanarak bulma	-	Verilen eğrinin grafiğini çizme	Grafik üzerindeki bölgeleri kullanarak integral sınırlarını belirleme	-

Çizelge 4.3. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel Destek	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı	Görsel İfadeye bağlı bilişsel karmaşa
Funda	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini $(\int_a^b y^2 dx)$ formülünü kullanarak bulma	Çizdiği grafiği döndürdüğü zaman oluşan şekli düşünme	Verilen eğrinin grafiğini çizme	Aralıklara göre alanı belirleme	Grafiğin yanlış çizmesinden kaynaklı aralık belirleyememe

4.1.4. Ön klinik görüşmenin dördüncü sorusu

f sürekli ve artan bir fonksiyon olmak üzere f(0)=1, f(2)=9 ve $\int_0^2 f(x)dx = 8$ veriliyor. $\int_1^9 f^{-1}(x)dx$'i hesaplayınız.

Dördüncü soru integralin geometrik anlamı ve fonksiyonların temel grafiksel özellikleri kullanılarak çözülebilen bir sorudur. Klinik görüşmelerdeki önceki sorulardan farklı olarak bu soru, sadece görsel muhakeme gerektirmektedir. Bu sorunun amacı sadece görsel muhakeme gerektiren sorularda öğrencilerin görsel tercihlerinin hangi yönde olacağını belirlemektir. Görsel muhakeme öğrencilerin öncelikli tercihleri arasında yer almadığından, öğrenciler bu soruda yoğun olarak analitik muhakeme kullanmaya çalışmışlardır.

Gülay: Gülay soruyu çözmek için sadece analitik yöntemler denemiştir. Öncelikle soruda verilen sayıların ilişkili olduğunu düşünmüş ve bu sayıları kullanarak bir çözüm yapmayı denemiştir. Fonksiyonun tersi ile integrali arasında ilişki kurmaya ve verilen değerlere uygun bir fonksiyon yazmaya çalışmış ancak sonuca ulaşamamıştır. Özellikle "f sürekli ve artan bir fonksiyon" ifadesini cebirsel olarak nasıl kullanacağını bulamamış ve sorunun çözümüne bu özelliği kullanamadığı için ulaşamadığını düşünmüştür. Ayrıca sorunun başka bir çözüm yöntemi olamayacağını ve bu şekilde çözülmesi gerektiğini belirtmektedir.

Elif: Elif de Gülay gibi çözüm sürecinde analitik yöntemler denemiştir. Çözüm denemeleri yaklaşık olarak Gülay ile aynı süreçleri kapsamaktadır (Soruda verilen değerleri sağlayan bir fonksiyon yazma, fonksiyonun tersi ile kendisi arasında ilişki kurmaya çalışma vb). Gülay'dan farklı olarak Elif, soruda verilenleri bir grafik üzerinde görmeye çalışmış ama verilenler arasında ilişki kuramadığı için sorunun çözümüne ulaşamamıştır.

Hale: Hale de Elif ve Gülay tarafından kullanılan analitik yöntemleri denemiş ancak başarılı olamamıştır. Görsel bir çözüm de önerememiştir.

> H: Yani sonuçta g'(x) ise bu elde edeceğim sonuç g(x)'dir. g(x)'in 2 ve 0 noktalarındaki değerleri 8'miş. e^x fonksiyonu olabilir bu. Sonuçta türevi kendisine eşit bir fonksiyon ya…
>
> A: Peki $e^0=1$ ama $e^2=9$'mu?
>
> H: Himm… Tabi o da var. Doğru! Ama onun gibi bir fonksiyon herhalde; türevi kendisini veriyor olsa gerek ki… Şey çünkü… Kafamda kurgulayamadım soruyu *(İşlem yaptı ve 8 yanıtına ulaştı).*

Şeyda: Şeyda da bu sorunun çözümü için sadece analitik çözüm yöntemleri uygulamış ancak sonuca ulaşamamıştır.

Zehra: Zehra da başlangıçta diğer katılımcılar gibi analitik çözüm yöntemlerini kullanmış ancak daha sonra sürekli artan bir grafik çizip eğri altında kalan alanı kullanmayı düşünmüştür. Fakat fonksiyonun tersi ile kendisi arasında ilişki kuramadığı için doğru sonuca ulaşamamıştır.

Funda: Funda da diğer tüm katılımcıların kullandığı analitik yöntemleri kullanarak soruyu çözmeyi denemiş ancak sonuca ulaşamamıştır.

<u>Ön klinik görüşme dördüncü soru için genel değerlendirme</u>

Bu soruda katılımcıların hepsi fonksiyonun kendisi ile tersinin integrali arasında bir bağlantı bulmaya çalışmışlar; dolayısıyla integral türev ilişkisini kullanmışlardır. Dolayısıyla bu süreçte çoğunlukla analitik yöntemler uygulanmıştır.

Öğrencilerden bazıları analitik muhakeme kullanarak çözüme ulaşamayınca görsel muhakemeye yönelmişlerdir veya görsel bir destek kullanmaya çalışmışlardır. Ancak kullandıkları bu çözüm yönteminde, analitik çözüm yöntemlerini kullandıkları durumlarda olduğu kadar ısrarcı davranmamaları, sonuca ulaşmalarını engellemiştir. Buna rağmen katılımcılar arasında görsel muhakeme anlamında başarılı girişimlerde bulunanların (Zehra, Elif) olduğu söylenebilir.

Çizelge 4.4. Dördüncü soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel Destek	İntegral-türev ilişkisi
Gülay	Verilenler üzerinden cebirsel işlemler yapma	-	-	-
Elif	Verilen özellikleri sağlayan bir fonksiyon bulmaya çalışma, verilenler üzerinden cebirsel işlemler yapma	Bir fonksiyon ve tersinin grafiğini çizme ve integral ile ilişki kurmaya çalışma	-	-
Hale	Verilen özellikleri sağlayan bir fonksiyon bulmaya çalışma, verilenler üzerinden cebirsel işlemler yapma	-	-	Fonksiyon ve integrali arasında ilişki kurmaya çalışma
Şeyda	Verilenler üzerinden cebirsel işlemler yapma	-	-	-
Zehra	Verilenler üzerinden cebirsel işlemler yapma	Bir fonksiyon grafiğini çizme ve eğri altında kalan alanı kullanarak integrale ulaşmaya çalışma	-	-
Funda	Verilen özellikleri sağlayan bir fonksiyon bulmaya çalışma, verilenler üzerinden cebirsel işlemler yapma	-	-	-

Görüldüğü gibi soru, görsel muhakeme gerektiriyor olmasına rağmen öğrencilerin tercihlerinin görsel yönde olmaması, bu muhakeme türünü kullanmalarını engellemiştir.

4.1.5. Ön klinik görüşmenin beşinci sorusu

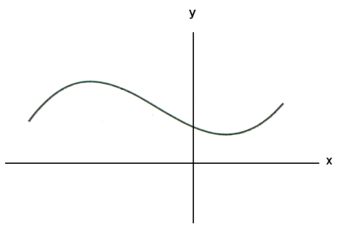
$\int_{-2}^{2} \sin^3(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Beşinci soru da öğrencilerin hem analitik hem de görsel muhakeme kullanarak çözebilecekleri bir sorudur. Ancak öğrencilerin hepsi bu soru için analitik yöntem kullanmışlardır $\left(\int_{-2}^{2} \sin^3(x)dx = \int_{-2}^{2} \sin^2 x \sin x dx \begin{Bmatrix} \sin x = u \\ \cos x dx = du \end{Bmatrix} \right)$.

Bu soru için öğrenciler, kısmi integralleme yöntemlerini ya da indirgeme formülünü kullanmayı düşünmüşlerdir. Zihinlerinde, bu tarz sorular için oluşturdukları cebirsel yapılar vardır; öyle ki bu tür sorularla karşılaştıklarında akıllarına ilk bu yöntemler gelmekte ve çözüm süreçlerinde bu yöntemleri kullanmaktadırlar. Oysa bu soru, sinüs fonksiyonunun, tek fonksiyon olduğu ve belirli integral sınırlarının orijine göre simetrik olduğu durumlarda yanıtın sıfır olduğu grafikten rahatlıkla görülebilmekte veya tek-çift fonksiyonların grafikleri konusunda deneyimli bir öğrenci, grafiğe gerek kalmadan sonuca ulaşabilmektedir. Ancak öğrencilerin hepsi kısmi integrasyon yöntemini kullanmayı tercih etmişlerdir.

Öğrencilerin çözüm yöntemlerinin hepsinin aynı olması nedeniyle bu soruya verilen yanıtları özetleyen bir tablo oluşturulmamıştır.

4.1.6. Ön klinik görüşmenin altıncı sorusu



Yandaki şekil bir f(x) fonksiyonunun belirsiz integralinin grafiğini göstermektedir. f(x) fonksiyonunun başka bir belirsiz integralinin grafiğini çiziniz.

Ön klinik görüşmelerde kullanılan altıncı soru da katılımcıların integral konusunda daha önce karşılaşmadığı bir soru tarzıdır. Bu soru belirsiz integralin grafiksel anlamına ilişkin bir sorudur. Soruda herhangi bir fonksiyonun belirsiz integralinin grafiği verilmekte ve öğrenciden başka bir belirsiz integralinin grafiğini çizmesi istenmektedir. Bu sorunun amacı, cebirsel olarak çok iyi bilinen bazı kavramların, grafiksel anlamları konusunda öğrencilerin nasıl düşündüğünü belirlemektir.

Gülay: Gülay soruyu okuduğunda, integralin tanımına göre soruyu çözmek istemiştir. Soruda integralinin grafiği verilen fonksiyonun başka bir belirsiz integrali soruluyor olmasına rağmen integrali önce eğri altında kalan alan olarak yorumlamıştır. Ardından aranan grafiğin, sınırları farklı başka bir grafik olabileceğini, dolayısıyla sınırları değiştirmenin yeterli olacağını düşünmüştür.

Daha sonra başka bir grafik olamayacağını, integralin grafiğinin tek olması gerektiğini ifade etmiştir. Gülay ‘c’ sabitinin varlığını araştırmacının soruyu tekrar okumasını istemesi ve soruyu açıklaması üzerine fark etmiş ancak bu sabitin grafiği nasıl değiştirebileceğini kendi belirlediği iki fonksiyon üzerinde yaptığı denemeler sonucunda bulmuştur.

> A: Soruyu tekrar okur musun?
> G: Herhangi bir şey olabilir mi acaba? İntegralinin grafiği buysa… Aynıdır ya… Bu fonksiyonun başka bir integralinin grafiği budur bence. Ben mi anlamadım soruyu acaba…
> A: Peki şöyle sorayım o zaman. Bir fonksiyon düşündüğün zaman onun integralini alırsan…
> G: Sabit giriyor işin içine. Sabit farklıyla farklı bir fonksiyon olabilir. Sabit farklıysa grafiği nasıl farklı çıkar onu bilmiyorum. Yani burada atıyorum, x^2+2x’in sabiti 1 ise diğerinin grafiği x^2+2x’dir. En basit dereceden… Sabit değişirse. *(Kağıt üzerine iki tane fonksiyon yazdı x^2+2x ve x^2+2x+1)* Fonksiyon bu olsun gibisinden bir şey düşündüm. Hani bunun sabiti 1 olsun. Bunun sabiti 0 olsun. Bu alınmış integral olsun. Bu $(x+1)^2$’dir. Bu da x(x+2). Bunun kökü 1’dir. Bunun kökü de -1 ve 0’dır. Hani ben bunları yine çizeceğim, arasından ne gibi bir fark var diye… *(Eğrilerin grafiklerini çizmeye başladı)*

Elif: Elif, başlangıçta zorlansa da sorunun ‘c’ sabitine bağlı olarak çözülebileceğini anlamış ve buna göre grafiği çizmiştir.

Hale: Hale ise öncelikle farkın başka bir değişkene göre alınan integralden kaynaklanabileceğini düşünmüştür. Ancak sonrasında ‘c’ sabitinin bu değişime neden olacağını anlamışsa da bu değişimin nasıl olabileceğini çeşitli fonksiyonların grafikleri üzerindeki denemelerinde bulmuştur.

Şeyda: Şeyda da bir fonksiyonun yalnızca bir tane integrali olabileceğini ya da integrali, eğri altında kalan alan olarak düşünse de ‘c’ sabitinin başka bir grafik oluşturabileceğini fark etmiştir.

Zehra: Zehra da başlangıçta belirli integral ve alan arasındaki ilişkiyi belirsiz integralin tanımı olarak kullanmak istemiş fakat araştırmacının sorularıyla aradaki farkı anlayıp farklı bir grafiğini ‘c’ sabitinden kaynaklanabileceğini anlamıştır.

Funda: Funda ise sınır belirtilmediği için eğrinin herhangi bir parçasını alabileceğini düşünmüş ve sorunun çözümünün bu grafik olduğunu ifade etmiştir.

Ön klinik görüşme altıncı soru için genel değerlendirme

Katılımcılardan beşi, soru ile ilk karşılaştıklarında bir fonksiyonun belirsiz integralinin yalnızca bir tane olduğu, dolayısıyla bir tane çizilebileceğini düşünmüşlerdir. Bu yüzden soruda verilen fonksiyonun bir parçasını almanın ya da sınırları değiştirmenin (sınırlar olmadığı halde) doğru yanıt için yeterli olabileceğini söylemişlerdir. Bunun yanında farklı bir değişkene göre integral almanın da doğru yanıt için yeterli olacağını düşünen katılımcılılar da mevcuttur (Hale).

Öğrencileri çelişkiye düşüren bir diğer nokta da integralin geometrik anlamına ilişkin bilgileridir. Daha önce de belirtildiği gibi integralin anlamına ilişkin öğrenciler tarafından benimsenen faklı görüş açıları mevcuttur ve bunlar arasında öğrenciler tarafından en çok benimsenenlerden biri integral ile alan kavramı arasındaki ilişkidir (Oberg, 2000; Ubuz, 1996). Öğrenciler belirli integralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal yapıyı -belirsiz integral için herhangi bir grafiksel anlam oluşmadığı için- belirsiz integral için de kullanmaktadırlar.

Oysa belirsiz integral ile ilgili olarak katılımcıların ilk öğrendikleri şey belirsiz integralin, türevi verilen bir fonksiyon olduğu ve dolayısıyla verilen bir fonksiyonu türev olarak kabul eden fonksiyonların birbirinden bir ‘c’ sabiti kadar fark edecekleridir. Fakat katılımcılar bu değerin grafiksel anlamını daha önce hiç düşünmedikleri için aradaki bağlantıyı kurmakta zorlanmaktadırlar. Araştırmacının sorularıyla, bu ön klinik görüşme sorusu üzerinde bir süre daha düşünen katılımcılar “c” sabitinin fonksiyonun belirsiz integralini değiştireceğini fark etmişlerdir. Ancak bu durumun fonksiyonun grafiğine nasıl yansıyacağını belirlemeleri, farklı fonksiyonların grafikleri üzerinde yaptıkları denemeler sonucunda gerçekleşmiştir.

Bu sorunun çözüm sürecinde de öğrenciler görsel muhakeme kullanmışlar veya görsel destek almışlardır. Ancak görsel muhakeme için belirsiz integral konusunda bilgilerinin eksik olması, öğrencilerin bu muhakeme türünü daha az kullanmalarına neden olmuştur.

Öğrencilerin bu soruyu çözerken izledikleri bir diğer yol da görsel ve analitik stratejiler arasında bağlantı kurmak olmuştur. Bu durum Zaskis, Dubinsky ve

Dautermann (1996)'ın çalışmalarında ortaya koyduğu görsel-analitik modelle uyum göstermektedir. Bu modelde düşünme, görselleştirme eylemiyle başlar; V_1. Bu aşama, bir çizime veya her hangi bir resme bakmayı içerir ve zihinsel bir süreç veya nesne oluşturulur; ya da zihinsel bir süreci veya nesneyi ifade eden bir resim ya da dışsal bir araç oluşturma da bu aşamada görselleştirme olarak ifade edilir. Sonraki adım analiz aşamasıdır; A_1. V_1 basamağında oluşturulan nesne ve süreçlerin -Piaget'nin yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) kavramı anlamında- bazı koordinasyonlarını içerir. Bu analiz aşaması yeni yapıların oluşmasına neden olur. İkinci alt aşama olan V_2'de öğrenci V_1'de oluşturduğu şekle tekrar döner, fakat A_1 basamağı sonucunda bir takım değişiklikler olmuştur. V_2, oluşturulan resim için A_1'in bir uygulaması veya eski resmin yerini alacak yeni bir resim oluşturmaya yardımcıdır. Her iki durumda da matematiksel anlama zenginleşmiştir. Bu modelde olduğu gibi öğrenciler bu soruyu çözerken bazen matematiksel bir yapı ile görsel bir ifade arasında bağlantı kurmuşlar, bazen de görsel bir ifadenin matematiksel sonuçlarına doğru hareket etmişlerdir.

Çizelge 4.5. Altıncı soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarının özeti

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel ve Analitik Muhakemeler Arası Bağlantı	İntegral Türev ilişkisi	İntegralin Geometrik Anlamına İlişkin Kavramsal Eksiklik
Gülay	-	Daha önce bildiği grafiklerden yararlanma	Cebirsel yaptığı işlemlerdeki değişimi, grafik üzerinde gözlemleme	-	Farklı bir belirsiz integralin, sınırlardan kaynaklı olabileceğini veya aynı grafik olacağını düşünme, integrali sadece eğri altında kalan alan olarak yapılandırma, belirli integral ile belirsiz integralin farklı şeyler olduğunu bilmeme
Elif	-	-	"c" sabitine ilişkin bilgisini, grafiksel bilgisiyle birleştirerek çözüme ulaşma	-	-

Çizelge 4.5. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel ve Analitik Muhakemeler Arası Bağlantı	İntegral Türev ilişkisi	İntegralin Geometrik Anlamına İlişkin Kavramsal Eksiklik
Hale	-	Farklı değişkenlere göre integral alınmış olabileceğini düşünme	Cebirsel olarak yaptığı işlemlerdeki değişimi, grafik üzerinde gözlemleyerek sonuca ulaşma	-	-
Şeyda	"c" sabitinden kaynaklanan bir fark olacağını anlama ve bu durumu cebirsel olarak ifade etme	-	"c" sabitine ilişkin bilgisini, grafiksel bilgisiyle birleştirerek çözüme ulaşma	-	Farklı bir belirsiz integralin grafiğinin aynı olacağını düşünme, integrali sadece eğri altında kalan alan olarak yapılandırma, belirli integral ile belirsiz integralin farklı şeyler olduğunu bilmeme
Zehra	-	-	"c" sabitine ilişkin bilgisini, grafiksel bilgisiyle birleştirerek çözüme ulaşma	Fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak anlamaya çalışma	İntegrali sadece eğri altında kalan alan olarak yapılandırma
Funda	-	-	-	-	Farklı bir belirsiz integralin, sınırlardan kaynaklı olabileceğini dolaysıyla grafiğin bir parçasını alabileceğini düşünme

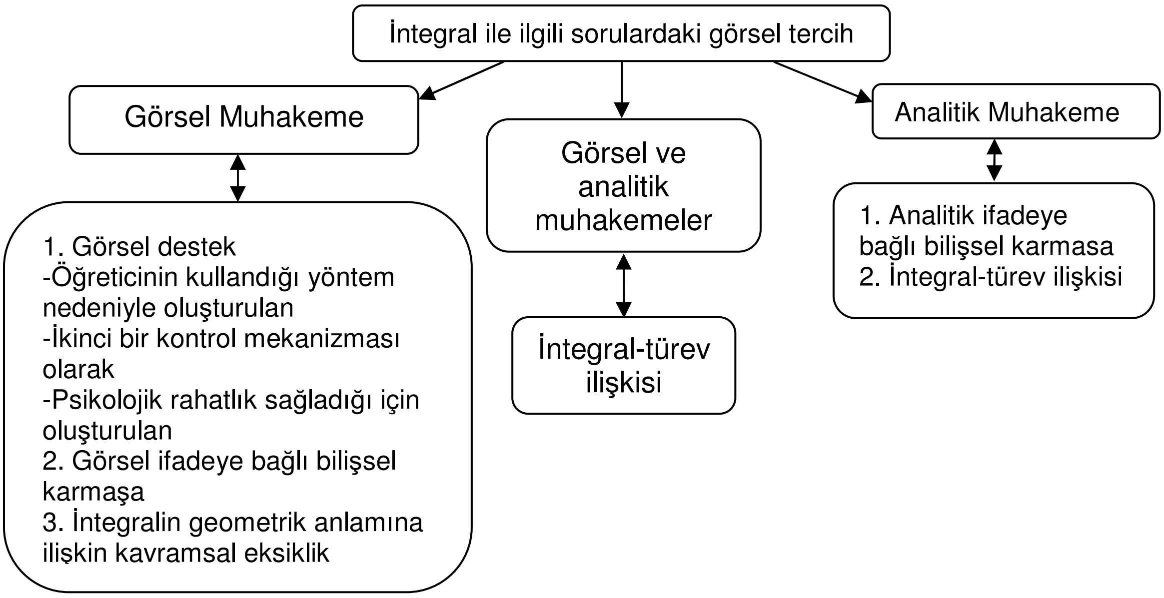
4.1.7. Ön klinik görüşmeler için genel değerlendirme

Öğrenciler ön klinik görüşmelerde en çok analitik muhakeme kullanmaktadır. MSA'na göre tercihleri görsel yönde olmayan katılımcılar için bu beklenen bir durumdur. Öğrenciler, soruları çözerken çoğunlukla daha önceden kullandıkları yöntemleri kullanma eğilimi göstermişlerdir. Bu bazı durumlarda ders veren öğreticinin kullandığı yöntemken bazı durumlarda ezberlenen bir formül olmuştur.

Analitik yöntemler dışında öğrenciler, görsel yöntemler ve bazı durumlarda düşünmelerini kolaylaştıran görsel destek de kullanmışlardır. Ancak öğrencilerin -görsel yönde olmayan tercihlerine rağmen- zaman zaman görsel muhakemeye de başvurmaları ön klinik görüşmelerdeki soru tarzları düşünüldüğünde, önceden tahmin edilebilir bir durum olarak karşımıza çıkmaktadır.

Öğrencilerin integrale ilişkin en çok benimsedikleri anlamlardan biri de integral-alan arasındaki ilişki olduğu düşünülürse, öğrencilerin bu konuda kavramsal eksikliğinin bulunması oldukça şaşırtıcıdır. Birinci soruda öğrencilerin alan hesaplamalarında negatif pozitif alan konusunda yaşadıkları sıkıntı bu sorunun örneklerinden biridir. Bunun yanında altıncı soruda öğrencilerin belirsiz integralin grafiğinin anlamı hakkında fikir yürütememeleri veya belirli integralin grafiksel anlamı ile karıştırmaları bu alanda yeterince deneyimleri olmadığının ve kavramsal eksikliklerinin bulunduğunu göstermektedir. Bu durum, daha önce Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997)'in çalışmalarında belirtilen kontrol edilemeyen görsel imajların neden olduğu zorlukların nedenleri arasında gösterilebilir. Öğrenciler çoğunlukla analitik yöntemler kullanmaya eğilimli olduklarından, grafiksel yöntemleri kullandıkları durumlarda, analitik bilgileri ile birleştirme eğilimi göstermişlerdir; bu da öğrencilerin soruları çözerken görsel ve analitik muhakemeler arasında bağlantı kurmalarını sağlamıştır. Bu süreç, -çok sık tekrarlanmamakla birlikte- öğrencilerin çözüm sürecine çoğunlukla yardım etmiştir. Bu sonuç Zaskis, Dubinsky ve Deutermann (1996)'ın çalışmalarında elde ettikleri, görsel ve analitik süreçleri etkileşimli olarak kullanan öğrencilerin daha başarılı olduğu sonucuyla tutarlılık göstermektedir.

Öğrencilerin görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa yaşamaları daha önce alan yazındaki bazı araştırma sonuçlarından elde edilen bir bulgudur. Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997) çalışmalarında kontrol edilemeyen görsel imajların bazen matematiksel kavramlar için anlam oluşturma sürecini engelleyebileceğini, bu konuda öğrencilerin karşılaşabileceği zorluklara dikkat edilmesi gerektiğini belirtmektedirler. Ancak ön klinik görüşme sorularında da görüldüğü gibi bazı durumlarda, görsel ifadelerin kullanımı sırasında oluşan bilişsel karmaşa, temelde analitik ifadeye bağlı olarak meydana gelmektedir. İkinci soruda olduğu gibi öğrencinin yaptığı hata başlangıçta oluşturduğu grafiğe bağlı gibi görünse de aslında grafiği oluşturma sürecinde kullandığı analitik ifadeden kaynaklanmaktadır ve yaşadığı bilişsel karmaşaya da yine bu analitik süreç neden olmuştur. Ön görüşmelerden elde edilen veriler sonucunda oluşturulan model Şekil 4.5'te gösterilmiştir.



Şekil 4.5. Ön klinik görüşmelerde öğrenci tercihlerinin modeli

4.2. Öğretim Deneyinin Analizi

Ön klinik görüşmelerin ardından, katılımcıların görsel tercihlerinde değişiklik meydana getirmek amacıyla dört hafta süren bir öğretim deneyi düzenlenmiştir. Ancak katılımcılardan birinin ailevi bir problemi nedeniyle çalışma dördüncü haftada bir hafta ertelenmiş ve toplamda beş haftada tamamlanmıştır. MSA'dan alınan puanlara ve klinik görüşme sonuçlarına göre seçilen altı öğrenciyle, dört hafta süreyle, Ek 1'de verilen çalışma kağıtlarıyla (ÇK) (ÇK-1, ÇK-2, ÇK-3, ÇK-4), bir öğretim deneyi gerçekleştirilmiştir. Öğretim deneyinde kullanılan soruların seçiminde bazı soruların hem görsel ve hem de analitik stratejiler kullanılarak çözülebilir olmasına dikkat edilmiştir (Çizelge 4.6). Bu sorular;

Çizelge 4.6. Görsel ve analitik stratejiler kullanılarak çözülebilen sorular.

ÇK-1	ÇK-2	ÇK-3	ÇK-4
2. Soru 3.Soru (a) 5. Soru	1. Soru 2. Soru 3. Soru	2. Soru 4. Soru	1. Soru 2. Soru 3. Soru 4. Soru

Bazı sorularda ise görsel muhakemenin ağırlıklı olarak veya tek başına kullanılmasına dikkat edilmiştir (Çizelge 4.7).

Çizelge 4.7. Görsel muhakemenin ağırlıklı olarak veya tek başına kullanıldığı sorular.

ÇK-1	ÇK-2	ÇK-3	ÇK-4
3. Soru (b) 4. Soru 6. Soru	4. Soru	1. Soru 3. Soru	-

Dört haftalık öğretim deneyi boyunca incelenen konular ve analiz aşamasının nasıl gerçekleşeceğini gösteren çizelge ise aşağıda verilmiştir (Çizelge 4.8).

Çizelge 4.8. Öğretim deneyi boyunca incelenen konular ve analiz aşaması

DERS	ÖĞRETİM DENEYİ KONULARI	ANALİZ AŞAMASI
Birinci Hafta	• Eğri altında kalan alan • İntegral değeri ile eğri altında kalan alan değeri arasındaki ilişki • Fonksiyonun tersinin grafiği ile kendisinin grafiğinin eğri altında kalan alan yönünden incelenmesi	1. Aşama

Çizelge 4.8. devam ediyor.

DERS	ÖĞRETİM DENEYİ KONULARI	ANALİZ AŞAMASI
İkinci Hafta	• Tek (f(-x)=-f(x)) ve çift (f(-x)= f(x)) fonksiyonların, belirli integral yönünden ($\int_{-a}^{a} f(x)dx$) incelenmesi • Mutlak değer fonksiyonlarının belirli integral yönünden incelenmesi	2. Aşama
Üçüncü Hafta	• İntegralin $\frac{1}{x+1} < \int_{x}^{x+1} \frac{1}{t}dt < \frac{1}{x},\ x>0$ özelliği için geometrik bir kanıt oluşturma • Yukarıdaki özelliği kullanarak $\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x},\ x>0$ eşitsizliğini doğrulama • Belirsiz integraldeki "c" sabitinin grafiksel anlamını inceleme	3. Aşama
Dördüncü Hafta	▪ Fonksiyonun türevi, kendisi ve integrali arasındaki cebirsel ve grafiksel ilişki	4. Aşama

Daha önce de belirtildiği gibi öğretim deneyi boyunca yapılan çalışmaların görüntü ve ses kaydı alınmıştır. Bu görüntü ve ses kayıtları, araştırmacının her hafta tuttuğu notlar ile katılımcıların öğretim deneyi sırasında tuttukları notlar analiz aşamasında çalışmanın ikinci bölümüne ilişkin verilere kaynak oluşturmuştur.

Elde edilen görüntü ve ses kayıtları yazılı metne çevrilmiş ve araştırmacı notlarıyla birleştirilerek analiz edilmeye başlanmıştır. Analiz, video kayıtları için Lesh ve Lehrer (2000) tarafından önerilen yöntem kullanılarak gerçekleştirilmiştir.

Öğretim deneyinin her biri sınıf ortamında 90-110 dk arasında değişen zaman aralıklarında (1. Hafta: 100 dk, 2. Hafta:90 dk, 3. Hafta: 90 dk, 4. Hafta:110 dk) gerçekleşmiştir.

Öğrenciler, uygulamalar sırasında her bir soruyu bireysel olarak çözemeye başlamışlar, zorlandıkları durumlarda grup çalışmasına teşvik edilmişlerdir. Her bir öğrenci veya grubun, uygulamalardaki sorular için önerdikleri farklı yaklaşımlar tahtaya yazılmış, çözümler açıklanmış ve çözümler üzerinde, neden tercih edildiği ya da neden tercih edilmediği yönünde tartışılmıştır. Çözümler içinde ortaya çıkmayan bazı çözüm yöntemleri (özellikle sadece görsel veya sadece analitik çözümlerin ortaya çıkması durumunda diğer çözüm yöntemi, öğrenciler tarafından ortaya konan çözüm yöntemiyle olan ilişkisi açıklanarak), araştırmacı tarafından sunulmuştur.

4.2.1. Birinci hafta

Öğretim deneyinin birinci haftasında daha çok belirli integralin eğri altında kalan alan anlamı üzerinde durulmuştur. Bu, belirli integralin en çok benimsenen ve en çok kullanılan anlamı olmasına rağmen öğrencilerin bu konuda bazı sıkıntılar yaşadıkları, özellikle integral değeri ile integralin eğri altında kalan alan anlamını kullanmakta zorlandıkları ön klinik görüşmelerde gözlemlenmiştir. Bu nedenle öğretim deneyinin birinci haftasında bu konu üzerinde durulmuştur. Birinci haftada kullanılan Çalışma Kağıdı'nda (ÇK-1) yer alan sorular, diğer haftalarla karşılaştırıldığında öğrenciler için daha kolaydır.

1. Soru: ÇK-1'de yer alan ilk soru verilen bir eğrinin grafiğinin altında kalan alanın, integral yardımıyla bulunmasını içermektedir (Ek-1, ÇK-1, 1. Soru). Öğrencilerin hepsi bu soruyu zorlanmadan yapmışlardır. Öğrenciler için bu durum beklenen bir sonuçtur. Çünkü soruda verilen eğri denklemi kolayca yazılabilmekte ve integral alma kuralları uygulanarak kolayca integral değeri hesaplanabilmektedir. Sorunun çözüm yöntemi konusunda öğrenciler sınırlandırıldığı için bu soru öğrencilere göre ayrı ayrı incelenmemiştir.

2. Soru: ÇK-1'de yer alan ikinci soruda (Ek-1, ÇK-1, 2. Soru) bir grafik verilmekte ve bu grafikten yararlanarak bir takım integral değerlerinin sıralanması istenmektedir. Soru yönergesinde çözüm yöntemi konusunda herhangi bir yönlendirme yapılmamış ve öğrencilerden bu yönde gelen sorulara, çözüm yöntemi konusunda serbest oldukları söylenmiştir. Öğrencilerin bu soru için kullandıkları çözüm yöntemi aşağıda verilmiştir (Çizelge 4.9).

Çizelge 4.9. ÇK-1, ikinci soru, a) şıkkı için öğrenci yanıtlarının özeti.

Katılımcılar	Kullanılan Yöntem	Sıralamanın doğruluğu
Gülay	Eğri altında kalan alan	Yanlış
Elif	Eğri altında kalan alan	Yanlış
Hale	İntegral değerini hesaplama	Doğru
Şeyda	Eğri altında kalan alan	Yanlış
Zehra	Eğri altında kalan alan	Doğru
Funda	İntegral değerini hesaplama	Doğru

Katılımcıların hepsi görsel olmayan tercihlere sahip olmasına rağmen, bir kısmı (Gülay, Elif, Zehra, Şeyda) çözüm süreçlerinde görsel stratejiler kullanmışlardır. Belirli integralin öğrenciler tarafından en çok benimsenen anlamı olan eğri altında kalan alan, bu soru için de oldukça basit düzeydedir. İntegralin eğri altında kalan alan anlamını kullanan öğrencilerin hata yapmasının en büyük nedeni, bu öğrencilerin integral değeri ve alan değeri arasındaki ilişkiyi, eğri x-ekseni altında kaldığında karıştırmalarıdır.

Çözümlerini eğri altında kalan alan anlamını kullanarak yapan iki öğrenci Gülay ve Elif çözümleri devam ederken x-ekseni altında kalan kısmın pozitif veya negatifliği konusunda tartışmışlardır.

Daha önce de belirtildiği gibi öğrenciler tarafından ortaya konan tüm farklı çözüm yöntemleri tahtada incelenmiş ve neden tercih edildiği ya da neden tercih edilmediği tartışılmıştır. Funda dışındaki katılımcıların hepsi, böyle bir soru ile karşılaştıklarında eğri altında kalan alanın kullanıldığı çözüm yöntemini tercih edeceklerini belirtmişleridir.

> A: Bir şey sormak istiyorum o zaman size. Bu iki çözüm yolundan hangisini tercih edersiniz normalde çözüm yaparken?
> E, Ş, Z : Soldaki hocam (*Eğri altında kalan alan*)
> H: ... Biraz daha yanıltıcı ama…

E: … Toplama çıkarma açısından şaşırtıcı olabilir. Arkadaşımız gibi belki de ben de şaşırıyorum toplayacak mıyız çıkartacak mıyız diye…

Soruyu verilen grafikteki doğruların denklemlerini yazıp integral hesaplama yöntemlerini kullanarak integral değerlerini hesaplayan Funda, grup içerisinde, tercihleri açısından en az görselleştirme kullanan öğrenci olarak göze çarpmaktadır. Diğer öğrenciler, -bu soruda olduğu gibi- integralin eğri altında kalan alan anlamını daha rahat kullanabilecekleri sorularda görsel çözümleri kullanırken Funda, analitik çözümlerden vazgeçmemiştir.

Öğrenciler b) şıkkını, a) şıkkında buldukları sonuçları kullanarak yanıtlamışlardır.

3. Soru: ÇK-1 yer alan üçüncü soru (Ek-1, ÇK-1, 3. Soru) iki şıktan oluşmaktadır. Sorunun a) şıkkında bir parabol grafiği, b) şıkkında ise denklemi grafikteki veriler kullanılarak yazılamayacak bir eğri verilmekte ve bu grafiklerden yararlanarak bir takım integral değerlerinin sıralaması istenmektedir. Bu soru için öğrencilerin kullandığı yöntemler aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.10. ÇK-1, üçüncü soru, a) ve b) şıkkı için öğrenci yanıtlarının özeti.

Katılımcılar	Kullanılan Yöntem (a şıkkı)	Kullanılan Yöntem (b şıkkı)
Gülay	Grafiğin denklemini yazma	Grafiğin denklemini yazma
Elif	Eğri altında kalan alan	Eğri altında kalan alan
Hale	Eğri altında kalan alan	Eğri altında kalan alan
Şeyda	Grafiğin denklemini yazma	Eğri altında kalan alan
Zehra	Eğri altında kalan alan	Eğri altında kalan alan
Funda	Grafiğin denklemini yazma	Eğri altında kalan alan

Öğrencilerin hepsi bu soruyu doğru yapmıştır. Çizelge 4.10'da da görüldüğü gibi, katılımcılardan üçü bu soru için a) şıkkında verilen grafiğin denklemini yazmaya çalışmışlar ve elde ettikleri denklemi kullanarak çözüme ulaşmışlardır (Şekil 4.6).

$$3)\ (x-1).(x-3) = x^2 - 3x - x + 3 = x^2 - 4x + 3$$

$$A: \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$$

Şekil 4.6. Gülay'ın a) şıkkı için çözüm yöntemi

Verilen grafiğin denklemini yazıp sonuca ulaşmak sorunun a) şıkkı için mümkün olsa bile, sorunun b) şıkkı için mümkün değildir. Çizelge 5'te de görüldüğü gibi çözüm yöntemi olarak verilen grafiğin denklemini yazan Gülay, a) şıkkındaki çözüm yöntemini b) şıkkında da uygulamaya çalışırken (Şekil 4.7) , bu yöntemi kullanan diğer katılımcılar, çözüm yöntemlerini bu şıkta değiştirmişlerdir.

$$b)\ (x-1).(x-2)(x-3)\cdot x$$

$$x^2 - 2x - x + 2 = (x^2 - 3x + 2)(x-3)x = (x^3 - 3x^2 - 3x^2 + 9x + 2x - 6)x$$

$$\int_0^3 f(x)dx > \int_0^1 f(x)dx > \int_0^2 f(x)dx$$

Şekil 4.7. Gülay'ın b) şıkkı için çözüm yöntemi

Gülay'ın bu çözüm yönteminde ısrarcı olmasının en önemli nedeni, işaretli alan ile integral değeri arasındaki ilişkiyi karıştırıyor olmasıdır.

> A: Grafiğin geçtiği tüm noktaların doğru olarak verildiğini söyleseydim yine denklem yazmak ister miydiniz, denkleme ihtiyaç olduğunu düşünür müydünüz?
>
> G: Ben yazardım.
>
> A: Neden yazardın?
>
> G: Bilmiyorum negatif pozitif karıştırıyorum o yüzden…

Funda da Gülay gibi grafiği verilen fonksiyonun denklemini bularak çözmeye çalışan öğrencilerden biridir. Görsel tercihi açısından da görselleştirmeyi en az kullanan öğrenci olarak grup içinde dikkat çekmektedir. Bu özelliği ÇK-1, üçüncü soruda da ortaya çıkmıştır. Funda a) şıkkında, grafik üzerinden çözüm yapmak istememektedir. Bunu şu şekilde ifade etmiştir.

F: Ben fonksiyon üzerinden gittim. Yani alanların eşitliğini bilemeyiz şu an, eğri olduğu için bu şekilde düşündüm. O yüzden daha garanti olması için fonksiyonun integralini alarak yaptım.

Oysaki a) şıkkı, belirli integralin eğri altında kalan alan anlamı kullanılarak rahatlıkla çözülebilen ve bu şekilde çözüldüğünde herhangi bir sorunla karşılaşılmayacak bir sorudur. Ancak Funda analitik çözümün daha garanti olduğunu düşünmektedir. Bu durum, Funda'nın görsel düşünmenin avantajlı olduğu durumlarda bile bu düşünme şeklinden yararlanmasını engellemektedir. Bunun yanında öğrencinin, görsel stratejileri hangi durumlarda kullanabileceği, hangi durumlarda kullanamayacağına ilişkin yeterli bilgisinin olmadığı ortaya çıkmaktadır. Kısaca görselleştirmeye olan direnç Funda da diğer öğrencilere oranla daha fazladır.

Öğrencilerden bazıları ise değerlendirmesi kolay sorular için görselleştirmeyi kullanma konusunda daha az direnç göstermektedirler. Örneğin Şeyda, sorunun a) şıkkı için şu yorumda bulunmaktadır.

Ş: Yani alan da alsak integral de alsak hani bunu grafiğe bakarak çok çelişkili bir grafik olmadığı sürece tespit edebiliyoruz yani. Giderek azalıyor çünkü…

4. Soru: ÇK-1'deki dördüncü soru, (Ek-1, ÇK-1, 4. Soru) integralin eğri altında kalan anlamı kullanılarak çözülebilen bir sorudur. Soruda bir eğri denklemi ile o eğriye ait bir grafik verilmekte ve $(0,\pi)$ aralığındaki integral değeri (integral hesaplamadan) istenmektedir. Katılımcılar için doğru yanıta ilişkin seçenekler verilmekte ve bu seçenekleri mantıksal bir eleme sürecinden geçirerek doğru yanıtı bulmaları istenmektedir. Katılımcıların hepsi bu soruda görsel çözüm yöntemleri kullandıkları için yanıtları ayrı ayrı incelenmeyecektir.

Katılımcıların hepsi $1-\pi$ seçeneğini negatif olduğu için elemişlerdir, çünkü eğri altında kalan alanın tamamı pozitif bölgededir ve sonuç pozitif olmalıdır. Benzer şekilde sonucun π de olamayacağını düşünmüşlerdir, çünkü böyle bir durumda alanın dikdörtgensel olması gerektiğinde hemfikirdedirler. Öğrencilerden sadece Zehra, sonucun 1'den büyük ve $\pi/2$ olması gerektiğini söylemiş ve yanıtını şu şekilde açıklamıştır.

Z: Bence bu alan 1'den büyük bir değer olmalı, çünkü $0-\pi$ arasına bakarsak tepe noktası yaklaşık olarak 1'e denk geliyor. 1'den büyük olmalı dikdörtgensel parçaya ayırırsak 1’den büyük gibi geliyor bana. 35π/128’i bu yüzden alamam 1’den küçük bir değer olduğu için. Şurası (*Grafiğin tepe noktası*) yaklaşık olarak 1’e denk geliyor. Burada 1’den büyük bir değer gelir yani…

A: Nasıl?

Z: Dikdörtgenler çizmeye kalktığımızda Riemann toplamı gibi düşündüğümüzde bu alanda dikdörtgen çizersek bunların alanları toplamı 1’den büyük gibi…

Görüldüğü gibi Zehra’nın çözüm yöntemi onu yanlış bir sonuca götürmüştür. Zehra çözümünü görsel betimlemeye dayalı olarak yapmış ancak sonucu tamamen sezgisel olduğu için onu yanlış yönlendirmiştir. Zehra, bu tür görsel çözümler konusunda daha fazla deneyim sahibi olduğunda, görsel çözümlerin hangi durumlarda analitik çözümlerle desteklenmesi gerektiği, hangi durumlarda gerekmediği konusunda daha bilinçli davranacaktır.

5. Soru: ÇK-1’deki beşinci soru (Ek-1, ÇK-1, 5. Soru) hem görsel hem de analitik yöntem kullanılarak çözülebilecek bir sorudur. Katılımcıların tercih ettikleri çözüm yöntemleri aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.11. ÇK-1, beşinci soru için öğrenci yanıtlarının özeti.

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler
Gülay	Eğri altında kalan alan
Elif	Eğri altında kalan alan
Hale	Eğri altında kalan alan, İntegral hesaplama yöntemleri
Şeyda	Eğri altında kalan alan, İntegral hesaplama yöntemleri
Zehra	Eğri altında kalan alan
Funda	İntegral hesaplama yöntemleri

Çizelge 4.11’de de görüldüğü gibi Funda dışındaki katılımcıların tümü soruyu verilen eğrilerin grafiklerini çizip belirli integralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak çözmüşlerdir. Bunun dışında soruyu eğrilerin kesim noktasını bulduktan

sonra hem integral hesaplama yöntemleri hem de eğri altında kalan alanı kullanarak çözen öğrenciler de (Şeyda ve Hale) vardır. Bu iki öğrenci görsel ve analitik muhakemeyi birbirinin kontrol mekanizması olarak kullanmaktadırlar. Funda ise tahtaya yazılan her iki çözümden sonra ancak bilinen geometrik şekillerin olduğu sorularda grafiklerden yararlanabileceğini ifade etmiştir.

Katılımcıların çoğu grafiği kesim noktalarını belirlemek için çizdiklerini belirtmişlerdir. Kesim noktalarını cebirsel olarak belirleseler bile yine de grafik çizeceklerini söylemişlerdir. Gülay ise ancak grafiği çizebileceği durumlarda çizdiğini belirtmiştir.

6. Soru: Katılımcıların ÇK-1'de en çok zorlandıkları soru altıncı soru olmuştur (Ek 1, ÇK-1, 6. Soru). Bu soru, ön klinik görüşmelerde sorulan dördüncü soruya (Ek 2, 4. Soru) paralel olarak hazırlanmıştır. Katılımcılar ön klinik görüşmelerde de bu soru için doğru çözüme ulaşamamışlar, hatta çözüm üretememişlerdir. Bunun nedeni sorunun, integralin geometrik anlamı ve fonksiyonların temel grafiksel özellikleri kullanılarak çözülebilecek nitelikte olmasıdır. Bu özelliği ile tamamıyla görsel muhakeme gerektirmektedir. Bu yüzden öğrenciler soruyu okuduktan sonra, çözemeyeceklerini düşünmüşlerdir. Katılımcılar bu yüzden grup çalışmasına yönlendirilmiş, ikişerli gruplar halinde soruyu çözmeye başlamışlardır. Gruplar; Gülay-Hale, Şeyda-Zehra, Funda-Elif şeklinde oluşturulmuştur. Grupların çözüm süreçleri ve özellikleri şu şekildedir:

Gülay-Hale: Gülay ve Hale soruyu çözmeye grafik çizerek başlamışlardır. Ancak başlangıçta grafiği sadece problemi anlamak, problemle ilgili farklı noktaları ortaya çıkarabilmek için kullanmaya çalışmışlardır. Gülay, önce soruda verilen değerlerden fonksiyonu oluşturmaya çalışmıştır. Bu davranışıyla daha önce MSA ile belirlenen ve görsel yönde olmayan tercihini yansıtmaktadır. Ancak Gülay, soruda verilen değerleri kullanarak üçüncü dereceden bir fonksiyon yazmaya çalışmaktadır.

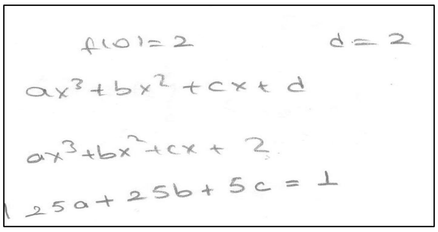
> H: Ama onu nasıl bulacağız ki fonksiyonunu.
>
> G: Değerleri var 0, 2, 5, 3, -4 bir de integralleri var. Bence bir şeyler gelir oradan.
>
> A: Şurada bir şey sorabilir miyim? Bu küp mü? Bunun üçüncü dereceden bir fonksiyon olduğunu nerden biliyorsunuz?

G: Bilmiyorum işte böyle bir şekil olduğundan karar verdim, parabol olmadığı kesin…

A: 4. dereceden olamaz mı?

H-G: Olabilir

G: Hım… O yüzden o konuda bir şey diyemiyorum…



Şekil 4.8. Soru için Gülay'ın başlangıçtaki çözümü

Alıntıda da görüldüğü gibi Gülay'ın prototipik imajları (Presmeg, 1992) oldukça kuvvetli gibi gözükmektedir. Gülay'a göre parabol olmayan bir grafik için düşünülebilecek ikinci olasılık üçüncü dereceden bir fonksiyona ait olmasıdır.

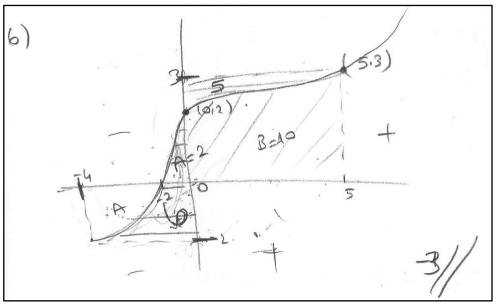
Hale ise grafik üzerindeki alanları kullanarak sorunun çözümüne ulaşılabileceğini düşünmektedir.

H: Grafik üzerinden alanlarla belki buluruz dedik. Dur ya -2'den… Şimdi bir şey diyeceğim Gülay, böyle eğri olsa bunun tersi şöyle bir şey gelmeyecek mi?

G: Tamam tersini çizdiğini düşün ama -2'den 3'e kadar, 3'e kadar ne olduğunu bilemezsin diyorum.

H: İyide biz buradan fonksiyonu da bulsak tersini nasıl yürüteceğiz. Sen bunun (*Gülay'ın yazmaya çalıştığı fonksiyonu kastediyor*) tersini bulabilecek misin?

Daha sonra her ikisi de fonksiyonun denklemini yazamayacaklarını fark etmişler ve çizdikleri grafik üzerinden sonuca ulaşmışlardır.



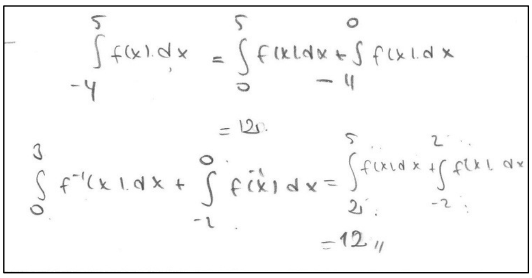
Şekil 4.9. Gülay ve Hale'nin çözümü

Funda-Elif: Funda ve Elif, analitik çözümler üzerinden hareket etmişlerdir. Elif sorunun çözümünün grafik üzerinden yapılabileceğini düşünmektedir. Böyle düşünmesinin nedeni, çalışma kağıdında yer alan diğer soruların çözümlerinin bu şekilde de yapılabilmesi olabilir çünkü diğer çalışma kağıtlarında da görüleceği gibi Elif, görsel tercihleri açısından Funda'dan sonra grup içinde görselleştirmeye karşı en çok isteksiz olan ikinci öğrencidir. Ancak Funda'nın çözüm yöntemini anlatmasından sonra kendi çözüm önerisi üzerinde ısrar etmemiş ve Funda'nın çözüm yöntemi üzerinde çalışmaya başlamışlardır.

> A: Ne düşünüyorsunuz?
> F: Yani öncekini sorduğunuzda sağlıyordu, o şekildeydi. Ben daha sonradan fark ettim ama bu f'nin ters fonksiyonu… Biz normalde mesela f(y)=x diye bir fonksiyonumuz olsa bunun tersi $f^{-1}(x)=y$ olacak yani burada aldığımız sınırlarda y'nin sınırları olacak tersinde aldığımız sınırlar. Öyle olunca da buna göre integral olarak çıkıyor.
> A: Tamam bir bakın bakalım. Sen ne düşünüyorsun, Elif?
> E: Ben direk grafiğini çizerek çıkabileceğini düşünüyorum ama…

Funda ve Elif'in buldukları çözümün tamamıyla analitik özellikler taşıması çözümlerinin doğru olduğuna ilişkin kuvvetli bir inanca sahip olmalarını sağlamıştır. Elif de Funda'nın çözüm yöntemini benimsemiş ve kendi önerisine bir daha dönmemiştir. Çözüm yaptıkları çalışma kağıdı incelendiğinde Funda ve Elif'in da grafik çizdiği gözlenmektedir ancak çözüm süreçlerinin hiçbir aşamasından bu grafikten yararlanmadıkları söylenebilir.

Funda'nın sorunun çözümüne yönelik önerisi ise şu şekildedir. $f(y)=x \Rightarrow f^{-1}(x)=y$ ifadesinde olduğu gibi fonksiyonun tersini almanın, sınırlarını da değiştireceğini ve bu değişimin, integralin sınırlarının, fonksiyon ters görüntüsü altındaki değerine eşit olacağını düşünmektedir.



Şekil 4.10. Altıncı soru için Funda ve Elif'in çözümü

F: Yine şöyle olacak, bunların toplamına eşit olacak…
E: Hepsinin toplamına mı diyorsun?
F: Bence öyle oluyor. Bunu böldüğümüzde -2, 3. Şey yapalım, bunu f(x) olarak yazalım sınırları ona göre bulalım. -2 değeri burada -4'e denk geliyor, 3 de 5'e denk geliyor.
E: Öyle denk geliyor mu?
F: Bence o zaman zaten direkt değerleri yerine koyup sonucu elde ediyoruz. Onu da -4 den… Bir dakika integral $\int_{-3}^{0} f(x)dx$… Ya zaten hepsi birbirini götürüyor bak. Bunun yanındakiler burada eksili olan şey böyle olmuyor mu? Ya zaten bizden istediği $\int_{-4}^{5} f(x)dx$'in değeri.

E: $\int f(x)dx$'in değeri 2, ama 2 için şey yok.

Tüm gruplar çözümlerini tamamladıktan sonra her üç çözüm tahtaya yazılmış ve hangi çözüm yönteminin doğru olduğu tartışmaya açılmıştır. Önce katılımcılardan Gülay ve Hale'nin çözümü üzerinde tartışılmıştır.
Gülay ve Hale çözümlerini açıkladıktan sonra Elif ve Funda grafiğin bir bölümünün başka şekillerde de çizilebileceğini düşündükleri için çözümün yanlış olabileceğini iddia etmişlerdir. Hale çözümün, grafiğin bu bölümüne bağlı olmadığını açıkladıktan sonra çözüm sürecinin mantıklı olduğunu kabul etseler bile Elif, Şeyda ve Funda çözümün bu şekilde olamayacağını çünkü grafiğin farklı şekilde çizilebileceğini düşünmektedirler.

Funda ve Elif'in çözümü, integral sınırlarının değişimi sırasında yapılan işlem nedeniyle eleştirilmiştir. İntegralde sınırların bu şekilde değiştiğine dair herhangi bir kural hatırlamadıklarını belirtmişlerdir. Bu yüzden araştırmacı, bu değişimin başka fonksiyonlarda da aynı şekilde gerçekleşip gerçekleşmeyeceğini denemeleri istemiş ve öğrencilerden gelen birkaç ters örnek sayesinde çözüm sürecinin doğru olmadığı anlaşılmıştır.

Şeyda-Zehra: Şeyda ve Zehra, Funda ve Elif gibi çözümlerini tamamıyla analitik süreç üzerinden yürütmeye çalışmışlardır. Soruda verilen değerleri kullanarak integrali uygun noktalardan parçalamaya çalışmışlardır. Bu şekilde sonuca ulaşabileceklerini düşünmüşler, ancak doğru çözüme ulaşamamışlardır. Şeyda ve

Zehra’nın çözümü Funda ve Elif ile aynı olduğu için onların çözümleri tartışılmamıştır.

<u>Katılımcıların birinci çalışma kağıdındaki görsel tercihleri ile ilgili genel değerlendirme</u>

Birinci çalışma kağıdında yer alan problemlerin çözüm sürecinde, katılımcıların verdikleri yanıtlar ve söylemlerine göre görsel muhakeme kullanma konusunda en isteksiz davranan öğrencilerin Funda ve Gülay olduğu söylenebilir.

Gülay*,* görsel çözümlere olan direncinin Funda kadar açık olarak ifade etmese de problemlerde verilen grafiklerin denklemlerini yazmaya çalışması ve çözümlerini bu denklemler üzerinden yürütmesi bu konudaki görüşlerini ortaya koymaktadır. Bu konuda yeterli deneyiminin olmaması, görsel çözümleri kullanmamasının bir diğer nedeni olarak kendisi de ifade etmiştir. Bu durumu, daha kolay olduğunu bilse bile eğri altında kalan alanı kullanarak hesapladığı integral değerlerinde, işaretli alan değerlerini karıştırdığı için grafik kullanmak istemediğini belirterek ortaya koymuştur.

Elif, bu çalışma kağıdında görselleştirmeyi kullanma konusunda aktif görünüyor olmakla birlikte, bunun sadece görsel çözümün çok açık olduğu durumlarda geçerli olduğu dikkat çekmektedir.

Hale, görselleştirmeyi ve analitik muhakemeyi birbirinin kontrol mekanizması olarak kullanan, görsel muhakemeyi, kullanımının çok açık olduğu durumlarda tercih etse bile çoğunlukla analitik muhakeme kullanan bir karakter sergilediği gözlenmektedir.

Şeyda, birinci çalışma kağıdında görsel muhakemeyi, diğer katılımcılara göre daha kontrollü kullandığı gözlenmektedir. Görsel muhakemeyi kullanabileceği ya da kullanamayacağı durumları diğer katılımcılara göre daha iyi ayırabilmesine rağmen yine de bu konuda sadece gruba göre iyi durumda olduğu söylenebilir.

Zehra, birinci çalışma kağıdında çok aktif bir öğrenci olmamakla beraber, diğer öğrencilerin yaşadığı, integralin eğri altında kalan alan anlamının kullanılması konusunda kavram eksikliğinin bulunmadığı gözlenmektedir.

Funda, birinci çalışma kağıdında yer alan tüm sorular için analitik çözümler üretmiştir. Görsel çözümün çok açık ve kullanımının daha pratik olduğu durumlarda (ikinci ve üçüncü soru) bile analitik çözümler kullanmayı tercih etmiştir. Bunun nedenini de analitik çözümlerin daha garanti sonuç vermesi olarak açıklamıştır. Görsel çözümlere olan güvensizliğini altıncı soruda, Gülay ve Hale'nin grafik çizerek yaptığı çözüm için söylediği "Bunun çözümü grafikle yapmak mıdır yani?" cümlesi ile ifade etmektedir.

4.2.2. İkinci hafta

Öğretim deneyinin ikinci haftasında öğrencilerin integral ile ilgili problemlerin çözümünde, integralin grafiksel ve cebirsel anlamını ortak olarak kullanabilecekleri bir konu olan, tek ve çift fonksiyonların özellikleri ve integral ile ilgili problemlerin çözümünde bu özelliklerin nasıl kullanılabileceği anlatılmıştır. Bunun yanında birinci haftada çalışılan, integralin eğri altında kalan alan anlamını tekrar etmek ve bunların özel tanımlı fonksiyonlarda kullanımı ile ilgili problem çözmek amacıyla ilk iki soru hazırlanmıştır.

1. Soru: ÇK-2'deki birinci soruda (Ek 1, ÇK-2, 1. Soru) özel tanımlı bir fonksiyonun belirli integrali sorulmuştur. Bu soru özel tanımlı fonksiyonun kritik noktalarına göre integrali parçalayıp, integral hesaplama yöntemleri kullanılarak yapılabileceği gibi bu özel tanımlı fonksiyonun verilen aralıkta grafiği çizilerek, grafik altında kalan alanın hesaplanmasıyla da elde edilebilir. Katılımcıların bu soruyu çözmek için kullandıkları yöntemler aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.12. ÇK-2, birinci soru için öğrenci yanıtlarının özeti.

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler
Gülay	İntegral hesaplama yöntemleri
Elif	İntegral hesaplama yöntemleri
Hale	İntegral hesaplama yöntemleri
Şeyda	İntegral hesaplama yöntemleri

Çizelge 4.12. devam ediyor.

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler
Zehra	Eğri altında kalan alan
Funda	İntegral hesaplama yöntemleri

Çizelge 4.12'de de görüldüğü gibi Zehra dışındaki katılımcıların hepsi verilen denklemi kritik noktalarına göre ayırmış ve integral hesaplama yöntemlerini kullanarak çözüme ulaşmışlardır. Katılımcılara neden bu yöntemi kullandıkları sorulduğunda, farklı yanıtlarla karşılaşılmıştır:

- Akıllarına gelen ilk yöntem olması.
- İntegralinin kolay alınıyor olması.
- Mutlak değer fonksiyonunun grafiğini çizmeyi sevmemeleri.
- İntegral ile ilgili sorularda hep integral hesaplama yöntemlerinin kullanılıyor; hiç grafik kullanılmıyor olması.
- Daha önceki öğrenim hayatlarında integral hesaplama yöntemlerini kullanmaya alışmış olmaları.

Katılımcıların çoğunluğunun bu yöntemi kullanmasının nedenleri arasında bulunan dördüncü madde, daha önce Sağlam ve Bülbül (2009) tarafından yapılan araştırma sonuçlarıyla tutarlılık göstermektedir. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanmama nedenlerinden biri de integralle ilgili sorularda grafik kullanmamaları ve önceki öğrenim hayatlarında bu tür çözümler kullanmaya çok da alışık olmamalarıdır. Dolayısıyla grafik kullanarak çözüm yapmak öğrencilerin çözüm seçenekleri arasında bulunmamaktadır. Yine bu durum Eisenberg ve Dresyfus (1991)'un çalışmasında yer alan, görselleştirmeye karşı direncin öğrenilmiş bir fenomen olduğu iddiasını desteklemektedir.

Funda ise grafik üzerinden çözüm yapmayı, ancak integralini alması gereken ifadenin hesaplayamayacağı kadar karmaşık olduğu durumlarda tercih edeceğini belirtmiştir. Bu durum, görsel çözüm seçeneğinin Funda için ikinci sırada yer aldığını göstermektedir.

2. Soru: ÇK-2'de bir fonksiyon grafiği verilmiş ve belli bir aralıkta integral değeri istenmiştir (Ek 1, ÇK-2, 2. Soru). Bu soru, hem grafiği verilen eğrinin denklemini oluşturulup integral hesaplama yöntemleri kullanılarak çözülebileceği gibi hem de belirli integralin geometrik anlamı kullanılarak da çözülebilir. Katılımcıların bu soru için yanıtları aşağıda yer almaktadır.

Çizelge 4.13. ÇK-2, ikinci soru için öğrenci yanıtlarının özeti

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler
Gülay	Eğri altında kalan alan
Elif	İntegral hesaplama yöntemleri, Eğri altında kalan alan
Hale	Eğri altında kalan alan
Şeyda	Eğri altında kalan alan
Zehra	Eğri altında kalan alan
Funda	İntegral hesaplama yöntemleri, Eğri altında kalan alan

Funda ve Elif dışındaki katılımcıların hepsi, öncelikle belirli integralin eğri altında kalan alan anlamını kullanmayı tercih etmişlerdir. Bu soru, birinci çalışma kağıdında yer alan sorularda olduğu gibi belirli integralin eğri altında kalan anlamı kullanılarak rahatlıkla çözülebilecek bir sorudur. Ancak Funda, çözümünü her iki çözüm yöntemini kullanarak gerçekleştirmiştir. Bu durumun en önemli nedeni olarak belirli integralin eğri altında kalan alan anlamını kullandığında kafasının karışmasını göstermiştir. Daha önce yapılan araştırmalarda belirtildiği gibi görselleştirmenin öğrenci zihninde oluşturduğu bilişsel yük, analitik yöntemlere oranla daha fazla olması Funda'nın analitik yöntemleri tercih etmesinin bir diğer nedeni olabilir.

> A: Kimler böyle (*Eğri altında kalan alan*) yaptı? (*Funda dışında herkes*). Peki doğru denklemleri yazıp (*Yapanlar*)...?
>
> F: Ben yazmaya çalıştım ama yarım kaldı.
>
> A: Neden yazmaya çalıştın?

F: İşte işaretlerde bazen kafam karışıyor da…

A: İşaretlerde derken?

F: Yani integralde alan olarak düşünüyoruz ya… Hani bazen eksi alıyoruz, işte o yüzden. Kafam karıştığı için doğruları bulup…

Elif de başlangıçta grafiği verilen fonksiyonu yazmaya çalışmış fakat daha sonra eğri altında kalan alanı kullanarak da sonuca ulaşabileceğini fark edince çözüm yöntemini değiştirmiştir.

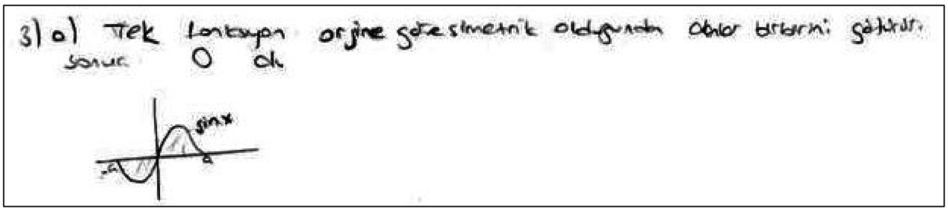
3. Soru: ÇK-2'de yer alan üçüncü sorunun (Ek 1, ÇK-2, 3. Soru) a) şıkkında katılımcılardan, tek fonksiyonların integral sınırları simetrik olduğunda, integral değerini ortaya koyan bir sonuç istenmekte; b) şıkkında ise buldukları sonucu iki fonksiyon üzeride doğrulamaları beklenmektedir. Bu soru analitik yöntemler kullanılarak yapılabileceği gibi görsel stratejiler kullanılarak da yapılabilmektedir. Öğrencilerin bu sorular için tercih ettiği çözüm yöntemleri aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.14. ÇK-2, üçüncü soru için öğrenci yanıtlarının özeti

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler (a- şıkkı)	Kullanılan Yöntemler (b- şıkkı)
Gülay	Analitik yöntemler kullandı	Analitik yöntemler kullandı, Grafikten yararlandı
Elif	Analitik yöntemler kullandı	Analitik yöntemler kullandı, Grafikten yararlandı
Hale	Grafikten yararlandı	Grafikten yararlandı
Şeyda	Grafikten yararlandı	Grafikten yararlandı
Zehra	Analitik yöntemler kullandı	Grafikten yararlandı
Funda	Analitik yöntemler kullandı	Analitik yöntemler kullandı

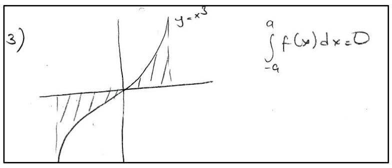
Öğrencilerin kullandığı analitik yöntemler, bildikleri bir tek fonksiyonun (sinx, x^3, x …) belirli integralini -integral hesaplama yöntemlerini kullanarak- hesaplamak şeklinde gerçekleşmiştir. Benzer şekilde sorunun b) şıkkında da bildikleri çift fonksiyonlar (cosx, x^2…) üzerinden hareket etmişlerdir. Daha öncede belirtildiği gibi görselleştirme sürecinde bireylerin sıklıkla kullandıkları imajlardan biri de prototipik imajlardır. Prototipler, bir kategorinin en iyi örneği olan zihinsel gösterimler (Lakoff, 1987, p. 43, akt. Presmeg, 1992) olarak tanımlanmaktadır. Ancak bu soruda olduğu gibi analitik çözüm kullanan öğrencilerin kullandıkları fonksiyonların birer prototipik analitik imaj olduğu söylenebilir. Johnson (1987, akt. Presmeg, 1992) prototiplerin kişiden kişiye değişmekle beraber, ortak kültürü paylaşan bireyler tarafından ortak özellikler gösterdiğini belirtmektedir. Katılımcıların da çözüm sürecinde kullandıkları tek ve çift fonksiyonların aynı olmasının nedeni (Gülay, Hale: sinx, Elif, Şeyda: x^3…), bu öğrencilerin integral konusunun anlatıldığı dersleri, aynı öğreticiden beraber almaları dolayısıyla aynı kültürü paylaşmalarının bir sonucudur.

Sorunun a) ve b) şıkkında katılımcılara, tek fonksiyonların analitik özelliğinin de verilmesine rağmen Hale, tek fonksiyonların grafiksel özelliğini kullanarak soruyu çözmüştür.



Şekil 4.11. ÇK-2, üçüncü soru için Hale’nin çözümü

Benzer şekilde çözümünü grafik üzerinden yapan Şeyda, diğer öğrencilerin analitik çözümlerinde yaptığı işlemi (tek fonksiyonun belirli integralini -integral hesaplama yöntemlerini kullanarak- hesaplamak) grafik üzerinde yapmıştır. Şeyda, tek olduğundan emin olduğu bir fonksiyonun grafiğini y-eksenine göre simetrik olacak şekilde çizmiş ve eğri altında kalan alan anlamını kullanarak değerin sıfır olduğunu bulmuştur.



Şekil 4.12. ÇK-2, üçüncü soru için Şeyda’nın çözümü

Şeyda tek bir örneğe bakarak sonucun doğruluğuna karar vermiştir. Tek durumun doğruluğuna bakarak karar verme, bu soruda görüldüğü gibi hem görsel hem de analitik çözümde öğrencilerin kullandığı bir sonuç çıkarma yöntemidir. Presmeg (1992)'in çalışmasından belirttiği gibi öğrencilerin görsel anlamda zorluk yaşamasına neden olan tek durumluk somutluk (one-case-correctness) analitik anlamda da dikkat edilmesi gereken bir zorluk olarak karşımıza çıkmaktadır.

> E: Ben de şöyle düşündüm. İntegralin içindeki tek fonksiyon olunca integrallenmiş değeri çift fonksiyon oluyor. Daha sonra onları yerine yazınca zaten eksili olduğunu düşününce, hemen birbirini götürüyor ve sıfır kalıyor.
>
> A: Her tek fonksiyonun integrali çift midir?
>
> E: Olmayabilir.
>
> A: Şimdiye kadar üç fonksiyon incelemişsiniz sanırım. Hepsi için sonuç sıfır mı? Şeyda sen ne düşünüyorsun?
>
> Ş: Kesin sıfırdır çünkü… Tamam, kesinlikle yanlış bir fonksiyon üzerinden hareket ederek doğru olduğunu düşünmek ama genel olarak şunu diyebiliriz ki tek fonksiyonlar orijine göre simetriktir; yani mutlaka diğeri ters tarafında olacak ve eksi gelecek ama bunu açıklarken kesinlikle bir fonksiyon üzerinde gidemeyiz. Yanlış olur.

Çizelge 4.14'te de görüldüğü gibi a) şıkkında analitik yöntemler kullanarak çözüme ulaşan Gülay, Elif ve Zehra'dan Gülay ve Elif, b) şıkkında çözüm yöntemine, grafik kullanılan çözümü eklemiş ve bu iki çözüm sürecinin birbirinin kontrol mekanizması olarak kullanmışlardır. Funda ise a) şıkkında her iki çözüm yönteminin (görsel ve analitik) tahtada yapılmasına rağmen analitik çözüm yöntemini kullanmaya devam etmiştir. Funda'nın analitik yöntemlerdeki ısrarı bu konudaki inançlarının oldukça güçlü olduğunun bir göstergesi olarak nitelenebilir.

4. Soru: ÇK-2, dördüncü soru (Ek 1, ÇK-2, 4. Soru) üçüncü sorunun bir uygulaması olarak sorulmuştur. Katılımcıların bu soruda, bir önceki soruda öğrendikleri tek ve çift fonksiyonların özelliklerini kullanarak integral değerlerini hesaplamaları beklenmektedir. Öğrencilerin, sorularla karşılaştıkları zaman kullandıkları yöntemler ise şöyledir:

Çizelge 4.15. ÇK-2, dördüncü soru için öğrenci yanıtlarının özeti.

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler
Gülay	Tek ve çift fonksiyonların özellikleri
Elif	Tek ve çift fonksiyonların özellikleri
Hale	İntegral hesaplama yöntemleri
Şeyda	İntegral hesaplama yöntemleri
Zehra	Tek ve çift fonksiyonların özellikleri
Funda	Tek ve çift fonksiyonların özellikleri

Çizelge 4.15'te görüldüğü gibi Şeyda ve Hale dışındaki tüm katılımcılar bir önceki soruda öğrendikleri, tek ve çift fonksiyonların özelliklerini kullanarak soruları çözmüşlerdir. Hale ve Şeyda'nın integral hesaplama yöntemlerini kullanmasının en önemli nedeni, değeri hesaplanması istenen bir integral verildiğinde çözüm için akıllarına gelen ilk yöntemin integral hesaplama yöntemleri olmasıdır.

A: Farklı yoldan yapan?

H: Ben yaptım. Ben o farkı daha yeni, siz söyleyince fark ettim.

A: Nasıl yani?

H: Yani bir üstteki soruyla bağlantısını, yani direkt integrale gömüldüğüm için görmedim.

Ş: İkincisi haricinde diğerlerinde aklıma hiç tek çift gelmedi. Bir tek ikincisi polinom olduğu için direkt gözüme çarptı o kadar.

A: Böyle şeylerde aklımıza ilk gelen şey aslında direk integrali hesaplamak ama…

H: Direk sınıra bakmadan integrali hesaplamaya başladığım için. Değişken değiştirirken sınırlarla uğraşmayıp direk belirsiz halde bulup öyle yaptığım için direk sınırlara bakmadım. Hiç aklıma da gelmedi.

Katılımcıların ikinci çalışma kağıdındaki görsel tercihleri ile ilgili genel değerlendirme

Gülay, ikinci çalışma kağıdında da görsel olmayan çözümlere eğilimi devam etmektedir. İkinci soruda, belirli integralin eğri altında kalan alan anlamından yararlanmış, dördüncü soruda ise tek ve çift fonksiyonların özelliğinden yararlanarak soruyu çözmüştür. Ancak dördüncü sorunun çözüm sürecinde tek ve çift fonksiyonların integrallerinin alınmasında grafiksel mi yoksa analitik özelliğini mi kullandığını belirtmemiştir.

Elif de Funda gibi görsel stratejiler kullanmaya karşı oldukça isteksiz öğrencilerden biridir. Katılımcıların çoğunun integralin eğri altında kalan alan anlamını kullandığı ikinci soruda bile Elif, çözümüne analitik stratejiler kullanarak başlamış, daha sonra Gülay ile soru üzerinde tartışmaya başladıktan sonra çözüm stratejisini değiştirmiştir. Bu çalışma kağıdında Elif'in görsel strateji kullanımı ile ilgili olarak gösterdiği tek farklılık, üçüncü soruda grafikten, kullandığı analitik stratejinin kontrol mekanizması olarak faydalanmasıdır.

Hale, analitik çözümlere olan eğilimi diğer öğrencilerden farklı olarak daha çok önceki öğrenmelerinin bir sonucudur. Farklı çözüm yöntemlerini düşünememesini "Yani direkt integrale gömüldüğüm için görmedim" cümlesiyle ifade etmektedir. Bunun dışında alternatif çözüm yollarını düşündüğünde görsel çözüm stratejileri üretebilen bir öğrencidir. İkinci ve üçüncü soruda bu özelliği ortaya çıkmaktadır. Hale'nin görsel olmayan stratejileri daha çok kullanması, bu tür çözümleri destekleyen bir öğretimin sonucunda geliştiğini düşündürmektedir.

Şeyda, birinci soruda bir grafik çizmesine rağmen bu grafikten yararlanmamış analitik çözümü tercih etmiştir. Bunun yanında Hale ile birlikte üçüncü soru için grafiksel çözüm yöntemini üreten öğrencidir. Bu anlamda görsel strateji kullanmaya, ilk haftaya göre daha istekli olduğu söylenebilir.

Zehra, farklı çözüm stratejilerine açık bir öğrenci olarak göze çarpmaktadır. Genellikle kısa çözüm yollarını tercih etmektedir. Eğer bu görsel stratejiler içeriyorsa görsel çözümler kullanmakta, analitik stratejiler içeriyorsa analitik çözümler kullanmaktadır. Öğrendiği görsel çözümleri kullanma konusunda diğer öğrencilere göre daha başarılı gibi görünmektedir.

Funda, birinci haftada görsel stratejilere hiç güvenmezken bu hafta görsel strateji kullanmakta ama bulduğu sonuçları analitik yollardan veya analitik çözümlerini görsel stratejiler kullanarak kontrol etmektedir. Grup içinde bu konuda en dirençli olan Funda için görsel stratejileri, analitik stratejilerle birlikte kontrol mekanizması olarak kullanması, tercihleri yönünde küçük bir değişim olarak değerlendirilebilir.

4.2.3. Üçüncü hafta

Üçüncü haftada katılımcılardan ilk olarak bir eşitsizliğin geometrik kanıtı istenmiştir. Bu kanıt integralin cebirsel anlamı kullanılarak da yapılabilmektedir. Formal kanıt öğrencilerin derste sıklıkla yaptığı ancak zor bir aktiviteyken görsel kanıt, öğrencilerin daha önce karşılaşmadıkları türden bir aktivitedir. Her ne kadar görsel kanıtın, matematiksel kanıt içinde geçerli bir yol olduğunu belirten araştırmalar (Barwise and Etchemendy, 1991, p. 9) bulunsa da çoğumuza, içinde grafik veya diyagramların ağırlıkta bulunduğu kanıtlara şüphe ile bakmak öğretilmekte ve bu küçümseme öğrencilere de aktarılmaktadır (Arcavi, 2003). Aslında görselleştirme, bir çözümün analitik boyutunu (semboller, sözel ifadeler vb.) tamamen dışarıda tutma amacını gütmemekte, aksine analitik sürecin tamamlayıcısı olmaktadır (Arcavi, 2003). Görsel kanıt da diğer matematiksel süreçlerde olduğu gibi öğrenciler tarafından kullanılmak istenmemektedir. Harel ve Dreyfus (2009) tarafından 142 lise öğrencisiyle gerçekleştirilen çalışmada katılımcıların çoğu (%64) görsel kanıtları geçerli bir kanıt yöntemi olarak kabul ederken, büyük bir çoğunluğu (%77) bu tür görsel kanıtların öğretmenleri tarafından geçerli bir kanıt yöntemi olarak kabul edilmeyeceğini düşündüklerini belirtmişlerdir. Bu çalışmanın sonucunda, aslında öğrencilerin görsel kanıt için oldukça açık oldukları elde edilmiştir.

Matematikte önemli bir yere sahip olan kanıtın öğrencilerin görsel sürecinde nasıl yer bulduğunu görmek amacıyla öğrenciler için üçüncü çalışma kağıdında ilk iki soru hazırlanmıştır. Ayrıca ön klinik görüşmelerde, belirsiz integralde kullanılan ve öğrencilerin grafiksel anlamı konusunda zorluk yaşandığı gözlenen ‘c’ sabitinin anlamı ile ilgili olarak da sorular çözülmüştür.

1. Soru: ÇK-3’de yer alan birinci soru (Ek 1, ÇK-3, 1. Soru) iki şıktan oluşmaktadır. a) şıkkında öğrencilerden bir eşitsizliğin doğruluğunu gösteren

geometrik bir kanıt istenmekte, b) şıkkında ise a) şıkkında elde edilen sonucu kullanılarak yine bir eşitsizliğin doğruluğunun gösterilmesi istenmektedir. Öğrencilerin soruyu çözmekte kullandıkları stratejiler aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.16. ÇK-3, birinci soru için öğrenci yanıtlarının özeti

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler
Gülay	ln |x|, ln|x+1|, $\frac{1}{x}$'in grafiklerini çizerek bir sonuç çıkarmaya çalıştı ancak doğru çözüme ulaşamadı.
Elif	$\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x+1}$'in grafiklerini çizdi ancak doğru çözüme ulaşamadı.
Hale	$\frac{1}{t}$'nin grafiğini çizdi, grafik üzerinde x ve x+1'i sınır olarak belirledi, ancak doğru çözüme ulaşamadı
Şeyda	$\frac{1}{t}$'nin grafiğini çizdi, , $\frac{1}{t}$'nin integralini aldı ve bu integral üzerinden işlemler yaptı.
Zehra	$\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x+1}$'in grafiklerini çizdi, $\frac{1}{t}$'nin integralini aldı ancak doğru çözüme ulaşamadı.
Funda	$\frac{1}{t}$'nin integralini aldı ve bir takım analitik işlemler yaptı, ln|x|'in grafiğini çizdi, x-ekseni ile arasında kalan alanı inceledi ancak çözüm sürecinde kullanmadı ve doğru çözüme ulaşamadı.

Çizelge 4.16'da da görüldüğü gibi katılımcıların hepsi soruda verilen matematiksel ifadelerin grafiklerini çizip verilen belirli integralin değerini hesaplamışlarıdır. Sadece Funda, soruda geometrik bir kanıt isteniyor olmasına rağmen, *1/t*'nin integralini alıp bu integral üzerinden sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Daha sonra *lnt*'nin grafiğini çizmiş fakat bu grafiği çözüm sürecinde kullanamamıştır. Soruda geometrik bir kanıt isteniyor olmasına rağmen Funda'nın analitik stratejilerle çözüme başlaması, bu stratejileri kullanma konusundaki inanç ve öğrenim hayatından gelen alışkanlıklarının ne kadar kuvvetli olduğunun bir göstergesi olarak kabul edilebilir.

Funda dışındaki katılımcılar, çözümlerine, soruda yer alan matematiksel ifadelerin grafiklerini çizerek başlamış olmalarına rağmen çözüm süreçlerinde bu grafiklerden yararlanamamışlardır. Katılımcılar bu durumu çeşitli şekillerde ifade etmişlerdir.

> G: Geometrik bir kanıt olduğu için direkt grafik çizeyim dedim. lnx'i hatırlıyorum. ln|x+1|'de orijinden geçer diye düşündüm. Bir şey çizmeye çalıştım.1/x'in de grafiğini hatırlıyorum ama (*bazı fonksiyonların grafiği hatırlanıyor)* arasında bir bağıntı kuramadım. Çünkü integralini aldığımda ortadaki ifade ln'li bir şey geliyor ama…
>
> Z: Aynı, hani $\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x+1}$'in grafiğini çizip diğerinin integralini aldık zaten $\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|$. Nereye koyacağımızı, ya da bir kanıt olacak şekilde yanıt (*oluşturamadım*)…

Katılımcıların çizdikleri grafikleri problemlerin çözüm sürecinde kullanamamaları, daha önce Stylianou (2000)'nun araştırma sonuçlarında ortaya çıkan ve acemi matematikçilerin (üniversite öğrencileri) ortaya koydukları görsel betimlemeleri, sorunun çözüm sürecinde kullanmamaları bulgusuyla tutarlılık göstermektedir.

Sorunun doğru çözümü Hale'nin daha önceki yıllarda yaptığı geometrik bir kanıtı hatırlaması ve bunu tahtada anlatması sonucunda Şeyda tarafından yapılmıştır.

> H: Geçen yıllarda şöyle bir şey yapıyorduk. Fonksiyonları küçükten büyüğe doğru sıraladığımızda, sınırları aynı şekilde integralini aldığımızda yine aynı sıralama ile gidiyorlardı. Şimdi $\frac{1}{x+1}$ bir de hani onun geometrik yorumunu yaparken de hani bir alan çıkıyordu. Mesela integral eğrisi bu şekilde (*Havada bir grafik çiziyor*). Bir üstten alanı bir de en küçüğün alttan alanını alıyorduk. Öyle bir yorum yapmıştık. Eğrimizi bu şekildeyse üst noktasında böyle düz bir doğru çizdiğimizde o dikdörtgenin alanı, eğrimizin alanından daha büyük; en alttaki eğrinin altında çizdiğimizi alan da integralin alanından küçük oluyordu. Bu da öyle bir şey… $\frac{1}{x}$, x ile x+1 sınırında bir integral bulabilsem dedim hani onun alanlarını kıyaslarım diye düşündüm. Ama olmadı. Çok karışık oldu.
>
> A: Hale, tahtada bize açıklar mısın ne düşündüğünü?
>
> H: Şimdi mesela f(x) fonksiyonu bir M değerinden küçük olsun. O da bir m değerinden büyük olsun. O zaman $\int_a^b m dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b M dx$ oluyordu. Bu da (b-a)M, diğeri de (b-a)m oluyordu. Onun da geometrik yorumunu şöyle bir şey yapmıştık sanırım. (*Yazdıklarını bir grafik çizerek açıkladı*) Hani orda da aynı şeyi bulur muyum acaba dedim. Yani bu öyle bir fonksiyon ki şuradaki

fonksiyon oradaki $\frac{1}{x+1}$. Aslında x+1'den x'e giden bir fonksiyonun integrali. Ama alınmış şekliyle orda herhalde dedim. Alanları kıyasladım ama olmadı.

Hale'nin devam ettiremediği çözümü bir süre sonra Şeyda tamamlamış ve sorunun doğru çözümünü bulmuştur. Başlangıçta çizdiği grafiği kullanamayan ve analitik çözümler üretmeye çalışan Şeyda, Hale'nin oluşturduğu grafiksel yorumu kullanarak çözüme ulaşmıştır. Bu durum Arcavi (2003)'nin belirttiği gibi görselleştirmenin sembolik sonuçları desteklediği ve bu sonuçları açıkladığı (hatta kendi başına bir kanıt olabildiği) iddiasını desteklemektedir.

Katılımcıların bu soruyu çözerken zorlanmalarının en büyük nedenlerinden biri de grafiklerle analitik süreçleri birleştirmede zorluk yaşamalarıdır. Hale'nin alıntısında görüldüğü gibi öğrenci grafiksel ve analitik anlamda bu iki stratejiyi bütünleştirmede zorlanmaktadır. Öğrencilere verilecek analitik çözümlerin yanında görsel çözümleri de kullanmak bu iki sürecin bütünleştirilmesi anlamında öğrencilere daha çok yardım edecek ve her iki süreci aktif bir şekilde kullanmalarını sağlayacaktır.

2. Soru: ÇK-3'de yer alan ikinci sorunun a) şıkkında (Ek-1, ÇK-3, 2. Soru) öğrencilerden iki belirli integralin değerini sıralamaları istenmiştir. İntegral değerleri bir değişkene bağlı "ln" fonksiyonu olduğu için öğrencilerin bu sıralama için farklı yollar izlemeleri gerekmektedir. Bu şık için öğrencilerden gelen yanıtların iki farklı şekilde olduğu söylenebilir. b) şıkkında ise yakınsak olduğu bilinen bir integral verilmekte ve bu integralinin yakınsaklığı kullanılarak başka bir integralin yakınsaklığı hakkında ne söylenebileceği sorulmaktadır. Katılımcıların kullandığı farklı yöntemler aşağıda verilmiştir.

Çizelge 4.17. ÇK-3, ikinci soru için öğrenci yanıtlarının özeti

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler (a- şıkkı)	Kullanılan Yöntemler (b- şıkkı)
Gülay	İntegral değerlerini karşılaştırma (lnb ve $\frac{b-1}{b}$)	Geçerli bir çözüm üretemedi.

Çizelge 4.17. devam ediyor.

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler (a- şıkkı)	Kullanılan Yöntemler (b- şıkkı)
Elif	İntegral değerlerini karşılaştırma (lnb ve $\frac{b-1}{b}$)	$\int_1^\infty f(x) < \int_1^\infty g(x)$ olduğunda $\int_1^\infty g(x)$ yakınsaksa, $\int_1^\infty f(x)$ de yakınsaktır.
Hale	$\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x^2}$ eğrilerinin altında kalan alanı karşılaştırma	$(1,\infty)$ aralığında $\frac{1}{e^x}$ ile $\frac{1}{e^{x^2}}$ eğrileri altında kalan alanları karşılaştırma
Şeyda	$\frac{1}{x}$ ile $\frac{1}{x^2}$ eğrilerinin altında kalan alanları karşılaştırma	$\int_1^\infty f(x) < \int_1^\infty g(x)$ olduğunda $\int_1^\infty g(x)$ yakınsaksa, $\int_1^\infty f(x)$ de yakınsaktır.
Zehra	İntegral değerlerini karşılaştırma (lnb ve $\frac{b-1}{b}$)	Geçerli bir çözüm üretemedi.
Funda	$\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x^2}$ eğrilerinin altında kalan alanları karşılaştırma	$(1,\infty)$ aralığında $\frac{1}{e^x}$ ile $\frac{1}{e^{x^2}}$ eğrileri altında kalan alanları karşılaştırma

Çizelge 4.17'de görüldüğü gibi katılımcıların üçü, karşılaştırılabilir nitelikte olmadığı halde integral değerlerini karşılaştırarak yanıt vermişlerdir. Bu değerleri karşılaştırırken "b" değişkenine değerler vermişler ve bu değerlere göre hareket etmişlerdir.

Diğer çalışma kağıtlarından farklı olarak Funda bu soruda $\frac{1}{x}$ ve $\frac{1}{x^2}$ eğrilerinin altında kalan alanları karşılaştırarak çözüme ulaşmıştır. Hale ve Şeyda da Funda ile benzer bir çözüm oluşturmuştur.

Sorunun b) şıkkında ise yine a) şıkkına benzer şekilde iki farklı çözüm yöntemi üretilmiştir. Bunlardan birincisi integralin bir özelliği olan “ $f(x) < g(x)$ olduğunda $\int_1^\infty g(x)$ yakınsaksa, $\int_1^\infty f(x)$ de yakınsaktır” teoremidir. Diğeri ise iki eğirinin grafiklerini karşılaştırmak olmuştur. Çözüm üretemeyen iki öğrenciden biri olan Gülay, daha önce bu sorunun çözümüne ilişkin gördüğünü düşündüğü analitik bir yöntemi hatırlamaya çalışmış ancak başaramamıştır. Gülay’ın daha önce karşılaştığı analitik çözüm konusundaki ısrarı soruyu çözmesine engel olmuştur.

3. Soru: ÇK-3’de yer alan üçüncü soru (Ek 1, ÇK-3, 3. Soru) belirsiz integraldeki “c” sabitinin grafiksel anlamına ilişkin oluşturulmuş bir sorudur. Bu soru, üçüncü çalışma kağıdında, katılımcılar tarafından en çok zorlanılan sorulardan biri olmuştur. Katılımcıların zorlandıkları nokta farklı özellikler taşımaktadır. Bunlar;

- İntegral alınan değişkene göre eksenlerin değişebileceği, dolayısıyla değişimin x-ekseni üzerinde olabileceğini düşünme,
- Bağımlı değişken ile bağımsız değişkeni değiştirme,

Öğrencilerin kullandıkları yöntemler ise aşağıdaki gibidir.

Çizelge 4.18. ÇK-3 üçüncü soru için öğrencilerin kullandığı yöntemler

Katılımcılar	Kullanılan Yöntemler
Gülay	Örnek fonksiyonlarda yaptıkları değişikliklerin grafikler üzerindeki değişimlerini gözleme
Elif	Örnek fonksiyonlarda yaptıkları değişikliklerin grafikler üzerindeki değişimlerini gözleme
Hale	Sadece grafiğin y-ekseni üzerindeki değişimini inceleme, grafiğin görüntüsüne bakarak karar verme
Şeyda	Grafiğin görüntüsüne bakarak karar verme ve analitik bilgileriyle birleştirme
Zehra	Örnek fonksiyonlarda yaptıkları değişikliklerin grafikler üzerindeki değişimlerini gözleme
Funda	Örnek fonksiyonlarda yaptıkları değişikliklerin grafikler üzerindeki değişimlerini gözleme

Funda dışındaki her bir katılımcı ön klinik görüşmelerde, belirsiz integraldeki “c” sabitinin, y-ekseni üzerinde fonksiyonun grafiğini, sabitin değeri kadar hareket ettireceğini bilmektedir. Bu özelliğin biliniyor olmasına rağmen, Şeyda ve Hale, şıkları beraber incelemişler ve c) şıkkında yer alan grafiklerin aynı fonksiyonun integraline ait olup olamayacağı konusunda Şeyda, olamayacağını düşünmektedir. Bu iddiasını şu şekilde dile getirmektedir.

> (*Şeyda ve Hale tartışıyorlar. Şeyda c) şıkkındaki grafiklerin, eğimlerinin farklı olabileceğini düşünüyor. Dolayısıyla Şeyda hepsi farklı derken, Hale hepsinin aynı olduğunu düşünüyor*)
>
> Ş: Şurada şöyle bir noktada eğim al, hepsi farklı.
>
> H: Yine aynı gidiyorlar ya! Bak bu iki birim oynamış, bu da iki birim oynamış.
>
> Ş: Ama bak aralarındaki mesafe açılmış. Mesela böyle bir noktada aldığında, biri böyle biri böyle... Açılmış. Bunlar sonradan kesişecek.
>
> H: Evet öyle gidiyor.
>
> Ş: Ama mesela x^2 +1 ile x^2+2’yi al. Hiçbir zaman kesişmemesi lazım bunların...
>
> H: Evet, türevleri eşit.
>
> Ş. O yüzden bence c olmaz. Aşağı doğru kaydırdığımızda eğimleri eşit olmuyor. Aralarındaki fark gitgide azalıyor.

Hale, grafiklerin görüntüsüne bakarak sonuç çıkartmaya çalışmaktadır. Bu durum daha önce görselleştirmenin öğrencinin düşünce sürecinde bilişsel karmaşaya neden olabileceğini belirten araştırmaların sonucunu desteklemektedir.

Sorunun a) şıkkında tüm katılımcılar çizilen grafiklerin aynı integrale ait olamayacağı konusunda hem fikirdirler çünkü grafik, bir sabit değeri kadar y-ekseni üzerinde hareket etmektedir. Ancak sorunun b) şıkkında Zehra ve Funda önce bağımsız değişkenin “y” olarak alındığında, daha sonra da “y” değişkenine göre integral alındığında değişimin x-ekseni üzerinde olabileceğini düşünmüşler ve bu yüzden bilişsel bir karmaşa yaşamışlar fakat araştırmacının müdahalesiyle bu sorun aşılmıştır.

4. Soru: ÇK-3’de yer alan dördüncü soru (Ek 1, ÇK-3, 4. Soru) yine belirsiz integraldeki “c” sabitinin anlamına yönelik bir sorudur. Öğrenciler sorunun a) ve b) şıklarında integral ile ilgili iki eşitliğin varlığını göstermişler, c) şıkkında ise bu iki şıktan çıkan sonucu karşılaştırmaları istenmiştir.

Katılımcıların hepsi sorunun a) ve b) şıklarını sorunsuz çözmüşlerdir. c) şıkkı için öğrencilere, a) ve b) şıklarındaki fonksiyonların bir bilgisayar cebiri sistemi ortamında çizilmiş grafikleri verilmiştir. Grafikler arasındaki ilişkiyi “c” sabiti kadar kayma olarak nitelendiren öğrenciler a) ve b) şıkları arasındaki farkın da bu “c” sabitinden kaynaklandığını fark etmişlerdir.

Katılımcıların üçüncü çalışma kağıdındaki görsel tercihleri ile ilgili genel değerlendirme

Gülay, bu çalışma kağıdında görsel çözümlere açık bir öğrenci gibi görünse de daha önceki öğrenim hayatından getirdiği bir takım özellikler görsel stratejilerin avantajlarını kullanmasına engel olmaktadır. Birinci soruda grafiklerden yararlanmaya çalışmış ancak başarılı olamamıştır. İkinci soruda, daha önce benzer bir soru için ders hocasının kullandığı (soruyla ilgisi olmayan) bir çözümü hatırlamaya çalışması, doğru çözüm için stratejiler üretmesine engel olmuştur.

Elif, katılımcılar arasında, görsel strateji kullanma konusunda Funda’dan sonra en isteksiz öğrencidir. Birinci soruda grafik kullanmış ancak çözüm sürecine dâhil edememiştir. Diğer sorularda analitik stratejileri tercih etmiştir. Funda’daki değişim henüz Elif’de görülmemiştir.

Hale, bu çalışma kağıdında görsel strateji kullanma konusunda en aktif öğrencilerden biridir. Birinci soruda Şeyda’nın doğru çözümü bulmasını sağlayacak ilk adımı hazırlamış, ikinci soruda doğru çözümü oluşturmuştur. Son soruda ise iki integral değeri arasındaki farkın c sabitinden kaynaklandığını ve bu sabitin ne olduğunu ilk bulan öğrencilerden biridir.

Şeyda, grup içinde görsel muhakemeyi analitik muhakeme ile birlikte en iyi kullanan öğrenci olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle bu hafta, Şeyda’nın bu özelliği daha net ortaya çıkmıştır. Grafiğin özelliklerini analitik bilgileri ile birleştirmiştir.

Zehra, çalışma sırasında çok aktif olmayan bir öğrencidir. Düşündükleri konusunda çok konuşmadığı için görsel strateji kullanma konusundaki eğilimi hakkında çok fazla fikir vermemektedir. Ancak yaptıkları ve söyledikleri doğrultusunda, deneyimli olduğu durumlar dışında görsel stratejileri çok kullanan bir öğrenci olmadığı söylenebilir.

Funda, diğer çalışma kağıtlarından farklı olarak, bu çalışma kağıdında görsel stratejiler kullanmaya başlamıştır. Birinci soruda ln|x|'in grafiğini çizmiş ve eğri altında kalan alanı, çözüm sürecinde kullanmak üzere incelemiştir. Ancak burada integrali alınan ifadenin grafiğini incelemesi, bu integralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksikliklerinin bulunduğunun bir göstergesidir. Fakat bu soruda öğrendikleriyle ikinci soruda, eğri altında kalan alanları karşılaştırarak doğru sonuca ulaşmıştır. Benzer çözüm yöntemini üçüncü soruda da kullanması, daha önce görsel stratejileri hiç kullanmadığı düşünüldüğünde, Funda'nın görsel tercihleri açısından önemli bir değişim olduğu kabul edilebilir.

4.2.4. Dördüncü hafta

Öğretim deneyinin dördüncü haftası ise öğrencilerin, analitik olarak sıklıkla kullandıkları bir özellik olan türev-fonksiyon-integral ilişkisinin grafiksel anlamı konusunda düzenlenmiştir.

Çalışma başlamadan önce, ön hazırlıklar çerçevesinde araştırmacı, katılımcıların bulunduğu sınıfla birlikte integral konusunun anlatıldığı dersleri dinlemiştir. Bu dersler sırasında türev-fonksiyon-integral ilişkisinin grafiksel anlamı üzerinde çok durulmadığı ve öğrencilerin bu konuda deneyimsiz olduğu gözlenmiştir. Öğrencilerin bu konudaki deneyim eksikliği (öğrencilerin görsel muhakeme konusunda isteksiz olmasının, görsel muhakemenin bazı durumlarda öğrencilerin kavram oluşturma ve problem çözme sürecinde bir takım zorluklara neden olması), bu öğretim deneyinin oluşturulma nedenleri arasında bulunmaktadır. Görsel muhakeme ile görsel ve analitik muhakemenin etkileşimli olarak kullanımının bu konuda daha fazla deneyim kazanılmasını sağlayacağı; dolayısıyla öğrencilerin yaşadıkları zorlukların bu yolla aşılabileceği, öğretim deneyinin öngörüleri arasında yer almaktadır. Ayrıca daha önce de belirtildiği gibi öğretim deneyi için hazırlanan çalışma kâğıtları, çalışma grubuna uygulanmadan önce, beş öğrenciyle pilot çalışması yapılmış ve bu çalışmadan gelen dönütler doğrultusunda çalışma kağıtlarına son şekli verilmiştir. Yine bu pilot çalışmalar sırasında öğrenciler, dördüncü çalışma kağıdında yer alan sorularda zorlanmışlar ve bu tür sorularla daha önce karşılaşmadıklarını belirtmişlerdir.

1. Soru: ÇK-4'te yer alan birinci sorunun (Ek1, ÇK-4, 1. Soru) üç şıkkında öğrencilere, aynı koordinat düzleminde iki tane grafik verilmiştir. Bu grafiklerden biri *f* diğeri *F* fonksiyonuna aittir. Öğrencilerden fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi ve bu konudaki bilgilerini gözden geçirip hangi grafiğin *f* fonksiyonuna, hangi grafiğin bu fonksiyonun bir belirsiz integrali olan *F* fonksiyonuna ait olduğuna karar vermeleri istenmiştir. Bu soru, öğrencilerin görsel ve analitik düşünme stratejilerini bir arada kullanmaları, analitik stratejilerden yola çıkarak görsel stratejilere doğru hareket etmelerini gerektiren bir sorudur.

Öğrenciler birinci soruya bireysel çözümlerle başlamışlardır. Hale ve Gülay, bildikleri fonksiyonlar ve integralleri üzerinden hareket etmeye çalışmışlardır. Bu süre içinde diğer katılımcılardan çözüme ilişkin bir yanıt gelmemiştir. Daha sonra öğrencilerden bazılarının isteğiyle çözüme, grup çalışmasıyla devam edilmiştir. Gruplar, Gülay-Zehra, Hale-Funda ve Şeyda-Elif şeklinde oluşturulmuştur.

Gülay-Zehra: Gülay ve Zehra grup çalışması yapmaya başlamadan önce, çözüme ilişkin bir takım fikirler oluşturmuşlardır. Gülay a) şıkkında verilen integral ve fonksiyon grafiği için büküm noktalarını saymış *h*'nin büküm noktaları daha fazla olduğu için *h* fonksiyonunun, *g*'nin integrali olduğunu düşünmüştür.

Zehra ise fonksiyonun x-eksenin kestiği noktaları sayarak sonuca ulaşabileceklerini düşünmektedir.

> G: (*Zehra ile*) Ben bir mantık yürüttüm aslında. Büküm noktalarını düşün, bunda 3 bunda 2, bir x^2 fonksiyonunu düşün bir de 2x.
>
> Z: Ben de şöyle düşündüm. x-eksenini kestiği noktalar. Biri x^3'lü bir şey olsa, biri x^4'lü bir şey olacak ya, bunun üç tane kökü olacak gibi.
>
> G: Aaa, o daha mantıklı… Aynı kapıya çıkar. g de iki tane var, f de üç. O zaman bu F oluyor. Yani bu integrali oluyor, bu da kendisi oluyor.

Fakat Gülay ve Zehra a) şıkkı için ürettikleri stratejinin b) şıkkı için çalışmadığını düşünmekte ve bu yüzden yeni stratejiler aramaktadırlar.

> A: Siz ne düşündünüz?
>
> G: Şimdi x^3'ün integrali x^4 ya. Kendisi negatifse integrali pozitif verecektir diye düşündük.

Z: Yani bu tek fonksiyon ya. Şurada negatif değer aldığımızda, -1 noktasında bu -1'i verir ama integrali -1 noktasında 1 verir. Yani pozitif değer verir.

A: Peki bir şey soracağım, bu polinom fonksiyon değilse… Biliyorsunuz bazı fonksiyonlar var ne tek oluyor ne çift oluyor. O zaman ne yapacağız?

…

G: Teğet çiziyoruz. Türevinde teğet 0 verdiği nokta ya. Ona göre bu uyuyor. Ama hangisi f, hangisi F ona karar veremedik.

…

G: Biz mantığımızın doğru olduğunu düşünüyoruz.

A: Tüm şıklar için işe yaradı mı?

G: Bizce yaradı.

Z: Şimdi hocam, dedik ki F'nin türevi f'yi vermek zorunda. $\int f = F \Rightarrow F' = f$

Buradaki grafiklerden birine teğet çizdiğimizde diğer grafiğin de sıfırı kesmesini istedik.

Z: h fonksiyonuna büyük f demişiz. h=f, g= F demişiz. g'=h

Zehra ile Gülay'ın oluşturdukları son stratejide de görüldüğü gibi fonksiyonla integrali arasındaki ilişkiyi, türev ve fonksiyon arasındaki ilişkiyi kullanarak oluşturmuşlardır.

Hale-Funda: Hale ve Funda beraber çözüm yapmaya başladıkları andan itibaren fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi kullanmaya çalışmışlardır. Bu ilişkiyi fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi tersten kullanarak oluşturmuşlardır.

H: (*Funda ile*) Türev mantığıyla gidelim diye düşündük. Rolle teoremiyle falan da şey yaptık (*İlişki kurduk*) şu türevlenmiş fonksiyon, bu da kendisi. Normal hali ya integrali alındığı için türevlenmiş fonksiyonun. Ters mantığıyla düşünüyoruz. Bu f normal grafik olacak, şu olacak. Türev de sıfır olduğu için bu da kendisi olacak gibi bir mantık. Yani F normal hali, sanki türevle normal fonksiyon ilişkisini kurmaya çalışıyorum.

…

H: Biz yine türev mantığıyla gidelim dedik. f türevlenmiş fonksiyon ya, integral f de (F) türevlenmiş fonksiyonun normale dönüşmüş hali. Şimdi ben bu fonksiyona burada bir teğet çiziyorum. Sıfır. Bu noktanın diğer grafikte karşılık geldiği nokta sıfır. Yani bu f oluyor. Bu da f'nin integrallenmiş hali (*F*).

Şeyda-Elif: Şeyda ve Elif başlangıçta bildikleri fonksiyonlar ve integralleri üzerinden düşünmektedirler. Ancak düşündükleri fonksiyonlar genelde polinom fonksiyon olduğu için yaptıkları genellemelerde hatalara düşmektedirler.

Ş: Şeye baksak mesela bu 2x, bu x^2 +c

E: Ben şey diye düşündüm aslında, integralini alınan fonksiyon x-eksenin daha fazla noktada kesebilir. Çünkü onun +c'si olabilir. Aslında bu y'yi kestiği anlamına gelir gerçi.

A: Bir de onların hepsi polinom fonksiyon olmak zorunda mı?

Ş: Değil!

Onlar da Zehra ve Gülay gibi türev ve fonksiyon arasındaki ilişkiyi kullanarak soruyu çözmüşlerdir.

A: Nasıl yaptınız?

Ş: Fonksiyon bu noktada sıfır yani küçük f. Diğer fonksiyonun türevi de bu noktada x-eksenine paralel. Çünkü eğimi sıfır... Her noktayı böyle incelersek bulabiliriz diye düşündük.

2. Soru: ÇK-4'te yer alan ikinci soruda (Ek 1, ÇK-4, 2. Soru) grafiği verilen f fonksiyonlarının integrallerinin grafiğinin çizilmesi istenmektedir. Dört şıktan oluşan bu soruda öğrencilere iki değer verilmekte ve bu iki değere göre grafiklerini oluşturmaları istenmektedir. Bu soruda öğrenciler, hem bir önceki soruda öğrendikleri fonksiyon-integral ilişkisini kullanmaları hem de değişen sabitlerin fonksiyonun grafiği üzerindeki etkisini dikkate almaları gerekmektedir. Soru, grafiklerin şekli ve grafik üzerinde verilen değerler düşünüldüğünde, verilen grafiğin denkleminin de yaklaşık olarak elde edilebileceği niteliktedir.

Öğrenciler ilk üç şıkta çözüme ulaşabilirken, d) şıkkında sorun yaşamışlar ve tekrar geri dönmek üzere bu şıkkı üçüncü sorudan sonraya bırakmışlardır. Öğrenciler bu soruda da grup çalışması yapmışlardır.

Çizelge 4.19. ÇK-4, ikinci soru için öğrenci yanıtlarının özeti

Gruplar	Kullanılan Yöntemler
Gülay-Zehra	Grafiği sağlayan denklemi oluşturup integralini alma ve integral grafiğini bu denkleme göre oluşturma, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiye uyarlama
Hale-Funda	Grafiği sağlayan denklemi oluşturup integralini alma ve integral grafiğini bu denkleme göre oluşturma, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişki için grafiksel bağlantılar kurma.

Çizelge 4.19. devam ediyor.

Gruplar	Kullanılan Yöntemler
Şeyda- Elif	Grafiği sağlayan denklemi oluşturup integralini alma ve integral grafiğini bu denkleme göre oluşturma

Gülay- Zehra: Gülay ve Zehra ikinci sorunun a) şıkkında grafiğin, bir mutlak değer fonksiyonuna ait olduğunu ve kökünün de bire eşit olduğunu düşünmektedirler. Gülay ve Zehra fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi türev ve fonksiyon arasındaki ilişkiyi kullanarak oluşturmaktadır.

> Z: Biz dedik ki, eğer bize şu şekilde türevinin grafiğini verdiyse, yani y=b gibi bir sayı geliyorsa, bunun integralini aldığımızda, işte x'li bir katsayı gelmek zorunda.
>
> G: Doğrusal.
>
> Z: Bir noktasında da süreksizse demek ki o noktada bir şey yok.
>
> G: x'li bir şey olacak.
>
> Z: Mesela y=1 ve y=-1 grafiği olursa mutlak değerli bir şey bunu tamamlar dedik. F'i ona göre tanımladık.
>
> G: O yüzden grafiği böyle bir şey olur diye düşündük

Alıntıda da görüldüğü gibi Gülay ve Zehra grafiği ve analitik bilgilerini kullanarak çizecekleri grafiğin özelliklerini belirlemektedirler. Ancak bu bilgileri çoğunlukla oluşturacakları grafiğin denklemini oluşturabilmek için kullanmışlardır.

Gülay ve Zehra ayrı ayrı düşünüldüğünde Zehra, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi türev ve fonksiyonu arasında kurma konusunda Gülay'a oranla daha başarılıdır. Gülay, daha önceki çalışma kağıtlarında olduğu gibi elde edilecek grafiğe ait fonksiyonu, yazabildiği durumlarda yazmayı tercih etmektedir. Grup çalışması yaptıklarında bu özellikleri ile birbirlerini etkilemekte, var olan çözüm yöntemleriyle grup arkadaşının çözüm yöntemini birleştirmektedirler. Bu sorunun sonunda Zehra grafiğe ilişkin fonksiyonu oluşturup türev-fonksiyon ilişkisini kullanmıştır.

> Z: Ben buradan karar verdim. Çünkü bu bir doğru denklemi ve x'li bir şey gelecek. Yani birinci dereceden, doğrusal sonuçta... Bunun integralini

aldığımızda $\frac{ax^2}{2}+bx+c$ şeklinde bir parabol oluşacak. a'nın pozitif olduğunu biliyoruz çünkü artıyor. Artan olduğu için burada da değişmeyecek. a'sını yazmadım ama. Herhangi bir değişken göstermeyecek. O yüzden istediğimiz gibi çizebiliriz. Çünkü c keyfi.

G: Şey dedik. Şimdi bu x-1'in grafiği ya. Türevi ikiye ayırdık. $\frac{-x^2}{2}+x$ olacak. O zaman eğimi bu şekilde olacak şekilde grafik çizdik. Bir şöyle olur (0,0)'dan geçmek için bir de şöyle olur (0,1)'den geçmek için. Böyle böyle çizdik.

Gülay ve Zehra ile birlikte tüm gruplar sorunun d) şıkkında bükeyliğin yönü, fonksiyonun ve integralinin artanlığı ve azalanlığı konusunda sorun yaşamışlardır. Bu yüzden bu şık üçüncü sorudan sonraya bırakılmıştır. Üçüncü sorudan sonra bu özellik öğrenciler tarafından daha iyi anlaşılmıştır.

Hale-Funda: Hale ve Funda grubu da öncelikle oluşturmak istedikleri grafiğin denklemini yazmaya çalışmışlardır. Bu yüzden her bir şık için çözümlerine, parçalı tanımlı ya da mutlak değer fonksiyonu oluşturmaya çalışarak başlamaktadırlar.

A: Siz ne düşündünüz?

H: Şu süreksiz ya, o kafamızı karıştırdı ama. Önce şunu çizdik, şunu oluşturduk.

F: Parçalı fonksiyon

H: Parçalı fonksiyon gibi tanımladık. Sonra F(x)'i ona göre tanımladık. O da doğrusal bir şey olacak. Şöyle bir şey olacak bence.

F: Mutlak değer gibi olacak bence.

Hale ve Funda çifti fonksiyon ve integralinin arasındaki grafiksel bağlantıları en iyi kuran grup olarak karşımıza çıkmaktadır. Diğer grupların aksine yazmaya çalıştıkları grafik denklemlerini grafiksel özelliklerle birleştirmekte ve çözümlerini bu şekilde oluşturmaktadırlar. Bu yüzden sorunun d) şıkkında çözüme ilişkin doğru önerilerde bulunmuşlardır.

Şeyda- Elif: Bu soruda grafiksel bağlantılar kurma anlamında en çok zorlanan öğrenciler Şeyda ve Elif olmuştur. Öyle ki bazı durumlarda grafiklerden elde edebilecekleri bilgileri tamamen göz ardı edip analitik bilgilerine dayalı muhakemede bulunmuşlardır. Bu durum var olan cebirsel imajlarının, görsel imajlarının önüne geçmesine ve yanlış muhakemede bulunmalarına neden olmuştur.

Ş: Hocam, sizin dediğiniz gibi olmuyor. Burası kesinlikle böyle bir şey! Eğimin hiçbir önemi yok yani. Ama burası negatif olduğu için burası mutlak değer fonksiyonudur ve geçiremeyiz (0,0) noktasından.

A: (0,0) noktasından geçmez diyorsunuz yani?

E: Geçiremiyoruz biz.

Ş: Olmuyor yani, nasıl geçecek hocam? Böyle gitmek zorunda… Mutlak değer çünkü. Bu tarafı oluyor. Ama bunu böyle götürürsek, bu sefer sıfır olması lazım eğiminin… *(Var olan cebirsel imajlar, görsel imajların önüne geçiyor)* Bu da bir sayıya eşit olamaz.

Grup üyeleri ayrı ayrı incelendiğinde Şeyda, grafiksel bağlantılar kurma konusunda Elif'e göre daha başarılıdır. Elif, daha önceki çalışma kağıtlarında olduğu gibi görsel çözümlere çok fazla değer vermemesi, Şeyda'nın da bu şekilde yönlenmesine neden olmuş olabilir. Daha önceki çalışma kağıtlarında görüldüğü gibi Şeyda bu konuda oldukça başarılıdır. d) şıkkında öğrencilerin daha önce kullandıkları özellikleri kullanamama nedenleri arasında, Şeyda ve Elif'in bu şıklarda kullanılan grafiksel bağlantıları yanlış kullanmaları yer almaktadır.

E: Artan olduğu yerlerde zaten yukarı doğru bakacak. Artan.

H: Ama şu artmıyor.

E: Bu da azalan, o yüzden.

H: Ama pozitif dedik. Ona da pozitif dedik.

H: Sıfırdan yukarı, pozitif bölgede yani.

E: Orası azalıyor, eğime baksana.

H: Daha deminki mantığımızla bakarsak burası pozitif değerler aldığı için, burası da negatif değerler aldığı için kurmadık mı bu mantığı?

E: Bu artan fonksiyon, bu azalan fonksiyon... Öyle yapmadık mı?

H: Hayır bak, burası pozitif, burası negatif olduğu için burası artan burası azalandı negatif bölgede ya burası negatif değerler alıyor. Türev olan fonksiyon negatif değerler aldığı için azalan dedik buraya. Burası her halükarda…

E: Artan mı olacak yani…

H: Bence hep artıyor.

E: Ama şöyle bir fonksiyon düşün, aşağı doğru. Bu azalan fonksiyon olmaz mı? Bu türevin fonksiyonu…

3. Soru: ÇK-4'te yer alan üçüncü soruda (Ek 1, ÇK-4, 3. Soru) öğrencilerden verilen fonksiyon grafiklerine ait integral fonksiyonlarının grafiklerini oluşturmaları ve bu grafik üzerinde yerel maksimum, yerel minimum ve dönüm noktalarına karşılık gelen noktaları işaretlemeleri istenmektedir.

Bu soruda Şeyda ve Elif dışında katılımcıların hepsi, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklara; yerel maksimum, yerel minimum ve dönüm noktalarına rahatlıkla karar verebilmişlerdir. Şeyda ve Elif'in ise bir önceki soruda olduğu gibi integral fonksiyonunun artan ve azalan olduğu aralıklarda hala bir takım sorunları vardır ve b) şıkkında bunu ifade etmişlerdir. Bu iki öğrenci, sınıfta arkadaşlarının açıklamalarıyla yaşadıkları zorlukları aşmışlardır.

4. Soru: ÇK-4'te yer alan dördüncü soruda (Ek 1, ÇK-4, 4. Soru) öğrencilerden, grafiği verilmiş bir fonksiyonun integralinin grafiği istenmektedir. Bu çalışma kağıdında yer alan diğer sorulardan farklı olarak öğrencilerin integral ile ilgili olarak kullandıkları tüm görsel stratejileri içermektedir. Öğrenciler daha önceki bilgilerini kullanarak, integral fonksiyonunun artan, azalan olduğu aralıklara, yerel maksimum ve minimum noktalarını belirlemede sorun yaşamamışlar ancak bu bilgilerini, x-ekseni ile eğri altında kalan alan değeri bilgileriyle birleştirememişlerdir. Diğer çalışma kağıtlarında bu konuda daha deneyimli görünen Zehra bu bağlantıyı ilk kuran öğrencidir.

Katılımcıların dördüncü çalışma kağıdındaki görsel tercihleri ile ilgili genel değerlendirme

Gülay, bu çalışma kağıdında diğer katılımcılar gibi öncelikli olarak grafiği verilen fonksiyonun denklemini yazıp istenen grafiği oluşturmaya çalışmıştır. Ancak Zehra ile oluşturdukları grupta, Zehra'nın kullandığı bazı çözüm yöntemlerini kullanmaya başlamıştır (Fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiye uyarlama, teğetlerin yönünden yararlanma). Kullandığı bu stratejiler daha önce kullandığı analitik stratejilerle birleştiğinde görsel ve analitik stratejiler arasındaki bağlantıyı daha iyi kullanmaya başladığı söylenebilir.

Elif, ÇK-4'te Şeyda ile beraber çalışmıştır. Önceki çalışma kağıtlarında görsel muhakemeye kullanmaya karşı oldukça isteksiz bir öğrencidir. Bu çalışma kağıdında ise tamamıyla görsel muhakeme gerektiren soruların bulunması, öğrencinin bu çalışma kağıdında başarılı olmasına engel olmuştur. Diğer çalışma gruplarının aksine kullandıkları analitik muhakemeye fazlasıyla güvenmişler ve o nedenle oluşturabilecekleri grafiklerin bir takım özelliklerini fark edememişlerdir. Grup arkadaşı Şeyda'nın daha önceki çalışma kağıtlarında görsel muhakeme kullanma konusunda oldukça başarılı olduğu düşünüldüğünde bu özelliği ile grup arkadaşını etkilediği düşünülebilir.

Hale, çalışma kağıdının başlangıcında soruları, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak çözerken daha sonra analitik bilgilerini, grafiksel bilgileriyle birleştirerek görsel ve analitik muhakemeyi en iyi kullanan öğrenci olmuştur.

Şeyda, daha önceki çalışma kağıtlarında görsel muhakeme kullanımı konusunda oldukça başarılı olmuştur. Ancak aynı başarıyı bu çalışma kağıdında gösterememiştir. Grafiksel bağlantıları oluşturma konusunda grup arkadaşıyla birlikte oldukça geride kalmıştır.

Zehra: Önceki çalışma kağıtlarında görsel muhakeme kullanımı konusunda çok fazla bilgi elde edilemeyen Zehra, bu çalışma kağıdında fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi kullanmasıyla analitik muhakemeden görsel muhakemeye geçişte oldukça başarılıdır. Ayrıca diğer çalışma kâğıtlarında, eğri altında kalan alanı en iyi kullanan öğrenci olarak dikkat çeken Zehra bu çalışma kâğıdındaki son soruda bu özellikle, diğer özellikler arasındaki bağlantıyı kullanan ilk öğrenci olmuştur.

Funda: Başlangıçtaki çalışma kağıtlarında görsel muhakeme kullanma konusunda oldukça isteksiz davranan Funda, üçüncü çalışma kağıdında gösterdiği değişimi bu çalışma kağıdında da devam ettirmiş ve grup arkadaşıyla birlikte grafiksel bağlantılar kurma konusunda oldukça başarılı olmuştur.

4.3. Son Klinik Görüşme Öncesi Yapılan Görüşmeler ve Son Klinik Görüşmelerin Analizi

Son klinik görüşmelere başlamadan önce, öğrenciler ile öğretim deneyinde kullanılan çalışma kağıtları ve bu çalışma kağıtlarında yer alan etkinlikler üzerine yarı yapılandırılmış birer görüşme yapılmıştır. Bu görüşme sorularındaki amaç öğrencilerin etkinliklere ilişkin görüşlerini sözel olarak almak, görsel tercihleri ve (varsa) tercihlerindeki değişim hakkında bilgi sahibi olmaktır. Görüşme sorularında tüm öğrencilerin yanıtları, her bir soru için genel olarak değerlendirilmiştir.

4.3.1. Görüşme sorusu 1

Dört hafta boyunca yaptığımız uygulamaları düşünürsen,

a) En çok zorlandığın sorular hangileriydi? Neden?

b) Neler öğrendin?

Birinci görüşme sorusuna öğrenciler tarafından verilen yanıtlara ilişkin sıklık çizelgesi aşağıdaki gibidir

Çizelge 4.20. Katılımcıların öğretim deneyi boyunca zorlandıkları sorulara ilişkin sıklık çizelgesi (n=6)

Çalışma Kağıtları	Sıklık					
	1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	5. Soru	6.Soru
ÇK-1	1	1	1	1	-	6
ÇK-2	1	-	-	2		
ÇK-3	3	1	3	2		
ÇK-4	6	5	5	5		

Öğretim deneyi sırasında katılımcılar tarafından en zor bulunan sorular birinci çalışma kağıdındaki altıncı soru ve ÇK-4'te bulunan sorular olduğu gözlenmiştir. ÇK-1, altıncı soru görsel muhakeme gerektiren bir sorudur. Katılımcılar bu soruyu çözmek için genelde cebirsel işlemler kullanmayı denemişler fakat hiçbiri görsel muhakeme kullanmayı düşünememiştir. Daha sonra katılımcılar, araştırmacı tarafından grup çalışmasına yönlendirilmişler ve iki kişilik gruplar halinde soru üzerinde tartışmaya devam etmişlerdir. Gruplardan sadece biri (Hale-Gülay), sorunun doğru çözümü için görsel muhakemeyi kullanmış ve elde ettikleri çözüm, diğer grupların (Zehra-Elif, Şeyda-Funda) çözümleriyle birlikte tahtaya yazılmıştır. Tahtaya yazılan üç çözüm yönteminin doğruluğu, araştırmacı tarafından tartışmaya açılmıştır. Hale-Gülay dışındaki gruplar tarafından oluşturulan çözüm yöntemleri tamamıyla analitik muhakemeye dayanmış ve çözüm sürecinde cebirsel hatalar bulunmuştur. Bu hatalar, çözüm yöntemleri tartışmaya açıldığında katılımcılar tarafından çeşitli yöntemler kullanılarak (ters örnek bulma vb.) fark edilmiş ve görsel çözümün doğruluğu tüm katılımcılar tarafından kabul edilmiştir. Bazı öğrenciler, görsel muhakemeye yönelik çözümün doğruluğu konusunda başlangıçta şüphe duymuşlar ancak yanlışlığı konusunda herhangi bir kanıt bulamadıkları için daha sonra kabul etmişlerdir.

> F: Şu ters olanda da (*ÇK-1, 6. soru*) baya zorlanmıştık.
> A:Neden zorlanmıştın?
> F: Düşündüğümüz şeyi ifade edememiştik. Yani bize doğru gelmişti. Daha doğrusu ilk defa böyle bir şeyle karşılaşmıştım. Ters fonksiyonun integralini alırken. O yüzden.
> ***
> Ş: Mesela bir soru vardı. Hani Gülay'lar bunu çözmüşlerdi, benim aklıma hiç gelmemişti o grafiği çizmek, grafik üzerinden yorum yapmak...

Benzer şekilde öğrenciler ÇK-4'te bulunan sorularda da zorlandıklarını belirtmişlerdir. Bu sorularda zorlanmalarının nedenlerini öğrenciler çeşitli şekillerde ifade etmişlerdir. Bunlar;

- Bu soruların, öğrencilerin daha önceden karşılaşmadıkları türden sorular olması (Funda, Hale)
- Bir fonksiyonun grafiği ile integralinin grafiği arasındaki ilişkiyi daha önce hiç sorgulamamış olmaları (Funda, Elif, Hale, Gülay)
- Bu tür çözümlerin akıllarına çok yatmaması (Elif)
- İlişkilerin cebirsel anlamda biliniyor olmasına karşılık grafiksel uygulamalarda karıştırılması (Şeyda, Gülay)

> E: En zor dördüncü haftaydı.
> A: Neden zordu?
> E: Grafik çizmekte ben karıştırıyorum yani. Artanlık azalanlık tam olarak aklıma yatmıyor.
> A: Ama onları normalde sen biliyorsun.
> E: Biliyorum ama bazen karıştırıyorum. E, tam olarak her şeyin çözümünü bu şekilde bulabileceğimizi düşünmüyorum, bu benin aklıma yatmıyor.
> ***
> F: Birinci türeve, ikinci türeve göre artan azalanlığı biliyoruz, hani türevin pozitif negatif olmasını ama… Mesela şunların grafiklerini çizememiştim. (*ÇK-4, 4. soru*)
> A: Neden çizemediğini düşünüyorsun?
> F: İşte yerleşmediği için. Daha önce hiç böyle bir şeyle karşılaşmamıştım. Verilen bir şeyin integralinin grafiği ya da türevinin grafiği gibi bir şey çizmeye kalkmamıştım.

Öğrencilerin bu yanıtları araştırmacı tarafından görsel muhakemede deneyim eksikliği olarak kabul edilmiştir. Öğrenciler, bu ilişkileri cebirsel olarak bilmelerine rağmen, görsel olarak çok fazla uygulama yapmadıkları için bu sorularda zorlanmışlardır. İki tür muhakemeye de açık bu tarz sorularda öğrenciler, sınıfta çoğunlukla analitik muhakeme kullanmakta ve soru çözümlerini, bu muhakeme türü üzerinden yürütmektedirler. Oysa uygulama anlamında düşünüldüğünde bu tür, görsel ve analitik muhakemenin kullanılabileceği soruları tartışmaya açmak öğrencilerin bu iki strateji arasında daha rahat bağlantı kurmalarına neden olacaktır. Ayrıca bu durum öğrencilerin, genel fonksiyon grafikleri üzerinde yorum yapamadıklarını göstermektedir.

Öğrencilerin zorlandıkları bir diğer çalışma kağıdı da ÇK-3 olmuştur. ÇK-3 birinci soruda öğrencilerden geometrik bir kanıt istenmiş; ÇK-3 dördüncü soruda ise iki eşitliğin varlığını doğrulamaları ve bu eşitliklerden çıkan sonucu yorumlamaları istenmiştir. Öğrenciler başlangıçta geometrik bir kanıtın nasıl olabileceği konusunda fikir yürütemedikleri için bu soruda zorlanmışlardır. Katılımcılardan Hale bu durumu aşağıdaki cümlelerle ifade etmişlerdir.

> H: Bu soruda (*ÇK-3, 1. soru*). Mesela burada şey var. Görüyorum aşağıya bakıyorum mesela şurada ipucu; ama integralleri küçükten büyüğe doğru sıraladığımda integralleri de gider. Oradan gelebileceğini tahmin ediyorum ama ona yakın bir yerden bulduk zaten. Ama onu kâğıda dökerken nasıl yaklaşacağımı hemen pat diye dökemiyorum kağıda.

Alıntıda da görüldüğü gibi Hale aslında çözüm sürecine ilişkin bir takım tespitleri vardır ancak daha önce karşılaşmadığı bir yöntem olduğu için fikir yürütmekte zorlanmaktadır.

Yine bu çalışma kağıdında öğrencilere, belirli integralde kullanılan “c” sabitinin grafiksel anlamına ilişkin bir soru sorulmuştur. “c” sabiti katılımcıların, belirsiz integral ile ilgili öğrendikleri ilk şey olmasına rağmen, bu sabitin fonksiyonun integralinin grafiğini nasıl etkileyeceğini daha önce hiç düşünmedikleri anlaşılmıştır.

Öğrencilerin uygulamalar sırasında en kolay buldukları sorular, alan ile ilgili olanlardır. Buna rağmen öğrencilerin bu soruların çözümünde hata yaptıkları gözlenmiştir. Öğrenciler integral değeri ile eğri altında kalan alanın pozitif ya da negatif değerleri arasındaki farkı çok da iyi bilmediklerini kabul etmişlerdir.

> H: Bunu sanırsam ilk ben şeyi söylemiştim. Küçükten sıralamayı ben söylemiştim. Sonra biri tahtaya kalkıp daha farklı yaklaşmıştı. Oradan mesela oturtmuştuk.

(*ÇK-1*) Burada şeyleri karıştırdım ben. x-ekseni ile şunlar arasında kalan alanla şunlar var ya (*ÇK-1, 3. soru*) burada şunlardaydı galiba, önce hepsini hesaplıyoruz sonra artıya dönüştürüyorduk. Bunda da hepsini artı mı yapıyorduk öyle bir şeydi sanırım. Ben onu, o farkı arkadaşlar çözünce gördüm. Yani ben öyle düşünmemiştim.
A: Anladım, integral alırken yapıyorsun ama grafik üzerindeki anlamını bilmiyorsun, öyle mi?
H: Ya aslında alan olduğunu biliyorum, bunu integralle çözerken, integralle yaptık işlemleri galiba, grafik üzerinde değil de integralle yaparken bir şeyleri artı yaptık. 0'dan 9'a artı aldık galiba aşama aşama. Orada aşama aşama… Şurada da hepsini hesapladıktan sonra artı mı aldık, bir şey yaptık işte şu anki farkı hatırlamıyorum, onu orada öğrenmiştim. O ayrımı bilmiyordum.
***
Ş: Mesela, ilk başladığımızda alanla integral arasında, yanlış hesaplamıştım ilk soruyu, şimdi ikisi arasındaki farkı biliyorum. Negatif bölgede sorun çıkıyor ya. Onu karıştırmıştım mesela, şimdi öğrendiğime inanıyorum...

Çizelge 4.20'de de görüldüğü gibi öğrencilerin en çok zorlandığı sorulara ilişkin verdiği yanıtlarda, bu durumun nedenlerinin öğrencilerin bu konudaki deneyim eksikliği ve integralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik olduğu görülmektedir. Öğrencilerin söylemlerine göre bu konudaki deneyim eksikliğinin iki nedeni olabilir:

- Ders öğretmenlerinin bu konuya verdiği önem ve derste bu yönde çözdükleri problem ve alıştırmalar;
- Öğrencilerin bu tür çözümlere verdiği önem.

Öğrenciler, bu iki durumu şu cümlelerle ifade etmişlerdir.

F: Zaten bu soruda hatırlıyorum. En başta önce formülden yapmıştım. Sonra da şeyle yapmıştım. Yani alandan dolayı... İki türlü de yapmıştım.
A: O zaman şu mu seni rahatsız eden? Grafiğin hangi durumlarda…
F: Ya emin… Formülle daha çok emin olacağımı düşünüyorum o yüzden daha çok… Genellikle formüle yöneliyorum. Yani yapabiliyorsam… O yüzden…
***
E: Mesela şurada falan yapıyorduk, integral içindeki değerine bakıyorduk. Aklıma yatmıyordu yani onlar.
A: Neden yatmıyordu?
E: Yani alışık olduğum bir şey değil herhalde. Alanı biz çok basit bir şekilde geçmiştik. O yüzden yani…

Öğrenciler öğretim deneyi süresince, yukarıda bahsedilen ve zorlandıklarını belirttikleri sorularla ilgili konuları, fonksiyonun tek veya çift olması durumunda belirli integralin alanla olan ilişkisini kullanmayı; fonksiyonun kendisinin grafiği ile integralinin grafiği arasında ilişki kurmayı; fonksiyonun kendisinin grafiği, tersinin grafiği ve bunların alanla olan ilişkisini öğrendiklerini ifade etmişlerdir.

Katılımcılar, öğretim deneyi boyunca integralin geometrik anlamına ilişkin çeşitli çalışmalarda bulunmuşlar ve bu durum onların soru çözerken kullandıkları yönteme ilişkin bir takım değişimlere neden olmuştur. Öğrenciler, öğrendikleri yeni yöntemlerin hoşlarına gittiğini; bu yöntemi ileride kullanabileceklerini ifade etmişlerdir. Ancak değişimin varlığı, bu aşamada sadece öğrencilerin sözel ifadelerine dayanmaktadır.

4.3.2. Görüşme sorusu 2

İntegralle ilgili bir soruyu çözmekte kullandığın yöntemi etkileyen faktörler nelerdir?

Bu soruya verilen yanıtlar, katılımcıların integral ile ilgili soruları çözmekte kullandıkları yöntemleri etkileyen faktörlerin çoğunlukla görsel tercihlerine ve önceki öğrenim hayatlarından getirdikleri alışkanlıklara bağlı olduğunu göstermektedir. Katılımcılardan Elif, soruları çözerken integral ve türevin birbirinin tersi işlemler olduğu ve çözümlerini bu yönde düşünerek oluşturduğunu; Hale soruyu çok da fazla incelemeden, integral hesaplama yöntemlerini düşündüğünü belirtmiştir. Funda için elinde belirli bir fonksiyonun olması integral hesaplamalarında yeterlidir. Bu fonksiyonu kullanarak integral ile ilgili hesaplamaları yapabildiğini söylemektedir. Ancak fonksiyon belirli olmadığı durumlarda (genel bir “f” fonksiyonunun söz konusu olduğu durumlarda) düşünmenin daha zor olduğunu belirtmektedir. Örnek olarak da dördüncü çalışma kağıdındaki soruları vermektedir. Benzer şekilde Gülay da, çoğunlukla formül kullandığını ifade etmiştir. Öğrencilerin söylemlerine ilişkin alıntılardan bazıları aşağıda yer almaktadır.

> H: Ya ben direkt integralden çözmeye başlıyorum sanırsam, mesela çok alandan yararlanmamıştım. Ne bilim değişken değiştirilmesi gerekiyorsa değişken değiştirmeyle, hani o integralin görünüşüne göre değişiyor. Ki bilmediğim bir integralse muhtemelen değişken değiştiriyorum. Öyle yani. Mutlak değer olduğu zaman parçalar ayırıyorum.
>
> ***
>
> E: Ben hep integrali türevin tersi olarak düşünüyorum, zaten öyle de. Hani bir fonksiyon olduğunda bunu du, dv'li yapmak (*Kısmi integrasyon yöntemiyle*) bana hep zor geliyor. Onun yerine hep nasıl onun integralini alabilirim diye

> düşünüyorum, yani tersinden gitmeye çalışıyorum sürekli. Öyle yatıyor benim aklıma.

Diğer katılımcıların aksine Zehra ve Şeyda, kolay buldukları sorular için grafik çizebileceklerini ya da belirli integral-alan ilişkisini kullanabileceklerini söylerken, onun dışındaki sorularda, integral hesaplama yöntemlerini kullanacaklarını belirtmişlerdir.

> Z: Fonksiyon.... Hani fonksiyonun integralini alırken grafik çizilebilecek bir şey verir daha kolay alırım. Üçgensel bölgedir, dörtgensel bölgedir. Ama daha farklı bir şey verdiğinde integralini almak bilinen kurallara göre, bu şekilde hesaplamak daha kolay geliyor.
> A: Yani sorunun veriliş şekli mi?
> Z: Yani veriliş şekli, hani istenen soruya göre değişir çözüm yöntemim.

Görüldüğü gibi öğrencilerin integral ile ilgili soruları çözmekte kullandıkları çözüm yöntemleri, görsel tercihleri yönünde olmaktadır. Katılımcılar çoğunlukla analitik muhakeme kullandıklarını belirtmişler; iki öğrenci ise duruma göre integral alan ilişkisinden yararlandığını, dolayısıyla görsel muhakeme kullandıklarını ifade etmişlerdir.

4.3.3. Görüşme sorusu 3

Sorularda kullanılan çözüm yöntemlerini düşünürsen;

a) Senin çözüm yönteminden farklı çözüm yöntemleriyle karşılaştın mı? Nasıl? Senin çözüm yönteminden farkları neler?

b) En çok hangi çözüm yöntemlerini beğendin? Neden? Karşılaştığın yeni çözüm yöntemlerini düşündüğünde bundan sonra tercih edeceğin var mı? Hangileri? Neden?

Öğrencilerin son görüşme sorusuna verdiği yanıtlar incelendiği zaman, görsel muhakeme kullanılan ya da gerektiren yanıtların çok da kullanılmadığı gözlenmektedir.

Bir fonksiyonun grafiği ile bu grafik üzerindeki değerlerin ve özel noktaların türev ile ilişkileri öğrenciler tarafından bilinmektedir ancak bu tür ilişkiler görsel anlamda çok fazla kullanılmamış; genelde analitik düzeyde kalmıştır. Öğrencilerin ön klinik görüşme sorularına verdiği yanıtlardan görüldüğü gibi bir fonksiyon ve türevi arasındaki matematiksel ilişkiye benzer bir ilişki, fonksiyon ve integrali arasında kurulmamıştır. Öğrenciler, bu tür ilişkileri öğretim deneyi ve klinik görüşmeler sırasında, integralin türevin tersi olması özelliğini kullanarak oluşturmaya çalışmışlardır. Fakat fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi, önce fonksiyondan türeve doğru, daha sonra türevden tekrar fonksiyona doğru hareket ederek bulmaları öğrencilerin zihinlerinde bilişsel bir yük yaratmış ve bu durum onlara oldukça zor gelmiştir.

> H: Türevle gördüğümüz için türevle yaklaştık zaten. Hiç yorumlamadığımız için belki o an yorumlamıştık. Türevle fonksiyonun grafiğini gördüm tabi, ekstremumları falan bulurken ama integralle tam tersi düşünecektim.
> ***
> Ş: Mesela maksimum minimuma ne zaman nasıl baktığımıza tam emin olamıyorum yani, o an için anlayabiliyorum ama sonradan bir soru geldiğinde hangisiydi acaba diye düşünüyorum.
> A: Anladım, kağıt üzerinde yaparken… Peki, grafik üzerinde niye zorlandığını düşünüyorsun?
> Ş: Yani, şimdi mesela burada baktığımda kolay da, bir türevinin grafiği veriliyor, bir ikinci türevinin grafiği veriliyor,
> A: Türevinin grafiği hiç verilmedi aslında sadece fonksiyonun kendisi ve integrali verildi.
> Ş: Ya sonuçta tersi türevi oluyor ya. Kimisinde hani mesela diyoruz ki böyle normal bakıyoruz, artarak gitmiş artmıştır diyoruz fonksiyonun kendisinde, kimisin de mesela pozitif bölgede bu artan fonksiyondur falan diyoruz. Kimisinde mesela en yüksek noktaya maksimum nokta derken kimsinde sıfırladığı noktaya diyoruz ya.

Öğrenciler için soruların çözümünde integral-alan ilişkisini kullanmak aslında yeni bir çözüm yöntemi değildir. Öğrenciler, derslerde de bu ilişkiyi kullanarak zaman zaman sorular çözmüşlerdir. Ancak bu sorular çoğunlukla basit düzeyde ve belli soru kalıpları ile sınırlı kalmış; dolayısıyla öğrenciler bu tür sorularda zorlanmamışlardır. Ancak öğretim deneyi boyunca karşılaştıkları ve integral-alan ilişkisini inceleyen sorular, farklı soru türlerinde uygulama fırsatı vermiş ve onların bu ilişkiye olan bakış açısının değişmesine neden olmuştur.

> G: Daha doğrusu şey oluyordu. Benim çözüm yöntemim bir tarafa yazılıyordu. Başka bir çözüm yöntemi oluyordu. Bir soru vardı ama hatırlamıyorum Mutlak değer ile ilgili (*|x+1|*). Ben çok uğraşmıştım ama grafikten direkt çıkıyordu herhalde. Onu niye düşünmedim diye düşünmüştüm. Daha kolay çıkıyordu grafikten.
> A: O çözüm yöntemlerini düşünürsen bundan sonra tercih edeceğin var mı? Bunu kullanırım dediğin?
> G: İlk bir düşünürüm, kullanabileceğim yerde direkt grafik kullanırım herhalde.
> ***

> H: Mesela şuradaki grafiği yorumlamak da hoştu (*ÇK-4, 1. soru*). Daha önce hiç böyle integralle beraber grafiğini görmemiştim. Şu birinci günkü sorumuz da güzeldi, tersi ile olan ilişkisini çözümlemek güzeldi. Onun çözümü hoşuma gitti. Dedim ya düşünüp de kağıt üzerine dökemediğim şeyler aslında hoşuma gitti.

Görüldüğü gibi öğrencilerin farklı çözüm yöntemlerini denemeleri düşünce süreçlerinde farklı sistemlerin (görsel boyut) de devreye girmesine olanak sağlamıştır.

Öğrencilerin, öğretim deneyinden sonra analitik çözüm yöntemlerinin yanında görsel çözüm yöntemlerini de kullanmaya yönelik olarak farklı iki tavrının geliştiği söylenebilir: Bunlardan ilki, öğrencilerin görsel çözümlere karşı olumlu tutum geliştirmeleri ve bu tür çözüm yöntemlerini daha sonra kullanabilecekleri yönünde görüş bildirmeleridir. Bu yönde tutum geliştiren öğrencilerin daha önceden bildikleri cebirsel ilişkileri, grafik üzerinde kullanmak hoşlarına gitmiş ve bu ilişkileri daha da anlamlandırabildiklerini belirtmişlerdir. Öğrencilerden dördü (Hale, Funda, Gülay, Şeyda) bu yöndeki tutum değişikliklerini sözle ifade etmelerine karşın, bir öğrenci (Zehra) bu değişimi doğrudan belirtmemiştir.

> F: İşte ters fonksiyonda (*ÇK-1, 6. soru),* benim hiç aklıma grafik üzerinden o şekilde yapmak gelmemişti. En başta da tereddüt etmiştim arkadaşlarım o şekilde çizdiğinde de. Olmayacak gibi gelmişti. Doğru olmadığını düşünmüştüm. O konuda yanıldım yani.
> Fonksiyonun formülleriyle uğraşmaktansa şeklini çizerek yapmak daha kolay onu gördüm. Ve direkt oradaki geometri bilgilerimden dolayı yapabileceğimi düşünüyorum.

Öğrencilerin görsel çözüm yöntemi kullanmaya olan direncinin devam etmesi ise öğretim deneyi sonucunda gelişen ikinci davranış şekli olarak karşımıza çıkmaktadır. Katılımcılardan Elif çözüm yöntemlerinin güvenirliğine olan şüphesinin, görsel çözüm yöntemlerini kullanmasına engel olacağını belirtmiştir. Bu durum Eisenberg ve Dreyfus (1991) tarafından ortaya konan "görselleştirmeye karşı isteksizlik"'in öğrenilmiş bir fenomen olduğu bulgusunu doğrulamaktadır. Çünkü öğrenci, integral konusunda kullandığı analitik muhakeme yöntemlerini, daha önceki öğrenim hayatında gördüğü eğitim ile bağdaştırmakta ve bundan sonra da bu şekilde devam ettireceğini belirtmektedir.

> A: Peki, böyle düşünmene neden olan şey ne? Ya da neden sana böyle daha kolay geliyor, hiç düşündün mü?

E: Böylesi daha kolay geliyor, ne bileyim, ya da öğrenirken ilk başta bu şekilde öğrendim. Çünkü integrali türevin tersi olarak öğrettiler bize lisedeyken falan. Hani bu kadar da karışık şeyler yoktu o zamanlarda da. O yüzden öyle daha kolay oluyordu.

***

E: Yine alan kullanılabilir ama ben pek tercih etmem herhalde.

A: Neden tercih etmezsin?

E: Tam olarak yapamıyorum, somut gelmiyor bana. O grafik farklı şekillerde çizilebilir gibi geliyor. Farklı da olabilir gibi geliyor bana, yani bir kesinliği yokmuş gibi.

A: Ya da hiçbir şekilde kullanmam mı diyorsun?

E: Çok nadir kullanırım, çünkü kafama çok yatmıyor bu grafik benim.

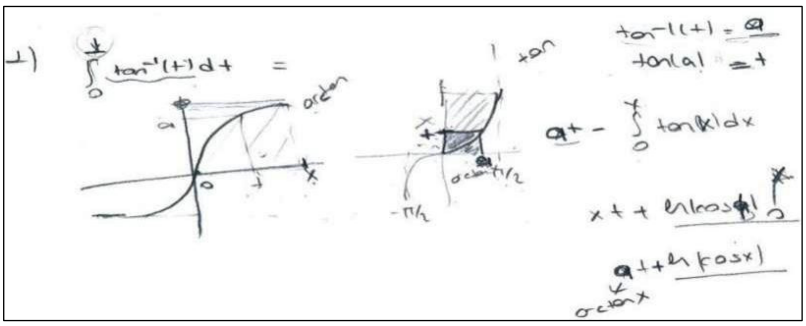
4.3.4. Son klinik görüşmenin birinci sorusu

Aşağıdaki integral değerini hesaplayınız.

$F(x)=\int_0^x \tan^{-1}(t)dt$, (x>0)

Bu soru, ön klinik görüşmelerde yer alan dördüncü soru ve öğretim deneyinde yer alan ÇK-1, altıncı soruya paralel olarak hazırlanmıştır. Birinci klinik görüşme sorusu hem görsel hem de analitik muhakeme kullanılarak çözülebilmektedir. Bu soru, öğrencilerin, her iki muhakeme de kullanılarak çözülebileceği sorularda kullandıkları çözüm yöntemlerinde meydana gelen değişiklikleri belirlemek amacıyla sorulmuştur.

Gülay: Gülay bu soruyu görsel muhakeme kullanarak çözen öğrencilerden biridir. Öncelikle f(t)=tan(t)'nin grafiğini çizmiş ve $f^{-1}(t)=\tan^{-1}(t)$'nin grafiğini elde edebilmek için f(t)=tan(t)'nin grafiğinde eksenlerin yerini değiştirmiş ve soruyu bu şekilde düşünerek çözmüştür.



Şekil 4.13. Gülay'ın birinci soru için çözümü

G: Grafiği buradan bulamam çünkü arctan'ın integralini bilmiyorum. Muhtemelen tan üzerinden işlem yapacağım diye düşündüm. Çünkü öyle yapıyorduk. Fonksiyonun tersinde y-eksenine göre sınırları değiştirip şu alanı alabiliyorduk. Yani aslında benden şu alanı istiyor.
A: O alanı bulmak için ne yapman lazım?
G: tan'ın sınırları sıfırdan… İşte… 0'dan x'e *(kadar)* aslında alamam. O zaman şurayı almış olurum.
A: O alanı bulabilir misin?
G: Bulabilirim galiba
A: O alanı bulduktan sonra öbür alanı bulmak için ne yapman gerekir?
G: 0'dan x'e *(kadar)* tan'ın integralini alır xt'den çıkartırım.

Gülay'ın bu soruda yaşadığı en büyük zorluk sınırların ve değişkenlerin alıştığı türden olmamasıdır. Bu yüzden soruyu çözerken değişkenleri kendisi yeniden isimlendirmeye çalışmıştır.

Genel olarak çözüm yöntemi incelendiğinde Gülay soruyu, öğretim deneyinde kullanılan yöntemden yararlanarak çözmüştür. Gülay'ın aklına öncelikle görsel muhakeme gerektiren yöntemin gelmiş olmasının nedeni, öğretim deneyi sırasında bu yöntemi grup arkadaşı Hale ile birlikte oluşturmuş olmaları olabilir.

Elif: Elif soruyu önce integral-alan ilişkisini kullanarak çözmenin daha kolay olabileceğini düşünmüş ancak daha sonra fikrini değiştirip kısmi integrasyon kullanmaya karar vermiştir. Aklına gelen ilk çözümü kullanmamasının nedeni olarak alan ile ilgili çözümlerin çok da aklına yatmamasını göstermiştir.

E: Bunu alandan çözebiliriz herhalde. u, v li (*Kısmi integrasyon yöntemiyle*) çözmek biraz karışık olabilir… *(Çözüm yapıyor)*
A: Nasıl düşündün?
E: u , v den çıkabileceğini düşündüm.
A: İlk başta şey dedin, bu herhalde alandan…
E: Alandan sanki daha kolay ama alan kısmı aklıma yatmadığı için tam olarak algılayamıyorum. Yani mesela bunun, tanjantın grafiği şöyle herhalde, eksisinde şöyle mi olacak… *(Grafik çizerek anlatmaya çalışıyor)* Ama yine de ben grafikten çözemiyorum.
A: Peki, şu çözümü hatırlamasaydın, şuradan devam edebilir miydin? Çünkü aklına ilk olarak gelen şey buydu.
E: Ama buradan yapamazdım ki.
A: Nereden biliyorsun, uğraşmadın…
E: Şuradan şuraya desek *(Çözüm yapıyor)* ln'li bir şey çıkıyor nasıl çevireceğim?

Hale: Son klinik görüşmenin birinci sorusunun çözümünde, görsel muhakeme kullanan bir diğer öğrenci de Hale'dir. Daha önce de belirtildiği gibi bu soru, öğretim deneyi ve ön klinik görüşmelerde kullanılan iki soruya paralel olarak hazırlanmıştır. Öğretim deneyi sırasında bu soruyu görsel muhakeme kullanarak çözen gruptaki diğer öğrenci de Hale'dir. Yöntemi, Gülay ve Hale'nin birlikte oluşturması ve bu yöntemi son klinik görüşme sorusu için de kullanmaları, çözüm yöntemini içselleştirmelerine bağlanabilir.

Aslında Hale, öncelikle cebirsel yöntemler kullanmayı tercih eden bir öğrencidir. Buna rağmen başlangıçta soruyu, cebirsel olarak çözemeyeceğini düşündüğü için görsel muhakeme kullanarak çözmeye yönelmiştir.

Şeyda: Şeyda soruyu analitik muhakeme kullanarak çözmüştür. Aklına gelen ilk yöntem integral-türev ilişkisinden (türevi $\tan^{-1}(t)$'i veren bir ifade bulmak) yararlanmak olsa da soruyu kısmi integrasyon kullanarak çözmüştür.

Zehra: Zehra da soruyu Şeyda gibi kısmi integrasyon kullanarak çözmüştür. Sorunun çözümü için başka bir yöntem düşünemediğini belirtmiştir.

Funda: Funda, öncelikle bir analiz kitabında gördüğü ve bu tür sorularda kullanılan bir formülü kullanarak çözmek istemiş ancak hatırlayamadığı için integral-türev ilişkisinden yararlanmaya çalışmıştır. Fakat türevi $\tan^{-1}(t)$'i veren bir ifade bulamadığı için soruyu kısmi integrasyon kullanarak çözmüştür. Funda genellikle, integral ile ilgili soruları çözerken sırayla bu yöntemleri denediğini ve en son kısmi integrasyon yöntemini kullandığını belirtmiştir. Soruyu çözdükten sonra, daha önce, öğretim deneyinde kullanılan yöntemi de kullanabileceğini belirtse de bu tür çözümler ona daha karışık gelmektedir. Öğretim deneyinde öğrendiği çözüm yöntemini, birebir aynı tür sorularda kullanabileceğini düşünmektedir. Funda'nın sadece analitik çözüm yöntemlerini kullanmaya olan inancı oldukça kuvvetlidir ve bu inancı değiştirmek için daha fazla görsel muhakemenin veya görsel ve analitik muhakemenin birlikte kullanıldığı soru ile karşılaşması gerekmektedir.

> F: Yani aslında ters fonksiyondan gidebilirdim. Oradan da bir şey yapamadım yani. Çözdüğümüzde o şekilde yapmıştık.

<u>Son klinik görüşme birinci soru için genel değerlendirme</u>

Sorunun katılımcılar tarafından çözümünde hem görsel hem de analitik muhakeme kullanılmıştır. Katılımcıların çözüm yöntemleri incelendiğinde, iki katılımcı (Gülay ve Hale) soruyu, daha önce öğretim deneyinde olduğu gibi integralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak çözerken, iki katılımcı (Funda ve Elif) alandan çözülebileceğini düşünmüş, ancak uygun çözüm yöntemini bulamadıkları için analitik çözüm yöntemine yönelmişlerdir. İki katılımcı (Zehra ve Şeyda) ise doğrudan analitik çözüm yöntemini (kısmi integrasyon) kullanmıştır.

Gülay ve Hale, bu sorunun çözümünde, öğretim deneyinde kullandıkları yöntemi kullanmışlardır. Öğretim deneyi sırasında da bu yöntem ile çözen ikili grubun üyelerinin Gülay ve Hale olması, onların bu soruyu görsel muhakeme kullanarak çözmelerine olanak sağladığı söylenebilir. Sorunun, integral-alan ilişkisi kullanılarak çözülebileceğini düşünen Funda ve Elif'den Elif, soruyu önce bu ilişkiyi kullanarak çözmeyi düşünmüş ancak bu tür çözümlerin aklına yatmadığı gerekçesiyle tekrar analitik çözüme yönelmiştir.

Funda ise daha önce çözülen sorudaki fonksiyonun genel olmasında, integral alan ilişkisini kullanmanın uygun olacağını düşünmüş fakat bu soruda fonksiyonun belirli olmasının integral hesaplama yöntemlerini kullanmasını gerektirdiğini ifade etmiştir. Bu durum, tercihleri görsel yönde olmayan öğrencilerin (eğer mümkünse veya olanaklı görünüyorsa) öncelikle analitik çözümlere yönelmesine, eğer kullandıkları çözüm yönteminden sonuca ulaşamazlarsa alternatif çözüm yollarını denemeleri ile açıklanabilir. Ayrıca öğrencilerin görsel muhakemede deneyimlerinin az olması, bu muhakeme türüne ilişkin çözüm yöntemini uygulamak istediklerinde, daha önceden bildikleri yöntemi, birebir kullanabilecekleri soruları beklemelerine neden olmaktadır.

Yine öğretim deneyi sırasında bu soruya paralel olarak hazırlanan soru için öğrenciler ikişerli gruplar oluşturmuşlar ancak Gülay ve Hale dışındaki diğer öğrenciler, integral hesaplamalarını içeren analitik çözümler üretmişlerdir. Daha sonra bu çözümler tahtada yan yana yazılarak doğruluğu incelenmiştir. Her ne kadar üretilen görsel çözümün doğruluğu Hale ve Gülay dışındaki diğer öğrenciler tarafından kabul edilse de kendileri tarafından üretilmeyen ve daha önceden bildikleri yöntemlerden farklı olan bu yönteme yeterince önem vermedikleri söylenebilir. Bu durum katılımcıların görsel tercihlerinin bir sonucu olarak daha önceki öğrenim hayatlarında da bu şekilde gerçekleştiği söylenebilir. Öğrencilerin görsel çözüm yöntemi kullanabilmeleri için bu tür çözümleri kullanabilecekleri ortamların sayısının artması ve bu tür çözümlerin de öneminin vurgulanması gerektiği söylenebilir.

Çizelge 4.21'de de görüldüğü gibi öğrencilerin soruyu çözmekte en çok kullandığı düşünme şekli olan analitik muhakeme frekansı en yüksek veri olarak karşımıza çıkmaktadır. Öğrencilerin bir kısmının görsel muhakeme kullanması ve bir kısmının da kullanılabilecek yöntem olarak görmesi bu tür verilerin de frekansının yüksek olmasına neden olmuştur. Öğrencilerin görsel muhakemeye ilişkin deneyim eksikliği bu soruyu çözerken de ortaya çıkmış ve grafik kullanma konusunda sorun yaşamalarına neden olmuştur.

Çizelge 4.21. Birinci soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel İfadenin Oluşturduğu Bilişsel Yük	Görsel Muhakemede Deneyim Eksikliği	İntegral-Türev ilişkisi	Tercihlerde değişim
Gülay	-	İntegralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak soruyu çözme	-	Bir fonksiyonun kendisi ile tersinin grafiği arasındaki ilişkiyi anlamada eksiklik	-	-
Elif	Kısmi integrasyon kullanarak soruyu çözme	İntegralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak çözmeyi düşünme ancak uygun çözüm yöntemini bulamama	İntegral alan ilişkisinin anlamakta zorlandığı için kullanmak istemediğini belirtme	-	-	-
Hale	Başlangıçta uygun integral hesaplama yöntemini arama	İntegralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak soruyu çözme	-	-	-	Grafik kullanarak uygun çözüm yönteminin bulunabileceğini düşünme

Çizelge 4.21. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Görsel Muhakeme	Görsel İfadenin Oluşturduğu Bilişsel Yük	Görsel Muhakemede Deneyim Eksikliği	İntegral-Türev ilişkisi	Tercihlerde değişim
Şeyda	Ters fonksiyonların integrali için formül hatırlamaya çalışma, Kısmi integrasyon kullanarak soruyu çözme	-	-	-	Türevi "$\tan^{-1}(x)$"e eşit olan fonksiyon bulmaya çalışma	-
Zehra	Kısmi integrasyon kullanarak soruyu çözme	-	-	-	-	-
Funda	Ters fonksiyonların integrali için formül hatırlamaya çalışma, Kısmi integrasyon kullanarak soruyu çözme	İntegralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak çözmeyi düşünme ancak uygun çözüm yöntemini bulamama	-	-	Türevi "$\tan^{-1}(x)$"e eşit olan fonksiyon bulmaya çalışma	-

4.3.5. Son klinik görüşmenin ikinci sorusu

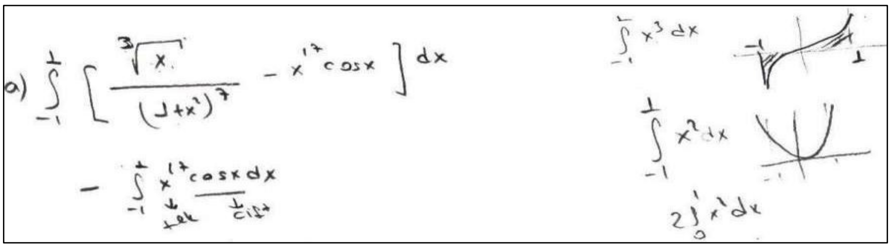
Aşağıdaki integrallerin değerini hesaplayınız.

a) $\int_{-1}^{1} [\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^7} - x^{17} \cos x] dx$

b) $\int_{-3}^{3} (4x^3 - 5)\sqrt{9 - x^2} dx$

Bu soru, ön klinik görüşme sorularındaki ikinci soru ve ikinci çalışma kağıdındaki üçüncü soruya paralel olarak hazırlanmıştır. Bu soru, öğrencilerin öğretim deneyi sırasında öğrendikleri tek ve çift fonksiyonların integrallerinin alınmasında kullanılan yöntemi nasıl anlamlandırdıkları ve kullandıklarını belirlemek amacıyla sorulmuştur.

Gülay: Gülay bu soruyu görsel ve analitik muhakemeleri birlikte kullanarak çözmüştür. Öğretim deneyi sırasında tek ve çift fonksiyonların özellikleri hem analitik hem de görsel muhakeme kullanılarak anlatılmıştır (Öğrenciler, önce tek fonksiyonun orijine göre simetrik olduğunu dolayısıyla belirli integralin sınırları simetrik olduğunda integral değerinin sıfır olduğunu; çift fonksiyonun ise y eksenine göre simetrik olduğunu öğrenmişlerdir. Daha sonra tek ve çift fonksiyonlar için f(-x)=-f(x), f(-x)=f(x) eşitliklerinin geçerli olduğunu dolayısıyla f tek olduğunda $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$ ve f çift olduğunda $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ olduğunu kanıtlayarak öğrenmişlerdir. Yani soruyu hem görsel hem de analitik muhakeme kullanarak çözebilecek durumdadırlar). Gülay, bu soruyu tek ve çift fonksiyonların özellikleri kullanılarak yapılabileceğini düşünmüş ancak özelliklerini hatırlamak için tek ve çift olduğundan emin olduğu bir fonksiyonun (f(x)=x^3, f(x)=x^2) grafiğini çizmiş ve eğri altında kalan alanı tarayarak sonucun ne olması gerektiğini bulmuştur.



Şekil 4.14. Son klinik görüşme, ikinci soru için Gülay'ın çözümü

Daha sonra integrali alınması gereken ifadelerin tekliğine veya çiftliğine cebirsel işlemler yaparak karar vermiş ve sonuca ulaşmıştır.

Ancak sorunun b) şıkkında Gülay, ön klinik görüşmelerde takıldığı $\sqrt{9-x^2}$ ifadesinin integralini alması gerekmektedir. Gülay bu soruda, üstteki yarım çemberin alanı konusunda sıkıntı yaşamadan soruyu çözebilmiştir.

> G: Aaaa… Benim ilk başta takıldığım yer.
> A: İlk başta nerde takılmıştın?
> G: Tam çember mi, yarım çember mi? Ama pozitif; o zaman yarım çember oluyordu. $\pi r^2/2 \times (-5)$, $-45\pi/2$

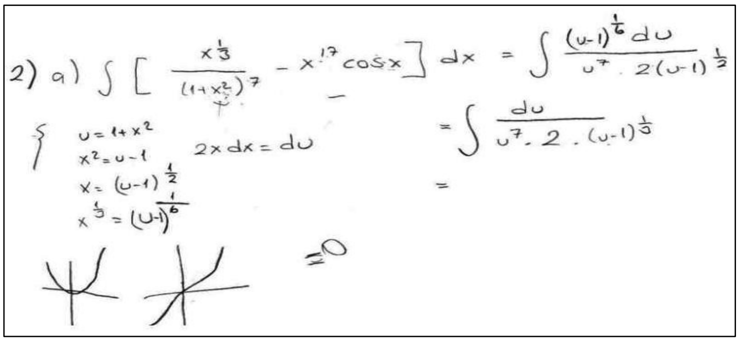
Elif: Soruyu hem görsel hem de analitik strateji kullanarak çözen öğrencilerden biri de Elif'tir. Tek ve çift fonksiyonların özelliğini, hem analitik (hem tek ve çift fonksiyonların özelliğini hem de sin ve cos fonksiyonlarını kullanarak) hem de görsel muhakeme (bildiği tek ve çift fonksiyonların grafiklerini çizerek) kullanarak hatırlamaya çalışmıştır.

Sorunun b) şıkkında ise ilk bölümü, fonksiyonun tekliği veya çiftliğini kullanarak çözerken $\sqrt{9-x^2}$ ifadesini trigonometrik bir dönüşüm yaparak bulmuştur.

Hale: Hale, sorunun a) şıkkını tek ve çift fonksiyonların özelliklerini kullanarak çözmüştür. Bu sırada analitik muhakemeden yararlanmıştır. Sorun b) şıkkında ilk bölümü tek ve çift fonksiyonların özelliklerini kullanırken $\sqrt{9\text{-}x^2}$ ifadesinin integralini almak için önce, ön klinik görüşmelerde olduğu gibi trigonometrik bir dönüşüm yapmak istemiş ancak bunun bir çember denklemi olduğunu fark etmiş ve integralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak soruyu çözmüştür.

> H: -3'den 3'e. İntegralini buldum. Ama yazmayacağım sınırları. Aaa…
> A: Ne oldu? *(Koordinat ekseni ve yarıçapı 3 olan bir çember çizdi. Ve çemberin sol yarısını taradı)*
> H: Boşa çözmüşüm o kadar. Şimdi 0'dan 3 e kadar olan alanı bulup 2 ile çarpmayacak mıydık? Boşu boşuna sinθ'larla uğraştık. Sınırları yerleştiriyorum. Sonucu da buldum bu arada. -3'den 3'e sınırları yerleştiriyorum.

Şeyda: Bu soruda, fonksiyonun teklik ve çiftlik özelliğini kullanan bir diğer öğrenci de Şeyda'dır. Özelliği hatırlamak için görsel muhakemeden yararlanmıştır.



Şekil 4.15. Son klinik görüşme, ikinci soru için Şeyda'nın çözümü

> Ş: Bunların tek çift olduğuna bakıyorduk demi? Evet, çünkü ben buna önceden de bu şekilde uğraşmıştım. Himmm… Şimdi tek mi çift mi diye bakacağız önce, eğer öyle ise, eee, tek fonksiyon ise sıfırlayacak, çift fonksiyon ise iki katı olacak.

Sorunun $\sqrt{9\text{-}x^2}$'li bölümünü ise analitik muhakeme (trigonometrik dönüşüm) kullanarak çözmüştür.

Zehra: Zehra, ikinci sorunun her iki şıkkını da analitik muhakeme kullanarak çözmüştür. Fonksiyonların tek veya çift olmasını f(-x)=-f(x) ve f(-x)=f(x) eşitlikleriyle açıklarken, b) şıkkını integral hesaplama yöntemlerinden biri olan trigonometrik dönüşümü kullanarak çözmüştür.

Funda: Funda da soruyu çözerken fonksiyonların tek ya da çift olma özelliğini analitik muhakemeyle birlikte kullanmıştır. b) şıkkında ise trigonometrik dönüşüm yaparak soruyu çözmüştür.

> F: Burası tek fonksiyon. Çarpımı da tek fonksiyon... Burası çift fonksiyon sanırım ama bölü olduğu için yine tek fonksiyon olacak. Sınırları da birbirinin ters işaretlisi olduğu için sıfır oluyordu.
> A: Tek fonksiyonun özelliği neydi neden sıfır oluyordu hatırlıyor musun?
> F: Çünkü şey oluyordu. Birbirinin zıttı olduğu için f(-x)'i -f(x) olarak. Oradan da onlarda birbirini götürüyordu.
> A: Nasıl götürüyordu?
> F: Hım…. Açtığımızda bunun başına bir tane daha eksi geliyordu. Yani şu fonksiyon üzerinden düşünürsek –f(x) olarak çıkacaktı, yukarıdaki. O da -(-f(x)) olacaktı. Yani birbirini götürüyor integrali açtığımızda.

<u>Son klinik görüşme ikinci soru için genel değerlendirme</u>

Öğrencilerin hepsi, soruların a) ve b) şıkkını fonksiyonun tek veya çift olmasının özelliğini kullanarak çözmüşlerdir. Ancak öğrencilerden dördü (Gülay, Elif, Şeyda, Hale) tek fonksiyonun (ya da çift fonksiyonun) integral değerini hesaplarken fonksiyonun grafiğinde alanların pozitif ya da negatif bölgede kalmasını kullanmış; diğer iki öğrenci (Funda, Zehra) ise tek fonksiyonların "f(-x)=-f(x)" özelliğini kullanarak açıklamıştır. Öğretim deneyinde bu açıklamaların her ikisine de yer verilmiş olmasına rağmen öğrenciler, tek fonksiyonun bu özelliğini farklı olarak anlamlandırdıkları gözlenmiştir.

Elif, tek fonksiyonun grafiksel anlamını hatırlıyor olmasına rağmen, analitik tanımını kullanmayı tercih etmiş ve grafiksel anlamını hatırlamakta zorlandığını ve karıştırdığını, bu yüzden kullanmak istemediğini belirtmiştir. Şeyda ise a) şıkkı için önce integral hesaplama yöntemlerinden değişken değiştirmeyi kullanmak istemiş ancak sonuca ulaşamamıştır. Daha sonra tek fonksiyonun özelliğini kullanmış ve bunu, bildiği tek ($y=x^3$) ve çift ($y=x^2$) iki fonksiyonun grafiği üzerinde açıklamıştır.

Sorunun b) şıkkında yer alan $\sqrt{9\text{-}x^2}$ ifadesini öğrenciler iki şekilde çözebilmektedirler. Bunlardan birincisi, integral hesaplama yöntemleriyken ikincisi, fonksiyonun grafiğinin gösterdiği geometrik şekilden yararlanarak eğri altında kalan alanın hesaplanmasıdır. Öğrencilerden dördü birinci yöntemi kullanırken, diğerleri ikinci yöntemi tercih etmişlerdir.

İkinci yöntemi kullananlardan Hale, önce integral hesaplama yöntemlerinden değişken değiştirmeyi kullanmıştır. Ancak bu çözümü henüz tamamlamadan integralinin hesaplanması gereken fonksiyonun bir çember gösterdiğini fark etmiş ve çözümünü bu yönde değiştirmiştir.

Hale'nin kullandığı çözüm yönteminde takıldığı bir diğer nokta, integral değeri ile alan değeri arasındaki farktır. Yani integral değerinin, integral-alan ilişkisi kullanılarak hesaplandığında bulunan sayısal değerin pozitif ya da negatif olup olmayacağıdır. Bu durum öğrencilerin, integralin belki de en çok kullanılan fakat üzerinde çok fazla durulmadığı için tam olarak kavramsallaştırılamamış anlamından kaynaklanmaktadır.

Gülay da b) şıkkı için Hale'nin kullandığı yönteme benzer bir yöntem kullanmıştır. Burada da ön klinik görüşmelerde olduğu gibi analitik ifadeye bağlı bir karmaşa yaşamış ancak bu defa yaşadığı karmaşayı çok daha kolay aşmıştır.

Bu soruda en çok kullanılan muhakeme türü analitik muhakeme olmuştur. Öğrenciler çoğunlukla analitik çözümlere yönelmişlerdir. Ancak görsel çözümlerin sayısı da oldukça fazladır. Öğrencilerin, görsel çözümlerin varlığının farkında olup da tercih etmemelerinin en büyük nedeni, bu muhakeme türünün zihinlerinde yarattığı bilişsel yük olduğu söylenebilir. Onlar için analitik çözümlerin veya formüllerin öğrenilmesi (belki de ezberlenmesi) daha kolay olmaktadır ancak bu yöntemlerin sağladığı 'öğrenme'nin kalıcılığı azalmaktadır. Oysa analitik çözümleri görsel çözümlerle birleştirmek ya da bilginin yapılandırma sürecinde görsel öğelerden yararlanmak, zihinsel şemalar arasındaki bağları daha da kuvvetlendirmekte ancak önceki yönteme göre daha fazla bilişsel yük getirmektedir. Bu yükü azaltmanın önemli yollarından biri belki de öğrencilerin bu konuda daha fazla deneyim kazanmasını sağlamak olabilir.

Çizelge 4.22. İkinci soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

	Analitik Muhakeme	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmasa	Görsel muhakeme	Görsel İfadenin oluşturduğu bilişsel yük	İntegral-Türev ilişkisi	Tercihlerde değişim
Gülay	-	Çember denklemin gösterdiği grafikte sorun yaşama	Fonksiyonların tekliğini veya çiftliğini integral-alan ilişkisini kullanarak yorumlama	-	-	-
Elif	Fonksiyonları n tekliğini veya çiftliğini f(-x)=-f(x) ve f(-x) =f(x) kullanarak yorumlama	-	Fonksiyonların tekliğini veya çiftliğini integral-alan ilişkisini kullanarak yorumlama	Görsel ifadelerin çok karmaşık gelmesi	-	-
Hale	Başlangıçta $\sqrt{9-x^2}$ ifadesinin integralini trigonometrik dönüşüm kullanarak çözmeyi deneme	$\sqrt{9-x^2}$ ifadesindeki dönüşümden kaynaklanan bilişsel karmaşa	Soruyu integralin geometrik anlamını kullanarak ($\sqrt{9-x^2}$ 'dan yararlanarak) hesaplama	-	-	Öğrencinin trigonometrik dönüşüm kullanmak yerine integral-alan ilişkisini kullanması
Şeyda	$\sqrt{9-x^2}$ ifadesinin integralini trigonometrik dönüşüm kullanarak ve fonksiyonların tekliğini veya çiftliğini f(-x)=-f(x) ve f(-x) =f(x) kullanarak hesaplama	-	Fonksiyonların tekliğini veya çiftliğini integral-alan ilişkisini kullanarak yorumlama	-	Başlangıçta türevi, integral altındaki ifadeyi veren bir fonksiyon arama	-
Zehra	$\sqrt{9-x^2}$ ifadesinin integralini trigonometrik dönüşüm kullanarak ve fonksiyonların tekliğini veya çiftliğini f(-x)=-f(x) ve f(-x) =f(x) kullanarak hesaplama	-	-	-	Başlangıçta türevi, integral altındaki ifadeyi veren bir fonksiyon arama	-

Çizelge 4.22. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmasa	Görsel muhakeme	Görsel İfadenin oluşturduğu bilişsel yük	İntegral-Türev ilişkisi	Tercihlerde değişim
Funda	$\sqrt{9\text{-}x^2}$ ifadesinin integralini trigonometrik dönüşüm kullanarak ve fonksiyonların tekliğini veya çiftliğini f(-x)=-f(x) ve f(-x) =f(x) kullanarak hesaplama	-	-	-	-	-

4.3.6. Son klinik görüşmenin üçüncü sorusu

$y=\sqrt{3-x}$, eğrisinin (1,3) aralığında, x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?

Bu soru, daha önce yapılan ön klinik görüşmelerde kullanılan sorular arasında yer almaktadır.

Gülay: Gülay bu soruyu, ön klinik görüşmelerde olduğu gibi bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren formülü kullanarak çözmüştür.

Elif: Elif bu soruyu çözerken ön klinik görüşme de olduğu gibi formül kullanmak istemiş ancak formülü tam olarak hatırlayamadığı için belirli integralin sınırları ve değişkenler konusunda sorun yaşamıştır. Formülü hatırlamak için grafik çizmiş ve $y=\sqrt{3-x} \Rightarrow y^2=3-x$ dönüşümünü yapmıştır. Bu dönüşüme uygun olarak $y^2=3-x$ ifadesinin grafiğini çizmiş ve bu grafiğin $y=\sqrt{3-x}$ ifadesine ait olduğunu düşünmüştür. Ancak bu grafiği çözüm sürecinin bir parçası olarak kullanamadığı için yaptığı hata, Elif'in çözüm süreci için bir problem oluşturmamıştır.

Hale: Ön klinik görüşmelerde, bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren formülü hatırlamadığı için soruyu çözemeyeceğini söyleyen Hale, son klinik görüşmelerde istenen formülü, soruda verilen eğrinin grafiği üzerinde silindir yönteminin çıkarılışını kullanarak bulmuştur. Ancak çizdiği grafik daha önce Elif'in de yaptığı gibi $y^2 = 3 - x$ ifadesine aittir. Hale, cebirsel olarak iki matematiksel ifadenin birbirine denk olduğu dolayısıyla aynı grafikle ifade edilebileceğini düşünmektedir. Ancak araştırmacının sorularıyla bu farkı anlamıştır.

Şeyda: Şeyda da Hale gibi ön klinik görüşmelerde, bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmini veren formülü hatırlamadığı için soruyu çözememiştir. Öğrenciler integral ilgili uygulamalarda çoğu zaman o uygulamaya ilişkin formül ezberleme yoluna gitmektedirler. Aslında öğrencilerin integral uygulamalarında formül ezberlemeye yönelik olan tutumu, görsel ifadelerin zihinsel kodlama aşamasında sağladığı avantajları da göz ardı etmelerine neden olmaktadır. Bu durum Paivio'nun "İkili Kodlama Teorisi" (Dual Coding Theory) ile de açıklanabilir. Bellek modellerine göre duyusal belleğimize dışarıdan gelen uyaranlar, uyarıcının niteliğine göre görsel ya da işitsel bellek tarafından kaydedilir. Fakat bunların bellekte tutulma süreleri oldukça sınırlıdır. Uyarıcının niteliği bu sürenin artmasına neden olabilir. Belleğin gelen bilgileri kodlama kapasitesini geliştirmek için bilgi, birden fazla sisteme hitap edecek şekilde sunulmalıdır. Şeyda'ya da bu bilgi hem grafiksel hem de analitik yöntemlerle anlatılmış olmasına rağmen, ön klinik görüşmelerde (muhtemelen) sunulan görsel çözüme çok önem vermediği için grafiksel bağlantıyı kurmayı düşünmemiştir. Aslında bu bağlantıyı sağlayabilen öğrenciler bu tür uygulamalarda formülü hatırlamıyor olsalar bile grafik üzerinden kurdukları bağlantılarla sonuca ulaşabilmektedirler. Son klinik görüşmelerde, Şeyda da verilen eğrinin grafiği üzerinde silindir yöntemini uygulayarak soruyu çözebilmiştir.

> Ş: x-ekseni etrafında döndüreceğim, o zaman böyle bir şekil oluşur. Ben bu şeklin hacmini hesaplayamam.
> A: Neden hesaplayamazsın?
> Ş: Çünkü formülünü hatırlayamıyorum.
> A: Formülü veya sorunun nasıl çözüldüğünü sana hatırlatacak bir şey yok mu?
> Ş: Silindiri hatırlamaya çalışmıştım ama hatırlamıyorum gerçekten, sadece ya nasıl bir şeydi… Hiç hatırlamıyorum.
> A: Peki silindir yöntemine neden silindir yöntemi deniyor?
> Ş: Silinidir oluşturuyoruz çünkü.
> A: Nasıl silindir oluşturuyoruz?
> Ş: Şöyle. Silindiri döndürüyoruz.
> A: Tamam. O silindirin yüksekliği ne? Yani oradaki silindir oluşuyor madem.
> Ş: y

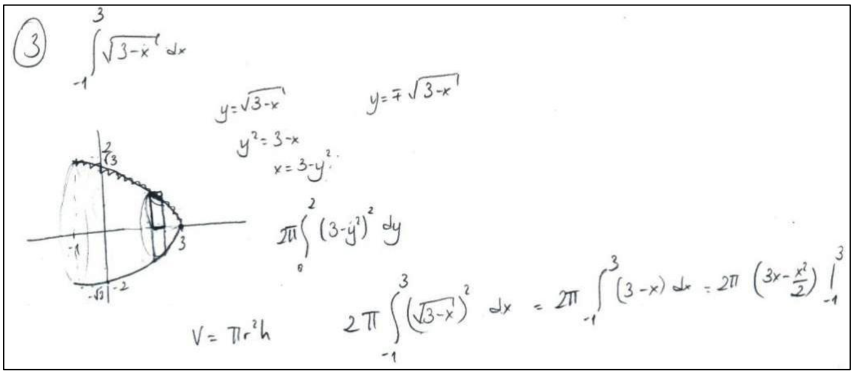
A: y dediğimiz şey ne?
Ş: Yani fonksiyonun aldığı değerleri, yani f(x) oluyor. Burasına da Δ(x) diyorduk.
A: O zaman silindirin hacmi neydi?
Ş: $\pi r^2 h$
…
A: Doğru yaptın, başlangıçta soruyu yapamayacağını çünkü formülü hatırlamadığını söyledin. Başlamak bile istemedin, hatta bu soruyu daha önce sorduğumu ve yapamayacağını söyledin. Yani soruyu yapmana neden olan şey neydi? Sadece silindir yöntemi olduğunu söyledin. Silindirler çiziyorduk dedin, sana bunları hatırlatan şey neydi?
Ş: Yani az çok böyle bir şeyler olduğunu biliyordum ama biz eğim hesaplarken $1+f^2(x)$, g(x) üzeri gibi şeyler yaptığımız için hangisi olduğunu hatırlamıyordum. Aslında mantıklı yani…

Zehra: Zehra, ön klinik görüşmelerde olduğu gibi soruyu, önceden bildiği formülü kullanarak çözmüştür.

Funda: Funda çözüme, soruda verilen eğrinin grafiğini çizerek başlamıştır. Ancak Hale ve Elif gibi Funda da $y=\sqrt{3-x}$ grafiği yerine, daha kolay çizebileceğini düşündüğü $y^2=3-x$ ifadesinin grafiğini çizmiş fakat eğrinin döndürülmesi sürecinde yarım dönmenin yeterli olabileceğini, tam dönmeye gerek olmadığını gördüğünde bir karmaşa yaşamıştır.

F:Fonksiyonu çizmeye çalıştım ama takıldım.
A: Neden takıldın?
F: Şimdi mesela şurada önce 0 değerini verdim 3 noktasında kesecek. 1 ve –1 değerini verdim, 2'de kesecek. Onu…
A: Şimdi ne düşünüyorsun?
F: Sanki bir şeyler yanlış gibi geliyor ama bilmiyorum. Yani, x-ekseni etrafında döndüreceğim ama… Yani ben hep böyle tam bir dönme düşünmüştüm. Yani bunu yarım döndürsem de yine aynı şekil olacak yani. Alt ve üst kısımda olduğu için. Bunlar…
A: Peki sence nerde sorun var?
F: Şu an sınırlarda mı var. Ona bakıyorum ama… Şekli yanlış çizdim herhalde.
A: Peki ben sana bir şey sorabilir miyim? $y^2=3-x$ ile $y=\sqrt{3-x}$ arasında fark var mı?
F: Hmm… Evet burada pozitif tarafını almam gerekiyor sadece. Şu kısmını yani… *(Çizdiği parabolün üst kısmını gösteriyor)* Evet şimdi oldu sanırım.
A: Peki bu hatayı neden yaptığını düşünüyorsun?
F: Sorun zaten eksili olan o kısmının da olmasıydı. Ben karelerini alıp x'i çektim buradan. Yani hiç negatif kısmının da bu şekilde olabileceğini düşünmemiştim.
A: Mesela sana $y^2=3-x$ verildiğinde $y=\sqrt{3-x}$'i elde etmekle, $y=\sqrt{3-x}$ verildiği zaman $y^2=3-x$ aslında aynı şeyler midir?

F: Aynı değeri veriyor ama aynı şeyler değil. y şu şekilde ($y = \pm\sqrt{3-x}$) olurdu benim yazdığım gibi olsaydı. Şu alt… İki kısmın da olması bu şekilde gidiyor.



Şekil 4.16. Son klinik görüşme, üçüncü soru için Funda'nın çözümü

Daha sonra Funda, Hale ve Şeyda gibi grafik üzerinde silindir yöntemini kullanarak doğru formüle ulaşmıştır. Ancak formüle iki çarpanı eklemiştir. Bu çarpanı, oluşturduğu formülde yer almamasına rağmen formülü bu şekilde hatırladığı için eklemiştir.

A: Peki silindir yöntemine neden silindir denmiş onu hatırlıyor musun?
F: Ya şey yapıyorduk, silindirler içinde yani…
A: Nasıl bir silindir hatırlıyor musun?
F:Hiçbir fikrim yok hatırlamıyorum çünkü?
A: Peki bu şekli x-ekseni etrafında döndürdüğün zaman oluşan bir silindiri gösterir misin bana?
F: Analizde şöyle yapıyorduk ama bu sene? İçinde oluşacak, mesela şurada. Böyle birşey.
A: O silindirin hacmini nasıl hesaplarsın?
F: Yine taban alanı çarpı yükseklikten yapıyoruz. Şimdi hatırladım galiba (*Dönel cisim içinde bir silindir oluşturur)*
A: Şimdi o silindirin yüksekliği nedir? Tamam, orası silindirin nesidir?
F: Yarıçapıdır.
A: Tamam. Şimdi bir silindirin hacmini yazar mısın bana?
F: $\pi r^2 h$
A:Tamam, devam edelim. r dediğin şeyi gösterdin.
F: y yani denklemimiz oluyor.
A: Tamam, r^2'yi bulduk. Gelelim h'ye? Silindirin yüksekliği nedir?
F: O zaman x'de aldığı şey oluyor.
A:Yani?
F: *(Şekil üzerinde bir aralık gösteriyor)* Bir sürü olacağı için, o zaman x'in sınırları olmuş olacak.

A: Bir sürü olacak ama kaç tane olacağını ben biliyor muyum?
F: Hayır, yani aslında yüksekliği ne kadar aldığımıza bağlı.
A: Yani o yükseklik ne olacak?
F: Değişiyor.
A: Değişiyorsa ne olmalı o zaman "h"?
F: Sınırların x'e ait olması gerekiyor. Çünkü şurada *(x-eksenini gösteriyor)* değişiyor.

Funda, bu soruyu çözerken karıştırdığı noktalardan biri de böyle bir döndürme işleminde, sınırlarını hangi eksen üzerinden alacağıdır. Çizdiği grafik öğrenciye bu sorununu çözmesinde de yardımcı olmuştur.

<u>Son klinik görüşme üçüncü soru için genel değerlendirme</u>

Katılımcılar ön klinik görüşmelerde, bu soruyu çözmek için çoğunlukla hacim hesaplamaya ilişkin formülü hatırlamaya çalışmışlar; dolayısıyla analitik yöntemler kullanmışlardır. Son klinik görüşmelerde, bu formülü hatırlamakta zorluk çekmeyen öğrenciler, soruyu yine aynı şekilde çözmüşlerdir (Zehra, Gülay). Ancak ilk görüşmede formülü hatırlamadığı için soruyu çözemeyen öğrencilerden bazıları, soruyu çözmek için bir grafik üzerinden hareket ederek soruyu çözmeyi başarmışlardır (Funda, Hale, Şeyda). Fakat bu çözümler sırasında, analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa yaşayan öğrenciler de olmuştur.

Funda da Şeyda gibi önceki klinik görüşmede, formülü hatırlamadığı için soruyu çözemeyeceğini düşünmüştür. Sadece fonksiyonun grafiğini çizmiştir ve bu grafiği aralıkları belirlemek için kullandığını, başka bir işe yaramadığını söylemiştir. Ancak son klinik görüşmede Funda soruyu, çizdiği grafik üzerinde, silindir yönteminde kullanılan formülün çıkarılışını kullanarak çözmüştür. Fakat çözüm yapmaya başlamadan önce çizdiği grafikle ilgili sorun yaşamıştır. İntegral ifadesi içinde yer alan $y = \sqrt{3-x}$ fonksiyonunun grafiğini çizmeden önce fonksiyonu, kendisi için üzerinde işlem yapması daha kolay bir forma ($y^2 = 3-x$) getirmiştir. Fakat grafiği çizerken $y = \sqrt{3-x}$ fonksiyonu yerine $y^2 = 3-x$ fonksiyonunu dikkate almış ve bilişsel bir karmaşa yaşamıştır. Öğrenci için $y = \sqrt{3-x}$ ile $y^2 = 3-x$ ifadelerinin gösterdiği grafikler arasında bir fark yoktur. Çünkü birçok öğrenci için bu durum, herhangi bir matematiksel ifade için yapacakları en basit işlemlerden (bir eşitliğin her iki tarafının karesini almak) biridir. Elif bu durumu "Ama hep böyle yapmıyor muyuz biz?" cümlesiyle ifade etmiştir. Aslında Elif bu cümlesinde oldukça haklıdır.

Gerçekten aslında biz bunu, hep bu şekilde yapıyoruz. Ancak bu şekilde yaparken atladığımız nokta, cebirsel olarak bu iki matematiksel ifadenin "ise" bağlacı ile bağlandığıdır. Dolayısıyla buradaki iki matematiksel ifadenin aslında tam olarak aynı şeyi ifade etmemesidir. Yani öğrencilerin bu işlemi yaparken fark etmedikleri nokta '$y=\sqrt{3-x}$ ise $y^2=3-x$' in birbirine 'ise' değil de 'ancak ve ancak' bağlacı ile bağlı olduğunu düşünmesidir. Aslında öğrenci çözümünü cebirsel ifade üzerinden ters yönde sürdürdüğü zaman herhangi bir problem yaşamayacaktır. Çünkü $y^2=3-x$ ise $y=\pm\sqrt{3-x}$ olduğunu ters yönde ilerleyen öğrenci fark edebilmektedir. Ama aynı öğrenci $y=\sqrt{3-x}$ ifadesinin grafiğini çizmektense ona göre daha basit olan (çünkü kareköklü ifade içermemektedir) ve yine buna denk olduğunu düşündüğü $y^2=3-x$ ifadesinin gösterdiği grafiği çizmeyi tercih ettiği an bilişsel bir karmaşa yaşamaya başlayacaktır. Öğrencilerin bu tür zorluklar yaşamasının en önemli nedenlerinden biri matematiksel ifadelerin görselleştirilmesinde, zihinlerinde belli şemaların olması ve bu yapılar dışındaki ifadelerle karşılaştıklarında ya bu ifadeleri bildikleri bir forma dönüştürme ihtiyacı hissetmeleri ya da görsel bir yardım almaktan vazgeçmeleridir. Çünkü yeterli deneyim sahibi olmadıkları alanlarda görsel muhakeme kullanmaktan çekinebilmekte ya da kullandıkları durumda hata yapabilmektedirler. Bu da daha sonraki görsel muhakeme kullanma durumları için bir ön yargı oluşturabilmektedir.

Funda'nın bu soruda yaşadığı bir diğer problem de çözümünde elde ettiği formüle iki çarpanını eklemesidir. Öğrenci, görsel muhakeme süreci sonunda, hatırlamadığı hacim formülünü oluşturmuştur. Ancak elde ettiği formülde, iki çarpanına karşılık gelen bir değer olmamasına rağmen, bu çarpanı yine de eklemek istemiştir. Öğrenci için formülü bu şekilde hatırlıyor olması elde ettiği formüle bu çarpanı eklemek için yeterli bir nedendir. Bu durum öğrencinin, bu muhakeme şekline olan güveninin hala çok yeterli olmadığı şeklinde yorumlanabilir.

Öğrencilerden bir kısmı ise hacim hesaplamaya ilişkin formülü doğrudan kullanarak soruyu çözmüşlerdir. Elif de formül kullanarak çözüm yapmak isteyen öğrencilerden birdir. Fakat formülü tam olarak hatırlamadığı halde yazdığı formülün doğru olduğunu düşünerek çözümünü bu şekilde bitirmiştir. Yazdığı formülün neden yazdığı şekilde olması gerektiği hakkında fikri olmamasına rağmen çözümün bu şekilde olması gerektiğini söylemiştir.

Bu soruda öğrencilerin kullandığı görsel muhakeme, analitik muhakemeye oranla daha fazladır.

Çizelge 4.23. Üçüncü soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

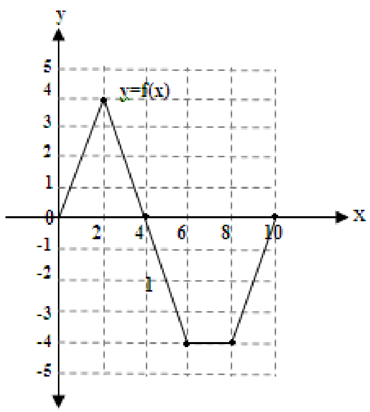
	Analitik Muhakeme	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmasa	Görsel muhakeme	Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	Görsel muhakemede deneyim eksikliği	Tercihlerde değişim
Gülay	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini ($\int_a^b y^2 dx$) formülünü kullanarak bulma	-	-	-	-	-
Elif	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini ($\int_a^b y^2 dx$) formülünü kullanarak bulma	$y=\sqrt{3-x}$ ifadesinin grafiği yerine y^2=3-x ifadesinin grafiğini çizme ve bu ifadelerin gösterdiği grafiklerin aynı olduğunu düşünme	Verilen eğrinin grafiğini çizme, Grafiği verilen eğri üzerinde hacim hesaplamaya ilişkin formülü bulmaya çalışma	-	-	-
Hale	-	$y=\sqrt{3-x}$ ifadesinin grafiği yerine y^2=3-x ifadesinin grafiğini çizme ve bu ifadelerin gösterdiği grafiklerin aynı olduğunu düşünme	Verilen eğrinin grafiğini çizme, Grafiği verilen eğri üzerinde hacim hesaplamaya ilişkin formülü bulmaya çalışma	-	Grafiğin yönünü belirlemek için x ve y değerleri verme	-
Şeyda	Çözümün sadece formül kullanılarak yapılacağını düşünme	-	Verilen eğrinin grafiğini çizme, Grafiği verilen eğri üzerinde hacim hesaplamaya ilişkin formülü bulmaya çalışma	-	-	Formülü, grafik üzerinde silindir yöntemini uygulayarak oluşturmanın mantıklı olduğunu düşünme

Çizelge 4.23. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmasa	Görsel muhakeme	Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	Görsel muhakemede deneyim eksikliği	Tercihlerde değişim
Zehra	Verilen bir eğrinin x-ekseni etrafında döndürülmesi sonucu oluşan cismin hacmini $(\int_a^b y^2dx)$ formülünü kullanarak bulma	-	-	-	-	-
Funda	-	$y=\sqrt{3-x}$ ifadesinin grafiği yerine y^2=3-x ifadesinin grafiğini çizme ve bu ifadelerin gösterdiği grafiklerin aynı olduğunu düşünme, ezberlediği formül nedeniyle oluşturduğu formüle gereksiz katsayı ekleme	Verilen eğrinin grafiğini çizme, Grafiği verilen eğri üzerinde hacim hesaplamaya ilişkin formülü bulmaya çalışma	Grafik üzerinde dönme yönünü ve kullanılan değişkeni yanlış belirleme	-	-

4.3.7. Son klinik görüşmenin dördüncü sorusu

Aşağıdaki grafik y=f(x) fonksiyonuna aittir. $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ olmak üzere;



a) g(0), g(2), g(4), g(6), g(8) ve g(10)'un değerlerini bulunuz.

b) Hangi aralıklarda g(x) artmakta, hangi aralıklarda azalmaktadır.

c) (0,10) aralığında g(x)'in maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

d) y=g(x)'in olası grafiklerinden birini çiziniz.

Dördüncü klinik görüşme sorusu, öğretim deneyinde kullanılan ÇK-4'teki sorulara benzer olarak hazırlanmış, çözümü hem görsel hem de analitik muhakeme kullanılarak gerçekleştirilebilen bir sorudur. Öğrenciler bu soruda verilen eğrinin parça parça denklemini yazarak soruyu çözebilecekleri gibi integralin eğri altında kalan alan anlamını kullanarak da soruyu çözebilirler. Bu sorunun amacı öğrencilerin her iki çözüm yöntemini bildikleri ve uygulayabilecek durumda olduklarında hangi çözüm yöntemini tercih edeceklerini veya bu iki yöntemi etkileşimli olarak kullanıp kullanamayacaklarını tespit etmektir.

Gülay: Gülay sorunun a) şıkkını, integral-alan ilişkisini ve soruda verilen g(x)'in tanımını birlikte kullanarak çözmüştür. Öncelikle g(x)'in tanımındaki sınırlar ve değişkenler arasındaki ilişkiyi kullanarak g(0)'ı bulan Gülay, daha sonra g(2)'i 0'dan 2'ye kadar eğri altında kalan alan olarak hesaplamış ve diğer değerleri de bu şekilde bulmuştur.

Öğretim deneyine başlamadan önce yapılan klinik görüşmelerde ve öğretim deneyi sırasında Gülay eğri altında kalan alan kavramında negatif ve pozitif alan değerleriyle problem yaşamıştır, ancak son klinik görüşmelerde bu kavramla ilgili yaşadığı güçlükleri aştığı gözlenmektedir.

> G: 0'dan 2'ye alan aldım. 0'dan 4'e alan aldım. 0'dan 6'ya alan adım. Ama bu alan negatif. Negatif pozitifi götürecek. Sadece şu alanı aldım. 0'dan 8'e bu bunu götürdüğü için bunu sadece şu negatif alana ekledim. Hepsi alanını sorduğunda bu bunu götürecek dedim bu da bunu götürecek dedim. Geriye sadece bu alan kaldı.

b) ve c) şıkkında Gülay, fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklar ile maksimum ve minimum değerlerine, fonksiyon değerine bakarak karar vermiştir.

Fonksiyonun grafiğini ise önceki şıklarda elde ettiği bilgileri, görsel ve analitik yöntemleri kullanarak çizmiştir. Örneğin (0,2) aralığında fonksiyonun doğrusal olamayacağını düşünmüş ve bu iddiasının doğruluğunu bu aralıkta fonksiyonun denklemini yazıp, integralini alarak göstermiştir. Çizdiği grafikten emin olamadığı birkaç aralıkta bu işlemi tekrarlamıştır.

Gülay bu soruda, fonksiyonun iç bükey ve dış bükey olduğu aralıklara karar vermekte zorlanmıştır. Bu duruma, öğretim deneyinde bu ayrıntıya dikkat etmemesinin yol açtığını düşünmektedir.

Elif: Katılımcılar arasında görsel muhakemede en çok zorlanan isimlerden biri de Elif'dir. Soruyu çözmeye başladığında da Elif bunu belirtme ihtiyacı hissetmiştir. Elif'in integrale ilişkin zihnindeki şemalar, türev üzerine kuruludur. Dolayısıyla grafikle ilgili bir soru çözerken önce türeve sonra integrale geçiş yapması ona bilişsel bir yük getirmektedir.

> E: Ama hani şimdi düşünüyoruz ya gerçi türevde eğimi sıfır oluyor, mesela ben hep integrali türevden düşünüyorum ya, o yüzden integrali alınca önce türeve gitmem gerekiyor, sonra türevden integrale geri dönmem gerekiyor, o yüzden grafiklerde çok zorlanıyorum.
> A: Bu aslında bir strateji, arasındaki ters bağlantıyı görmeye çalışıyoruz. Ama nasıl ki fonksiyonun kendisiyle türevi arasında bir ilişki oluşturmuşsan daha önceden, aynı ilişkiyi integralle fonksiyon arasında da oluşturabilirsin.
> E: Ama o bağlantıyı kuramıyorum bir türlü.

Elif a) şıkkında g(0) değerini soruda verilen g(x)'in tanımını kullanarak çözmüştür. Sonraki değerleri ise integral-alan ilişkisini kullanarak bulmuştur. Fonksiyonun maksimum ve minimum değerleri ile artan ve azalan olduğu aralıklara fonksiyonun değerlerine bakarak karar vermiştir. Elif de Gülay gibi grafiği çizerken iç bükey ve dış bükeylik konusunda sorun yaşamıştır.

Hale: Hale sorunun a) şıkkını tamamıyla integral-alan ilişkisini kullanarak çözmüştür. Hale de daha önce integral değeri ile integralin eğri altında kalan alan değeri arasında sorun yaşayan öğrencilerden biridir. Ancak bu şıkkın çözümü sırasında bu güçlüğü aşmış görünmektedir.

Sorunun b) ve c) şıkkında ise Hale grafik üzerindeki bilgilerini, önceki cebirsel bilgileriyle birleştirerek fonksiyonun maksimum ve minimum değerleri ile artan ve azalan olduğu aralıklara karar vermiştir.

> A: Hangi aralıklarda artmakta hangi aralıklarda azalmaktadır.
> H: f(t), g(x)'in türev fonksiyonu. Bu da onun… O zaman buralarda türev pozitif olduğu için artıyor. (0,4) aralığında artıyor.
> A:Neden öyle düşündün?
> H: Türev fonksiyonu bu, burası negatif. (4,10) arasında azalıyor. Negatif…

Son olarak Hale elde ettiği verileri kullanarak grafiği çizmiştir. Ancak (6,10) aralığında sorun yaşamış ve bu kısmı çizmeden bırakmıştır.

Şeyda: Şeyda da Hale gibi sorunun a) şıkkını integral-alan ilişkisini kullanarak çözmüştür.

> Ş: Hı hı. g(0) o zaman f(t)dt… Bu her zaman sıfırdır, sonuçta altındaki alandı, sıfırdan sıfıra. Bir noktada altındaki alan diye bir şey olmaz.

Görüldüğü gibi Şeyda integral hesaplama yöntemini kullanmak yerine, grafik üzerinde, eğri altında kalan alanı kullanmıştır. b) ve c) şıkkında ise yine Hale'nin yaptığı gibi grafik üzerindeki bilgilerini, önceki cebirsel bilgileriyle birleştirerek fonksiyonun maksimum ve minimum değerleri ile artan ve azalan olduğu aralıklara karar vermiştir.

Şeyda sorunun d) şıkkında önce grafiği doğrusal parçalardan oluşan bir fonksiyon gibi çizdikten sonra, doğrusal bir fonksiyonun integralinin grafiğinin ikinci dereceden bir fonksiyon olacağını fark etmiş ve grafiğini değiştirmiştir. Diğer öğrencilerin aksine Şeyda, fonksiyonun dönüm noktaları ve bükeyliğinde sorun yaşamamıştır.

Zehra: a) şıkkında integral-alan ilişkisini kullanan bir diğer öğrenci de Zehra'dır. Zehra fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklara grafiğe bakarak karar vermiştir. Elif gibi Zehra da fonksiyon ile integrali arasındaki ilişkiyi, türev ile fonksiyon arasındaki ilişki üzerinden yorumlamakta, fonksiyon ile integrali arasındaki ilişki için farklı bir şema kullanmamaktadır. Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları belirledikten sonra bu aralıkların doğru olup olmadığını da yine bu ilişkiyi kullanarak doğrulamıştır. Benzer şekilde bükeyliğin yönünü fonksiyon ve türev arasındaki ilişkiyi kullanarak bulmuştur.

Funda: Funda da fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak yorumlamaktadır. Bu durum Elif de olduğu gibi Funda'da da bilişsel bir yük oluşturmaktadır. a) şıkında Funda önce bu ilişkiyi düşünerek soruyu yanıtlayamaya çalışsa da daha sonra integral-alan ilişkisini kullanmıştır. b) şıkkında artan ve azalan olduğu aralıklara grafiğin davranışına göre karar verirken c) şıkkında maksimum ve minimum noktalarına da grafik üzerinde, fonksiyon-türev ilişkisini kullanarak karar vermiştir. d) şıkkında ise daha önce bulduğu değerleri kullanarak ve dönüm noktalarını tespit ederek, grafiği çizmiştir. Ancak fonksiyonun sabit değer aldığı (6,8) aralığında, grafiği çizmekte zorlanmış ve bu yüzden görsel ve analitik muhakemeyi birlikte kullanmıştır.

> F: 6 ve 8 noktaları…
> A: 6 ve 8 aralığı… Türev nasıl orda?
> F: Sabit değişmemiş. Hiçbir fikrim yok nasıl olacak? Ne artan ne azalan
> A: Yani?
> F: …

A: Bu türev grafiği olsaydı fonksiyon grafiği nasıl olurdu bunun?
F: Sabit bir şey yani… Ne bileyim… Bu aralıkta -4'müş.
A: Fonksiyonun kendisi nasıl olur o zaman?
F: Doğru şeklinde olacak sanırım. Yani bu da *(Doğrusal bir fonksiyon yazdı)* böyle bir şey olacak sanırım bu aralıkta.
A: O zaman?
F: Doğru olacak bence… Ama bilmiyorum, emin olamıyorum.
A: Peki, bu 4x+c şeklinde bir şey olması gerekiyor diyorsun değil mi? Ya da şöyle söyleyeyim g'(6)'da -4, g'(8)'de -4. Hatta ben g'(x)'in grafiğini çizersem -4 doğrusudur diyorsun. Şimdi ne yaptın? Her iki tarafın da integralini mi aldın?
F:Evet, doğru denklemi. x yerine 6 koyacağım, -24
A: +c ne olması lazım o zaman?
F: 20 gibi bir şey olması lazım. Yo, hatta 28 olması lazım pozitif olması için.
A: Şimdi aynı şeyi 8 için de bak.
F: Evet oluyor. c'de 28 gibi bir şey…

<u>Son klinik görüşme dördüncü soru için genel değerlendirme</u>

Öğrencilerin hepsi soruyu, çoğunlukla görsel muhakeme kullanarak çözmüşlerdir. Özellikle a) şıkkında tüm katılımcılar, belirli integralin eğri altında kalan anlamını kullanarak çözmüşlerdir.

Bazı öğrenciler, sorunun başlangıcında g(0) değerinin ne olabileceği konusunda sorun yaşamıştır. Bu değerin hesaplanmasında, soruda verilen tanımı kullanarak sonuca ulaşmıştır. Sonraki aşamalar için de verilen tanımı kullanabilecekken, yöntemini değiştirmiş ve eğri altında kalan alanı kullanmayı tercih etmiştir.

Çalışmanın amaçlarından biri de öğrencilerin bu iki muhakeme türü arasında geçişini kolaylaştırmak ve bunları etkileşimli bir şekilde kullanabilmelerini sağlamaktır. Katılımcılar, bu klinik görüşme sorusunda bu geçişi yaşarken hiç zorlanmamış, başlangıçta kendileri için öncelikli tercihleri olan muhakeme türünü kullanmış; daha sonraki değerler için diğer muhakeme türünü kullanmışlardır. Muhakemeler arası geçişteki bu esneklik, öğrencinin her iki muhakeme türüne hakim olduğunun ve bunlar arası geçiş yapabildiğinin önemli bir göstergesi sayılabilir. Örneğin Funda, görsel muhakeme kullanarak, (0,6) aralığında fonksiyonun grafiğini çizebilmiştir. Ancak (6,8) aralığında fonksiyonun sabit olması, grafiği çizmesinde sorun yaşamasına neden olmuştur. Bu durumda fonksiyonun cebirsel denklemini yazmış ve bu aralıkta fonksiyonun nasıl davranması gerektiğini bulmuştur. Ancak bu geçişin daha da kolaylaştırılması için bu tür deneyimlerin artırılması önemlidir.

Öğrencilerin görsel muhakeme kullanırken yaşadığı bir diğer zorluk grafik çizimlerinde kullandıkları, integral ve türev arasındaki ilişkidir. Öğrenciler, öncelikle fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi öğrenmişler ve integral ile ilgili olarak zihinsel şemalarını türevin tersi olarak şekillendirmişlerdir. Bu yüzden öğrenciler için fonksiyondan integrale doğru kurulan ilişki, öğrenciler için fonksiyondan türeve, türevden tekrar fonksiyona doğru oluşmaktadır. Yani fonksiyon ve türevi arasında kurulan ilişki, fonksiyon ve integrali arasında kurulmamıştır. Bu durum öğrencilere bilişsel bir yük getirmekte, hem görsel hem analitik muhakemede bu ilişkiyi kurmakta zorlanmaktadırlar.

Öğrencilerin integral ile ilgili soruları çözerken en çok kullandıkları stratejilerden biri de fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkidir. Öğrenciler bu ilişkiyi bazen görsel bazen de analitik muhakeme kullanarak oluşturmaktadırlar. Örneğin dördüncü sorunun b) şıkkında sorulan g(x) fonksiyonunun hangi aralıklarda arttığı, hangi aralıklarda azaldığı sorusuna bazı öğrenciler f(x) fonksiyonunun grafiğinin pozitif bölgede kalan aralıklarında artan, negatif bölgede kalan aralıklarında azalan olduğunu söyleyerek yanıt verirken; bazı öğrenciler de türevin pozitif olduğu noktada artan, negatif olduğu noktalarda azalan olduğunu söyleyerek yanıtlamışlardır. Bu iki söylem aynı şeyi ifade ediyor olsa da öğrencilerin matematiksel düşünmelerini ifade etme şekilleri açısından önemlidir. Öğrenci aslında her ikisinde de integral türev ilişkisini kullanıyor olmasına rağmen birinde görsel muhakeme kullanırken, diğerinde analitik muhakeme kullanmaktadır.

Aspinwall, Shaw ve Presmeg (1997)'in çalışmasında olduğu gibi, Şeyda'nın soruda verilen fonksiyonun integralinin grafiğini çizerken oluşturduğu grafik, doğrusal bir fonksiyona aittir. Şeyda, araştırmacının sorusu üzerine hatasını fark etmiş, çizdiği grafiği, eğrisel bir grafiğe dönüştürmüştür. Bu durumu doğrusal bir grafiğin integralinin ikinci dereceden olmasıyla açıklamıştır. Şeyda'nın hatasını çok çabuk fark etmesinin en önemli nedenlerinden biri iki muhakeme türü arasındaki bağlantıyı hızlı kurabilmesidir.

Soruya verilen yanıtlarındaki en önemli nokta, öğrencilerin farklı muhakeme türlerini etkileşimli şekilde kullanabilmesidir. Daha önce de belirtildiği gibi bu soru hem görsel hem de analitik muhakeme kullanılarak çözülebilecek bir sorudur. Öğrenciler, sorunun şıklarını çözerken görsel (analitik) muhakeme ile başlayıp, zaman zaman analitik (görsel) muhakeme kullanıp tekrar görsel (analitik) muhakemeye dönmüşlerdir. Bazı durumlarda ise bir muhakeme türünü kullanırken elde ettikleri yanıtı diğer muhakeme türünü kullanarak doğrulamışlardır. Bu iki muhakeme türü arasındaki geçişi katılımcıların çoğu başarıyla yapabilmişlerdir. Ayrıca bu sorunun çözümünde ağırlıklı olarak kullanılan muhakeme türü görsel muhakemedir. İntegral türev ilişkisi ise daha önce anlatılan nedenler yüzünden en çok kullanılan ikinci strateji olmuştur.

Çizelge 4.24. Dördüncü soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

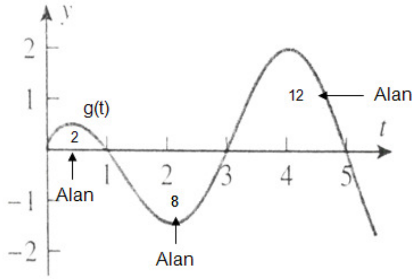
	Analitik Muhakeme	Görsel muhakeme	Görsel ifadenin oluşturduğu bilişsel yük	Görsel muhakemede deneyim eksikliği	İntegral-türev ilişkisi	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı
Gülay	Grafiği verilen fonksiyonun cebirsel ifadesini yazma	Eğri altında kalan alanı kullanarak integral değerini hesaplama ve fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklara grafik üzerinde karar verme	-	İç ve dış bükeylikle fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları tespit etmekte yaşanan zorluk	-	Grafik ve grafiğin gösterdiği fonksiyondan yararlanarak integralin grafiğini çizme
Elif	-	Eğri altında kalan alanı kullanarak integral değerini hesaplama	Fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi, fonksiyon ve türevi üzerinden düşünmenin oluşturduğu yük	-	-	-
Hale	-	Eğri altında kalan alanı kullanarak integral değerini hesaplama	-	-	Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklara integral-türev ilişkisini kullanarak karar verme	-
Şeyda	-	Eğri altında kalan alanı kullanarak integral değerini hesaplama	-	-	Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklara integral-türev ilişkisini kullanarak karar verme	Fonksiyon grafiğini kullanarak integral fonksiyonunun grafiğini belirleme

Çizelge 4.24. devam ediyor.

	Analitik Muhakeme	Görsel muhakeme	Görsel ifadenin oluşturduğu bilişsel yük	Görsel muhakemede deneyim eksikliği	İntegral-türev ilişkisi	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı
Zehra	-	Eğri altında kalan alanı kullanarak integral değerini hesaplama	-	-	Fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıklara, maks. ve min. noktalarına, integral-türev ilişkisini kullanarak karar verme	-
Funda	Grafiği verilen fonksiyonun cebirsel ifadesini yazma, integral değeri için cebirsel ifadeyi kullanma	Eğri altında kalan alanı kullanarak integral değerini hesaplama; fonksiyonun artan ve azalan olduğu aralıkları grafik üzerinde karar verme	Fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi, fonksiyon ve türevi üzerinden düşünmenin oluşturduğu yük	Sabit fonksiyonun integralinin grafiğini çizmekte sorun yaşama	Fonksiyonun grafiğini çizerken integral-türev ilişkisinden yararlanma	Maksimum ve minimum noktaları grafik üzerinden ve analitik muhakeme kullanarak karar verme

4.3.8. Son klinik görüşmenin beşinci sorusu

g, yanda grafiği verilen fonksiyon; G, g'nin belirsiz integrali ve G(0)=2 olmak üzere;



a) G'nin yerel minimum noktası nerededir?

b) G'nin yerel maksimum noktası nerededir?

c) G nerede yukarı bükey, nerede aşağı bükeydir?

d) G'nin olası grafiklerinden birini çiziniz?

Beşinci klinik görüşme sorusu, öğretim deneyinde kullanılan sorulara benzer olarak hazırlanmış, çözümü görsel muhakeme gerektiren bir sorudur. Buna rağmen öğrenciler görsel ve analitik muhakemeleri bu soruda da etkileşimli bir şekilde kullanabilmişlerdir. Bu sorunun amacı, başlangıçta tercihleri görsel yönde olmayan öğrencilerin, görsel muhakeme ile görsel ve analitik muhakemeyi etkileşimli kullanmalarını sağlamak için gerçekleştirilen bir öğretim deneyinin ardından, görsel muhakeme gerektiren bir soruda nasıl davranacaklarını belirlemektir.

Gülay: Gülay, bu soruda grafik üzerindeki bilgileri ile cebirsel bilgilerini etkileşimli bir şekilde kullanarak, sorunun a) ve b) şıklarını yanıtlamaktadır.

G: İntegral soruluyor benden. Bu normal fonksiyon yani $G(x) = \int_0^x g(t)dt$ diyelim. Bu g'nin grafiği… g'nin minimum noktası türevi 0 yapan değerler. Yerel minimum noktası... O zaman fonksiyonu 0 yapan noktalara bakmam gerekiyor.
A: Hangi noktalar onlar?
G: 1, 3, 5.
A: Peki hangileri yerel maksimum, hangileri yerel minimum.
G: İşte o zaman artan azalanlığa bakacağım. Burada artı değerini alıyor, burada eksi değerini alıyor. Burada yine artı değerini alıyor. Pozitif, negatif. Şimdi 3 bence yerel minimum noktası.

Sorunun c) şıkkını doğrudan yanıtlamak yerine d) şıkkına geçerek, bükeyliğin yönüne grafik üzerinde karar vermiştir.

Elif: Beşinci soru, bir öncekine oranla daha çok görsel muhakeme gerektirdiği için Elif, bu soruda bir miktar zorlanmıştır. Ancak görsel muhakeme kullanma konusundaki alışkanlıkları ve inançları diğer sorularda olduğu gibi bir miktar değiştiği söylenebilir.

E: *(Düşünüyor)* Bence yerel minimum noktası 3'tür.
A: Neden?
E: Çünkü mesela burası eksi oluyor ve 3 noktasında en küçük oluyor.
A: Nasıl karar verdin?
E: Yani, G(1)=2, G(3)=-6, G(5)=6, buradan yerel minimum noktasında g(3) oluyor.
A: Mesela 1 ile 3 arasında -6'dan daha küçük bir değer almadığını nereden biliyorsun?
E: Alana baktık…
A: Sen G(0)'ın ne olmasını bekliyordun?
E: Sıfır.
A: G(0) in sıfırdan farklı olmasının nedeni sence ne olabilir?
E: (*Grafiği göstererek*) Daha yukarıdan başlamıştır.
A: Nasıl karar verdin buna?
E: Yine alandan.

Altıncı soru da olduğu gibi bu soruda da en çok artanlık azalanlık ve bükeylik konusunda zorlanmıştır.

Hale: Hale soruyu doğru çözen öğrencilerden biridir ancak grafiğin başlangıç değerinde sorun yaşamıştır. Gülay gibi Hale de grafik üzerindeki bilgilerini ve cebirsel bilgilerini etkileşimli bir şekilde kullanarak, sorunun a) ve b) şıklarını yanıtlamıştır. Artanlık, azalanlık ve bükeylik konusunda sorun yaşamamış ve grafik çizimindeki bu özellikleri türev ve integral arasında kurduğu ilişki ile bulmuştur.

Şeyda: Şeyda soruyu doğru çözen öğrencilerden biridir. Birinci türevin sıfır olduğu noktalarda yerel maksimum ve minimum noktalarının olduğu, türev fonksiyonunun maksimum ve minimum değer aldığı noktalarda fonksiyonun dönüm noktaları olduğunu grafik üzerindeki bilgileri ile birleştirerek soruyu çözmüştür.

Zehra: Soruyu zorlanmadan çözen bir diğer öğrenci de Zehra'dır. Aslında Zehra'nın bu soruyu zorlanmadan çözmesinin en büyük nedenlerinden biri analitik ve grafiksel bilgilerini bir arada kullanabilmesidir.

> Z: G nerede yukarı bükey, nerede aşağı bükeydir? Şimdi bu yine belirsiz integral ise bu g'nin… G= $\int g$. G'nin ikinci türevine bakmamız lazım. G'nin birinci türevi g(t)'ye eşit olacak. İkinci türevi bunun türevine eşit olacak. (0,1/2), (2,4) bu aralıkta ikinci türev 0'dan büyük yani yukarı bükey, aşağı bükey? Bakabilir miyim? *(Önceki soruya bakmak istedi)* 0'dan büyük olduğu yerlerde yukarı bükey, diğer kalan kısımlarda (1/2, 2), (4,5) aralığında aşağı bükey.

Yukarıdaki alıntıda da görüldüğü gibi Zehra, fonksiyon ile integrali arasında bir ilişki kurmak yerine, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkiyi ters yönde düşünerek soruyu çözmeye çalışmaktadır. Bu durum Elif'e dördüncü soruda bilişsel bir yük oluştururken, Zehra bu ilişkiyi daha etkili kullanabilmektedir.

Funda: Funda da soruyu zorlanmadan çözen öğrenciler arasındadır. Çözüm sürecinde çoğunlukla görsel muhakemeden yararlanan Funda, çalışmaya başlamadan önce görsel muhakeme tercihinin oldukça düşük olduğu düşünüldüğünde bu muhakeme türünü de benimsediği düşünülebilir.

> F: İşte bu anlamadığım soru!
> A: Tamam, olası grafiklerinden birini çizelim. Burada neleri kullanacaksın?
> F: Yine aşağı bükey yukarı bükey onları kullanacağız. 1, 0'ı kullanacağız.
> A: Alanları kullanacak mısın? Onların sana nasıl yardımı olacak?
> F: Alanlar da integral değerleri olacak. 2'den başlayacak… Şuraya kadar artıyor. Şuraya kadar azalıyor, azalmaya devam ediyor, artıyor, artıyor *(Grafik üzerinde aralıklar gösteriyor).*
> A: O zaman neresi yukarı bükeydir, yaklaşık olarak?
> F: Şurası ½ gibi bir şeyse 0'dan ½'ye kadar yukarı bükey, aşağı bükey…
> A: Nereye kadar?
> F: Şuraya kadar.

A: 2 diyelim oraya yaklaşık olarak.
F: 2'den 4'e kadar da yukarı bükey, sonra yine aşağı bükey.
A: Peki bükeylik nerede yön değiştirir?
F: İşte büküm noktasında?
A: Büküm noktası nedir burada?
F: Şu şartlarda büküm noktası bunun maksimumları oluyor. Yani 4'te maksimumsa azalıyor artıyor.

Son klinik görüşme beşinci soru için genel değerlendirme

Öğretim deneyi sırasında öğrencilerin en çok zorlandıkları sorular, son klinik görüşmenin beşinci sorusu türünde sorular olmuştur. Ancak öğrenciler bu klinik görüşme sorusunda, görsel ve analitik muhakeme ile bunlar arasındaki etkileşimi oldukça rahat kullanabilmişlerdir. Hatta görsel tercihleri açısından oldukça düşük bir görsel muhakeme puanına sahip olan Funda'nın bile bu soruda oldukça rahat olduğu gözlenmiştir. Başlangıçta en çok zorlandığı soru türü olduğunu belirtse de çözüm sürecinde zorluk yaşamadığı gözlenmiştir.

Benzer şekilde, öğretim deneyi ve klinik görüşme sırasında görsel muhakeme kullanma konusunda olumsuz inançlara sahip olan Elif, her ne kadar bu inançlarının tamamıyla yok olduğu söylenemese de bu sorunun çözümünde yaptığı işlemlerin bazılarını görsel muhakeme kullanarak doğrulamıştır. Sorunun görsel muhakeme gerektirmesi ve öğrencilerin bu muhakeme türünü başarıyla kullanması, bu soruda görsel muhakemenin en çok kullanılan muhakeme türü olmasına neden olmuştur. Ayrıca gerekli gördükleri yerlerde analitik muhakeme kullanmışlar ve bu iki muhakeme türü arasındaki ilişkiyi başarılı şekilde kurabilmişlerdir. Yalnızca katılımcılardan Elif'in görsel muhakeme kullanmaya karşı olan inançları, bu muhakeme türüne yeterince önem vermesine engel olmuştur. Bu yüzden diğer öğrencilerin rahatlıkla kullandığı ve cebirsel bilgileriyle birleştirebildikleri bazı özellikler (grafiğin iç bükey veya dış bükey olarak çizilmesi gibi) Elif için sezgisel düzeyde kalmış; anlamlı bir düzeyde kullanılamamıştır. Bu durum Elif'in yerleşmiş inançlarının onun görsel tercihleri üzerinde ne kadar baskın olduğunun bir göstergesi olarak yorumlanabilir.

A: İntegralinin grafiği artandır. Peki, artandır ama neden artandır. Ama nasıl bir artanlık,
E: Böyle bir artanlık *(Çizerek gösteriyor).*
A: Neden?
E: İçgüdüsel hocam.

A: Bu içgüdünün matematiksel bir temeli var mı?

E: Alışılagelmişlik olabilir. Hep böyle geliyor bana artanlık *(grafik üzerinde gösteriyor)*. Evet x^2'de var ama… Artanlık ve azalanlığı anlamadığımı fark ettim. İntegrali iyice inceledik ama yine de alışılagelmiş şeylerden vazgeçemiyorum.

A: Neden vazgeçemiyorsun?

E: Çünkü öyle başlamışım. Vazgeçemiyorum bu yüzden. Alanla çözemiyorum mesela. Belki daha kolay çözülebilecek ama ben uzun uzadıya uğraşıyorum.

Çizelge 4.25. Beşinci soru için ortaya çıkan kodlara göre öğrenci yanıtlarlarının özeti

	Görsel muhakeme	Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	İntegralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik	İntegral-türev ilişkisi	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı
Gülay	Grafiğin bükeyliğinin yönüne, artan ve azalan olduğu aralıklara, maks. ve min. değerlerine grafiğe bakarak karar verme, eğri altında kalan alanları integral değeri olarak kullanma	-	-	Fonksiyon ile türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi belirleme	Türev ile ilgili cebirsel bilgileri kullanarak integral grafiği üzerinde istenen bilgileri belirleme
Elif	Grafiğin artan ve azalan olduğu aralıklara, maks. ve min. noktalara grafiğe bakarak karar verme, eğri altında kalan alanları integral değeri olarak kullanma	Grafiğin yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıklara grafiğe bakarak karar verme	-	-	Grafiğin bir bölümü ile $y=x^2$ fonksiyonunu kullanarak artan ve azalanlığa karar verme
Hale	Grafiğin artan ve azalan olduğu aralıklara, maks. ve min. noktalara grafiğe bakarak karar verme, eğri altında kalan alanları integral değeri olarak kullanma	-	İntegral değeri ile alan değeri arasındaki ilişkide yaşanan sorun	Fonksiyon ile türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi belirleme	Cebirsel değerler arasındaki ilişkiyi grafiksel bilgilere dönüştürme.
Şeyda	Grafiğin artan ve azalan olduğu aralıklara, maks. ve min. noktalara grafiğe bakarak karar verme, eğri altında kalan alanları integral değeri olarak kullanma	-	-	Fonksiyon ile türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi belirleme	Türev ile ilgili cebirsel bilgileri kullanarak integral grafiği üzerinde istenen bilgileri belirleme

Çizelge 4.25. devam ediyor.

	Görsel muhakeme	Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa	İntegralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik	İntegral-türev ilişkisi	Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı
Zehra	Eğri altında kalan alanları integral değeri olarak kullanma	-	-	Fonksiyon ile türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi belirleme	-
Funda	Eğri altında kalan alanları integral değeri olarak kullanma	Grafiğin yukarı bükey ve aşağı bükey olduğu aralıklara grafiğe bakarak karar verme	-	Fonksiyon ile türevi arasındaki ilişkiyi kullanarak, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi belirleme	-

4.3.9. Son klinik görüşmeler için genel değerlendirme

Son klinik görüşmelerde, öğrencilerin görsel muhakeme kullanma eğiliminin ön klinik görüşmelere göre arttığı gözlenmiştir. Özellikle birinci soru, katılımcıların normalde sadece analitik muhakeme kullanarak çözebileceği bir soru iken, katılımcılardan ikisi (Gülay ve Hale) bu soruyu görsel ve analitik muhakemeyi bütünleştirerek çözmüşler; ikisi (Funda ve Elif) görsel muhakemeyi kullanmayı denemişler ya da bu yolla çözülebileceğini düşünmüşlerdir. İki katılımcı (Şeyda ve Zehra) ise yalnızca analitik muhakeme kullanarak çözmüşlerdir. Bu öğrencilerden Zehra, bir konuyla ilgili daha önce sıklıkla kullandığı yöntemi kullanmayı tercih etmektedir. Öğretim deneyi ve son klinik görüşmelerde, görsel muhakemeden de yararlanmasına rağmen analitik muhakeme öncelikli tercihleri arasındadır. Bu anlamda Zehra'nın diğer öğrencilerden daha fazla bu muhakeme türüyle ilgili deneyim kazanması gerektiği söylenebilir.

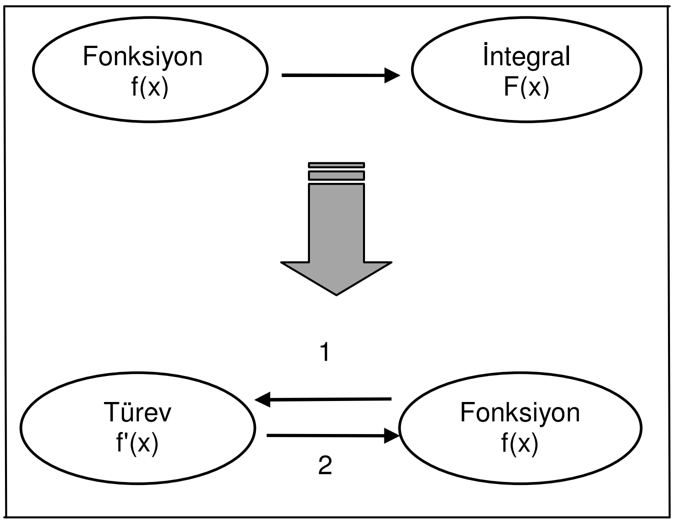
Şeyda ise bu soruda analitik muhakeme kullansa da tercihlerinde veya görsel muhakemeye bakış açısında önemli değişiklik olan öğrencilerden biridir. Şeyda, öğretim deneyi sırasında da görsel muhakemenin söz konusu olduğu çözümlere oldukça eleştirel yaklaşan öğrencilerden biri olmuştur. Şeyda'nın da kontrol edilemeyen görsel imajları (Aspinwall et al., 1997) bu itirazların nedenleri arasında olduğu söylenebilir. Ancak öğretim deneyi sonucunda, zihnindeki görsel imajları konusunda daha çok deneyim kazanan Şeyda, bu tür görsel imajlarını daha iyi kontrol edebilmektedir. Herman (2002) da bu tür imajlar eğer yararlı ise kontrol edilebilir hale getirilmesi gerektiğini belirtmektedir.

Tüm katılımcılar incelendiğinde, çalışmanın başlangıcında görsel muhakeme kullanma konusunda en isteksiz olan öğrenci Funda'dır. Çözümlerini çoğu zaman analitik muhakeme üzerinden yürütmüş, grubun çoğunluğu tarafından görsel muhakemenin kullanıldığı sorularda ya da görsel muhakeme kullanmanın daha avantajlı olduğu durumlarda bile analitik muhakeme kullanmayı tercih etmiştir. Buna rağmen Funda, son klinik görüşmelerde çözümünü analitik muhakeme üzerinden yürüttüğü birinci soruda, sorunun görsel muhakeme kullanılarak da çözülebileceğini belirtmiş, dördüncü soruda ise görsel ve analitik muhakemeleri birlikte kullanmıştır. Son soruda ise görsel muhakemeyi yine başarıyla kullanan öğrenciler arasındadır.

Gülay ve Hale, görsel ve analitik muhakeme türünü birlikte kullanma konusunda en başarılı öğrencilerdir. Hale, analitik muhakeme kullanma konusunda Gülay'a oranla daha baskın bir karaktere sahiptir. Bu durumu, "Hani normalde ben direkt hemen… Mesela şöyle bir soruda (ÇK-1, 4. soru) hemen aklıma grafik gelmezdi. Direkt belki soruya dalabilirim" cümlesiyle ifade etmiştir. Ancak öğretim deneyi sırasında soruların çözümlerinde kullanılan yöntemleri, son klinik görüşmeler sırasında da başarıyla uygulayan iki öğrenci Gülay ve Hale olmuştur. Bu başarıları, öğrencilerin öğretim deneyi sırasında bazı çözümleri (ÇK-1, 6. soru) kendilerinin oluşturmasına bağlanabilir. Öğrenciler, kendi oluşturdukları yöntemi tekrar uygulama konusunda hem daha başarılı hem de daha istekli davranmaktadırlar. ÇK-1 altıncı soru için diğer katılımcılar Hale ve Gülay'ın oluşturduğu çözüm yöntemini, son klinik görüşmeler öncesi yapılan görüşmelerde beğendiklerini ve ileride kullanacaklarını belirtseler de, bu soruyla aynı karaktere sahip olan son klinik görüşmenin birinci sorusunu analitik muhakeme kullanarak çözmüşlerdir.

Elif ise daha önceki öğrenim hayatında öğrendiği ve çoğunlukla analitik muhakeme özelliği taşıyan çözüm yöntemlerini kullanma konusunda çalışma başlangıcında ve devamında oldukça katı inançları olan bir öğrencidir. Her ne kadar zaman zaman görsel çözümler kullansa da bu çözüm yöntemine olan olumsuz inançlarını her fırsatta belirtmiştir.

Görüldüğü gibi öğrencilerin sahip olduğu bilişsel tercihlerin nedenleri arasında yer alan önceki eğitim hayatlarından gelen alışkanlıklar, öğrencilerin sahip olduğu inançlar, öğreticilerin kullandıkları çözüm yöntemleri ve bunların öğrenciler üzerindeki etkisi farklı düzeydedir. Bu yüzden farklı muhakeme türlerinin sağladığı bilişsel avantajları kullanmalarına yönelik verilen eğitim için harcanması gereken sürenin de bu düzeyde farklı olması gerekmektedir. İntegral kapsamında bakıldığında öğrencilerin analitik muhakeme kullanma eğilimlerinin fazla olmasının en büyük nedenlerinden biri de fonksiyon, fonksiyonun türevi ve fonksiyonun integrali arasındaki ilişkinin zihinde yapılandırma sürecedir. Daha önce de belirtildiği gibi integral kavramı, katılımcılar tarafından türevin tersi olarak yorumlanmakta ve bir fonksiyon ile integrali arasında kurulan ilişki, fonksiyon ve türevi arasında kurulan ilişkinin ters yönde ilerletilmesi sonucunda oluşturulmaktadır (Şekil 4.17). Bu durum öğrenciler için bilişsel bir yük oluşturmakta ve bu süreçte zorlanmaktadırlar. Öğrencilerin bu süreci daha iyi yapılandırabilmeleri için fonksiyon ve türevi arasında kurulan ilişkiye benzer bir ilişkinin, fonksiyon ve integrali arasında da kurulması ve eğiticilerin bu konuda daha duyarlı olmaları önemlidir.



Şekil 4.17. Öğrencilerin bir fonksiyon, türevi ve integrali arasındaki ilişkiyi yapılandırma süreci

5. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde görsel ve analitik düşünme stratejilerini nasıl kullandıklarını, bu iki strateji arasındaki bağlantıyı nasıl sağladıklarını araştırmak ve bu bağlantıyı sağlama sürecinde öğrencilere nasıl yardım edilebileceğini belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda oluşturulan araştırma soruları için elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

5.1. Birinci Araştırma Sorusu

Tercihleri görsel yönde olmayan üniversite öğrencilerinin, analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde, görsel ve analitik muhakeme kullanma eğilimleri nasıldır? Bir muhakeme türünü daha baskın olarak kullanan öğrencilerin bu muhakemeyi kullanma nedenleri nelerdir?

Daha önce de belirtildiği gibi çalışmanın katılımcıları Ankara'da bir üniversitenin Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda öğrenim görmekte olan ikinci sınıf öğrencileridir ve MSA'dan elde ettikleri puanlara göre görsel olmayan tercihlere sahiptirler. Görsel tercihlerine uygun olarak katılımcılar, çalışmanın başlangıcında, integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde öncelikli ve baskın tercihleri analitik stratejiler olup çoğu zaman (kullanılabilecek durumda olsa bile) görsel strateji kullanmamışlardır. Ön klinik görüşmelerde katılımcılar tarafından kullanılan ve görsel stratejinin bir alt boyutu olarak kabul edilebilecek tek durum görsel destektir. Görsel destek katılımcıların, soru ile ilgili grafikten problem çözme sürecinde yararlanmaları olarak tanımlanmıştır. Bu durumun görselleştirmeden farkı, öğrencilerin ilgili grafiği problem çözme sürecinin yalnızca başlangıç aşamasında kullanması ve problemin çözümü için grafik kullanımının şart olmamasıdır. Öğrenciler çoğu zaman çizdikleri grafikleri çözüm sürecinin bir parçası olarak kullanmamaktadır. Öğrencilere, grafiği neden çizdikleri sorulduğunda;

"İşime yaramasa bile çizip grafiğin şeklini görmek istiyorum"

"Bu şekilde kökleri daha kolay görüyorum"

"Bu şekilde alıştım"

"Niye çizdim bilmiyorum, psikolojik bir şey, grafiği gördüğüm zaman çözebileceğimi düşünüyorum" şeklinde yanıt vermişlerdir. Aslında öğrenciler görsel strateji kullanma eğilimi gösterseler bile nasıl kullanacakları konusunda çok fazla fikir sahibi değildirler. Çünkü önceki ve devam eden öğrenim hayatlarında, bu tür stratejileri daha az kullanılmış ve bu tür stratejilerin güvenirliği konusunda öğretmenleri tarafından uyarılmışlardır. Yani görsel stratejiler, yalnızca öğretmenler tarafından kullanıldığında etkili olabilmektedir. Öğretmenler, öğrencilerin karşılaşabileceği zorluklar konusunda deneyim kazanmalarını sağlamak yerine bu stratejilerin kullanımı konusunda öğrencileri uyarmakla yetinmektedirler. Bu yüzden öğrenciler, grafiği çözüm sürecinin bir parçası olarak kullanabilecekken bunun yerine (onlara göre) çoğu zaman hiçbir işe yaramayan ama yinede çizdikleri, çözüm sürecinin bir öğesi olarak bakmaktadırlar.

Öğrencilerin tercihlerinin analitik yönde olmasının bir diğer nedeni de analitik stratejileri daha güvenilir yöntemler olarak görmeleridir. Öğretmenlerinin çoğunlukla analitik stratejiler kullanması bu inancı destekleyen bir diğer unsurdur.

5.2. İkinci Araştırma Sorusu

Tercihleri görsel yönde olmayan üniversite öğrencilerinin, analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde, katıldıkları öğretim deneyinin, görsel ve analitik muhakeme kullanma stratejilerinde meydana getirdiği değişim nasıldır?

Çalışmanın başlangıcında uygulanan MSA'dan aldıkları puanlara göre katılımcıların hepsi görsel olmayan tercihlere sahiptir. Ancak katılımcıların MSA'dan aldıkları puanlar farklıdır dolayısıyla görsel tercihlerinin derecesi de farklı düzeydedir. Katılımcıların öğretim deneyi sonucunda görsel stratejilere bakış açıları ve görsel stratejileri kullanma şekilleri değişmiştir. Bu değişim katılımcılarda farklı düzeyde gerçekleşmiştir.

Gülay: Gülay, çalışmanın başlangıcında ve devamında en çok görsel destek kullanan öğrencilerden biridir. Aynı zamanda bu süreçte oldukça sık hata yapan öğrencilerden de biridir. Özellikle kontrol edilemeyen görsel imajları, bu hataları yapmasının nedenleri arasında gösterilebilir. Gülay, görsel desteği ancak daha önceden bildiği bir grafik söz konusu olduğu zaman kullanmayı tercih etmektedir. Eğer zorlanacağı bir grafikle karşılaşırsa ve hata yapacağını düşünürse görsel desteği hiç kullanmamaktadır. Aslında Gülay'ın görsel destek kullanma alışkanlığı ders hocasının kazandırdığı bir alışkanlık gibi gözükmektedir. Fakat Gülay bu süreci çoğu zaman etkili ve doğru bir şekilde kullanamamaktadır. Bu durumun en önemli nedeni, bu sürece daha az değer vermesi olabilir.

Ön ve son klinik görüşmeler ile öğretim deneyinde Gülay, görsel stratejiyi en çok kullanan katılımcılardan biri olarak göze çarpmaktadır. Ancak Gülay'ın görsel strateji kullanma konusunda bazı sıkıntılar yaşadığı gözlenmiştir. Gülay daha önceden bildiği grafikleri kullanma konusunda başarılıyken, farklı grafiklerde sorun yaşadığı gözlenmiştir. Alan yazında görselleştirmenin problem çözme sürecinde bir takım zorluklara neden olduğu yönünde çalışmalar mevcuttur. Gülay'ın görsel strateji kullandığı bazı durumlarda yaşadığı problemlerin nedeninin başlangıçta bu zorluklar olduğu düşünülmüştür. Ancak Gülay'ın yaşadığı bu bilişsel karmaşa incelendiğinde aslında problemde kullandığı grafiğin, analitik ifadesiyle ilgili kavramsal eksiklikten kaynaklandığı, dolayısıyla bu durumun grafiksel bir zorluk olarak dışarı yansıdığı ortaya çıkmıştır. Bu durum alan yazında belirtildiği gibi görselleştirmenin söz konusu olduğu durumlarda yaşanan bilişsel karmaşanın her zaman görselleştirmeden kaynaklanmadığı, bazı durumlarda da altında yatan analitik stratejinin neden olduğu zorluklardan kaynaklanabileceği fikrini ortaya çıkarmaktadır.

Diğer katılımcılar gibi Gülay da belirli integralin en çok eğri altında kalan alan anlamını benimsemiştir. Gülay'ın, belirli integralin bu anlamına ilişkin kavramsal yapısı yetersizdir. Bunun en açık örneği olarak ön klinik görüşmenin son sorusunda, belirsiz integral için de integralin bu anlamını kullanmak istemesi gösterilebilir. Kısaca Gülay, çalışmanın başlangıcında integral konusu çerçevesinde görsel strateji kullanma konusunda diğer katılımcılara göre daha aktif sayılsa bile bu süreçteki kavramsal eksiklikleri, bu stratejiyi başarılı şekilde ve analitik strateji ile etkileşimli kullanmasına engel olmaktadır.

Öğretim deneyi boyunca Gülay, ön klinik görüşmelerde ortaya çıkan kavramsal eksikliklerini kapatma yönünde çalışmış ve bu durum görsel strateji kullanımı konusunda başarısını arttırmıştır. Çoğunlukla verilen grafiğin denklemini yazma yönünde olan tutumu, öğretim deneyi sırasında zaman zaman grafiği doğrudan kullanma yönünde gelişmiştir. Bu konudaki en önemli değişim, öğretim deneyinin son haftasında Zehra ile oluşturduğu grupta yaşanmıştır. Zehra'nın son çalışma kağıdında yer alan problemlere ilişkin güçlü kavram şeması, Gülay ile oluşturduğu grupta görsel stratejilerle birleştirmesinde kolaylık sağlamıştır. Bu durum Gülay'ın görsel ve analitik stratejileri etkileşimli bir şekilde kullanmasına neden olmuştur. Böylece son çalışma kağıdında görsel stratejileri daha rahat kullanmaya başlamıştır.

Son klinik görüşmelerde görsel strateji kullanma konusunda Gülay, tercihlerinde değişim gözlenen öğrencilerden biridir. Görsel muhakeme sürecinde var olan bir takım kavramsal eksiklikler, çalışmanın başlangıcında ve öğretim deneyi sırasında Gülay'ın tercih ettiği strateji seçimini etkilemiştir. Ancak çalışma süresince kazandığı deneyimler bu stratejiyi daha doğru ve etkili kullanımı sağlamış, dolayısıyla kullanımı konusunda istekliliğini arttırmıştır. Artık daha önce karşılaşmadığı problem durumlarında da görsel muhakeme, tercihleri arasında analitik muhakeme kadar önceliğe sahip gibi görünmektedir.

<u>Ön Klinik Görüşmeler</u>

- İşaretli alan kavramına ilişkin kavramsal eksikliğe bağlı olarak analitik strateji tercihi
- Kontrole edilemeyen görsel imajlar
- Sınırlı görsel dertsek
- Önceki öğrenim hayatının neden olduğu görsel olmayan tercih

<u>Son Klinik Görüşmeler</u>

- İşaretli alan kavramına ilişkin güçlü kavramsal yapı
- Kontrol edilebilen görsel imajlar
- Ön klinik görüşmelere oranla daha sık görsel destek kullanımı
- Görsel ve analitik stratejilerin dengeli ve etkileşimli kullanımı

Şekil 5.1. Ön ve son klinik görüşmelerde Gülay'ın görsel ve analitik strateji kullanma eğilimi

Elif: Elif çalışma grubu içinde Funda'dan sonra görsel strateji kullanmaya karşı en çok direnç gösteren öğrencidir. Çalışmanın başlangıcında gerçekleştirilen klinik görüşmelerde de görüldüğü gibi integral ile ilgili sorularda çoğunlukla ilgili formülü hatırlamaya çalışmış, hatırladığı formülden emin olmadığı durumlarda bile kullandığı stratejiyi değiştirmeyi düşünmemiştir. Ön klinik görüşme sorularının çözümünde kullandığı grafikleri çoğunlukla görsel destek anlamında kullanmış, çözüm sürecinin bir parçası olarak değerlendirmemiştir. Hatta bir soruda çizdiği grafiğin gereksiz olduğunu, aslında çözümün o aşamasında grafiği çizmenin bir yararının olmayacağını belirtmiştir. Oysa çizdiği grafik, daha önce aldığı ve integral konusunun anlatıldığı derste ders hocasının, hatırlamaya çalıştığı formülün çıkış noktasında kullandığı grafiktir. Fakat Elif'in bu sürece yönelik inançları, görsel strateji kullanmaya verdiği önem ve değer bu çözüm yöntemini benimsemesini engellemiştir. Ayrıca Elif'in de Gülay gibi çalışmanın başlangıcında, belirli integralin eğri altında kalan anlamına ilişkin kavramsal eksiklikleri vardır ve bu durum görsel muhakeme kullanmasını engellemektedir.

Elif, öğretim deneyinin ilk haftasında belirli integralin eğri altında kalan alan anlamındaki kavramsal eksikliklerini gidermiş ve sonraki kullanımlarında hata yapmamaya başlamıştır. Bu durum Elif'in görsel strateji kullanım oranını arttırsa bile ancak çözümün çok açık olduğu durumlarla sınırlı kalmaktadır. Elif, çizilen grafiklerin doğru sonuca götürme konusunda yanıltıcı olabileceğini, çünkü grafiğin farklı şekilde çizilebileceğini ifade etmekte ve grafiksel çözümlere güvenmediğini dile getirmektedir. Hangi durumlarda grafiksel çözüm kullanabileceği konusunda yeterli bilgiye ve deneyime sahip değildir. Ancak öğretim deneyinin ilerleyen aşamalarında görsel çözümleri, analitik çözümlerinin bir kontrol mekanizması olarak kullanmaya başlamıştır. Görsel strateji kullanımı konusunda oldukça isteksiz davranan Elif için bu durum, bir gelişme olarak görülebilir. Ancak calışma boyunca gerçekleştirilen grup çalışmalarında (Funda-Elif ve Şeyda-Elif) Elif, Funda ile oluşturduğu grupta, arkadaşına oranla daha çok görsel strateji kullanma eğilimi göstermiş olmasına rağmen, grup arkadaşının önerdiği analitik çözümü kolaylıkla kabul etmiş ve kendi çözüm stratejisi üzerinde çok fazla ısrar etmemiştir. Bu durum onun, analitik çözümlerin daha güvenilir olduğu yönündeki inançlarının değişmediğini göstermektedir. Şeyda ile oluşturduğu grup çalışmasında ise görsel stratejiler konusunda başarılı olamamışlardır.

Son klinik görüşmeler de incelendiğinde görülmektedir ki çalışma sonunda görsel tercihlerinde meydana gelen değişimin en az olduğu öğrenci Elif'tir. Bu durum öğrencinin geçmiş yaşantısından getirdiği alışkanlıklar, görsel stratejilere olan güvensizlik ve öğrenim hayatı sırasında bu stratejilere gösterilen önem ile açıklanabilir. Öğrenci, çalışma sonundaki klinik görüşmelerde çoğunlukla analitik strateji kullanmış ve görsel stratejilerin "aklına yatmadığını" ve "hatırlamakta zorlandığını" her fırsatta dile getirmiştir.

Ön Klinik Görüşmeler

- İşaretli alan kavramına ilişkin kavramsal eksikliğe bağlı olarak analitik strateji tercihi
- Sınırlı görsel dertsek
- Önceki öğrenim hayatının neden olduğu görsel olmayan tercih
- Görsel strateji kullanmaya yönelik isteksizlik, görsel stratejilere güvensizlik ve yoğun analitik strateji kullanımı

→

Son Klinik Görüşmeler

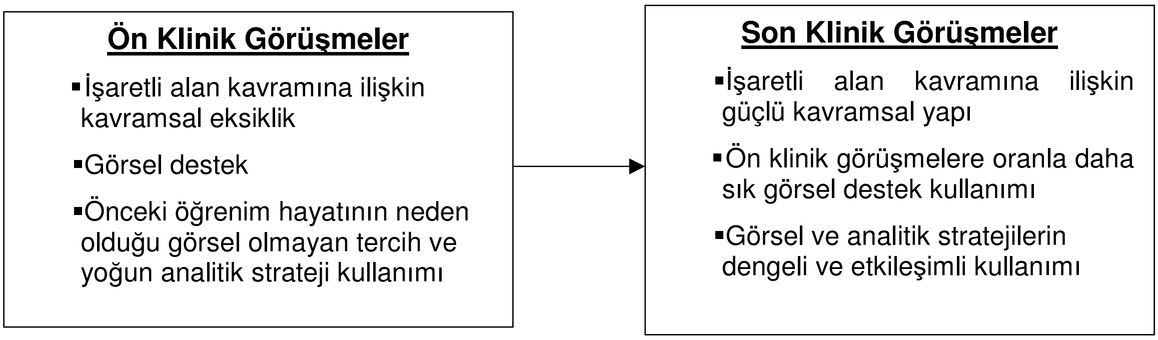
- İşaretli alan kavramına ilişkin güçlü kavramsal yapı
- Sınırlı görsel destek
- Önceki, görsel olmayan tercihlerinde devamlılık
- Görsel strateji kullanmaya yönelik tutumda devamlılık

Şekil 5.2. Ön ve son klinik görüşmelerde Elif'in görsel ve analitik strateji kullanma eğilimi

Hale: Hale, ön klinik görüşmelerde çözdüğü soruların tamamında analitik muhakeme kullanmış, çözüm yapamadığı soruda ise analitik çözüm stratejileri denemiştir. Sonuca ulaşamadığı durumlarda ise farklı stratejiler denemek istememiş ve soruyu çözmeden bırakmıştır. Yalnızca birinci soruda diğer katılımcıların yaptığı gibi görsel destekten yararlanmıştır. Hale görsel desteği, işe yaramayacağını düşündüğü durumlarda bile kullanmaktadır. Bu durum Hale'nin geçmiş öğrenim hayatından getirdiği bir alışkanlık gibi gözükmektedir. Katılımcıların çoğunda görülen belirli integral değeri ile eğri altında kalan alan değerinin farkına ilişkin kavramsal eksiklik Hale'de de görülmektedir.

Öğretim deneyinin gerçekleştiği ilk haftada Hale, ön klinik görüşmelerde gösterdiği, çoğunlukla analitik strateji kullanma eğilimini devam ettirmiştir. Hale'nin integral ile ilgili bir soru gördüğünde aklına ilk integral hesaplama yöntemleri gelmektedir. Hatta ÇK-2'de önceki sorunun devamı niteliğinde olan dördüncü soruda, tek ve çift fonksiyonların öğrendiği özelliklerini kullanmak yerine, öncelikli tercihi olan integral hesaplama yöntemini kullanmaya devam etmiştir. Bu durum öğrencilerin öğrenim hayatlarında, öğretmenlerinin kullandıkları stratejileri kazanma ve bu stratejileri alışkanlık boyutunda kullanarak yeni stratejilere yer açma konusunda ne kadar dirençli olduklarının bir göstergesi olarak yorumlanabilir. Ancak öğretim deneyinin sonraki haftalarında Hale, görsel stratejileri analitik stratejilerin kontrol mekanizması olarak kullanmaya başlamış, zamanla görsel strateji kullanımı artmış ve son hafta etkinliklerinde bu iki stratejiyi etkileşimli olarak kullanabilen öğrencilerden biri olmuştur.

Öğretim deneyinin sonunda yapılan klinik görüşmelerde Hale'nin görsel strateji kullanımının ön klinik görüşmelere oranla arttığı gözlenmiştir. Analitik muhakeme kullanarak rahatlıkla çözebileceği bir soru olan birinci klinik görüşme sorusunun nasıl çözüleceğini hemen göremediği için, görsel stratejiye yönelmiş ve bu şekilde çözüme ulaşmıştır. Ön klinik görüşmelerdeki analitik strateji kullanma özellikleri dikkate alındığında, Hale'nin bu soruda analitik strateji üzerinde ısrarcı olması, çözümü bulamadığında da soruyu çözmeden bırakması beklenmektedir ancak çok çabuk strateji değiştirmesi tercihlerindeki değişim olarak yorumlanmıştır. Benzer şekilde ön klinik görüşmelerde formülünü hatırlamadığı için çözemeyeceğini söyleyerek bıraktığı bir soruyu, son klinik görüşmelerde çizdiği grafiği kullanarak çözebilmiştir. Ayrıca ön klinik görüşmelerde ve öğretim deneyinin ilk haftalarında Hale'nin öğrenme sürecinde yer alan ve integral değeri ile alan değeri arasındaki farka ilişkin görülen kavramsal eksikliğin son klinik görüşmelerde ortadan kalktığı gözlenmiştir. Sonuç olarak öğretim deneyi, Hale'nin görsel tercihlerinde integral konusu kapsamında önemli bir değişim gerçekleştirmiştir.



Şekil 5.3. Ön ve son klinik görüşmelerde Hale'nin görsel ve analitik strateji kullanma eğilimi

Şeyda: Ön klinik görüşmelerde görsel olmayan tercihlerini en açık yansıtan öğrencilerden biri de "Şeyda'dır. Özellikle soruların çözümünde benimsediği strateji daha önceden ezberlediği formülleri kullanmaktır. Formülleri hatırlayamadığı zamanlarda ise genelde soruyu çözmeden bırakmaktadır. Çözüm sürecinde grafik kullanmak istediği durumlarda ise bu konuda yeterli bilgiye sahip olmadığı için kullanamamaktadır.

Öğretim deneyi sırasında Şeyda, tercihleri görsel yönde olmamasına rağmen, görsel strateji kullanmaya karşı oldukça açık bir tavır sergilemiştir. Çalışmanın ilk aşamalarında analitik stratejileri ağırlıklı olarak kullansa da ilerleyen haftalarda görsel stratejileri grup arkadaşlarına oranla daha kontrollü kullanabilmiştir. Yalnızca öğretim deneyinin son haftasında önceki haftalarda gösterdiği başarıyı gösterememiştir. Bu haftada grup çalışması yapılmış ve Şeyda, Elif ile eşleşmiştir. Elif, çalışma boyunca analitik strateji kullanma konusunda oldukça ısrarcı davranan ve görsel stratejileri kullanmama konusunda oldukça direnç gösteren bir öğrencidir. Şeyda'nın öğretim deneyinin son haftasında görsel strateji kullanma sürecinde meydana gelen düşüş ile görsel ve analitik stratejileri etkileşimli kullanabilme başarısındaki azalmanın nedeni, grup arkadaşının görsel tercihleri ve inançları olabilir.

Şeyda son klinik görüşmelerde, görsel ve analitik stratejileri dengeli olarak kullanmıştır. Bazı soruları görsel, bazı soruları analitik muhakeme kullanarak çözen Şeyda, bazı sorularda ise iki stratejiyi etkileşimli kullanmıştır. Özellikle ön klinik görüşmelerde formülünü hatırlamadığı soruyu son klinik görüşmelerde, formülün grafiksel çıkarılış sürecini kullanarak bulmuş ve çözmüştür. Şeyda'nın tercihlerinde meydana gelen değişim, görsel süreçleri daha kontrollü kullanmasını sağlamıştır. Bu sürecin kontrollü bir şekilde kullanılması daha önceki araştırmalarda belirtildiği gibi başarıyı arttırmaktadır.

Ön Klinik Görüşmeler

- Görsel strateji kullanmada deneyim eksikliği
- Önceki öğrenim hayatının neden olduğu görsel olmayan tercih ve yoğun analitik strateji kullanımı

→

Son Klinik Görüşmeler

- Ön klinik görüşmelere oranla daha sık görsel destek kullanımı
- Görsel ve analitik stratejilerin dengeli ve etkileşimli kullanımı

Şekil 5.4. Ön ve son klinik görüşmelerde Şeyda'nın görsel ve analitik strateji kullanma eğilimi

Zehra: Ön klinik görüşmelerde, görsel tercihini en iyi yansıtan öğrencilerden biridir. Çözüm sürecinde zaman zaman görsel destekten yararlansa da çoğunlukla analitik stratejiler kullanmıştır.

Zehra, diğer öğrencilerle karşılaştırıldığında düşüncelerini açıklama konusunda çekingen bir karakter sergilemektedir. Farklı bir görüşü olduğunda bunu ifade etme konusunda istekli davranmamakta, ancak diğer katılımcılar tarafından desteklendiği durumlarda çözüm sürecini açıklamak ve doğruluğunu ispatlamak konusunda ısrarcı davranmaktadır. Dolayısıyla görsel tercihlerindeki değişim, öğretim deneyinde çok net ortaya çıkmamıştır. Buna rağmen öğretim deneyi boyunca görsel stratejileri yalnızca, çözümün açık ve kısa olduğu durumlarda tercih ettiği gözlenmiştir. Çünkü Zehra için doğru yanıta en kısa yoldan götüren çözüm yöntemi, tercih ettiği çözüm yöntemidir. Öğretim deneyinin sonlarına doğru ise görsel ve analitik stratejileri en iyi birleştiren öğrencilerden biridir. Çünkü fonksiyon ve türev arasındaki ilişkiye grafiksel ve cebirsel yönden çok iyi hakimdir. Dolayısıyla bu süreci tersine çevirirken ve bunu görsel stratejilerle birleştirirken daha rahattır.

Son klinik görüşmelerde Zehra yine analitik stratejileri daha yoğun olarak kullanmıştır. Öğretim deneyi sonucunda Elif ile birlikte tercihlerinde çok fazla değişim gözlenmeyen bir katılımcı olduğu söylenebilir.

<u>Ön Klinik Görüşmeler</u>

- Görsel destek kullanımı
- Önceki öğrenim hayatının neden olduğu görsel olmayan tercih
- Yoğun analitik strateji kullanımı

→

<u>Son Klinik Görüşmeler</u>

- Görsel destek kullanımı
- Önceki görsel tercihlerinde devamlılık
- Yalnızca integral ve fonksiyon arasındaki ilişkide görsel ve analitik stratejileri kullanma konusunda akitf ve başarılı

Şekil 5.5. Ön ve son klinik görüşmelerde Zehra'nın görsel ve analitik strateji kullanma eğilimi

Funda: Funda, katılımcılar arasında Elif ile birlikte görsel olmayan tercihlerini en iyi yansıtan ve görsel olmayan stratejiler kullanma konusunda oldukça ısrarlı davranan öğrencilerden biridir. Ön klinik görüşme sorularında grafiklerden yararlanmasının tek sebebi sınırları belirlemektir. Bu özelliği ile görsel destekten yararlandığı söylenebilir. Yine görsel destekten yararlandığı ve diğer katılımcıların eğri altında kalan alan ve integral değeri konusunda hata yaptığı birinci soruda Funda hata yapmamıştır. Bunun en önemli nedeni, integral hesaplama yöntemlerini, görsel muhakeme ile birleştirmiş (üstteki eğriden alttaki eğriyi çıkarmak) ve daha kalıcı bir yapılandırma kullanmış olmasıdır. Diğer katılımcıların bu süreci eksi ile çarpmak şeklinde yapılandırması, kalıcılığı azaltmış ve hata yapmalarına neden olmuştur.

Öğretim deneyinin ilk haftalarında Funda, görsel çözümlerin çok açık ve kolay olduğu, çalışmanın diğer katılımcılarının da görsel çözümler kullandığı durumlarda bile görsel çözüm yapmaktan kaçınan bir öğrenci olmuştur. Görsel strateji kullanmak istediği bazı sorularda, bu stratejiyi başarıyla kullanması, aslında integralin grafiksel anlamı ile ilgili kavramsal eksikliklerinin olmadığının bir göstergesi sayılabilir. Bu durum sadece bu tür çözümlerin güvenirliğine olan şüphesinin ve olumsuz inançlarının sonucu olabileceğini düşündürmektedir. Grup çalışması yapılan bazı sorularda ise Funda'nın analitik stratejiler kullanma konusundaki direnci, grup arkadaşının önerdiği görsel çözümleri göz ardı edip analitik çözümü kabul etmesine neden olmuştur. Görsel stratejiler kullanma konusunda direnç gösteren ve bu tavrını öğretim deneyi sonunda da değiştirmeyen Elif'in aksine Funda, öğretim deneyinin ikinci haftası sonunda tercihlerinde küçük değişimler göstermeye başlamış (görsel stratejileri, analitik stratejilerin kontrol mekanizması olarak kullanması ve bir soruyu iki yoldan da çözmesi) ve bu değişim üçüncü ve dördüncü haftada daha da belirgin hale gelmiştir. Özellikle dördüncü hafta grup arkadaşı Hale'nin de etkisiyle bu iki stratejiyi etkileşimli olarak kullanmaya başlamıştır.

Funda'nın öğretim deneyinde, görsel tercihlerinde meydana gelen değişim son klinik görüşmelerde de gözlenmiştir. Analitik stratejileri kullandığı sorularda görsel strateji için de çözüm önerilerinde bulunmuştur. Daha önce analitik strateji kullanarak çözemediği soruları görsel strateji kullanarak çözebilmiştir. Çalışmanın başlangıcında benzer özellikler gösterdiği Elif'in aksine Funda, görsel strateji tercihlerinde olumlu yönde değişimler yaşamıştır.

Ön Klinik Görüşmeler

- İşaretli alan kavramına ilişkin güçlü kavramsal yapı (görsel ve analitik muhakeme etkileşimli)
- Görsel dertsek kullanımı
- Önceki öğrenim hayatının neden olduğu görsel olmayan tercih ve görsel strateji kullanmaya yönelik güçlü direnç ve isteksizlik

→

Son Klinik Görüşmeler

- İşaretli alan kavramına ilişkin güçlü kavramsal yapı (görsel ve analitik muhakeme etkileşimli)
- Görsel ve analitik stratejilerin dengeli ve etkileşimli kullanımı
- Görsel strateji kullanmaya ilişkin olumlu tutum değişikliği

Şekil 5.6. Ön ve son klinik görüşmelerde Funda'nın görsel ve analitik strateji kullanma eğilimi

5.3. Üçüncü Araştırma Sorusu

Tercihleri görsel olmayan yönde olan üniversite öğrencilerine, analiz dersi integral konusu kapsamındaki problem çözme sürecinde, görsel ve analitik muhakeme arasındaki bağlantıyı daha etkili şekilde kurmalarına nasıl yardım edilebilir?

Çalışma boyunca katılımcıların analitik stratejileri tercih etmelerinin değişik nedenleri ortaya çıkmıştır. Bu nedenler; akıllarına gelen ilk yöntem olması, integral ile ilgili sorularda hep integral hesaplama yöntemleri kullanılıyor; hiç grafik kullanılmıyor olması, daha önceki öğrenim hayatlarında integral hesaplama yöntemlerini kullanmaya alışmış olmaları, görsel çözümlerin akıllarına çok yatmaması, ilişkilerin cebirsel anlamda biliniyor olmasına karşılık grafiksel uygulamalarda karıştırılması ve ders öğretmenlerinin bu tür çözümlere verdiği değer şeklinde sıralanabilir. Bu nedenler incelendiğinde aslında analitik stratejilerin yoğun olarak kullanılması ve görsel stratejileri kullanmaya ilişkin öğrencilerde direnç ve isteksizliğin oluşması, Eisenberg ve Dreyfus (1991)'un belirttiği öğrenilmiş bir fenomen olduğu savını desteklemektedir. Bunun yanında Presmeg ve Balderas-Cañas (2001)'ın belirttikleri gibi görselleştirmenin kullanım süreci üzerinde duyuşsal faktörler de etkilidir. Öğrencilerin bu süreçte zorluk yaşaması, görsel strateji kullanarak çözebilecekleri bir soruyu, bu tür çözümlerin çözüm uzaylarında bulunmaması nedeniyle göz ardı etmeleri, öğrencilerin görsel stratejilerle daha çok deneyim kazanmasını ve analitik stratejilerle bir arada kullanmalarını sağlayarak çözülebilir. Çalışmada da görüldüğü gibi öğrencilerin analitik sürecinde var olan bir takım kavramsal eksiklikler, görsel süreçte ortaya çıkmakta ve öğrenciler bu sorunları görsel muhakeme yoluyla aşmaktadır.

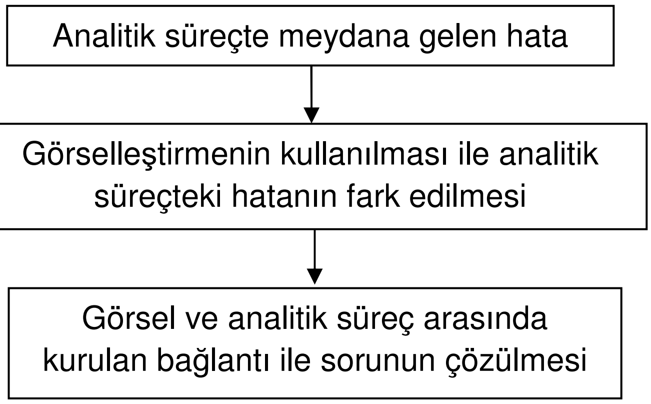
6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Araştırma sonuçlarında da görüldüğü gibi başlangıçtaki tercihleri görsel yönde olmayan katılımcıların görsel tercihlerinde meydana gelen değişimler farklı düzeylerdedir. Bu durum, öğrencilerin bu stratejiyi kullanmaya ilişkin inançlarının gücüne bağlı olarak değişmektedir. Bazı katılımcılarda (Hale, Gülay ve Funda) görsel strateji kullanmaya ilişkin pozitif ve yüksek düzeyde görülen değişim, bazı katılımcılarda (Şeyda) pozitif ama diğer katılımcılara oranla daha düşük düzeyde gerçekleşmiştir. Diğer öğrencilerde ise (Elif ve Zehra) değişim gözlenmemiştir. Buradan, değişimin düşük ya da daha az düzeyde gerçekleştiği öğrencilerde, görsel stratejilere olan bakış açılarının değişmesi için öğretim deneylerinin daha uzun süreli yapılması gerekeceği fikri ortaya çıkmaktadır. Çünkü çalışmanın katılımcılarından bazılarında da gözlendiği gibi öğrencilerin analitik stratejileri kullanmaya ilişkin çok güçlü inançları vardır ve bu durum çoğunlukla aldıkları eğitimden kaynaklanmaktadır.

İntegral kapsamında düşünüldüğünde Oberg (2000)'in değindiği gibi öğrencilerin farklı bakış açılarıyla düşünmelerini sağlamak, farklı stratejilere olan isteksizliklerini de ortadan kaldıracaktır. Dolayısıyla sadece üniversite düzeyinde değil matematik öğretiminin her aşamasında görsel stratejilerin, analitik stratejilerle etkileşimli olarak kullanılması daha doğru olacaktır. Ülkemizde, 2005 yılında yeniden düzenlenen öğretim programında da görselleştirmenin önemine değinilmektedir. Sadece matematik öğretiminde değil matematik öğretmen adaylarının eğitiminde de bu konuya önem verilmesi gerekmektedir. Matematik sınıflarındaki eğitimsel hedefler düşünüldüğünde, öğretmenler tüm öğrencilerin öğrenmesinden sorumlu olan kişilerdir. Müfredattaki tüm konular için tek bir öğretim yöntemi kullanmak, öğretmenin benimsediği öğretim yönteminden farklı öğrenme stiline ve problem çözme anlamında farklı görsel tercihlere sahip öğrencileri göz ardı etmek anlamına gelir (Sağlam and Bülbül, 2010). Örneğin çok detaylı bir sözel açıklama, işitsel öğrenme tercihi olan öğrenciler için yeterli olabilir. Diğer taraftan matematiksel bir problem için grafiksel çözüm yöntemleri, görsel öğrenciler için daha yararlı olacaktır (Russel, 1997). Kuşkusuz öğretmenlerin de problem çözme için kendi tercihleri vardır ve bu tercihleri bilinçli veya bilinçsiz bir şekilde öğrencilerine aktarıyor olabilirler. Çünkü öğretmenlerin sahip olduğu öğretme görselliği öğrencilerini etkilemektedir (Presmeg, 1999). Presmeg (1991, akt. Presmeg, 2006) tarafından yapılan bir araştırmada görsel tercihleri büyük ölçüde görselden, büyük ölçüde görsel olmayana kadar değişen matematik öğretmenlerinin öğretme görselliği ve bunun görsel öğrenciler üzerindeki etkileri belirlenmiştir. Öğretme görselliğine göre orta grupta yer alan (görsel ve analitik stratejileri kullanan) öğretmelerin sınıflarında bulunan öğrenciler, öğretmenleri tarafından kendi görsel tercihlerini kullanmalarına izin verildiği gibi genelleştirme ile ilgili problemlerinin üstesinden gelmek için daha çok destek görmüşlerdir. Bu yüzden bu grupta yer alan görsel öğrenciler, bu çalışma içindeki en başarılı grup olmuşlardır. Bu sonuç her iki muhakeme türünü kullanan öğretmenlerin sınıfında yer alan görsel öğrencilerin daha başarılı olduğunu göstermektedir. Presmeg (1991, akt. Presmeg, 2006)'in çalışmasında yer alan grup her ne kadar görsel öğrencilerden oluşsa da görsel ve analitik stratejileri etkileşimli kullanan öğrencilerin daha başarılı olduğuna ilişkin başka araştırma sonuçları da mevcuttur (örn. Stylianou and Dubinsky, 1999). Çalışmamızın katılımcıları da görsel olmayan tercihlerine ek olarak, görsel stratejiler konusunda deneyimlerinin artmasıyla bu iki stratejiyi daha etkileşimli kullanabilmişler ve iki strateji arasındaki geçişleri daha kolay yapabilmişlerdir.

Ortaya çıkan bir diğer sonuç da öğrencilerin görsel muhakeme sürecine ilişkin kavramsal eksiklikleri giderildikçe, görsel strateji kullanımlarının artmasıdır. Katılımcılar, yeterli deneyim sahibi olmadıkları bu süreci kullanma konusunda isteksizlik duymuşlardır. Örneğin katılımcılardan Gülay, çalışmada kullanılan problemlerden birinin çözüm sürecinin başlangıcında, bir fonksiyonun grafiğini, daha önce karşılaşmadığı için çizmekten vazgeçmiştir. Daha önce Eisenberg ve Dreyfus (1991) tarafından belirtilen görselleştirmeye karşı direncin altında yatan nedenlere (öğrenilmiş bir fenomen olduğu, bu bilişsel süreci desteklemeyen bir öğretimin sonucunda ortaya çıkmış olabileceği), öğrencilerin bu süreç konusundaki deneyimsizlikleri de eklenebilir. Katılımcılar, integral konusu kapsamında, görsel olarak daha az deneyim sahibi oldukları durumlarda görsel strateji kullanmaktan vazgeçmekte, analitik stratejileri tercih etmektedirler. Ancak öğrencilerin sürece ilişkin kavramsal eksiklikleri azaldıkça görsel stratejilere başvurma sıklığı da artmaktadır.

Sadece görsel süreçte değil, analitik süreçte de var olan birtakım kavramsal eksikliklerin giderilmesi konusunda da görsel stratejiler yararlı olmaktadır. Bu çalışmanın sonuçlarında değinildiği gibi öğrencilerin analitik sürecinde var olan bir takım kavramsal eksiklikler, görsel süreçte ortaya çıkmakta ve ortaya çıkan güçlüğün nedeni görsel süreçten kaynaklanıyor gibi görünmektedir. Daha önce görselleştirme ile ilgili yapılan araştırmalarda (Rösken and Rolka, 2006) görselleştirmenin kavramsal anlama ve problem çözme sürecinde yarattığı güçlükler belirtilmiştir. Bu çalışmada da öğrencilerin kontrol edilemeyen görsel imajlarından kaynaklı güçlüklerin ortaya çıktığı gözlenmiştir. Ancak bu çalışmada farklı olarak bazı durumlarda, görsel süreçte ortaya çıkan güçlüğün altında yatan nedenin analitik süreçten kaynaklandığı belirlenmiştir. Analitik süreçte fark edilmeyen bu hata, devamında gelen görsel süreçte ortaya çıkmakta ve öğrenciyi hatasının kaynağını aramaya itmektedir. Bu sırada öğrenci tekrar analitik stratejilerle bağlantı kurduğunda hatasının kaynağını fark edebilmektedir. Bu süreç şu şekilde açıklanabilir:



Şekil 6.1. Analitik süreçte oluşan zorluğun görsel süreçle birlikte aşılması

Dolaysıyla bu iki süreci birbirini destekleyerek kullanmak hem öğrenmenin etkililiği artıracak hem de bu iki süreçten herhangi birinde meydana gelecek zorlukların üstesinden gelinmesini sağlayacaktır. Böylece her iki strateji öğrencilerin kullanımına açılacaktır. Ayrıca bu sonuç, daha önce alanyazında görselleştirmeden kaynaklı olarak görünen zorlukların temelinde yatan nedenlerin analitik süreçten kaynaklanıp kaynaklanmadığı sorusunu da gündeme getirmektedir.

Tall (1991)'un da belirttiği gibi görselleştirme matematiğe hem olumlu hem de olumsuz anlamda hizmet etmektedir. Çünkü görselleştirme, bazen teoremlerin içselleştirilmesinde büyük ilerlemeler kaydetmemizi sağlarken bazı durumlarda da hatalara düşmemize neden olabilmektedir. Ancak matematikçilerin de sıklıkla kullandığı bu süreci, öğrencilerin kullanımından -derslerde kullanmayarak- uzak tutmak, görselleştirmenin sağladığı avantajlardan öğrencilerin yararlanmasına engel olmak demektir. Gerçekten de görselleştirme ile yapılan diğer araştırmalarda MSA skorlarının normal dağıldığı (Galdion-Morales,1994), örneklemin üçte ikisinin görsel stratejiler ile görsel ve analitik stratejileri dengeli kullananlardan oluştuğu (Walter, 1953) ve uç değerlerde görsel ve görsel olmayan tercihlere sahip olanların her bir kategoride yüzde 15 ile 25 arasında değiştiği (Richardson, 1977) belirtilmektedir (akt. Herman, 2002). Her ne kadar analitik stratejileri öğretmenin daha kolay olduğu belirtilse de yoğun olarak analitik stratejilerle yapılan eğitim, bazı öğrencilerin tercihlerinin görmezden gelinmesine neden olacak, bazı öğrencilerin de kavramları farklı açılardan keşfetmesine engel olacaktır. Ayrıca işitsel özelliklere sahip sunumları görsel yardımcılarla destekleme ve görsel materyalleri tartışma, ders materyallerinin algılanmasını arttırmak için akılcı bir yöntem olarak gözükmektedir (Brunning, Schaw and Ronning, 1995).

Öğrencilerin integral konusu kapsamındaki görselleştirme sürecinde zorluk yaşamalarının en önemli nedenlerinden biri de bazı ilişkileri görsel anlamda yeterice sorgulamamış olmalarıdır. Bunun en belirgin örneği belirli integralin eğri altında kalan alan anlamı, belirsiz integralde kullanılan “c” sabiti ve bir fonksiyon ile integrali arasındaki grafiksel ilişkide gözlenmiştir. Bunlardan işaretli alan kavramının öğrenciler tarafından yeterince iyi anlaşılmadığı Oberg (2000) tarafından da tespit edilmiştir. İşaretli alan kavramında yaşanan zorluklara ek olarak belirsiz integralde kullanılan “c” sabitinin öğrenciler tarafından yeterince iyi anlaşılmadığı bu çalışmada tespit edilen durumlardan biridir. Bu sabitin öğrencilerin integralle ilgili olarak ilk öğrendikleri kavramlar arasında olmasına rağmen, önceki öğrenim hayatlarından getirdikleri bir takım alışkanlıklar nedeniyle bu tür kavramları daha basit düzeyde öğrenmelerine yol açmaktadır. Özellikle integral ile ilgili uygulamalarda çoğu zaman soruya ilişkin formül ezberleme yoluna gitmeleri, elde edilen formüle ilişkin herhangi bir zihinsel yapılandırma kullanmamaları bu duruma neden olmaktadır. Aslında öğrencilerin integral uygulamalarında formül ezberlemeye yönelik olan tutumları, görsel ifadelerin zihinsel kodlama aşamasında sağladığı avantajları da göz ardı etmelerine neden olmaktadır. İntegral öğretiminde öğrencileri, en temel ve basit olarak görünen kavramlar için bile farklı bakış açılarına yönlendirmek daha yararlı olacaktır.

Fonksiyon ve integrali arasındaki grafiksel ilişki yine öğrencilerin zorlandığı bir konu olarak ortaya çıkmıştır. Aslında öğrenciler, fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi, integralin anti-türev olması özelliğini kullanarak oluşturmaktadırlar. Bu durum daha önce alanyazında belirtilen, görselleştirmenin öğrencilerin zihinlerinde oluşturduğu bilişsel yüke örnek olarak gösterilebilir. Ancak fonksiyon ve integrali arasındaki grafiksel ilişkiye, fonksiyon ve türevi arasındaki ilişkide olduğu gibi sınıf ortamında doğrudan değinilmesi halinde bu bilişsel yük ortadan kalkacaktır. Bu ilişkiyi, öğretim deneyi sırasında inceleme fırsatı bulan katılımcılarından Hale, Gülay ve Funda çalışma sonunda fonksiyon ve integrali arasındaki ilişkiyi doğrudan ve daha rahat kullanabilir duruma gelmişlerdir. Görüldüğü gibi yaşanılan zorluklar konusunda önceden yaratılacak farkındalıklar, öğrencilerin her iki süreçte de daha başarılı olmasını sağlamaktadır.

Görselleştirme ile ilgili alanyazında gerçekleştirilen çalışmaların yoğunlaştığı konular daha önceki bölümlerde ortaya konmuştur. İlk kez bu çalışmada tercihleri görsel yönde olmayan öğrencilerin de uygulanan öğretim deneyi sonucunda, görsel stratejileri, analitik stratejilerle etkileşimli olarak kullanmaya başladıkları görülmüştür. Böyle bir öğretim deneyi, görselleştirme ile ilgili araştırmalar arasında yeni bir özelliğe sahiptir. Ayrıca bu tür bir öğretim, tercihleri görsel yönde olmayan öğrencilere, görsel stratejilerin avantajlarından yararlanmalarında bir yol göstermesi açısından önemlidir. Bu nedenle öğretmenlerin, öğrencilerinin tercihleri hakkında bilgi sahibi olarak bu iki stratejiyi de öğrencilerinin kullanımına açabilmek için sınıf içinde gerçekleştirecekleri problem çözme aktivitelerini bu yönde düzenlemeleri yararlı olacaktır.

KAYNAKLAR

Akkuş Çıkla, O., 2004, The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance, attitude toward mathematics, and representation preference, PhD Dissertation, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara, 296 s.

Alcock, L. and Simpson, A., 2004, Convergence of Sequences and Series: Interactions Between Visual Reasoning and the Learner's Beliefs About Their Own Role, Educational Studies in Mathematics, 57, 1–32.

Alcock, L. and Simpson, A., 2005, Convergence of sequences and series 2: Interactions between nonvisual reasoning and the learner's beliefs about their own role, Educational Studies in Mathematics, 58, 77–100.

Arcavi, A., 2003,The role of visual representations in the learning of mathematics, Educational Studies in Mathematics,52, 215–241.

Aspinwall, L., Haciomeroglu, E.S. and Presmeg, N., 2008, Students' verbal descriptions that support visual and analytic thinking in calculus, Proceedings PME 32 and PME-NA XXX, 97-104.

Aspinwall, L., Shaw, K. L. and Presmeg, N. C., 1997, Uncontrollable Mental Imagery: Graphical Connections between a Function and Its Derivative, Educational Studies in Mathematics, 33(3), 301-317.

Baki, A., Karataş, İ. ve Güven, B., 2002, Klinik Mülakat Yöntemi İle Problem Çözme Becerilerinin Değerlendirilmesi, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresinde sunulmuş bildiri, Ankara.

Barwise, J. and Etchemendy, J., 1991, Visual information and valid reasoning, in W. Zimmermann and S. Cunningham (eds.), Visualization in teaching and learning mathematics, Mathematical Association of America, Washington DC, pp. 9–24.

Battista, M. T., 1990, Spatial visualization and gender differences in high school geometry, Journal for Research in Mathematics Education, 21(1), 47-60.

Bishop, A. J., 1986, What are some obstacles to learning geometry? Studies in Mathematics Education (UNESCO), 5, 141-159.

Booth, R. D. L. and Thomas, M. O. J., 2000, Visualisation in Mathematics Learning: Arithmetic problem-solving and student difficulties, Journal of Mathematical Behavior, 18(2), 169–190.

Borba, M.C. and Villarreal, M.E., 2005, Visualization, Mathematics Education and Computer Enviroments, in: Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking, A.J. Bishop Eds., Springer Science+Business Media: America.

Brunning, R.H., Schaw, G.J. and Ronning, R.R., 1995, Cognitive Psychology and Instruction, New Jersey: Prentice Hall.

Burton, L. and Sinclair, N., 2004, Mathematicians as Enquirers: Learning About Learning Mathematics, in: How do mathematicians think about mathematics?, Springer Science+Business Media: America.

Campbell, K.J., Collis, K.F. and Watson, J.M., 1995, Visual processing during mathematical problem solving, Educational Studies in Mathematics, 28, 177-194.

Cobb, P., and Steffe, L. P., 1983, The constructivist researcher as teacher and model builder, Journal for Research in Mathematics Education, 14(2), 83-94.

Confrey, J. and Lachance, A., 2000, Transformative teaching experiments through conjecture-driven research design. In A. E. Kelly & R. A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 231-266), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cunnimgham, R. F., 2005, Algebra Teachers' Utilization of Problems Requiring Transfer between Algebraic, Numeric, and Graphic Representations, School Science and Mathematics, 105.

Dahlberg, R. P. and Housman, D. L., 1997, Facilitating learning events through example generation, Educational Studies in Mathematics, 33, 283-299.

Duval, R., 1999, Representation, vision and Visualization: cognitive function in mathematical thinking, Annual Meeting of North American Chapter of the International Group for the PME.

Eisenberg, T. and Dreyfus, T., 1991, On the Reluctance to Visualize in Mathematics, Visualization in Teaching and Learning Mathematics (Zimmermann, & Cunnigham, ed), Washington, 25-37.

Elstak, I.R., 2007, College Students' Understanding of Rational Exponents: A Teaching Experiment, PhD Dissertation, The Ohio State University, (Unpublished).

Foley, M. A. F., 1992, Assessment of higher-order thinking in mathematics: The definite integral, PhD Dissertation, Texas A&M University, 126 p. (unpublished).

George, E. A., 1997, Reasoning with visual representations: Students' use of diagrams, figures, and graphs in solving problems on the advanced placement calculus examination, PhD Dissertation, The University of Pittsburg, 215 p. (unpublished).

Giaquinto, M. (1994). Epistemology of visual thinking in elementary real analysis, British Journal for Philosophy of Science, 45, 789–813.

Gibson, D., 1998, Students’ use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. A.H. Schoenfeld, J. Kaput ve E. Dubinsky (eds.), CBMS Issues in Mathematics Education III, 284–307.

González-Martín, A. S. and Camacho, M., 2004(a) , Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level: The case of the improper integral, Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2, 479–486.

González-Martín, A. S. and Camacho, M., 2004(b), What is first-year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals?, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35 (1), 73–89.

Gutiérrez, A., 1996, Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework, in L. Puig and A. Guttierez (eds.) Proceedings of the 20th conference of the international group for the psychology of mathematics education (vol. 1, pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Haciomeroglu, E. S., 2007, Calculus Students' Understanding of Derivative Graphs: Problems of Representations In Calculus, PhD Dissertation, The Florida State University, 346 p (Unpublished).

Hanna, G. and Sidoli, N., 2007, Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives, ZDM Mathematics Education, 39, 73-78.

Harel, G. and Sowder, L., 2007, Toward comprehensive perspectives on learning and teaching proof, In F. Lester (Ed.), Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics (2nd Ed.), Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Harel, R. and Dreyfus, T., 2009, Visual proofs: high school students' point of view, in Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1, p. 386.

Herman, M. F., 2002, Relationship of college students' Visual preference to use of representations: Conceptual understanding of functions in algebra, PhD Dissertation, The Ohaio State University, 261 p. (unpublished).

Işık, C., 2007, Bilgisayarla görselleştirmenin İki Değişkenli Fonksiyonlarda Limit Kavramının Öğretiminde Öğrenci Başarısına Etkisi, Journal of Qafqaz University, 19, 132-141.

Işık, A. ve Konyalıoğlu, A. C., 2005, Matematik eğitiminde görselleştirme yaklaşımı, Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Dergisi, 11.

İpek, A. S., 2003, Kompleks sayılarla ilgili kavramların anlaşılmasında görselleştirme yaklaşımının etkisinin incelenmesi, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, 131 s. (yayımlanmamış).

Knuth, J. E., 2000, Student understanding of the Cartesian Connection: An exploratory study, Journal of Research in Mathematics Education, 31(4), 500-508.

Konyalioğlu, S., Konyalioğlu, A.C., İpek, A.S. ve Işık, A., 2005, The Role of Visualization Approach on Student's Conceptual Learning, International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 47, September 21.

Lean, G. and Clements, K., 1981, Spatial ability, visual imagery, and mathematical performance, Educational Studies in Mathematics, 12, 267-299

Lesh, R. and Lehrer, R., 2000, Iterative Refinement Cycles for Videotape Analyses of Conceptual Change in Anthony E. Kelly and Richard A. Lesh (eds) Handbook of research design in mathematics and science education, 665-708. USA: Lawrence Erlbaum Associates.

Lowrie, T. and Kay, R., 2010, Relationship Between Visual and Nonvisual Solution Methods and Difficulty in Elementary Mathematics, The Journal of Educational Research, 94(4), 248 — 255.

Malabar, I. and Pountney, D.C., 2002, Using Technology to Integrate Constructivism and Visualisation in Mathematics Education, Proceedings of the Second International Conference on the Teaching of Mathematics, 1-6 July 2002, Hersonissos, Crete.

Mancosu, P., 2005, Visualization in Mathematics Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics, Mancosu et all.(Eds.) 13-30. Springer: Nederlands.

Nemirovsky, R. and Noble, T., 1997, On mathematical visualization and the place where we live, Educational Studies in Mathematics, 33, 99–131.

Newman Smith, N., 2008, Student's Emergengt Conceptions of the Fundamental Theorem of Calculus, PhD Dissertation, Arizona State University, 301 p. (unpublished).

Oberg, T. D., 2000, An investigation of undergraduate calculus students' conceptual understanding of the definite integral, PhD Dissertation, 264 p. University of Montana (unpublished).

Paivio, A., 2006a, Dual Coding Theory and Education. Draft chapter for the conference on "Pathways to Literacy Achievement for High Poverty Children," The University of Michigan School of Education, 22.03.2011 tarihinde http://www.csuchico.edu/~nschwartz/paivio.pdf adresinden erişildi.

Paivio, A., 2006b, Mind and its evolution; A dual coding theoretical interpretation, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Patton, M. Q., 2002, Qualitative research and evaluation methods, Sage Publication: USA

Pinto, M. and Tall, D.: 2002, Building formal mathematics on visual imagery: A case study and a theory, For the Learning of Mathematics, 22(1), 2-10.

Presmeg, N. C., 1985, The role of visually mediated processes in highschool mathematics: A classroom investigation, Ph.D. dissertation, Cambridge University, England (Unpublished).

Presmeg, N. C., 1986, Visualisation and mathematical giftedness, Educational Studies in Mathematics, 17, 3, 297-311.

Presmeg, N. C., 1992, Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. Educational Studies in Mathematics, 23(6), 595-610.

Presmeg, N., 1999, Variations in Preference for Visualization Among Mathematics Students and Teachers, Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, F. Hitt, M. Santos Eds., 23-26.

Presmeg, N. and Balderas-Cañas, P.E., 2001, Visualization and Affect in Nonroutine Problem Solving, Mathematical Thinking and Learning, 3(4), 289–313.

Presmeg, N. C., 2006, Research on visualization in learning and teaching mathematics, in A. Gutierrez, P. Borero (eds.) Handbook of Research on Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future, 205-235. Sense Publishers, Rotterdam /Taipei.

Rodd, M. M., 2000, On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof, Mathematical Thinking and Learning, 2(3), 221–244.

Rösken, B. and Rolka, K., 2006, A Picture is worth a 1000 world-The role visualization in mathematics learning, In Novotná, H., Krátká, M. & Stehliková, N. (Eds.), Proceedings 30 th Conferens of the International Group for the PME, 4, 457-464.

Russel, R. A., 1997, The Use of Visual Reasoning Strategies in Problem-Solving Activities by Pre-Services Secondary Matematics Teachers, PhD Disertation, Georgia Universitesi, 155 p. (unpublished).

Sağlam, Y. and Bülbül, A., 2009, Tendencies of the use of visual strategies of preservice mathematics teachers in advanced mathematics, in A. Birsel and M. U. Garip (eds.), Proceedings of the Frontiers in Science Education Research Conference, Eastern Mediterranean University: Famagusta, North Cyprus.

Sağlam, Y. and Bülbül, A., 2010, Adaptation of Mathematical Processing Instrument in to Turkish, Procedia - Social and Behavioral Sciences, 2(2), 3558-3562.

Savery, J. and Duffy, T., 1995, Problem based learning: an instructional model and its constructivist framework. In B.G. Wilson (Ed.), Designing constructivist learning environments (pp. 135–148), Englewood Cliffs: Educational Technology Publications.

Schoenfeld, A., 1992, Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning: A Project of the National Council of Teaching of Mathematics (pp. 334–370). New York: Macmillan.

Sealey, V., 2006, Definite Integrals, Riemann Sums, and Area Under A Curve: What is Necessary and Sufficient?. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M., and Méndez, A.(Eds), Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol.2-46.

Selden, A. and Selden, J., 1993, Collegiate Mathematics Education Research: What Would That Be Like?, The College Mathematics Journal, 24, 431-445.

Steffe L., 1991, The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications, E. von Glasersfeld (ed.), Radical Constractivism in Mathematics Education, s. 77-194.

Steffe, L. P., and Thompson, P. W., 2000, Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements, In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), Research design in mathematics and science education (s. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stylianou, D. A. and Dubinsky, E., 1999, Determining linearity: The use of visualization in problem solving, Proceedings of the 21. Annual Meeting for the PME.

Stylianou D. A., 2000, Expert and novice use of visual representations in advanced Mathematical problem solving, PhD. Dissertation, University of Pittsburg, 280 p. (unpublished).

Stylianou, D.A., 2002, On the interaction of visualiztion and analysis: the negotiation of a visual representation in expert problem solving. Journal of Mathematical Behaviour, 21, 303–317.

Stylianou, D. A. and Silver, E. A., 2004, The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences, Journal of Mathematical Thinking and Learning, 6 (4). 353-387.

Sullivan, M. M., 1997, Enhancing qualitative understanding of graphs through the inclusion of reflective thinking activities in college calculus and precalculus, PhD. Dissertation, University of Maryland, 207 p. (unpublished).

Tall, D., 1991, Intuition and rigour: the role of visualization in the calculus, Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. 19, 105-119.

Tall, D., 2000, Cognitive Development In Advanced Mathematics Using Technology, Mathematics Education Research Journal, 12, No. 3, 210-230.

Tekin, B., 2010, Ortaöğretim düzeyinde trigonometri kavramlarının öğrenilmesinde görselleştirme yaklaşımının etkililiğinin araştırılması, Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, 162 s. (yayımlanmamış).

Ubuz, B., 1996, Evaluating the Impact of Computers on the Learning and Teaching of Calculus, Ph.D Thesis, University of Nottingham, UK (Unpublished).

Von Glaserfeld, E., 1989, Cognition, Construction of Knowledge, and Teaching, Synthese, 80, 121-140.

Vygotsky, L.S., 1978, Mind in Society: The development of higher psychological processes, Cambridge MA: Harvard University Press.

Weckbacher, L. M., 2007, The Role of Visualization in Geometric Problem Solving, PhD. Dissertation, University of California, 166 p. (unpublished)

Yıldırım, A. ve Şimşek, H., 2005, Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri, 5.Baskı, Seçkin Yayıncılık: Ankara.

You, Z., 2006, Preservice Teachers' Knowledge of Linear Functions Within Multiple Representation Modes, PhD. Dissertation, Texas A&M University 247p. (unpublished)

Zaskis, R., Dubinsky, E. and Dautermann. J., 1996, Coordinating visual and analytic strategies:A study of students' understanding of the group D4, Journal for Research in Mathematics Education, 27, 435–457.

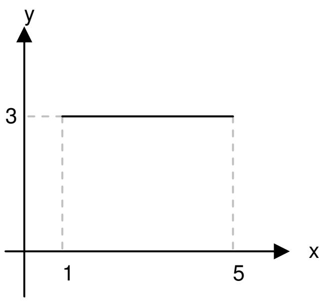
Zimmerman, W. and Cunningham, S., 1991, Editor's Introduction: What is Mathematical Visualization?, In W. Zimmerman and S. Cunningham (Eds.), Visualization in Teaching and Learning Mathematics, Mathematics Association of America.

EKLER

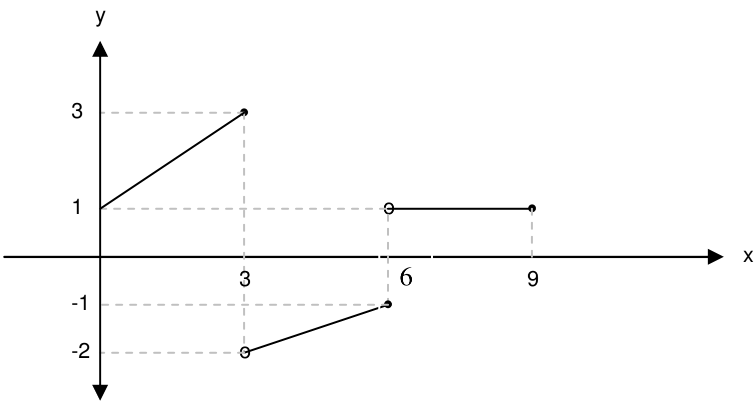
EK1. ÇALIŞMA KAĞITLARI

ÇALIŞMA KAĞIDI 1

1. Şekilde, eğri altında kalan alanı integral yardımıyla hesaplayınız.



2. *f,* grafiği şekilde verilen fonksiyon olmak üzere

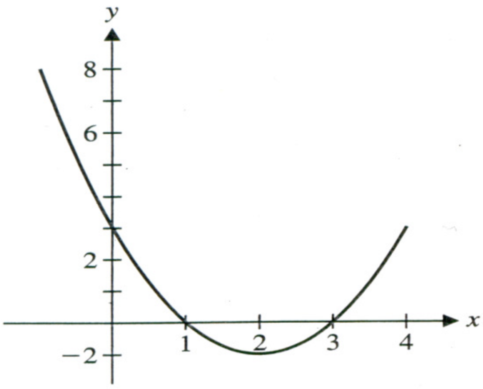


a) $\int_0^3 f(x)dx$, $\int_3^6 f(x)dx$, $\int_6^9 f(x)dx$, $\int_0^6 f(x)dx$, $\int_3^9 f(x)dx$ ve $\int_0^9 f(x)dx$ integrallerinin değerlerini sıralayınız.

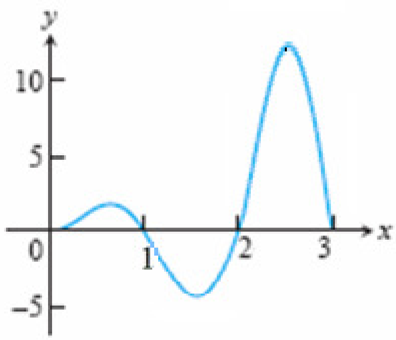
b) f fonksiyonu ile x ekseni arasında kalan alanı hesaplayınız.

3. Aşağıdaki herbir grafik için $\int_0^1 f(x)dx, \int_0^2 f(x)dx, \int_0^3 f(x)dx$ integrallerinin değerlerini küçükten büyüğe doğru sıralayınız.

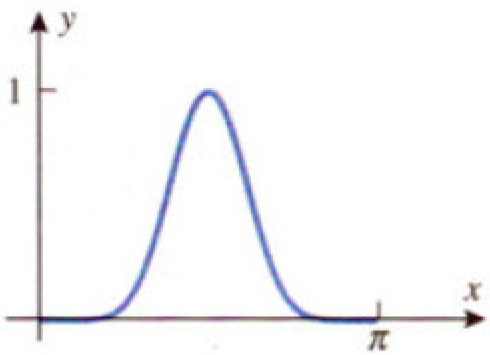
a)



b)



5. Aşağıdaki grafik, y=sin^{8}x fonksiyonuna aittir ve π, π/2, 35π/128, 1-π sayılarından biri $\int_0^{\pi} \sin^8 x\, dx$ integralinin değeridir.



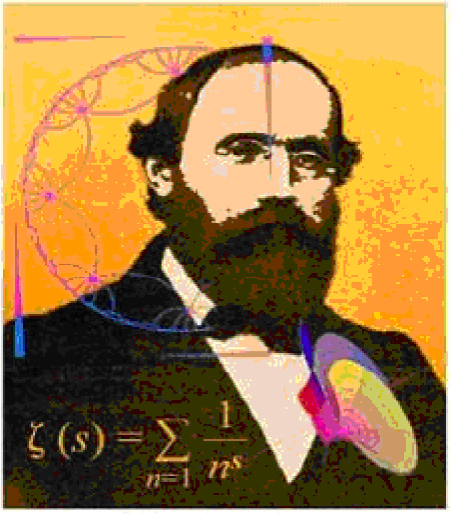
Mantıksal bir eleme süreci kullanarak (integrali hesaplamadan) doğru değeri bulunuz.

5. y=|x| ve y=4-|x| denklemleriyle tanımlanan doğruların sınırladığı bölgenin alanını bulunuz.

6. *f,* sürekli ve artan bir fonksiyon olmak üzere f(0)=2, f(5)=3, f(-4)= -2 değerleri veriliyor. $\int_{-4}^{0} f(x)dx = 0$, $\int_{-2}^{0} f(x)dx = 2$ ve $\int_{0}^{5} f(x)dx = 10$ olduğuna göre $\int_{-2}^{3} f^{-1}(x)dx$ değerini hesaplayınız.

<u>Çalışma Kağıdı 1'de kullanılan kaynaklar</u>

- Smith, R. T. Ve Minton, R. B., 2002, Calculus, R. E. Ross (Eds.) Mc-Graw-Hill:USA, 2. Edition (3. Soru)
- Anton, H., Bivens, I., Davis,S., 2002, Calculus, K. Murphy, A. Scanlan-Rohrer, K. Santor, H. Newman, S. Malinowski Eds., John Wiley&Sons Inc: USA (4. Soru)

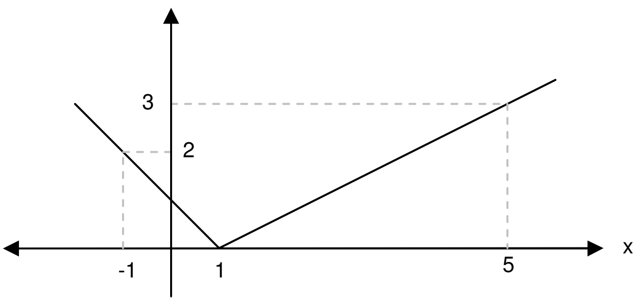


George Friedrich Bernhard Riemann

ÇALIŞMA KAĞIDI–2

1. $\int_{-3}^{5} \left| \frac{x-3}{2} \right| dx$ integralinin değerini hesaplayınız.

2. *f,* grafiği şekilde verilen fonksiyon olmak üzere $\int_{-1}^{5} f(x)dx$'in değerini hesaplayınız.



3. a) *f,* tek bir fonksiyon (f(-x)=-f(x)) olmak üzere aşağıdaki integralin değerini verecek bir sonuç ortaya koyunuz:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx$$

b) (a) şıkkında bulduğunuz sonucun aşağıdaki integraller için de doğru olduğunu gösteriniz.

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x)dx$$

c) *f,* çift bir fonksiyon olmak üzere (f(-x)= f(x)) aşağıdaki iki integral arasında ilişki verecek bir sonuç ortaya koyunuz.

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \quad \text{ve} \quad \int_{0}^{a} f(x)dx$$

d) (c) şıkkında bulduğunuz sonucun aşağıdaki integraller için de doğru olduğunu gösteriniz.

$$\int_{-1}^{1} x^2 dx \quad \text{ve} \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx$$

4. Aşağıdaki integrallerin değerini bulunuz.

a) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin(x^3)dx$

b) $\int_{-5}^{5} \frac{x^7 - x^5 + x}{x^4 + x^2 + 7} dx$

c) $\int_{-1}^{1} [3x^2 + x^{10} \sin x + x^5 \sqrt{1+x^4}]dx$

<u>*Çalışma Kağıdı 2'de kullanılan kaynaklar*</u>

- Anton, H., Bivens, I., Davis,S., 2002, Calculus, K. Murphy, A. Scanlan-Rohrer, K. Santor, H. Newman, S. Malinowski Eds., John Wiley&Sons Inc: USA (3. ve 4. Soru)

Sir Isaac Newton

ÇALIŞMA KAĞIDI–3

1. a) Aşağıdaki eşitsizliği göstermek için geometrik bir kanıt veriniz.

$$\frac{1}{x+1} < \int_{x}^{x+1} \frac{1}{t} dt < \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

b) (a) şıkkında bulduğunuz sonucu kullanarak aşağıdaki eşitsizliği kanıtlayınız.

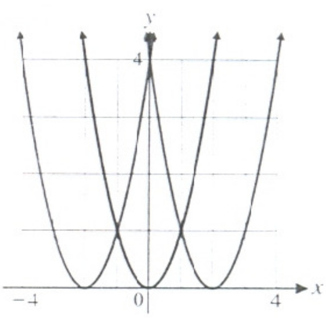
$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

2. a) $\int_{1}^{b} \frac{1}{x}\, dx$ ile $\int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\, dx$ (b>1) integral değerlerini karşılaştırınız.

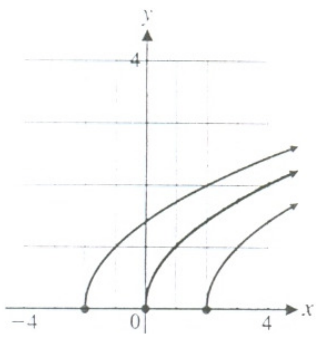
b) $\int_{1}^{\infty} e^{-x} dx$ integralinin yakınsak olduğu göz önüne alınırsa $\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$ integralinin yakınsaklığı hakkında ne söylenebilir? Açıklayınız.

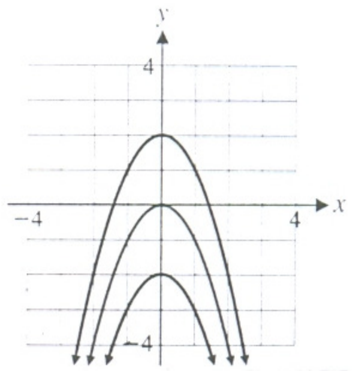
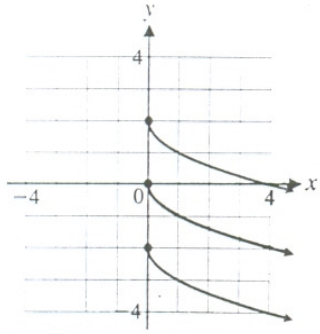
3. Aşağıdaki dört grafik aynı fonksiyonun integralleri olabilir mi? Açıklayınız.

a)



b)



c)  d) 

4. a) Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösteriniz.

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{x}{1-x} + c_1$$

b) u=1-x yazarak aşağıdaki eşitliği gösteriniz.

$$\int \frac{dx}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x} + c_2$$

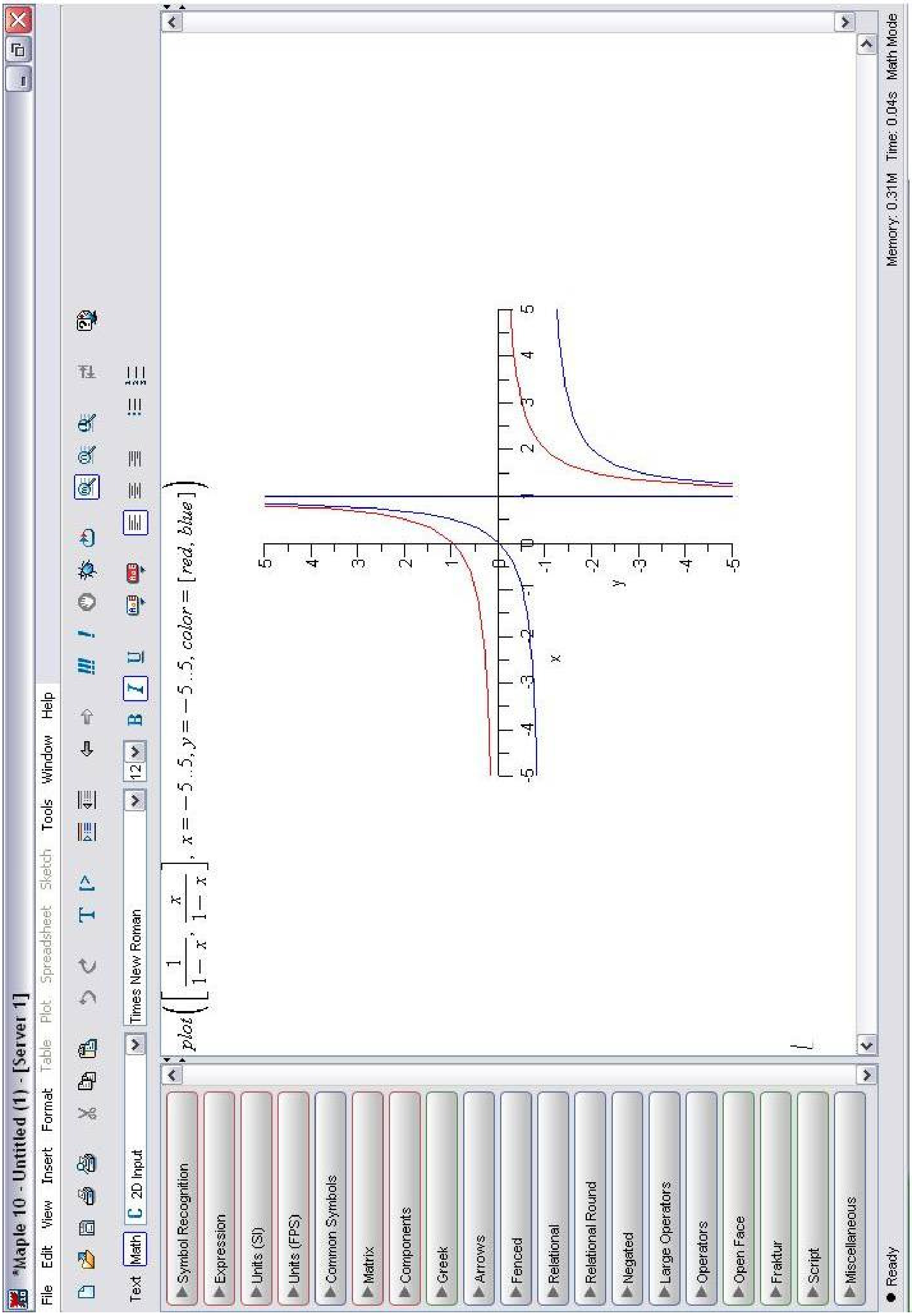
c) a ve b şıklarında bulduğunuz sonuçları bağdaştırınız.

(Öneri: $f(x) = \dfrac{x}{1-x}$ ve $g(x) = \dfrac{1}{1-x}$ fonksiyonlarının grafiklerini karşılaştırınız)

Çalışma Kağıdı 3'te kullanılan kaynaklar

- Anton, H., Bivens, I., Davis,S., 2005, Calculus, K. Murphy, A. Scanlan-Rohrer, K. Santor, H. Newman, S. Malinowski Eds., John Wiley&Sons Inc: USA (1. ve 2. Soru).
- Barnet,R. A., Ziegler, M.R.and Byleen, K. E., 2005, Calculus, 10. Ed. Pearson Printice Hall:USA (3. Soru).
- Edwards, C. H. ve Penny, D. E., 2003, calculus, S. Yagan (Eds.) Prentice Hall: USA (4. Soru)

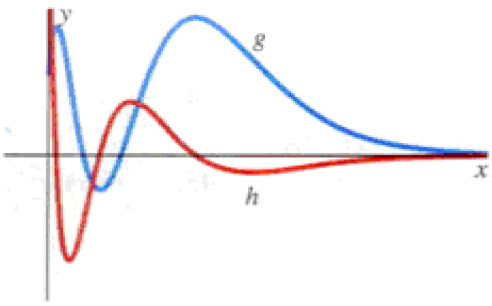
ÇK-3, dördüncü soru, c şıkkı için verilen çıktı.



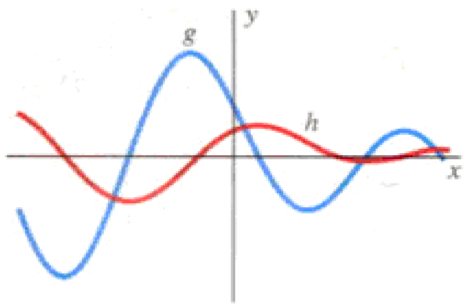
ÇALIŞMA KAĞIDI–4

1. Bir *f* fonksiyonu ve bu fonksiyunun F integralinin grafiğinin özelliklerini düşünün. *f* ve F'nin grafiği verildiğinde hangisinin hangisi olduğunu belirleyebilecek bir strateji belirleyin ve bu stratejiyi aşağıda grafikleri verilen g ve h fonksiyonlarına uygulayarak hangisinin hangisi olduğunu belirlemekte kullanın.

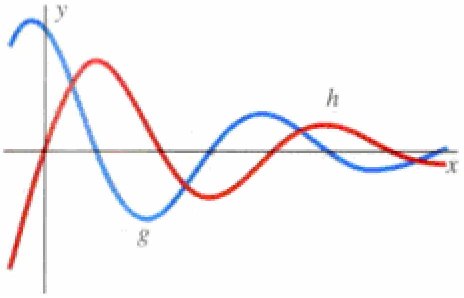
a)



b)

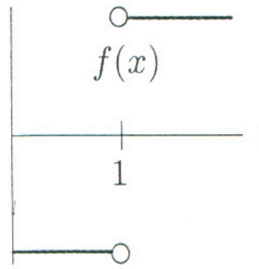


c)

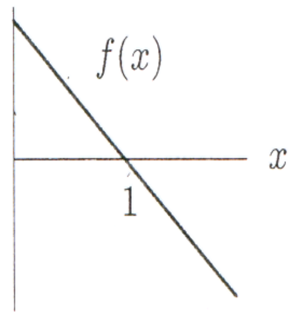


2. Aşağıdaki grafiklerin herbiri için F'(x)=f(x) sağlayacak şekilde iki *F* fonksiyon grafiği çiziniz. Birincisinde F(0)=0 diğerinde ise F(0)=1 olmasını sağlayın.

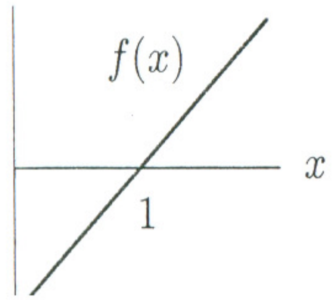
a)



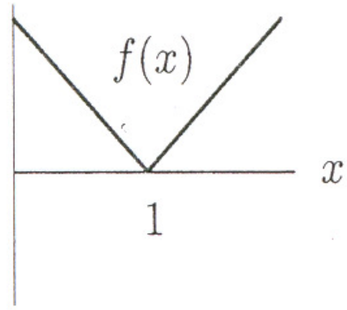
b)



c)

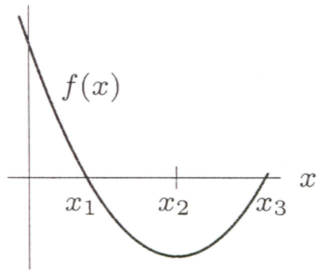


d)

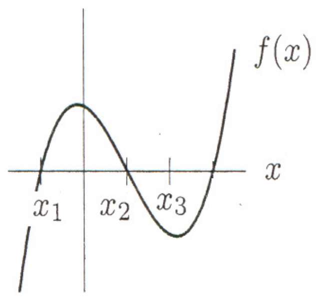


3. Aşağıdaki grafiklerin herbiri için F'(x)=f(x) sağlayacak şekilde F fonksiyonunun grafiği çiziniz. Kendi grafiğinizde x-ekseni üzerindeki x_1, x_2 ve x_3 noktalarını işaretleyin. F(x)'in yerel maksimum, yerel minimum ve dönüm noktalarını belirleyiniz.

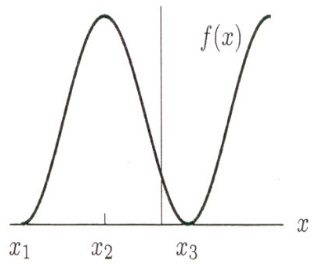
a)



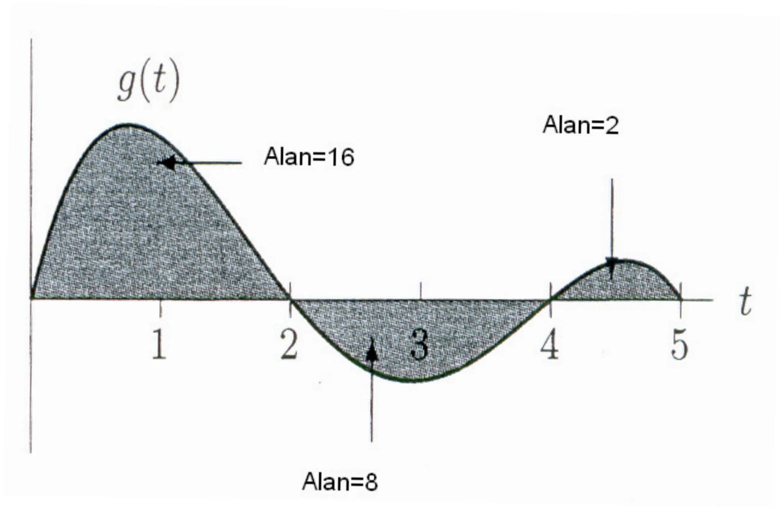
b)



c)



4. Aşağıdaki şekli kullanarak *G*(0)=5'in sağlandığı, *g*(t)'nin integrali olan *G*(t)'nin grafiğini çiziniz. *G*(t)'nin herbir kritik noktasını koordinatlarıyla birlikte işaretleyiniz.



Çalışma Kağıdı 4'te kullanılan kaynaklar

- Edwards, C. H. and Penny, D. E., 2003, calculus, S. Yagan (Eds.) Prentice Hall: USA (1. Soru)
- Hughes-Hallet, D., Gleason, A. M., McCallum, W. et al., 2005, Calculus, 4. Edt., John Wiley & Sons, USA. (2., 3. ve 4. Soru)

EK 2. ÖN KLİNİK GÖRÜŞME SORULARI

ÖNEMLİ

Aşağıdaki sorular, sizin Analize Giriş II dersinde gördüğünüz integral konusu kapsamında, problem çözerken kullandığınız yöntemlerle ilgili tercihlerinizi belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Soruların hiçbiri sizin başarınızı ya da bilginizi ölçmek amacı taşımamaktadır. Bu nedenle soruları çözerken istediğiniz yöntemi kullanabilirsiniz. Araştırma için önemli olan, soruyu çözüp çözememeniz değil, bu soruları çözerken neler düşündüğünüz ve neler yaptığınızdır. Bu yüzden problemleri çözerken mümkün olduğunca ne yaptığınızı açıklamanız, araştırma için oldukça önemlidir.

SORULAR

1. (-3,8) aralığında x-ekseni ile $y=x^2-3x-10$ eğrisi arasında kalan alanı bulunuz.

2. Aşağıdaki integrallerin değerini hesaplayınız.

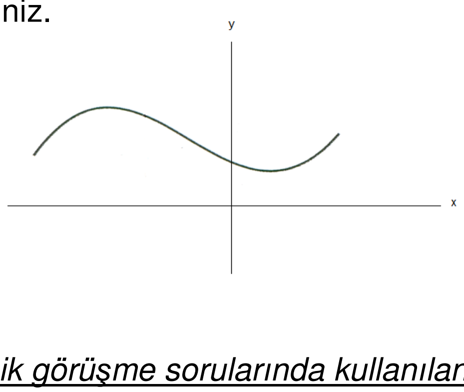
a) $\int_{-1}^{1}(1+\sqrt{1-x^2})dx$ b) $\int_{1}^{5}\sqrt{6x-5-x^2}\,dx$

3. $y=\sqrt{3-x}$ eğrisinin (-1,3) aralığında x-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?

4. *f* sürekli ve artan bir fonksiyon olmak üzere f(0)=1, f(2)=9 ve $\int_{0}^{2}f(x)dx=8$ veriliyor. $\int_{1}^{9}f^{-1}(x)dx$'i hesaplayınız.

5. $\int_{-2}^{2}\sin^3(x)dx$ integralini hesaplayınız.

6. Aşağıdaki şekil bir *f*(x) fonksiyonunun belirsiz integralinin grafiğini göstermektedir. *f*(x) fonksiyonunun başka bir belirsiz integralinin grafiğini çiziniz.



Ön klinik görüşme sorularında kullanılan kaynaklar

- Alexopoulos, J. and Barb, C., 2001, Discovering Integrals With Geometry, Primus, 11(1), 79-88 (4. Soru)

EK 3. SON KLİNİK GRÜŞME ÖNCESİ YAPILAN GÖRÜŞME SORULARI

Görüşme Soruları

1. Dört hafta boyunca yaptığımız uygulamaları düşünürsen,
    a) En çok zorlandığın sorular hangileriydi? Neden?
    b) Neler öğrendin?
2. İntegralle ilgili bir soruyu çözmekte kullandığın yöntemi etkileyen faktörler nelerdir?
3. Sorularda kullanılan çözüm yöntemlerini düşünürsen;
    a) Senin çözüm yönteminden farklı çözüm yöntemleriyle karşılaştın mı? Nasıl? Senin çözüm yönteminden farkları neler?
    b) En çok hangi çözüm yöntemlerini beğendin? Neden? Karşılaştığın yeni çözüm yöntemlerini düşündüğünde bundan sonra tercih edeceğin var mı? Hangileri? Neden?

EK 4. SON KLİNİK GÖRÜŞME SORULARI

ÖNEMLİ

Aşağıdaki sorular, sizin Analize Giriş II dersinde gördüğünüz integral konusu kapsamında, problem çözerken kullandığınız yöntemlerle ilgili tercihlerinizi belirlemek amacıyla hazırlanmıştır. Soruların hiçbiri sizin başarınızı ya da bilginizi ölçmek amacı taşımamaktadır. Bu nedenle soruları çözerken istediğiniz yöntemi kullanabilirsiniz. Problemleri çözerken mümkün olduğunca ne yaptığınızı açıklamanız, araştırma için oldukça önemlidir.

SORULAR

1. Aşağıdaki integral değerini bulunuz.

$F(x)=\int_0^x \tan^{-1}(t)dt$, (x>0)

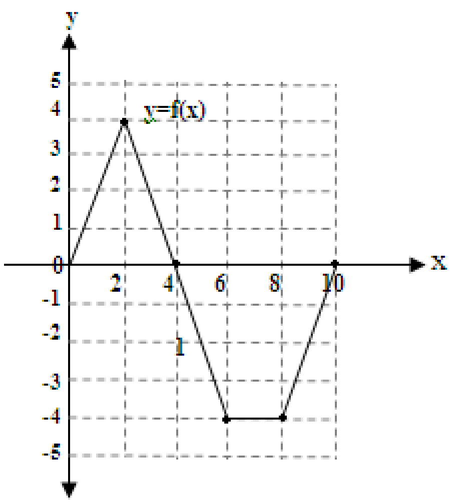
2. Aşağıdaki integrallerin değerini hesaplayınız.

a) $\int_{-1}^{1} [\frac{\sqrt[3]{x}}{(1+x^2)^7} - x^{17}\cos x]dx$

b) $\int_{-3}^{3} (4x^3-5)\sqrt{9-x^2}dx$

3. $y=\sqrt{3-x}$, eğrisinin x ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan cismin hacmi nedir?

4. Aşağıdaki grafik y=f(x) fonksiyonuna aittir. $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ olmak üzere;



a) g(0), g(2), g(4), g(6), g(8) ve g(10)'un değerlerini bulunuz.

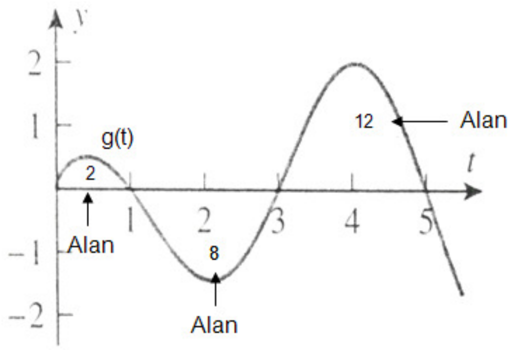
b) Hangi aralıklarda g(x) artmakta, hangi aralıklarda azalmaktadır.

c) (0,10) aralığında g(x)'in maksimum ve minimum noktalarını bulunuz.

d) y=g(x)'in olası grafiklerinden birini çiziniz.

5. g, yanda grafiği verilen fonksiyon; G, g'nin belirsiz

integrali ve G(0)=2 olmak üzere;



a) G'nin yerel minimum noktası nerdedir?

b) G'nin yerel maksimum noktası nerdedir?

c) G nerede yukarı bükey, nerede aşağı bükeydir?

d) G'nin olası grafiklerinden birini çiziniz?

<u>Son Klinik Görüşme Sorularında Kullanılan Kaynaklar</u>

- Edwards, C. H. and Penney, D., 2002, Calculus, 6th ed., Prentice Hall:USA (4. Soru)

EK 5. MATEMATİKSEL SÜREÇ ARACI B-BÖLÜMÜ

MATEMATİKSEL SÜREÇ ARACI

1. AŞAMA

Önemli:

(a) Problem kağıdının üzerine yazı yazmayınız. Sonuçlarınızı size verilen kağıt üzerine yazınız.

(b) Her bir soru için işlemlerinizi mümkün olduğu kadar açık yazınız.

(c) Tüm soruları çözmeniz gerekmektedir.

BÖLÜM B:

B-1. Bir koşu yolu, atletizm yarışları için eşit olmayan 3 bölüme ayrılıyor. Tüm koşu yolunun uzunluğu 450 m, birinci ve ikinci bölümlerin toplamı 350m, ikinci ve üçüncü bölümlerin toplamı 250 m olduğuna göre **her bir bölümün** uzunluğunu bulunuz.

B-2. Bir balon yerden önce 200 m yükseliyor, ardından 100 m doğuya hareket ediyor, daha sonra 100 m alçalıyor. Daha sonra tekrar 50 m doğuya hareket ediyor ve son olarak dik bir şekilde yere iniyor. Balonun ilk hareket noktasına olan uzaklığı nedir?

B-3. Bir anne kızının 7 katı yaşındadır. İkisi arasındaki yaş farkı 24 ise anne ve kızı kaç yaşındadır?

B-4. Bir atletizm yarışmasında Jale, Pelinden 10m ileridedir. Tülay, Mine'den 4 m ileride ve Mine de Pelinden 3 m ileridedir. Jale'nin Tülay'a olan uzaklığı nedir?

B-5. Başlangıçta bir kg şekerin fiyatı, bir kg tuzun fiyatının 3 katı kadardır. Daha sonra bir kilogram tuzun fiyatı önceki fiyatının yarısı kadar yükselirken, şekerin fiyatı değişmemiştir. Eğer tuzun şimdiki kg fiyatı 3 TL ise şekerin kg fiyatı kaç TL'dir?

B-6. Herbirinde eşit sayıda olmak üzere iki ağaçta bir kaç serçe vardır. Eğer birinci ağaçtaki serçelerin ikisi **ikinci ağaca** uçarlarsa ikinci ağaçta birinci ağaçtan kaç tane **fazla** serçe olur?

B-7. Bir kereste fabrikasındaki testereler 16 m boyundaki uzun kütükleri herbiri 2 m boyunda küçük kütükler halinde kesmektedir. Eğer her bir kesim iki dk sürüyorsa, uzun bir kütükten 8 tane küçük kütük kesmek kaç dk sürecektir?

B-8. Bir kutu gaz yağı 8 kg’dır. Gaz yağının yarısı boşaltıldıktan sonra ağırlığı kutu ile birlikte 4,5 kg’dır. Kutunun ağırlığını hesaplayınız.

B-9. Yolculuğunun yarısını yapan bir yolcu uyuyakalıyor. Uyandığında, uyurken aldığı yolun yarısı kadar yolu kaldığına göre tüm yolculuğun ne kadarlık kısmında uyuyakalmıştır?

B-10. Bir terazi, bir kefesinde büyük bir parça peynir; diğer kefesinde ise bu parçanın 3/4’ü kadar bir peynir ve 3/4 kg’lık bir ağırlık ile dengededir. Peynirin tüm ağırlığı ne kadardır?

B-11. İki kovadan birinde diğerinin iki katı kadar süt vardır. Bu kovalardan 20’şer litre süt döküldüğünde kovalardan birinde diğerinin üç katı kadar süt kalıyorsa başlangıçta kovalarda ne kadar süt vardır?

B-12. On eriğin ağırlığı, üç kayısı ve bir mangoya eşittir. Altı erik ve bir kayısının ağırlığı bir mangonun ağırlığına eşittir. Kaç tane erik terazide bir mangoyu dengeler?

2. AŞAMA

ÖNEMLİ:

Bu ölçekte sizden matematiksel süreç problemlerine nasıl yanıt verdiğinizi düşünmeniz istenmektedir. Her problemin üç veya daha fazla çözümü vardır.

1. Problemi ilk çözüşünüzde kullandığınız yolla aynı veya çok benzer olanı aşağıda verilen çözüm yöntemleri arasından seçerek yanıt anahtarına işaretleyiniz. Problemi tamamlayıp tamamlamamış olmanız veya yanıtınızın doğru olup olmaması önemli değildir. Eğer çözüm yolunuz verilen seçeneklerden ikisine benziyorsa bu iki çözüm yolunu da işaretleyebilirsiniz.
2. Eğer problemlerden herhangi biri için verilen çözüm yollarından hiçbiri sizin çözüm yolunuzla aynı veya çok benzer değilse "HİÇBİRİ" şıkkını işaretleyip kendi çözüm yolunuzu yanıt kağıdına mümkün olduğu kadar açık bir şekilde ifade ediniz.

ÇÖZÜMLER

BÖLÜM B:

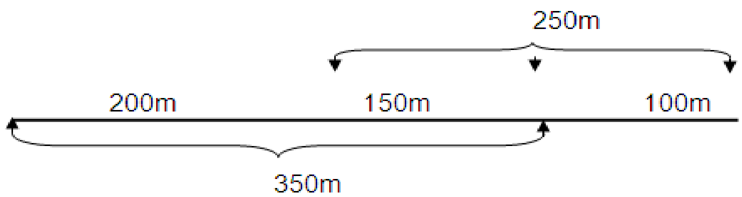
B-1. Çözüm 1: Ben bu problemi yarış pistini hayal ederek çözdüm ve daha sonra her bir bölümün uzunluğunu hesapladım.

Üçüncü bölümün uzunluğu =450-350 = 100 m

Birinci bölümün uzunluğu =450-250 = 200 m

Dolayısıyla ikinci bölümün uzunluğu = 150 m

B-1. Çözüm 2: Bir yarış pistini gösteren bir diyagram çizdim ve daha sonra her bir bölümün uzunluğunu hesapladım.



Birinci bölümün uzunluğu 200m, ikinci bölüm 150m ve üçüncü bölüm 100m.

B-1. Çözüm 3: Bu problemi çözmek için verilen bilgiden yararlandım, herhangi bir resim çizmedim veya hayal etmedim:

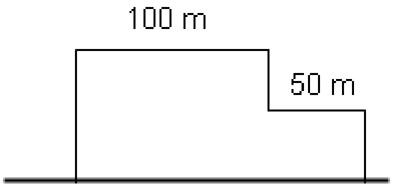
Yarış pistinin uzunluğu 450 m	x+y+z= 450
Birinci ve ikinci bölümün toplamı 350 m	x+y = 350
Sonuç: Üçüncü bölümün uzunluğu 450-350 = 100 m	z = 100
İkinci ve üçüncü bölümün toplamı 250 m	y+z= 250
Sonuç: Birinci bölümün uzunluğu =450-250=200 m	x = 200

Dolayısıyla ikinci bölümün uzunluğu = 450-200-100=150m. y = 150

B-1. Çözüm 4: Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-2. Çözüm 1: Balon tarafından alınan yolu hayal ettim ve daha sonra başlangıç ve bitiş noktası arasında kalan uzaklığı hesapladım. Uzaklığı 100+50=150 m olarak buldum.

B-2. Çözüm2: Balon tarafından izlenen yolu gösteren bir diyagram çizdim ve daha sonra başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki mesafeyi hesapladım.



Uzaklık = 100 + 50 = 150 m.

B-2. Çözüm3: Bu problemi çözmek için, çözüm için önemli olan bilgilere dikkat ettim (balonun yolunu hayal etmeden). Bu durumda başlangıç ve bitiş noktaları arasındaki mesafe 100 + 50 = 150 m'dir.

B-2. Çözüm4: Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız).

B-3. Çözüm 1: Ben bu soruyu deneme yanılma ile çözdüm.

Kızının yaşı:	Annenin yaşı:	
2 yaş	26 yaş	hayır
3 yaş	27 yaş	hayır
4 yaş	28 yaş	evet

Dolayısıyla kızın yaşı 4 ve annenin yaşı 28.

B-3. Çözüm 2: Ben bu problemi semboller ve denklemler kullanarak çözdüm, örneğin,

Kızın yaşı x olsun

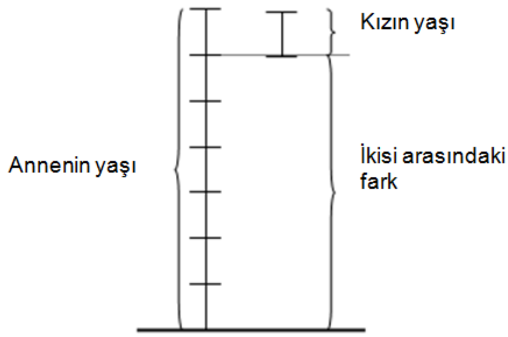
O zaman anne 7x yaşında olur

Ikisinin yaş farkı 6x'tir.

Bu nedenle 6x=24. Dolayısıyla x=4

Dolayısıyla kızın yaşı 4 ve annenin yaşı 28.

B-3. Çözüm 3: Yaşları gösteren bir diyagram çizdim.



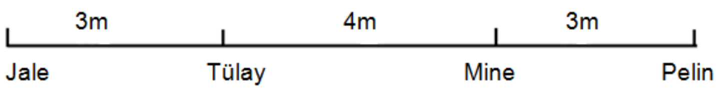
Diyagrama göre ikisinin arasındaki yaş farkı 6 eşit parça toplamda 24 yıla eşit. Dolayısıyla her parça 4 yılı gösteriyor. Öyleyse kızı 4, anne 28 yaşındadır.

B-3. <u>Çözüm 4:</u> Çözüm3'teki gibi bir diyagram hayal ettim ve daha sonra 6 parçanın 24 yıla eşit olduğu sonucunu çıkardım, öyleyse bir parça 4 yılı gösterir (sembolleri kullanarak ya da kullanmayarak). Öyleyse kızın yaşı 4 ve annesin yaşı 28.

B-3. <u>Çözüm5:</u> Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-4. <u>Çözüm 1:</u> Dört insanı hayal ettim ve Jale ile Tülay arasındaki uzaklığı hesapladım. Jale, Tülay'ın 3 m önündedir.

B-4. <u>Çözüm 2:</u> Dört kişiyi gösteren bir diyagram çizdim ve daha sonra Jale ve Tülay arasındaki mesafeyi hesapladım.



Jale, Tülay'ın 3 m önündedir.

B-4. <u>Çözüm 3:</u> Ben bu problemi sadece problem içindeki cümlelerden sonuçlar çıkararak çözdüm:

Tülay, Mine'nin 4 m ve Mine de Pelin'in 3 m önündedir.

Sonuç: Tülay, Pelin'in 7 m önündedir.

Jale, Pelin'in 10 m önündedir.

Sonuç: Jale, Tülay'ın 3 m önündedir.

B-4. <u>Çözüm4:</u> Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-5. <u>Çözüm 1:</u> Ben bu problemi şeker ve tuzun fiyatlarını gösteren bir diyagram çizerek çözdüm.

Diyagramda görüldüğü gibi tuzun fiyatı yükseldi, 1 kg şekerin fiyatı ise 1 kg tuzun fiyatının (3 TL) üç katıydı. Dolayısıyla 1 kg şekerin fiyatı 6 TL.

B-5. <u>Çözüm 2:</u> Birinci çözümdeki yolu kullandım ama diyagramı "aklımda" çizdim (kağıt üzerine değil).

B-5. <u>Çözüm 3:</u> Problemi akıl yürüterek çözdüm. 1 kg tuzun şimdiki fiyatı 3 TL. Bu önceki fiyatının 1,5 katı; dolayısıyla önceki kg fiyatı 2 TL'di. Dolayısıyla şekerin fiyatı 3x2 TL, yani 6 TL'dir.

B-5. <u>Çözüm 4:</u> Problemi semboller ve denklemler kullanarak çözdüm. Örneğin;

Tuzun önceki kg fiyatının x TL olduğunu varsaydım.

O zaman şekerin kg fiyatı 3x TL'dir.

Yükselişten sonra tuzun kg fiyatı 1,5x TL'dir.

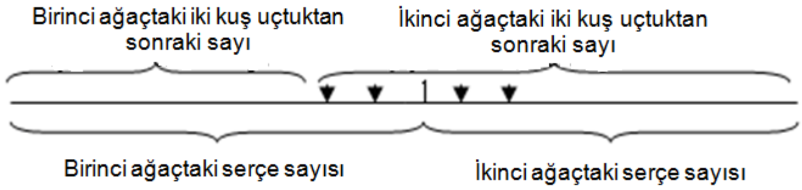
Dolayısıyla 1kg şekerin fiyatı, tuzun şimdiki fiyatının iki katıdır, yani

3x2=6 TL'dir.

B-5. <u>Çözüm 5:</u> Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte size verilen yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-6. <u>Çözüm 1:</u> Problemi akıl yürüterek çözdüm. İki serçe birinci ağaçtan ikinci ağaca uçtuğunda, ilk ağaçta öncekine göre iki tane daha az serçe, ikinci ağaçta ise iki tane daha fazla serçe olur Dolayısıyla ikinci ağaç birinciden dört tane daha fazla serçe bulundurmuş olur.

B-6. <u>Çözüm 2:</u> Bir diyagram çizdim.



İkinci ağaçta, birinci ağaçtan dört tane fazla serçe bulunmaktadır.

B-6. <u>Çözüm 3:</u> Çözüm 2 ile aynı yöntem fakat diyagramı "aklımda" çizdim (kağıt üzerine değil).

B-6. <u>Çözüm 4:</u> Bu problemi bir örnek kullanarak çözdüm. Örneğin, başlangıçta her iki ağaçta 8 serçe olduğunu düşündüm. Birinciden ikinciye 2 serçe uçtuktan sonra birinci ağaçta 6, ikinci ağaçta 10 serçe olur. Dolayısıyla ikinci ağaç, birinci ağaçtan 4 tane fazla serçe bulundurur.

B-6. <u>Çözüm 5:</u> Bu problemi semboller ve denklemler kullanarak çözdüm.

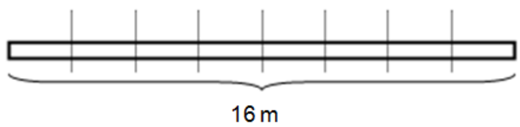
Her bir ağaçtaki kuş sayısı x olsun.

Iki serçe birinci ağaçtan ikinci ağaca uçtuktan sonra, birinci ağaç x-2 ve ikinci ağaç x+2 serçe bulundurur. Serçelerin sayıları farkı

$(x+2) – (x-2) = 4$.

B-6. <u>Çözüm 6:</u> Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-7. <u>Çözüm 1:</u> Bu problemi çözmek için küçük kerestelere ayrılmış uzun bir keresteyi gösteren bir diyagram çizdim.



Şekle göre 8 kısa kereste için 7 kesim gerekli. Dolayısıyla 7x2 = 14 dk gerekli.

B-7. <u>Çözüm 2:</u> 1. çözümdeki gibi, ama diyagramı aklımda "gördüm".

B-7. Çözüm 3: Problemi akıl yürüterek çözdüm. Eğer uzun kereste 16m'den fazla olsaydı, 8 küçük kereste için 8 kesim gerekecekti. Fakat son kesim gereksiz, bu yüzden 7 kesim gerekli. Gerekli zaman 7x2 = 14 dk.

B-7. Çözüm 4: Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-8. Çözüm 1: Bu problemi sembol ve denklemler kullanarak çözdüm, örneğin;

Kutunun ağırlığı x kg olsun.

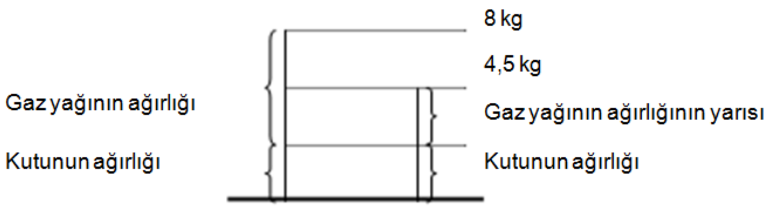
O zaman gaz yağının ağırlığı(8-x) kg olur.

Öyleyse gaz yağının yarısın ağırlığı $\frac{1}{2}$(8-x) kg.

O zaman $x + \frac{1}{2}(8-x) = 4\frac{1}{2}$. Bu durumda x=1.

Kutunun ağırlığı 1 kg.

B-8. Çözüm 2: Her bir ağırlığı gösteren bir diyagram çizdim.



Diyagramdan gaz yağının yarısının ağırlığı $8 - 4\frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ kg.

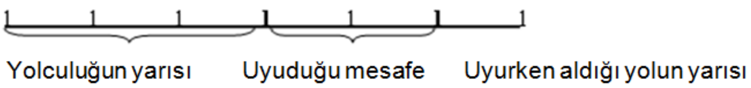
Dolayısıyla gaz yağının ağrılığı 7 kg, kutunun ağırlığı 1 kg. (Veya direkt olarak, kutunun ağırlığı $4\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2} = 1$ kg.)

B-8. Çözüm 3: Çözüm 2 deki gibi ama aklımda bir diyagram "gördüm".

B-8. Çözüm 4: Çözüm 2 deki gibi ama bir diyagram olmadan veya hiç hayal etmeden.

B-8. Çözüm 5: Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-9. Çözüm 1: Yolculuk edilen uzaklığı gösteren bir diyagram çizdim



Diyagramdan, eğer tüm yolculuk 6 parça ise turist 2 parçada uyudu, bu da tüm yolculuğun üçte biri eder.

B-9. Çözüm 2: Çözüm 1 deki gibi ama aklımda bir diyagram “gördüm”.

B-9. Çözüm 3: Bu problemi sembol ve denklemler kullanarak çözdüm, örneğin;

Uyuduğu mesafe x birim olsun.

Uyandığında kalan mesafe $\frac{1}{2}$x birimdir.

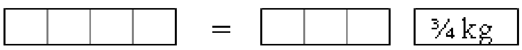
O zaman (x + $\frac{1}{2}$x) yolcuğun yarısını oluşturur.

Tüm yolculuk 2(x + $\frac{1}{2}$x) = 3x birimdi.

Öyleyse tüm yolcuğun 1/3 ün de uyumuştur.

B-9. Çözüm 4 Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-10. Çözüm 1: Bu soruyu nesneleri gösteren bir diyagramla çözdüm



Terazinin her iki kefesinden peynirlerin ¾ ‘ü alındığında, peynirin 1/3’ü $\frac{3}{4}$kg ağırlığı dengeliyor. Öyleyse tüm peynirin ağırlığı 4x$\frac{3}{4}$, yani, 3 kg.

B-10. Çözüm 2: Çözüm 1 deki gibi ama aklımda bir diyagram” gördüm”.

B-10. Çözüm 3: Bu problemi sembol ve denklemler kullanarak çözdüm, örneğin;

Peynirin ağırlı x kg olsun.

O zaman x = $\frac{3}{4}$x + $\frac{3}{4}$. Öyleyse x=3

Dolayısıyla peynirin ağırlığı 3 kg.

B-10. Çözüm 4: Bir diyagram ya da bir görüntü olmadan akıl yürüterek çözdüm. Bir çeyrek peynirin ağırlığı $\frac{3}{4}$kg. Dolayısıyla bir peynirin ağırlığı 3 kg.

B-10. Çözüm 5: Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-11. <u>Çözüm1:</u> Bu problemi sembol ve eşitlikler kullanarak çözdüm, örneğin;

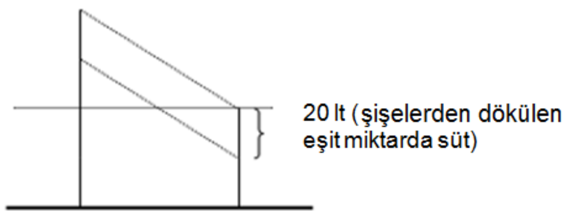
Sütün ilk ağırlığı x lt ve 2x lt olsun.

Dökülen sütün miktarı (x-20) ve (2x-20) lt'dir.

O zaman 3(x-20) = 2x-20.

x= 40.

B-11. <u>Çözüm 2:</u> Süt miktarlarını gösteren bir diyagram çizdim.



Diyagrama göre kovalardaki sütler döküldükten sonra birinci kovada ikicinin üç katı kadar süt bulunmaktadır, ikinci kovada kalan süt miktarı ise 20 lt'dir. Dolayısıyla ilk miktarlar 40 lt ve 80 lt'dir.

B-11. <u>Çözüm 3:</u> Çözüm 2'deki gibi, fakat aklımda bir diyagram "gördüm".

B-11. <u>Çözüm 4:</u> Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

B-12. <u>Çözüm 1:</u> Semboller ve denklemler kullandım, örneğin;

Eriğin ağırlığı x br ve kayısının ağırlığı y br olsun

O zaman bir mangonun ağırlığı (6x+y) br.

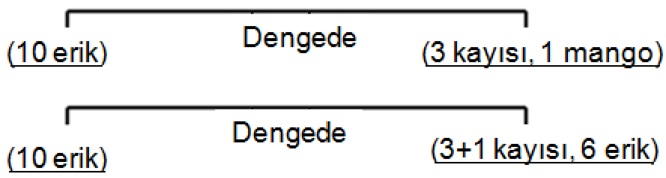
Dolayısıyla 10x = 3y + (6x+y)

Öyleyse x = y

O zaman bir mangonun ağırlığı 6x+x yani 7x br'dir.

Dolayısıyla bir mango 7 eriği dengeler.

B-12. <u>Çözüm 2:</u> Bu soruyu ağırlıkları gösteren bir diyagram çizerek çözdüm.



Her bir kefeden 6 erik kaldırılık. 4 erik 4 kayısıyı dengeleyecektir. Dolayısıyla 1 erik 1 kayısıyı dengeleyecektir. Bir mango, 6 erik ve 1 kayısıyı; yani bunlara ağırlıkça eşit olan 7 eriği dengeler.

B-12. <u>Çözüm 3:</u> Çözüm 2'deki gibi fakat aklımda bir diyagram "gördüm".

B-12.<u>Çözüm 4:</u> Bu problemi akıl yürüterek çözdüm (bir resim veya hayal kullanmadan)

Bir mongo 6 eriği ve bir kayısıyı dengeler.

Dolayısıyla 10 erik, 3 kayısı, 6 erik ve 1 kayısıyı dengeler.

Dolayısıyla 4 erik, 4 kayısıyı dengeler

Dolayısıyla (birinci satırdan) bir mango 7 eriği dengler.

B-12. <u>Çözüm 5:</u> Hiçbiri (Lütfen soru numarasıyla birlikte yanıt kağıdına kendi çözüm yolunuzu mümkün olduğunca açık bir şekilde anlatınız)

Katılımınız için teşekkürler…

EK 6. GÖRÜŞME ANALİZİNDE KULLANILAN KATEGORİLER

1. Analitik muhakeme: Nesne veya süreçlerin, sembollerin yardımıyla veya yardımı olmadan yapılan zihinsel manipülasyon olarak tanımlanmıştır (Zaskis, Dubinksy ve Deutermann, 1996). Bu çalışmada, integral hesaplama yöntemlerinin (kısmi integrasyon, değişken değiştirme, indirgeme formüllerini...) kullanılarak sorunun çözülmesi, bu yöntemlere ilişkin bir formül kullanılması analitik muhakemenin göstergeleri olarak kabul edilmiştir.

2. Analitik ifadeye bağlı bilişsel karmaşa: Kullanılan analitik muhakemenin neden olduğu bilişsel karmaşa olarak tanımlanmıştır.

3. Görsel destek: Problem çözme sürecinde grafikten yararlanılması ancak grafiği problem çözme sürecinin yalnızca bir aşamasında kullanılması, tamamında kullanmaması olarak tanımlanmıştır. Problemin bu grafik kullanmadan da çözülebilmesidir.

4. Görsel muhakeme: Bireyin içsel bir yapı ile erişimin duyularla sağlandığı şey arasında güçlü bir bağlantı kurma eylemi olarak tanımlamaktadır. Bu tür bağlantılar iki şekilde yapılır: İlki bireyin dışsal (erişimin duyularla sağlandığı deneyimler) olarak algıladığı bir nesne veya olayla, bir nesne veya sürecin zihinsel yapısı arasında kurulan bağlantıyı içerir; ikincisi ise bireyin aklındaki nesne veya süreçlerle tanımladığı; kağıt, yazı tahtası, bilgisayar ekranı gibi dış ortam araçları üzerinde oluşturduğu yapıları içerir (Zaskis, Dubinksy ve Deutermann, 1996).

5. Görsel ifadeye bağlı bilişsel karmaşa: Kullanılan bir görselin (grafik) neden olduğu bilişsel karmaşa olarak tanımlanmıştır.

6. Görsel ifadenin oluşturduğu bilişsel yük: Görsel muhakeme kullanılmamasının nedeni olarak, bu tür süreçlerin karmaşık, uygulamasının zor vb. olduğunu ifade etme olarak tanımlanmıştır.

7. Görsel muhakemede deneyim eksikliği: Görsel muhakeme gerektiren sorularda yeterli deneyimin olmaması, bu süreçte zorlanılması ya da daha önce benzer sorular çözülmediğinin ifade edilmesi olarak tanımlanmıştır.

8. İntegralin geometrik anlamına ilişkin kavramsal eksiklik: İntegralin geometrik anlamını yanlış veya eksik bilme olarak tanımlanmıştır.

9. İntegral-türev ilişkisi: İntegral ve türevin birbirinin tersi işlemler olarak kullanma olarak tanımlanmıştır.

10. Görsel ve analitik muhakemeler arası bağlantı: Görsel ve analitik muhakemeler bir arada ve etkileşimli olarak kullanma olarak tanımlanmıştır.

11. Tercihlerde değişim: Tercihlerinde (analitik muhakemeden görsel muhakemeye doğru) meydana gelen değişimi sözlü olarak belirtme ya da görsel muhakemeye değer verdiğini belirten ifadeler kullanma olarak tanımlanmıştır.

EK 7. KLİNİK GÖRÜŞMELERDEN VE ÖĞRETİM DENEYİNDEN YAZILI METİN ÖRNEĞİ

Klinik Görüşme Yazılı Metin Örneği

G: Birinci soruda ilk grafik çizmek aklıma gelir. Önce fonksiyonun grafiğini çizerim. y'yi çarpanlarına ayırayım. Tepe noktasını bulayım. -3/2 iken yani şuralarda bir yerde. Bununla x-ekseni arasında kalan alan. Yani benden burayı istiyor. Üsttekinden alttakini çıkarıyorduk. Sınırlarımız -2 ve 5. x^2-3x–10. Buradan (integral işlemini yapıyor)

A: Peki şimdi bana neden şekil çizdiğini anlatır mısın? Bu soru şekil çizmeden yapılamaz mıydı?

G: Yapılabilirdi direkt ama yine de görmek istedim. x-ekseni dediği için, herhangi bir eğri istemediği için, doğru da istemediği için. Şekil çizmeden yapılabilirdi aslında ama…

A: neden görmek istedin sana ne yarar sağlıyor o şekil?

G: Arasında kalan alan dediği için grafik üzerinde taramak daha güvenilir geldi hani o yüzden şekil çizeyim dedim. Bir de çizebileceğim bir şekildi. Hani çok da zor değil parabol.

A: Çizemeyeceğin bir şekil olsaydı…

G: çizmezdim, uğraşmazdım hani üsttekinden alttakini çıkarma yöntemi vardı integralde. Yani az çok tahmin ederek, direkt sınırları belirleyerek yapardım herhalde. Ama burada (-3,8) aralığında demiş ama onu yapmadım eksi 2'yi aldım onun yerine.

A: Ne düşündün soruyu okuyunca?

G: ilk ayıracağım $1+\sqrt{1-x^2}$. Bu basit gelecek. Buna muhtemelen dönüşüm uygulayacağım. $1-x^2$'ye u derim. Oradan bir şeyler gelir mi? Öyle bir şeyler yaparım diye düşünüyorum. (yaptığı işlemleri karaladı ve) çember. $\sqrt{1-x^2}$ =y dersem y^2=1-x^2. Bunu da şekil üzerinde daha rahat görürüm herhalde.(ve çemberin grafiğini çizdi, yarıçapı bir merkezi başlangıç noktası olan çember) Sanırım 1'den 1'e şunu istiyor yani çemberin alanının yarısı. $r^2/4$, ¼. Bunu ilk göremediğim için direkt y değişkeni yapayım dedim. Daha sonra zaten çıkmadı. Daha sonra çember denklemi olduğu aklıma geldi.

G: bunun kesin bir yolu vardı ama.

A: Yolu derken?

G: yani çözüm hangisi daha kolay geliyordu. Geçen seneki bilgilerim olduğu için çok daha uzatabiliyorum.

A: Yolu derken kastettiğin şey ne?

G: kısa bir yöntemi vardı. Hatırlıyorum, formül gibi bir şeyi vardı. Bunların katsayılarına göre direkt çıkarabiliyordun. Ama hatırlamıyorum şu an.

A: Ne düşünüyorsun? Yüksek sesle düşün.

G: Bir dönüşüm yapayım dedim ama yine de bir sonuç bulabilecek değilim.

A: Nasıl bir dönüşüm yapmayı düşünüyorsun?

Öğretme Deneyinden Yazılı Metin Örneği

Ş: Hepsini mi yapıyoruz yoksa a şıkkını mı? A: a şıkkını yapalım önce *<u>H: Hocam yine integral almamız gerekiyor mu?</u>* A: Yoo size bırakıyorum nasıl istiyorsanız öyle yapın.	Farklı yöntem kullanma isteği
G: Küçükten büyüğe mi sıralayacağız? A: Fark etmez bir sıralama yapın. Birde konuşurken yüksek sesle konuşursanız kameranın sesi almaması gibi bir olasılık kalmasın. G: B şıkkını yapalım mı? A: Olur a bitsin b ye karar verelim. İntegralleri bulun sıralayın. A: Hadi bakalım Funda sen yapar mısın bunu? A: Yüksek sesle konuşun arkadaşlar gerçekten bu benim için çok önemli *<u>G: Alan eksi oluyor mu diyecektim de...</u>*	İşaretli alana ilişkin kavramsal eksiklik
A: Bir Funda'yı izleyelim. Funda ne yapmış bir bakalım. Sonra farklı yoldan çözen varsa ona bakalım. *<u>F: Bu aralıktaki fonksiyonu buldum. (istenen birinci integral değeri için sınırlar arasında kalan fonksiyonu bulmuş, denklemini yazmış, integralini almış)</u>* A: Bu aralıktaki fonksiyonu başka bulan var mı? Tamam F: Alanın değeri 6 çıktı. A: Hı hı F: Bu fonksiyonu da böyle buldum. A: Hı hı . Bunu hesaplar mısın? F: 9/2 buldum A: Tamam F: Buda biraz önceki gibi 1'dir. 3 buldum. A: Hı hı F: Sonra 0-6 aralığı bunu ayırdım 0'dan 3'e. Bunu bulmuştuk 6 şu da -9/2, 3/2. Aynı şekilde bunları da o şekilde yapacağız. 3'den 6'ya… bu şekilde buldum. A: Tamam integrallere isim verirsek mesela a,b,c,d dersek sırayla F: En büyük a integralini bulduk. Sonra f integrali sonra c integrali d,e,b bu şekilde buldum	Görsel muhakemenin çok açık ve kolay olduğu durumda analitik muhakeme kullanımı
A: Teşekkür ederim. Farklı bir sıralama bulan. Nasıl bir sıralamaydı? *<u>G: Pozitif aldığım için daha farklı çıktı.</u>* A: Nasıl yaptın, yapar mısın bizim için. *<u>G: Direkt alanı buldum ama pozitif alanlar.</u>* A: Hı hı olsun. Nasıl yaptın bunu G: Dikdörtgen artı üçgenin alanından buldum. A: 1. Aralıkta orda bir yamuk var dimi. Dikdörtgen ve bir üçgenden oluşuyordu. Hı hı *<u>G: 2. İçinde aynı şeyi yaptım. Şurada sadece dikdörtgen vardı zaten ama ben pozitif aldığım için diğer alanlarda farklı çıktı. Yani 0'dan 6'ya fx dx</u>*	İşaretli alana ilişkin kavramsal eksiklik

EK 8. ÖĞRENCİLERİN ÇALIŞMA KAĞITLARINDAN ÖRNEK

Çalışma Kağıdı 2

$f(x)=2x-4$

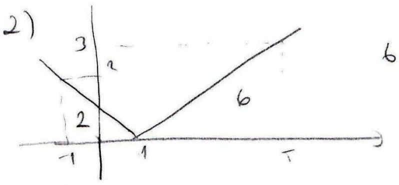
$$\int_{-2}^{3} \frac{x+4}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+4x\right)\Big|_{-2}^{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+12-2+8\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}+18\right) = \frac{45}{4}$$

$$\int_{-4}^{5} 2x-4 = x^2-4x\Big|_{-4}^{5} = 25-20-16-16 = -32+5 = -27$$

1) $$\int_{-3}^{3} \frac{3-x}{2}\,dx + \int_{3}^{5} \frac{x-3}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3}^{3} + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-3x\right)\Big|_{3}^{5}$$

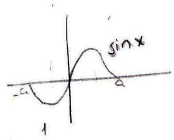
$$= \frac{1}{2}\left(9-\frac{9}{2}-\left(-9-\frac{9}{2}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{25}{2}-15-\frac{9}{2}+9\right) = \frac{1}{2}\left(9-\frac{9}{2}+9+\frac{9}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{25}{2}-\frac{9}{2}-6\right)$$

$$= 9+1=10$$

2) 

$6+2=8$

3) a) Tek fonksiyon orjine göre simetrik olduğundan alanlar birbirini götürür sonuç 0 olur



b) $\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$ $\quad -\cos x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 0-0=0$

c) y eksenine göre simetrik olduğundan

$\int_0^a f(x)dx = A \Rightarrow$ sonuç $2A$ olur

d) $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ $\quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 1+1=2$

4) a) $\int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int 1-\cos^2 x \cdot \sin x\,dx$ $\quad \cos x = u \Rightarrow -\sin x\,dx = du$

$= -\int 1-u^2\,du = -u+\frac{u^3}{3} = -\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}$

$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx = \left(-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}\right)\Big|_{-\pi/2}^{+\pi/2} = 0$

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Yasemin SAĞLAM

Doğum Yeri : Frankfurt

Doğum Yılı : 1981

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1995-1999 : Alparslan Süper Lisesi

Lisans 1999-2005 : Hacettepe Üniversitesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Yabancı Dil : Almanca, İngilizce

İş Tecrübesi :

2005- 2006 : Fark Dershanesi, Matematik ve Geometri Öğretmeni

2007- : Hacettepe Üniversitesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Araştırma Görevlisi