ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL KANIT İLE İLGİLİ GÜÇLÜKLERİ VE KANIT ÖĞRETİMİ

UNDERGRADUATE STUDENTS' DIFFICULTIES WITH MATHEMATICAL PROOF AND TEACHING OF PROOF

MELTEM SARI

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI 'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:…..................................... Prof. Dr. Haluk Soran
Üye (Danışman)	:.….................................... Prof. Dr. Ali Bülbül
Üye	:…..................................... Prof. Dr. Petek Aşkar
Üye	:…..................................... Prof. Dr. Arif Altun
Üye	:…..................................... Doç. Dr. Behiye Ubuz

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ...../...../........ tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ...../...../......... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof.Dr.Adil Denizli
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÜNİVERSİTE ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL KANIT İLE İLGİLİ GÜÇLÜKLERİ VE KANIT ÖĞRETİMİ

Meltem Sarı

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, matematik öğretmen adaylarının kanıtlama sürecindeki güçlüklerini ve kanıtlama biçimlerini belirlemek, öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşadıkları ve grup tartışmalarıyla sosyal etkileşimde bulundukları sınıf ortamında kanıtlama süreçlerini bilişsel ve duyuşsal yönlerden incelemek ve kanıtlama becerilerindeki değişimi değerlendirmektir.

Öğretmen adaylarının kanıtlama becerileri ve kanıtları anlamaları, koşullu önermeler ve koşullu önermelerin kanıtlanmasında kullanılabilecek doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemleri kapsamında ele alınmıştır.

Çalışma, 4. sınıfa devam etmekte olan altı ortaöğretim matematik öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir. Nitel olarak tasarlanan çalışmada, öğretme deneyi yöntemi uygulanmıştır. Araştırmanın verilerini, öğrencilerin çalışma kağıtları, bireysel görüşmelerin ve sınıf çalışmalarının ses ve video kayıtları oluşturmaktadır. Kayıtların çözümlemesi yapılmış ve tüm veriler, belirlenen kavramsal çerçevelere göre araştırmacı tarafından derinlemesine analiz edilmiştir.

Sonuç olarak, kanıtlama deneyimi yaşadıkları, grup tartışması ve sosyal etkileşime dayalı sınıf çalışmalarının, öğretmen adaylarının kanıtla ilgili güçlüklerini gidermede etkili olduğu ve kanıtlama süreçlerini olumlu yönde etkilediği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının, çalışma süresince gösterdikleri gelişme göz önünde bulundurularak, araştırmanın lisans düzeyindeki matematik derslerinin işlenişine katkıda bulunacağı ve bundan sonraki çalışmalara yön gösterebilecek yararlı bir kaynak olacağı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel kanıt, koşullu önerme, kanıt yöntemleri, kanıtlama biçimleri, duyuşsal durum, öğretme deneyi

Danışman: Prof. Dr. Ali BÜLBÜL, Hacettepe Üniversitesi, Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı

UNDERGRADUATE STUDENTS' DIFFICULTIES WITH MATHEMATICAL PROOF AND TEACHING OF PROOF

Meltem Sarı

ABSTRACT

The purpose of the present study is to determine preservice mathematics teachers' proving styles and their difficulties in constructing proofs, to investigate their proving process from cognitive and affective aspects in group discussions based classroom environment and to evaluate the change in their proving skills.

Preservice teachers' proving skills and their understandings with proofs were investigated with respect to conditional statements and three proof methods; direct proof, proof by contradiction and proof by contraposition.

The study was conducted with six 4. grade preservice secondary mathematics teachers. Teaching experiment method was used in this qualitative study. The data includes students' written works, tape and video recordings of interviews and teaching episodes. All recordings were transcribed and the data was analysed deeply by the researcher according to the theoretical frameworks.

As a result it can be concluded that classroom activities based on group discussions and social interactions were effective in overcoming students' difficulties and enhancing their proving skills.

The findings of this study will contribute to the instruction methods of undergraduate mathematics courses and give insights to the future researches.

Keywords: Mathematical proof, conditional statements, proof methods, proving styles, affective state, teaching experiment

Advisor: Prof.Dr. Ali BÜLBÜL, Hacettepe University, Department of Secondary Science and Mathematics Education, Mathematics Education Programm

TEŞEKKÜR

Lisans ve lisansüstü eğitimim süresince çalışma disiplini ve eğitimci kişiliğiyle kendime örnek aldığım, bana her zaman destek olan ve yol gösteren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali Bülbül'e, bana duyduğu güven ve tezimin ortaya çıkmasındaki katkılarından dolayı en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmamı geliştirmek yönünde öneri ve bilgilerini benden esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Prof. Dr. Haluk Soran, Sayın Prof. Dr. Petek Aşkar, Sayın Prof. Dr. Arif Altun, ve Sayın Doç. Dr. Behiye Ubuz'a; bilgilerinden faydalandığım ve doktora eğitimim boyunca desteklerini hissettiğim Yrd. Doç. Dr. Canan Yanık ve Yrd. Doç. Dr. Şenol Dost'a; tez yazma sürecinde fikir ve deneyimlerini benimle paylaşan Yrd. Doç. Dr. Didem Kılıç'a; başım her sıkıştığında yardımıma koşan ve her konuda destek olan Arş. Gör. Nazan Sezen'e; bu tezin ortaya çıkmasında en büyük katkısı olan, ders dışı zamanlarını gönüllü olarak çalışmaya ayıran öğrencilerime; tezimin en kritik döneminde yanımda olan ve beni teşvik eden Yusuf Uzun'a; yurt içi doktora bursuyla eğitim sürecime maddi destek sağlayan Türkiye Bilimsel Araştırmalar Kurumu'na çok teşekkür ederim.

Hayatımın her aşamasında yanımda olan, farklı şehirlerde yaşamanın neden olduğu mesafelere rağmen hep yakınımda olduklarını hissettiğim, yorulduğum ve ümitsizliğe kapıldığım anlarda destekleriyle zorlukların üstesinden gelmemi sağlayan, bu aşamaya gelmemde büyük emekleri olan annem Behire Sarı ve babam Mehmet Sarı'ya; her konuda sonsuz desteklerini gördüğüm kardeşim Melih Sarı, ablam Müge Yurd ve eniştem Selçuk Yurd'a; doğduğu günden beri bana uğur getirdiğine inandığım, neşe kaynağım sevgili yeğenim Ege Yurd'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZ……………………………………………………………………………………..I
ABSTRACT……………………………………………………………………………II
TEŞEKKÜR…………………………………………………………………………...III
İÇİNDEKİLER DİZİNİ………………………………………………………………IV
ŞEKİLLER DİZİNİ…………………………………………………………………...V
ÇİZELGELER DİZİNİ……………………………………………………………...VI
1. GİRİŞ……………………………………………………………………………...1
1.1. Araştırmanın Amacı………………………………………………………………5
1.2. Problem Cümlesi…………………………………………………………………5
1.3. Alt Problemler…………………………………………………………………….. 6
1.4. Araştırmanın Önemi………………………………………………………………6
1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları…………………………………………………………8
1.6. Tanımlar……………………………………………………………………………8
2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ALANYAZIN……………………………….10
2.1. Matematiksel Kanıt Kavramı ve Önemi………………………………………10
2.2. Kanıt Kavramı ve Kanıtlama ile İlgili Güçlükler…………………………………13
2.3. Kanıtlama Sürecine Yönelik Kavramsal Çerçeveler…………………………20
2.4. Kanıt Öğretimi ile İlgili Yapılan Çalışmalar……………………………………30
2.5. Matematik Eğitiminde Duyuşsal Alan ve Kavramsal Çerçeve……………...35
2.6. Grup Çalışmaları ve Sosyal Etkileşim…………………………………………41
3. YÖNTEM……………………………………………………………………………43
3.1. Öğretme Deneyi………………………………………………………………… 45
3.2. Katılımcılar…………………………………………………………………………..47
3.3. Verilerin Toplanması………………………………………………………………48
3.3.1. Ölçme aracının hazırlanması ve uygulanması…………………………..50
3.3.2. Ön bireysel görüşmeler……………………………………………………52
3.3.3. Sınıf çalışmaları…………………………………………………………… 53
3.3.4. Son bireysel görüşmeler…………………………………………………...55
3.4. Verilerin Analizi……………………………………………………………………..56
4. BULGULAR VE YORUMLAR……………………………………………………...59
4.1. Öğrencilerin Bireysel Kanıtlama Süreçleri……………………………………60
4.1.1. Emre'nin kanıtlama süreci………………………………………………… 60
4.1.2. Pelin'in kanıtlama süreci…………………………………………………...72
4.1.3. Veli'nin kanıtlama süreci…………………………………………………...85
4.1.4. Derya'nın kanıtlama süreci………………………………………………...95
4.1.5. Cem'in kanıtlama süreci……………………………………………………105
4.1.6. Melis'in kanıtlama süreci…………………………………………………115
4.2. Sınıf Çalışmalarının Analizi………………………………………………………..123
4.2.1. Birinci hafta sınıf çalışması………………………………………………124
4.2.2. İkinci hafta sınıf çalışması………………………………………………..131
4.2.3. Üçüncü hafta sınıf çalışması……………………………………………..139
4.2.4. Dördüncü hafta sınıf çalışması…………………………………………..146
4.2.5. Beşinci hafta sınıf çalışması……………………………………………..150
5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA……………………………………………………157
6. ÖNERİLER…………………………………………………………………………..171
KAYNAKLAR DİZİNİ………………………………………………………………176
EKLER………………………………………………………………………………188
ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………………………..213

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Semantik ve sentaktik akıl yürütmenin karşılaştırması (Alcock & Inglis, 2008) ... 29
Şekil 2.2. Duyuşsal durumların buluşsal yapılanmalarla etkileşimi (Goldin, 2000) 37
Şekil 4.1. Emre’nin ölçme aracı 9. soruya yanıtı ... 62
Şekil 4.2. Emre’nin son görüşme 4. (ölçme aracı 9.) soruya yanıtı ... 63
Şekil 4.3. Emre’nin son görüşme 3. (ölçme aracı 10.) soruya yanıtı ... 64
Şekil 4.4. Emre son görüşme 6. (ölçme aracı 12.) soruya yanıtı ... 65
Şekil 4.6. Emre’nin çalışmaya ilişkin değerlendirmesi ... 72
Şekil 4.7. Pelin’in son görüşme 5. (ölçme aracı 8.) soruya yanıtı ... 75
Şekil 4.8. Pelin’in ölçme aracı 9. soruya yanıtı ... 75
Şekil 4.9. Pelin’in son görüşme 3. (ölçme aracı 10.) soruya yanıtı ... 77
Şekil 4.10. Pelin’in ikinci görüşme 2. önermeye yanıtı ... 80
Şekil 4.11. Pelin’in son görüşme 2. (ikinci görüşme 2.) soruya yanıtı ... 80
Şekil 4.12. Pelin’in çalışmaya ilişkin son değerlendirmesi ... 85
Şekil 4.13. Veli’nin ölçme aracı 7. soruya yanıtı ... 87
Şekil 4.14. Veli’nin ölçme aracı 8. soruya yanıtı ... 87
Şekil 4.15. Veli’nin son görüşme 5. (ölçme aracı 8.) soruya yanıtı ... 88
Şekil 4.16. Veli’nin ölçme aracı 13. soruya yanıtı ... 89
Şekil 4.17. Veli’nin son görüşme 3. (ölçme aracı 13.) soruya yanıtı ... 89
Şekil 4.18. Veli’nin Önerme 5.2’yi kanıtlamaya çalışırken çizdiği şekil ... 91
Şekil 4.19. Derya’nın ölçme aracı 9. soruya verdiği yanıt ... 96
Şekil 4.20. Derya’nın ölçme aracı 10. soruya verdiği yanıt ... 97
Şekil 4.21. Derya’nın son görüşme 4. soruyu yanıtlarken çizdiği Venn diyagramı 98
Şekil 4.22. Derya’nın son görüşme 4. sorudaki yanıtının bir kısmı ... 98
Şekil 4.23. Derya’nın ölçme aracı 12. soruya yanıtı ... 99
Şekil 4.24. Derya’nın son görüşme 5. (ölçme aracı 12.) soruya yanıtı ... 100
Şekil 4.25. Derya’nın çalışmaya ilişkin son değerlendirmesi ... 104
Şekil 4.26. Cem’in ölçme aracı 8. soruya yanıtı ... 106
Şekil 4.27. Cem’in ölçme aracı 10. soruya yanıtı ... 108
Şekil 4.28. Cem’in son görüşme 3. soruya verdiği yanıt ... 108
Şekil 4.29. Cem’in ölçme aracı 12. soruya yanıt ... 109
Şekil 4.30. Cem’in ikinci görüşme 2. soruya yanıt ... 110
Şekil 4.31. Melis’in ölçme aracı 9. soruya yanıtı ... 116
Şekil 4.32. Melis’in son görüşme 5. (ölçme aracı 8.) soruya yanıtı ... 116
Şekil 4.33. Melis’in ölçme aracı 10. soruya yanıtı ... 117
Şekil 4.34. Melis’in son görüşme 3. (ölçme aracı 10.) soruya yanıtı ... 117
Şekil 4.35. Melis’in ölçme aracı 12. soruya yanıtı ... 118
Şekil 4.36. Melis’in son görüşme 4. (ölçme aracı 12.) soruya yanıtı ... 119
Şekil 4.37. Melis’in ölçme aracı 13. soruya yanıtı ... 119
Şekil 4.38. Veli-Pelin-Cem’in Önerme 1.3 için kanıtı ... 127
Şekil 4.39. Veli-Pelin-Cem’in Önerme 1.4 için kanıtı ... 128
Şekil 4.40. Melis’in 3.hafta sınıf çalışması Önerme 2.3 (b)’ye yanıtı ... 141
Şekil 4.41. Melis’in Önerme 2.3 (b)’nin kanıtı için tahtaya yazdıkları ... 142
Şekil 4.42. Emre’nin 3. hafta sınıf çalışması Önerme 2.3 (b)’ye yanıtı ... 143
Şekil 4.43. Cem’in 3. hafta sınıf çalışması Önerme 3.1’e yanıtı ... 145
Şekil 4.44. Derya-Melis-Pelin’in Önerme 4.3’ün kanıtı olarak yazdıkları ... 147
Şekil 4.45. Veli-Cem-Emre’nin Önerme 5.1 için yazdıkları ... 150
Şekil 4.46. Derya-Melis-Pelin ‘in Önerme 5.3’ün kanıtı olarak yazdıkları ... 155

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 3.1. Katılımcılara ilişkin bilgiler 48
Çizelge 3.2. Verilerin toplanma süreci 49
Çizelge 3.3. Katılımcıların bireysel görüşme süreleri... 50
Çizelge 5.1. Öğrencilerde kanıtlama sürecinde görülen güçlükler...................... 158
Çizelge 5.2. Son görüşme verilerine göre öğrencilerde görülen güçlükler.......... 165
Çizelge 5.3. Öğrencilerde kanıtlama sürecinde ortaya çıkan duyuşsal durumlar 166

1. GİRİŞ

Kanıt matematiğin temelini oluşturmaktadır. Öğrencilerin matematiğin soyut ve kavramsal yapısını anlamaları için kanıt kavramını, kanıtın ne olduğunu, neden kanıt yapıldığını ve kanıtlama sürecini bilmeleri çok önemlidir. Matematiksel kanıtın, özellikle üniversite düzeyindeki matematik derslerinde önemli bir yeri olmasına ve öğrencilerin başarıları, genellikle kanıtlama becerilerinin değerlendirilmesiyle belirlenmesine rağmen, çalışmalarda (Dreyfus, 1999; Almeida, 2000) lise ve üniversite öğrencilerinin kanıt kavramları arasında fark bulunmadığı ifade edilmektedir. Üniversite öğrencilerinin birçoğu kanıtla ilgili kavramsal bilgiye sahip olmadan, kanıtın ne olduğunu ve nasıl kanıt oluşturulacağını bilmeden mezun olabilmektedirler (Dreyfus, 1999; Jones, 2000).

Akıl yürütme ve kanıt, matematik öğrenme ve öğretmede çok önemli olmasına ve her seviyedeki matematik derslerinin içeriğinde yer alması gerektiği vurgulanmasına rağmen, öğrenciler formel kanıtla genellikle üniversitede karşılaşmaktadırlar. İlk ve ortaöğretimde matematiğin daha çok işlemsel boyutuyla uğraşan öğrenciler, üniversite düzeyinde matematiğin soyut ve aksiyomatik yapısıyla karşılaştıklarında kavramları, kavramlar arası ilişkileri, tanım ve teoremleri anlayıp yorumlayarak kanıtlar oluşturmada güçlük çekmektedirler. Kanıtlama ve formel matematikle ilk defa üniversitede karşılaşan öğrencilerin matematiksel dile alışmalarına, daha soyut ve üst düzey düşünmelerine, formel matematiği anlamalarına yardımcı olması amacıyla bazı üniversitelerde kanıta geçiş ve matematiksel muhakemeye giriş dersleri bulunmaktadır (Epp, 2003; Baker & Campbell, 2004; Knapp, 2005; Smith, 2006; Selden & Selden, 2007a). Bu derslerin standart bir içeriği olmasa da genelde; önermeler, kümeler, fonksiyonlar ve bağıntılar, seçme aksiyomu, cebirsel yapılar, sayı sistemleri gibi temel matematik konularını, bu temel konular kapsamındaki kanıtları ve kanıt yöntemlerini içermektedir (Epp, 2003; Selden & Selden, 2007a). Üniversite öğrencilerinin kanıt kavramları, kanıtla ilgili güçlükleri ve kanıtlama süreçleri bu derslerde (Segal, 2000; Atwood, 2001; Epp, 2003; Baker & Campbell 2004; Knapp, 2005; Smith, 2006; Selden & Selden, 2007a) ya da sayılar teorisi (Smith, 2006), analiz (Gibson, 1998; Raman, 2001; Sarı vd., 2007), reel analiz (Weber, 2004a; Alcock & Weber, 2005), cebir (Hart, 1994; Harel, 1999; Healy & Hoyles, 2000; Hazzan & Zazkis, 2003) gibi derslerdeki konular kapsamında incelenmiştir.

Kanıtla ilgili bazı çalışmalarda, öğrencilerin kanıtları anlamaları ve kanıtlama becerileri, tümevarım (Harel, 2001; Brown, 2003; Stylianides et al., 2007), olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt (Thompson, 1996; Wu Yu et al., 2003; Antonini & Mariotti, 2006; 2008) gibi belli kanıt yöntemleri kapsamında araştırılmıştır. Bazı çalışmalarda, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt ikisi birlikte dolaylı kanıt (indirect proof) adı altında ele alınmıştır (Thompson, 1996; Antonini & Mariotti, 2007). Bu araştırma ise belli bir ders veya konu kapsamında yapılmamış ve çalışmada temel matematik konularından, karmaşık kavram tanımları gerektirmeyen ve öğrencilerin temel bilgileriyle yapabilecekleri önermeler kullanılmıştır. Harel ve Sowder (2007)'a göre, "eğer… ise, o zaman…" şeklindeki ifadelerin matematiksel anlamlarıyla uğraşmamış, akıl yürütmede başarılı olmayan, ifadenin doğru bir biçimde değilini belirleyemeyen kişilerin matematiksel kanıtlama becerisini göstermeleri hatta birçok matematiksel kanıtı anlamaları beklenemez. Bu tez çalışmasında, öğrencilerin kanıtlama süreçleri, "eğer… ise, o zaman…" şeklindeki ifadeleri yani koşullu önermeleri kanıtlamada kullanılan doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemleri kapsamında incelenmiştir.

Son yıllarda, akıl yürütme ve kanıt matematik eğitimi araştırmalarında ön plana çıkmasına rağmen (Heinze & Reiss, 2003), ülkemizde bu konuda yapılmış sınırlı sayıda çalışma bulunmaktadır. Bu çalışmalar ise genellikle ilköğretim ve ortaöğretim seviyesindeki öğrencilerle gerçekleştirilmiş, öğrencilerin kanıta ilişkin görüşleri ve kanıtlama becerileri nicel yöntemlerle belirlenmeye çalışılmıştır.

Aydoğdu vd. (2003), 6, 7 ve 8. sınıflardan dörder öğrenci ile gerçekleştirdikleri çalışmalarında, ilköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerinin doğruluğunu gösterirken kullandıkları kanıt şemalarını incelemişler ve öğrencilerin dışsal, deneysel ve analitik şemaların üçünü de kullandıklarını gözlemişlerdir. Ören (2007), 10. sınıf öğrencileri ile yaptığı çalışmada, öğrencilerin geometri sorularında kullandıkları kanıt şemalarını belirlemiş; bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre kanıt şemalarını kullanmalarındaki farklılıklarını araştırmıştır. Özer ve Arıkan (2002) çalışmalarında 10. sınıf öğrencilerinin kanıtlama becerilerinin istenilen düzeyde olmadığını gözlemişlerdir. Güven vd. (2005), ortaöğretimde öğrenim gören çocukların farklı geometri konularında kanıtlama becerilerinin yetersiz olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Öğretmen adayları ile yapılan bir başka çalışmada ise, öğretmen adaylarının kanıtlamaya yönelik görüşlerinin tam oluşmadığı, kanıtlamanın matematik ve matematik öğretimi açısından önemini bilmedikleri görülmüştür (Moralı vd., 2006). Arslan (2007) çalışmasında, 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin muhakeme etme düzeylerinin düşük olduğu ve kullanmaları beklenen stratejileri kullanmadıkları, verilen ifadenin doğruluğunu göstermede tercih ettikleri kanıt türünün sınıf seviyesi ile birlikte belli oranda değiştiği sonucuna ulaşmıştır. Coşkun (2009) ise 9. ve 10. sınıflardaki öğrencilerin Van Hiele geometri anlama seviyeleri ile kanıt yazma becerileri arasında pozitif yönde orta düzeyde bir ilişki olduğunu belirlemiştir. Uğurel (2010) ise ortaöğretim öğrencilerinin kanıt kavramına yönelik bilgilerini nasıl düzenlediklerini söylem çözümlemesi ile belirlemiş ve çalışmasında, öğrencilerin kanıta yönelik öğrenmelerinde öğretmenleri ile aralarında geçen sınıf içi söylemlerin etkisi olduğu, kanıt yapma yaklaşımlarının da sınırlılıklar içerdiği ortaya çıkmıştır.

Öğrencilerin kanıt kavramına ilişkin görüşlerini, kanıt şemalarını, kanıtlarla ilgili güçlüklerini ve bu güçlüklerin nedenlerini ortaya çıkarmak için bazı çalışmalar yapılmış olsa da, henüz yanıtlanmamış olan bir araştırma sorusu, öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştirmek ve bilişsel çelişkilerini gidermek için öğretme müdahalelerinin nasıl tasarlanacağıdır (Antonini & Mariotti, 2007). Öğrencilerin kanıtla ilgili güçlüklerinin nedenlerini ortaya koymak ve bu güçlükleri gidermeye yönelik öğretim tasarlayabilmek için daha çok sayıda çalışma yapılmasına ihtiyaç vardır. Öğrenci güçlükleri ile ilgili bilgiler, bu güçlüklerin giderilmesine yönelik öğretim ortamlarının düzenlenmesinde ve öğretim etkinliklerinin tasarlanmasında yol gösterici olacaktır.

Yapılan çalışmalarda, daha çok başlangıç düzeyindeki üniversite öğrencilerinin, kanıt kavramları ve kanıtlama süreçleri incelenmiş ve kanıtla ilgili çeşitli güçlüklerinin olduğu görülmüştür (Selden & Selden 2003; Baker & Campbell, 2004; Edwards & Ward, 2004; Knapp, 2005; Weber, 2006; Sarı, vd., 2007). Öğrencilerin, ilerleyen sınıflarda kanıt kavramlarının nasıl olduğunu belirlemeye ve kanıtlama süreçlerini incelemeye yönelik az sayıda çalışma bulunduğu ifade edilmektedir (Harel & Sowder, 2007; Ko & Knuth, 2009). Harel, Selden ve Selden (2006) üniversite öğrencilerinin formel tanımlarla nasıl uğraştıkları, iddiaları kanıtlarken tanımları nasıl açtıkları, anladıkları ve kullandıkları üzerine daha çok araştırma yapılması gerektiğini vurgulamışlardır.

Matematiksel kanıtın başarılı bir şekilde öğretilmesi matematik öğretmenlerinin konu ile ilgili bilgisine bağlıdır (Jones, 1997; Knuth, 2002; Hanna & De Viliers, 2008) ve bu yüzden, matematik öğretmen adaylarının kanıtla ilgili bilgileri çok önemlidir. Lise öğrencilerinin kanıtla ilgili yetersiz bilgilerinin sebeplerinden biri de öğretmenin konu bilgisinin yetersizliğidir. Üniversiteden yetersiz bilgiyle mezun olmuş öğretmenlerin öğrencilerinin de aynı yetersizliklere sahip olması beklenen bir sonuçtur. Kanıt öğretiminde de, genel olarak öğretmenin zihnindeki kanıt kavramı, öğretimi belirlemektedir (Heinze & Reiss, 2003). Geleceğin öğretmenlerine formel kanıtın öğretim biçimi, onların kendi öğrencilerine matematik öğretmelerini etkileyebilecektir (Pinto & Tall, 1999). Bu yüzden öğretmen adaylarının konu ile ilgili bilgilerinin istenen düzeyde olması, kanıtı doğru anlamaları ve kanıtlama becerilerinin gelişmesini sağlayan bir öğretimin yapılması, yetiştirecekleri öğrencilerde de gelişmeye yol açacaktır.

Yapılan çalışmalarda ortaya çıkan öğrenci güçlükleri, kanıt öğretiminde sorunlar olduğunu ve var olan öğretim biçimlerinin etkili olmadığını göstermektedir. Kanıt öğretimi genellikle öğretmenin hazır kanıtları sunması, öğrencilerin yapılanları takip etmesi şeklinde, öğrenci katılımı olmadan geleneksel şekilde yapılmaktadır. Ancak bu şekilde yapılan öğretimde öğretmen, öğrencilerin neleri öğrenip öğrenmeyeceklerini fark etmemekte, öğrenciler kanıtlama deneyimi yaşamadıkları için sınavlardan geçmeye yönelik olarak ezberleme yolunu seçmekte ve akıl yürütme becerilerini kullanmamaktadırlar. Öğrencilerin birçoğu, matematik öğretimindeki bu yaklaşımın sonucunda matematiği belli türdeki problemleri çözmek için kullanılan prosedürler toplamı olarak görmektedirler (Crawford et al. 1994; Alcock & Simpson, 2005; Kannemeyer, 2005). Matematiğin bu şekilde görülmesinin önüne geçmek ve öğrencilerin matematiksel bilgi ve becerileri anlamlı bir şekilde öğrenmesini sağlamak için onlara hazır bilgileri sunmak yerine, problem çözme, kanıtlarla uğraşma ve düşündüklerini ifade ederek diğerleriyle tartışma fırsatının verilmesi gerekmektedir.

Çalışmalar, öğrenenlerin geçmiş deneyimlerinin ve öğrenmeye yaklaşımlarının öğrenme çıktılarının kalitesini etkilediğini (Crawford et al., 1994), öğrencilerin en iyi, kendileri matematikle ve kanıt oluşturmayla uğraştıklarında öğrenmenin gerçekleşeceğini vurgulamaktadır (Mahavier, 1999; Knapp, 2005). Bu nedenle, öğrenci güçlüklerini gidermeye, kanıtlama ve akıl yürütme becerilerini geliştirmeye yönelik olarak, öğretim yöntemlerini gözden geçirmek, daha etkili öğrenme ortamları tasarlamak önemlidir ve bu yönde kapsamlı araştırmalar yapılmalıdır.

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı, öğretmen adaylarının $P \Longrightarrow \mathrm{Q}$ türündeki ifadeleri yani koşullu önermeleri kanıtlama becerilerini, kanıtları anlama düzeylerini ve kanıtlama sürecindeki güçlüklerini belirlemek; öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşadıkları ve grup tartışmalarıyla sosyal etkileşimde bulundukları sınıf ortamında, kanıtlama süreçlerini bilişsel ve duyuşsal yönlerden incelemek ve kanıtlama becerilerindeki değişimi değerlendirmektir. Öğrencilerin güçlükleri ve kanıtlama biçimleri bilişsel, kanıtlama sürecindeki duygusal durumları duyuşsal, kanıtlama deneyimi yaşadıkları ve tartıştıkları sosyal etkileşimli sınıf ortamı da sosyal ve öğretimsel boyutlar olarak ele alınmıştır. Ayrıca öğrencilerle yapılan görüşmelerde, kanıtlara yaklaşımlarına etkisi olduğu düşünülen, aldıkları matematik derslerinin öğretim şekli, matematiksel kanıta yönelik görüşleri, çalışma biçimleri ve bireysel çabaları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Çalışmada, öğretmen adaylarının kanıtlama sürecinin bilişsel, duyuşsal, sosyal ve öğretimsel yönleriyle kapsamlı olarak incelenmesiyle elde edilen sonuçlara göre, kanıtlama becerilerinin geliştirilmesini destekleyen öğrenme-öğretme ortamlarının düzenlenmesinde yol gösterici olacak önerilerde bulunulması amaçlanmıştır.

Öğrencilerin kanıtlama becerileri ve kanıtları anlamaları, koşullu önermeler ve koşullu önermelerin kanıtlanmasında kullanılabilecek doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemleri kapsamında ele alınmıştır. Çalışmada, öğrencilerin genel olarak kanıtlama becerileri üzerinde durulmaktadır, bu nedenle belli bir konu ve ders kapsamında gerçekleştirilmemiş, temel matematik konuları (sayılar, kümeler, fonksiyonlar vb.) düzeyindeki kavramlarla ilgili önermeler kullanılmıştır.

1.2. Problem Cümlesi

1) Öğrencilerin matematiksel kanıtla ilgili güçlükleri ve kanıtlama biçimleri nelerdir?

2) Öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştirmeye ve kanıtla ilgili güçlüklerini gidermeye yönelik olarak ne tür öğrenme etkinlikleri uygulanabilir?

1.3. Alt Problemler

1) Öğrencilerin, koşullu önermeleri ve kanıtlarını anlamaları ne düzeydedir?

2) Öğrencilerin, koşullu önermeleri kanıtlamada yaşadıkları güçlükler nelerdir?

3) Öğrenciler, koşullu önermeleri kanıtlarken hangi akıl yürütme biçimlerini (prosedürel, sentaktik, semantik) kullanmaktadırlar?

4) Öğrencilerin geçmiş deneyimleri ve duyuşsal özellikleri kanıtlama süreçlerini nasıl etkilemektedir?

5) Çalışmadaki öğrenme-öğretme ortamı, öğrencilerin kanıtlama süreçlerini duyuşsal ve bilişsel yönden nasıl etkilemiştir?

1.4. Araştırmanın Önemi

Son yıllarda yapılan çalışmalarda, özellikle vurgulanan nokta; öğrencilerin kanıta yönelik tutumlarını, kanıt şemalarını, doğru ve geçerli kanıt oluşturmadaki güçlüklerini belirleyen çalışmaların sayısı gittikçe artmasına rağmen, öğrencilerin kanıtlama sürecine nasıl başladıklarına, öğretme stratejileri ve öğrenme deneyimlerinin öğrencilerin anlamalarının gelişmesini nasıl etkilediğine odaklanan çalışmaların sayısının azlığıdır (Smith, 2006). Bu alandaki eksikliği gidermeye yönelik olarak, matematik eğitimi araştırmaları, öğrencilerin güçlüklerini belirledikten sonra bu güçlüklerin hangi öğretme müdahaleleri ile giderilebileceğine doğru yönelmektedir (Mariotti, 2006). Harel, Selden ve Selden (2006); öğrencilerin nerede olduğunu biliyoruz, matematikçilerin nerede olduğunu biliyoruz ama üniversite öğrencilerini bulundukları yerden olmalarını istediğimiz yere nasıl getireceğimizi bilmiyoruz diyerek, üniversite öğrencilerinin kanıtlamadaki seviyelerinin nasıl ilerletilebileceğinin araştırılması gerektiğini vurgulamışlardır. Buna yönelik olarak, öğrenci gruplarının birkaç sınıf buluşmasındaki çalışmalarının kaydedilip analiz edilebileceğini, bu tür öğretme deneylerininin, yapılan müdahaleler ve öğrencilerin önceki ve devamındaki kanıt oluşturma girişimleri arasındaki ilişkiyi gözleme olanağı vereceğini belirtmişlerdir.

Öğrencilerin kanıt kavramlarının oluşmasında, kanıtlama becerisi kazanmalarında ve kanıtla ilgili yaşadıkları güçlüklerde yapılan öğretimin etkisi büyüktür. Geleneksel yaklaşımla, "tanım-teorem-kanıt" biçiminde ve öğretmenin anlatımına dayalı olarak işlenen lisans derslerinin öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştirmeye katkı sağlamadığı, kanıtların öğrencilere sunulduğu ve onların oluşturmak zorunda olmadığı kanıt öğretiminin başarısız olduğu belirtilmektedir (Weber, 2004a; Selden & Selden, 2007b; Pedemonte, 2007).

Çalışmalar, öğrencilerin küçük gruplarda birlikte çalışarak verilen görevleri yerine getirdikleri, çözümlerini sınıfa sundukları, bu çözümleri tartışarak değerlendirdikleri, öğretimde aktif ve birbirleriyle etkileşim halinde oldukları sınıf ortamlarında, öğrenmenin daha etkili olduğunu göstermiştir (Cesar, 1998; Brown, 2003; Smith, 2006; Weber et al., 2008). Öğrencilerin kanıtlama becerisini kazanmaları ve bu becerilerini geliştirebilmeleri için de, kanıtlama deneyimi yaşamalarına olanak veren ve sosyal etkileşime dayalı sınıf ortamlarının etkili olacağı düşünülmektedir. Araştırmalar, öğrencilerin küçük gruplarda kanıt yazma girişiminde bulunarak (Selden et al., 2008a), grup tartışmaları yaparak (Selden & Selden, 2007b; Weber et al., 2008) öğrenmelerinin daha etkili olacağı ve kanıtlama becerilerinin gelişeceği görüşünü desteklese de, bu tür bir öğrenme-öğretme ortamında öğrencilerin kanıtlama süreçlerini inceleyen az sayıda çalışma bulunmaktadır (Weber et al., 2008; Blanton et al., 2009).

Bu çalışmalarda da, kanıtlama süreci genellikle bilişsel olarak ele alınmış, öğrencilerin kanıt kavramları, kanıtlama sürecindeki güçlükleri, kanıtlamada kullandıkları akıl yürütme biçimleri incelenmiştir. Ancak son yıllarda, kanıtlamanın duyuşsal ve sosyal yönlerinin de bulunduğu, kanıtlama sürecinde bilişsel etkenler ve öğretimin yanında öğrencilerin duygusal durumlarının da etkisi olabildiği ifade edilmektedir (Weber, 2008; Heinze & Reiss, 2009; Furinghetti & Morselli, 2009). Matematiksel etkinliğin tümüyle bilişsel bir aktivite olarak ele alınmasının doğru olmadığı (Schoenfeld, 1983), bireylerin matematik yapmaları sırasında duyuşsal sistemin bilişsel sistemin merkezinde olduğu vurgulanmaktadır (Goldin, 2002).

Araştırmalar, olumlu duyguların daha ayrıntılı çalışmayı desteklediğini ve öğrenme çabası üzerinde etkisi olduğunu gösterse de, duyguların argümantasyon ve kanıt gibi matematiğin belli konuları üzerinde etkisiyle uğraşan daha çok çalışma yapılmasına ihtiyaç vardır (Heinze & Reiss, 2009). Kanıtlama yetkinliğinin bilişsel, duyuşsal ve sosyal yönlerden etkilenen bir yapı olarak neleri içerdiği ve öğrencilerin bu yetkinliklerinin nasıl geliştirileceği hala yanıt arayan sorulardır

(Heinze & Reiss, 2009). Bu çalışma, öğretmen adaylarının kanıtlama sürecini bilişsel, duyuşsal yönleriyle sosyal etkileşimin sağlandığı bir ortamda incelemesi, bu süreçteki değişim ve ilerlemeyi ortaya çıkarması bakımından, bu soruların yanıtlanmasına ve bu alandaki çalışmalara katkı sağlayacaktır. Ayrıca, kanıtlama sürecine ilişkin yurtdışında gittikçe artan sayıda araştırmalar yapılmasına rağmen, ülkemizde, üniversite düzeyinde kanıtlama süreçlerini kapsamlı olarak inceleyen ve kanıtlama becerisinin nasıl geliştirilebileceğini araştıran çalışma bulunmamaktadır. Bu çalışma, ilk olması nedeniyle, ileride bu konuda yapılacak diğer araştırmalara yol göstermesi ve matematik eğitimi alanına katkı sağlaması bakımından önemlidir.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Araştırma, bir üniversitenin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı 4. sınıfında öğrenimine devam etmekte olan altı öğrenciyle sınırlıdır. Verilerin toplanması, ders saatleri dışında gerçekleştirilen 8 haftalık çalışma süreciyle sınırlandırılmıştır.

1.6. Tanımlar

Önerme: Bir yargı taşıyan ve bu yargının doğruluğu ya da yanlışlığı kesin olarak belirlenebilen tümcelere önerme denir.

Koşullu Önerme (Conditional statement): P ile Q önermelerinden oluşan bir bileşik önerme, ancak P doğru ve Q yanlış olduğunda yanlış diğer durumlarda doğru ise, bu bileşik önermeye koşullu önerme adı verilir, $P \Longrightarrow Q$ simgesiyle gösterilir ve P ise Q diye okunur. $P \Longrightarrow Q$ koşullu önermesinin:

Değili (negation): $P \wedge \sim Q$

Tersi (inverse): $\sim P \Longrightarrow \sim Q$

Karşıtı (converse): $Q \Longrightarrow P$

Karşıt tersi (contrapositive): $\sim Q \Longrightarrow \sim P$

şeklinde gösterilir.

Modus ponens: Çıkarım kuralıdır ve bu kurala göre hem P hem de $P \Longrightarrow Q$'nun doğru olduğu bilindiğinde Q'nun da doğru olması gerektiği sonucuna ulaşılır (Velleman, 2006).

Modus tollens: Bu çıkarım kuralına göre $P \Longrightarrow Q$'nun doğru ve Q'nun yanlış olduğu bilindiğinde P'nin de yanlış olması gerektiği sonucuna ulaşılır (Velleman, 2006).

Doğrudan Kanıt Yöntemi (Direct proof) : Bir teoremin varsayımı olan önermeyi P, sonucu olan önermeyi Q ile gösterirsek, teoremi doğrudan kanıt yöntemi ile kanıtlamak $P \Longrightarrow Q$ gerektirmesini göstermek demektir (Özer, 1998).

Olmayana Ergi Yöntemi (Proof by contradiction): Bir teoremi olmayana ergi ile kanıtlamada, teoremin varsayımı ve sonucunun değilinin doğruluğu birlikte kabul edilir. Böylece $P \wedge \sim Q$ önermesinin doğru olduğu kabul edilmiş olur. Bu kabülün, doğruluğu bilinen bir önermenin ya da öncül önermelerden birinin yanlışlığını gerektirdiği gösterilirse, bu durum P'nin doğruluğu ile birlikte $(\sim Q)$'nun doğruluğunu varsaymanın olanaklı olmadığını gösterir. O halde, P doğru iken $(\sim Q)$ yanlış yani Q doğru olmalıdır. Bu yolla yapılan kanıtlama, olmayana ergi yöntemi ile kanıt diye adlandırılır (Özer, 1998).

Bu kanıt yöntemindeki kabul olan $P \wedge \sim Q$ önermesi, verilen $P \Longrightarrow Q$ koşullu önermesinin değilidir ve değilinin yanlış olduğu gösterildiğinde, önermenin doğru olduğu kanıtlanmış olur.

Karşıt Ters İle Kanıt Yöntemi (Proof by contraposition): Bir teoremde $P \Longrightarrow Q$ gerektirmesi yerine ona denk olan $\sim Q \Longrightarrow \sim P$ gerektirmesi kanıtlanabilir. Başka bir ifadeyle bir teoremde sonucun değilinin doğruluğunu kabul edip, bunun varsayımın değilinin doğruluğunu gerektirdiği gösterilirse, önermeye denk olan karşıt tersinin doğruluğu gösterilmiş ve bu şekilde önermenin doğruluğu karşıt ters ile kanıt yöntemiyle kanıtlanmış olur.

Gösterim Sistemi ve Kanıt Gösterim Sistemi (Representation System of Proof): Goldin (1998), bir gösterim sisteminin öncelikle karakterleri, yapılanmayı ve yapıları içerdiğini, ayrıca karakterleri birleştirmek için izin verilmiş yapılanmalara ve bir yapılanmadan diğerine geçişi sağlayan kurallara sahip olduğunu ifade etmiştir. Weber ve Alcock (2009), Goldin'in gösterim sisteminden yola çıkarak matematiksel kanıtın gösterim sitemini açıklamaya çalışmışlardır. Buna göre kanıt gösterim sisteminde, matematiksel ve mantıksal semboller ve kullanılan dile ilişkin sözcükler karakterlerdir. İzin verilen yapılanmalar ise mantığa dayalı olarak iyi oluşturulmuş formülleri, doğru kullanılan dili ve kelimelerle mantıksal sembolleri birleştiren cümleleri içermektedir.

Matematiksel Kanıt: Matematikte kanıtlama yapmak, verilen öncül önermelerden belli bir sonucun mantıksal olarak çıkartılabileceğini göstermek demektir (Özer, 1998). Formel kanıt, formel aksiyomlar üzerine kurulu ve formel çıkarım kurallarına dayanan formel kelime dağarcığı ile ifade edilmelidir (Hersh, 1993). Matematiksel kanıt, kabul edilmiş tümdengelim kurallarını takip eden çıkarım zincirini içerir ve genellikle formel notasyon, sentaks ve manipülasyon kuralları ile karakterize edilir (Hanna & De Villiers, 2008). İkna edici bir argümanın matematiksel kanıt olarak kabul edilmesi için, kabul edilmiş aksiyomlara ve tanımlara dayanması, mantıksal notasyonun uygun kullanılması ve belli bir kanıt yöntemine işaret eden kelimelerin yer aldığı mümkün olan en açık şekilde yazılması gerekir (Tall, 1989; Weber & Alcock, 2009).

Argümantasyon (Argumentation): Argümantasyon, tümdengelimsel olmak zorunda olmayan argümanlar kullanan gerekçeli söylemlerdir (Hanna & De Villiers, 2008). Birini belli bir önermenin doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için tüm sözel araçların kullanılmasını içerir (Mariotti, 2006).

2. KURAMSAL ÇERÇEVE VE İLGİLİ ALANYAZIN

2.1. Matematiksel Kanıt Kavramı ve Önemi

Matematik tarihine baktığımızda, Yunan öncesi dönemde sınama-yanılma yöntemine bağlı deneysel düzeyde kalan matematiğe, antik Yunanlıların kuramsal bilgi niteliği kazandırdığı görülmektedir (Yıldırım, 2000). Yunanlılar, bazı kabul edilmiş ilkelerden çıkan tümdengelimsel kanıt kavramını idrak etmiş ve mantıksal çıkarımı akıl yürütme sürecinin merkezine almışlardır (Harel & Sowder, 2007). Bugün anlaşıldığı anlamıyla kanıtın kaynağını M.Ö. IV. yüzyılda yayınlanan, Euclid’in “Elements”i oluşturmaktadır (Almeida, 2003).

Matematik; aksiyomlar, tanımlar, teoremler ve kanıtları, varsayımlar tarafından yapı iskeleti oluşturulan, bilimsel bir kanıtlama disiplinidir ve bu özelliği matematik ile diğer disiplinler arasındaki temel farkı açıklar (Heinze & Reiss, 2003). Kanıt, önermelerin ilişkisine dayanan mantıksal bir çıkarımdır ve eldeki genelleme, doğruluğu varsayılan ya da bilinen bir veya daha fazla önermenin zorunlu sonucu olarak gösterilebildiğinde kanıtlanmış olur (Yıldırım, 2000).

Bir ifadenin doğruluğunu, bilinen gerçeklerden, tanımlardan ve önceki teoremlerden ya da sonuçlardan, doğru çıkarımları yaparak ve mantık kurallarını uygulayarak gösterme, kanıtlama; sonuçta ortaya çıkan geçerli argüman ise matematiksel kanıt olarak ifade edilebilir.

Bell (1976), kanıtın matematiksel olarak üç anlam taşıdığını belirtmiştir. Birincisi, bir önermenin doğruluğu ile ilgili olan doğrulama (verification) ve gerekçeleme (justification); ikincisi, aydınlatma (illumination) yani iyi bir kanıtın, önermenin neden doğru olduğu ile ilgili bir anlam ifade etmesi; üçüncüsü ise en matematiksel olan anlamı, sistemli hale getirme (systematisation) yani sonuçların aksiyomlar, temel kavramlar, teoremler ve bunlardan çıkarılan sonuçlardan oluşan tümdengelimsel bir sistem içinde düzenlenmesidir.

Tall (1989) ise kanıtın, önemli bir sonucu saptamak için bir dizi çıkarım türetmek anlamında olduğunu söylemiştir. Matematiksel kanıtın, hem açıkça formüle edilmiş tanımlar ve ifadeler hem de bir ifadeden diğerinin doğruluğunu çıkarmaya yarayan kabul edilmiş prosedürler gerektirdiği için, birini ikna etmekten farklı olduğunu ifade etmiştir.

Healy ve Hoyles (1998) da geçerli bir kanıt oluşturmanın karmaşık bir süreç olduğunu belirtmişlerdir. Bu sürecin, çıkarım yapılması gerekenle verilenleri ayırmayı ve uygun, doğru çıkarımları yapmak için gerekli geçişleri düzenlemeyi içerdiğini ifade etmişlerdir.

Mingus ve Grassl (1999), kanıtın matematiğin hem kraliçesi hem kölesi sayılabileceğini belirtmişler ve matematiksel kanıtı, matematikçilerin kendi bulduklarını ve akıl yürütmelerini bir diğer matematikçiye aktarmada kullandıkları bir araç olarak tanımlamışlardır.

Weber (2005), kanıtlamayı mantıksal, kavramsal, sosyal ve problem çözme boyutları olan karmaşık bir matematik aktivitesi olarak tanımlamıştır. Kanıt oluşturmayı da, kişiye bazı başlangıç bilgilerinin (örn. varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar) verilip, istenilen sonucu çıkarana kadar çıkarım kurallarının uygulaması beklenen bir matematiksel görev şeklinde ifade etmiştir.

Kanıt, matematiğin temel özelliğidir ve bu yüzden matematik eğitiminde de anahtar bileşen olması gerekir (Hanna & Jahnke, 1996). Öğrencilerin matematiğin soyut ve kavramsal yapısını anlamaları için kanıt kavramını, kanıtın amacını ve kanıtlama sürecini bilmeleri çok önemlidir. Üniversite düzeyindeki matematik derslerinde, öğrencilerin başarıları, büyük ölçüde matematiksel kanıt kavramı ile ilgili anlamalarına ve kanıtlama becerilerine bağlıdır. Öğrencilerin matematiksel kanıtlamada başarılı olabilmeleri; tanım, teorem ve kavram bilgilerinin tam olmasını, bilgilerini kullanarak mantıksal çıkarım yapmalarını, matematiğin sembolik dilini anlamalarını ve kullanmalarını, kanıtlama yöntemlerini bilmelerini ve bu yöntemleri doğru yerde ve doğru biçimde uygulamalarını gerektirmektedir. Kanıt öğretimine erken yıllarda başlanması önemlidir ve sürecin başarısı öğretmenlerin sınıfta neler yaptıklarına, öğrencilere kanıtla uğraşma olanağı verecek görevleri nasıl yorumladıklarına, kanıtlamadaki güçlükleri nasıl teşhis ettiklerine ve bunları gidermek için nasıl öğretim müdahaleleri tasarladıklarına bağlıdır (Hanna & DeVilliers, 2008)

Kanıt ve kanıtlama ile ilgili farklı düşünceler ve yaklaşımlar olsa da bir ifadeyi kanıtlamaları istendiğinde, profesyonel matematikçilerin ve uygun yeterlikteki matematik öğrencilerinin hepsinin, kanıtlanan ifadeyle sonuçlanan ve mantıksal geçerliği olan bir argüman ortaya çıkarmak gibi ortak bir amacı vardır (Weber & Alcock, 2004). Kanıtın anlamı, rolü, oluşturulma, doğrulanma ve kabul edilme biçimi kişiler ve toplumlar arasında farklılık gösterebildiği gibi (Harel & Sowder, 2007), kanıtın öğretim programlarındaki yeri ve kapsamı da matematiğin ülkeler arasında en çok farklılık gösteren yönüdür (Bell,1976).

Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (NCTM), 2000 yılındaki okul matematiğinin ilkeleri ve standartlarında; akıl yürütme ve kanıt, öğretim programında özel zamanlar veya özel konular için ayrılan özel etkinlikler olmamalı, çalışılan konu ne olursa olsun, sınıf tartışmalarının doğal ve sürekli devam eden bir parçası olmalıdır, şeklinde matematiksel kanıtın önemini vurgulamıştır (Mariotti, 2006).

Ülkemizde ise 2005 yılında öğretim programlarının yeniden yapılandırılmasıyla kanıt kavramı, "Tanım, aksiyom, teorem ve ispat kavramlarını açıklar, bir teoremin hipotezini ve hükmünü belirtir" ve "İspat yöntemlerini kullanarak basit ispatlar yapar" şeklinde iki kazanımla, 9. sınıf matematik dersi öğretim programında, mantık öğrenme alanı içerisinde, ispat yöntemleri alt öğrenme alanında yer almıştır (MEB, 2005). Geometri dersi öğretim programı da yapılan çalışmalar sonucunda yeniden hazırlanmış ve öğrencilerin "İspat yöntemlerini ve biçimlerini tanımlamaları" 10. sınıf geometri dersinin amaçları arasında yer almıştır (MEB, 2010). Bu gelişmeler, kanıt öğretiminin sadece ileri düzey matematik derslerinde değil, her düzeydeki matematik konuları kapsamında yer alması gerektiğini ve öğrencilerin kanıtla ilgili kavramsal bilgiye sahip olmalarının ve kanıtlama becerisi kazanmalarının önemini göstermektedir.

2.2. Kanıt Kavramı ve Kanıtlama ile İlgili Güçlükler

Öğrencilerin kanıt kavramlarını ve kanıtlamaya ilişkin güçlüklerini belirlemeye yönelik çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmaların büyük çoğunluğu, öğrencilerin matematiksel kanıt kavramlarının yetersizliğine, kanıt oluşturma sürecinde çok çeşitli güçlükler yaşadıklarına, kanıtlama ile ilgili hatalarına ve kavram yanılgılarına dikkat çekmektedirler.

Moore (1994) çalışmasında, üniversite öğrencilerinin formel matematiksel kanıt yapmayı öğrenirken yaşadıkları bilişsel güçlükleri ve bu güçlüklerin kaynağını incelemiştir. En önemli üç güçlüğü; kavramı anlama, matematiksel dil ve notasyon, kanıta başlama olarak ifade etmiş ve diğer güçlükleri şu şekilde belirlemiştir:

1) Öğrenciler tanımları bilmiyor yani ifade edemiyorlar,
2) Öğrenciler kavramlarla ilgili çok az sezgisel anlamaya sahipler,
3) Öğrencilerin kavram görüntüsü kanıtlamaları için yeterli değil,
4) Öğrenciler kendi örneklerini üretmede ve kullanmada ya yetersizler ya da bunu istemiyorlar,

5) Öğrenciler kanıtın genel yapısını elde etmek için tanımları nasıl kullanacaklarını bilmiyorlar,

6) Öğrenciler matematiksel dil ve notasyonu anlayamıyor ve kullanamıyorlar,

7) Öğrenciler kanıta nasıl başlayacaklarını bilmiyorlar.

Gibson (1998) ise yapılmış çalışmalar ve kendi gözlemleri sonucunda kanıtla ilgili öğrenci güçlüklerinin şu faktörlerle ilişkili olduğu sonucunu çıkarmıştır:

1) Kanıtın doğasını ve kuralları anlama,

2) Kavramsal anlama,

3) Kanıt teknikleri ve stratejileri,

4) Bilişsel yük

Selden ve Selden (1995) çalışmalarında, üniversite öğrencilerinin, bir kanıtın geçerliği için gereken mantığı anlamakta zorlandıklarını bulmuş ve öğrencilerin, bir durumu kanıtlamak için ön şart olan, informel durumları dengi olan mantıksal formel duruma dönüştürmeyi yapamadıklarını görmüşlerdir. Selden ve Selden (2003) bir diğer çalışmalarında, uzun yıllar verdikleri soyut cebir derslerinden elde ettikleri örneklere dayanarak, matematiksel akıl yürütmede karşılaşılan hataları ve bunların altında yatan kavram yanılgılarını belli başlıklar altında toplamışlardır. Öğrencilerin yaptıkları akıl yürütme hatalarının bir kısmının kavram yanılgılarına, bir kısmının da teknik ve diğer sebeplere bağlı olduğunu belirtmişlerdir. Kavram yanılgılarına dayanan yedi ve kavramsal olmayan diğer sebeplere bağlı on akıl yürütme hatası belirlemişlerdir. Daha sonra belirledikleri bu hataları; genelleştirme, teoremlerin kullanımı, notasyon ve semboller, kanıtların doğası ve niceleme başlıkları altında sınıflamışlardır. Kanıta sonuçla başlayarak bilinen bir doğruya ulaşınca kanıtın tamamlandığını düşünme; eşitliğin her iki tarafına aynı işlemin uygulanmasıyla (örn. fonksiyonlarda bileşke alma) eşitliğin korunacağını düşünme; işlemdeki küme sembolü yerine kümenin bir elemanını koyma ve sonucun değişmeyeceğini düşünme; hipoteze ekleme yaparak olmayan bir özelliği varmış gibi kanıtta kullanma; hipotezi göz ardı etme veya sonucu yanlış yorumlama nedeniyle teoremleri hatalı kullanma, öğrencilerde belirlenen bazı kavram yanılgısı ve hata örnekleridir. Öğrencilerin bir diğer hatasını "*mantıksal olarak anlaşılmaz kanıt*" olarak isimlendiren Selden ve Selden (2003), bu türdeki kanıtları biçimsel olarak kabul edilebilir gibi görünen, sentaktik olarak doğru cümleler bulunan ancak varsayımları yanlış veya anlaşılmayan yanıtlar olarak tanımlamışlardır. Öğrencilerin bu türdeki kanıt girişimlerini sınıftaki veya kitaptaki kanıtları taklit yaklaşımı olarak değerlendirmişlerdir.

Knapp (2005) ise kanıtla ilgili güçlükleri genel olarak iki sınıfa ayırmıştır. Birincisi, öğrencilerin, mantık, dil ve toplumun belirlediği kanıt kültürüyle uğraşmak durumunda olmaları; ikincisi, tanımlar, teoremler, höristikler (heuristics) gibi alana özgü bilgilerinin ve örnek üretme becerilerinin yetersiz olmasıdır. Birinci gruptaki güçlüklerin öğrencilerin kanıt kavramları ve kanıta verdikleri değerle; diğerinin ise ihtiyaç duydukları ve genellikle alana özgü olan stratejik bilgi ile ilişkili olduğunu belirtmiştir.

Baker ve Campbell (2004)'ın çalışmalarında, öğrencilerin bazı mantık kurallarını uygulamalarında yanlışlıklar ve güçlükler ortaya çıkmıştır. Bunlar:

1) Mantıksal argümanların doğru kullanımında yaşanan güçlükler,

2) Önermeyi ve uygulamalarını tam olarak değerlendirmeden önce kanıtı yazmaya kalkışma,

3) Matematiksel dilin tam ve doğru kullanımında karşılaşılan güçlükler

olarak belirlenmiştir.

Edwards ve Ward (2004), öğrencilerin tanımları, kanıtlamada nasıl kullandıklarını araştırmışlar ve çoğu öğrencinin matematiksel tanımları, doğru bir şekilde ifade edip açıkladıkları durumlarda bile matematikçiler gibi kullanamadıklarını, matematiksel dil ile günlük dili ayıramadıklarını görmüşlerdir.

Coe ve Ruthven (1994) çalışmalarında, öğrencilerin kanıt deneyimlerini ve oluşturdukları kanıtları incelemişlerdir. Bu çalışmada;

1) Öğrencilerin çok azının kuralların ve örüntülerin ortaya çıkışını açıklamak veya onları daha geniş bir matematiksel sisteme yerleştirmekle uğraştığını,

2) Kanıt stratejilerinin öncelikle ve baskın olarak deneysel olduğunu, çok az stratejinin tümdengelimsel olarak değerlendirilebileceğini,

3) Öğrencilerin, öncelikli olarak varsayılan kural ve örüntülerin geçerliliğini göstermekle uğraştıklarını ve çoğunlukla birkaç örnekle test ettiklerini,

4) Takıldıkları noktalarda, kitaplarında yer alan ve öncelikli olarak sayısal verilerin analizinde kullanılan inceleme tekniklerini rutin olarak kullanma eğiliminde olduklarını,

5) Bir başlangıç noktasından üretilen sayısal verilerin, bir anda incelemenin nesnesi haline gelebildiğini ve asıl ifade ya da durumun terk edildiğini

belirlemişlerdir.

Gholamazad (2005) çalışmasında, üniversite öğrencilerinin oluşturdukları kanıtların sezgiye dayalı ve kanıtın sosyal yönünün tersine öznel olduğunu; öğrencilerin, kanıtı üçüncü bir kişi okuduğu zaman ikna edici olması gerektiği sosyal yönünü göz önünde bulundurmayarak kendileri için yeterince ikna edici bir argümanla yetindiklerini ifade etmiştir.

Di Martino ve Maracci (2009), öğrencilerin matematiksel kanıtlardaki güçlüklerinin 1) Ön bilgi eksikliği 2) Elemanter matematikten ileri matematiksel düşünmeye geçişteki zorluklar 3) Matematiğe yönelik negatif tutum 4) Üst bilişsel ve dilsel becerilerde (örn. yorumlama, anlama, matematiksel metin üretme, bilgi ve fikirleri anlatma, farklı gösterim sistemlerini kullanma) eksiklikler şeklinde belirttikleri dört faktöre bağlı olduğunu ve bu faktörlerin de birbirleriyle sıkı sıkıya ilişkili olduğunu öne sürmüşlerdir.

Weber (2006), öğrencilerin, kanıtlamadaki güçlüklerinin nedenlerini belirlemeye yönelik çalışmaların genel olarak üç başlık altında sınıflanabileceğini belirtmiştir. Bunları; öğrencilerin genellikle doğru olmayan kanıt kavramına sahip olmaları ve kanıtın ne olduğunu bilmemeleri; bir teorem veya kavramı anlayamıyor ve sistematik olarak uygulayamıyor olmaları; nasıl yapılacağına dair karar verme stratejilerine sahip olmamaları olarak ifade etmiştir.

Alcock ve Simpson (2005) da bir grup öğrencinin, verilen görevlerde notasyonu uygun biçimde kullanamadıklarını, genel bir sonucu kanıtlamaya nereden başlayacaklarını bilmediklerini ve tanımları hatırlamada yetersiz olduklarını belirlemişlerdir.

VanSpronsen (2008) çalışmasında öğrencilerin kanıtlama süreçlerinde çeşitli güçlükler belirlemiştir. Öğrencilerde, kavramsal ve işlemsel hatalar, notasyonun yanlış kullanımı ve tanımları yanlış yorumlama, geçerli bir kanıtın nasıl olması gerektiğinin farkında olmama, nereden başlayacağını ve nasıl ilerlemesi gerektiğini bilememe, formel kanıt yazamama, belli bir kanıt yöntemine fazla odaklanma ve geçerli kanıt oluşturmalarına yarayacak kanıttaki bölümlerin farkına varamama gibi ortak güçlükler görülmüştür. Bunların yanında öğrencilerin karşılaştığı duyuşsal kaynaklı olarak değerlendirilebilecek bazı güçlükler de; öğrencilerin becerilerinin kanıt yapmaları için yeterli olmayacağı düşüncesi, doğruluğu açık olan bir önermeyi kanıtlamayı istememe ve düşük motivasyona sahip olma, tıkandığı noktada yeni bir yöntem denemek yerine hemen vazgeçme, izleme ve düzenleme becerilerinin eksiliğini gösteren düzensiz ve rastgele aramalar gibi davranışlar şeklinde ortaya çıkmıştır.

Atwood (2001) çalışmasında, matematiksel kanıta geçiş dersine başlamakta olan üniversite öğrencileriyle çalışmış ve dersin sonunda kanıtla ilgili becerilerinde değişme olup olmadığını incelemiştir. Öğrencilerin, dersin başında ve sonunda kanıtla ilgili güçlükleri ortaya çıkmıştır. Bu güçlüklerin; kanıtlanacak önermeleri yorumlama, tanımların rolünü anlama, kanıtta elde ettikleri çelişkiyi yorumlama ve çelişkiden yapılacak çıkarımın kanıtı nasıl tamamlayacağını anlama, niceleyicileri kullanma, önermelerin tersini, değilini belirleme ile ilişkili oldukları belirlenmiştir.

Öğrencilerin kanıtla ilgili genel güçlüklerini belirleyen çalışmaların yanında, bazı çalışmalarda öğrencilerin kanıtları anlamaları ve kanıtlama becerileri, tümevarım (Harel, 2001; Brown, 2003; Stylianides et al., 2007) olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt (Thompson, 1996; Wu Yu et al., 2003; Antonini & Mariotti, 2006; 2007; 2008) gibi belli kanıt yöntemleri kapsamında araştırılmıştır. Bilişsel ve öğretici bakış açısıyla, karşıt ters ile kanıt ve olmayana ergi yöntemleriyle yapılan kanıtları araştıran fazla sayıda çalışma bulunmamasına rağmen, yapılan çalışmalar öğrencilerin, bu yöntemlerin uygulandığı kanıtlarda karşılaştıkları güçlüklerin, doğrudan kanıt yöntemi ile yapılan kanıtlardaki güçlüklerinden daha büyük olduğunu göstermektedir (Antonini & Mariotti, 2008).

Olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemlerinin kullanılması, matematiksel ve kavramsal bilgi yanında, yöntemin uygulanmasına yönelik prosedürel bilgi ve bazı mantık kuralları bilgisi de gerektirmektedir. Öğrencilerin karşıt ters ile kanıt yöntemini kullanabilmeleri için kanıtlanması istenen ifadenin karşıt tersinin, ifadeye denk olduğunu ve karşıt tersin kanıtlanmasıyla ifadenin kanıtlanmış olacağını bilmeleri ve de ifadenin doğru bir şekilde karşıt ters ifadesini belirlemeleri gerekmektedir. Karşıt ters ile kanıt yöntemi aslında kanıtlanması istenen ifadenin karşıt ters ifadesinin doğrudan kanıtlanmasıdır. Dolayısıyla bu yöntemle ilgili güçlüklerin nedeni genellikle, öğrencilerin yöntemin farkında olmamaları veya verilen ifadenin karşıt tersini doğru ifade edememeleri, hipotez ve hükmün ne olması gerektiğini doğru belirleyememeleridir. Olmayana ergi yönteminin kullanılabilmesi için de ifadenin değilinin yanlış olduğunun gösterilmesi gerektiği bilinmelidir. Bu yöntemde, verilen önermedeki hükmün değilinin kabul edilmesiyle başlanır ve başlangıç hipotezi veya bilinen bir gerçekle çelişen bir sonuca ulaşılmasıyla kanıt tamamlanmış olur. Bu iki yöntemde, hipotez ve hükmün net olarak belirlenmesi, değillerinin ifade edilmesi ve uygun varsayımlarla kanıta başlanıp neyin gösterilmesi gerektiğinin fark edilmesi, kanıtlamadaki mantıksal ön koşullar olarak düşünülebilir.

Antonini (2004), öğrencilerin bir önermenin karşıt tersi ile arasındaki denkliği gerekçelendirmedeki argümantasyon süreçlerini incelemiş ve öğrencilerin karşıt ters denkliğini bilmedikleri zaman, örneklerle denkliği gerekçelendirmeye çalıştıklarını; öğretmenin argümantasyonu, doğruluk çizelgeleri ve benzer örneklere dayandığı halde, öğrencilerin çok azının yanıtlarını gerekçelendirmek için bu tür açıklamaları kullandıklarını belirlemiştir. Çalışmada, öğrencilerin bir önerme ve tersi arasındaki (yanlış olan) denkliğin sezgisel olduğu, önerme ile karşıt tersi arasındaki (doğru olan) denkliğin sezgisel olmadığı ortaya çıkmıştır.

Goetting (1995)’in çalışması, öğrencilerin olmayana ergi ile karşıt ters ile kanıt yöntemlerini ayırmakta zorlandıklarını ve bazı öğrencilerin neyin varsayılıp neyin gösterilmesi gerektiğini karıştırdıklarını göstermiştir.

Thompson (1996)'ın çalışması da öğrencilerin dolaylı kanıt yöntemlerindeki güçlüklerinin, bir ifadenin karşıtını, karşıt tersini, değilini doğru belirleyememeleri ile ilişkili olduğunu göstermiş ve olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemlerinin öğrenciler için güç yöntemler olduklarını ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmada, öğrencilerin ifadeye denk olan karşıt tersinin kanıtının ifadenin kanıtı olduğunu sezgisel olarak kabul edemedikleri belirtilmiştir. Bunun nedeninin ise öğrencilerin modus tollens çıkarım kuralını sezmelerinin modus ponens çıkarım kuralına göre daha zor olması olarak düşünülmektedir (Harel & Sowder, 2007; Antonini & Mariotti, 2008)

Wu Yu vd. (2003)'nin çalışmaları da öğrencilerin büyük kısmının olmayana ergiyle kanıtın prosedürünü hatırladıklarını, daha azının süreci açıklayabildiklerini ve doğru açıklayanların çok az bir bölümünün doğru uygulayabildiklerini göstermiştir.

Öğrencilerin kanıtla ilgili anlamalarını, kanıtlama becerilerini incelemeye ve kanıtlama sürecindeki güçlüklerini belirlemeye yönelik olarak yapılan çalışmalar öğrencilerin kanıtla ilgili kavramalarının ve kanıtlama becerilerinin yetersiz olduğunu göstermektedir. Kanıtla ilgili öğrenci güçlüklerini daha sistematik olarak belgelemek, bu güçlüklerin doğasını anlamak ve öğretimi geliştirmek için daha kapsamlı çalışmalar yapılabilir (Harel & Sowder, 2007). Ancak var olan çalışmalar çerçevesinde, kanıtlamada karşılaşılan bilişsel güçlükler ve bu güçlüklere neden olduğu düşünülen etkenler şu şekilde sıralanabilir:

- Kanıt ile ilgili algılar ve kanıt kavramını, kanıtın ne olduğunu, rolünü, amacını ve gerekliliğini anlamadaki yetersizlikler (Martin & Harel, 1989; Alibert & Thomas, 1991; Knuth & Elliot, 1997; Almeida, 2000; Knapp, 2005; Weber, 2006; Harel & Sowder, 2007)

- Kanıta nereden başlanacağının bilinmemesi (Moore, 1994; Atwood, 2001; Baker & Campbell, 2004; Selden & Selden, 2007a)

- Matematiksel tanımlarla ilgili bilgi eksikleri; tanımların matematikteki rolünün, öneminin ve kanıtlamada nasıl kullanılacağının bilinmemesi (Atwood, 2001; Edwards & Ward, 2004; Knapp, 2006)

- Bir teorem veya kavramla ilgili yeterli bilgiye sahip olunmaması (Moore, 1994; Hart, 1994; Dreyfus, 1999; Weber, 2006; Ko & Knuth, 2009)
- Teorem ve kavram bilgisi olsa bile bunların doğru kullanılamaması (Weber, 2001; Selden & Selden, 2007a; Pedemonte, 2007)
- Mantık konusundaki eksikler, niceleyicilerin kullanımındaki yetersizlikler (Atwood, 2001; Epp, 2003; Baker & Campbell, 2004; Selden & Selden, 2007a; Harel & Sowder, 2007)
- Mantıksal olarak gerekli olgunluğa ve yeterliğe ulaşılamaması, akıl yürütme zincirinin takip edilememesi (Selden & Selden, 1995; Weber, 2001; Knapp, 2005; Harel & Sowder, 2007)
- Matematiksel kanıt yöntemlerinin yeterince bilinmemesi ve doğru uygulanmaması (Goetting, 1995; Thompson, 1996; Wu Yu et al., 2003; Stylianides et al, 2004; 2007; Antonini & Mariotti, 2007; 2008)
- Matematiksel dilin doğru kullanılmaması, günlük dil ile matematiksel dilin farklılık göstermesi ve bunun matematiksel dilin anlaşılmasını güçleştirmesi (Epp, 2003; Ferrari, 2004; Baker & Campbell, 2004; Selden & Selden, 2007a)
- Kanıt yazamama ve düşündüklerini ifade edememe (Dreyfus, 1999; Dubinsky, 2000; Ko & Knuth, 2009; Weber & Alcock, 2009)

2.3. Kanıtlama Sürecine Yönelik Kavramsal Çerçeveler

Öğrencilerin, matematiksel kanıtlama sürecinde karşılaştıkları güçlükleri gidermek, kanıtla ilgili anlamalarını ve kanıtlama becerilerini geliştirebilmek için öncelikle kanıt oluşturma sürecinde neler olduğunu, öğrencilerin bu süreçte ne düşündüklerini ve nasıl davrandıklarını belirlemek önemlidir. Bu amaçla çeşitli çalışmalar yapılmış ve bireylerin kanıtlama sürecindeki davranışlarını, akıl yürütmelerini, kanıtlama biçimlerini tanımlamaya yönelik çerçeveler ortaya çıkmıştır. Bu bölümde bu çerçevelerden söz edilecek ve çalışmada temel alınan prosedürel, sentaktik ve semantik kanıt türleri tanıtılacaktır.

Raman (2003), üniversite öğrencileri ve öğretmenlerinin kanıta bakışlarını incelemiş ve kişilerin kanıt oluşturmalarında ve kanıtları değerlendirmelerinde üç farklı düşünce biçimi tanımlamıştır. Bunlar, *buluşsal (heuristic) düşünce*, *prosedürel düşünce* ve *anahtar düşünce* olarak isimlendirilmiştir. Buluşsal düşünce informel anlamalara dayanır. Örneğin, deneysel veriye dayandırılır veya şekille gösterilir. Anlamlı olabilir ama formel kanıta götürmez. Buluşsal düşünce, bir şeyin doğru olduğuna dair bir his verir ama ikna etmez. Prosedürel düşünce ise kanıtlamada kullanılır ve informel anlamalarla bağlantı kurmaksızın, mantık ve formel kanıta götüren formel manipülasyonlara dayalıdır. Prosedürel düşünce bir şeyin doğru olduğunu gösterir, ikna hissi verir ama anlama hissi vermez. Anahtar düşünce, uygun mantıksal geçerlikle birlikte formel kanıta dönüştürülebilen buluşsal düşüncedir. Hem anlama hem de ikna hissi verir. Buluşsal düşünce özel, prosedürel düşünce geneldir ve anahtar düşünce bunların ikisi arasında bağlantı sağlar. Raman (2003)'a göre, matematikçiler için kanıt, anahtar düşüncelerle ilgilidir ancak öğrenciler için bu şekilde değildir. Çünkü öğrencilerin anahtar düşünceleri yoktur ve kanıtın anahtar düşüncelerle ilgili olduğunu fark etmemektedirler. Matematikçiler ise anahtar düşüncelere değer verseler de öğretimde bu anahtar düşünceleri vurgulama eğilimi göstermemektedirler.

Almeida (2000), üniversite öğrencileriyle yaptığı çalışmasında, görüşmelerin sonunda öğrencilerin kanıtla ilgili algılarını dört tipte sınıflandırmıştır.

Tip A: Öğrenci formel kanıtın gerekliliğini kabul eder ve informel kanıtı reddeder.

Tip B: Öğrenci formel kanıtın gerekliliğini kabul eder ancak formel kanıtlarda usta olana kadar geçici olarak informel kanıtları kullanır.

Tip C: Öğrenci sezgisel ve deneysel argümanları kanıt olarak kabul eder.

Tip D: Öğrenci formel kanıtın gerekliliğini kabul eder ama genellikle bunu sembolik manipülasyon olarak görür.

Harel ve Sowder (2007), bir kişinin veya topluluğun kanıt kavramını açıklamak için kanıt şeması terimini tanımlamışlardır. Kanıt şeması; kişinin kendini ve diğerlerini bir matematiksel durumun doğruluğuna veya yanlışlığına ikna etmede kullandığı argümanlardır. Kanıt şemasını; *dışsal ikna kanıt şeması*, *deneysel kanıt şeması* ve *tümdengelimsel kanıt şeması* olarak üç sınıfa ve bu sınıfları alt sınıflara ayırmışlardır (Harel & Sowder, 1998).

1) *Dışsal ikna kanıt şemaları:* Kişi kendini ve diğerlerini dışsal bir şey kullanarak ikna eder. Üç sınıfa ayrılır:

Otoriter kanıt şeması: Kişi öğretmenin, kitabın veya başka bir otoritenin söylediğine dayalı olarak ikna olur.

Ritüel (ritual) kanıt şeması: Burada ikna edicilik, kanıtın içeriğine değil biçimine dayalıdır.

Sembolik kanıt şeması: Sembolik kanıtta ikna edicilik, anlamını bilmeden sembolik manipülasyonla olur. Matematiksel ifadeler, sembollerin işlevi ve anlamı düşünülmeden, sembolik akıl yürütmeyle kanıtlanır.

2) *Deneysel kanıt şemaları:* Deneysel kanıt şemaları tümevarımsal veya algısal olabilir.

Tümevarımsal kanıt şeması: Bu kanıt şemasına sahip olan öğrenci, genel durumun doğruluğuna ikna edici delil olarak, bir veya daha çok örneği göz önünde bulundurur, argümanlar özel durumlara ve örneklere dayanır.

Algısal kanıt şeması: Öğrenci, tümdengelimden sağlanmamış, yetersiz zihinsel gösterimlere dayalı çıkarımlar yapar ve bu çıkarımların kendisi ve diğerleri için ikna edici olduğunu düşünür.

3) *Tümdengelimsel kanıt şemaları:* Dönüşümsel veya aksiyomatik olabilir.

Dönüşümsel (transformational) kanıt şeması: Bu kanıt şemasında öğrenci kendini ve başkalarını çıkarımsal bir süreçle ikna eder. Bu süreçte öğrenci genellenebilir durumları göz önünde bulundurur; amaca yönelik zihinsel operasyonları uygular; tanımlar, teoremler ve şekiller arasında geçişler yapar. Üç özelliği vardır: genellenme, operasyonel düşünme ve mantıksal çıkarım.

Aksiyomatik kanıt şeması: Bu şema, dönüşümsel kanıt şemasının özelliklerine sahiptir ve bu özelliklere ek olarak öğrenci, matematiksel sistemlerin kanıtsız olarak kabul edilen durumlara dayandığını fark eder (Housman & Porter, 2003; Harel & Sowder, 1998; 2007; Knapp, 2005)

Boero (1999) ise, teoremler içeren matematik etkinliklerinde argümantasyonun rolünün incelenmesinde, bu etkinliklerin farklı yönlerinin göz önünde bulundurulması gerektiğini belirtmiş, varsayım ve matematiksel kanıt oluşturma etkinliklerinde bunları evreler halinde tanımlamıştır.

I) Varsayım oluşturma (problem durumun keşfedilmesi, düzenli tekrarların tanımlanması, bu düzenliliğin hangi koşullar altında gerçekleştiğinin belirlenmesi, üretilen varsayımın inandırıcılığı için argümanların tespiti): Bu evre matematikçilerin çalışmasının kişisel yanına aittir.

II) Kabul edilmiş olan ortak kurallara göre önermenin formüle edilmesi: Bu aşama genellikle yayınlanabilir bir metne yol açmaktadır. (Bu evre daha sonraki tüm etkinlikler için temel oluşturacak tam olarak hazırlanmış bir varsayım sağlamayı amaçlamaktadır.)

III) Varsayımın içeriğinin (ve geçerliliğinin sınırının) belirlenmesi: Hipotezler ve tezler arasındaki bağlarla ilgili buluşsal, semantik (hatta formel) hazırlıkların yapılması, geçerlilik için uygun argümanların belirlenmesi. Bu evre de genellikle matematikçilerin çalışmalarının kişisel yönüne aittir.

IV) Tutarlı ve teorik argümanların tümdengelimsel bir zincir için seçilmesi ve birleştirilmesi: Bu evre genellikle, matematikçiler çalışmalarını meslektaşlarına informel bir yolla sunacaklarında başlar.

V) Zincirlenmiş argümanların, var olan matematiksel standartlara göre kabul edilebilir bir kanıtta düzenlenmesi

VI) Formel kanıta yaklaşma

Boero (1999)'ya göre, bu evreler matematikçilerin normal çalışmalarında genellikle doğrusal olmayan şekilde birbirleriyle ilişkilidir. Ayrıca bu evrelerin, okullarda matematiksel kanıt yaklaşımlarındaki sorunlarla uğraşırken yardımcı olabileceğini ifade etmiştir. Boero (1999), ürün olarak teorem ifadesinin belirtilmesi ile süreç olarak varsayımda bulunmanın; ürün olarak matematiksel kanıt ile süreç olarak kanıtlamayı ayırmanın önemli olduğunu vurgulamıştır.

Selden ve Selden (2009), öğrencilerin ilerleyişini takip edebilmek için, teoremleri belli bir kanıt yöntemiyle kanıtlayıp kanıtlayamadıklarına bakmak yerine kanıtlamaya katkıda bulunacak daha küçük becerileri kapsayan ayrıntılı bir çerçeve önermiş ve öğrenci çalışmalarını bu çerçeveyle tanımlamışlardır. Öğrencilerin kanıtlama becerilerini ve kanıtlarını analiz etmek için tanımladıkları bu çerçevede, kanıtı bir bütün olarak gösteren yönleri, nasıl organize edildiği ve nasıl yazılabileceği şeklinde üç kanıt yapısı ortaya koymuşlardır. Bu üç yapıyı; alt kanıt ve alt yapıların (örn. $\varepsilon - \delta$ kanıtında δ ‘yı bulma) dikkate alındığı *hiyerarşik yapı*, hiçbir zaman hata yapmayacak ve yanlış yola girmeyecek ideal bir kanıtlayıcının izleyebileceği adımların sırasını ifade eden *yapılandırma yolu*, kanıtların *formel–retorik (formal-rhetorical)* ve *problem odaklı (problem-centered)* olarak adlandırılan iki kısma ayrılması şeklinde ifade etmişlerdir. Formel-retorik kısım, kanıtın daha derin anlamalarına veya Schoenfeld (1992)’in ifade ettiği anlamıyla problem çözmeye başvurmadan, sadece tanım ve teoremlerin mantıksal ve formel yönlerine bağlı olarak yazılan kısmıdır (Selden et al., 2008a). Problem odaklı diğer kısım ise, kanıtın içerdiği kavramların derin anlamına ve problem çözmeye bağlı olan kısmıdır ve Selden vd. (2008a) bu kısımdaki alt kanıtların, Weber ve Alcock (2004)’un önerdikleri sentaktik ve semantik açıdan karşılaştırılmasının faydalı olabileceğini belirtmişlerdir.

Heinze ve Reiss (2003), öğrenci kanıtlarının analiz edilmesine yönelik olarak yapılan araştırmaların, kavram, kurallar ve teoremler bilgisinin öğrencilerin matematiksel kanıt oluşturmaları için yeterli olmadığını düşündürdüğünü belirtmiş ve doğru matematiksel kanıt prosedürleri bilgisinin de gerekli olduğunu ifade etmişlerdir. Metodolojik bilgi olarak tanımladıkları bu bilginin, birbiriyle bağlantılı olan *kanıt şeması*, *kanıt yapısı* ve *mantıksal zincir* olmak üzere üç yönü olduğunu belirtmişlerdir. Bu yapıları şu şekilde tanımlamışlardır:

1) *Kanıt şeması:* Matematiksel kanıt tümdengelimsel akıl yürütme örüntüsüdür ve kanıttaki her sonuç için tümdengelimsel özellikte, destekleyici argüman bulunur. Otoriteye dayandırılan deneysel-tümevarımsal argümanlar ya da algısal argümanlar gibi diğer argüman türleri ise matematiksel kanıt için yeterli değildir. Buradaki tanımda tümdengelimsel karakterli argüman doğru olmak zorundadır.

2) *Kanıt yapısı:* Bir kanıt verilen öncüllerle başlar ve belirli bir iddiayla biter. Eğer bütün argümanlar matematiksel açıdan geçerliyse bu iddia kanıtlanır. Bir diğer ifadeyle; bir kanıt neyi kanıtlaması gerekiyorsa onu kanıtlamalıdır ve iddianın argüman olarak kullanımı yeterli değildir.

3) *Mantıksal zincir:* Kanıtın her adımı bir önceki adımdan çıkarılabilir (ek olarak geçerli bir matematiksel bilgi ile de desteklenebilir).

Balacheff (1988), dört tür kanıt yaklaşımı tanımlamıştır. Bunlar:

- *Basit deneycilik:* Bir sonucun doğruluğu bir kaç örnekle doğrulandıktan sonra iddia edilir.
- *Kesin deney*: Önerme dikkatle seçilmiş tipik bir örnekle doğrulanır.
- *Genelleyici örnek:* Bir iddianın doğruluğunun nedenleri prototip bir örnekle açık hale gelir yani belli bir sınıfa ait tüm durumları temsil eden bir örnekle gerekçeleme yapılır.
- *Düşünce deneyi*: Kanıttaki işlemler ve temel ilişkiler, sonuçların kullanımından başka bir yolla, örneklerden bağımsız olarak gösterilir.

Balacheff (1988)'e göre bu farklı düzeyler öğrenme sürecindeki basamakları da temsil etmektedir. Balacheff, öğrencilerin ürettikleri kanıtları *pragmatik kanıtlar* ve *kavramsal kanıtlar* adıyla daha geniş iki kategoride ele almıştır. Pragmatik kanıtlar, sonucun, çalıştığı için doğru olduğunu göstermekle ilgilidir, örneklere ve gösterimlere dayanır. Kavramsal kanıtlar ise, kanıtlanacak ifadedeki özelliklerin formüle edilmesine ve bunlar arasındaki ilişkilere dayanır. (akt. Chazan, 1993; Coe & Ruthven, 1994)

Kanıtlama ile ilgili farklı düşünceler ve yaklaşımlar bulunsa da ortak amaç, mantıksal çıkarım kurallarına dayanan ve önermenin doğruluğunu gösteren, geçerli bir matematiksel argüman ortaya çıkarmaktır. Öğrenenlerin kanıta ilişkin bilgileri aynı olmayabileceğinden bu amaca ulaşırken farklı süreçler kullanabilmektedirler (Weber & Alcock, 2004). Öğrencilerin kanıtlama süreçlerini inceleyen Weber (2004b), çalışmalarının sonucunda, ileri matematik derslerinde, kanıtlama sürecinde gözlenen farklı yaklaşımları tanımlamak için bir çerçeve önermiştir. Bu çerçeveye göre öğrencilerde görülen yaklaşımlar; prosedürel (procedural) kanıt oluşturma, sentaktik (syntactic) kanıt oluşturma ve semantik (semantic) kanıt oluşturma olarak belirlenmiştir.

Prosedürel kanıt oluşturmada, kişi bir prosedür uygulayarak kanıt oluşturmaya çalışır ve öngörülmüş belli adımların onu geçerli bir kanıta ulaştıracağını sanır (Weber, 2004b). Bir öğrenci prosedürel yolla kanıt oluşturduğunda elde ettiği sonucun kanıtlanması gereken ifadeyi nasıl gösterdiğinin farkında olabilir veya olmayabilir. Weber (2004b)'in çalışmalarında, öğrenciler genellikle prosedürü, kendileri için anlamlı olmadan ve kanıtlarının ne anlama geldiğini açıklayamadan, uygulayarak kanıt oluşturmuşlardır. Bu şekildeki kanıt girişimleri ise öğretmenin yaptıklarını taklit etmek ya da geçerli bir kanıt oluşturacağı söylenen bir dizi adımı uygulamak şeklindedir. Örneğin, bir öğrenci öğretmenin $\sqrt{2}$ sayısının irrasyonel olduğunu kanıtlamasını izledikten sonra öğretmeni taklit ederek aynı şekilde, benzer bir kanıt olan $\sqrt{3}$ 'ün de irrasyonel olduğunu kanıtlaması prosedürel kanıt oluşturmadır (VanSpronsen, 2008).

Weber (2003)'e göre kanıt tekniklerini mekanik prosedürler olarak gören bazı öğrenciler belli aşamalardan geçer ve başarılı olurlarsa geçerli bir kanıtın ne olduğunu anlayabileceklerdir. Weber (2003), kanıt kavramını prosedürel yolla öğrenen öğrencilerin geçecekleri aşamaları; kanıtı önce algoritma olarak anlama, sonra süreç olarak ve son olarak da argüman olarak görme şeklinde tanımlamıştır.

<u>Algoritma olarak kanıt:</u> Bu aşamada öğrenciler kanıtı, adımları mekanik ve belli türdeki önermeler için olan bir algoritma olarak görür ve uğraştıkları prosedürün genel yapısının farkında olmazlar. Weber (2003)'in çalışmasında, bu aşamadaki öğrenciler öğretmenin onlara gösterdiği tekniği taklit edebilmiş ama ne yaptıklarını gerçekten anlamamış, tekniği genelleyememiş ve bu tekniğin, önermenin doğruluğunu gösterme gerekçelerini belirleyememişlerdir.

<u>Süreç olarak kanıt:</u> Bir kanıt tekniğini defalarca ve farklı bağlamlarda uyguladıkları zaman, bazı öğrenciler algoritmayı, matematiksel bir süreç olarak içselleştirebilirler. Kanıtı bir süreç olarak görmeye başlayan öğrenciler, kanıt tekniğini, kanıtladığı belli önermelerden ayırabilir ve birçok farklı, belki de daha önce görmemiş oldukları durumlara genelleyebilirler.

Weber (2003)'in çalışmasında, bu aşamadaki öğrenciler, bir kanıt tekniğini çok sayıda duruma uygulayabilmiş ama kanıtlamayı açıklayıcı veya ikna edici bulmamışlardır.

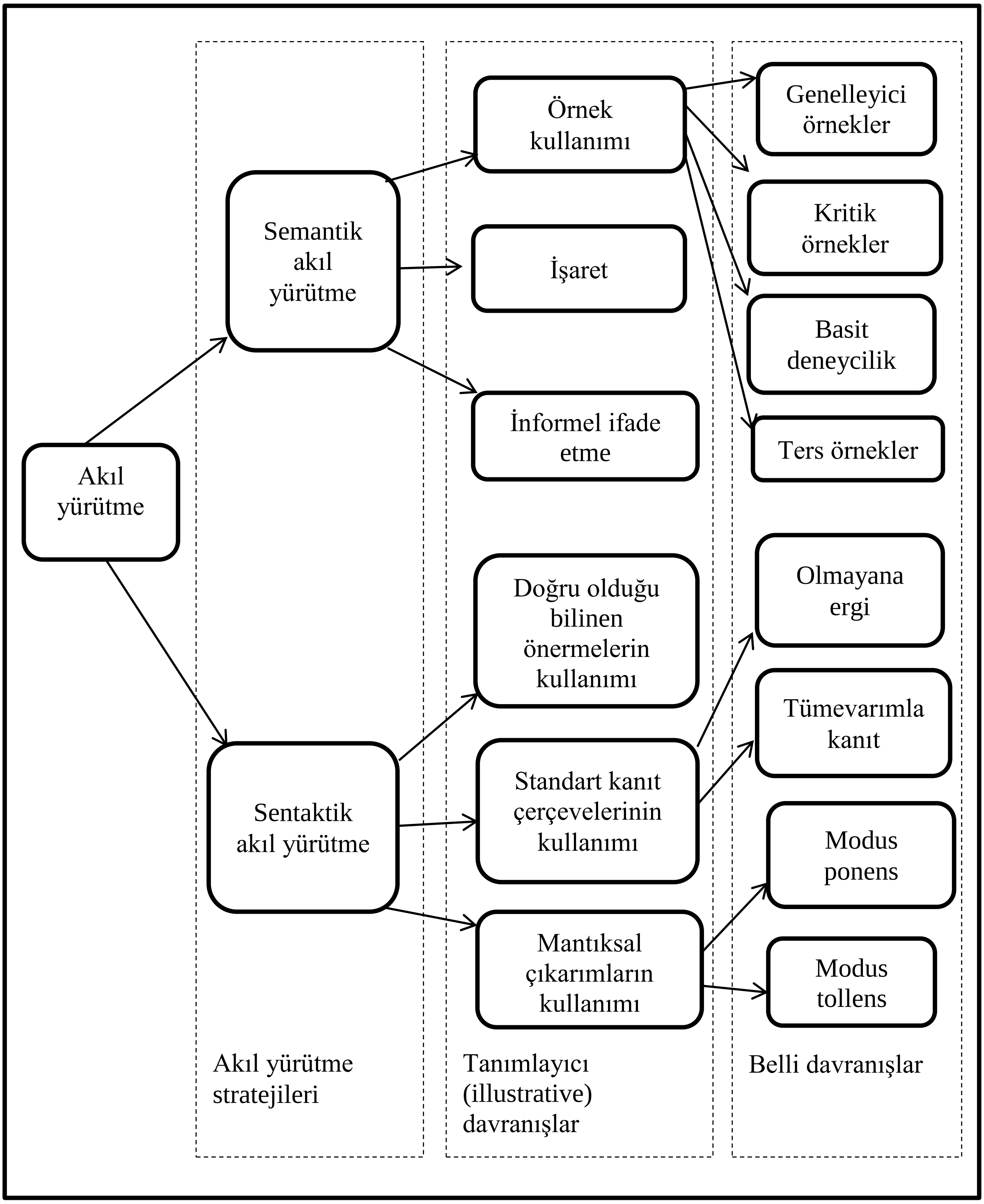
Argüman olarak kanıt: Bazı başarılı öğrenciler, uyguladıkları prosedür üzerine düşündüklerinde, neden bu prosedürü uygulamalarının istendiğini, bu prosedürün neyi başarmak için tasarlandığını sorgulamaya başlar ve bu yolla, prosedürün ötesinde, geçerli bir kanıt nelerden oluşur diye düşünürler. Weber (2003), yaptığı çalışmadaki öğrencilerin çoğu, uyguladıkları prosedürü bile anlamaya çalışmadıkları için, bu geçişin zor bir süreç olduğunu belirtmiştir.

Sentaktik kanıt oluşturmada kişi, doğru bir şekilde ortaya konmuş tanımları ve ilişkili diğer gerçekleri, mantıksal olarak kabul edilebilir bir yolla manipüle ederek kanıt yazmaya çalışır (Weber, 2003). Sentaktik kanıt oluşturmada kanıtlayan kişi, diyagramları veya diğer sezgisel, informel gösterimleri kullanmaz, sadece kanıt gösterim sistemiyle çalışır (Alcock & Inglis, 2008). Matematik topluluğunda, sentaktik kanıt oluşturma, tanımları açma ve sembolleri ilerletme olarak tanımlanabilir (Weber & Alcock, 2004).

Semantik kanıt oluşturmada kişi, bir önermenin neden doğru olduğunu, ilgili matematiksel nesnelerin gösterimlerini (örn. diyagramlar) inceleyerek anlamaya çalışır ve bu sezgisel argümanı, formel kanıt oluşturmak için kullanır (Weber, 2004b). Semantik kanıt oluşturma süresince, kanıtlayan kişi, örnekleri fiziksel olarak çizer veya yazar ya da onlarla zihinsel olarak çalışır. Burada önemli olan kanıtlayan kişinin, örnekleri, ifadeyi daha iyi yorumlayabilmek ve çıkarılabilecek formel çıkarımları düşünmek için anlamlı bir şekilde kullanmasıdır (Weber & Alcock, 2004). Semantik kanıt oluşturma sürecinde, sentaktik stratejinin aksine kanıtın en azından bir kısmında kanıttan farklı bir gösterim sistemiyle çalışılır (Alcock & Inglis, 2008).

Weber'in tanımladığı bu üç yaklaşımla üretilen kanıtlar arasında, ortaya çıkan ürün bakımından fark olmayabilir. Burada önemli olan öğrencinin hangi yolla o kanıta ulaştığı ve kanıtın ilk adımlarını yazarken soruyu nasıl düşündüğüdür (VanSpronsen, 2008). Örneğin, kanıtlama sürecinin semantik akıl yürütmeyi içerdiği durumlarda bile ortaya çıkan sentaktik bir ürün olabilir (Alcock & Inglis, 2008). Weber (2004b), prosedürel ve sentaktik kanıtların, kanıtlayan kişiye ifadenin doğruluğunu açıklamada yetersiz kalabileceğini ifade etmiştir. Ayrıca sentaktik yaklaşımla kanıtlanabilecek ifadelerin kapsamının da sınırlı olduğu, lisans derslerinde özellikle kanıta geçiş derslerinde yer alan önermeler için yeterli olsa da kavramsal olarak daha kapsamlı konulardaki kanıtlar için yeterli olamayabileceği belirtilmiştir (Weber, 2001; Weber & Alcock, 2004; Alcock ve Weber, 2009). Ancak bundan, öğrencilerin prosedürel ve sentaktik kanıt oluşturmayla uğraşmamaları gerektiği sonucunun çıkarılmaması gerektiği, bu tür kanıtların üzerinde düşünmenin daha üst düzey öğrenmelere temel oluşturabileceği ifade edilmiştir (Pinto & Tall, 1999; Weber, 2003).

Weber ve Alcock (2004; 2009) sentaktik ve semantik kanıt yaklaşımlarının, öğrenci açısından üstünlükleri ve sınırlılıkları bulunduğunu belirtmişler ve bu iki yaklaşımı, öğrencilere sundukları öğrenme fırsatları ve öğrencilerin kanıt oluşturma sürecinde karşılaşabilecekleri güçlükler açısından değerlendirmişlerdir. Alcock ve Inglis (2008) ise bu iki akıl yürütme sürecinde gözlenebilecek davranışları belirlemiş ve senmantik akıl yürütme ile sentaktik akıl yürütmenin karşılaştırmasını Şekil 2.1'deki gibi göstermişlerdir.



Şekil 2.1. Semantik ve sentaktik akıl yürütmenin karşılaştırması (Alcock & Inglis, 2008)

Bu çalışmada, öğrencilerin kanıtlama sürecindeki akıl yürütmeleri ve ortaya çıkardıkları kanıtlar prosedürel, sentaktik ve semantik kanıtlama biçimleri çerçevesinde incelenmiştir.

2.4. Kanıt Öğretimi ile İlgili Yapılan Çalışmalar

Kanıtlama ve formel matematikle ilk defa üniversitede karşılaşan öğrencilerin matematiksel dile alışmalarına, daha soyut ve üst düzey düşünmelerine, formel matematiği anlamalarına yardımcı olması amacıyla bazı üniversitelerde kanıta geçiş ve matematiksel akıl yürütmeye giriş dersleri bulunmaktadır (Epp, 2003; Baker & Campbell, 2004; Knapp, 2005; Smith, 2006; Selden & Selden, 2007a). Bu derslerin standart bir içeriği olmasa da genelde, mantık, kümeler, bağıntı ve fonksiyon gibi kanıtlamada gerekli temel konular ders kapsamında yer almaktadır (Epp, 2003; Selden & Selden, 2007a). Üniversite düzeyinde, öğrencilerin kanıtlama süreçlerini, bu süreçte yaşadıkları güçlükleri ve kanıtla ilgili algılarını incelemeye yönelik çalışmalar genellikle bu dersler kapsamında yapılmıştır.

Çalışmalarda, kanıt ağırlıklı matematik derslerinin veya kanıtlamaya ve matematiksel akıl yürütmeye geçiş derslerinin beklendiği kadar etkili olmadığı ve amacına ulaşmadığı görülmekte ve bunun sebebi olarak yapılan öğretim gösterilmektedir. Çünkü derslerde öğrencilere bitmiş ürünler sunulmakta ve onların kanıtlama sürecinde yer almaları, kanıtlama deneyimi yaşamaları sağlanmamaktadır (Alibert & Thomas, 1991; Ferrari, 2004). Öğretmenler genellikle, öğrenciler için kanıtın ne olduğuna, onların zihnindeki matematiksel doğrulamaya önem vermemekte ve kanıt kavramını öğrencilerin zihninde netleştirmek yerine kanıt yöntemlerini, kanıtta uygulanacak kuralları, kanıt kavramıyla bağlantısız olarak sunmaktadırlar (Harel & Sowder, 1998). Bu şekilde öğretimin sonucu olarak öğrenciler, matematiği ezberlenmesi gereken gerçeklerin uzun bir listesi olarak görmekte ve kavramlar, kurallar arası ilişkileri göz önüne almamaktadırlar (Jones, 1997). Ayrıca okulda öğretilen matematikle, matematikçiler tarafından yapılan matematik farklı olabildiğinden, öğrencilerin matematik kavramları matematikçilerden farklı olmaktadır. Matematikçiler matematiği sezgi-deneme ve yanılma-spekülasyon, varsayım-kanıt şeklinde yaptıkları halde öğrencilere bu akışın sadece son noktasına odaklı öğretim yapılmaktadır (Almeida, 2000). Bu da öğrencilerin matematiksel kanıtla ilgili anlamalarının yetersiz olmasına ve öğrencilerin kabul edilebilir matematiksel kanıtın ne olduğu ile ilgili olarak matematikçilerin kabul ettiğinden farklı bir anlayışa sahip olmalarına neden olmaktadır (Knuth & Elliot, 1997).

Öğrencilerin kanıtla ilgili güçlüklerini, kanıta yönelik tutumlarını, kanıt şemalarını inceleyen araştırmaların yanında, az sayıda çalışmada kanıt öğretimine ilişkin yöntemler denenmiş ve öğrencilerin kanıtlama becerilerinin nasıl geliştirilebileceğine yönelik önerilerde bulunulmuştur. Bu araştırmanın planlanmasında, incelenen bu çalışmalar yol gösterici olmuştur.

Kanıt öğretiminde kullanılmış olan yöntemlerinden biri R. L. Moore (1882–1974) adlı matematikçinin, derslerinde kullandığı ve kendi adıyla anılan Moore metodudur. Keşfederek öğrenme veya Texas yöntemi olarak da anılan Moore metodu, bazı matematikçiler (Cohen, 1982; Chalice, 1995; Patrick, 2003; Good, 2006) tarafından modifiye edilerek, kanıt ağırlıklı üniversite matematik derslerinde öğrencilerin teoremleri kanıtlama becerilerini geliştirmek amacıyla kullanılmıştır. Moore metodunun orijinal biçiminde, öğrencilere tanım ve teoremlerin bir listesi verilmekte, tanımlar üzerinde konuşup açıklamalar yapıldıktan ve örnekler verildikten sonra, listedeki teoremleri öğrencilerin kanıtlaması beklenmektedir (Mahavier, 1999). Öğrenciler sınıfta ve sınıf dışında, verilen teoremleri kanıtlamak için bireysel olarak çalışmakta, öğretmene soru sorabilmekte ancak kanıtlarla ilgili olarak birbirleriyle konuşmamaları ve kitaplara bakmamaları gerekmektedir. Kanıtlama sürecinde öğretmen tarafından öğretim yapılmamakta sadece gerektiği yerde ve uygun sorularla yönlendirme yapılmaktadır. Öğrencilerden biri tahtaya kalkarak kanıtını sunmakta, arkadaşları ve öğretmeni tarafından sorulan soruları yanıtlamakta ve kanıtların sunumu bu şekilde sınıf tartışmasıyla gerçekleşmektedir (Smith, 2006). Moore metodunun iddiası, parlak öğrencilerin matematiği, rekabetçi bir ortamda bireysel çalışarak geliştirebilecekleridir (Dancis & Davidson, 1970). Bu yöntemi uygulayan matematikçiler, öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşamalarına ve başarma duygusunu tatmalarına fırsat verdiği için (Jones, 1977; Mahavier, 1999; Good, 2006) ve Moore'dan ders almış olan birçok öğrencisi sonrasında oldukça üretken matematikçiler olduğundan (Cohen, 1982), kanıt öğretiminde kullanılabilecek, etkili bir yöntem olduğunu ileri sürmektedirler. Diğer yandan olumlu taraflarına rağmen, bu yöntemin ortalama ve ortalamanın altında olan öğrenciler üzerindeki etkisi tartışma konusudur (Cohen, 1982; Good, 2006).

1967'de Moore metodundan yola çıkarak Neil Davidson küçük grupla keşfetme metodunu geliştirmiş ve uygulamıştır. Bu yöntemde öğrenciler, 3 veya 4 kişilik küçük gruplara ayrılmakta, birlikte tartışarak her grup teoremleri kanıtlamaya çalışmakta ve yaptıklarını tahtada sunmaktadırlar. Bu yöntem, farklı seviyedeki daha çok öğrenciye uygulanabilir olarak görülmekte ve ortalama öğrencilerle daha iyi öğrencilerin matematiği birlikte çalışarak işbirlikçi ortamda geliştirebilmelerine fırsat vereceği dolayısıyla öğrencilerde bireysel becerilerin ve özgüvenin gelişmesine katkı sağlayacağı öne sürülmektedir (Dancis & Davidson, 1970). Her iki yöntemde de amaç, öğrencilerin izleyici oldukları değil aktif katıldıkları bir ortamda matematiği geliştirebilmeleri ve onlara öğretmenleri ve arkadaşlarıyla tartışma fırsatlarının sunulmasıdır (Dancis & Davidson, 1970).

Smith (2006), Moore metodunun öğrencilerin kanıt oluşturmayı öğrenmelerine etkisini araştıran yayınlanmış hiçbir çalışma olmamasından yola çıkarak, bu yöntemin değiştirilmiş biçimi olan problem tabanlı öğretim ile öğretmenin anlatımına dayalı geleneksel yöntemin uygulandığı iki sınıftan belirlediği 5 öğrencinin kanıtlama süreçlerini incelemiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin başlangıç stratejilerini, notasyonu, ön bilgi ve deneyimlerini, somut örnekleri kullanmaları bakımından niteliksel farkları olduğunu belirlemiş ve problem tabanlı öğretiminin gelenekselden daha sağlıklı bir yöntem olduğunu, öğrencilerin gelişimi için daha çok fırsatlar sunduğunu belirtmiştir.

Selden, McKee ve Selden (2008a), değiştirilmiş Moore metodunu uyguladıkları bir dersin üniversite öğrencilerinin kanıtlama becerilerini geliştirmelerinde ne kadar yardımcı olduğunu belirlemeye çalıştıkları devam eden araştırmalarında, öğretime yönelik bir teorik çerçeve sunmuşlardır. Bir tasarım deneyi olan bu çalışmada, öğrencilere kitap yerine, tanımlar, teoremler ve minimum düzeyde açıklamalar bulunan, kanıtların yer almadığı notlar dağıtmışlar ve teoremleri evde kanıtlayıp sınıfta sunmalarını istemiş, ders anlatmamışlardır.

Selden ve Selden (2009) öğrencilerin kanıtlamada başarılı olmaları için bilişsel kaynakları etkin şekilde kullanmaları gerektiğini, buna yönelik davranışsal bilgiye ihtiyaçları olduğunu ve bunu soyut tanımları yeniden üreterek değil, kanıt oluşturmada daha çok pratik yaparak kazanabileceklerini belirtmişlerdir. Öğrencilerin aktif olduğu bir ortamda, tanım ve kanıtlanacak teorem ifadelerinin yer aldığı notlarla çalışmalarının etkili olabileceğini düşünmüşlerdir. Öğrencilerin kanıtlar üzerinde birlikte tartışmalarının ve birbirlerini ikna etmeye çalışmalarının etkili olacağını, böyle bir sınıf ortamında iki kişiden oluşan üç grup veya 3-4 kişilik üç grup şeklinde öğrencilerin gruplara ayrılmasını önermişledir (Selden & Selden, 2007b)

Weber (2006), öğrenciler doğru bir kanıt kavramına, matematiksel kavramlarla ilgili teorem ve gerçekler bilgisine sahip olsalar da ilgili teoremleri kanıtlayamayabileceklerini, bunun da uygun karar verme stratejilerine sahip olmamalarından kaynaklandığını ifade etmiştir. Çalışmasında grup homomorfizmalarıyla ilgili teoremlerin kanıtlanmasında kullanılabilecek bir prosedür tanımlamış ve tasarladığı öğretimle öğrencilere bu prosedürü öğretmiş, öğretimin sonrasında öğrencilerin daha fazla sayıda teoremi kanıtlayabildiklerini gözlemiştir. Bu prosedür beş adımdan oluşmaktır ve şu şekilde tanımlanmıştır:

<u>1. adım:</u> İlk olarak, teoremin sonucunun sizden hangi matematiksel yapıyla ilgili bilgi elde etmenizi istediğini belirleyin.

<u>2. adım:</u> Bu yapıyla ilgili bilgi elde etmede kullanılabilecek bir gerçek veya teorem seçin.

<u>3. adım:</u> Eğer bir teoremi uygulayacaksanız, teoremin hipotezinin sağlanıp sağlanmadığına bakın. Eğer hipotez sağlanmadıysa hipotezi sağlamak için gerekli olan bilgiyi elde etmek amacıyla 1. adımla başlayın, başarısız olursa 2. adıma dönün ve yeni bir gerçek veya teorem seçin.

<u>4. adım:</u> Bu gerçeği veya teoremi uygulayın.

<u>5. adım:</u> Amacınıza ulaşmak için yeterli olup olmadığına bakın, eğer yeterliyse gerçekleştirin, değilse 1. adıma dönün.

Weber (2006), bu prosedürü, öğrencilerde kavramsal anlamayı da sağlayacak şekilde öğretmeye çalışmış ve kısa sürede öğrencilerin kanıt yazmalarında ilerleme gözlemiştir. Ancak bu prosedürün sadece doğrudan kanıtlarda uygulanabileceğini, olmayana ergi, karşıt ters ve tümevarım yöntemleri için uygun olmadığını belirtmiştir.

Dean (1996) üniversite matematik derslerinde öğrencilerin kanıt yapmalarını geliştirmek amacıyla buluş yoluyla öğrenmeye örnek olabileceğini belirttiği “Süper Öğrenci” (SS-Super Student) adında altı basamaklı bir model geliştirmiştir. Dean, bu modelin yapılandırmacı yaklaşıma sahip olduğunu ve sınıfta uygulandığında hem öğrencilerin kanıtlayabilecekleri teoremlerin sayısını arttırdığını hem de daha önce karşılaşmadıkları teoremleri kanıtlamalarını sağlayacağını öne sürmüştür. Verdiği lisans matematik derslerinde bu modeli kullanmış ve öğrencilere de öğretmiştir. Bu altı aşamayı şu şekilde tanımlamıştır:

1) Açma: Bu aşama adından da anlaşılacağı gibi modelin başlangıcıdır ve öğrencilerin, önermenin ne ifade ettiğini anlamaya çalıştıkları aşamadır.

2) Beyin fırtınası: Öğrenciler bu aşamada önerme ile ilgili olan bildikleri kavram ve tanımları hatırlamaya çalışır ve bu bilgilerini kanıtlama sürecinde nasıl kullanabileceklerini düşünürler.

3) İddiayı destekleme: Bu aşamada öğrenciler genellikle hipotezle başlayan ve sonuca giden bir akıl yürütme süreci geliştirirler.

4) İkna: Öğrenciler, akıl yürütmelerini inceler ve kanıtlarının geçerli olduğundan emin olurlar.

5) Yansıtma: Öğrenciler, önermeyi kanıtlayacakları başka bir yol olup olmadığı üzerinde yansıtıcı düşünürler.

6) Genişletme: Öğrenciler kendi çalışmalarını inceler, varsayımları nasıl kullandıkları ve bazı varsayımlar değişmiş olsaydı nelerin farklı olabileceği üzerine düşünürler.

Dean (1996), bu aşamaların sınıfta öğrencilerine düşünme fırsatları verilerek nasıl uygulanabileceğini ayrıntılarıyla açıklamış ve öğrencilerin olumlu dönütler verdiği modelini Polya'nın problem çözme adımlarından faydalanarak oluşturduğunu belirtmiştir.

Schabel (2001) çalışmasında, öğrencilerin matematiği nasıl öğrendikleri ve kanıt öğretimi ile ilgili alan yazından yola çıkarak geliştirdiği altı boyutlu öğretimsel modelin, kanıt öğretimindeki etkisini incelemiştir. Bu modelin, öğrencilerin sayılar teorisi kavramlarını öğrenmelerini ve kanıt yazma becerilerini geliştirdiğini görmüştür. Geliştirdiği altı boyutlu öğretimsel modeli şu şekilde açıklamıştır:

1) Sınıf oturumları küçük grup çalışması, tüm sınıf tartışması ve minimum düzeyde ders anlatımı içerecektir.

2) Öğrenciler örnekler, örnek olmayan durumlar ve ters örnekler oluşturmaları için teşvik edileceklerdir.

3) Öğrenciler varsayımlar oluşturmaları için teşvik edileceklerdir.

4) Öğrencilerden varsayımları veya diğer önermeleri kanıtlamaları ya da en azından kanıtları yazmaya yardımcı olmaları istenecektir.

5) Ev ödevleri, hesaplamalar ve kanıtların yanında yazma görevlerini de içerecektir.

6) Öğrenciler birbirlerinin ödevlerini inceleyeceklerdir.

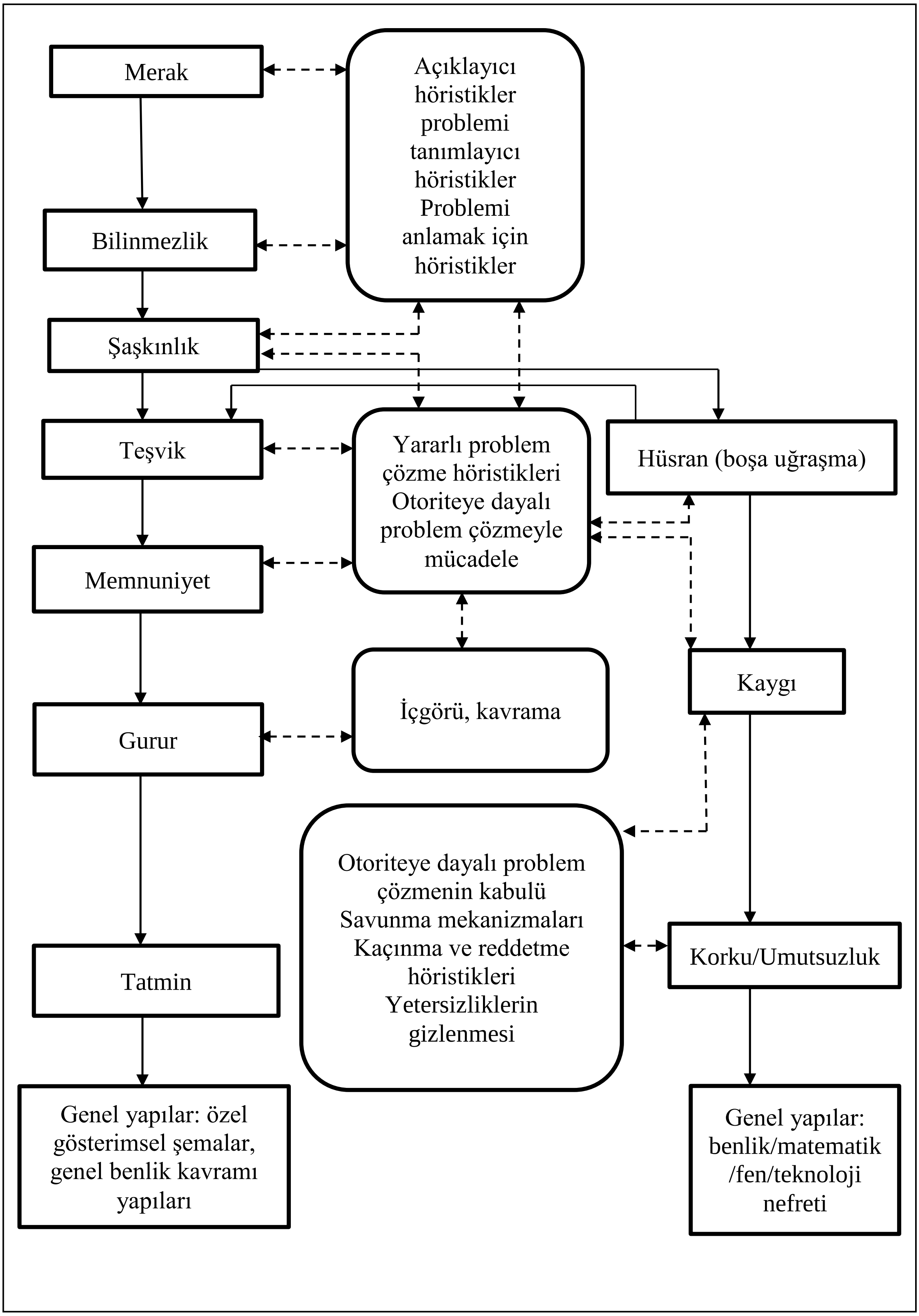
Bu tez çalışmasında ise, belli bir öğretim yönteminin etkililiğinden çok, öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşamalarına ve etkileşime dayalı sınıf ortamındaki kanıtlama süreçlerinin gelişimi incelenmiştir. Öğrencilerin, bu ortamdaki kanıtlara yaklaşımları ve akıl yürütmeleriyle ilgili olarak elde edilen sonuçlar doğrultusunda, gerçek sınıflarda uygulanabilecek önerilerde bulunulmuştur.

2.5. Matematik Eğitiminde Duyuşsal Alan ve Kavramsal Çerçeve

Schoenfeld (1982), gözlediğimiz anlaşılabilir bilişsel eylemlerin, genellikle bilinçli veya bilinçsizce sahip olduğumuz bazı inançlarımızın sonucu olduğunu ileri sürmektedir. Bu inançları; görevle, görevin yer aldığı sosyal çevreyle, problemi çözen bireyin kendisine, göreve ve çevreyle ilişkisine yönelik algısıyla ilgili inançlar olarak belirtmiş ve davranışların bunlar ışığında yorumlanması gerektiğini iddia etmiştir. Schoenfeld (1982)'e göre, öğrencilerin davranışlarına ilişkin en fazla bilgi inanç sistemleri düzeyinde elde edilebilir ve öğrencilerin eylemleri, problem çözerken kullanılan yola ve kanıtın problem çözmedeki rolü ile ilgili inançlarına göre şekillendiğinden, öğrencilerin problem çözme performansları sadece bilişsel açıdan değil, inançlar düzeyinde duyuşsal açıdan da incelenmelidir.

McLeod (1992) matematik eğitiminde duyuşsal konularla ilgili çalışmalardan yola çıkarak, duyuşsal alanı inançlar, tutumlar ve duygular olarak üçe ayırmıştır. Tutumların ve inançların genellikle sabit ama duyguların değişken olduklarını ve bu üçünün bilişsel yönlerinin olduğunu ancak duyguların uzun sürede oluşan inançlar ve tutumlara göre daha az bilişsel olup aniden ortaya çıkıp yok olabileceklerini belirtmiştir. McLeod (1992)'a göre, matematik eğitimi araştırmalarında üzerinde fazla durulmayan duyuşsal alana yönelik çalışmaların, bilişsel çalışmalarla bütünleştirilmesi hem bilişsel hem duyuşsal alana katkıda bulunacaktır. Duyuşsal alanla ilgili araştırmaların, bilişsel alanla ilgili araştırmacıları etkileyebilmesi ve bu alandaki bilgilerin öğretimde etkili olması ancak duyuşsal ve bilişsel araştırmaların bütünleştirilmesi ile olabilecektir. McLeod (1992) öğrenme ve öğretmedeki duyuşsal etkenlerin sosyal bağlamdan etkileneceğini ve bu etkenlerin ortaya çıkarılması için klinik görüşmeler, ayrıntılı gözlemlerle yapılacak çalışmaların daha derinlemesine anlamayı sağlamada önemli olabileceğini ifade etmiştir.

Matematik eğitiminde duyuşsal alanla ilgili çalışmalar yapan araştırmacılardan Goldin (2000) de, duyguların, başarı ve başarısızlığın nedeni olan yeterlilikler üzerindeki etkisine dikkati çekmiş ve bireylerin matematik yapmaları sırasında, duyuşsal sistemin bilişsel sistemin merkezinde olduğunu vurgulamıştır. Goldin (2000), matematiksel problem çözme yetkinliği için bir model önermiş ve bu modelde duyuşsal gösterim sistemi ile bilişsel gösterimi birleştirmiştir. Modelindeki duyuşsal gösterim sistemini, uzun sürede oluşan ve genellikle sabit duyuşsal özelliklere değil, problem çözme sürecinde hızla değişebilen yerel duyuşa yani kişinin duygusal durumuna yönelik olarak oluşturmuştur. Bu modele göre, problem çözme sürecinde kişinin duygusal durumu, biri olumlu biri olumsuz sonuca götüren iki farklı yoldan ilerleyebilir ve problem çözücü, duygusal durumuna göre planlama yaparak buluşsal stratejilerini seçebilir. Goldin (2000), problem çözme sürecinde kişinin duyuşsal durumu ile buluşsal stratejileri kullanmasının etkileşimini Şekil 2.2'deki modelde göstermiştir.



Şekil 2.2. Duyuşsal durumların buluşsal yapılanmalarla etkileşimi (Goldin, 2000)

Bu modele göre hislerin başlangıcı *meraktır* ve eğer problem, çözecek kişi için yeterince derinliğe sahipse bunu *bilinmezlik (puzzlement)* hissi takip eder. Bu hissin olumsuz bir çağrışımı yoktur ama onu takip eden *şaşkınlık (bewilderment),* problemle ilgili kafa karışıklığı ve ipin ucunu kaçırma hissi gibi, uyumsuzluk içeren olumsuz bir duygu olabilir. Okullardaki problem çözme etkinliği bazen bu aşamada durur ve öğretmen yönerge vermek için araya girer. Buna rağmen, problem çözme bağımsız olarak devam ederse, süreçte algılanan yetersizlik, olumsuz duyuşun daha güçlü ve daha belirgin hale geldiği *hüsran (frustration)* ile sonuçlanır. Ancak hala problem çözücüyü olumlu duyuşun baskın olduğu sıraya götürebilecek yeni bir yaklaşım olasılığı vardır. *Teşviki (encouragement),* problemin çözülmeye başlamasıyla birlikte *memnuniyet (pleasure),* kavramanın gerçekleşmesi ile *gurur (elation),* problemin iyi çözülmüş olması hissi ve gerçekleşen öğrenmeyle *tatmin (satisfaction)* takip eder (Goldin, 2000).

Bir başka durum da çözümlenemeyen hüsranın, *kaygıya (anxiety)* yol açabilmesidir. Özellikle problemi çözmedeki başarısızlığın olumsuzluklarla sonuçlanacağı düşüncesi, dışsal kaynaklı (öğretmenin onaylamaması veya düşük puan) ya da tamamen içsel olan kötü sonuçlar, buna neden olabilir. Bu şekilde negatif duyuşun gelişmesiyle, *korku (fear)* ve *umutsuzlukla (despair)* karşılaşılır. Goldin (2000) problem çözme sürecindeki duygusal durumları ve etkileşimlerini, şu şekilde açıklamıştır:

Merak: Merak duygusu, uygulamaya dönük (ulaşılacak hedefi bazı başka amaçlar için kullanma isteği) veya otoriteye dayalı (öğretmenin yönergelerini takip etme gerekliliği veya bir sınavı geçme) olan, diğer olası güdüleyicilerle karşıttır. Merakın olmadığı diğer güdüleyiciler, kişide daha çok hedef odaklı ve algoritmik süreçler ortaya çıkarabilir. Merak duygusu, kişiyi açıklayıcı ve problemi tanımlayıcı buluşsal stratejilere yönlendirir ve durumu sorgulama, örüntüyü genelleştirmeye çalışma, yeni amaçlar yaratma, problemler üretme gibi sonuçlara neden olabilir.

Bilinmezlik: Bilinmezlik duygusu, beklenmeyen bir gerçek, çelişen bir bilgi ya da yanıtlanmayan bir soruyu yanıtlama ihtiyacı durumunu kodlayabilir. Bu duygu yetkin bir problem çözücüde özel durumları deneme, daha basit bir problemi düşünme, şekil çizme gibi stratejileri harekete geçirebilir. Bu tür belli buluşsal süreçlerin kullanılması, problemi daha iyi anlamayı sağlar ve problem çözücüyü cesaret hatta gurur durumuna taşıyarak bu duygunun etkisini yatıştırır.

Şaşkınlık: Bu durum, problemde nasıl ilerleneceğinin çözümlenmemiş yönlerini belirtebilir ve problemi anlamadaki bazı yanlışları ya da daha özel olarak problem durumla ilgili kişinin sahip olduğu görsel temsilinin yetersizliğini kodlayabilir. Şaşkınlık, bilinmezlik duygusunda olduğu gibi problemi anlamak için daha ileri buluşsal stratejileri ya da bir algoritmanın kullanılması gibi eski ve güvenilir problem çözme yöntemlerini harekete geçirebilir.

Hüsran: Hevesin kırılması ve hüsran, ilerleyememe durumunu kodlar ve bu hisler, sürecin tekrar tekrar denenmesi sonucunda, başarı elde edilememesini veya çok az yeni anlama oluşmasını akla getirir. Buna rağmen hüsran, olumsuz bir problem çözme çıktısı olmayabilir ve yeniden başlama, yeni bir yaklaşıma yol açma, daha basit bir problemi deneme gibi kullanışlı birçok buluşsal sürecin harekete geçmesine yol açabilir.

Kaygı, korku ve umutsuzluk: Hüsrandan bu durumlara geçilmesiyle can sıkıcı duyuş, buluşsal stratejileri harekete geçirmeye devam edebilir. Olumsuz duygular yaşayan kişi rahatsız edici durumdan kurtulmak ve kaygıyı azaltmak için otoriteye dayalı problem çözmeye yönelebilir, istenilen yanıtı tahmin etmeye çalışabilir ve ezbere açıktır. Bu noktada yardım edilirse öğrenci matematiği anlamayı umursamadan gösterilen prosedürü taklit etmeyi seçebilir. Bu duygusal durumda kişi, problem çözmeden kaçınma veya yetersizlikleri kendine yükleme gibi güçlü savunma mekanizmaları geliştirebilir. Kişi akıl yürütmeden, bir yanıt tahmininde bulunabilir ve tahmini açıklaması istendiğinde, işlem veya tahmin yanlış olmalı diye düşünüp başka bir yanıt önerir.

Teşvik ve memnuniyet: Kısmi başarıyı takip eden teşvik, başarılı yöntemin uygulanmasına devam edilmesine ve kararlılığın yenilenmesine yol açabilir. Teşvik hissi, yöntem çalıştıkça memnuniyete dönüşür ve başarılı olan yöntem, bir otoritenin değil, problemi çözen kişinin kendi yöntemiyse memnuniyet artar.

Gurur ve tatmin: Gurur duygusu ilerlemeyi ya da ilerleme kaydedildiği inancını kodlayabilir ve gurura yol açan yeni bilişsel gösterimler yardımıyla geriye dönük uğraşarak, problemi baştan inceleyerek yeni yorumlar arayan süreçleri harekete geçirmede etkili olabilir. Tatmin ise problemin çözümlenmesi gerçeğini, çözüm sürecinin geriye dönük olumlu değerlendirmesini ve/veya problem çözücünün yeni bir şeyler öğrendiği hissini kodlayabilir.

Goldin (2000), kişinin problem çözmede izleyeceği yola bağlı olarak sonuçta daha genel ve kalıcı, iyi veya kötü bir problem çözücü olmasına yönelik inanç, problem sunulduğu zaman başarılı veya başarısız olacağına dair beklenti gibi benlik kavramına ilişkin yapılar oluşturacağını belirtmiştir. Bu yapıların olumlu ya da olumsuz olmasının, sürecin memnuniyet, gurur ve tatmin gibi olumlu ve istenen ya da kaygı, korku ve umutsuzluk gibi istenmeyen, olumsuz duyuşsal durumlarla sonuçlanmasını etkileyeceğini öne sürmüştür.

Weber (2008) çalışmasında, Goldin'in tanımlarından hüsran, teşvik ve memnuniyet, kaygı ve umutsuzluk durumlarını ele almış ve duyuşsal durumun, bir öğrencinin reel analiz dersindeki başarı veya başarısızlığında nasıl bir yol oynadığını göstermiştir. Bu çalışmada, gözlenen öğrencinin yaşadığı korku ve kaygı, ezbere yönelmesine ve dersle ilgili materyallerle uğraşmaktan kaçınmasına yol açmış; küçük kazanımlarının yarattığı memnuniyet ve teşvik de daha çok çalışması için güdülemiştir.

Selden vd. (2008c), matematik eğitiminde duyuşsal faktörlerle ilgili tartışmaların, *duygusal olmayan bilişsel hisleri (non-emotional cognitive feelings)* içine alacak biçimde genişletilmesi gerektiğini savunmuşlardır. Selden vd. (2008b) duyuşun, inançlar, değerler, tutumlar, duygular ve hisler olarak beş temel yönü olduğunu kabul etmiş ve bunların bilişle ilgili bilgi sağlayabileceklerini belirtmişlerdir. Duygular ile hislerin, birinin daha genel, diğerinin daha özel olması bakımından ayrı olduklarını; duyguların fiziksel olarak somutlaşabileceğini ancak hislerin zihinsel durumlar olduğunu kabul etmişlerdir. Selden vd. (2008c) duygusal olmayan bilişsel hisleri, mesela kanıt oluştururken doğru yolda olma hissi, bilişsel sürecin bir parçası olarak görmüş ve bunların kanıtlama süreciyle etkileşimini incelemişlerdir.

Selden vd. (2008a) kalıcı zihinsel yapı olarak tanımladıkları davranışsal şemaları, kanıtlama sürecindeki durumları zihinsel eylemlere bağlayan prosedürel bilginin bir çeşidi olarak açıklamış ve tekrarlanan benzer kanıt yazma deneyimleri ile edinilebileceklerini ifade etmişlerdir. Hislerin bu davranışsal şemaların uygulanması ile ilişkilerini incelemiş, bu ilişkinin daha ayrıntılı araştırılmasının öğrencilerin teoremleri kanıtlamayı öğrenmelerine yardımcı olmada faydalı olacağını belirtmişlerdir (Selden et al., 2008b).

Görüldüğü gibi çalışmalar, matematik öğrenme ve öğretmede duyuşsal etkenlerin önemini, araştırmalarda duyuşsal alana ilişkin konuların da ele alınması gerektiğini vurgulamaktadır. Özellikle son yıllarda duyuşsal konuların, kanıtlara yaklaşım ve kanıtlama süreciyle ilişkisini ortaya çıkarmaya yönelik araştırmalarda bir artış gözlenmektedir. Bu araştırmalardan elde edilen sonuçlara göre, duyuşsal etkenlerin kanıt öğretimine nasıl katkı sağlayacağının belirlenmesi amaçlanmaktadır. Bu tez çalışmasının da bu alana katkı sağlayacağı düşünülmektedir. Çalışmada, görüşme, gözlem ve video kayıtlarından elde edilen verilerin duyuşsal boyuta yönelik analizlerinde, Goldin (2000)'in önerdiği model ve yapılar temel alınmıştır.

2.6. Grup Çalışmaları ve Sosyal Etkileşim

Sosyal etkileşimin matematik öğrenme ve öğretme sürecine katkısı, sınıf ortamında etkileşimin nasıl sağlanacağı araştırmacıların yanıt aradığı sorulardandır. Vygotsky, sosyal etkileşimlerin gücünü vurgulamış ve öğrencilerin daha yetkin bir akranla çalışmaları durumunda, öğrenmenin ve sosyo-bilişsel gelişimin sağlanacağını öne sürmüştür (César, 1998). Vygotsky'nin tanımladığı yakınsal gelişim alanı, kişinin bağımsız problem çözmesiyle belirlenen gerçek gelişimsel düzeyi ile bir yetişkin rehberliğinde ya da daha yetkin bir akranla işbirliğiyle problem çözerek çıkabileceği potansiyel gelişim düzeyi arasındaki farktır (Powell, 2006). Ancak yapılan çalışmalarda, akran etkileşimlerinin sanıldığından daha güçlü olduğu ve etkileşime giren öğrencilerden birinin daha yetkin olmaması durumunda bile etkili olabildiği (César, 1998); özellikle küçük grup tartışması şeklindeki etkileşimlerin birçok öğrenme fırsatı sunduğu belirtilmektedir (Yackel et al.,1991; Cobb & Whitenack, 1996; Weber et al., 2008). Powell (2006)'ın çalışmasında, öğrencilerin tartışmaları sırasında, birinin yetkin olduğu kavram ve konuların ötesine geçebilecekleri, biri diğerine destekleyici olmadan ortaklaşa fikirler üretme ve akıl yürütmeyi içeren etkileşimlerle tartışan öğrencilerden herhangi birine atfedilemeyecek ürünler ortaya çıkabileceği vurgulanmış ve sosyal olarak ortaya çıkan biliş kavramına işaret edilmiştir. Öğrencilere, etkileşimli ortamların nasıl sağlanabileceği ve tartışmaların hangi kapsamda gerçekleşeceği, araştırılması gereken konulardandır.

Tartışmalar, öğrencilerin fikirlerini test etmelerine, diğerlerinin fikirlerini duyup bunları bütünleştirmelerine, düşündüklerini söze dökmelerine ve anahtar kavramların daha derin anlamalarını oluşturmalarına olanak vermektedir (McCrone, 2005). Küçük gruplardaki tartışmalar, öğrencilerin sadece bilgi kazanmalarını sağlamakla kalmayıp, tutumlarını değiştirmelerinde ve yeni davranışlar kazanmalarında da etkili olabilmektedir (Huber, 2003). Akran gruplarıyla etkileşim, öğrencilerin matematiğe karşı olumlu tutum kazanmalarını desteklemekte, performanslarını arttırmalarını sağlayarak okul başarısını teşvik etmektedir (César, 1998).

Matematik öğretiminde sosyal etkileşim ve grup tartışmalarının öğrenmeye katkısı ile ilgili çalışmaların yanında son yıllarda, kanıt öğretiminde etkileşim ve tartışmanın nasıl kullanılabileceği, araştırmaların konusu olmaya başlamıştır. Kanıtın sosyal boyutu olan bir kavram olması (Weber, 2003; 2005; Harel & Sowder, 2007; Heinze & Reiss, 2009), kanıt öğrenme ve öğretmeyi sosyal bir süreç olarak anlamanın gerekliliğini ortaya çıkarmaktadır (Blanton et al., 2009). Kanıtlama sürecinde, tartışmaların yarattığı öğrenme fırsatlarını inceleyen Weber vd. (2008), grup tartışmalarının, öğrencilerin iddialarını ve bir argümanın doğru olup olmadığına karar verirken kullandıkları kriterleri net bir biçimde ifade etmelerini gerektireceği için, öğrenmeyi kolaylaştırabileceğini ileri sürmüşlerdir. Çalışmalarında, öğrencilerin birbirlerini açıklama yapmaya davet etmelerinin, belli bir argümantasyon yönteminin uygun olup olmadığını tartışmaları konusunda onları teşvik ettiğini ve akıl yürütmeleri uygunsa doğrulamalarını, yanlışsa bunu düzeltmelerini sağlayacak ortamlar yarattığını belirtmişlerdir.

Öğrencilere kanıtlarla uğraşma fırsatının verilmediği ortamlarda, öğretmenin hazır kanıtları sunması şeklinde yapılan öğretimin etkili olmadığı, öğrencilerin kanıtları anlamalarına ve kanıtlama becerilerinin gelişmesine katkı sağlamadığı yapılan birçok çalışmada vurgulanmaktadır (Alibert & Thomas, 1991; Ferrari, 2004; Selden & Selden, 2009). Bu şekildeki öğretimin sonucu olarak öğrenciler, matematiği ezberlenmesi gereken kuralların ve sınavlarda belli tipteki problemleri çözmede kullanılan prosedürlerin toplamı olarak görmekte ve matematik, öğretmenin yaptıklarının taklit edilmesine dönüşmektedir (Jones,1997; Crawford et al., 1994; Lithner, 1998; 2000; Alcock & Simpson, 2005; Kannemeyer, 2005; Vinner, 2007) Ancak araştırmalar, öğrencilerin kanıtlama becerilerinin gelişmesi ve kanıt yazmayı öğrenmeleri için onlara derslerde, kanıt oluşturma ve kanıtlama deneyimi yaşama şansı verilmesi gerektiğini vurgulamaktadır (Mahavier, 1999; Knapp, 2005). Öğrencilerde kanıtlama becerisinin gelişmesinde, öğretmen tarafından yönetilen sosyal etkileşimin, kanıtla ilgili yeni kurallar öğrenmede hızlandırıcı etki yapacağı (Almeida, 2001), matematiksel gelişme sürecinde etkileşimin katalizör olarak görülebileceği ifade edilmektedir (Cobb & Yackel, 1996). Harel vd. (2006) de, kanıt öğretimi için yapılacak çalışmalarda öğrencilerin kanıt oluşturmayla uğraşmalarını sağlamak ve bu süreçte onlara Sokratik tarzda sorular sormak gibi bir yaklaşım önermişler ve birkaç sınıf buluşmasında grupların çalışmalarının kaydedilip öğrencilerin başlangıçtaki ve sonraki kanıt oluşturma girişimleri arasındaki ilişkinin ve müdahalenin etkisinin incelenebileceğini belirtmişledir.

Bütün bu araştırmaların dikkat çektiği durumlar ve ortaya çıkardıkları sonuçlar temel alınarak, bu araştırmada öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmaları, araştırmacı/öğretmen gözetiminde öğrencilerin kanıtlarla uğraştıkları, kanıtlama deneyimi yaşadıkları ve birbirleriyle tartışarak sosyal etkileşimde bulundukları bir ortamda gerçekleştirilmiştir.

3. YÖNTEM

Bu bölümde araştırma yöntemi, araştırmanın katılımcıları, verilerin toplanması ve verilerin analizi ile ilgili bilgiler verilecektir. Çalışma nitel olarak tasarlanmış ve verilerin toplanması ve analiz edilmesi süreçlerinde nitel yöntemler kullanılmıştır.

Nitel araştırmalar, bireylerin davranışlarının nedenlerini, nasıl düşündüklerini, süreç boyunca düşünce ve davranışlarının nasıl şekillendiğini incelemede nicel araştırmalara göre daha fazla fırsat sunmaktadır. Çünkü nitel yöntemler, araştırmacının olguları değiştirmeye çalışmadan doğal ortamında inceleyerek, konuları derinlemesine ve ayrıntılarıyla çalışmasını kolaylaştırmaktadır (Patton, 2002).

Bogdan ve Biklen (1982) nitel araştırmaların beş temel özelliğini şu şekilde açıklamışlardır:

1) *Nitel araştırmalarda doğal ortam doğrudan veri kaynağıdır ve araştırmacı anahtar enstrümandır*. Araştırmacı bağlamla ilgilendiği için çalışmak amacıyla ortamda bulunur ve topladığı verileri bağlam içerisinde değerlendirir. Mesela nitel araştırmacılar için sınıftaki etkileşimin kaydedilmesiyle veya görüşmelerle toplanan veriler, içinde gerçekleştiği ortamdan önemli ölçüde etkilenmektedir.

2) *Nitel araştırma betimleyicidir.* Veriler sayılar şeklinde değil sözcükler ve resimlerle toplanır. Araştırmanın yazılı sonuçları, sunumu tanımlamaya ve desteklemeye yönelik olarak, verilerden yapılan doğrudan alıntıları içerir.

3) *Nitel araştırmacılar çıktılar ve ürünlerle uğraşmak yerine süreçle meşgul olurlar.* Eğitim araştırmalarında bu durum, öğrencilerin ortaya çıkardıkları ürünlerden çok, düşüncelerini ve davranışlarını açıklamaya ve bunları oluşturan etkenleri tanımlamaya yönelik olarak sürecin incelenmesi olarak düşünülebilir.

4) *Nitel araştırmacılar verilerini tümevarımsal olarak analiz etme eğilimindedirler.* Nitel araştırmalarda, çalışmaya başlamadan önce belirlenen hipotezleri kanıtlamaya veya çürütmeye yönelik veri ya da delil toplanmaz. Nitel araştırma sürecinde çalışma, veri toplama sürecinde katılımcılarla zaman geçirdikten sonra tam olarak şekillenir. Bu süreç, bilinen bir resmin parçalarını birleştirmek şeklinde değil, veriler toplanıp parçalar denendikçe ortaya çıkan bir resmin oluşturulması gibidir.

5) *Anlam nitel yaklaşımın temel uğraşıdır.* Nitel araştırmacılar, katılımcıların bakış açılarını ve deneyimlerini nasıl değerlendirdiklerini önemserler, onların söylediklerinin ne anlama geldiğini yorumlamaya çalışırlar.

Nitel çalışmalarda nesnellikten çok bakış açısı ön plana çıkmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu bakımdan ele alındığında, araştırmada sonuçlardan çok, sürecin tüm değişkenler ve bunlar arasındaki ilişkiler temel alınarak ayrıntılarıyla betimlenmesi önem kazanmaktadır.

Peshkin (1993) de nitel araştırmaların çıktılarının dört kategoriye ayrılabileceğini belirtmiş ve bunları betimleme, yorumlama, doğrulama ve değerlendirme olarak açıklamıştır. Bu kategorilerden en çok betimleme ve yorumlamaya vurgu yapmış ve yorumlamanın sadece yeni kavramlar yaratmak olmadığını var olanları da incelemeyi içerdiğini ifade etmiştir.

Bu çalışmada da, öğrencilerin kanıtlama süreçleri bilişsel ve duyuşsal boyutlarıyla ele alınmış, sosyal etkileşimin ve öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşamalarının sağlandığı bir ortamda, kanıtlama becerilerinin ve kanıtlara yaklaşımlarının nasıl değişme gösterdiği ayrıntılı bir şekilde incelenmiş ve yorumlanmaya çalışılmıştır. Bu nedenle araştırma sürecinde, çalışmanın amacına ve araştırma sorularının yanıtlanmasına uygun olduğu düşünülen nitel yöntemler benimsenmiş ve matematik eğitimi araştırmalarında son yıllarda sıklıkla kullanılan öğretme deneyi yöntemi uygulanmıştır.

3.1. Öğretme Deneyi

Öğretme deneyi yöntemi, matematik eğitimcisi Steffe tarafından, Piaget'in klinik görüşmelerinden yola çıkarak geliştirilmiştir (Steffe, 1983; Steffe & D'Ambrosio, 1996). Öğretme deneyi, öğrencilerin matematik bilgilerini etkileme yolları ve araçlarıyla deney yapmayı içerdiğinden klinik görüşmeden daha fazla şey ifade etmektedir (Steffe & Thompson, 2000). Klinik görüşmeler, öğrencilerin mevcut bilgilerini anlamayı amaçlar, öğretme deneyi ise öğrencilerin süreç boyunca ilerlemelerini anlamaya yöneliktir (Steffe &Thompson, 2000). Öğretme deneyi, bir dizi öğretme olayı ve uzun süreli görüşmelerden oluşur (Cobb & Steffe, 1983). Öğretme olayları, öğretmen/araştırmacı, incelenen öğrenciler ve öğretme olayı süresince yapılan kayıtları içerir ve bu kayıtlar öğretme deneyinin geçmişe dönük analizinin yapılmasında kullanılır (Steffe & Thompson,2000).

Cobb ve Steffe (1983)'e göre, öğrencilerin matematiksel bilgiyi oluşturma süreçlerini keşfetmek, öğretimi de içermelidir. Öğretme deneyinde araştırmacı aynı zamanda öğretmendir ve öğretmen/araştırmacı ile katılımcılar arasında uzun süreli etkileşim söz konusudur. Araştırmacı ve öğretmen arasındaki tek fark, öğretme deneyinde, araştırmacının daha az sayıda öğrenci ile etkileşime girmesi ve onların davranışlarını anlamak için daha çok zamanı ve fırsatı olmasıdır (Cobb & Steffe, 1983).

Öğretme deneyindeki öğretme etkinlikleri, öğrencilerle etkileşim bağlamında gerçekleşir. Öğrencilere, nasıl davranılacağı ve nasıl soru sorulacağındaki ince ayrıntılar, bir öğretme deneyi yürütmede en önemli konulardır. Öğretme olayında klinik görüşmede olduğu gibi odak noktası öğrencilerin akıl yürütmesidir. Öğretme deneyindeki öğretme, araştırmacının, öğrencilerin matematiksel düşünmelerini ve düşünmelerindeki değişiklikleri öğrenmesinin önemli olduğu bir bilimsel inceleme yöntemi gibi düşünülebilir (Steffe & Thompson, 2000). Öğretmen/araştırmacının amacı hiçbir zaman öğrencilere tek bir problemin çözümünü öğretmek değildir, buna rağmen öğrencilere, onlar için problem olabilecek durumlar sunulur. Burada önemli olan öğrencilerin şemaları nasıl özümsediklerini ve bu şemaların, öğrencilerin matematiksel aktiviteleri sonucunda nasıl değişebildiğini anlamaktır (Steffe & Thompson, 2000).

Öğretme deneyleri bir veya birden fazla öğrenci ile gerçekleştirilebilir (Brown, 2003). Birden fazla öğrenci ile gerçekleştirilen öğretme deneyleri sınıf ortamının taklit edilmesi gibidir (Engelhardt et al., 2004). Bir öğrenci ile gerçekleştirilen öğretme deneyleri, öncelikle eğitimsel değişiklikleri değil, öğrencinin nasıl öğrendiğini amaçlamaktadır. Öğretme deneyleri, öğretmenlere öğretime ilişkin öneriler sunmak amacıyla, araştırmacının bir süreliğine öğretim sorumluluğunu aldığı daha üretken sınıf ortamlarının oluşturulması şeklinde olan sınıf öğretme deneylerine dönüşmüştür (Gravemeijer & Cobb, 2006). Bu tür öğretme deneyi çalışmalarında veriler genelde niteldir ve klinik görüşmeler, gözlemler, öğretme olaylarının kayıtları bu nitel verileri oluşturur (Knuth & Eliot, 1997). Matematik eğitiminde son yıllarda, yöntemlerde anketlere dayalı nicel sonuçları tartışan araştırmaların azaldığı ve öğretme deneylerine yönelik nitel analizlerin arttığı görülmektedir (Mariotti, 2006).

Bu araştırmada da öğretme deneyi yöntemi uygulanmış, veriler çalışmanın başında ve sonunda gerçekleştirilen bireysel görüşmeler ve öğretme olayları süresince yapılan kayıtlarla toplanmıştır. Çalışmadaki öğretme deneyinde, öğrencilere yeni bir kavram öğretilmemiştir. Öğretme olayları süresince, aktif oldukları bir sınıf ortamında, birbirleriyle etkileşimin kanıtlama süreçlerini ve kanıtlara yaklaşımlarını bilişsel ve duyuşsal yönden nasıl etkilediği incelenmiştir.

3.2. Katılımcılar

Çalışma, Ankara'daki bir devlet üniversitesinin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda, 2008-2009 öğretim yılı bahar döneminde, dördüncü sınıf öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin öğrenimlerinin 3,5 yılını tamamlamış, dolayısıyla matematikle ilgili alan derslerini almış ve alan eğitimi derslerine devam etmekte olan öğretmen adayları olmasına dikkat edilmiştir. Katılımcıların belirlenmesi amacıyla, 25 öğretmen adayına araştırmacı tarafından hazırlanmış olan ölçme aracı (Bkz. Ek.1) sınıf ortamında, ders saati içinde uygulanmıştır. Çalışmanın, alan derslerini tamamlamış oldukları için, 4. sınıf öğrencileriyle yürütülmesi düşünülmüştür. Bu nedenle yazılı uygulamaya katılan 3. ve 5. sınıf öğrencileri elenmiş, 4. sınıfa devam etmekte olan 17 öğrenci arasından altısı, ölçme aracına verdikleri yanıtlar ve araştırmacının görüşleri göz önünde bulundurularak, öğretme deneyine katılmak üzere belirlenmiştir.

Araştırmacı, aynı zamanda öğrencilerin devam etmekte olduğu bir dersin sorumlusu olduğundan, öğrencileri tanımaktadır ve katılımcıların, kendini ifade edebilen ve çalışma için gönüllü olacağı düşünülen öğrenciler olmasına dikkat etmiştir. Çalışma, ders saatleri dışında gerçekleştirildiğinden, sürekliliğin ve öğrencilerin aktif katılımının sağlanması açısından gönüllü olmalarına önem verilmiştir. Ayrıca yürütülecek öğretme deneyindeki sınıf çalışmalarında, heterojen grupların oluşturulması planlandığından ölçme aracına verdikleri yanıtlara göre matematiksel kanıtla ilgili farklı bilgi ve beceri düzeyindeki öğrenciler seçilmiştir. Uygulanan ölçme aracı farklı türde sorular içerdiğinden öğrencilerin doğrudan bir sıralaması yapılmamış ancak verdikleri yanıtlara göre genel bir değerlendirme yapılmıştır. Bu değerlendirmeye göre, kanıt yöntemlerini tanıdığı ve mantıksal soruları yanıtladığı halde geçerli kanıtlar oluşturamayan, geçerli kanıtlar oluşturan ancak mantık bilgisine ve kanıt yöntemlerine ilişkin sorulara tutarsız yanıtlar veren, soruların büyük kısmını yanlış yanıtlayan veya sorulara genel olarak doğru yanıtlar veren öğrenciler belirlenmiştir. Alan yazındaki araştırmaların (Selden & Selden, 2007b) önerileri göz önünde bulundurularak ve nitel verilerin analizindeki zorluklar düşünülerek çalışma altı katılımcıyla sınırlandırılmıştır. Katılımcıların çalışmanın gerçekleştirildiği dönemdeki genel akademik ortalamaları ve kanıtla ne zaman karşılaştıkları bilgisi Çizelge 3.1'de yer almaktadır.

Çizelge 3.1. Katılımcılara ilişkin bilgiler

Katılımcı (Rumuz)	**Akademik ortalama (4 üzerinden)**	**Kanıtla ilk karşılaşma**
Emre	2.19	Üniversite
Pelin	2.33	Üniversite
Veli	2.97	Üniversite
Derya	3.20	Lise
Cem	3.40	Lise
Melis	3.07	Üniversite

3.3. Verilerin Toplanması

Araştırmanın verilerini, çalışmanın başında yazılı olarak uygulanan ölçme aracına öğrencilerin verdikleri yanıtlar, öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmalarıyla, öğretme olayları öncesinde ve sonrasında yapılan bireysel görüşmelerin ses ve video kayıtları, öğrencilerin çalışma kağıtları, öğrencilerin çalışma sonunda yazılı olarak toplanan görüşleri ve araştırmacının gözlem notları oluşturmaktadır. Veriler, yazılı uygulama, birinci bireysel görüşmeler, ikinci bireysel görüşmeler, öğretme olayları (sınıf çalışmaları) ve son bireysel görüşmeler şeklindeki sırayla dört aşamada toplanmıştır.

Öğrencilerin matematiksel etkinliklerini daha kapsamlı incelemek, nasıl düşündükleri hakkında doğru yargıya varmak için çeşitli veri kaynaklarından yararlanılması önerilmektedir. Video kayıtlarının öğrencilerin yazılı çalışmaları ile desteklenmesi gerektiği (Pirie, 1996), gözlemler, görüşmeler ve öğretme deneyleri ile birleştirilebileceği (Lesh & Lehrer, 2000) belirtilmektedir. Nitel araştırmalarda, görüşme, gözlem ve doküman analizi gibi farklı yöntemlerle elde edilen verilerin birbirlerini teyit amacıyla kullanılması inandırıcılığı; farklı veri kaynakları, farklı veri toplama araçları ve analiz yöntemleri kullanılarak yapılan çeşitleme de sonuçların geçerliğini ve güvenirliğini arttırmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu araştırmada da yazılı dokümanlarla, görüşmelerle ve video kayıtlarıyla, farklı veri toplama yöntemlerinden yararlanılarak veri çeşitlemesi yapılmış ve çalışmanın inandırıcılığını arttırmak, geçerlik ve güvenirliği sağlamak amaçlanmıştır.

İlk aşamada, araştırmacı tarafından hazırlanan “Matematiksel Kanıtları Anlama ve Kanıtlama Becerisini Ölçme Aracı” (Ek.1), çalışmanın katılımcılarını belirlemeye ve öğrencilerin kanıtla ilgili mevcut bilgi ve becerilerini ortaya çıkarmaya yönelik olarak 25 öğrenciye uygulanmıştır. Ölçme aracına verilen yanıtlar ayrıntılı bir şekilde incelenip değerlendirildikten sonra, farklı bilgi ve beceri düzeyindeki gönüllü altı öğrenci araştırma sürecinde yer almıştır.

Ölçme aracının uygulanmasından iki hafta sonra öğrencilerle birinci bireysel görüşmeler yapılmıştır. Bu ilk görüşmelerin ardından ikinci bireysel görüşmeler yapılmış ve sonrasında 5 hafta boyunca süren sınıf çalışmaları gerçekleştirilmiştir. Sınıf çalışmalarının tamamlanmasından sonra her öğrenciyle son bireysel görüşmeler yapılmıştır. Verilerin hangi tarihlerde toplandığı ve her bir uygulamanın ne kadar sürede tamamlandığı Çizelge 3.2’de özetlenmiştir.

Çizelge 3.2. Verilerin toplanma süreci

Veri Toplama Süreci	**Tarih**	**Süre**
Yazılı Uygulama	3 Mart 2009	70-95 dk.
1. Bireysel Görüşmeler	19-24 Mart 2009	24-63 dk.
2. Bireysel Görüşmeler	26-31 Mart 2009	24-55 dk.
1.Hafta Sınıf Çalışması	2 Nisan 2009	95 dk.
2.Hafta Sınıf Çalışması	16 Nisan 2009	85 dk.
3.Hafta Sınıf Çalışması	21 Nisan 2009	85 dk.
4.Hafta Sınıf Çalışması	30 Nisan 2009	90 dk.
5.Hafta Sınıf Çalışması	7 Mayıs 2009	95 dk.
Son Bireysel Görüşmeler	12-20 Mayıs 2009	21-90 dk.

Her bir katılımcıyla yapılan bireysel görüşmeler, süre sınırlaması yapılmadan gerçekleştirildiğinden, katılımcının durumuna göre farklı sürelerde tamamlanmıştır. Katılımcıların görüşme süreleri Çizelge 3.3’de verilmektedir.

Çizelge 3.3. Katılımcıların bireysel görüşme süreleri

	Emre	Pelin	Veli	Derya	Cem	Melis
1.Görüşme	57 dk.	59 dk.	56 dk.	63 dk.	40 dk.	24 dk.
2.Görüşme	34 dk.	55 dk.	34 dk.	24 dk.	42 dk.	32 dk.
Son Görüşme	90 dk.	90 dk.	57 dk.	46 dk.	20 dk.	23 dk.

3.3.1. Ölçme aracının hazırlanması ve uygulanması

Çalışmanın başında öğrencilere, araştırmacı tarafından hazırlanan ve üç bölümden oluşan ölçme aracı yazılı olarak uygulanmıştır. Ölçme aracının birinci bölümünde öğrencilerin sınıf, akademik ortalama gibi kişisel bilgileri sorulmuş, ayrıca öğrenim gördükleri programdaki tüm matematik derslerinin bir listesi verilerek alıp başarılı oldukları dersleri belirtmeleri istenmiştir. İkinci bölümde ise *"Matematiksel kanıt size ne ifade ediyor?"*, "*Bildiğiniz kanıt yöntemlerini yazınız ve nasıl uygulandıklarını kısaca açıklayınız.*", *"Kanıt yapma ve kanıtları anlamada güçlük yaşıyor musunuz? Eğer yaşıyorsanız bu güçlükler nelerdir?"* şeklinde kanıtla ilgili görüşlerini ve kanıt kavramlarını belirlemeye yönelik üç soru sorulmuştur. Üçüncü bölümde ise öğrencilerin kanıtları anlamalarını ve kanıtlama becerilerini ortaya çıkarmaya yönelik 11 soru sorulmuştur. Veri toplama araçlarındaki farklı türdeki görevlerin, öğretmen adaylarının kanıtları anlamalarının ve kanıtlama becerilerinin farklı yönlerini açığa çıkarmaya yardımcı olacağı düşüncesiyle ölçme aracında farklı türdeki sorulara yer verilmiştir.

Soruların hazırlanmasından önce ilk olarak, bu alanda yapılmış olan çalışmalar taranmış ve deneyimli öğretim elemanlarının görüşleri alınmıştır. Bunların sonucunda, öğrencilerde kanıtlarla ilgili olarak sık karşılaşılan güçlükler, kanıtları anlama ve kanıtlamada gerekli olan bazı temel beceriler belirlenmiştir. Verilen bir önermede hipotez ve hükmü belirleme; önermenin değilini, tersini, karşıt tersini bulma ve bunların doğruluk değerlerini belirleme; verilen kanıtların geçerliliğini kontrol etme; olmayana ergi, karşıt ters ile kanıt ve doğrudan kanıt yöntemlerini tanıma ve koşullu önermeleri bu yöntemleri kullanarak kanıtlama, öğrencilerin sahip olması beklenen becerilerdir. Sorular, verecekleri yanıtlara göre, öğrencilerin bu becerilere sahip olup olmadıklarını belirleyecek ve varsa güçlüklerini, yanlış bilgilerini ortaya çıkaracak nitelikte olmasına dikkat edilerek hazırlanmış ve son olarak, amaca uygunlukları ve kullanılan matematiksel dil bakımından biri profesör ve ikisi yardımcı doçent olmak üzere alanda yetkin üç öğretim üyesi tarafından incelenmiştir. Ölçme aracı ilk önce, kullanılan dil bakımından anlaşılırlığı ve soruların yeterliliğini belirlemek üzere 35 son sınıf öğrencisine uygulanmış ve bu uygulamanın sonucunda, bazı düzeltmeler yapılıp üç soru daha eklenerek (12., 13. ve 14. sorular) son şeklini almıştır.

Ölçme aracının üçüncü bölümünde yer alan soruların amacı aşağıda açıklanmaktadır.

1. sorunun amacı, öğrencilerin, $P \Longrightarrow Q$ şeklindeki bir ifadeyi kanıtlamaya nasıl başlanabileceğinin farkında olup olmadıklarını yani bir koşullu önermeyi kanıtlamada kullanılabilecek üç kanıt yöntemini tanıyıp tanımadıklarını belirlemektir. Verilen seçeneklerden sadece üç tanesi doğru olup her biri sözü edilen yöntemlerden birinin ilk adımına işaret etmektedir. Öğrencilerin doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemlerinden her biri için hipotezin ne olması gerektiğini belirlemeleri beklenmektedir.

2. soru, verilen bir koşullu önermenin kanıtlanmasında, üç kanıt yöntemine göre hipotez ve hükmün belirlenmesine yönelik olarak öğrencilerin, önermenin kanıtında neyin varsayılıp neyin gösterilmesi gerektiğini ayırt edip edemediklerini belirlemek amacıyla sorulmuştur.

3. soruda öğrencilerden, olmayana ergi yöntemi ile yapılmış kanıtı anlayıp hangi ifadeyi kanıtladığını belirlemeleri yani verilen kanıttan formel teorem ifadesini oluşturmaları beklenmektedir.

4. soruda, kanıtlamanın mantıksal temelini oluşturan, bir ifadenin değili, karşıtı, karşıt tersi ve tersi olan ifadeleri belirleyebilme becerisinin ölçülmesi amaçlanmıştır.

5. ve 6. sorularda, öğrencilere birer önerme ve üçer alternatif kanıt verilmiştir. Öğrencilerin verilen alternatif kanıtların geçerliliğini belirlemeleri beklenmektedir. Bu sorularla, öğrencilerin üç kanıt yöntemini tanıyıp tanımadıklarının ve bir kanıtın geçerliliğini nasıl değerlendirdiklerinin belirlenmesi amaçlanmıştır.

7., 8. ve 9.sorular, öğrencilerin üç kanıt yöntemini kullanarak kanıt oluşturma becerilerini ölçmeyi amaçlamıştır. Her sorudaki koşullu önerme için belli bir kanıt yöntemine yönlendirme olması açısından kanıtın ilk adımı verilmiş ve öğrencilerin devamını getirmesi istenmiştir.

10. sorunun amacı, öğrencilerin matematiksel kanıtlama sürecindeki akıl yürütmelerini ortaya çıkarmak, izledikleri mantık zincirinin dayandığı temellerin farkında olup olmadıklarını belirlemektir. Bu amaçla verilen bir önermenin kanıtına başlanmış, kanıtlama süreci iki sütuna ayrılarak bir sütuna kanıtın adımlarını diğer tarafa da bu adımların ve geçişlerin gerekçelerini yazarak kanıtı tamamlamaları istenmiştir.

11. soruda, öğrencilerden verilen bir kanıtın doğruluğunu incelemeleri istenmiştir. Kanıtlama becerisinin yanında, öğrencilerin kanıtla ilgili anlamalarını değerlendirmede, verilen bir kanıtın geçerliğini incelemek de önemli bir akıl yürütmedir. Bu soruda öğrencilerin doğrudan kanıt yöntemiyle yapılmış bir kanıtı değerlendirmeleri, teoremdeki koşulların ve ilgili tanımların, kanıtın hangi aşamasında nasıl kullanıldığını fark etmeleri beklenmektedir.

12., 13. ve 14. sorularda, öğrencilere üç önerme verilerek bu önermelerin kanıtlarını oluşturmaları istenmiştir. Herhangi bir ipucu ya da yönlendirme olmadan öğrencilerin kanıt oluşturma süreçlerinin değerlendirilmesi, varsa güçlüklerinin belirlenmesi amaçlanmaktadır.

3.3.2. Ön bireysel görüşmeler

Öğrencilere ölçme aracının yazılı olarak uygulanmasından sonra kağıtlar ayrıntılı bir biçimde incelenmiş ve çalışmanın katılımcısı olarak altı öğrenci belirlenerek sınıf çalışmaları öncesinde görüşmeler yapılmıştır. Klinik görüşmelerde öğrencilerin var olan bilgilerini ortaya çıkarmak amaçlanır (Steffe & Thompson, 2000). Bu çalışmada da, öğretme olayları öncesinde, mevcut bilgi ve becerilerini belirlemeye yönelik olarak, öğrencilerle ikişer klinik görüşme yapılmıştır. İlk görüşmede amaç, "Matematiksel Kanıtları Anlama ve Kanıtlama Becerisini Ölçme Aracı" ile toplanan yazılı verileri daha açıklayıcı hale getirmektir. Ölçme aracında yer alan sorulara verilen yanıtları daha doğru yorumlamak için öğrencilere, soruları yanıtlarken nasıl düşündüklerini açığa çıkarmaya yönelik sorular yöneltilmiş ve yanıtlarının nedenlerini açıklamaları istenmiştir. Bu görüşmede öğrenciler, kendi yanıtlarını kontrol etmiş ve kimi zaman hatalarını fark ederek düzeltmişlerdir.

Ayrıca üç kanıt yöntemini de içeren soruları incelerken, bu yöntemlerin uygulanışını ve kanıtların nasıl yazıldığını inceleme fırsatı da elde etmişlerdir. Bu açıdan bu görüşmeler öğrencilerin öğrenme sürecine katkıda bulunmuştur.

İkinci görüşme iki bölümde gerçekleşmiştir. İlk bölümde öğrencilere, alan eğitimleri süresince aldıkları matematik derslerinin işlenişini, bu dersler kapsamındaki matematiksel kanıtları ve kişisel çalışma biçimlerini nasıl değerlendirdiklerini belirlemeye yönelik sorular (Bkz. Ek.2) sorulmuştur. Bu sorularla, öğrencileri daha iyi tanımak ve mevcut durumlarında etkisi olduğu düşünülen, aldıkları matematik derslerinin öğretim şeklini, matematiksel kanıta yönelik görüşlerini, bugüne kadarki süreçte çalışma biçimlerini ve bireysel çabalarını ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Öğrencilere bu bölümde aynı sorular sorularak görüşmeye başlanmış ancak verdikleri yanıtlara göre ek sorular da yöneltilmiştir. İkinci olarak, öğrencilere iki koşullu önerme (Bkz. Ek.3) verilerek, bu önermeleri sesli düşünerek kanıtlamaları istenmiştir.

3.3.3. Sınıf çalışmaları

Görüşmelerin sonucunda, öğrencilerin mevcut durumlarının belirlenmesinin ardından sınıf ortamında grup çalışması sürecine girilmiştir. Öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmaları için, ilki deneme amaçlı olmak üzere, beş hafta süreyle öğrencilerle haftada bir kere bir araya gelinmiş ve yaklaşık 1,5 saat yani iki ders saati süresince çalışılmıştır. Deneme amaçlı yapılan çalışma, öğrencilerin sürece uyum sağlaması ve araştırmacının öğretme olaylarını düzenlemesine yol göstermesi açısından yararlı olmuştur.

Sınıf çalışmalarında öğrencilere nadiren bireysel, ağırlıklı olarak gruplar halinde çeşitli kanıt görevleri verilmiştir. Araştırmacı, her hafta için belli bir konu kapsamında önermeleri ve önermelerde geçen tanımları içeren çalışma kağıtları hazırlamıştır. Öğrenciler 4. sınıfa devam etmekte oldukları için matematikle ilgili alan derslerini almışlardır ve çalışmada yer alan konulara yabancı değillerdir. Ancak yine de öğrencilerin bilgi eksikliğinden dolayı kanıtlama güçlüğü çekmelerini önlemek amacıyla konu ile ilgili gerekli tanımlar verilmiştir.

Öğretme olayları boyunca, öğrenciler, tek başlarına veya ikili, üçlü heterojen gruplar halinde önermeleri kanıtlama; kanıtları sınıfa sunma, birlikte tartışma ve açıklamalar yapma; birbirlerine sorular sorma ve birbirlerini ikna etmeye çalışma gibi kanıtlama deneyimi yaşamalarına yönelik ve öğrenciler arası etkileşimin ön planda olduğu etkinlikler gerçekleştirmişlerdir.

Öğrencilerden, verilen kanıt görevlerini birlikte veya bireysel olarak yerine getirmeleri, hem kendi düşüncelerini ve yazdıklarını hem de diğer gruptakilerin yaptıklarını değerlendirmeleri ve ortaya çıkan kanıtların geçerli olup olmadığına birlikte karar vermeleri beklenmiştir. Öğrencilere süre sınırlaması konulmamış, ikna oldukları veya daha fazla ilerleyemeyeceklerini söyledikleri anda bir sonraki önermeye geçilmiştir.

Öğretmen/araştırmacı, öğrencilerin alışık olduğu tarzdaki öğretmen modelinden farklı olarak, sınıfta otorite konumunda olmamış ve ders anlatmamıştır. Öğrencilere mümkün olduğunca az müdahalede bulunmuş, sadece gerekli gördüğü durumlarda, ortaya atılan düşünceleri daha açık ve anlaşılır hale getirmek adına, sorular ve hatırlatmalarla öğrencilere rehberlik etmeye çalışmıştır. Öğrencilerin çıkmaza girdikleri veya önemli bir noktayı gözden kaçırdıkları anlarda "*Tanımı tekrar hatırlayın isterseniz, Bakın arkadaşınız ne diyor, siz ne düşünüyorsunuz?, Göstermeye çalıştığımız neydi?, Yazılanlar yeterince açık ve ikna edici mi sizce?*" gibi uyarılar ve sorularla daha dikkatli düşünmelerini sağlamaya çalışmış ancak hiçbir zaman doğru veya yanlış gibi değerlendirmelerde bulunmamıştır.

Öğretme olayları boyunca öğretmen/araştırmacı dışında kamera kaydını gerçekleştiren bir gözlemci de sınıfta bulunmuştur. Grup tartışmalarının ve tüm sınıfın ses ve video kayıtları ve öğrencilerin çalışmalarının bulunduğu kağıtlar analiz edilmek üzere alınmıştır.

Sınıf çalışmaları için, bu alanda yapılmış olan araştırmalar incelenerek, öğrencilerin kanıtlama süreçlerini ortaya çıkaracağı ve bu sürece olumlu katkıda bulunacağı düşünülen bir ortam hazırlanmıştır. Çalışmalarda, öğrencilerin zorlayıcı problemler üzerinde birlikte çalıştıkları, çeşitli stratejileri tartıştıkları, çelişen fikirler iddia ettikleri, gerekçelerini ve çözümlerini birbirlerine ve tüm sınıfa sundukları ortamların, öğrencilerin bilgi ve yetkinliklerinin gelişmesinde etkili olduğu kabul edilmiştir (Martino & Maher, 1999; Powell et al., 2003). Öğretmen/araştırmacı soru soran, dinleyen ve doğrudan öğretim yapmadan öğrencilerin fikirlerini açıklamalarını kolaylaştıran kişi rolünü üstlenmiştir.

Grup tartışmalarının ve sosyal etkileşimin, matematik öğrenme sürecine katkısı güncel matematik eğitimi konularındandır (Yackel et al., 1991; Sfard, 2001; McCrone, 2005; Weber et al., 2008; Blanton et al., 2009). Öğrencilerin problemlere çözümler ürettiği, çözümlerini açıklayıp gerekçelendirdikleri, diğerlerinin çözümünü anlamaya çalıştıkları ve birbirlerine sorular sorup tartıştıkları sınıf ortamlarının matematik öğrenmelerine katkıda bulunacağı öne sürülmektedir (Weber et al., 2008).

Bu çalışmada da, matematiksel kanıtlama becerilerinin gelişmesi için, öğrencilerin kanıtlama deneyimi yaşadıkları, argümanlarını tartıştıkları, kanıt oluşturdukları ve kanıtlarını birbirlerine açıklayarak sundukları sınıf ortamlarının etkili olabileceği düşünülerek, bunların sağlandığı ve desteklendiği bir ortamda sınıf çalışmaları yürütülmüştür.

Selden ve Selden (2007b), öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik olarak öğrencilere tanımları, kanıtlanacak teorem ifadelerini içeren notlar dağıtılıp küçük gruplarda tartışmalarının etkili bir öğretim olabileceğini önermiş ve bu tür bir derste iki kişilik üç grup veya 3-4 kişilik iki grup şeklinde çalışmanın uygun olabileceğini belirtmişlerdir.

Bu çalışmada da öğrencilere benzer şekilde hazırlanan çalışma kağıtları dağıtılmış ve öğrencilerin üçer kişilik iki veya ikişer kişilik üç gruba ayrılabileceği düşünülerek altı katılımcı yer almıştır. Öğrenciler öğretme olayları boyunca iki grup halinde çalışıp daha sonra birlikte düşüncelerini tartışmışlardır. Ancak bazı durumlarda öğrencilerin bireysel gelişimiyle ilgili olarak daha ayrıntılı bilgi elde etmek ve tek başlarına kanıtlama deneyimi yaşamalarını sağlamak amacıyla bireysel görevler de verilmiştir. Öğrencilerin iki grup olarak çalıştığı durumlarda her bir grubun tartışmasının ayrı ayrı ses kaydı ve tüm sınıfın video kaydı alınmıştır.

3.3.4. Son bireysel görüşmeler

Öğretme olayları tamamlandıktan sonra, beş haftalık sürecin sonunda, öğrencilerin her biriyle klinik görüşme yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğrencilere, çalışmanın başında uygulanan ölçme aracında bulunan ve ön görüşmelerde kullanılan önermelerden bazıları, özellikle öğrencinin kanıtlamada güçlük çektiği veya kanıtlayamadığı önermeler tekrar verilmiştir. Öğrencilerden verilen önermeleri sesli düşünerek kanıtlamaya çalışmaları istenmiştir. Araştırmacı kanıtlama sürecinde öğrencilere müdahalede bulunmamış, sadece sessiz kaldıkları veya açıklama yapmadan yazdıkları durumlarda düşüncelerini sesli ifade etmelerini ve yazdıklarını açıklamalarını sağlamak için uyarılarda bulunmuştur. Her öğrenciye 4-5 koşullu önerme tekrar verilmiş ve görüşmenin tamamı öğrencilerin yazdıklarına odaklanılarak videoya kaydedilmiştir. Son olarak da öğrencilerden, çalışma sürecini olumlu-olumsuz yönleriyle ve kendilerine katkıları açısından değerlendirmeleri istenmiş ve bu değerlendirmeler de araştırmanın verileri olarak incelenmiştir.

3.4. Verilerin Analizi

Ses ve video kayıtları, öğrencilerin çalışma kağıtları ve çalışmaya ilişkin değerlendirme yazıları, araştırmacının çalışma süresince aldığı notlar, araştırmanın nitel verilerini oluşturmaktadır. Verilerin analizi sürecinde, dokümanlar incelenmiş, görüşme ve video kayıtlarının çözümlemesi yapılmış, toplanan tüm verilerin karşılaştırılması ve birbirini teyit etmesiyle sonuçlar elde edilmiştir.

Nitel araştırmalarda veri analizinde betimleme, analiz ve yorumlama süreçleri ön plana çıkmaktadır. Betimleme, toplanan verilerin araştırma problemine ilişkin neler söylediğini ya da hangi sonuçları ortaya koyduğunun belirlenmesini; analiz, doğrudan görülemeyen ancak kavramsal kodlama veya sınıflama yoluyla anlamlı ilişkilerin ortaya çıkarılmasını; yorumlama ise verilerin anlamlarının ön planda olduğu anlamlandırma sürecini belirtmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu çalışmada farklı veri türleri bir arada değerlendirilmiş, doğrudan alıntılardan yararlanılarak öncelikle öğrencilerin kanıtlama süreçlerinin betimlemesi yapılmıştır. Daha sonra ortaya çıkan sonuçlar araştırmada kullanılan kavramsal çerçevelere göre analiz edilmiş ve bulgular yorumlanmıştır.

Verilerin analizinde, öğrencilere uygulanan ölçme aracı ile toplanan dokümanlar araştırmacı tarafından incelendikten sonra, yazılı verilerden çıkarılan sonuçların teyit edilmesi ve öğrencilerin düşünme biçimlerinin daha net ortaya çıkarılması amacıyla yapılan görüşmeler, araştırmacı tarafından çözümlenmiştir. Çözümleme, öğrencilerin söylediklerinin yazıya aktarılması şeklinde yapılmıştır. Öğrencilerin birebir görüşmelerinde, yazdıklarına odaklanılarak yapılan video kayıtları, araştırmacı tarafından dikkatle izlenmiş; dokümanlar, video görüntüleri ve öğrencilerin söyledikleri birlikte incelenerek sonuçlara ulaşılmıştır. Öğrencilerden toplanan yazılı dokümanlar ve yapılan bireysel görüşmeler, her bir öğrencinin kanıtlama sürecinin, kanıta yaklaşımı ve kanıtla ilgili güçlükleri açısından bilişsel ve duyuşsal yönleriyle betimlenmesinde kullanılmıştır. Başta ve sonda yapılan görüşmelerde yer alan ortak sorularla, öğrencilerin çalışmadaki ilerlemesi değerlendirilmiştir.

Sınıf çalışmalarındaki video kayıtlarının çözümlenip analiz edilmesinde Powell vd. (2003) tarafından önerilen analitik model temel alınmıştır. Bu model, birbiriyle etkileşimli ancak doğrusal olmayan yedi aşamadan oluşmaktadır. Modelin aşamaları araştırmacının seçimine bağlı olarak farklı şekilde ilerleyebilir, bazı aşamalar atlanabilir ya da tüm aşamalar gerçekleştirilse bile döngüsel biçimde ileri geri gidilebilir ve diğer aşamalarda bazı düzenlemeler yapılabilir.

Bu aşamalar:

1) *Video verilerini dikkatlice inceleme:* Bu aşamada videonun içeriğine aşina olmak amacıyla araştırmacılar, kayıtları birkaç defa izler ve dinlerler.

2) *Video verilerini betimleme:* Araştırmacı kayıtlardaki belli durumları veya etkinlikleri not alır, video içeriği ile ilgili zaman kodlu kısa tanımlar yazarlar. Bu aşamada önemli olan, tanımlamaların gerçekten betimleyici olması yorumlayıcı veya çıkarımsal olmamasıdır. Amaç, video kaydı betimlemelerini okuyan birinin içerik hakkında objektif bir fikre sahip olacağı şekilde, ayrıntılı haritasını çizmektir.

3) *Kritik olayları belirleme:* Video verileri betimlendikten sonra analizin diğer aşaması olan kayıtların tekrar incelenmesi ve kritik olayların belirlenmesine geçilir. Bir olay, yanıtı aranan belli araştırma soruları ile ilişkili ise kritiktir. Mesela, öğrencilerin matematiksel gerekçeleme veya kanıt oluşturmalarıyla uğraşan bir araştırma sorusu için, öğrenenin bir matematiksel açıklama veya argüman sunması örneği önemli olabilir ve kritik olay olarak tanımlanabilir.

4) *Çözümleme:* Araştırmacının karar vermesi gereken nelerin çözümlenip çözümlenmeyeceğidir. Çözümleme nedenleri çeşitlidir. Bazı araştırmacılar, araştırma raporunda öğrencilerin iddiaları için delil sağlamak amacıyla; bazıları, çözümlenen veriye dayalı bir analitik yaklaşımı kullanmak için; bazıları da başka türlü görülemeyen önemli şeyleri ortaya çıkarmak için çözümleme yaparlar.

5) *Kodlama:* Çözümleme olsa da olmasa da kodlama, video verilerinin analizinde çok önemlidir. Analizin bu aşamasında araştırmacı dikkatini kritik olayların içeriğine yoğunlaştırır. Kritik olayları belirlemede olduğu gibi kodlamayı da araştırmacının teorik bakış açısı ve araştırma soruları yönlendirir.

6) *Olaylar dizisi kurma:* Bu analitik aşamada, verilerin yorumlanması ve çıkarımlar önemli rol oynar. Bir anlatı oluşturmak, araştırmacının kritik olaylarla ilgili olarak tutarlı ve kavramaya yönelik düzenlemeler yapmasını gerektirir. Bu süreç, öğrencilerin bilişsel gelişimine ilişkin bir anlayış oluşturacak olan ve önce kodlanıp sonra yorumlanan olaylar toplamından oluşan işaretlerin ayırt edilmesini içermektedir.

7) *Anlatı oluşturma:* Anlatı, en son aşamada ortaya çıksa da aslında anlatım ve diğer yorumlayıcı eylemler araştırmanın başlangıcından başlamaktadır. Çalışma süresince, örneklem ve veri toplama ile ilgili verilen kararlar, yorumlayıcı tartışmalar ve kodlamadan sonraki sonuçlar, süreçte yazılan bilgi notları aslında bu aşamaya kadar anlatının oluşmasını sağlamaktadır. Hatta yazma sürecinde bile araştırmacı bir şekilde veriyi gözden geçirip düzelterek ve önceki yorumları arıtarak bir şekilde veri analiziyle uğraşır.

Bu çalışmada da, sınıf çalışmalarında toplanan video verilerinin analizinde bu sürecin izlendiği söylenebilir. Araştırmacı, sınıf çalışmalarında ortamda öğretmen/araştırmacı konumunda olduğu için analize başlamadan önce kayıtların içeriği hakkında bilgisi bulunmaktadır. Ancak yine de ses kaydı ve video kamera ile toplanan tüm verileri genel olarak izleyip dinledikten sonra, neler olup bittiğini tanımlama, sonrasında ise kritik olayları belirleme ve çözümleme aşamaları yerine getirilmiştir. Sınıf çalışmaları kayıtlarının tümü değil, önemli görülen ve öğrencilerin kanıtlama sürecindeki akıl yürütmelerini ortaya çıkaran, düşüncelerini ifade ettikleri, açıklamalar yaptıkları, tartıştıkları, soru sordukları, araştırma sorularına yönelik bölümler çözümlenmiştir. Bu bölümler belirlenirken şu soruların yanıtlanmasına yaptıkları katkı ön planda tutulmuştur: 1) Öğrencilerin kanıtlara yaklaşım biçimleri nasıldır? 2) Kanıtlama sürecinde ne tür güçlükler yaşamaktadırlar? 3) Öğrenciler bu süreçte ne tür fikirler üretmekte, birbirleriyle olan etkileşimleri ve sınıf tartışmaları kanıtlama sürecini nasıl yönlendirmektedir? 4) Öğrencilerin kanıtlama sürecindeki duygusal durumları nasıldır?

Verilerin analizindeki analitik modelin temel aldığı gibi bu çalışmada da, öğrencilerin sadece yanılgılarına ve doğru yapamadıkları şeylere odaklanılmamış, matematiksel kanıtlama görevleriyle sosyal ortamda uğraşmaları sırasındaki anlamaları, kanıtlara yaklaşımları, bireysel olarak ne tür fikirler oluşturdukları ve birbirleriyle etkileşimlerinin ve duygusal durumlarının, bu süreçte nasıl değişme gösterdiği incelenmiştir. Verilerin çözümlenmesinde ve sonrasındaki analiz sürecinde araştırmacı, temel alınan analitik modelin basamakları arasında sürekli geri dönüşler yapmış, çözümlemeleri kodlar ve yorumlarken ihtiyaç duyduğunda tekrar kayıtları izleme ve dinlemeye başvurmuş, veriler defalarca dokümanlarla karşılaştırmalı olarak derinlemesine incelenmiştir.

Verilerin analizinde, öğrencilerin süreç içindeki kanıtlama biçimleri ve oluşturdukları kanıtlar, Weber (2004b)'in önerdiği çerçeve temel alınarak incelenmiştir. Öğrencilerin, kanıtları prosedürel, sentaktik ve semantik yollardan hangisi ile oluşturdukları belirlenmeye çalışılmıştır. Öğrencilerin kanıtlama sürecindeki duygusal durumları Goldin (2000)'in ortaya koyduğu problem çözme sürecindeki, duyuşsal alana yönelik kavram ve tanımlar açısından değerlendirilmiştir.

4. BULGULAR VE YORUMLAR

Bu bölümde, araştırmanın verilerinin analizi sonucunda elde edilen bulgular ve bu bulgulara ilişkin yorumlar iki kısımda sunulacaktır.

İlk bölümde, katılımcıların her biri için ayrı ayrı bireysel analizlerin bulguları sunulacak ve yorumlanacaktır. Bu kısımdaki bulgular, ağırlıklı olarak yazılı uygulama ve bireysel görüşme verilerinin analizi sonucunda elde edilmiştir. Öğrencilerin kanıtlama sürecinde yaşadıkları güçlükler genel olarak belirlenmiş, kanıtlama yaklaşımları ve ortaya çıkardıkları kanıtlar Weber (2004b)'in çerçevesine göre incelenmiş, duyuşsal alana ilişkin bulgular da Goldin (2000)'in tanımları doğrultusunda yorumlanmıştır. Bu kısımda ayrıca, öğrencilerin kanıtlama sürecine etkisi olduğu düşünülen, derslerin işlenişine ilişkin görüşlerine, kişisel çalışma biçimlerine ve bu çalışmanın bütünü için yapmış oldukları değerlendirmelere de yer verilmiştir.

İkinci bölümde ise, öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan, beş haftalık sınıf çalışmalarında toplanan verilerin analizi sonucunda elde edilen bulgular ve yorumlar sunulacaktır. Sınıf çalışmalarının analizinde, öğrencilerin kanıtlama sürecindeki güçlüklerini, kanıtlara yaklaşım biçimlerini, birbirleriyle etkileşimlerini ve bu sosyal etkileşimin kanıtlama sürecine etkilerini ortaya çıkaran bölümler üzerinde durulmuş, elde edilen bulgular her bir hafta için ayrı ayrı sunularak yorumlanmıştır.

4.1. Öğrencilerin Bireysel Kanıtlama Süreçleri

Öğrencilerin gerçek isimleri yerine, katılımcıların gizliliği açısından takma isimler kullanılmıştır. Bulguların sunulmasında, öğrenci görüşmelerinden doğrudan alıntılara, yazdıkları çalışmalardan ilgili bölümlerin görüntülerine yer verilmiştir.

4.1.1. Emre'nin kanıtlama süreci

Yazılı sorulara verdiği yanıtlar ve ilk görüşmede söyledikleri incelendiğinde, Emre'nin kanıt kavramı ve kanıt yöntemleri ile ilgili bilgilerinin net olmadığı, soruları yanıtlamada güçlük çektiği ve verdiği yanıtların gerekçelerini de tam olarak açıklayamadığı görülmektedir. Üç kanıt yöntemi ile ilgili prosedürel bilginin sınandığı ilk iki sorudan birincisinde olmayana ergi yöntemini düşünerek 6. ve 7. seçenekleri işaretlemiş, görüşme sırasında da doğrudan kanıt yöntemini fark etmiştir. Bu soruda işaretlediği 7. seçenek $P \Longrightarrow Q$ türündeki bir koşullu önermenin kanıtlanmasında, P'nin yanlış ve Q'nun doğru kabul edilerek kanıt oluşturulabileceğini düşündüğünü göstermiştir. Emre, olmayana ergi kanıt yöntemi ile ilgili bilgisi tam olmadığından, mantık hatası yapmıştır.

Emre, 2. soruda önermenin doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemleriyle kanıtlanmasındaki uygun hipotez ve hükümleri belirlemiştir. 4. soruda da, verilen ifadenin karşıt tersini tanımış ve bunun ifadeye denk olduğunu, bu denklikten yola çıkılarak kanıt yapılabileceğini belirtmiştir. Verilen kanıtın hangi önermeyi kanıtladığını belirlemesi istenen 3. soruda, olmayana ergi yöntemi ile yapılmış kanıttan doğru çıkarımı yapmış ve uygun önermeyi belirlemiştir.

Emre, karşıt ters denkliğini ve bu yolla kanıt yapılabileceğini bildiği halde, verilen kanıtların geçerliliğini kontrol etmesi istenen 5. ve 6. sorularda, olmayana ergi ve doğrudan kanıt yöntemleriyle yapılmış olan kanıtları geçerli olarak kabul ettiği halde, karşıt ters ile yapılan ve doğru olan kanıtı geçerli kabul etmemiştir. Görüşmede neden kabul etmediğini:

> *"Burada ben dedim ki ikinci kısımda* (önermenin hükmü) *çelişkiye düşecek galiba, ikinci kısmın değilini almış, sonuçta çelişkiye düşmesi lazım. Burada şu yanlış geldi bana, şunun* (önermenin hipotezi) *tersini elde ediyor ama çelişkiyi ifade etmiyor. O yüzden bana yanlış geldi"*

şeklinde açıklamış ve verilen kanıtı olmayana ergi yöntemiyle oluşturulmuş gibi algıladığını, bu anlamda eksik bulduğunu ifade etmiştir. Ancak kanıtı incelemesi sırasında görüşmecinin sorduğu sorular, daha dikkatli düşünerek kanıta nasıl başlanıp neye ulaşıldığını fark etmesini ve verilen kanıtın, karşıt ters ifadenin kanıtı olduğunu dolayısıyla geçerli kabul edilebileceğini görmesini sağlamıştır.

6. soruda, ifadenin karşıtının kanıtı olan ikinci alternatif kanıtı geçerli kabul etmiş ve bunun sebebini de kanıtın aşamalarının doğru olması olarak açıklamıştır. Emre, kanıtın geçerliliğini kontrol ederken, verilen kanıtın başka teoremi değil verilen teoremin kendisini kanıtlaması aşamasına dikkat etmeyip sadece geçişlerin doğru olmasına dikkat etmiştir. Diğer sorulara verdiği yanıtlar da düşünüldüğünde, bunun sebebinin, kanıt yöntemleri bilgilerindeki eksikler ve mantıksal yetersizlikler olduğu düşünülmektedir. Verdiği yanıtı şu şekilde gerekçelendirmiştir:

> *"Yani benim için kanıt yöntemlerinden de çok emin değilim. Benim mantığımda daima gidiş yolu söyledikleri doğruysa doğruluk var."*

Ancak görüşmede tekrar değerlendirdiğinde, verilen kanıtın, sorudaki teorem için uygulanabilecek herhangi bir kanıt yöntemine benzemediğini $P \Longrightarrow Q$'nun karşıtı olan $Q \Longrightarrow P$ ifadesinin kanıtı olduğunu düşündüğünü belirtmiştir. Emre soruları yazılı olarak yanıtlarken yaptığı hataların bazılarını, görüşme sırasında kontrol ederken fark etmiştir.

“Aslında burada belli bir kanıt yöntemi kullanılmamış. Ben ifade bana mantıklı geldiği için doğru dedim. Kanıt yöntemi yok şu an yani $P \Longrightarrow Q$’da böyle bir kanıt yöntemi (…) $Q \Longrightarrow P$ yi göstermiş”

Görüşmeci bu noktada $P \Longrightarrow Q$ türündeki ifadelerin nasıl kanıtlanabileceğini sormuştur. Emre, üç kanıt yöntemini ve nasıl uygulandıklarını açıklamış ancak Q’nun değilinden P’nin değilinin de gösterilebileceğini yani karşıt ters ile kanıt yöntemini bu görüşme sırasında fark ettiğini belirtmiştir.

Doğrudan kanıt yöntemiyle kanıtlanması beklenen 7. sorudaki önermeyi geçerli biçimde kanıtlamış, 8. soruyu ise boş bırakmıştır. 8. sorudaki önermeyi kanıtlayamama sebebini, rasyonel sayıların nasıl gösterileceğini bilmemesi olarak açıklamış ve böyle bir ifadeyle daha önce karşılaşmadığını, bu yüzden nasıl ilerleyebileceğinin aklına gelmediğini belirtmiştir. Yapamadığı 8. soru son görüşmede öğrenciye tekrar sorulmuştur. Soruda olmayana ergi yöntemine yönlendirme yapıldığından, bu yönteme uygun varsayımları yazarak kanıta başlamıştır. Ancak bir sonraki adıma geçmekte ve kanıtta ilerlemede güçlük yaşamıştır ve görüşmecinin *“Ne düşündün? Ne ile çelişkiye düşmeyi bekliyorsun? Rasyonel sayıyı ifade etmen ne işine yaradı? Buradan yola çıkarak ne söyleyebilirsin?”* şeklindeki soruları, düşüncelerini toparlama, yazdıkları üzerinde düşünme ve daha dikkatli ilerleme konusunda uyarıcı olmuştur. Bir süre uğraştıktan sonra önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlayabilmiştir.

9. soruda, verilen önermenin karşıt ters ile kanıtlanmasına yönelik yönlendirme bulunmaktadır. Ancak Emre, varsayıma yaptığı ekleme ile kanıtın ilk adımını olmayana ergi yöntemine uygun hale dönüştürmüş, matematiksel kabul edilebilirliği olmayan bazı sözel açıklamalar yapmış ve geçerli bir kanıt oluşturamamıştır (Şekil 4.1).

Kanıt: $c \leq d$ olduğunu kabul edelim … $ac \geq bd$ (kanıta devam ediniz!)

verilsin. $c \leq d$ ve $ac \geq bd$ ise $a, b < 0$ ve $a \geq b$'dir.

fakat biz biliyoruz ki $0 \leq a < b$ idi, yani $0 \leq a < b$ iken $ac \geq bd$ ise $c > d$.

Buradan kabulümüz yanlıştır.

Şekil 4.1. Emre’nin ölçme aracı 9. soruya yanıtı

Görüşmede yazdıklarını kontrol ederken şunları söylemiştir:

“Bir daha kanıtlasam yine böyle yapardım ama şu ana kadar konuştuklarımızdan biraz yorumluyorum. Ben bu yöntemlerden birini kullanmamışım, kanıt yöntemi bilerek yaptığım bir şey değil. (…) Ama ispatım doğru mu emin değilim, kanıt yöntemine uyuyor mu? (…) şimdi baştan beri olan yorumlarımızdan ispat yöntemleri benim kafama yatmaya başladı o yüzden böyle yorumluyorum. Normalde yine yapsam ispat yöntemi düşünmeden yaparım.”

Bu görüşme, öğrencinin bazı eksik ve yanlış bilgilerinin farkına varmasında etkili olmuştur. Görüşme sırasında yöntemlerle ilgili prosedürel bilgiyi kazanmıştır ancak uygulamadaki yetersizlikleri devam ettiğinden, ifadeyi bundan farklı bir biçimde kanıtlayamayacağını belirtmiştir.

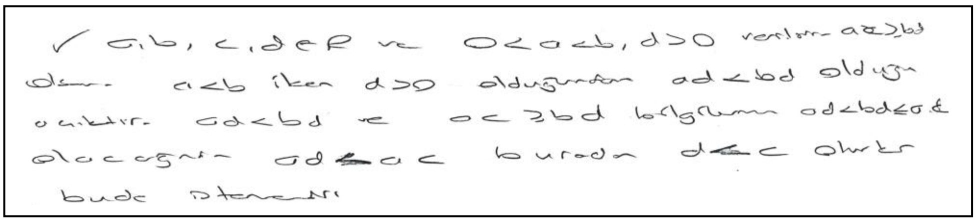
Bu sorudaki önerme öğrenciye son görüşmede tekrar verilmiştir. Emre, görüşmenin başında düşündüğü şekilde, olmayana ergi ile kanıtlamaya yönelik olarak varsayımları yazmış ancak kanıtın adımlarını bir öncekinden çıkarım yaparak matematiksel olarak ikna edici bir biçimde yazamamıştır. Görüşmecinin *“Sence bu ikna edici bir kanıt oldu mu?”* sorusu üzerine:

“Olmadı sanırım ya, benim de kafama yatmadı, düz mantık düşündüm. Kafamda ikna oluyorum ama yazdığımda çok ikna olmuyorum.”

yanıtını vermiştir. Yazdıklarını silip tekrar denemiş ama yine aynı şekilde düşünerek hareket ettiğinden bir sonuca ulaşamamış ve bunun üzerine:

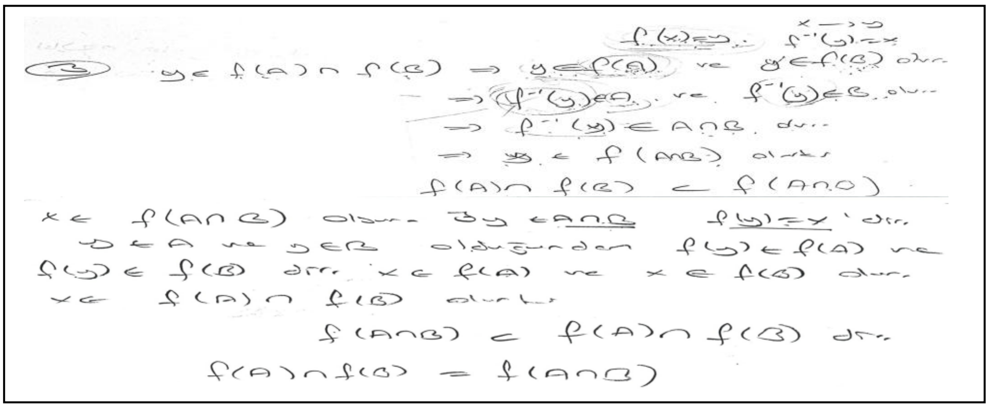
“zaten yeterince açık (verilen önerme) *verilenlerden görebiliriz doğru olduğunu”*

şeklinde ifadenin doğru olduğunu kanıta gerek duymadan görebildiğini belirtmiştir. Sözel bazı açıklamalar yaparak düşündüklerini ifade etmeye çalışmış ancak tam bir kanıt yazamamıştır. Ancak görüşmecinin *“Bunu nasıl söyleyebildin? Burada neyi kullanmış oldun?”* şeklindeki sorularıyla daha dikkatli düşünerek bir süre daha uğraşmış ve geçerli bir kanıt oluşturmuştur (Şekil 4.2)



Şekil 4.2. Emre’nin son görüşme 4. (ölçme aracı 9.) soruya yanıtı

Yazılı uygulamadaki sorulardan, fonksiyonlarla ilgili olan 10. ve 11. soruları tam doğru biçimde yanıtlayamamıştır. Emre, her iki soruda birebirlik ve örtenlik özelliklerini tanımada, nasıl ve nerede kullanıldıklarını belirlemede güçlük yaşamıştır. Kanıtı gerekçelerini de yazarak ilerletmesi beklenen 10. soruda, kanıta yönelik bir şeyler yazmış ancak neye dayanarak yazdığını, birebirlik tanımını nerede kullandığını açıklayamamıştır. Aynı şekilde 11. soruda da kanıtların geçerli olduğunu belirtmiş ancak birebir ve örtenliğin hangi adımlarda kullanıldığını belirleyememiştir. Son görüşmede, 10. sorudaki önerme çift taraflı olarak tekrar verilmiş ve kanıtlaması istenmiştir. Emre bu ifadeyi çift yönlü kapsamayı göstererek kanıtlamaya çalışmış ve Şekil 4.3'teki kanıtı oluşturmuştur.

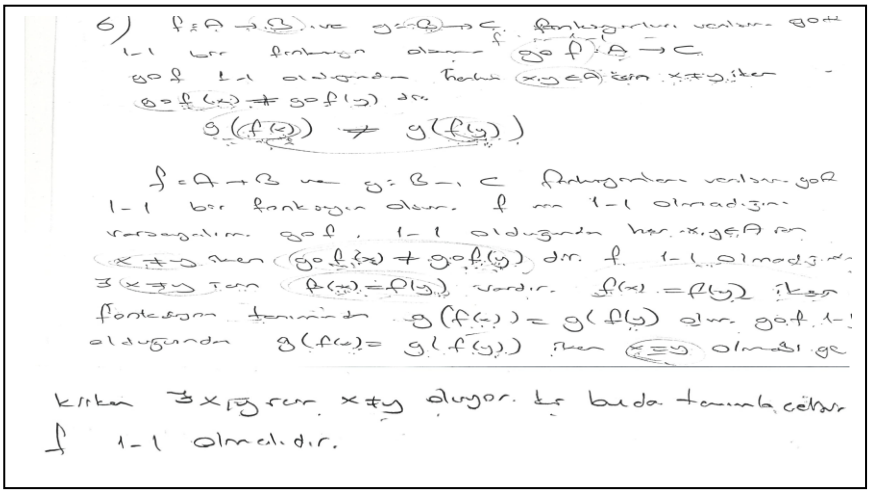

$x \to y$
$f(x)=y$. $f^{-1}(y)=x$
3) $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ ve $y \in f(B)$ olur.
$\Rightarrow f^{-1}(y) \in A$ ve $f^{-1}(y) \in B$ olur.
$\Rightarrow f^{-1}(y) \in A \cap B$ dır.
$\Rightarrow y \in f(A \cap B)$ olurlar
$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$
$x \in f(A \cap B)$ olsun. $\exists y \in A \cap B$ $f(y)=x$'dir.
$y \in A$ ve $y \in B$ olduğundan $f(y) \in f(A)$ ve
$f(y) \in f(B)$ dir. $x \in f(A)$ ve $x \in f(B)$ olur.
$x \in f(A) \cap f(B)$ olurlar
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ dir.
$f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$

Şekil 4.3. Emre'nin son görüşme 3. (ölçme aracı 10.) soruya yanıtı

Emre'nin yazdıkları incelendiğinde ilk kısımda fonksiyonun birebir olmasının hangi aşamada kullandığı görülmemektedir. Kanıtlama sürecinde yaptığı açıklamalarda ilk kısımda ters görüntü tanımını kullandığını belirtmiş araştırmacının $y \in f(A)$ ve $y \in f(B) \Rightarrow f^{-1}(y) \in A$ ve $f^{-1}(y) \in B$ ifadelerini nasıl yazabildiğini açıklamasını istemesi üzerine bu geçişleri fonksiyonun birebir olmasından dolayı yazdığını ifade etmiştir.

Verilen önermelerin kanıtlarını, herhangi bir yönlendirme yapılmadan, oluşturmaları beklenen 12., 13. ve 14. sorular için, önermelerin kanıtına yönelik yazdıklarının doğru olduğunu düşünmediğini belirtmiş ve bunun gerekçesini, bildiklerini matematiksel olarak hangi sırayla ifade edeceğini, nasıl ilişki kuracağını bilmemesi olarak açıklamıştır.

Emre görüşme sırasında, 12. sorudaki önermeyi bilerek yapmadığını ve yanlış olduğunu düşündüğünü ifade etmiştir. Yazdıklarını kontrol ederken de yaptığı geçişlerde mantıksal ve matematiksel bir ilişki olmadığını, fonksiyonun birebir olduğunu göstermesi gerekirken birebir olduğunu kabul ederek hareket ettiğini fark etmiştir. Geçerli bir şekilde kanıtlayamadığı 12. sorudaki önerme, son görüşmede tekrar sorulmuştur. Emre en uzun süreyi bu önermenin kanıtlanmasında harcamıştır. Bu defa ilk görüşmeden farklı olarak daha dikkatli düşünmüş, gerekçesini açıklayamadığı hiçbir şeyi yazmamaya çalışmış, tanımları doğru şekilde ve doğru yerde kullanmış, sonuçta geçerli bir kanıt oluşturmuştur (Şekil 4.4).

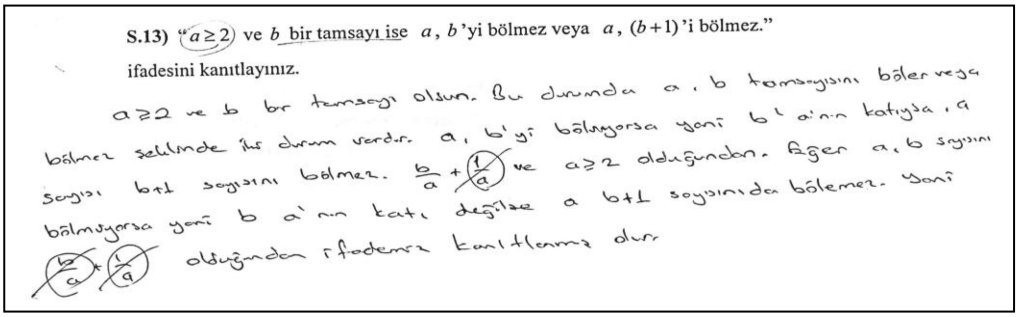


Şekil 4.4. Emre son görüşme 6. (ölçme aracı 12.) soruya yanıtı

13. soru için yazdığı yanıtını,

> “*Kanıtımın matematiksel olarak doğru olduğunu düşünmüyorum ama bana göre ben bir şeyler biliyorum kendimce. Bu yazdığım bilgiler de doğru ama bu kanıt değil. Aklıma gelenleri yazdım kanıt yöntemine göre değil.*”

şeklinde değerlendirmiştir. Yazdıkları incelendiğinde (Şekil 4.5)., matematiksel kanıt olarak kabul edilebilecek herhangi bir şey yazmadığı, sözel olarak bazı açıklamalar yapmaya çalıştığı ama yazdıklarını gerekçelendiremediği ve açıklamanın matematiksel bir anlam taşımadığı görülmektedir.


S.13) "$a \geq 2$ ve b bir tamsayı ise a, b'yi bölmez veya a, $(b+1)$'i bölmez."
ifadesini kanıtlayınız.

$a \geq 2$ ve b bir tamsayı olsun. Bu durumda a, b tamsayısını böler veya bölmez şeklinde iki durum vardır. a, b'yi bölüyorsa yani b' a'nın katıysa, a sayısı b+1 sayısını bölmez. $\frac{b}{a} + \frac{1}{a}$ ve $a \geq 2$ olduğundan. Eğer a, b sayısını bölmüyorsa yani b a'nın katı değilse a b+1 sayısını da bölemez. Yani $\frac{b}{a} + \frac{1}{a}$ olduğundan ifademiz kanıtlanmış olur.

Şekil 4.5. Emre'nin ölçme aracı 13. soruya yanıtı

Çalışmanın başında, Emre'nin oluşturmaya çalıştığı kanıtlarda bir kanıt çerçevesi (Selden & Selden, 1995), kanıt yapısı (Heinze & Reiss, 2003) bulunmadığı, başlangıç varsayımlarını, ulaşılması gereken sonucu ve ara adımları net bir şekilde belirleyemediği ve kabul edilebilir bir düzende yazamadığı görülmektedir. Görüşmecinin, ilk görüşmede, bir önermeyi okuduğunda kanıta başlamadan önce neyi kabul edip neyi göstermesi gerektiğini fark edip etmediği sorusuna şu şekilde yanıt vermiştir:

> *"Bu çalışmaya başladığımızda ben ispat yöntemlerini tam birbirinden ayırt edemiyordum ama şu anda ayırt edebiliyorum. Benim için çok iyi bir ayırım oldu, iyi bir çalışma da oldu. İspat yöntemlerinin mantığını şu an kavradım. Nasıl başlanır, nasıl kullanılır. İspat yöntemlerini sorgulamanız çok etkili oldu. Çünkü ben $P \Longrightarrow Q$'nun farklı ifadelerini düşünmüyordum hiç. Biliyormuşum ama üzerinde düşünmüyormuşum hiç, onu fark ettim. Bu sorgulama olunca onu düşündüm."*

Bu açıklama, Emre'nin yazılı uygulama ve ilk görüşmeden anlamlandırmadan yazdığı şeylere daha dikkatli düşünerek yaklaştığını, kanıt yöntemlerine ilişkin bir farkındalık oluştuğunu göstermektedir. Ayrıca görüşmecinin soruları da öğrencilerin düşünce süreçlerini harekete geçirmede etkili olmuş ve öğrenciler kanıt yöntemlerinin ayrımına varmışlardır.

Emre'nin 14. sorudaki yanıtı, kanıtla ilişkili ancak mantıksal ve matematiksel dayanağı olmayan sözel açıklama şeklindedir. Bu yüzden matematiksel bir kanıt olarak değil informel bir argüman olarak değerlendirilmiştir. Düşünce olarak doğru olsa da yazdıkları matematiksel değildir ve geçerli bir kanıt oluşturmamaktadır. Emre de yazdıklarını matematiksel bulmadığını belirterek şu değerlendirmeyi yapmıştır:

“Zaten benim daha çok kendimde gördüğüm ifadeleri daha çok yazıyla ifade ediyorum ama matematiksel kanıtı bilmiyorum. Akıl da yürütebiliyorum çoğu ispatta ama bunun matematiksel olarak hangi sırayla gideceğini nasıl ilişki kuracağımı bilmiyorum.”

Bu açıklama ve soruları yanıtlama sürecinde araştırmacı tarafından gözlenenler sonucunda, Emre’nin stratejik bilgi (Weber, 2001) eksiğinin olduğu ve sahip olduğu kavramsal bilgileri formel kanıt yazacak şekilde ilişkilendiremediğini göstermektedir. Weber ve Alcock (2009) da çalışmalarında benzer durumla karşılaşmış ve birçok öğrencinin “*Görüyorum ama kanıtlayamıyorum*” şeklinde bu durumu ifade ettiklerini belirtmişlerdir. Öğrencilerin, kanıt oluştururken tek bir adımı açıklayacak bilgileri olsa da bu adımları birleştirecek ve kanıtı tamamlayacak prosedürel bilgi eksikleri bulunması, kanıtı yazamamalarına sebep olabilmektedir (Heinze & Reiss, 2009).

Emre’ye ikinci görüşmede iki önerme (Bkz. Ek.3) verilip sesli düşünerek kanıtlaması istenmiştir. Önceki görüşmenin etkisiyle, verilen önermeyi kanıtlamaya, uygun olduğunu düşündüğü kanıt yöntemini belirleyerek başlamış ve birinci önermeyi olmayana ergi kanıt yöntemini kullanarak kanıtlamıştır.

Verilen ikinci önermedeki küme eşitliğinde, iki yönlü gösterilmesi gereken kapsamayı tek yönlü göstererek kümelerin eşit olacağını belirtmiş dolayısıyla geçerli bir kanıt oluşturamamıştır. Bu önerme öğrenciye son görüşmede tekrar sorulduğunda yine tek taraflı kapsamayı göstererek yazdıklarının bir kanıt oluşturduğunu düşünmüş ve ikna olmuştur. Geçerli bir kanıt oluşturamamasına rağmen tek taraflı kapsamayı gösterirken doğru işlemleri yapmış ve önceki yanıtına göre matematiksel olarak daha doğru ve anlaşılır ifadelerle yazmıştır.

Yazılı uygulamadaki yanıtları ve bireysel görüşmeler incelendiğinde çalışmanın başında Emre’nin, kanıt yöntemleri, mantık kuralları ve düşündüklerini ifade etme konularında yetersiz olduğu, matematiksel dil ve notasyonu kullanarak geçerli kanıtlar oluşturmakta güçlük çektiği görülmektedir. Emre’nin yazılı sorulara verdiği yanıtlar, bireysel görüşmelerdeki açıklamaları ve sınıf içindeki davranışları incelendiğinde kanıtlara prosedürel olarak yaklaşma eğiliminde olduğu söylenebilir. Verilen önermelerin kanıtlarını oluşturmaya çalışırken sürekli, ifadeyle daha önce karşılaşıp karşılaşmadığını düşünmüş, karşılaştıysa kanıtını hatırlamaya çalışmıştır. Sınıf içindeki grup çalışmalarında da “ *Derste böyle bir şey vardı hatırlıyorum gördüğümüzü ama nasıl yapmıştık onu hatırlayamadım şimdi* ” şeklinde yaklaşımlarda bulunmuştur.

Weber (2004b) prosedürel kanıt oluşturmada, kişinin kanıtlamaya, geçerli bir kanıtla sonuçlanacağına inandığı, bir dizi önceden tanımlanmış adımları yani bir prosedürü uygulayarak başlayabileceğini ve bazen de bu şekilde geçerli bir kanıt oluşturabileceğini belirtmektedir. Ancak bu şekilde kanıt oluşturabilen öğrencilerin çoğunlukla kanıtlarının ne anlama geldiğini açıklayamadığını, çünkü kanıtı öğretmenin yaptıklarını taklit ederek veya kendilerine geçerli bir kanıtla sonuçlanacağı söylenmiş olan prosedürleri uygulayarak oluşturduklarını gözlemiştir. Bu çalışmada da Emre, genelde daha önce derslerinde karşılaştığı, öğretmenlerin uyguladığı prosedürleri hatırlamaya çalışmıştır. Düşüncelerini ve açıklamalarını ikna edici gerekçeler sunmadan yüzeysel olarak ifade etmiştir.

Süreç içindeki davranışları ve söyledikleri değerlendirildiğinde, Emre’nin matematiksel kanıt oluşturmak yerine daha çok, verilen önermeler üzerine argümantasyon yaptığı görülmektedir. Argümantasyon; birini belli bir önermenin doğruluğuna veya yanlışlığına ikna etmede sözel araçların kullanılmasını içerir; buna karşılık kanıt, önermenin teorik geçerliliğini belirten bir dizi mantıksal uygulamayı içerir (Antonini & Mariotti, 2008). Emre’nin verilen önermelerde yaptığı da genelde bu şekilde sözel açıklamalardan oluşmuş ve mantıksal bir sıra izleyen kanıtlar yazmakta güçlük yaşamıştır. Çalışmanın sonundaki görüşmede ise yaptığı sözel açıklamaların yeterli olmadığının farkında olarak, matematiksel ifadelerle geçerli kanıtlar oluşturmaya çalışmış ve yazdıklarının geçerliliğini daha doğru bir biçimde değerlendirmeye başlamıştır.

Çalışmanın başında, yazılı olarak verdiği yanıtlar ve ilk görüşmelerde kanıtlama sürecindeki davranışları birçok kanıta, nasıl başlayacağını, neye ulaşması gerektiğini, kanıtın adımları arasındaki geçişleri neye dayanarak yapacağını düşünmeden yaklaştığını göstermektedir. Heinze ve Reiss (2003) bir kanıtta olması gereken üç özellikten birini kanıt yapısı olarak ifade etmiş ve bir kanıtın öncüllerle başlayıp, belirli bir iddiayla bitmesi gerektiğini; eğer bütün argümanlar matematiksel olarak geçerliyse iddianın kanıtlanmış olacağını, iddianın argüman olarak kullanımının yeterli olmadığını belirtmişlerdir. Ancak bazı önermelerin kanıtında Emre, ulaşması gereken sonucu kullanarak yani kanıtlanması gereken önermeyi doğru kabul ederek işlemler yapmıştır. Ayrıca, verilen ifadelerin bazılarında, önermenin doğruluğuna sezgisel olarak ikna olmuş ve kanıtlanmaya ihtiyacı olmadığını düşündüğünü zaten verilenlerden bu sonucun görülebildiğini belirtmiştir.

Kanıtın geçerliliğini kontrol ederken, verilen kanıtın başka bir teoremi değil teoremin kendisini kanıtladığını belirleyebilen öğrenciler, kanıt çerçevesi oluşturma becerisine de sahiptirler (Selden & Selden,1995). Çalışmanın başında bu iki beceriyi de tam olarak gösteremeyen Emre'nin ilk görüşmeden itibaren gelişme gösterdiği ve beş haftalık sürecin sonunda kanıt çerçevelerini oluşturmada ve yazdığı kanıtların geçerliliğini değerlendirmede daha az güçlük yaşadığı gözlenmiştir.

Weber (2003)'e göre, kanıtı prosedürel yolla öğrenen öğrenciler başarılı olurlarsa, kanıtı önce algoritma olarak, sonra süreç olarak ve son olarak da argüman olarak anlamaktadırlar. İlk aşamada, kanıtı, adımları mekanik ve belli türdeki önermeler için olan bir algoritma olarak görmekte, uğraştıkları prosedürün genel yapısının fakında olmamakta ve genelde yapılanı taklit düzeyinde kalmaktadırlar. Bir kanıt tekniğini defalarca farklı farklı bağlamlarda uyguladıkları zaman bazıları algoritmayı içselleştirebilmekte böylece kanıtı bir süreç olarak görmeye başlamakta, tekniği birçok farklı, hatta belki daha önce görmemiş oldukları durumlara genelleyebilmektedirler. Emre'nin ikinci görüşmede, derslerin işlenişi ve sınavlarda karşılaştıkları sorularla ilgili olarak söyledikleri onun kanıtı bir süreç olarak gördüğünü göstermektedir.

> *"*(sınavlarında karşılaştıkları sorular için) *Genelde, değişse bile* (derste ve sınıfta yapılanların) *benzeri oluyor, benzeri olduğu için de ezber mantığıyla zamanla insanda nasıl ÖSS'ye* (üniversite sınavı) *çalışan bir çocuk belli tarzda soruları çözdükten sonra onun farklı şekilde soruluşuna da mantık yürütebiliyor ve bir şeyler yazıyor, çoğunlukla öyle oluyor. Hani daha değişik çok farklı bir kanıt sorulsa yapılabileceğini düşünmüyorum."*

Weber (2003)'in çalışmasında, kanıta prosedürel yaklaşan öğrenciler genellikle, kanıtlamayı sınavlarda puan almak için uygulanan bir süreç olarak görmüşlerdir. Bu çalışmada da Emre kanıtlama konusunda kendini geliştirmek için çaba göstermediğini, sadece sınavları geçmeye yönelik çalıştığını belirtmiştir.

> “Y*ani çaba göstermiyorum bunun sebebi de benimsememiş olmam ve kullanmayacağımı düşündüğüm için (…) Şimdiye kadar hep günü kurtarmak denilen tabir* ”

Emre çalışmanın başında, kanıtlarla uğraşırken matematiksel olarak doğru ifadelerle yazamadığı durumlarda bile, yaptığı açıklamaların düşüncelerini yansıttığı için kabul edilebilir olduğunu düşünmüştür. Bu yaklaşımı, Emre’nin kanıt kavramının yeterli olmadığını ve geçerli bir kanıtın, matematiksel notasyonun uygun kullanımıyla mümkün olan en açık biçimde yazılması gerektiğinin farkında olmadığını göstermektedir.

Emre’nin son görüşmedeki kanıtlama süreci ve kanıtlara yaklaşımı ile çalışmanın başında uygulanan sorulara verdiği yanıtlar değerlendirildiğinde, çalışmanın sonunda daha dikkatli ve adım adım düşünerek kanıtlamaya çalıştığı, kendi yanlışlarının farkına varıp daha doğru değerlendirebildiği görülmektedir. Çalışmanın başında, yazılı uygulamada ve ilk görüşmede, önermeleri kanıtlamaya başlarken bir yöntem düşünmediği halde ikinci görüşmeden itibaren kanıt yöntemi düşünerek ve önermenin hipotezini, hükmünü belirleyerek kanıtlama girişiminde bulunmuştur. Ayrıca son görüşmede çalışmanın başında kanıtlayamadığı beş önermeden üçünü geçerli bir şekilde kanıtlayabilmiş ve yazdığı açıklamalarda daha doğru ve kabul edilebilir matematiksel ifadeler kullanmıştır. Bu bulgulara göre Emre’nin, çalışmanın sonunda kanıtlama becerisinin gelişme gösterdiği ve kanıtlara yaklaşımında ezber bilgileri hatırlamak yerine, akıl yürütme süreçlerini kullanmaya çalıştığı söylenebilir.

Bu bölümde; sorulara verdiği yanıtlar, çalışma sürecinde söyledikleri ve görüşmecinin gözlemleri doğrultusunda, Emre’nin kanıtlamaya yaklaşımına etkisi olabileceği düşünülen duyuşsal özellikleri, derslerin işleniş şekli ile ilgili düşünceleri ve kendi çalışma biçimi değerlendirilecektir.

Emre, derslerinin genellikle ders sorumlusunun anlatımına dayalı olarak işlendiğini, kendilerinin tahtaya yazılanları defterlerine not aldıklarını açıklamış, bu yöntemi etkili bulmadığını belirtmiş ve şu şekilde bir benzetme yapmıştır:

> *“Sonuçta tabi ki biz her zaman hazır bilgi alıyoruz hani böyle bir bilgisayar gibi düşünüyorum ben kendimizi, daima bilgi yükleniyor, bilgi yükleniyor bu*

da ne oluyor bir yerde aldığımız bilgiyi yeni bilgi almak için siliyoruz, yerine başka bilgi koyuyoruz. Bu da kötü oluyor, kalıcı olmuyor. "

Emre, öğrenci katılımının sağlanmasıyla derslerin daha verimli hale getirilebileceğini düşünmektedir.

"Öğrenci merkezli olabilir, gruplar oluşturulabilir, gruplar halinde belli konular dağıtılır bu konuları araştırmaya yönelik, sonra bunların tahtada anlatılması, o konuyla ilgili sınıfta soruların çözülmesi. Böyle işin içine öğrenciyi katmak verimliliği sağlar. "

Derslere nasıl çalıştığı ve kanıtlama becerisini geliştirmeye yönelik neler yaptığı sorulduğunda, bu konuda çaba göstermediğini, sadece sınavlardan önce defter ya da kitaptaki kanıtları okuyup yazarak çalıştığını ifade etmiştir.

Emre: Kanıtlara ön yargım var o yüzden çok üzerine düştüğüm söylenemez. Bu konuda da kendimi eleştiririm. Başka konu olduğunda istekliyim ama kanıt konusunda belki de istediğim verimi alamamamdan kaynaklı bir ön yargım var. Geçiştirdiğim de oluyor ezbere kaçtığımda oluyor ki çoğunlukla öyle oluyor.

Araştırmacı: Ön yargı derken, kanıtlar zordur anlamında mı yoksa ben yapamam mı?

Emre: Ben yapamam tarzı, yani yapacağımı düşünüyordum ama gelen notlardan işte karşılığını alamamanın verdiği bir ben yapamam tarzı bir şey var. Yoksa kanıtların zor olduğuna çok inanmıyorum.

Araştırmacı: Kendine güvenmiyorsun diyebilir miyiz bu konuda?

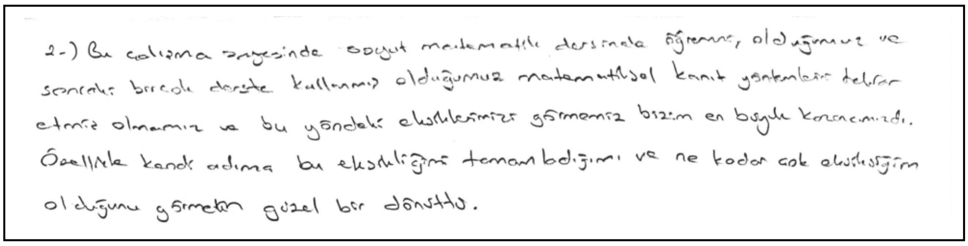
Emre: Evet, bu konuda evet.

Emre'nin kanıtlara karşı ön yargı olarak ifade ettiği duygusunun, geçmiş deneyimlerinde tekrarlanan başarısızlıklar ve beklediği karşılığı alamaması sonucu ortaya çıktığı görülmektedir. Goldin (2000) öğrencilerin tüm girişimlerine rağmen ilerleme kaydetmediklerini düşünmeleri ve başarısızlığa uğramaları sonucu hüsran yaşayabileceklerini ve bunun öğrenciyi kaygı ve umutsuzluğa sürükleyeceğini belirtmektedir. Hüsran ve kaygı da öğrencinin ezbere öğrenme stratejilerine daha çok vurgu yapmasına ve dersle ilgili materyallerle uğraşmaktan kaçınmasına yol açmaktadır (Weber, 2008). Emre, yaptıklarından hiçbir zaman tam olarak emin olamadığını, sınavlarda bile sürekli yanıtlarını değiştirdiğini ve kendine olan güvensizliğinden dolayı sürekli kendisiyle çeliştiğini ifade etmiştir. Emre'nin başarısız girişimleri ve hüsran, kaygı ve umutsuzluk gibi olumsuz duyguları tekrar

tekrar yaşaması; kendine olan inancını olumsuz etkilemiş ve daha kalıcı ve güçlü bir duyuşsal özellik olan özgüven düşüklüğüne yol açmıştır.

Emre'nin söyledikleri arasında dikkat çeken bir başka şey de okuduğu bölümü ve öğretmenlik mesleğini tam olarak benimsememiş olmasıdır. Bununla ilgili sorunlarından dolayı derslerde motivasyonunun düşük olduğunu ve öğrenmeye yönelik çok fazla çaba göstermediğini belirtmiştir. Devam eden başarı ve teşvikle gelen zevk ve memnuniyet duygusu, öğrencilerin matematik okuma sebepleri olarak ortaya çıkmıştır (Rodd, 2002; Rodd & Bartholemew, 2006). Emre de ise tam tersi olarak matematiğe ve okuduğu bölüme yönelik olumsuz duygulara sahip olması, çaba göstermemesine ve öğrenmeye değil derslerden geçmeye odaklanmasına neden olmuştur.

Emre, sürecin sonunda çalışmanın bütününü olumlu, olumsuz yönleri ve kendisine katkısı anlamında değerlendirmesi istendiğinde, grup çalışmaları ve bireysel çalışmalarla oluşturulan çalışma ortamını olumlu bulduğunu belirtmiştir. Kanıt yöntemleri ile ilgili eksikliklerini görmesinin çalışmadaki en büyük kazancı olduğunu ve süreç boyunca bazı eksikliklerini giderdiğini ifade etmiştir (Şekil 4.6).


2-) Bu çalışma sayesinde soyut matematik dersinde öğrenmiş olduğumuz ve
sonraki birçok derste kullanmış olduğumuz matematiksel kanıt yöntemlerini tekrar
etmiş olmamız ve bu yöndeki eksikliklerimizi görmemiz bizim en büyük kazancımızdı.
Özellikle kendi adıma bu eksikliğimi tamamladığımı ve ne kadar çok eksikliğim
olduğunu görmekten güzel bir dönüştü.

Şekil 4.6. Emre'nin çalışmaya ilişkin değerlendirmesi

4.1.2. Pelin'in kanıtlama süreci

Pelin'in yazılı uygulamadaki yanıtları incelendiğinde, $P \Longrightarrow Q$ türündeki bir koşullu önermenin kanıtlanmasında ilk adım olabilecek seçenekleri belirlemesi beklenen ilk soruda, her üç kanıt yöntemine işaret eden seçenekleri doğru olarak belirlemiş olduğu halde, 2. soruya verdiği yanıt ve diğer sorulardaki yanıtları karşıt ters ile kanıt yönteminin farkında olmadığını düşündürmüştür. Görüşmede, ilk sorudaki "Q'nun yanlış olduğunu varsayarız" seçeneğini yani karşıt ters yöntemi ile kanıtı işaret eden seçeneği P'nin zaten doğru varsayıldığını düşünerek yani olmayana ergi yöntemine benzeterek işaretlediği, karşıt ters yöntemini düşünmediği ortaya çıkmıştır.

2. soruda ise doğrudan kanıt ve olmayana ergi yöntemlerini tanımıştır. Görüşme sırasında yanıtını kontrol ederken, $P \Longrightarrow Q$ 'nun karşıt ters denkliğinden yapılabilecek bir kanıt yönteminin daha olabileceğini ama bu yöntemi hiç kullanmadıklarını, kendisinin de tercih etmeyeceğini belirtmiştir.

Verilen kanıtın, hangi teorem ifadesine ait olduğunu belirlemesi istenen 3. soruya yanlış yanıt vermiştir. Görüşme sırasında ne düşünerek yanıtladığını hatırlayamamış ancak verdiği yanıtın doğruluğundan şüphe etmiştir. Bir süre kanıtı sessizce inceledikten sonra yanıtının yanlış olduğuna karar vermiştir. Kanıtın, olmayana ergi yöntemiyle oluşturulduğunu fark etmesine rağmen kanıtı anlama, yorumlama, ilişki kurma ve doğru çıkarımları yapmada güçlük çekmiştir.

4. soruda verilen ifadenin değilinin, karşıtının ve karşıt tersinin doğruluklarını belirleyebilmiş ancak tersinin doğruluğu ile ilgili olarak yanlış yanıt vermiştir. Bu soruya verdiği yanıt ve yaptığı açıklamalar, bir önermenin karşıt ters ifadesinin önermeye denk olduğu mantık kuralını bildiğini göstermektedir.

5. ve 6. sorularda verilen alternatif kanıtları değerlendirirken, karşıt ters denkliğini bildiği halde kanıt yöntemi olarak düşünmemiş ve bu yöntemle yapılan kanıtları olmayana ergi yöntemiyle yapılmış gibi değerlendirerek eksik yazıldıklarını belirtmiştir. Bir kanıtın geçerliliğini kontrol ederken ifadenin tek yönlü koşullu önerme mi yoksa çift yönlü koşullu önerme mi olduğuna ve kullanılan kanıt yönteminin doğru uygulanmış olmasına dikkat ettiğini belirtmiştir.

> *“Önce bir teoremin yapısına bakıyorum, “ise” mi “ancak ve ancak” mı ne tarzda bir şey. Ancak ve ancaksa zaten iki tarafı da kontrol etmemiz gerekiyor. İsede ne tarafın kabul edilip ne tarafın istendiği önemli olduğundan kabul ve istenen kısmı önemli. Çelişki elde edeceksek olmayana ergi kullanıyoruz, işte istenenin tam zıddını alıyoruz. Bir şekilde zaten onun yanlış olduğu ortaya çıkıyor.”*

Bu açıklaması, kanıtları kontrol ederken ara basamaklardaki mantıksal sıradan çok, kullanılan yönteme göre kanıtın genel yapısını incelediğini, kanıtın başındaki hipotez ve sonuçtaki hükme bakarak geçerliliğini değerlendirdiğini, ara geçişlere ve gerekçelerine dikkat etmediğini göstermektedir.

Verilen önermelerin kanıtlarını oluşturması beklenen 7. ve 8. soruları yanıtlayamamış, 7. soruda sadece fonksiyonun artan olması tanımını yazmış, 8.

soruyu ise boş bırakmıştır. Çalışmadaki öğrencilerden sadece Pelin 7. soruyu yanıtlayamamış, üzerinde çok düşündüğünü ancak hatırlayamadığını, bu tür önermeleri derslerinde sınavlara yönelik olarak çalıştığını ve sonrasında aklında hiçbir şey kalmadığını ifade etmiştir.

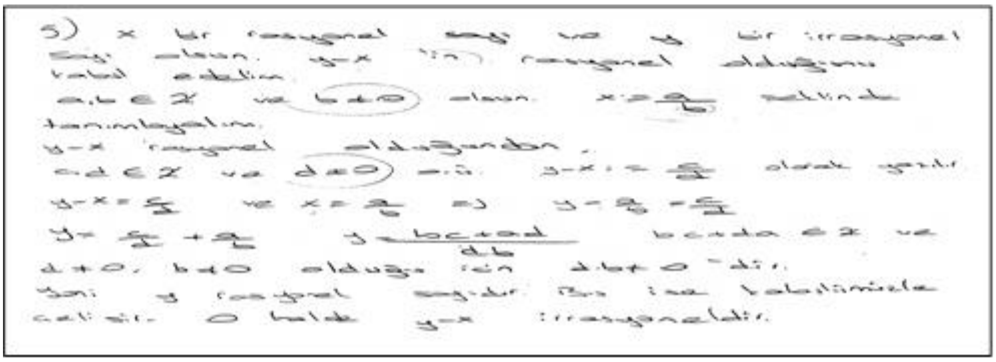
> *“Bunu soyut matematik derslerinde de zaten biraz zorlanarak yapıyordum yani yolları öğrendik geçtik, çalışma hatası diyebiliriz buna. Birazcık böyle sadece sınavı kurtarma şeklinde çalıştık, o yüzden tam mantığı oturmamış sanırım kanıt yapma şeklinin. Ondan yani diğer kanıtlarım da boş.”*

Görüşme sırasında, araştırmacı 8. sorudaki önermeyi kanıtlamayı tekrar deneyebileceğini söylemiş ve sorularla düşünmesini sağlamaya çalışmıştır. Ancak Pelin aklına bir şey gelmediğini belirterek yapmak istememiştir.

> <u>Araştırmacı:</u> *Ne düşünüyorsun ifadeye bakınca, kanıtlamaya başlasan ilk ne düşünür, ne yaparsın?*
>
> <u>Pelin:</u> *Tanımları falan kullanacağız galiba, bir şeyleri kabul edeceğiz galiba, hani diyeceğiz ki iki rasyonel sayı arasında bir sayı vardır mutlaka, sonunda o aradaki sayının irrasyonel olacağını göstereceğiz ama baya bir işlem gerekiyor sanırım.*
>
> <u>Araştırmacı:</u> *Bir kanıt yapabilmek için öncesinde mutlaka görmüş olman gerekiyor mu?*
>
> <u>Pelin:</u> *Yaparım ama tam sonuca ulaştıramam ya da bunu soyut dersinde* (soyut matematik*) falan görsek o dönemlerde yapabilirdim ama şu anda yok. Dediğim gibi biraz ezberci çalışıyoruz yani sınava yönelik.*

Verdiği yanıt, Pelin’in sadece daha önce yapılmış olan kanıtları hatırlamaya çalıştığını, akıl yürütme sürecine girmediğini ve kanıt oluşturmaktan kaçındığını düşündürmektedir. Ayrıca kanıtlama ve akıl yürütme becerilerindeki yetersizliğinin, çalışma biçiminin ezber şeklinde ve sınavlara yönelik olmasıyla ilişkili olduğu söylenebilir.

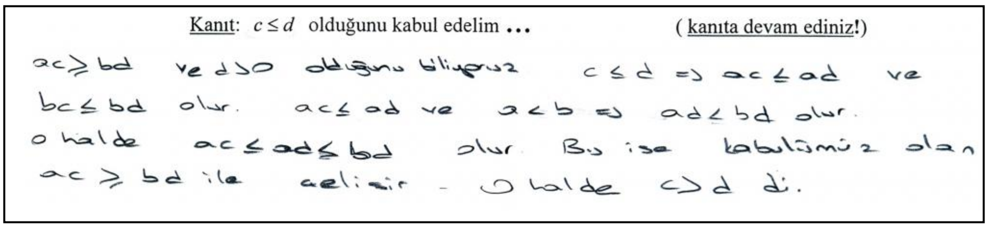
Bu önerme, son görüşmede Pelin’e tekrar sorulmuştur. Başlangıçta daha önce sorulduğunda yapamadığından yine yapamayacağını düşündüğünü belirtmiştir. Görüşmeci, soruyu kanıtlamak için herhangi bir bilgiye ihtiyacı olup olmadığını sormuştur. Pelin, bilgi eksikliği olmadığını ancak önermedeki ifadenin doğruluğunu açıkça görebildiği halde nasıl kanıtlanabileceğini bilemediğini söylemiştir. Bir süre düşündükten sonra kanıta başlamayınca, görüşmeci rasyonel sayının nasıl gösterilebileceğini sormuştur. Rasyonel sayının gösterimini doğru bir şekilde ifade eden Pelin, biraz daha düşündükten sonra bu gösterimi kullanarak kanıta başlamıştır. Sorudaki olmayana ergi yöntemine yapılan yönlendirme ve rasyonel sayı tanımının vurgulanması çözüme yönelik ipucu olmuştur ve ifadeyi geçerli bir biçimde kanıtlayabilmiştir (Şekil 4.7).



Şekil 4.7. Pelin’in son görüşme 5. (ölçme aracı 8.) soruya yanıtı

Daha sonra ifadenin doğrudan ve karşıt ters ile kanıt yöntemleriyle de kanıtlanabileceğini belirtmiş ve bu yöntemlerin kullanılması durumunda varsayımın ne olacağını ve hangi sonuca ulaşılacağını doğru bir biçimde ifade etmiştir.

Yazılı uygulamadaki 9. soruda verilen önermede karşıt ters kanıt yöntemine yönlendirme yapılmıştır. Pelin, kanıta hükmün değili kabul edilerek başlandığı için olmayana ergi ile kanıtlamayı düşünmüş, karşıt ters kanıt yöntemini aklına getirmemiş ve hipotezi zaten var kabul ederek olmayana ergi yöntemiyle geçerli bir biçimde kanıtlamıştır (Şekil 4.8).



Şekil 4.8. Pelin’in ölçme aracı 9. soruya yanıtı

10. soruda ilk iki adımı verilen kanıta, görüntü kümesi tanımını kullanarak bir satır daha eklemiş ancak devamını getirememiştir. Görüşmede soruyu incelerken kapsamayı göstermek için bir taraftan alınan herhangi bir elemanın diğer tarafta da olduğunu göstermek gerektiğini belirtmiş ve bu tür kanıtları Soyut Matematik

dersinde yaptıklarını hatırlamıştır. Ancak bir süre düşünmesine rağmen görüşme sırasında da önermeyi kanıtlayamamıştır. Bu sorudaki önerme, eşitlik şeklinde yani çift yönlü olarak son görüşmede kanıtlaması için tekrar verilmiştir. Önermeyi okuduktan sonra çift taraflı kapsama göstermesi gerektiğini söylemiş ancak birebirliğin, ifadede yer almasından ötürü tedirgin olmuştur. Araştırmacı, ihtiyaç duyduğu tanımları hatırlatabileceğini belirtmiştir ancak Pelin, tanımı hatırladığını fakat nasıl kullanması gerektiğini bilmediğini ifade etmiştir.

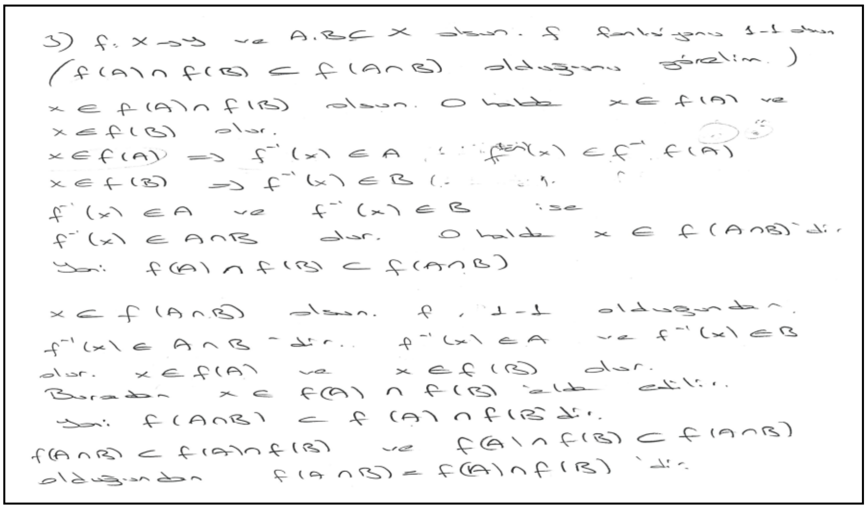
> "*Yok, hatırlıyorum da nasıl kullanıldığını çok tartıştık ama çok şey yapamadım, zaten 1. sınıfta da çok öğrenememişiz. Yani belki kullanıyorum yaparken kanıtta da ama onu birebirlikten olduğunu bilerek değil, ezbere yapıyorum bazı şeyleri"*

Bu açıklaması, birebirlik tanımının Pelin için formel olarak uygulanabilir olmadığını, bir fonksiyonun birebir olmasını nasıl göstereceğini bilmediğini, kanıtları anlamlandırmadan ve gerekçelendirmeden ezber bilgilerle oluşturmaya çalıştığını göstermektedir. Pinto ve Tall (1999) da öğrencilerin tanımları kullanmayı öğrenemedikleri zaman kanıtları ezberleyerek sınavları geçmeye çalıştıklarını ifade etmişlerdir.

Sınıf çalışmalarında da öğrencilerin en çok tartıştıkları önermeler, birebirlik kavramının yer aldığı fonksiyonlarla ilgili önermeler olmuştur. Sınıf tartışmalarına bakıldığında Pelin'in bu tartışmalarda çok fazla fikir üretmediği, genellikle pasif dinleyici olarak kaldığı, zaman zaman ortaya çıkan kanıtları anlamaya yönelik sorular sorduğu ancak kanıtlama sürecine pek katkı sağlamadığı görülmektedir. Araştırmacının, sınıf tartışmalarında bununla ilgili eksiklerini giderip gidermediğini sorması üzerine:

> *"Yani son aşamasında yapılan kanıtı anlıyorum ama yapılanı anlamakla yapmak aynı şey değil. (…) O zaman anlamıştım ama çok da sorgulayarak yapmıyorum, yazarken birebirlikten diyorsa tamam deyip ekliyordum"*

şeklinde yanıt vermiştir. Önermenin kanıtını, hatırladıklarını yazmaya çalışarak, akıl yürütme sürecine girmeden oluşturmaya çalışmış ve $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ kapsamasını, fonksiyonun birebir olmasını hangi adımda kullanması gerektiğine karar veremeden göstermiştir.



3) $f: X \to Y$ ve $A, B \subset X$ olsun. f fonksiyonu 1-1 olsun
($f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ olduğunu görelim.)
$x \in f(A) \cap f(B)$ olsun. O halde $x \in f(A)$ ve
$x \in f(B)$ olur.
$x \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(x) \in A$ ($f^{-1}(x) \subset f^{-1}.f(A)$)
$x \in f(B) \Rightarrow f^{-1}(x) \in B$ (
$f^{-1}(x) \in A$ ve $f^{-1}(x) \in B$ ise
$f^{-1}(x) \in A \cap B$ olur. O halde $x \in f(A \cap B)$'dir.
Yani $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$
$x \in f(A \cap B)$ olsun. f, 1-1 olduğundan
$f^{-1}(x) \in A \cap B$'dir. $f^{-1}(x) \in A$ ve $f^{-1}(x) \in B$
olur. $x \in f(A)$ ve $x \in f(B)$ olur.
Buradan $x \in f(A) \cap f(B)$ elde edilir.
Yani $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$'dir.
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ ve $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$
olduğundan $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$'dir.

Şekil 4.9. Pelin'in son görüşme 3. (ölçme aracı 10.) soruya yanıtı

Yazdıkları incelendiğinde (Şekil 4.9), fonksiyonun sadece birebir olması durumunda yazabileceği $x \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(x) \in A$ ve $x \in f(B) \Rightarrow f^{-1}(x) \in B$ ifadelerini birebir olma gerekçesini belirtmeden yazdığı, fonksiyonun birebir olmasını hiçbir adımda kullanmadığı görülmektedir. Pelin yazdıklarını, doğru ancak eksik kanıt olarak değerlendirmiş ve bu şekilde yapıldığını hatırladığını, birebirlik kullanmış olsa bile mantığını anlamadan, ezbere yazdığını belirtmiştir.

> *"Kanıt şeklim doğru bence ama şunu (* $x \in f(A) \Rightarrow f^{-1}(x) \in A$ *ifadesini) neye dayanarak yazdım, direkt yazabiliyor muyduk yoksa birebir olmadan yazamıyor muyduk?"*
>
> "(İkinci tarafın kapsamasını yazarken) *Yine birebirlik kullandım ya da kullanmadım şu anda, ama hangisinde kullandım bilmiyorum.*
>
> *Yani eksik, yanlış değil ya da birebirlik yanlış yerde duruyor yoksa genel anlamda doğru, ezbere yaptığım için koyamadım.*
>
> *Bu şekilde yapıyorduk. Bu şekilde yapacağımı biliyorum ama sadece bir cümle var nereye koyacağımız bilemedik."*

Pelin, kanıtı akıl yürüterek değil hatırladığı ezber bilgilerle oluşturmaya çalışmış, yaptığı geçişlerde birebirliğin nerede gerekli olduğunu belirleyememiştir. Ancak önermede verildiği için kullanılması gerektiği düşüncesiyle, birebirliği kullanmamış olmasını bir eksiklik olarak değerlendirmiştir. Yazdıklarını doğru ancak eksik bir kanıt olarak değerlendirmesi, sahip olduğu kanıt kavramının da sorunlu olduğunu göstermektedir. Bir kanıtın geçerli olabilmesi için belli bir kanıt yöntemine uygun olarak mümkün olduğunca açık ve anlaşılır ifade edilmesinin, sembol ve notasyonun doğru kullanılmasının ve gerekçelemenin önemli olduğunu göz ardı etmektedir. Pelin geçerli ve tam doğru kanıtlar oluşturamadığı durumlarda bile aklına geleni yazma davranışı göstermiştir. Stylianides ve Stylianides (2009) çalışmalarında, sınavlarda belki puan alırız düşüncesiyle öğrencilerin, eksik ve hatalı da olsa yanıtlarını yazabildiklerini ifade etmişlerdir. Pelin de, yazdıklarını eksik de olsa kanıt olarak değerlendirmiş ve kabul edilebilir olduğunu düşünmüştür.

Pelin, 11. soruda verilen kanıtın geçerli olduğunu ve fonksiyonun birebir ve örten olmaması halinde doğru olmayacağını belirtmiş ancak birebir ve örtenliğin kanıtın hangi aşamasında kullanıldığını belirleyememiştir. Kanıtta, bu özelliklerin kullanılması gerektiğine neye göre karar verdiği sorulmuş ancak Pelin, bir süre kanıtı sessizce incelemesine rağmen gerekçesini açıklayamamıştır.

Pelin 12. soruda, önermenin varsayımlarını yazmış fakat $g \circ f$ fonksiyonu için birebirlik tanımını yanlış ifade etmiştir. Yazdıklarını incelerken, doğrudan kanıt yapmaya çalıştığını ve $g \circ f$ fonksiyonu ile başlayarak ilerlediğini ama birebir olduğunu göstermesi gereken f fonksiyonundan uzaklaştığını ve kanıtı oluşturamadığını belirtmiştir. Pelin'in önermeyi ve sonucunu yeterince incelemeden hemen hipoteze odaklanması (Selden et al., 2010), f fonksiyonunun birebirliğini nasıl göstereceğini düşünmek yerine, $g \circ f$ bileşke fonksiyonunun birebirliğini kullanmaya çalışması kanıtı oluşturmasını güçleştirmiştir.

Bu soru son görüşmede tekrar sorulduğunda üzerinde sessizce düşünmüş ancak kanıtlamaya yönelik olarak ilerleme kaydedememiştir. $g \circ f$'in birebirliğinden yola çıkarak bir şeyler yapması gerektiğini ve f'nin birebirliğine ulaşması gerektiğini düşündüğünü ama bunu nasıl yapacağını bilemediğini belirtmiştir. Yazılı uygulama ve ilk görüşmeden farklı olarak, birebirlik tanımını doğru yazmış ancak önermeyi kanıtlayamamıştır.

Bölünebilme ile ilgili olan son iki önermeden 13. sorudaki önermeyi olmayana ergi yöntemi ile kanıtlamaya çalışmıştır. Ancak bölünebilmeyi yanlış ifade ederek, kavramsal ve mantıksal hatalar yapmış ve geçerli bir kanıt oluşturamamıştır. 14. soruyu ise doğrudan kanıt yöntemini kullanarak kanıtlamaya çalışmış ve bölünebilmeyi doğru ifade etmiştir. Ancak yazımdaki eksikler ve yetersiz açıklamalar nedeniyle tam doğru bir kanıt yazamamıştır.

Yapılan ikinci görüşmede Pelin'e, diğer katılımcılara olduğu gibi iki önerme verilmiş ve sesli düşünerek kanıtlaması istenmiştir. Bu önermelerden birincisinde verilen cebirsel ifadeyi payda eşitleyerek düzenlemiş ve olmayana ergi yöntemiyle geçerli bir biçimde kanıtlamıştır.

İkinci soruda, ifadeyi okuduktan sonra önermenin doğruluğunun açık olduğunu söylemiş ve başlangıçta kanıta yönelik bir girişimde bulunamamıştır. Bir süre sessizce düşündükten sonra daha önceki derslerinde bu tür ifadeleri nasıl kanıtladıklarını hatırlamaya çalışmış ve önermenin hükmündeki ifadeye denk bir eşitlik yazmayı düşünmüştür. $A = C\setminus B$ eşitliği yerine ona denk olduğunu hatırladığı $A = C \cap B'$ eşitliğini yazmış ancak dakikalarca düşünmesine rağmen ilerleyememiştir. Önermenin kanıtını oluşturmada güçlük çektiği gözlenen Pelin, bunun nedenini:

> *"Yani direk doğru olduğunu gördüğüm için gerçekten şey yapamıyorum.*
>
> *(…) Mesela şey problemi de yaşıyoruz hepimiz.(…) Hani o kadar doğru geliyor ki aralara bir şeyler yazamıyoruz"*

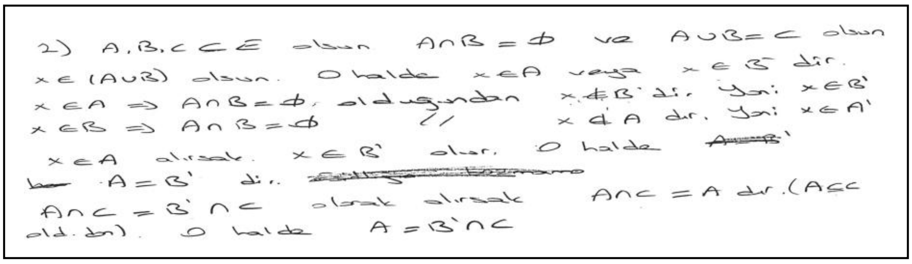
şeklinde açıklamıştır.

Yazılı uygulamadaki 8. soruda da benzer güçlüğü yaşayan Pelin, önermenin doğru olduğunu matematiksel olarak gösterememiştir. Pelin'in bu soruda, önermenin doğruluğu kendisi için açık olduğundan kanıtlamada güçlük çekmektedir.

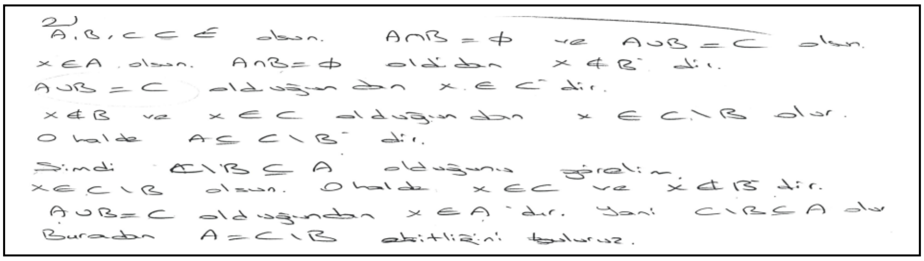
Pelin bir süre daha sessizce düşünmeye devam etmiş, bunun üzerine araştırmacı ne düşündüğünü açıklamasını istemiştir. Söyledikleri, önermenin doğruluğunu açıkça görmesine rağmen matematiksel olarak nasıl kanıtlayacağını bilmediğini göstermektedir.

> *"Direkt görmesem bir şeyler söyleyeceğim ama (…) buysa bu demiş. Ben onu kafamda kuramıyorum ki kanıtını yapayım, bazen de bu kadar çok basit geliyor (…)Tüm şeyleri düşünüyorum ama yazamıyorum"*

Pelin, verilen bağıntıya eşit olan başka bir bağıntı kullanarak (örn. $A = C\setminus B = C \cap B'$) kanıtlayabileceğini düşünmüş, uzun süre böyle bir bağıntı hatırlamaya çalışmış ancak ilerleme kaydedememiştir. Selden ve Selden (2009), deneyimsiz öğrencilerin, iki kümenin eşitliğini göstermeleri gereken durumda, eleman alıp kapsamayı göstermeyi düşünmediklerini ve doğrudan küme eşitliğini göstermeye çalıştıklarını belirtmiştir. Görüşmelerde söyledikleri düşünüldüğünde Pelin'in de, önermeleri akıl yürüterek değil ezber bilgilerini hatırlayarak oluşturmaya çalıştığı dolayısıyla kanıtlama konusunda deneyimsiz olduğu görülmektedir. Görüşmecinin "*Başka şekilde düşünmeyi denesen*…" şeklindeki uyarısıyla, eşitliğin bir tarafından eleman alarak diğer tarafta olduğunu göstermeyi düşünmüştür. Pelin daha sonra, A kümesinden aldığı elemanın $B' \cap C$ 'de olduğunu göstererek tek yönlü kapsama ile önermeyi kanıtladığını düşünmüş ancak geçerli bir kanıt oluşturamamıştır (Şekil 4.10). Aynı önerme Pelin'e son görüşmede tekrar sorulmuştur. İlk görüşmeden farklı olarak soruyu dikkatle okumuş, eşitliği kanıtlamak için çift taraflı kapsamayı göstermesi gerektiğini belirtmiş ve düşündüklerini matematiksel olarak düzgün bir biçimde ifade ederek geçerli bir kanıt oluşturmuştur (Şekil 4.11).


2) $A, B, C \subset E$ olsun $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ olsun
$x \in (A \cup B)$ olsun. O halde $x \in A$ veya $x \in B$ dir.
$x \in A \Rightarrow A \cap B = \emptyset$, olduğundan $x \notin B$ dir. Yani $x \in B'$
$x \in B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ // $x \notin A$ dır. Yani $x \in A'$
$x \in A$ alırsak $x \in B'$ olur. O halde ~~A = B'~~
~~ba~~ $A = B'$ dir. ~~…~~
$A \cap C = B' \cap C$ olarak alırsak $A \cap C = A$ dır. ($A \subseteq C$ old. dan). O halde $A = B' \cap C$

Şekil 4.10. Pelin'in ikinci görüşme 2. önermeye yanıtı


2) $A, B, C \subset E$ olsun. $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ olsun.
$x \in A$ olsun. $A \cap B = \emptyset$ old. dan $x \notin B$ dir.
$A \cup B = C$ olduğundan $x \in C$ dir.
$x \notin B$ ve $x \in C$ olduğundan $x \in C \setminus B$ olur.
O halde $A \subseteq C \setminus B$ dir.
Şimdi $C \setminus B \subseteq A$ olduğunu görelim.
$x \in C \setminus B$ olsun. O halde $x \in C$ ve $x \notin B$ dir.
$A \cup B = C$ olduğundan $x \in A$ dır. Yani $C \setminus B \subseteq A$ olur
Buradan $A = C \setminus B$ eşitliğini buluruz.

Şekil 4.11. Pelin'in son görüşme 2. (ikinci görüşme 2.) soruya yanıtı

Yazılı uygulamadaki sorulara verdiği yanıtlar, ilk iki görüşmedeki açıklamaları ve kanıtlarla uğraşma süreci genel olarak değerlendirildiğinde, Pelin'in kanıtlama becerilerinin yetersiz olduğu, kanıt oluşturma ve yazmada güçlük yaşadığı görülmektedir. Pelin, çalışmanın başında uygulanan sorularda, verilen önermelerin hiçbirini geçerli bir biçimde kanıtlayamamış, bireysel görüşmelerde, önermeyi kanıtlaması için verilen sürede fikir üretmek yerine genelde sessiz kalmış ve

"…*derste böyle bir şey vardı ama hatırlayamadım şimdi, aklıma gelmedi, böyle yapıyorduk sanki*…" gibi ifadeler kullanmıştır. Ayrıca Pelin, kanıtları oluşturamamasının gerekçesini de, bugüne kadar hep sınavlara yönelik olarak ezberleyerek çalıştığı için hatırlamakta güçlük çekmesi olarak açıklamıştır. Kanıtlama sürecinde akıl yürütmek yerine hatırlamaya çalışması, kanıtları ezber bilgilerle oluşturmaya çalıştığının dolayısıyla kanıtlamaya prosedürel olarak yaklaştığının göstergesidir. Prosedürel yaklaşımda kişi, kendisi için anlamlı olmadan, geçerli bir kanıt oluşturmasını sağlayacak adımları uygulamaya çalışır. Sınıf çalışmalarında da Pelin, önermeleri (örn. 4.hafta Önerme 4.2) açıklayarak kanıtlaması için tahtaya kalktığında, benzer şekilde kanıtlanmış olan bir önceki önermedeki prosedürü uygulayarak kanıtı oluşturmuştur.

Çalışmanın başında karşıt ters yöntemini tam olarak hatırlayamamış, son görüşmede ise üç kanıt yöntemini doğru olarak açıklamış ancak çalışma süresince karşıt ters kanıt yöntemini hiç kullanmamıştır.

Pelin'de gözlenen güçlüklerden biri diğer öğrencilerde olduğu gibi birebirlik tanımını kanıtlarda kullanamamış olmasıdır. İlk görüşmede birebir tanımını da yanlış ifade etmiş, son görüşmede tanım ve kavram bilgisi tam olmasına rağmen kanıtlama sürecinde kullanamamıştır.

Çalışmanın başında kanıtlayamadığı önermelerden ikisini (ölçme aracı 8. ve 9. sorular), hipotez ve hükmü net bir biçimde ifade ederek, mantıksal geçişlerle ilerleyerek düzgün ve kabul edilebilir biçimde kanıtlamıştır. Bu açılardan bakıldığında bazı eksiklerini gidermesi konusunda, çalışmanın Pelin'e katkısının olduğu ve kanıtlama sürecinde nelere dikkat etmesi gerektiği ile ilgili bir farkındalık yarattığı söylenebilir. Ancak başlangıçta kanıtlayamadığı 10. sorudaki önermeyi son görüşmede de geçerli olarak kanıtlayamamış, birebirlik tanımını kullanamamıştır. Bu yüzden çalışmanın başındaki, birebir tanımını formel olarak uygulayamama eksikliğinin çalışma boyunca giderilmemiş olduğu söylenebilir. Pelin bu durumun sebebini, tartışmalarda anlamış olsa da sonrasında üzerinde çalışmaması ve yapılanı anlamanın uygulamak için yeterli olmaması şeklinde açıklamıştır. Çalışma süresince, sınıf tartışmalarında Pelin, genellikle arkadaşlarının ortaya koyduğu fikirler üzerine sorular sormuş ve bazen yorumlarda bulunmuş, kendi başına fikir üretmemiş ya da fikirlerini ifade etmemiştir. Bu açıdan bakıldığında, kanıtlama becerilerinde gelişme kaydetmiş olsa da, çalışmadaki katılımının düşük olmasının, bazı güçlüklerini giderememesinde etkili olduğu düşünülmektedir.

Çalışmanın Pelin'e kanıtlama becerisi bakımından en büyük katkısı, hatırlamaya çalışarak kanıtlamak yerine akıl yürüterek daha dikkatli biçimde kanıtlarını oluşturmaya çalışması; başlangıçta doğru düşüncelerini bile anlaşılır biçimde ifade edemezken, çalışmanın sonunda matematiksel dil ve notasyonu daha düzgün kullanıp kanıtları yazmasıdır. Ayrıca çalışmanın başında daha çok hatırlamaya odaklanıp, hatırlamayınca uğraşmamasına ve görüşmelerde kanıt oluşturmayı tekrar denemekten kaçınmasına rağmen, son görüşmede kanıtlamak için çaba göstermiş ve farklı yöntemler uygulayarak sonuca ulaşmaya çalışmıştır.

Bu bölümde, Pelin'in aldığı derslerin işlenişi hakkındaki düşünceleri, çalışma biçimi, duyuşsal özellikleri, kanıtlama sürecindeki duygusal durumu ve bunların matematiksel kanıtlama sürecine etkisi, veriler doğrultusunda incelenecek ve yorumlanacaktır.

Matematiksel kanıtlama konusunda güçlük çektiğini ifade eden Pelin, bu güçlüğü daha önce kanıtlama deneyimi yaşamamış olmasına bağlamış ve derslerde de sadece ders sorumlusunun kanıt yaptığını, onların da bunları ezberleme yoluna gittiğini belirtmiştir.

> *"Kanıt yapma konusunda güçlükler yaşıyorum. Çünkü şimdiye kadarki derslerimizde bireysel olarak çok ciddi kanıtlar yapmadık. Ciddi derken, hocalarımız çözdü yani kanıtladılar ama biz kişisel olarak hiçbir zaman kanıtlar yapmadık ciddi anlamda, yapılanların benzerlerini çevirdik, sınavlarda öyle çıktı ya da sınavlarda ciddi kanıtlar varsa da bir şekilde ezberleyerek girdik, kendimiz yapmadık hiçbir şekilde"*

Pelin, matematik derslerini ders sorumlusunun tahtaya yazdıklarını defterlerine geçirdikleri dersler olarak ifade etmiş ve çalışma biçiminin de genelde derslerde yapılan kanıtları ezberlemeye çalışmak şeklinde olduğunu belirtmiştir. Pelin, dersleri geçmek için ezber yapması gerektiğini ve bunun etkili bir yöntem olduğunu düşünmektedir.

> *"Defteri bir kere çalışıyorum, konunun mantığını anlıyorum ama o kadar anlamakla kanıt yapmak olmuyor. O yüzden de yapılmış kanıtları*

ezberlemek daha kısa süreli oluyor, yani ezber uzun süreli oluyor aslında ama daha yararlı oluyor."

Sadece sınavlara yönelik ve ders geçme amaçlı çalıştığını belirten Pelin, sınavlardan önce genellikle defterine ve önceki yıllarda sorulmuş olan sınav sorularına çalıştığını, çalıştığı kanıtları anladığını ancak farklı bir ifadeyle karşılaştığında nasıl kanıtlayacağını bilemediğini söylemiştir. Derslerin düz anlatım şeklinde işlenmesinin verimli olmadığını, kimi zaman öğretmenlerinin tabiriyle derslerde sadece "sekreterlik" yaptıklarını belirtmiştir.

"Daha önce kanıt yapmadığımız için mesela kanıtlarda cümleler falan da önemli kuramıyoruz. Nasıl gideceğini bilmiyoruz, yani yapılan bir kanıtı anlamak daha kolay geliyor çünkü o şekilde çalışmışız. Ezber yapmadan önce bakıyoruz bazen, yani genelde öyle oluyor çünkü mantığını da kurmadan bir şekilde ezber yapılmıyor. En azından ben yapamıyorum. Sadece böyle böyle yapılır diyebiliyorum ama kanıt yapmaya gelince olmuyor. (…) Mesela yabancı dilde de öyledir, konuşulur anlarsın ama sen cümle kuramazsın"

Derslerin işlenme biçimi ve sınavlarda sorulan sorular, ezber yaparak çalışmaya yönelmesindeki nedenlerden olarak düşünülebilir. Çünkü derslerde öğrencilere bitmiş ürünler sunulmaktadır (Pedemonte, 2007). Öğrencilerin sadece onlara sunulan hazır kanıtları sınava yönelik olarak çalışmaları ya da ezberlemeleri, dersi başarmaları için yeterli olabildiğinden, anlamaya ve akıl yürütmeye önem vermemekte ezber stratejilere yönelmektedirler. Çalışmalarda da, öğrencilerin iş yükünün çok fazla olduğunu veya değerlendirmenin, yeniden üretmeyi ölçtüğünü düşünmeleri durumunda kavramaya daha az önem verdikleri ve öğrenmede en iyi yaklaşımların, yüzeysel ve ezber yöntemler olduğunu düşündükleri ifade edilmiştir (Crawford et al,1994). Öğrencilerin kanıtlama becerisi kazanmaları ve ezbere yönelmeden akıl yürüterek kanıt oluşturabilmeleri için kanıtlarla uğraşmaları, deneyim kazanmaları gerekmektedir.

Pelin'in söyledikleri, kanıtlara karşı olumsuz tutumunun bir diğer sebebinin de, bölümünü ve derslerin içeriğini benimsememiş olması olduğunu göstermektedir.

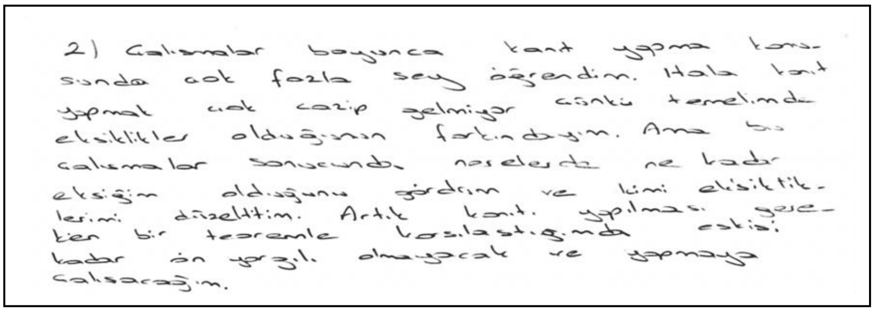
"(…) gerçekten hiç ilgi duymuyorum. Buranın böyle olduğunu bilseydim gelmezdim. Geldiğimde yok yani, dedim dersleri geçeyim bitsin. (…) çok teorik geldi, bir de zevkli gelmedi sıkıcı geliyor. O yüzden sadece dersi

kurtarayım yeter anlamında. Mesela çok zaman ayırıyorum, çalışmıyor değilim ama dediğim gibi ezberle alakalı ben de ezber yapamıyorum."

Derslerin işlenişi ve çalışma biçimi ile ilgili söyledikleri, görüşmelerde ve sınıf çalışmalarındaki davranışları, zevk almanın ve ilgi duymanın matematiksel görevlerle ve kanıtlarla uğraşmada ve başarıda ne kadar önemli olduğunu ortaya koymaktadır. Bu bulgu, öğrencilerin öğrenmelerinde, başarı ve başarısızlıklarında duyuşsal yönün önemli etkisi olabileceğini gösteren çalışmaları desteklemektedir (Weber, 2008; Furinghetti & Morselli, 2009; Heinze & Reiss, 2009). Pelin matematik derslerinin ve kanıtlamanın ezber gerektirdiğine inanmakta, düşük başarı göstermesinin nedenini ezberleyememesi olarak görmektedir. Pelin önermeleri kanıtlama sürecinde işin çıkamadığı ve ilerleyemediği durumlarda yaşadığı hüsran sonucu kaygı ve umutsuzluk durumuna geçmiştir. Önermelerin kanıtlarıyla uğraşırken, çalışmanın başında çabuk vazgeçmesi, kanıtlayamayacağını düşünmesi ve yeterince çalışmadığı, çok fazla eksiği olduğu için başaramadığını ifade etmesi; kaygı, korku ve umutsuzluk duygusal durumlarında görülen, kişinin problem çözmeden kaçınma ve yetersizlikleri kendine yükleme gibi savunma mekanizmaları geliştirmesine örnek teşkil etmektedir.

Pelin kanıtlara genellikle önyargılı ve yapamayacağını düşünerek yaklaşmış, önermeleri okuduktan sonra ne düşündüğünü araştırmacının sesli düşünmesi için uyarmasıyla sözel olarak ifade etmeye çalışmış ama düşüncelerini yazmaktan ve kanıtlama girişiminde bulunmaktan kaçınma davranışı göstermiştir. Sınıf çalışmalarında da yeni fikirler üretmekten çok, arkadaşları tarafından üretilen fikirler üzerinden gitmiş, onların yaptıklarını anlamaya çalışmış ve tüm katılımcıların birlikte gerçekleştirdiği tartışmalarda genellikle sessiz kalmayı tercih etmiştir. Sınıf çalışmalarında verilen bireysel görevlerde tek başına ilerlemekte zorlanmış ve arkadaşlarıyla birlikte çalışmak istemiştir. Bunun nedenini, kendini sınavdaymış gibi hissetmesinin yarattığı kaygı duygusu olarak belirtmiştir. Bütün bunların Pelin'in kanıtlamaya karşı ilgi duymaması, merakının olmaması, keyif almaması ve tek başına kanıtları oluşturamayacağına inanması ile ilgili olduğu söylenebilir.

Pelin, yazılı uygulamada ve bireysel görüşmelerde yapamadığı dört sorudan ikisini son görüşmede yanıtlayabilmiş ve kanıtlarla uğraşırken tıkandığı noktada hemen vazgeçmek yerine farklı yollardan deneyerek sonuca ulaşmaya çalışmıştır. Çalışma ile ilgili olarak yazdığı görüşlerinde, artık karşılaştığı kanıtlara karşı önceki kadar ön yargılı olmayıp kanıtlamaya çalışacağını ifade etmiştir. Bu bakımdan çalışmanın Pelin'in ön yargılarının azalmasında ve kanıtlama sürecinde nasıl düşünmesi gerektiği konusunda bir farkındalık yarattığı söylenebilir. Çalışmaya ilişkin görüşlerinde de Pelin bu durumu ifade etmiştir (Şekil 4.12).


2) Calısmalar boyunca kanıt yapma konu-
sunda cok fazla sey öğrendim. Hala kanıt
yapmak cok cazip gelmiyor cünkü temelimde
eksiklikler olduğunun farkındayım. Ama bu
calısmalar sonucunda nerelerde ne kadar
eksiğim olduğunu gördüm ve kimi eksiklik-
lerimi düzelttim. Artık kanıt yapılması gere-
ken bir teoremle karsılastığımda eskisi
kadar ön yargılı olmayacak ve yapmaya
calısacağım.

Şekil 4.12. Pelin'in çalışmaya ilişkin son değerlendirmesi

4.1.3. Veli'nin kanıtlama süreci

Veli'nin yazılı olarak uygulanan sorulara verdiği yanıtlardaki tutarsızlıklar, bir koşullu önermenin kanıtında kullanılabilecek üç kanıt yöntemiyle ilgili bilgisi hakkında net bir karar vermede yeterli olmamıştır. Kanıt yöntemlerini düşünerek, önermenin kanıtındaki varsayımı belirlemesi istenen 1. soruda sadece doğrudan kanıt ve olmayana ergi kanıt yöntemlerine uygun varsayımların olduğu, 2. soruda ise her üç yönteme göre varsayım ve hükmün belirtildiği seçenekleri işaretlemiştir. Bir önermenin kanıtı için üç alternatifin sunulduğu ve bu kanıtların geçerliliklerini kontrol etmesinin beklendiği 5. soruda, üç farklı yöntemle yapılmış olan geçerli kanıtlardan sadece doğrudan kanıtı; sadece ikisi doğru olmak üzere üç alternatifin sunulduğu 6. soruda ise doğru olarak verilen, doğrudan kanıtı ve karşıt ters ile kanıtı geçerli olarak kabul etmiştir.

Yapılan birinci görüşmede, yanıtlarını kontrol etmesi ve soruları yanıtlarken nasıl düşündüğünü açıklaması istenmiştir. Bu görüşme sonucunda, koşullu önermelerin kanıtlanmasında kullanılabilecek üç temel yöntemin farkında olduğu ortaya çıkmıştır. Görüşmede Veli'ye bu üç kanıt yönteminin uygulanışı sorulduğunda:

“(…) doğrudan kanıtta, verilen hipotezi kabul edip sonuca ulaşmaya çalışıyorduk. Olmayana ergi, hipotezin sonucunun doğru olmadığını kabul ediyorduk fakat hipotezin başının da doğru olduğunu kabul edip çelişki elde ediyorduk. Şöyle bir şey vardı mesela, şu ise budur. “İse” den sonraki kısmın yanlış olduğunu kabul edip, fakat ilk başını yine doğru kabul edip, bir çelişki elde ediyorduk. Dolaylı kanıt ıııı… sanırım o da şöyle bir şey olabilir, P ise Q diye düşünüyoruz ya bunun karşıt tersi vardır Q’nun değili ise P’nin değili, onu dolaylı kanıt olarak hatırlıyorum.”

şeklinde açıklama yapmıştır. Bu açıklamalara göre öğrenci bu yöntemlerle ilgili prosedürel bilgiye sahiptir. Ancak diğer sorulara verdiği yanıtlar incelendiğinde, bu yöntemlerden karşıt ters ile kanıt yöntemini uygulama konusunda yetersiz olduğu ve bu yöntemle yapılmış geçerli kanıtları, varsayım ve sonuca eklemeler yaparak, olmayana ergi yöntemi ile kanıta uygun hale getirmeye çalıştığı görülmüştür. 5. soruda, önermenin karşıt ters ile kanıtının geçerliğini kontrol ederken:

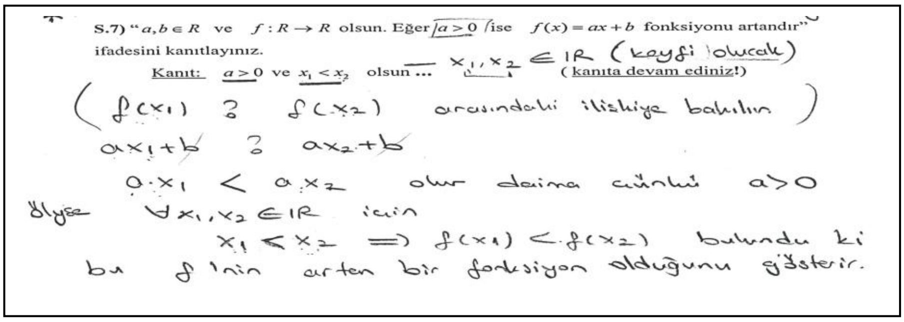
“Bunu daha güzel yazabilirdi sanki, olmayana ergi ile başlıyor, sonuçta çelişki elde edelim diye zihninde tasarlamış olabilir. Yani satır eksik gibi o yüzden eksik olduğunu düşündüm. Ama acaba yazan, o satırı kafamda tasarlayım deyip de sonucun yine çelişkisini elde etmiş diye düşünebilir miyiz?”

şeklinde yorumlayarak, verilen kanıtta olmayana ergi yönteminin uygulanılmış olduğunu düşünmüş ve karşıt ters ile kanıtı aklına getirmemiştir. Yazılı olarak yanıtladığında geçerli bir kanıt olarak kabul etmediği, önermenin olmayana ergi ile yapılmış kanıtı için de karar değiştirerek geçerli bir kanıt olduğunu söylemiştir. Bu sorudaki önerme, öğrenciye son görüşmede verilerek kanıtını kendisinin oluşturması istenmiştir. Öğrenci ifadeyi hem doğrudan kanıt hem de olmayana ergi ile kanıt yöntemiyle kanıtlamıştır.

3. soruda, verilen kanıttan çıkarım yapmaları ve olmayana ergi yöntemi ile kanıtı verilmiş olan önermeyi belirlemeleri istenmiştir. Veli, verilen kanıtın hangi ifadeyi kanıtladığını doğru bir şekilde belirlemiştir.

4. soru, kanıtın mantıksal temelini oluşturan, bir ifadenin tersini, karşıt tersini, karşıtını ve değilini belirleme becerilerini değerlendirmek amacıyla sorulmuştur. Veli bu soruyu da doğru yanıtlamıştır.

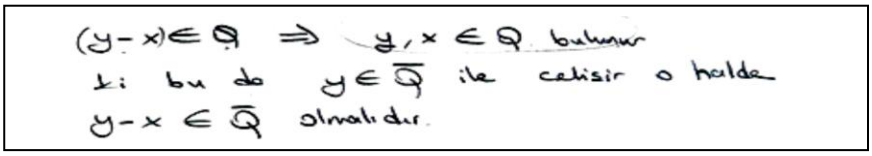
Üç kanıt yöntemini kullanarak, verilen önermelerin kanıtlarını oluşturmaları beklenen sorulardan, doğrudan kanıt yöntemi ile yapılması beklenen 7. soruyu Şekil 4.13'teki gibi yanıtlamıştır.



Şekil 4.13. Veli'nin ölçme aracı 7. soruya yanıtı

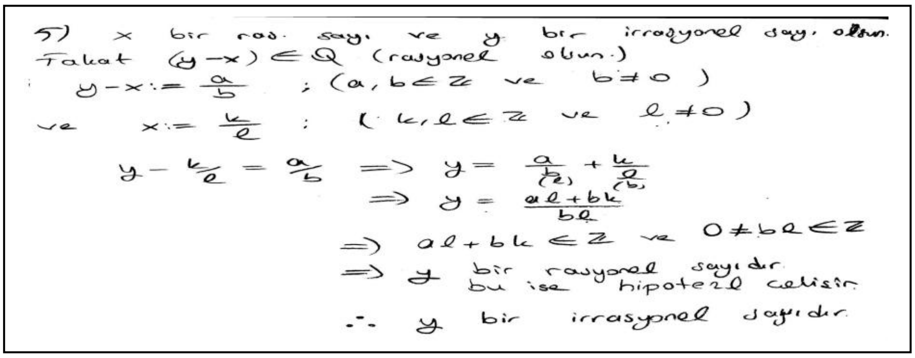
Veli, görüşme sırasında ifadenin neden doğru olduğunu kabul edilebilir bir biçimde açıklamasına ve doğru düşünmesine rağmen, kanıtındaki ifadeleri olması gereken düzende, açık bir biçimde yazamamış ve kanıt çerçevesini oluşturamamıştır. Bir argümanın matematiksel kanıt olabilmesi için, mantıksal notasyonun uygun yerde kullanılması ve kanıt yöntemini işaret eden belli biçimdeki kelimelerin yer aldığı, mümkün olan en açık şekilde yazılmış olması gerekmektedir (Weber & Alcock, 2009). Bu açıdan değerlendirildiğinde Veli'nin yanıtının matematiksel olarak düzgün bir kanıt olduğu söylenemez.

Olmayana ergi yöntemi ile kanıtlanması beklenen 8. soruya Şekil 4.14'teki açıklamayı yazmış ve irrasyonel sayının nasıl ifade edildiğini bilmediğinden kanıtlayamadığını belirtmiştir. Görüşme sırasında, rasyonel sayının nasıl ifade edileceğini hatırlamasına rağmen, bu bilgiyi kanıtta nasıl kullanacağını belirleyememiştir.



Şekil 4.14. Veli'nin ölçme aracı 8. soruya yanıtı

Bu soru, son görüşmede tekrar sorulmuştur. Veli, öncelikle doğrudan kanıt yöntemini kullanmayı tercih etmiş ve hemen hipoteze odaklanarak (Selden et al., 2010) irrasyonel sayıyı ifade etmeye çalışmış ancak ilk girişiminde başarılı olamamıştır. Daha sonra, soruda olmayana ergi yöntemine yapılan yönlendirmeyi fark etmiş ve bu yöntemi uygulayarak geçerli bir kanıta ulaşmıştır (Şekil 4.15).



Şekil 4.15. Veli’nin son görüşme 5. (ölçme aracı 8.) soruya yanıtı

9. soruda verilen önermeyi, karşıt ters kanıt yöntemiyle kanıtlaması için kanıtın ilk adımı verilerek yönlendirme yapılmıştır. Ancak Veli bu soruda da varsayıma ekleme yaparak olmayana ergi kanıt yöntemini kullanmış,

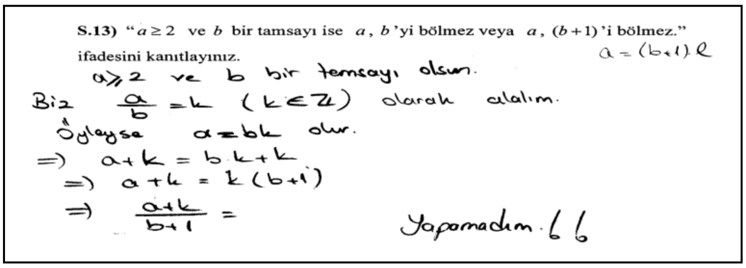
> “*Kafamda tek olmayana ergi olduğu için ona uydurmaya çalışmışım büyük ihtimalle* ”

açıklamasını yapmıştır. Bu önerme, öğrenciye kanıtlaması için son görüşmede tekrar verilmiş ve kanıt yöntemi ile ilgili yönlendirme yapılmamıştır. Öğrenci, ifadeyi doğrudan kanıt yöntemiyle, kabul edilebilir bir biçimde kanıtlamıştır. Veli karşıt ters ile kanıt yöntemini tanıdığı ve uygulanışını prosedürel olarak bildiği halde önermeleri kanıtlarken kullanmamıştır.

Fonksiyonlarla ilgili 10. ve 11. soruları yanıtlarken, fonksiyonun birebir ve örten olması özelliklerini, tanım ve değer kümelerini Venn diyagramında çizerek şekil üzerinde görmeye çalışmıştır. 10. soruda doğru düşünmüş ve oluşturduğu kanıtın adımlarını gerekçelendirmiştir. Ancak görüşmede, yaptığı kanıttan tam anlamıyla emin olamadığını ifade etmiştir. Yazdıkları incelendiğinde birebirliği doğru yerde kullandığı ve geçerli bir kanıt oluşturduğu görülmüştür.

11. soruda verilen kanıtı geçerli olarak kabul etmiş ancak fonksiyonun birebir ve örten olma özelliklerine, kanıtın hangi aşamasında ihtiyaç olduğunu doğru biçimde belirleyememiştir. 12. ve 14. sorulardaki önermeleri doğrudan kanıt yöntemiyle kabul edilebilir bir biçimde kanıtlamıştır.

Veli yazılı uygulamada, 13. sorudaki önermenin kanıtını oluşturamamıştır (Şekil 4.16). Bu önerme, son görüşmede öğrenciye tekrar sorulduğunda önermeyi daha önce kanıtlayamadığı için yine kanıtlayamayacağını düşünmüştür. Kanıt yöntemi olarak genelde doğrudan kanıtı tercih ettiğini ancak bu ifadeyi doğrudan kanıt yöntemi ile kanıtlarken "*veya*" lı ifadelerden birinin sağlandığını göstermesinin, kanıt için yeterli olup olmayacağından emin olmadığını belirtmiştir. Sorunun "*veya"* ifadesi içeren birleşik önerme olmasından dolayı bir süre tereddüt yaşamış ancak sonrasında olmayana ergi ile kanıtı kullanmayı düşünerek ifadenin değilini almış ve geçerli bir kanıt oluşturmuştur (Şekil 4.17). Veli son görüşmede, önceleri olmayana ergi yöntemini kullanmayı tercih etmediğini ancak sınıf çalışmaları sırasında bu yöntemi benimsediğini belirtmiştir.


S.13) "$a \geq 2$ ve b bir tamsayı ise a, b'yi bölmez veya a, $(b+1)$'i bölmez."
ifadesini kanıtlayınız.

$a = (b+1).\ell$

$a \geqslant 2$ ve b bir tamsayı olsun.

Biz $\frac{a}{b} = k$ $(k \in \mathbb{Z})$ olarak alalım.

Öyleyse $a = bk$ olur.

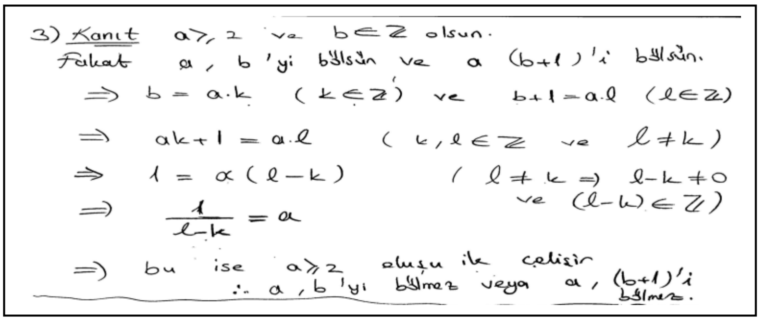
$\Rightarrow a + k = b.k + k$

$\Rightarrow a + k = k(b+1)$

$\Rightarrow \frac{a+k}{b+1} =$

Yapamadım. 66

Şekil 4.16. Veli'nin ölçme aracı 13. soruya yanıtı


3) Kanıt $a \geqslant 2$ ve $b \in \mathbb{Z}$ olsun.

Fakat a, b'yi bölsün ve a $(b+1)$'i bölsün.

$\Rightarrow b = a.k$ $(k \in \mathbb{Z})$ ve $b+1 = a.\ell$ $(\ell \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow ak + 1 = a.\ell$ $(k, \ell \in \mathbb{Z}$ ve $\ell \neq k)$

$\Rightarrow 1 = a(\ell - k)$ $(\ell \neq k \Rightarrow \ell - k \neq 0$ ve $(\ell - k) \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow \frac{1}{\ell - k} = a$

$\Rightarrow$ bu ise $a \geqslant 2$ oluşu ile çelişir

$\therefore$ a, b'yi bölmez veya a, $(b+1)$'i bölmez.

Şekil 4.17. Veli'nin son görüşme 3. (ölçme aracı 13.) soruya yanıtı

İkinci görüşmenin ikinci bölümünde, verilen iki önermeden birincisinin kanıtını, cebirsel işlem ve sözel açıklama ile sonucun doğrulanması şeklinde yapmıştır. Önermenin hipotezini ve hükmünü net bir biçimde ifade edememiş, kanıt çerçevesini oluşturamamış, belli bir kanıt yöntemini uygulayamamıştır.

Küme konusunda bir eşitliği kanıtlaması gereken ikinci önermede ise, kanıtlama sürecine Venn diyagramı çizerek başlamış ve şekil çizme sebebini:

"Bu tür ifadeleri önce Venn şemasında görmeyi tercih ediyorum (…). Hakikaten eşitliğin, bunun doğru olup olmadığını zihnimde, sezgisel olarak bir şey yapmış oluyoruz belki de"

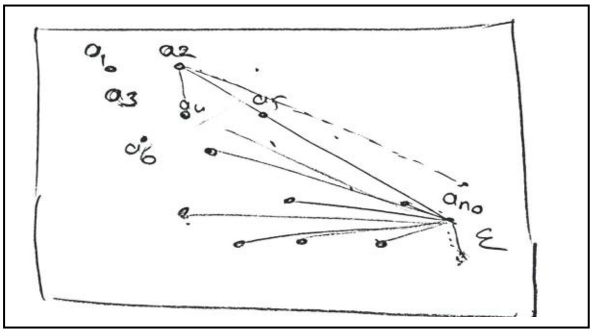
şeklinde açıklamıştır. Veli bu önermenin kanıt çerçevesini, alt kanıtlarını (Selden & Selden, 2009) düzgün bir biçimde oluşturmuş ve kanıtta ilerlerken de her adımda yaptıklarını gerekçelendirmiştir.

Yazılı olarak uygulanan sorulara verdiği yanıtların incelenmesi ve bu yanıtlarla ilgili daha derinlemesine bilgi elde etmek amacıyla yapılan görüşme sonucunda, Veli'nin, matematiksel kanıtlamada gerekli olan; verilen bir önermede hipotez ve hükmü belirleme, önermenin değilini, tersini, karşıt tersini bulma ve bunların doğruluk değerlerini belirleme, verilen kanıtların geçerliliğini kontrol etme becerilerine sahip olduğu; olmayana ergi, karşıt ters ile kanıt ve doğrudan kanıt yöntemlerini tanıdığı ve koşullu önermeleri olmayana ergi ve doğrudan kanıt yöntemlerini kullanarak kanıtlayabildiği belirlenmiştir. Buna rağmen, en başta yazılı olarak uygulanan ve çalışma öncesindeki görüşmelerde yöneltilen kanıt oluşturma sorularının tümünü yanıtlayamamıştır. Ancak 5 haftalık sınıf çalışmaları sonucu gerçekleştirilen son görüşmede, kanıt yöntemlerini uygulama ve kanıtları yazmada daha az sorun yaşamış ve verilen önermeler için geçerli kanıtlar oluşturmuştur.

Veli'nin kanıt oluşturma sürecindeki davranışları Weber (2004b)'e göre değerlendirildiğinde, kanıtlamaya semantik olarak yaklaştığı söylenebilir. Veli kanıtlama sürecine, genellikle şekil çizerek, örnekler vererek başlamış ve önce sezgisel olarak ikna olmaya çalışmıştır. Bu bakımdan tanım, teorem ve mantık kurallarını içeren kanıt gösterim sisteminin dışındaki gösterim sistemlerini de kullanmıştır. Sınıf çalışmalarında da, arkadaşlarının ve kendisinin yaptığı kanıtlarda, satırlar arasındaki geçişlerin nedenini sorgulamış ve kanıtın her adımının gerekçelendirilmesine ihtiyaç duymuştur. Ayrıca semantik yaklaşımı olan bazı öğrencilerde görüldüğü gibi, örneklerle ve kullandığı gösterimlerle (örn. grafik, diyagram) sezgisel olarak ikna olmasına rağmen, kanıtı sembolik notasyon kullanarak ifade etmede güçlük yaşamıştır.

Sınıf çalışmalarında, öğrenciler kimi zaman grup içinde kısa süreli olarak tek başlarına düşünme ve sonrasında düşündüklerini grup arkadaşlarının fikrine sunma yolunu seçmişlerdir. Veli'nin bu şekilde davrandığı zamanlardaki çalışmalarında kullandığı şekiller ve sembolik olmayan sözel açıklamaları dikkat çekmektedir. Grup çalışmalarında ikinci hafta sorulan önerme 2.1'i (Bkz. Ek.5), tüm sınıf tartışmaya başladıklarında, tahtaya kalkarak bir sayı doğrusu çizmiş ve sayı doğrusu üzerinde aldığı her sayı için bu sayıyı içeren bir $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığı bulabildiğini ve ε değeri değiştikçe, belirlediği sayı aralığın dışına çıksa bile her defasında 0 sayısının aralıkta kalacağını ifade ederek, önermeyi şekil üzerinde açıklamıştır. Ancak Veli, örneklendirerek ve sözel olarak açıklayarak önermenin doğruluğuna sezgisel olarak ikna olmuş olsa da, matematiksel bir kanıt oluşturamamış ve düşüncelerini matematiksel ifadelerle kanıta dönüştürme konusunda diğer arkadaşlarından yardım istemiştir.

Son hafta verilen önerme 5.2'nin (Bkz. Ek.8) kanıtı için, çizdiği düzlem üzerinde dizinin terimlerini temsil eden noktalar alarak düşüncelerini açıklamaya ve kanıtlamaya çalışmıştır (Şekil 4.18).



Şekil 4.18. Veli'nin Önerme 5.2'yi kanıtlamaya çalışırken çizdiği şekil

Bütün bunlar, Veli'nin kanıtlama sürecinde semantik akıl yürüttüğünü ve sezgisel olarak ikna olmaya önem verdiğini fakat matematiksel kanıt oluşturma, yazma ve ifade etmede sorunlar yaşadığını göstermektedir. Ancak çalışma sürecinin sonunda yapılan görüşmede, kanıtları yazma ve düşündüklerini matematiksel olarak ifade etmede, sürecin başındakine göre daha az güçlük yaşamış ve verilen önermelerin tümünü düzgün bir şekilde kanıtlamıştır. Veli, çalışmanın başındaki görüşmelerde ve sınıf çalışmalarında olmayana ergi kanıt yöntemini kullanmaktan kaçınmasına rağmen son görüşmede bu yöntemi kullanmış ve bunu grup tartışmalarında benimsediğini ifade etmiştir.

Bu bölümde, Veli'nin matematiksel kanıtlama sürecindeki duyuşsal özellikleri, derslerin işlenişi hakkındaki görüşleri ve çalışma biçimi, veriler doğrultusunda incelenecek, bunların kanıtla ilgili güçlükleri ve kanıtlama yaklaşımı üzerindeki olası etkileri yorumlanacaktır.

Yazılı uygulamadaki kanıtla ilgili güçlüklerini belirlemeye yönelik soruya verdiği yanıtta, uygulaması gereken kanıt yöntemini belirlemekte güçlük çektiğini, bunun kanıtlara ilgi duymamasıyla ve sadece sınavlara yönelik çalışmasıyla ilişkili olduğunu ifade etmiştir.

> *"Evet, kesinlikle* (güçlük) *yaşıyorum. Bunların en temeli teoremi bazen yanlış anlıyor olmam. Sonrasında hangi kanıt yönteminin o teorem için uygun olduğunu kestiremediğim için bocalama ve güvensizlik duyarım. Her şeyden daha önemlisi de; bu konularda yani kanıt yapma ve matematiksel kanıt yöntemlerine karşı şahsen ilgisizim, bugüne kadar yaptığım kanıtların % 70'i derslerimde başarılı olmak için sınavlardan önce yaptığım çalışmalardan ibarettir"*

Yazılı soruları yanıtlarken nasıl düşündüğü ile ilgili daha ayrıntılı bilgi elde etmek amacıyla yapılan birinci görüşmede, sürekli yaptıklarından şüphe duymuş, doğru yapmış bile olsa tam anlamıyla emin olamamıştır.

> *"(…) yani hep bu kanıt yöntemlerinde korkmuşumdur, tedirgin olmuşumdur."*

Doğru yaptığı bir kanıtı kontrol ederken yine de çelişkide kalmasının ve hiçbir zaman tam emin olamamasının geçmiş deneyimlerinden kaynaklandığı ortaya çıkmıştır. Doğru yaptığı bir kanıtın, neden doğru olmadığını düşündüğü sorulduğunda:

> *"Ya ben bu kanıtlardan hep korkmuşumdur zaten kesin yanlıştır. Sınavlara girerim, hepsini yaparım, kaç bekliyorsun? Büyük ihtimalle çizilir üstü diye düşünüyorum 40-50 en fazla, geçecek kadar not (…) psikolojik herhalde hoca burayı çizer* (kabul etmez anlamında) *falan o yüzden"*

Veli'nin verdiği yanıt, yaptığı kanıtların doğruluğu konusunda kendini ikna etmek yerine hocayı yani bir otoriteyi ikna etmenin daha önemli olduğunu düşündüğünü ve bir otorite yaptıklarını onaylamadan doğruluğundan emin olamadığını göstermektedir. Bu korku ve güvensizlik, Veli'yi ezbere ve kitapta yazan veya öğretmen tarafından sınıfta yapılan kanıt prosedürünü kullanmaya yöneltmektedir.

İkinci görüşmede, kanıt ağırlıklı derslerin genel işleniş tarzı ile ilgili olarak, katılım olmadan öğretmenin konuyu hızlı bir biçimde işlediğini ve tüm uygulamaları yine öğretmenin yaptığını dolayısıyla sınıfta öğrenmediğini, sonrasında defterindeki notları çalıştığında öğrendiğini hissettiğini ifade etmiştir.

> "*Kendi adıma birçok konuyu kitaptan çalışarak öğrendim. Ya da defterdeki notları tekrar çalıştığımda öğrendiğimi hissediyordum. Oradan* (dersten) *sadece püf noktalarını almaya çalışıyordum bir iki ufak tefek. Yani hocanın söylediklerinin %10'u belki aklımda kalıyordu ya da öğreniyordum. Geri kalan %60-70'i kendim çalışarak öğreniyordum yine öğrenmediğim birçok şey kalıyordu yani*."

> *"Ya çok da anlamadığımı düşünüyorum ben derslerde. Yani kişisel de olabilir benimki, mesela lisede de öğretmen anlatırken değil de kendim çalışırken keşfediyordum. Çok fazla direkt anlatıldığında anlayamıyordum yani. Açık bir şeyler kalıyordu, eksik noktalar oluyordu."*

Kanıt ağırlıklı derslere, hazır kanıtları, bakmadan aynısını yazabilecek duruma gelene kadar yazarak çalıştığını ve sınavlarda, defterde olan veya çalıştığı kanıtlardan farklı bir ifade sorulduğunda ise kanıtı oluşturamayacağını düşündüğünü belirtmiştir. Defterindeki var olan kanıtları defalarca yazarak çalışmayı tercih etme nedenini:

> *"Yani belki de ezber oluyordur ama ben pek ezber olduğunu düşünmüyorum. İşime yarıyordu sonuçta özellikle başlangıcı ve ara basamakları. Ara geçiş basamaklarını algılayabiliyorsanız zaten olay bitiyordu sonuçta. Az çok gidişatını belirleyebiliyordunuz. Ama işte o ara geçiş basamaklarını çok iyi hatırlamanız gerekiyor. Yani şuradan şuraya geçti şu yüzden geçti diyebilmeniz için orayı tamamen hatırlamanız gerekiyor, ezber kısmı orası belki.*"

şeklinde açıklamıştır. Veli'nin burada sözünü ettiği ara basamaklar kanıtın problem odaklı kısmıdır ve bu kısımdaki güçlüklerin, öğrencilerin daha çok kanıt oluşturma deneyimi yaşamalarıyla giderilebileceği düşünülmektedir (Selden & Selden, 2009) Ancak öğrencinin açıklamaları, bu deneyimi yaşamadıklarını ve onlara sunulan kanıtları çalışma, çoğunlukla ezberleme yoluna gittiklerini göstermektedir. Veli, öğrencilerin dersleri, sadece geçmek zorunda oldukları, zevk ve keyif veren dersler olmadıkları şeklinde görmeleri ve motivasyon eksikliği nedeniyle ders sorumlusu olanak verdiğinde bile öğrenci katılımı olmadığını belirtmiştir. Veli, kendisinin de çoğunlukla böyle düşündüğünü, derslerde değil ancak kendi başına çalıştığında, bir şeyleri keşfettiğinde keyif aldığını söylemiştir. Yaptığı kanıtların doğruluğundan hiçbir zaman emin olamamasının sebebini, hocanın eksik bulacağına ve beğenmeyeceğine inanması, kendisinin tek başına doğru demesinin bir şey ifade etmediğini, önemli olanın bir otorite tarafından kabul edilmesi olduğunu düşünmesi olarak açıklamıştır.

> *"Emin olamıyorum, evet. Demek ki boşuna puan kırılmıyor bizim sınavlarımızdan. Belli bir yerde demek ki hoş bir yazım yok ya da öğretmen gözüyle uygun değil ondan kırıyorlar. Biraz da aslında bu sebepten dolayı belki de ezberlemeye yönelik çalışmak daha iyi geliyor benim için (…).* (Tam doğru olması için) *Bunun ispatını sağlam bir kaynaktan görüp 6–7 defa yazmam gerekir"*

Veli, ayrıca bir kanıtın geçerliliğinin değerlendirilmesinin kişiye göre değişiklik gösterebileceğini düşünmektedir. Yazdığı ifadelerin kanıt olarak kabul edilip edilmeyeceğini belirlemesi istendiğinde *"Bilmem biri olmuş der, biri olmamış der"* şeklinde bir yanıt vermiş ve sınavlardan yüksek not almak için de, o dersin sorumlusunun kanıt yazma tarzını bilmek gerektiğini belirtmiştir. Bu açıklaması, kanıtın geçerliliğinin kişiden kişiye değişebileceğini düşündüğünü ve ders sorumlusunun beklentisini karşılamanın önemli olduğuna inandığını göstermektedir (Healy & Hoyles, 2000; McCrone & Martin,2009).

Veli'nin geçmiş deneyimleri ve sınavlarda beklediğinden düşük not almasının yarattığı hüsran, onu, başkalarının yaptığını taklide veya doğruluğundan emin olunan bir kaynaktan yazmaya yöneltmiştir. Bu, öğrencilerde tekrarlanan başarısızlık sonucu ortaya çıkabilecek bir durumdur ve uğranılan hüsran öğrenciyi kaygı ve umutsuzluğa sürükleyebilmektedir (Goldin, 2000; Weber, 2008). Veli'nin görüşmelerde söylediklerinden böyle bir süreç yaşadığı ve kendine güvensizliğinin, kanıta yönelik korku, kaygı ve tedirginliğinin sonucunda ortaya çıktığı söylenebilir. Veli de gözlenen bir diğer şey ise çalışma süresince genelde ilgili, öğrenmeye ve bir şeyler yapmaya hevesli davranışlar göstermiş olsa da görüşmelerde kendini kanıta karşı ilgisiz, hevessiz ve tembel olarak değerlendirmiş olmasıdır. Bunun da kanıt konusundaki önceki başarısızlıklarının yarattığı özgüven eksikliğinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

Çalışmanın sonunda süreci, uygulamanın olumlu, olumsuz yönleri ve kendisine katkıları açısından değerlendirmesi istendiğinde; çalışmanın kendi açısından verimli geçtiğini ve az sayıda öğrenciyle tartışmaya dayalı yapılan grup öğretimini, dikkatli uygulanması durumunda, çok faydalı bulduğunu belirtmiş ve bu çalışmada yer almış olmaktan dolayı araştırmacıya teşekkür etmiştir. Veli çalışmanın, eğitim derslerinde öğrenmiş oldukları yöntemlerden grup çalışmasının nasıl uygulanabileceği konusunda bir deneyim kazandırdığını ve bu açıdan da katkısının olduğunu ifade etmiştir.

4.1.4. Derya'nın kanıtlama süreci

Derya'nın yazılı olarak uygulanan sorulara verdiği yanıtlar incelendiğinde, koşullu önermelerin kanıtlanmasında uygulanabilecek üç kanıt yöntemini tanıdığı ve bu yöntemlerle ilgili prosedürel bilgiye sahip olduğu görülmektedir. Derya 1. ve 2. soruları doğru olarak yanıtlamış, koşullu bir önermede hipotez ve hükümleri doğru belirleyebilmiştir. Karşıt ters ile kanıt yönteminin nasıl uygulanacağını bilmesine rağmen, önermeyi kanıtlaması gerektiğinde bu yöntemi kullanmayı tercih etmeyeceğini belirtmiştir. Derya, 3. ve 4. soruları da doğru yanıtlamıştır. Bu durumda, verilen bir önermede hipotez ve hükmü belirleme; önermenin değilini, tersini, karşıtını, karşıt tersini bulma ve bunların doğruluk değerlerini belirleme, verilen kanıttan formel teorem ifadesini oluşturma becerilerine sahip olduğu söylenebilir.

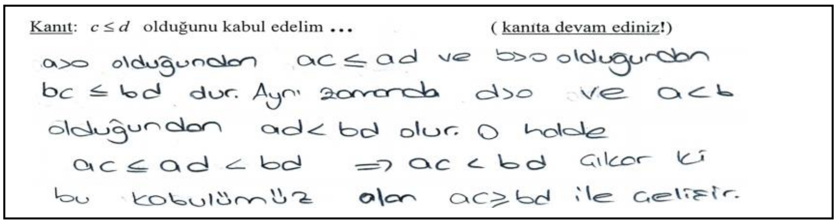
Verilen üç alternatif kanıttan, önermeyi kanıtlayanların belirlenmesi istenen 5. ve 6. sorulardan, 6. soruyu doğru yanıtlamış ancak 5. soruda sadece olmayana ergi yöntemi ile yapılmış olan kanıtı geçerli kabul etmiştir. Görüşme sırasında yanıtlarını incelerken 5. soru için fikrini değiştirmiş ve üç alternatif kanıtın da geçerli olduğunu düşündüğünü belirtmiştir. Bunun üzerine görüşmeci bir ifadenin geçerliliğini kontrol ederken nasıl düşündüğünü ve nelere dikkat ettiğini sormuştur.

> *Araştırmacı:* *Genel olarak neleri kontrol ediyorsun bir ifadenin kanıtının geçerli olup olmadığını değerlendirirken?*
>
> *Derya:* *Mesela direkt aklıma benim hep şey gelir* $P \Longrightarrow Q$ *gelir hep o yönde hareket ederim. Bakıyorum, neyi kabul etmiş neyi göstermiş. Mesela burada* (6. sorudaki kanıt 2) *doğru bir şey yapmış ama göstermek istediğim o değil. Kabullere bakıyorum, kabulden yola çıkarak diğerini elde ediyor muyuz yoksa çelişki buluyor muyuz?"*

Bu açıklaması ve kanıtları incelerken her adımı kontrol etmesi, Derya'nın bir kanıtın geçerliliğini anlamadaki, argümanın her aşamasının alan bilgisinden veya önceki aşamalardan ortaya çıktığının ve argümanın başka teoremi değil verilen teoremin kendisini sağladığının belirlenmesi aşamalarının farkında olduğunu göstermektedir (Selden & Selden,1995).

7. sorudaki önermeyi doğrudan kanıt yöntemiyle kanıtlamış ancak 8. sorudaki önermede rasyonel sayı olması gereken x sayısını tamsayı kabul ederek kanıtı oluşturmuş dolayısıyla geçerli bir kanıt elde edememiştir. Ancak görüşme sırasında bu hatasını fark etmiş ve gerekli düzeltmeyi yaparak önermeyi kanıtlamıştır.

9. soruda karşıt ters ile kanıt yöntemine yönlendirme yapmak amacıyla kanıtın ilk adımı verilmiştir. Derya, verilen ipucunu fark etmiş ancak olmayana ergi yöntemini düşünerek çelişki bulması gerektiğini belirtmiştir. Çalışmadaki diğer bazı öğrenciler gibi, karşıt ters ile kanıt yöntemini bilmesine rağmen bu yöntem aklına gelmemiş, ifadeyi olmayana ergi yöntemini kullanarak kanıtlamıştır. Kanıttaki geçişler doğrudur ve geçerli bir kanıt oluşturmuştur ancak olmayana ergi yöntemi ile kanıtladığı için $ac \geq bd$ kabulünü de kanıtın başında yazması gerektiğini belirtmiştir (Şekil 4.19).


<u>Kanıt</u>: $c \leq d$ olduğunu kabul edelim ... (<u>kanıta devam ediniz!</u>)

a>0 olduğundan $ac \leq ad$ ve b>0 olduğundan
$bc \leq bd$ dur. Aynı zamanda d>0 ve a<b
olduğundan ad< bd olur. O halde
$ac \leq ad < bd \Rightarrow ac < bd$ çıkar ki
bu kabulümüz olan $ac \geq bd$ ile çelişir.

Şekil 4.19. Derya'nın ölçme aracı 9. soruya verdiği yanıt

10. soruda verilen önerme için oluşturduğu kanıtta yazdıkları net değildir, geçişleri tam olarak neye göre yaptığı anlaşılmamaktadır ve fonksiyonun birebir olduğunu nerede kullandığı görülmemektedir. Görüşmede kanıtını açıklaması ve ne düşünerek yaptığını ifade etmesi istenmiştir. Derya bu soruyu yanıtlarken güçlük çektiğini, emin olmadan yaptığını belirtmiş ve kanıtındaki geçişlerin (özellikle 2. satırdan 3. satıra geçiş) gerekçelerini açıklayamamıştır (Şekil 4.20).

> *"Ben bunu çözerken de çok aklımda net bir şekilde çözmedim yani (…). Emin olamadım açıkçası. Çünkü birinci sınıfta da sorunlar yaşıyordum, buradan bunu yazabilir miyim* (2. satırdan 3. satıra geçiş) *ondan çok emin olmadan yapıyordum."*

Adımlar	Nedenleri
1) f bire-bir ve $y \in f(A) \cap f(B)$ olsun. $y=f(x)$	Varsayım
2) $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$	Kesişimin tanımı
3) $x \in A \wedge x \in B$	Görüntü kümesi tanımı
4) $x \in A \cap B$	Kesisim tanımı
5) $y = f(x) \in f(A \cap B)$	...
6) $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$	Alt küme tanımı

Şekil 4.20. Derya’nın ölçme aracı 10. soruya verdiği yanıt

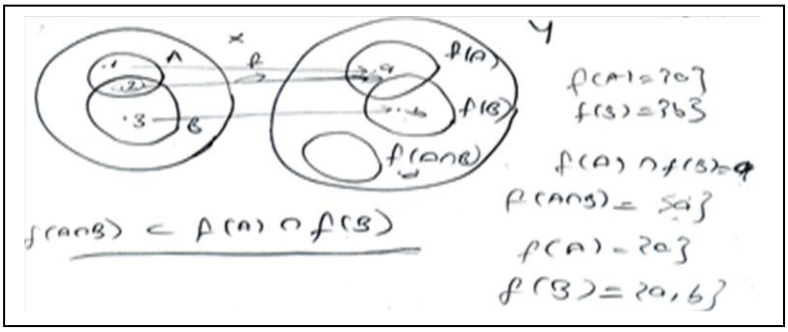
Yazdıklarından kendisi de tatmin olmamış ve başka bir kağıda şekil çizerek, gerekçesini açıklayamadığı geçişle ilgili kendini ikna etmeye çalışmıştır. Ancak yine de doğru bir açıklama yapamamış ve fonksiyonun birebir olması özelliğini kullanamamıştır.

Bu sorudaki önerme Derya’ya son görüşmede çift yönlü olarak tekrar verilmiş ve kanıtlaması istenmiştir. Önermeyi okuduktan sonra nasıl başlaması gerektiğini belirlemiş ve her adımda sesli olarak sorular sorup yanıtlayarak ilerlemiştir. Önermenin birinci yönden kanıtını yaparken, birebirliği kullanıp kullanamadığını, hangi aşamada kullanacağını belirlemek için şekil (Şekil 4.21) çizmiştir. Birebirliğin tanımını kullanarak ve acaba birebir olmasa ne olurdu diye düşünerek hareket etmiştir.

> “*Bizim bir y ’miz var mesela bu y hem $f(A)$’da hem $f(B)$*’de (bunu çizdiği kümelerin kesişiminde gösteriyor) *şimdi bu birebir olmazsa buna başka bir x de gelebilir mesela. Yani buradan* (tanım kümesi) *iki eleman y ’ye gitmiş olabilir mesela birebir olmasa, o zaman biz burada* (önermenin birinci tarafı) *birebirliği kullanmış oluyoruz.”*

şeklinde yaptığı açıklamalarla birinci tarafın kapsamasını göstermiştir. İkinci taraftan kapsamayı göstermek için işlemlere başlamıştır ve yine kendi kendine sorduğu sorularla ilerlemiştir.

> *“Şimdi burada birebir olmasa acaba yine, $f(A) \cap f(B)$’nin altında olur mu? Bunu deneyip görmem lazım, göreyim yani ben önce (...) Fonksiyon birebir olmasın bakalım olacak mı?”*



Şekil 4.21. Derya'nın son görüşme 4. soruyu yanıtlarken çizdiği Venn diyagramı

Derya, B kümesinin elemanı olarak sadece 3'ü düşünmüş ve $f(A) \cap f(B)$'yi boş küme olarak bulmuştur. Bu noktada görüşmeci görüntü kümesi tanımını hatırlamasını istemiş ve 2 elemanının B kümesinde de olduğunu hatırlatmıştır. Bunun üzerine Derya, düzeltmeyi yaparak bu kapsamayı gösterirken birebirliğe gerek olmadığına karar vermiştir. Kanıtı yaparken de bu şekilde düşündüğünü ama yine de örnek üzerinde görmek istediğini belirtmiştir. Şekil üzerinde ve örneklerle görerek ikna olan Derya ikinci taraftan kapsamayı gösterirken birebirliğe ihtiyacı olmadığını ifade ederek kanıtını oluşturmuştur (Şekil 4.22).

$y_1 \in f(A \cap B)$ olsun.

$\Longrightarrow \exists x \in X \ni f(x) = y_1 \quad , x \in A \cap B$

$\Longrightarrow x \in A$ ve $x \in B$

$\Longrightarrow f(x) \in f(A)$ ve $f(x) \in f(B)$

$\Longrightarrow y_1 = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

Şekil 4.22. Derya'nın son görüşme 4. sorudaki yanıtının bir kısmı

Derya kanıtı geçerli bir biçimde göstermiş ancak araştırmacıya bu konuda zorlandığını ifade etmiştir.

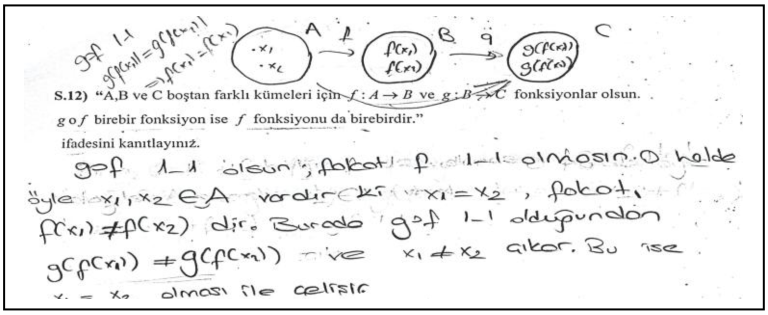
> Derya: *Bu tarz sorularda hocam, oturmamış bir yerler var yani ne kadar çizerek de göstermeye çalışsam.*
>
> Araştırmacı: *Ne mesela tam oturmayan?*
>
> Derya: *Yani böyle işte birebirliği kullanacak mıyım kullanmayacak mıyım, onu böyle çizerek kendime göstermem gerekiyor, kanıtlamam gerekiyor.*

Diğer öğrencilerde gözlendiği gibi Derya da, içinde birebirlik kavramı geçen fonksiyon önermelerinin kanıtlarında güçlük çekmektedir. Çalışma öncesi görüşmelerde ve yazılı olarak uygulanan sorularda, bu önermeler için geçerli kanıtlara ulaşamamıştır. Ancak son görüşmede akıl yürütme süreçlerini etkili kullanmış, çizdiği şekillerle, sorduğu sorularla ilerleyerek doğruya ulaşmıştır.

Grup çalışmalarında, fonksiyonlarla ilgili ve birebirlik tanımının kullanılmasını gerektiren önermelerin kanıtlarını değerlendirirken, tartışmaların tetikleyicisi genelde Derya olmuştur. Sınıf tartışmalarında, kafasındaki soruları, arkadaşlarının sorularına yönelik yaptığı açıklamaları hep tahta üzerine çizdiği şekillerde gösterme yolunu seçmiştir.

11. soruda verilen kanıtın geçerli olduğunu belirtmiş ancak fonksiyonun birebir ve örten olması özelliklerinin hangi adımlarda kullanıldığını doğru belirleyememiştir. Görüşme sırasında, yanıtını yeniden düşünmüş, birebir ve örten fonksiyon tanımlarını ifade etmiş, kanıtı incelemiş ve örtenlik tanımının kullanıldığı adımı doğru olarak belirlemiş ancak kanıtta, fonksiyonunun birebir olmasının kullanılmasına gerek olmadığını ve fonksiyon birebir olmasa da verilen önermenin doğru olacağını belirterek soruyu doğru yanıtlayamamıştır.

Yazılı uygulama sırasında 12. soruda verilen önermeyi kanıtlamaya çalışırken uzun süre harcamış ve uğraşmış ancak geçerli bir kanıt oluşturamamıştır (Şekil 4.23). Görüşmede, ifadeyi kanıtlarken güçlük çektiğini, üzerinde çok düşündüğünü ama yapamadığını ve yazdıklarından da emin olmadığını belirtmiştir. Kanıtlarken g fonksiyonunun birebir olup olmamasıyla ilgili bilgi olmadığı için tereddüt yaşadığını söylemiştir.



$g \circ f$ 1-1 $g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

A $\xrightarrow{f}$ B $\xrightarrow{g}$ C

S.12) "A,B ve C boştan farklı kümeleri için $f : A \to B$ ve $g : B \to C$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ birebir fonksiyon ise f fonksiyonu da birebirdir."
ifadesini kanıtlayınız.

$g \circ f$ 1-1 olsun, fakat f 1-1 olmasın. O halde öyle $x_1, x_2 \in A$ vardır ki $x_1 = x_2$, fakat, $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir. Burada $g \circ f$ 1-1 olduğundan $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ ve $x_1 \neq x_2$ çıkar. Bu ise $x_1 = x_2$ olması ile çelişir.

Şekil 4.23. Derya'nın ölçme aracı 12. soruya yanıtı

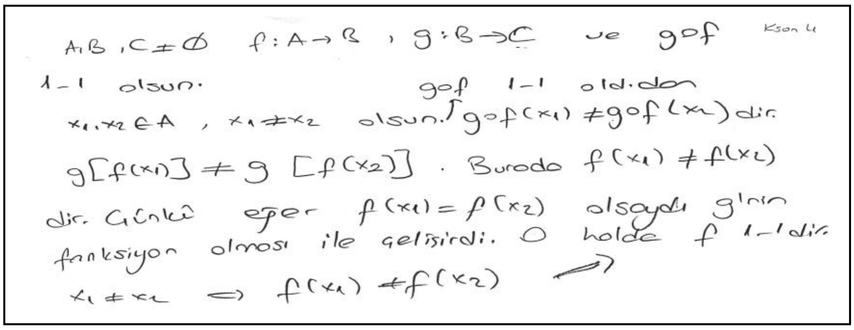
Yazdıkları incelendiğinde Derya'nın fonksiyon ve birebirlik tanımlarını, önermeyi kanıtlama sürecinde doğru yorumlayamadığı ve kullanamadığı görülmektedir. Kanıtla ilgili olarak yazdıklarından emin olamamasının nedenini:

“$f(x_1) \neq f(x_2)$ olması $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ *olmasını gerektirir mi buna karar veremedim. Bu da şeyden kaynaklanıyor* $g \circ f$ *‘in birebirliğini çok şey yapamadım, birebirse ne oluyor onu sindiremedim.”*

şeklinde açıklamıştır. Derya’nın tanımı kanıtta kullanma güçlüğü çekmesi, tanımın onun için formel olarak uygulanabilir olmadığını göstermektedir. Aynı önerme son görüşmede tekrar sorulmuştur. Önermeyi ilk gördüğündeki tepkisi “*Aman Tanrım!*” şeklinde olmuştur. Yazılı olarak sorulduğunda ve ilk görüşmede, önermeyi kanıtlayamadığını hatırlayıp önyargı ile yaklaşmıştır. Daha sonra önermeyi olmayana ergi yöntemi ile kanıtlamaya başlamış ve varsayımlarını yazmıştır. Bu süreçte:

“$g \circ f$ birebir olsun f’nin birebir olmadığını varsayalım (üç küme çizip Venn diyagramı ile fonksiyonları belirtiyor şekil üzerinde). *O zaman, f birebir değilse, ona bakıyorum f‘nin birebir olmaması ne anlama geliyor. Birebir demek $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ veya $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ olur. Birebir olmaması da $f(x_1) = f(x_2)$ iken $x_1 \neq x_2$ demek mesela. Yalnız, $g \circ f$ birebir bunu unutmuyorum. Şimdi $g \circ f$ ’in birebir olması ne demek? $x_1 \neq x_2$ ise $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$ olması demek. Tamam oradan yola çıkalım.”*

şeklinde sesli düşünerek, kendi kendine sorular sorup yanıtlayarak ilerlemiştir. Derya, araştırmacıya g fonksiyonunun birebir olup olmaması ile ilgili ne söylenebileceğini sormuştur. Görüşmeci bununla ilgili bir bilgi verilmediğini söyledikten sonra soruyla uğraşmaya devam etmiş, çizdiği şekiller üzerinde düşünmüş ve istediği çelişkiyi g’nin fonksiyon olması tanımını kullanarak yakalamış ve kanıtını oluşturmuştur (Şekil 4.24).



Şekil 4.24. Derya’nın son görüşme 5. (ölçme aracı 12.) soruya yanıtı

Derya, 13. sorudaki önermeyi, olmayana ergi yöntemi ile kanıtlamaya çalışmıştır. Son adıma kadar doğru ilerlemiş ancak son adımda, a sayısı ile ilgili yanlış bir çıkarımda bulunmuştur. Görüşme sırasında kanıtını incelerken bu durumu fark ederek yeniden kanıtlamak istemiş ve bu defa karşıt ters yöntemini kullanarak geçerli bir kanıt oluşturmuştur. 14. sorudaki önermeyi de doğrudan kanıt yöntemiyle geçerli bir biçimde kanıtlamıştır.

İkinci birebir görüşmede, kanıtlaması için verilen birinci önermeyi kanıtlamaya başlamadan önce, önermenin hükmünü incelemek ve doğru olup olmadığını anlamak, doğruluğuna kendini inandırmak istediğini belirtmiştir. Bir süre düşünüp yaptığı işlemlerle önermenin doğruluğuna ikna olduktan sonra önermeyi olmayana ergi yöntemiyle geçerli bir biçimde kanıtlamıştır.

Verilen diğer önermede de şekil çizmiş, kendi ifadesiyle, yaptığı karalamalarla doğru yolda olduğunu gördükten sonra kanıtını yazmaya başlamıştır. Önermedeki küme eşitliğini, doğrudan kanıtla çift yönlü kapsamayı göstererek kanıtlamıştır.

Yazılı sorulara, fonksiyonlarla ilgili önermelerin kanıtları dışında doğru yanıtlar verdiği ve geçerli kanıtlar oluşturduğu söylenebilir. Derya, her üç kanıt yöntemini tanımakta ve uygulayabilmektedir. Ancak fonksiyon, birebirlik ve örtenlik tanımlarını bilmesine rağmen çalışmanın başında verilen önermeleri kanıtlarken bu tanımları kullanmakta güçlük yaşamıştır. Sınıf çalışmalarında bu kavramlarla ilgili önermelerin kanıtlarındaki tartışmalara aktif olarak katılmış, sorular sormuş, tahtaya şekiller çizerek açıklamalar yapmış, hem kendini hem arkadaşlarını ikna etmek için uğraşmıştır. Son görüşmede ise çalışmanın başında yapamamış olduğu iki önermenin de aralarında bulunduğu tüm önermeleri kanıtlayabilmiştir. Dolayısıyla çalışma süresince bu konuyla ilgili güçlüklerini giderdiği söylenebilir.

Derya'nın kanıtları yaparken önce kendini ikna etmeye çalışması, yaptığı karalamalarla önermenin doğruluğunu gördükten, nasıl bir yol izleyeceğini belirledikten sonra kanıtını oluşturması, kanıtlama sürecinde kanıtın gösterim sistemi dışında şekil, grafik ve örnekler gibi başka gösterimlerden yararlanması, semantik yolla kanıt oluşturduğunu göstermektedir. Çünkü semantik kanıt üretiminde kanıtlayan kişi, örnekleri çizer, yazar veya onlarla zihinsel olarak çalışır; örnekleri ifadeyi daha iyi yorumlayabilmek ve çıkarabileceği formel çıkarımları düşünmek için anlamlı bir biçimde kullanır (Weber & Alcock, 2004). Semantik akıl yürütenler örneklerle kavramaya, görmeye ve kendini ikna etmeye çalışsalar da, düşüncelerini matematiksel argümanlara çevirmede sorun yaşayabilmektedirler (Alcock & Weber, 2008). Ancak semantik akıl yürütme, kişinin hangi tür akıl yürütme çizgisini izleyeceğine karar vermesine yardım ederek formel kanıtı oluşturmasına katkıda bulunmaktadır (Weber & Alcock, 2009). Derya da bu özellikleri göstermekte, sürekli sorgulayan ve ikna edici gerekçelere ihtiyaç duyan bir öğrenci olarak semantik akıl yürütenlerde görüldüğü gibi, anlama hissine ve kavramaya önem vermektedir. Çalışmadaki kanıtlama sürecinde, önce yaptığı karalamalar ve çizdiği şekillerle önermenin doğruluğuna ikna olmuş ve kendine bir yol belirlemiş, sonrasında düzgün bir biçimde formel kanıt yazmaya çalışmıştır. Ancak kanıtlarındaki adımlar arasındaki geçişleri, matematiksel semboller yerine genellikle cümlelerle yani sözel ifadelerle açıklamayı tercih etmiştir. Grup tartışmalarında etkili bir biçimde akıl yürütmüş, kanıtlamasına yardım edecek sorularla süreci yönlendirmeye çalışmış ama matematiksel ifadeleri kullanma ve kanıtı yazma konusunda bazen güçlükler yaşamıştır.

Bu bölümde, Derya'nın derslerin işlenişi hakkındaki düşünceleri, çalışma biçimi, duyuşsal özellikleri, veriler doğrultusunda incelenecek ve bunların matematiksel kanıtlama süreci üzerindeki olası etkileri yorumlanacaktır.

Derya, aldıkları matematik derslerinin genel işleniş tarzının ders sorumlusunun anlatımına dayalı olduğunu belirtmiş, ancak zaman zaman bazı ders sorumlularının, soru sorarak görüşlerini aldığını ve bu şekilde onları derse katmaya çalıştığını ifade etmiştir. Örnek olarak verdiği bir öğretim elemanının, şekil ve grafiklerden yararlanarak açıklamalar yapması ve sonrasında kanıtı oluşturması şeklindeki anlatım tarzının, kendi açısından daha etkili bir öğretim olduğunu söylemiştir.

> *"(…) Hoca'nın derslerinde kendimi daha rahat hissediyordum ve öğrenebildiğime inanıyordum. Bu hoca ne yapıyordu? Şekillerle anlatır mesela bize daha çok, yani şekli çizer, grafiği verir mesela grafikse eğer ya da şekille anlatabileceği bir şeyse eğer, önce şeklini veriyor ondan sonra kanıt yapacaksak eğer önce şekil üzerinden işte bu buradan gelmiştir şeklinde diğer konularla bağlantı kurarak anlatıyor, sonrasında da kanıt yapıyordu bize (…) Hoca bizden şey isterdi mesela arada "Ne diyorsunuz? Burada ne yapacağız mesela kanıtın burasında ne gelir sizce?"*

Ders sorumlusuna göre farklılıklar gösterse de derslerin genelde öğretmen anlatımına dayalı olmasını ve kendilerinden kanıt oluşturmalarının beklenmemesini eksiklik olarak değerlendirmekte ve derse katılımlarının, anlamalarını arttıracağını düşünmektedir.

> "*Şimdi şöyle olurdu, ben her zaman onun eksikliğini duyuyordum. Mesela o kanıta başlarken soruluyorsa soru, benim hoşuma gidiyordu yani biz bir düşünebiliyorduk yani biz ne yapabiliriz diye, yani ben düşünüyordum açıkçası hani nerden gelmiştir, o an kendimi kopmuş hissetmiyordum yani dersten. Kanıt yapılırken kafamı çalıştırmaya çalışıyordum en azından ama zaten sorulmuyorsa işte sadece tahtadakini geçiriyoruz yani. Bence derslerde mesela bunu siz yapacaksınız, mesela gruplara biliyorum zamanımız yok ama gruplar halinde kendimiz yapmaya çalışsak o kanıtı, daha faydalı olur gibi geliyor bana. Ben öyle düşünüyorum.*"

Derslerin öğretmenin anlatımıyla işlenmesi, onlara kanıt oluşturma olanağının verilmemesi nedeniyle sınavlarda sorulan, daha önce kanıtını görmediği bir ifadeyi kanıtlamakta güçlük çektiğini ve sınav süresinin farklı yolları deneyerek kanıt oluşturmaya çalışması için yeterli olmadığını bu yüzden kitaplarda gördüğü kanıtları ezberleme yoluna gittiğini belirtmektedir.

> *"Yani ben kendim de yapmaya çalışıyordum, kanıtı sevdiğim için yapmaya çalışıyordum ama mecburen bir yerde de hani not korkusu olduğundan dolayı bir yerden sonra mesela anlamadığım kanıtları ezberlediğim oluyordu yani."*

Görüşmede söyledikleri, sınıf içi tartışmalara katılımı ve gözlenen davranışları düşünüldüğünde Derya'nın, kanıtlara ilgi duyması kişisel çabasında teşvik edici olmaktadır. Ancak sınavdan düşük not alma korkusu ve kaygısı benzer çalışmalarda da (Weber, 2008) görüldüğü gibi, kimi zaman ezber stratejilerine yönelmesine neden olmaktadır.

Derya, öğretmenin kanıtlama sürecinde nasıl düşündüğünü açıklamasının veya yanlış yapsalar da onlara kanıtlama deneyimi yaşama olanağı vermesinin, yanlışları da görüp tartışmalarının kanıtlama becerilerinin gelişmesine katkıda bulunacağını ifade etmektedir.

> *"Hocalar derste kanıt yaparlarken yani "bakın işte buradan geldim ama..." bize fırsat tanısalar aslında ya da yanlış yola girseler bakın buradan yola çıktık ama yapamadık olmadı hadi baştan deneyelim, ne yapalım. Sonuçta*

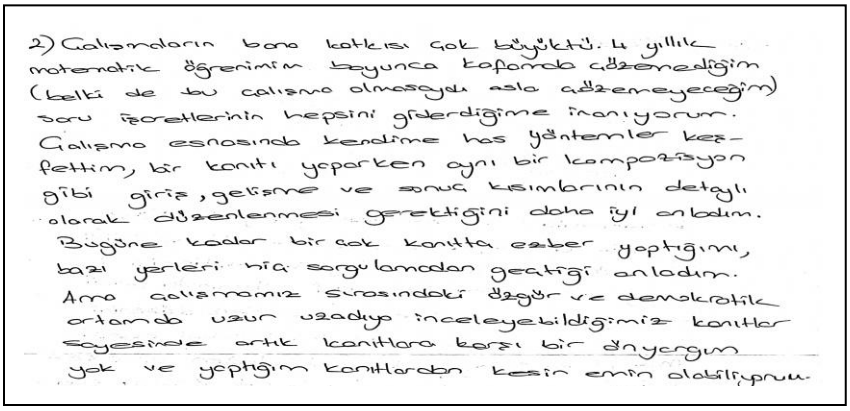
biz kendimiz yanlış yapıyoruz onu nasıl düzeltebiliriz onu da görelim mesela. Belki yanlış yaptığımızı da fark edemiyoruz bunları da gösterseler daha faydalı olabilir.”

Kanıt öğretiminde, öğretmenlerin kanıt yapısına ve kanıtla ilgili fikirlere fazla önem vermemelerinin (Heinze & Reis, 2003), akıl yürütme süreçlerini açıklamamalarının, öğrencilere bitmiş ürünler sunulmasının (Blanton et al., 2009), öğrencilerin kanıtlama sürecinde yer almamalarının ve kanıtlama deneyimi yaşayamamalarının (Alibert & Thomas, 1991; Ferrari, 2004) kanıtlama becerilerinin gelişmemesindeki sebepler olarak ortaya çıkması, Derya’nın söylediklerini desteklemektedir.

Derya, sınavlarda da genellikle beklediklerinden düşük notlar aldıklarını ama hatalarını göremedikleri için düzeltme şanslarının da olmadığını ifade etmiştir. Bu durum doğru olduğunu düşündüğü kanıtlarda bile zaman zaman tereddüt etmesine yol açmaktadır.

“Kanıtlarda aslında hep öyle şey var bende yani bizde daha doğrusu, şimdi biz kanıt yapıyoruz sanki çok doğruymuş gibi geliyor bize, sınavdan çıkıyoruz mesela çok iyi alacakmışız gibi geliyordu her zaman için ama sonra bakıyoruz düşük almışız ama nereden düşük aldığımızı bilmiyoruz. Mesela sınav kağıtlarımız bize dağıtılsa nerede hata yaptığımızı görürüz.”

Çalışmanın bütünü ile ilgili olarak yaptığı değerlendirmede, sınıf çalışmalardan oldukça memnun kaldığını ve herkese söz hakkı verilen sınıf ortamında kalıcı öğrenmeler gerçekleştirdiklerine inandığını belirtmiştir (Şeki 4.25).


2) Çalışmaların bana katkısı çok büyüktü. 4 yıllık
matematik öğrenimim boyunca kafamda çözemediğim
(belki de bu çalışma olmasaydı asla çözemeyeceğim)
soru işaretlerinin hepsini giderdiğime inanıyorum.
Çalışma esnasında kendime has yöntemler keş-
fettim, bir kanıtı yaparken aynı bir kompozisyon
gibi giriş, gelişme ve sonuç kısımlarının detaylı
olarak düzenlenmesi gerektiğini daha iyi anladım.
Bugüne kadar bir çok kanıtta ezber yaptığımı,
bazı yerleri hiç sorgulamadan geçtiğimi anladım.
Ama çalışmamız sırasındaki özgür ve demokratik
ortamda uzun uzadıya inceleyebildiğimiz kanıtlar
sayesinde artık kanıtlara karşı bir önyargım
yok ve yaptığım kanıtlardan kesin emin olabiliyorum.

Şekil 4.25. Derya’nın çalışmaya ilişkin son değerlendirmesi

Kendi değerlendirmesi, çalışmanın sonundaki görüşmedeki kanıtlama süreci ve oluşturduğu kanıtlar incelendiğinde, beş haftalık çalışmanın Derya üzerinde olumlu etkisinin olduğu söylenebilir. Derya ikinci görüşmede, kanıtlama becerisinde en önemli şeylerden birinin kanıt yöntemlerini iyi bilmek ve bir önermenin bir yöntemle kanıtlanmaması durumunda, başka bir yöntemi deneyebilecek durumda olmak olduğunu belirtmiştir. Görüşmenin başında ise kanıtlama sürecinde yaşadığı güçlüklerin kanıt yöntemine göre değiştiğini ifade etmiştir. Çalışmanın sonunda ise tüm yöntemleri rahatlıkla herhangi bir güçlük yaşamadan uygulayabilecek duruma gelmiştir. Çalışmanın başında kanıtlayamadığı, son görüşmede karşılaştığında da yapamayacağını düşündüğü bir kanıtı oluşturması (Bkz. Şekil 4.24), gösterdiği ilerlemenin bir örneği olabilir. Yazılı uygulamada ve ilk görüşmede uzun süre uğraştığı halde kanıtlayamadığı bu önerme Derya'nın şaşkınlık ve bilinmezlik duygularını yaşamasına yol açmıştır (Goldin, 2000). Bu durum, bilinmezliği ortadan kaldırmak amacıyla farklı yöntemlerle kanıtlamaya çalışması yönünde teşvik edici olmuştur. Sonuçta geçerli bir kanıt oluşturması, memnuniyet hissine ve gurur duymasına ve neden olmuş; değerlendirmesinde belirttiği gibi, kanıtla ilgili güçlüklerini gidermesini ve kendine olan güveninin artmasını sağlamıştır.

4.1.5. Cem'in kanıtlama süreci

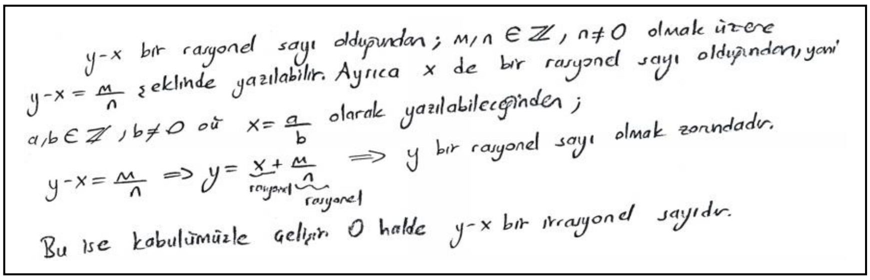
Cem'in yazılı olarak uygulanan sorulara verdiği yanıtlar incelendiğinde; kanıt yöntemlerini tanıma, verilen önermede hipotez ve hükmü belirleme, verilen kanıtların geçerliliklerini kontrol etme becerilerinin ölçülmesi amacıyla sorulan sorulara eksik ya da yanlış yanıtlar verdiği, ancak önermeleri kanıtlaması beklenen sorularda matematiksel olarak düzgün ve geçerli kanıtlar oluşturduğu görülmüştür. Yazılı sorulara verdiği yanıtları açıklaması için yapılan görüşmede Cem, ilk üç sorudaki yanlış ve eksiklerini fark etmiş ve soruları dikkatli okumadığı için yanlış yanıtlamış olabileceğini belirterek doğru düzeltmeler yapmıştır. Görüşmede yaptığı açıklamalar ve düzeltmeler göz önüne alındığında, kanıt yöntemlerini tanıdığı, verilen bir önermenin hipotezini, hükmünü, tersini, karşıtını, karşıt tersini ve değilini belirleyebildiği, verilen kanıttan doğru çıkarım yaparak teorem ifadesini oluşturabildiği ortaya çıkmıştır.

Verilen önermeye ilişkin alternatif kanıtların geçerliliklerini kontrol etmesi istenen 5. ve 6. soruda, doğrudan kanıt yöntemiyle yapılmış olan kanıtları geçerli kabul etmiştir. Her iki soruda da karşıt ters ile yapılan kanıtlarda varsayım ve sonuca eklemeler yaparak olmayana ergi yöntemiyle kanıta dönüştürmüş ve geçerli olan bu kanıtların eksik yazıldığını belirtmiştir. Görüşmede neden eksik olduğunu düşündüğü açıklaması istendiğinde:

> <u>Cem:</u> *Önce hangi yöntemle başladığını anlamaya çalıştım. 1. kanıtta olmayana ergiyi almış.*
>
> <u>Araştırmacı:</u> *Peki, başka şekilde yapılmış olamaz mı?*
>
> <u>Cem:</u> *Başka şekilde yapılmış olabilir ama ben dediğim gibi üç tane yöntemi kafamda belirlediğimden, tam bilmediğim ispat yöntemi olabilir. Ben en çok kullandığım kanıt yöntemi olmayana ergi olduğu için direk ona benzetmeye çalıştım. Tam eksiksiz olması için ekledim yoksa kanıt doğruydu benim için ama bunlar da eklenirse daha güzel olur diye düşündüm.*

şeklinde açıklamıştır. Cem'in sözünü ettiği üç kanıt yöntemi, yazılı olarak uygulanan ölçme aracının birinci bölümündeki ikinci soruya verdiği yanıtta da yazmış olduğu, tümevarım, olmayana ergi ve doğrudan kanıt yöntemleridir. İlk üç soruya verdiği yanıtlar için yaptığı açıklamalar, karşıt tersinin, ifadenin kendisine denk olduğunu ve bu denklik kullanılarak $P \Rightarrow Q$ şeklindeki bir önermenin $\sim Q \Rightarrow \sim P$ ifadesinin doğru olduğunun gösterilmesi ile kanıtlanabileceğini bildiğini göstermektedir, ancak verilen kanıtlarda bu yöntemi aklına getirmemekte sadece olmayana ergi yöntemini düşünmektedir.

Kanıtın başlangıç adımı verilerek belli bir kanıt yöntemine yönlendirme yapılan ve kanıtın devamının yazılması beklenen sorulardan 7. sorudaki önermeyi, yönlendirmeye uygun olarak doğrudan kanıt yöntemi ile düzgün bir biçimde kanıtlamıştır. 8. sorudaki önermede ise olmayana ergi kanıt yöntemine yapılan yönlendirmeyi fark ederek kanıtını oluşturmuştur (Şekil 4.26).


y-x bir rasyonel sayı olduğundan; $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ olmak üzere
$y-x=\frac{m}{n}$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca x de bir rasyonel sayı olduğundan, yani
$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ olur $x=\frac{a}{b}$ olarak yazılabileceğinden;
$y-x=\frac{m}{n} \Rightarrow y=\underbrace{x}_{\text{rasyonel}}+\underbrace{\frac{m}{n}}_{\text{rasyonel}} \Rightarrow$ y bir rasyonel sayı olmak zorundadır.
Bu ise kabulümüzle çelişir. O halde y-x bir irrasyonel sayıdır.

Şekil 4.26. Cem'in ölçme aracı 8. soruya yanıtı

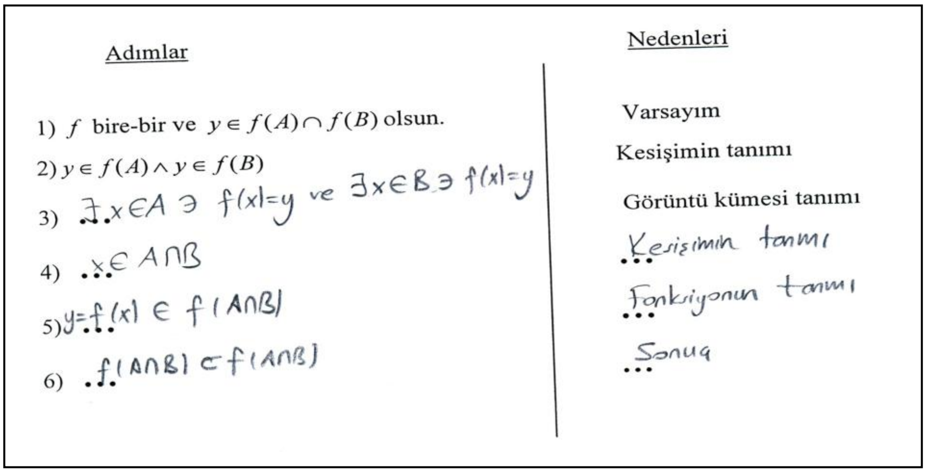
Görüşme sırasında, kanıtın son aşamasındaki eksiğini fark etmiş ve iki rasyonel sayının toplamının rasyonel sayı olması gerektiği ifadesinin eksik olduğunu, rasyonel sayıların yerine gösterimlerini yazıp daha açıklayıcı bir kanıt oluşturması gerektiğini belirtmiştir.

9. soruda verilen önermenin kanıtı için karşıt ters ile kanıt yöntemine yönlendirme yapılmıştır ancak Cem bu önermeyi olmayana ergi yöntemini kullanarak geçerli bir biçimde kanıtlamıştır. Görüşmede, kanıtı nasıl oluşturduğunu açıklarken:

> Cem: *Burada ben kafama taktığım için, olmayana ergiyi çok seviyorum ben, olmayana ergiyle düşündüm. Ama büyük olasılıkla benim bilmediğim olmayana ergiye benzeyen bir yöntem var. Şöyle de yapılabilirdi, Q'nun değili ise P'nin değili de yapılabilirdi burada, eşitlik yapılabilirdi.*
>
> Araştırmacı: *Yani Q'nun değilinden P'nin değilini gösterseydik kanıtlanmış olurdu demek mi istedin?*
>
> Cem: *Evet, o da eşitlik. Ben yine olmayana ergiden yapmışım*.
>
> (Bir süre yazdıklarını inceledikten sonra)
>
> *Ben şu an şu hatamı anladım, netleşti. Normalde hipotezi kabul etmeyip Q'nun değilinden P'nin değilini yaparsak kanıt yöntemimiz doğru olurdu ben şimdi onu anladım ve eminim doğru anladığıma. Normalde diğer sorularda* (5. ve 6. soruları kastediyor*) ekleme yaptığım yerlerde ekleme yapmama da gerek yoktu. Orada yapmak istediğiniz şeyi çok iyi anladım. Eklediğim zaman da olmayana ergi oluyor.*
>
> Araştırmacı: *Şimdi bu görüşme süresince mi bunları fark ettin?*
>
> Cem: *Evet, o gün belki aceleden dikkat etmedim ama şimdi öğrendim kafama tam oturdu.*

Cem, mantık kuralı olarak karşıt ters denkliğini bilmesine rağmen, kanıt yöntemi olarak düşünmediği karşıt ters kanıt yöntemini ve uygulanışını görüşme sırasında fark etmiştir. Yazılı sorulara verdikleri yanıtları açıklamaları için gerçekleştirilen birinci bireysel görüşmeler ve yazılı uygulama öğrencilerin başlangıç durumlarını belirlemenin yanında, kanıtlarla ilgili bilgilerini gözden geçirmelerini, bazı bilgileri fark etmelerini, kanıtlar üzerinde düşünmelerini sağlamış ve onları sınıf çalışmalarına da hazırlayıcı olmuştur.

Fonksiyonlarla ilgili sorulardan, önermeyi gerekçelerini açıklayarak kanıtlaması istenen 10. soruda Cem, verilen önermeyi geçerli bir biçimde kanıtladığını düşünmüştür. Ancak yazdıkları incelendiğinde $f(A)$ ve $f(B)$ görüntü kümelerinin kesişiminden alınan y elemanını, A ve B kümelerinden aldığı aynı x elemanının görüntüsü olarak yazdığı fakat bunu yazabilmesi için gerekli olan, fonksiyonun birebir olması özelliğini kullanmadığı, dolayısıyla tam doğru ve açıklayıcı bir kanıt oluşturamadığı görülmektedir (Şekil 4.27).



Adımlar | Nedenleri

1) f bire-bir ve $y \in f(A) \cap f(B)$ olsun. | Varsayım

2) $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$ | Kesişimin tanımı

3) $\therefore \exists x \in A \ni f(x)=y$ ve $\exists x \in B \ni f(x)=y$ | Görüntü kümesi tanımı

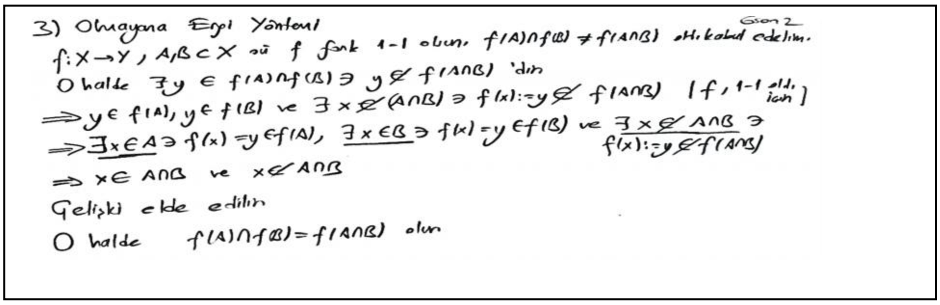
4) $\therefore x \in A \cap B$ | $\therefore$ Kesişimin tanımı

5) $y = f(x) \in f(A \cap B)$ | $\therefore$ Fonksiyonun tanımı

6) $\therefore f(A \cap B) \subset f(A \cap B)$ | $\therefore$ Sonuç

Şekil 4.27. Cem'in ölçme aracı 10. soruya yanıtı

Bu sorudaki önerme, son görüşmede çift yönlü olarak Cem'e tekrar verilmiş ve kanıtlaması istenmiştir. Cem, önermeyi olmayana ergi yöntemi ile kanıtlamaya çalışmış ve sadece mantık kurallarını kullanarak ilerlemiştir. Ancak birebirliği doğru yerde kullanmamış dolayısıyla yazdıklarını kabul edilebilir biçimde gerekçelendirememiştir. Cem ulaşmak istediği çelişkiye odaklanmış ve sentaktik olarak akıl yürütmüş ancak geçerli bir kanıt oluşturamamıştır (Şekil 4.28).



3) Olmayana Ergi Yöntemi | Gson 2

$f: X \to Y$, $A, B \subset X$ ve f fonk 1-1 olsun, $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$ olduğunu kabul edelim.

O halde $\exists y \in f(A) \cap f(B) \ni y \notin f(A \cap B)$ 'dir

$\Rightarrow y \in f(A), y \in f(B)$ ve $\exists x \notin (A \cap B) \ni f(x) := y \notin f(A \cap B)$ [f, 1-1 olduğu için]

$\Rightarrow \exists x \in A \ni f(x) = y \in f(A)$, $\exists x \in B \ni f(x) = y \in f(B)$ ve $\exists x \notin A \cap B \ni f(x) := y \notin f(A \cap B)$

$\Rightarrow x \in A \cap B$ ve $x \notin A \cap B$

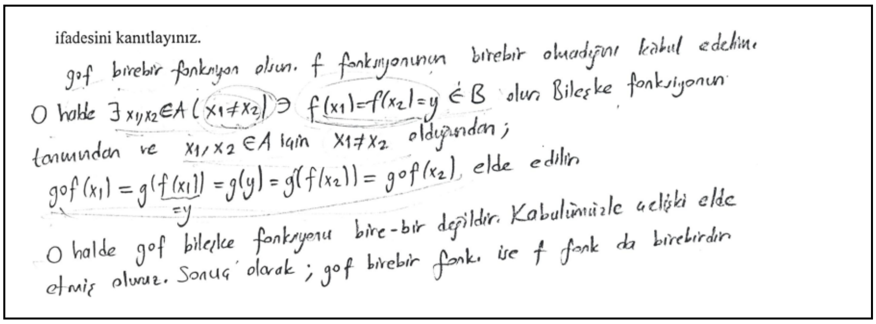
Çelişki elde edilir

O halde $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ olur

Şekil 4.28. Cem'in son görüşme 3. soruya verdiği yanıt

Cem, 11. soruda verilen kanıtın geçerliğini kontrol ederken, fonksiyonun birebir ve örten olmaması durumunda yazılanların doğru olmayacağını belirtmiş ancak bu özelliklerin kanıtın hangi aşamasında kullanıldığını doğru olarak belirleyememiştir.

Herhangi bir kanıt yöntemine yönlendirme yapılmaksızın, verilen ifadeleri kanıtlamaları istenen son üç sorudan 12. ve 13. soruda, olmayana ergi kanıt yöntemiyle, 14. soruda doğrudan kanıt yöntemiyle önermeleri geçerli bir biçimde kanıtlamıştır. 10. ve 11. sorularda doğru gerekçelendirmeyi yapamayan Cem, 12. sorudaki önerme de fonksiyonların birebirliği ile ilgili olmasına rağmen, bu önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlamıştır (Şekil 4.29). Bu önermede, fonksiyonun birebir olmaması durumunu doğru bir şekilde ifade etmiş ve olmayana ergi yöntemiyle geçerli bir kanıt oluşturmuştur. Dolayısıyla Cem'in mantıksal denklikleri ve matematiksel ifadelerin karşıt, ters ve karşıt ters ifadelerini belirleyebilme becerisi olduğu halde, birebirlik tanımını bazı önermelerin kanıtında kullanamadığı ve mantıksal geçişlerde doğru gerekçelendirmeleri yapamadığı söylenebilir.


ifadesini kanıtlayınız.

gof birebir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun birebir olmadığını kabul edelim.
O halde $\exists x_1, x_2 \in A\ (x_1 \neq x_2) \ni f(x_1) = f(x_2) = y \in B$ olur. Bileşke fonksiyonun tanımından ve $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 \neq x_2$ olduğundan;
$gof(x_1) = g(\underbrace{f(x_1)}_{=y}) = g(y) = g(f(x_2)) = gof(x_2)$ elde edilir
O halde gof bileşke fonksiyonu bire-bir değildir. Kabulümüzle çelişki elde etmiş oluruz. Sonuç olarak; gof birebir fonk. ise f fonk da birebirdir

Şekil 4.29. Cem'in ölçme aracı 12. soruya yanıt

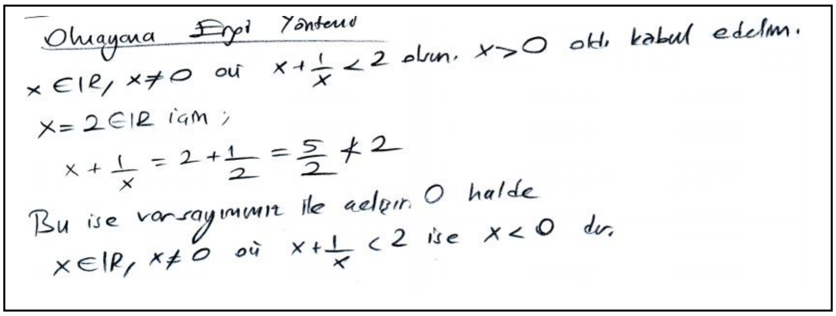
İkinci görüşmede Cem'e, sesli kanıtlaması için iki önerme verilmiştir. İlk önermeyi kanıtlamak için öncelikle doğrudan kanıt yöntemini uygulamaya karar vermiş ve kanıtlamaya başlamıştır. Ancak bir süre ilerledikten sonra geldiği aşamada istenen sonuca ulaşamamıştır. Bunun üzerine olmayana ergi yöntemiyle kanıtlamayı denemiş ve bu yönteme uygun biçimde ilerleyerek bir çelişki bulmuş ve geçerli bir kanıt oluşturmuştur.

Kümelerle ilgili olan ikinci önermeyi kanıtlamaya başlamadan önce Venn diyagramı çizmiş ve verilenleri şekil üzerinde görmeye çalışmıştır. Verilenleri şekil üzerinde görüp kullanacağı yöntemi belirlemiş ve önermeyi olmayana ergi yöntemiyle kanıtlamaya çalışmıştır. Kanıtını yazdıktan sonra görüşmeci, adımlar arasındaki geçişleri açıklamasını istemiştir. Bunun üzerine Cem, çizdiği şekil üzerinde açıklamalar yapmış ve çelişkiyi şekil üzerinde gördüğünü, verilenlere göre çizmiş olduğu şekil olmasa bu kadar rahat görülemeyeceğini belirtmiştir.

> *"İşte şekil çizmenin en büyük avantajı o. Yaptığınız işlemin doğru olduğunu hemen sağlamasını yapıyorsunuz, direkt diyemezsiniz hani veriler de önemli, şekli de verilere göre çiziyorsunuz. Şekil sayesinde her şey görselleşiyor"*

Aynı önerme son görüşmede sorulduğunda ise olmayana ergi yöntemiyle önermeyi kanıtlamış ve ikinci görüşmede yazdığı kanıtın aynısını yazmış, ancak şekil çizmemiştir.

Son görüşmede Cem'e, ölçme aracında yer alan 5. sorudaki önerme kanıtlaması için verilmiştir. Bu önermeyi önce olmayana ergi yöntemi ile kanıtlamaya çalışmış ancak herhangi bir çelişkiye ulaşamayınca yöntemini değiştirerek doğrudan kanıtlamayı düşünmüştür. Buradan da bir sonuç elde edemeyince tekrar olmayana ergi yöntemine dönmüş, hipotezi ve hükmün değilini kabul ederek başlamıştır. Önermedeki x değeri yerine sıfırdan büyük herhangi bir sayı olarak 2 değerini vermiş ve kanıt oluşturduğundan emin olduğunu belirtmiştir.


Olmayana Ergi Yöntemi

$x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ öü $x+\frac{1}{x} < 2$ olsun. $x>0$ olsun kabul edelim.

$x = 2 \in \mathbb{R}$ için;

$x+\frac{1}{x} = 2+\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \nless 2$

Bu ise varsayımımız ile çelişir. O halde

$x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ öü $x+\frac{1}{x} < 2$ ise $x<0$ dır.

Şekil 4.30. Cem'in ikinci görüşme 2. soruya yanıt

> *"Amacım çelişki elde etmek ve varsayımlardan $x = 2$ değerini verince bu koşullarda sağlanmıyor demek ki x bu koşullarda* (önermenin hipotezi) *sıfırdan büyük olamaz*"

Cem, seçtiği sıfırdan büyük bir sayı değeri için varsayımla çelişen bir durum ortaya çıktığını ve bu çelişkinin, verilen önermenin doğruluğunu kanıtladığını düşünmüştür. Yazdıkları (Şekil 4.30) incelendiğinde, olmayana ergi yöntemine uygun olarak ifadenin değilini kabul ederek başlamasına rağmen, hükmün değilini sağlayan özel bir değerin hipotezle çeliştiğini göstermekle kanıt yaptığını sanmıştır. Cem, varsayımı sağlamayan tek bir örnek üzerinden ilerleyerek mantıksal hata yapmış ve geçerli bir kanıt oluşturamamıştır. Cem olmayana ergi kanıt yöntemine çok fazla odaklandığından, çalışma boyunca önermeleri kanıtlarken, yöntemin prosedürel bilgisini kullanmış ve bir çelişki bulmak için uğraşmıştır. Bazı önermeler için bu yöntemle geçerli kanıtlar elde etmesine rağmen, kimi zaman çelişki elde etmeye çalışırken mantıksal hatalar yapmış, yazdıklarını sezgisel olarak anlamlı biçimde gerekçelendirememiştir.

Verilen bir ifadenin kanıtını, kanıt gösterim sistemi ile oluşturmaya çalışmak yani bir kanıt çerçevesi seçmek, varsayımları sıralamak, tanım ve teoremleri kullanarak ve mantıksal çıkarım kurallarını uygulayarak yeni varsayımlar üretmek ve uygun sonuca ulaşana kadar bu süreci devam ettirmek sentaktik yaklaşıma işaret eden davranışlar olarak belirtilmektedir (Weber & Alcock, 2009; Alcock & Inglis, 2008; Weber, Alcock & Radu, 2007). Cem de önermeyi okuduktan sonra genellikle olmayana ergi kanıt yöntemini tercih etmiş, varsayımı ve hükmün değilini kabul ederek kanıta başlamış ve sonuçta bir çelişkiye ulaşmaya çalışmıştır. Bu bakımdan süreç boyunca, bireysel görüşmelerde ve sınıf çalışmalarında önermeleri kanıtlarken daha çok sentaktik akıl yürüttüğü söylenebilir. Weber ve Alcock (2009), sentaktik akıl yürütmede, kişinin sahip olduğu kabul edilebilir kanıt çerçevelerinin daha az olmasının bir avantaj olduğunu ve kişinin bir kanıt yapısını belirledikten sonra kanıtın ilk ve son adımını ifade edebilmesinin prosedürel bir beceri olarak görülebileceğini belirtmişlerdir. Mesela, eğer koşullu bir önermede olmayana ergi yöntemi kullanılacaksa hipotez ve hükmün değili başlangıç varsayımları olarak kabul edilerek kanıta başlanır, mantıksal bir sıra izlenerek çelişkiye ulaşılmaya çalışılır. Cem birçok soruda bu şekilde bir yol izlemiş ve geçerli kanıtlar oluşturabilmiştir.

Kanıtlama sürecinde sadece tanımları açma ve sembolleri ilerletme ile kanıtlamaya çalışma Weber (2001) tarafından sentaktik yaklaşım, Harel ve Sowder (1998) tarafından da sembolik ve ritüel kanıt şemaları olarak tanımlanmışlardır. Ancak bu şekilde, benzer bir dizi prosedürü uygulayarak çalışma, belli bir algoritmanın kullanılması olan otomatikleşmiş bir kanıtlama türüne dönüşebilmektedir (Furinghetti & Morselli, 2008). Bu şekilde bazı önermeler geçerli bir şekilde kanıtlanabilse de kavramların daha derin anlamasını gerektiren kanıtlar için bu yaklaşım yeterli olmamakta, kanıtlayan kişi yaptığı işlemlerin altındaki nedenleri açıklayamamaktadır. Cem'in de çalışmanın başında kanıtlayamadığı birebirlik içeren önermeyi, son görüşmede de bu yaklaşımı nedeniyle kanıtlayamadığı söylenebilir.

Cem, grup çalışmalarında da, arkadaşlarını olmayana ergi yöntemini kullanmaları konusunda yönlendirmiştir. Cem'in yönlendirmesinin baskın olduğu durumlarda, arkadaşları ne yapmaya çalıştıklarını anlamadıkları zaman *“Sen devam et şimdi anlayacaksın”* şeklinde yanıt vererek, ortaya çıkacak çelişki ile ikna olacaklarını düşünmüştür. Kanıt yöntemine ve mantık kurallarına fazla vurgu yapılan sentaktik yaklaşımla oluşturulan sentaktik kanıtlar, kimi durumlarda özellikle gerekçelendirmeye önem veren kişiler için açıklayıcı olmamaktadır. Bu yüzden grup çalışmalarında, Cem kanıt yöntemini doğru uygulayarak çelişki elde edilmesine önem verirken, sezgisel anlama ve iknaya önem veren Veli, yazdıkları ifadeler için açıklama ve gerekçelendirmeye ihtiyaç duymuştur.

Sentaktik kanıtlar, mantıksal olarak doğru olduğuna inandığı için kişiyi ikna edebilmekte ancak yeterince açıklayıcı olmamaktadır. Örneğin; ikinci görüşmede verilen kümelerle ilgili önermeyi kanıtlarken, görüşmeci yazdığı geçişleri açıklamasını istemiş bunun üzerine Cem, Venn diyagramı üzerinde yaptığı açıklamalarla düşündüklerini ifade etmeye çalışmış ve şekil olmadan yaptığı geçişin nedenini görmenin zor olduğunu yani adımların gerekçelendirilemediğini belirtmiştir. Kanıtlama sürecinde ihtiyaç duyduğunda nadiren de olsa şekil kullanması, Cem'in kanıtın formel gösterim sistemi dışındaki gösterimlerden yararlanabildiğini dolayısıyla semantik akıl yürütebildiğini göstermektedir.

Çalışmanın başında uygulanan ölçme aracına verdiği yanıtlara göre değerlendirildiğinde, Cem'in matematiksel dil ve sembolleri doğru kullandığı, mantıksal çıkarım kurallarını uygulayabildiği, kanıt yöntemlerinin farkında olduğu söylenebilir. Sınıf çalışmalarına da aktif katılmış ve önermeleri kanıtlama sürecinde kendinden emin bir biçimde arkadaşlarını yönlendirmeye çalışmıştır. Ancak yönteme çok fazla odaklandığından yazdığı kanıtlarda kimi zaman sadece çelişki bulmaya uğraşmış ve yaptığı mantık hatalarını fark etmemiştir. Cem olmayana ergi yöntemini tercih etme sebebini şu şekilde açıklamıştır:

> *"Olmayana ergide daha rahat ilerliyorum, sonraki aşamalar daha net gözüme çarpıyor, gittiğim yol bana ipucu veriyor, daha rahat görüyorum. Bir de olmayana erginin bir avantajı daha var bence, diğer ispatlara göre bir çelişki yaratmak kolay gibi geliyor bana. Çünkü doğrudan ispat yöntemini ele alalım burada sadece elinizde bir veri var ve bu verilere göre hareket etmek durumunda kalıyorsunuz ve yolunuz tıkanabiliyor. Ama olmayana ergide sonuçta bir çelişki aradığımız için mutlaka gidişat bir yerde bize bir ipucu veriyor."*

Bu açıklama da, yöntemi takip ettiğinde sonuçta bir çelişkiyle karşılaşmanın daha kolay olacağını düşündüğünü ve doğrudan kanıtta yapması gereken gerekçelendirme ve mantıksal çıkarımlara gerek kalmadan da kanıtı oluşturabildiği için olmayana ergi yöntemini daha kolay uygulanabilir olarak gördüğünü göstermektedir. Bazı önermeler için bir yöntem seçilip kanıtın ilk ve son adımı belirlendikten sonra tanımların uygulanmasıyla kanıt ortaya çıkabilmektedir ve bu sentaktik akıl yürütmenin sağladığı bir kolaylıktır, ancak her önermenin bu yolla kanıtlanması mümkün olamamaktadır (Weber & Alcock, 2009). Sentaktik akıl yürütenler, kabul edilebilir mantıksal cümleler kurma ve çıkarımlar yapmada güçlük yaşayabilmekte, bu da oluşturdukları kanıtlarda birçok mantıksal hata olmasına neden olmaktadır (Weber & Alcock, 2009). Cem de matematiksel sembol ve ifadeleri doğru kullanıp geçerli sentaktik kanıtlar oluştursa da zaman zaman mantık hataları yapmıştır.

Bu bölümde; sorulara verdiği yanıtlar, çalışma sürecinde söyledikleri ve görüşmecinin gözlemleri doğrultusunda, Cem'in derslerin işleniş şekli ile ilgili düşünceleri, kendi çalışma biçimi ve kanıtlamaya yaklaşımına etkisi olabileceği düşünülen duyuşsal özellikleri incelenecektir.

Cem, derslerde genellikle öğretmenin bilgi verici ve öğrencilerin dinleyici konumunda olduğunu belirtmiş ve ders sorumlusuna bağlı olarak bazı derslerin sıkıcı geçtiğini, bazı derslerinse daha ilgi çekici olduğunu söylemiştir. Derslerini daha ilgi çekici bulduğu ve dikkatli dinlediği bir öğretim elemanının dersi işleme biçimini,

> *"İlk önce bilgileri veriyordu ve bunu gerçekten iyi yapıyordu. Sonra uygulama kısmında direk uygulama yapmıyordu öğrenciyle bir etkileşim kuruyordu. Yani ilk önce bizim düşünmemizi sağlıyordu sorularla, daha sonra da zaten uygulama aşamasında öğrenciyi de sürecin içine kattığı için güzel bir etkileşim oluyordu. (…) Uygulamada da hocaların bizi sürece aktif olarak katması hem benim daha çok ilgimi çekiyordu, derse katkımı arttırıyordu, hem de daha çok düşünmemi sağlıyordu ve düşündüğüm zaman da kendim doğruya ulaşıyordum."*

şeklinde açıklamıştır.

Derslere genellikle, öncesinde hazırlıklı geldiğini ve anlatılacak konuyla ilgili bilgilere baktığını, bu şekilde ön bilgisi olduğunda dersleri takip etmesinin ve anlamasının daha rahat olduğunu ifade etmiştir. Hazırlıklı geldiğinde, kanıtın ders sorumlusu tarafından tahtada yapılması sırasında bir sonraki aşamayı belirlemeye çalıştığını, kanıtın nasıl ilerleyeceğini tahmin ettiğini söyleyen Cem, derslerde kendilerinden kanıt yapmalarının beklenmediğini ama hazırlıklı geldiği için kendisinin böyle bir beklentisinin olduğunu belirtmiştir.

> *"Sözel olarak tabii ki soruldu "Bizden istenen ne?" ki bunlar önemli sorular gerçi de ama bir öğrencinin çıkıp da ispatı yapması hiç istenmedi. Ama dediğim gibi sözel anlamda sorular soruldu. (…) ama ben şahsen bazen bazı kanıtlarda öğrencinin çıkıp yapmasını beklerdim. Doğru yapmak zorunda değil ama bir denemesini beklerdim."*

Derslere hazırlanarak gelmesinin kanıtlara olan kişisel ilgi ve merakıyla ilgili olduğunu, boş zamanlarında da kanıtlara çalışmanın hoşuna gittiğini ve kanıtları okuyarak çalışılamayacağını, mutlaka uygulama yapmak gerektiğini belirtmiştir. Yapılan kanıtları kendisi tekrar çözerek ve kitaplardan bulduğu farklı kanıtlarla uğraşarak çalıştığını ifade etmiştir.

> *"Bazen boş zamanlarımda uğraşmak hoşuma giderdi, bulmaca çözmek gibi bir şeydi benim için. Ben kanıta o şekilde bakıyorum boşluk doldurmaca. Sonuçta bir ifade var ve çözüm kısmını aşama aşama doldurmanız gerekiyor zevkli bir araçtı benim için belki de bir oyun kanıt yapmak."*

Goldin (2000), merak duygusunun kişinin araştırmasında ve bir şeylerin nedenini sorgulamasında güdüleyici olduğunu ve öğretmenin söylediklerini yerine getirmeye veya bir sınavı geçmeye yönelik otoriteye bağlı nedenlerle ilişkili diğer güdüleyicilere kıyasla, kişiyi problem durumla daha çok uğraşmaya ve çözüm yolları aramaya yönelttiğini belirtmiştir. Cem de bu duyguyla daha çok araştırmakta, farklı kaynaklardan kanıtlara çalışmaktadır. Ayrıca kanıtla uğraşmaktan zevk alması, sadece sınavlara yönelik değil sınav dışı zamanlarda kanıtlarla uğraşmasına ve kanıtlama becerisini geliştirmeye yönelik ek çalışmalar yapmasına neden olmaktadır. Araştırmalarda belirtildiği gibi derse ve konuya karşı olan olumlu duygular öğrencinin daha çok çalışmasını desteklemekte ve öğrenme çabası üzerinde etkili olmaktadır (Heinze & Reis, 2009).

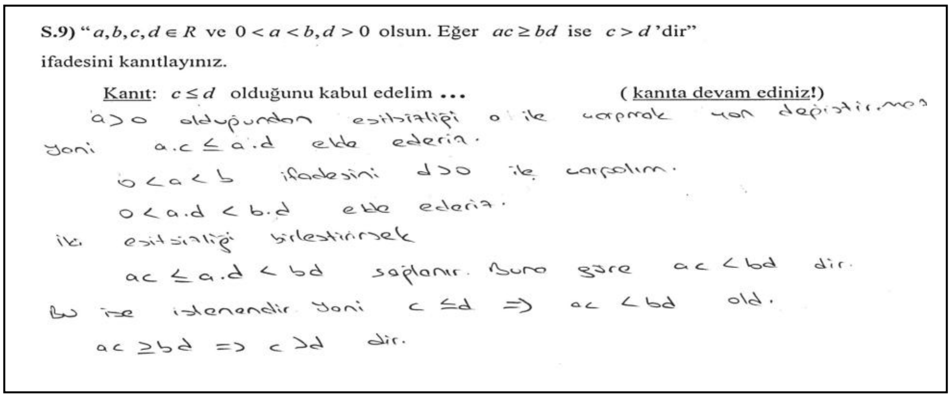
Cem, çalışmanın bütününü kendi açısından değerlendirmiş ve bu çalışmada yer almış olmanın, kanıtlama sürecine olumlu katkısı olduğunu belirtmiştir. Kanıt konusunda kendine olan güveninin arttığını, bu çalışmaya katıldıktan sonra aklına takılan her şeyi kanıtlamaya çalıştığını, arkadaşlarının uyguladığı farklı yöntemleri görerek bakış açısının genişlediğini ve daha çok sorgular hale geldiğini ifade etmiştir.

Cem, çalışmanın başında kanıt yöntemine fazla vurgu yapmasına ve kanıtları sentaktik yolla oluşturma eğiliminde olmasına rağmen, sınıf tartışmaları süresince arkadaşlarının soruları sonucunda, onları ikna etmek için yaptıklarını açıklamak durumunda kalmıştır. Bu durum, uyguladığı yöntemin prosedürel bilgisinin yanında, sezgisel ve kavramsal anlamaya yönelik açıklamalar yapmasına ve yazdıklarını gerekçelendirmeye çalışmasına neden olmuştur. Çalışma boyunca araştırmacı tarafından gözlenen bu durum, Cem'in değerlendirmesini desteklemektedir.

4.1.6. Melis'in kanıtlama süreci

Yazılı olarak uygulanan sorulara verdiği yanıtlar incelendiğinde, Melis'in matematiksel kanıtlama becerisi için gerekli temel becerileri belirlemek amacıyla sorulan ilk altı soruyu doğru bir biçimde yanıtladığı görülmüştür. Dolayısıyla koşullu bir önermenin kanıtlanmasında kullanılabilecek üç kanıt yöntemini tanıdığı ve bu yöntemlerin prosedürel bilgisine sahip olduğu, koşullu önermelerin hipotezini ve hükmünü, ifadenin tersini, değilini, karşıt tersini ve karşıtını doğru belirleyebildiği, kanıtı verilen bir önermenin formel ifadesini oluşturabildiği ve kanıtların geçerliliklerini doğru biçimde değerlendirebildiği söylenebilir. Melis, ilk görüşmede soruları yanıtlarken nasıl düşündüğü açıklaması istendiğinde, verilen $P \Longrightarrow Q$ türündeki koşullu önermeler için, bu ifadelerin kanıtlanmasında kullanılacak doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemlerini göz önünde bulundurduğunu ifade etmiştir. 5. ve 6. sorulardaki alternatif kanıtların geçerliliğini de, bu üç kanıt yöntemine uygunluklarına ve ara basamakların doğruluğuna göre değerlendirdiğini belirtmiştir. Buna göre Melis'in, bir kanıtın geçerliliğini incelemede, argümanın her aşamasının alan bilgisinden veya önceki aşamalardan ortaya çıktığının ve argümanın başka teoremi değil verilen teoremin kendisini sağladığının belirlenmesi aşamalarının farkında olduğu görülmektedir.

Kanıt oluşturması beklenen sorulardan 7. soruyu doğrudan kanıt yöntemiyle, 9. soruyu da karşıt ters ile kanıt yöntemiyle düzgün bir biçimde kanıtlamıştır. Katılımcılar arasında, bu soruda verilen ipucunu fark edip karşıt ters ile kanıt yöntemini kullanarak kanıt oluşturan ve ilk altı sorunun tamamına doğru yanıt veren tek katılımcı Melis olmuştur. Melis'in bu iki soru için oluşturduğu kanıtlar incelendiğinde, matematiksel sembolleri ve notasyonu düzgün kullandığı, belli bir kanıt çerçevesi olan geçerli kanıtlar oluşturduğu görülmektedir (Şekil 4.31).



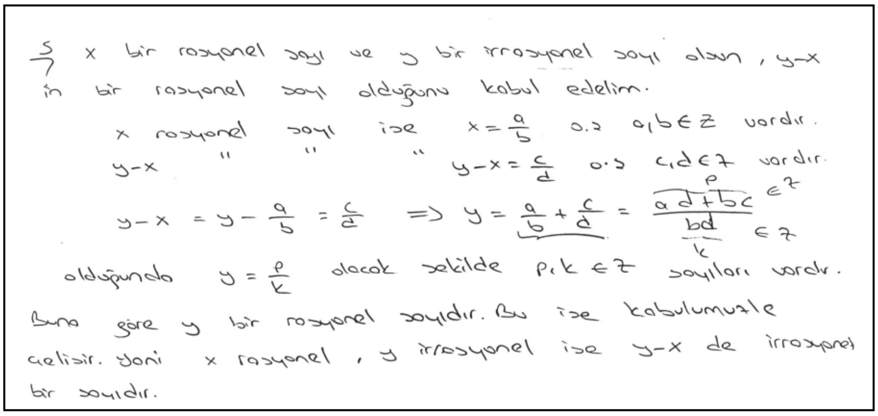
S.9) "$a,b,c,d \in R$ ve $0 < a < b, d > 0$ olsun. Eğer $ac \geq bd$ ise $c > d$'dir" ifadesini kanıtlayınız.

Kanıt: $c \leq d$ olduğunu kabul edelim ... (kanıta devam ediniz!)

a>0 olduğundan eşitsizliği a ile çarpmak yön değiştirmez
yani a.c ≤ a.d elde ederiz.
0<a<b ifadesini d>0 ile çarpalım.
0<a.d<b.d elde ederiz.
iki eşitsizliği birleştirirsek
ac ≤ a.d < bd sağlanır. Buna göre ac<bd dir.
Bu ise istenendir. Yani c≤d ⇒ ac<bd old.
ac≥bd ⇒ c>d dir.

Şekil 4.31. Melis'in ölçme aracı 9. soruya yanıtı

Olmayana ergi yöntemine yönlendirme yapılmış olan 8. soruyu boş bırakan Melis, görüşmede irrasyonel sayıyı nasıl ifade edeceğini bilemediği için kanıtlayamadığını belirtmiştir. Görüşme sırasında tekrar düşünmesi istendiğinde rasyonel sayı gösterimini hatırlamış ve yöntemi fark etmiş ancak yine de kanıtı oluşturamamıştır. Son görüşmede aynı ifade kanıtlaması için verildiğinde rasyonel sayının gösterimini kullanarak kanıtlama girişiminde bulunmuş ve doğrudan kanıtla, önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlayabilmiştir (Şekil 4.32).

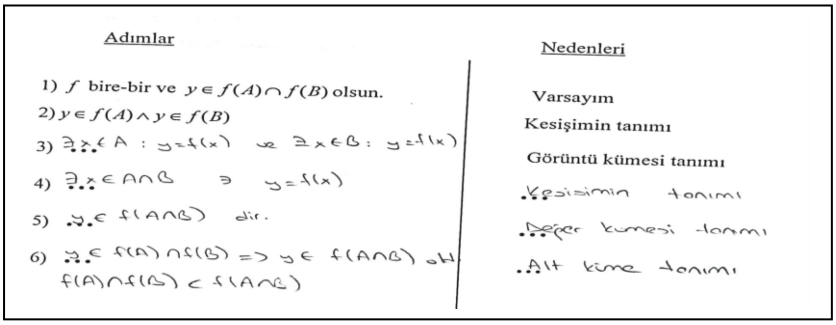


S/ x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı olsun, y−x in bir rasyonel sayı olduğunu kabul edelim.
x rasyonel sayı ise $x = \frac{a}{b}$ o.ş a,b ∈ Z vardır.
y−x " " " $y-x = \frac{c}{d}$ o.ş c,d ∈ Z vardır.
$y - x = y - \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{\overbrace{ad+bc}^{p \in Z}}{\underbrace{bd}_{k \in Z}}$
olduğundan $y = \frac{p}{k}$ olacak şekilde p,k ∈ Z sayıları vardır.
Buna göre y bir rasyonel sayıdır. Bu ise kabulümüzle çelişir. Yani x rasyonel, y irrasyonel ise y−x de irrasyonel bir sayıdır.

Şekil 4.32. Melis'in son görüşme 5. (ölçme aracı 8.) soruya yanıtı

10. sorudaki fonksiyonlarla ilgili önermenin kanıtının, her adımın gerekçesi açıklanarak tamamlanması istenmiştir. Melis'in, bu soruyu doğru yanıtlayamadığı ve fonksiyonun birebir olması özelliğini kullanmadan kanıtı oluşturmaya çalıştığı görülmüştür (Şekil 4.33). Kanıtlarken $f(A) \cap f(B)$'den alınan y elemanının karşılık

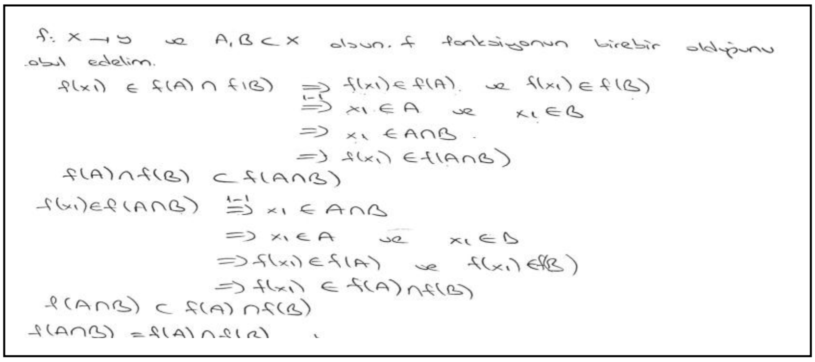
geldiği değerler için, A ve B kümelerinden aldığı elemanların ikisini de x olarak göstermiş, dolayısıyla x'in A ve B kümelerinin kesişiminde olduğu sonucunu çıkarmış ve birebirliği kullanmadığı için geçerli bir kanıt oluşturamamıştır. Birebirliği tanımda kullanamamış olması, Melis için birebirlik tanımının formel olarak uygulanabilir olmadığını göstermektedir. Selden ve Selden (2009) da, öğrencilerin, birebirlik kavramını sezgi ya da mantık yoluyla anlamış olsalar bile fonksiyonun birebir olduğunu nasıl göstereceklerini bilmiyor olabileceklerini belirtmişlerdir.



Adımlar	Nedenleri
1) f bire-bir ve $y \in f(A) \cap f(B)$ olsun.	Varsayım
2) $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$	Kesişimin tanımı
3) $\exists x \in A : y = f(x)$ ve $\exists x \in B : y = f(x)$	Görüntü kümesi tanımı
4) $\exists x \in A \cap B \ni y = f(x)$	Kesişimin tanımı
5) $y \in f(A \cap B)$ dir.	Değer kümesi tanımı
6) $y \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow y \in f(A \cap B)$ old. $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$	Alt küme tanımı

Şekil 4.33. Melis'in ölçme aracı 10. soruya yanıtı

Aynı ifade eşitlik biçiminde yani çift yönlü olarak son görüşmede tekrar verilmiştir. Çift taraflı kapsamanın gösterilmesi gereken bu önermeyi görünce ilk tepkisi "*Yine birebirlik geldi*." şeklinde olmuştur. Bir süre sessizce düşünmüş ve sonra birebirliği nerede kullanacağına karar verememiştir. Daha sonra çift yönlü kapsamayı göstermek için, bir taraftan eleman alarak bu elemanın, eşitliğin diğer tarafında olduğunu gösterme yolunu seçmiştir.



$f: X \to Y$ ve $A, B \subset X$ olsun. f fonksiyonun birebir olduğunu kabul edelim.

$f(x_1) \in f(A) \cap f(B) \Rightarrow f(x_1) \in f(A)$ ve $f(x_1) \in f(B)$
$\overset{1-1}{\Rightarrow} x_1 \in A$ ve $x_1 \in B$
$\Rightarrow x_1 \in A \cap B$
$\Rightarrow f(x_1) \in f(A \cap B)$
$f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$
$f(x_1) \in f(A \cap B) \overset{1-1}{\Rightarrow} x_1 \in A \cap B$
$\Rightarrow x_1 \in A$ ve $x_1 \in B$
$\Rightarrow f(x_1) \in f(A)$ ve $f(x_1) \in f(B)$
$\Rightarrow f(x_1) \in f(A) \cap f(B)$
$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$
$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Şekil 4.34. Melis'in son görüşme 3. (ölçme aracı 10.) soruya yanıtı

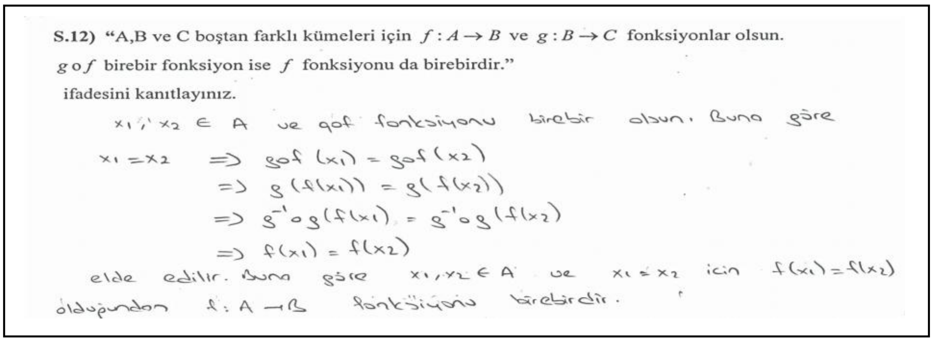
Kanıtında (Şekil 4.34), $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ kapsamasını gösterirken, bu kapsamanın fonksiyonun birebir olması durumunda mümkün olduğunu ve bunu sınıf tartışmalarında fark ettiğini belirtmiştir.

> “ $f(x_1)$, $f(A)$ *’nın elemanı olabilirdi ama* x_1 , A *‘nın elemanı olmak zorunda değildi. Başka bir eleman da gidebilirdi oraya, şekille göstermiştik ya ”*

Sınıf çalışmalarında da, fonksiyonların birebir olması ile ilgili bazı önermeler yer almış ve öğrenciler bu önermelerin kanıtlarını oluştururken birbirlerine sorular sorarak, açıklamalar yaparak, şekiller çizerek tartışmışlardır. Bu tartışmaların, Melis’in birebirlik tanımının kanıtta kullanılması ile ilgili güçlüğünü giderdiği görülmektedir.

11. soruda, kanıtın geçerli olduğunu ve kanıtların doğru olması için birebirlik ve örtenliğin gerektiğini söylemiş olmasına rağmen, bu özelliklerin kanıtın hangi aşamasında kullanıldığını belirleyememiştir. Görüşmede de bu konuda eksiği olduğunu, önermenin kanıtında birebir ve örtenlik kullanılması gerektiğini eski bilgilerinden hatırladığını ancak kullanıldığı yeri belirleyemediğini ifade etmiştir.

12. soruda verilen fonksiyonlarla ilgili önermeyi yazılı uygulamada geçerli bir biçimde kanıtlayamamıştır (Şekil.4.35). Önermedeki g fonksiyonunun birebir ve örtenliği ile ilgili herhangi bir bilgi verilmediği halde $g \circ f$ fonksiyonunun g^{-1} ile bileşkesini alarak f fonksiyonunu elde etmiş ve buradan f ’nin de birebir olduğunu söylemiştir. Ancak yazdıkları incelendiğinde birebirlik tanımını da yanlış kullandığı görülmüştür. Dolayısıyla bu soruyu doğru yanıtlayamamıştır.


S.12) “A,B ve C boştan farklı kümeleri için $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ birebir fonksiyon ise f fonksiyonu da birebirdir.”
ifadesini kanıtlayınız.

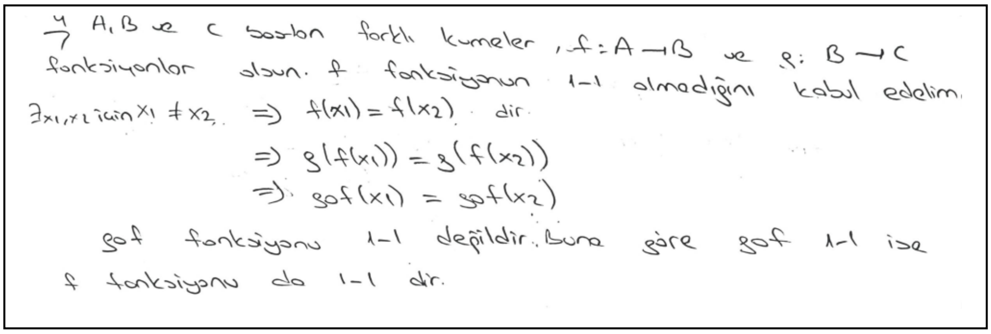
$x_1, x_2 \in A$ ve gof fonksiyonu birebir olsun. Buna göre

$x_1 = x_2 \Rightarrow gof(x_1) = gof(x_2)$
$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow g^{-1}og(f(x_1)) = g^{-1}og(f(x_2))$
$\Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$

elde edilir. Buna göre $x_1, x_2 \in A$ ve $x_1 = x_2$ için $f(x_1) = f(x_2)$ olduğundan $f: A \to B$ fonksiyonu birebirdir.

Şekil 4.35. Melis’in ölçme aracı 12. soruya yanıtı

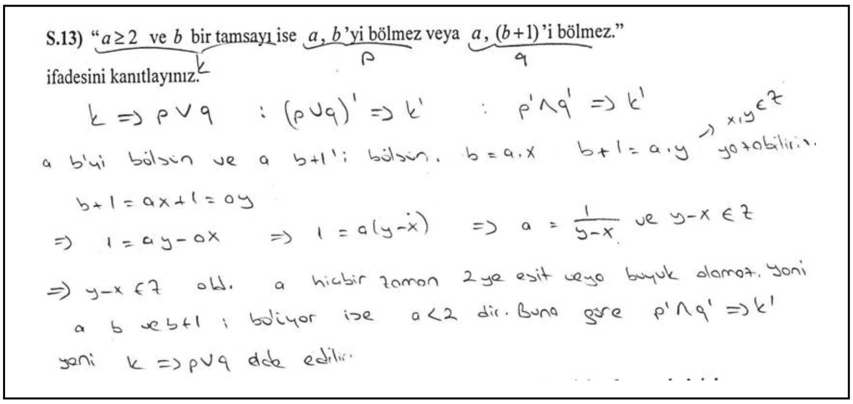
Aynı önerme, çalışmanın sonunda yapılan son görüşmede tekrar verilmiştir. Önermenin kanıtına $g \circ f$ fonksiyonunun birebir olduğunu kabul ederek başlamış ve f ’nin birebir olduğunu göstermek istediğini belirtmiştir. Ancak buradan bir sonuca ulaşamayınca başka bir yöntem denemeye karar vermiş ve karşıt ters kanıt yöntemiyle, önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlamıştır. Birebirliğin tanımını da doğru bir biçimde ifade ederek kanıtta uygun biçimde kullanmıştır (Şekil 4.36).



A, B ve C sonlu farklı kümeler, $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonlar olsun. f fonksiyonunun 1-1 olmadığını kabul edelim.
$\exists x_1, x_2$ için $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ dir.
$\Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$
$\Rightarrow gof(x_1) = gof(x_2)$
gof fonksiyonu 1-1 değildir. Buna göre gof 1-1 ise f fonksiyonu da 1-1 dir.

Şekil 4.36. Melis'in son görüşme 4. (ölçme aracı 12.) soruya yanıtı

Melis, 13. ve 14. sorulardaki önermeleri de geçerli bir biçimde kanıtlayabilmiştir. Birleşik önerme şeklinde verilen 13. sorudaki ifadeyi oluşturan önermeleri harflendirmiş ve önermenin karşıt tersi olan ifadeyi belirledikten sonra kanıtlamaya başlamıştır. Karşıt ters ifadeyi geçerli bir biçimde kanıtlamış ve buradan önermenin doğru olduğu sonucuna ulaşmıştır (Şekil 4.37).



S.13) "$\underbrace{a \geq 2 \text{ ve } b \text{ bir tamsayı}}_{k}$ ise $\underbrace{a, b\text{'yi bölmez}}_{p}$ veya $\underbrace{a, (b+1)\text{'i bölmez.}}_{q}$"
ifadesini kanıtlayınız.

$k \Rightarrow p \vee q$: $(p \vee q)' \Rightarrow k'$: $p' \wedge q' \Rightarrow k'$
a b'yi bölsün ve a b+1'i bölsün. $b = a.x$ $b+1 = a.y$ yazılabilir. $x, y \in Z$
$b+1 = ax+1 = ay$
$\Rightarrow 1 = ay - ax \Rightarrow 1 = a(y-x) \Rightarrow a = \frac{1}{y-x}$ ve $y-x \in Z$
$\Rightarrow y-x \in Z$ old. a hiçbir zaman 2 ye eşit veya büyük olamaz. Yani a b ve b+1 i bölüyor ise $a<2$ dir. Buna göre $p' \wedge q' \Rightarrow k'$
yani $k \Rightarrow p \vee q$ elde edilir.

Şekil 4.37. Melis'in ölçme aracı 13. soruya yanıtı

Önceki sorularda da görüldüğü üzere mantık kuralları ile ilgili bilgiye sahip olması, kanıt yöntemlerini tanıması ve uygun biçimde kullanabilmesi, Melis'in önermeleri kanıtlamasına katkı sağlamaktadır. Görüşmede, işini kolaylaştırmak için ifadeyi birleşik önerme şeklinde düşündükten sonra mantık kurallarını uygulayarak kanıtlamayı düşündüğünü belirtmiştir.

> *"Bu şeyde zaten kullandığım 3 tane kanıt yöntemi var. Burada değilinden yola çıkarak, çünkü "veya" vardı "bölünemez"i kullanamazdım "böler"i kullanabilirdim o yüzden değilini aldım."*

İkinci görüşmede verilen, iki önermeden birincisinin kanıtını, önce doğrudan kanıtla oluşturmaya çalışmış, sonuca ulaşamayınca ifadenin hipotezine p ve hükmüne q dedikten sonra karşıt tersini alarak $\sim q \Rightarrow \sim p$ olduğunu göstermeye çalışmıştır.

Karşıt ters yöntemini uygulamaya çalışırken, hükmün değilini kabul etmesi durumunda çelişkiye ulaşacağını fark etmiştir. Bunun üzerine, önermeyi olmayana ergi kanıt yöntemini kullanarak geçerli bir biçimde kanıtlamıştır.

Küme eşitliği ile ilgili olan ikinci önermeyi kanıtlamaya başlamadan, şekil çizmiş ve böylece kafasında biraz daha canlandırdığını belirtmiştir. Sonra $C\setminus B$'den bir eleman alarak ilerlemiş ancak yaptıklarından bir sonuca ulaşamamıştır. Düşünmeden yapmaya başladığını, şekil üzerinde önermenin doğruluğunu gördüğünü ancak nasıl göstermesi gerektiğine karar veremediğini belirtmiştir. Karşıt ters ve olmayana ergi yöntemlerini deneyip bir süre uğraştıktan ve karalamalar yaptıktan sonra, kanıtı iki kısımda yani çift yönlü kapsamayı göstererek oluşturmaya karar vermiştir. Kullandığı kanıt yöntemine uygun geçişler ve mantık kurallarıyla ilerlemeye çalışmış, sonrasında eleman alarak kapsamayı göstermiş ve geçerli bir kanıt oluşturmuştur. Son görüşmede aynı önerme verildiğinde, hangi yöntemi uygulaması gerektiğini düşünerek başlamış ve doğrudan kanıtla, eşit olduğunu göstermesi gereken kümelerin birbirlerinin alt kümesi olduklarını göstererek kanıtını oluşturmuştur.

Melis'in yazılı olarak uygulanan sorulara verdiği yanıtlar, görüşmelerdeki açıklamaları ve ortaya çıkardığı kanıtlar, üç kanıt yönteminin prosedürel bilgisine sahip olduğunu ve bu yöntemleri doğru kullanabildiğini, kanıtları anlamada ön koşul olarak kabul edilen mantık kuralları bilgisinin tam olduğunu, önermeleri kanıtlarken mantık kurallarından yararlandığını, matematiksel dil ve notasyon kullanmada sorun yaşamadığını göstermiştir. Buna rağmen çalışmanın başında yazılı olarak verilen önermelerin bazılarını kanıtlayamamıştır. Son görüşmede ise çalışmanın başında kanıtlayamadığı önermelerin tümünü geçerli bir biçimde kanıtlayabilmiştir.

Melis'in kanıt oluşturma sürecinde çoğunlukla kanıt gösterim sistemiyle çalıştığı, tanımlardan yola çıkarak, kanıt yöntemlerini ve mantık kurallarını uygulayarak önermeleri kanıtladığı ve kavramlarla ilgili örnekler, şekiller gibi diğer informel gösterimlere pek başvurmadığı, dolayısıyla sentaktik akıl yürütme eğiliminde olduğu görülmektedir. Ancak ikinci görüşmede verilen kümelerle ilgili önermeyi kanıtlamaya başlarken, kafasında biraz daha canlandırmak amacıyla Venn diyagramı çizmiştir. Şekilden görüp ikna olduktan sonra, formel kanıtı oluşturmaya çalışmış ama ilk girişiminde başarılı olamamıştır. Daha sonra tekrar denemiş ve çift yönlü kapsamayı göstererek doğrudan kanıtla önermeyi kanıtlamıştır. Sınıf çalışmalarında da arkadaşlarına açıklama yapmaya çalıştığı bazı durumlarda, tahtaya şekil çizerek düşüncelerini ifade etmeye çalışmıştır. Önermenin kanıtında, kanıt gösterim sistemi dışında bir nesneden, zihninde canlandırmak için yararlanması, semantik akıl yürütebildiğini de göstermektedir (Alcock & Inglis, 2008). Son görüşmede ise aynı önermeyi, herhangi bir şekil çizmeden sentaktik olarak kanıtlamıştır.

Sürecin geneli için bir değerlendirme yapıldığında, Melis'in ağırlıklı olarak bir kanıt yöntemi belirleyerek ve mantıksal çıkarım kurallarını uygulayarak sentaktik yolla kanıt oluşturma eğiliminde olduğu, ancak semantik akıl yürütme de yapabildiği söylenebilir. Çalışmada daha çok tanımları (örn. birebirlik, örtenlik, rasyonel sayı) kullanmada ve doğru ifade etmede güçlük yaşamış ancak çalışmanın sonunda bu güçlüklerini gidermiştir. Sürecin başında kanıtla ilgili prosedürel becerileri iyi olan Melis'in kavramsal eksiklerini de tamamlamış olması, çalışmanın katkısı olarak düşünülebilir.

Bu bölümde, Melis'in derslerin işlenişi hakkındaki düşünceleri, kendi çalışma biçimi ve duyuşsal özellikleri, veriler doğrultusunda incelenecektir.

Melis, bugüne kadar aldığı matematik derslerinde, öğrencilerin katılımı olmadan, öğretmenin anlatımına dayalı olarak ders işlendiğini, öğretmenin bilgileri veren, kendilerinin de dinleyen konumunda olduğunu belirtmiştir. Bu şekilde işlenmesinin sadece zamandan tasarruf sağladığını ancak katılımla daha farklı olabileceğini, kendileri bir şeyler yapmaya çalıştıkları zaman öğretimin daha etkili olacağını düşündüğünü söylemiştir. Daha çok sınavlara yönelik çalıştığını ifade eden Melis, bazen kanıtları kendi başına oluşturmayı deneyerek, bazen de var olan kanıtları okuyarak çalıştığını belirtmiştir.

> *"Eğer yapamayacak durumda görüyorsam kendimi önce bir okuyorum, ondan sonra kapatıp kendim yapmaya çalışıyorum adım adım. Yapamadığım yerde takılıyorsam çok fazla, açıp bakıyorum tekrar, eksiklerimi tamamlamaya çalışıyorum. Kendi kendime anlatıyorum aslında ben dersi"*

Melis de diğer öğrencilere benzer biçimde, derslerde karşılaştıkları önermelerin kanıtlarına çalışma yolunu tercih etmekte ve sınavlar dışında kanıtlama becerisini geliştirmeye yönelik herhangi bir şey yapmamaktadır.

Derslerde onlardan kanıt oluşturmalarının beklenmediğini, bazı önermelerin kanıtlanmasının ödev olarak verildiğini söyleyen Melis, yapabileceğini düşündüğü ve kendine güvendiği bir konu olduğunda ödevleri yapmak için uğraştığını belirtmiştir. Özgüven ve yapabileceğine dair inancının olması Melis'in kendi kendine kanıt oluşturma girişiminde bulunması açısından teşvik edici olmaktadır. Araştırmalar da, olumlu duyguların ve güdülenme düzeyinin daha ayrıntılı çalışmayı desteklediğini ve öğrenme çabası üzerinde etkisi olduğunu göstermektedir (Heinze & Reiss, 2009). Kanıtları anlamada güçlük çekmediğini ancak bir ifadenin kanıtını görmeden kendi kendine kanıtlamaya çalıştığında nasıl ilerleyeceğini kestiremediğini, çoğu zaman ifadenin doğruluğunun çok açık olduğunu gördüğünü ancak bunu kanıta dökemediğini belirten Melis, kanıtlama becerisinin, kanıtları önceden görülmemiş olan ifadelerin kanıtlanmaya çalışılmasıyla geliştirilebileceğini düşünmektedir. Melis, kanıt yapabilmek için kanıt yöntemlerini bilmenin, neye ulaşılacağının ve elde nelerin olduğunun değerlendirilmesinin ve bağlantı kurulmasının önemli olduğunu vurgulamıştır. Sınıf çalışmalarında da genel olarak değerlendirildiğinde, kanıtlamaya problem çözme sürecinde olduğu gibi yaklaştığı *"Biz ne biliyoruz? Neyi göstermemiz gerekiyor? Hangi yöntemle gösterebiliriz?"* şeklinde sorularla, grup içindeki kanıtlama sürecine katkıda bulunmaya çalıştığı görülmüştür.

Çalışmanın başında kanıt yapmaya yönelik olarak sahip olduğu ön yargı ve korkuların, arkadaşlarında da olduğunu bilmenin onu rahatlattığını, çalışma süresince eksiklerini fark ederek birbirlerinin eksiklerini tamamlama fırsatı bulduklarını belirtmiştir. Çalışmanın sonunda, süreci kendi açısından değerlendirmesi istendiğinde, bu çalışmada yer almanın onun için farklı bir deneyim olduğunu ve not korkusu, sınav kaygısı yaşamadan öğrenmekten keyif aldığını belirtmiştir. Araştırmalar, öğrencilerin başkaları tarafından değerlendirileceklerinde kendilerini rahat hissetmediklerini ve özgüvenlerinin düşük olduğunu göstermiştir (Rodd, 2002). Bu çalışmada da, öğrenciler zaman zaman değerlendirilecekleri duygusu yaşamış ve "*Sınavda olsa kaç puan alırdım?"* şeklinde kendi kanıtlarını değerlendirme eğilimi göstermiş, araştırmacının değerlendirilme düşüncesinden ve not, sınav kaygısından kurtulmaları yönünde uyarılarda bulunmasıyla ilerleyen haftalarda bu durumdan kurtulmuş ve düşüncelerini daha rahat açıklamaya başlamışlardır.

Melis, kanıt yapmaya karşı ön yargılarının azalmış olmasını, kanıt yapmanın daha önce olduğu gibi itici gelmemesini hatta eğlenceli olduğunu düşünmesini, 5 haftalık sürecin başında uygulanan yazılı sorulardan zorlandığı ve yapamadığı kanıtları son görüşmede yapabilmesini, kendisi açısından çalışmanın katkıları olarak değerlendirmiştir. Weber (2008)'in çalışması da öğrencilerin küçük kazanımlarının memnuniyet hissi yaratarak teşvik edici olduğunu ve böylelikle onları daha çok çalışmaya motive ettiğini göstermiştir. Son görüşmede sorulan soruların bazılarını daha önce yapamamış olmasından dolayı önyargı ile yaklaştığını belirten Melis, sonrasında grup çalışmalarındaki tartışmalarını ve izledikleri yöntemleri düşünerek yapabildiğini söylemiştir. Bu çalışmanın sonunda kanıt konusunda kendine güveninde artış olduğunu ve artık bir ifadeyle karşılaştığında daha geniş düşünebildiğini belirtmiştir. Son görüşmedeki kanıtlara yaklaşımı ve tüm önermeleri geçerli bir biçimde kanıtlayıp sorulara doğru yanıtlar vermiş olması, Melis'in çalışmanın katkısı ile ilgili söylediklerini doğrulamaktadır. Melis ayrıca, böyle bir çalışmada yer almış olmaktan dolayı memnuniyetini ifade etmiş, *"Keşke bu çalışma birinci sınıftayken yapılsaydı"* şeklinde görüş bildirerek araştırmacıya teşekkür etmiştir.

4.2. Sınıf Çalışmalarının Analizi

Öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmaları için, ilki deneme amaçlı olmak üzere, beş hafta süreyle öğrencilerle haftada bir kere bir araya gelinmiş ve ortalama 1,5 saat çalışılmıştır. Deneme amaçlı olan ilk çalışmada, öğrenciler ortama çabuk uyum sağlamış, kanıtlamaları istenen önermeler üzerinde birlikte tartışarak çalışmışlardır. Tüm oturumların ses ve video kayıtları, sosyal etkileşimin ön planda olduğu bir ortamda, öğrencilerin birbirleriyle tartışmalarını, kanıtlama süreçlerini ve gerçekleştirdikleri etkinlikleri betimleyerek yorumlamak amacıyla analiz edilmiştir.

Bu bölümde öğrencilerle bir araya gelinerek gerçekleştirilen ve öğretme deneyinin öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmalarından elde edilen veriler, her bir hafta için ayrı ayrı incelenerek sunulacaktır.

4.2.1. Birinci hafta sınıf çalışması

Öğrenciler bu oturumda, verilen çalışma kağıtlarında yer alan, kartezyen çarpımla ilgili iki, fonksiyonlarla ilgili iki önermenin kanıtlanması görevleriyle uğraşmışlardır. Çalışma kağıtlarında (Bkz. Ek.4), önermelerde geçen veya kanıtlama sürecinde ihtiyaç duyabilecekleri düşünülen, kartezyen çarpım, fonksiyon, fonksiyonun tanım ve değer kümesi, bir kümenin f fonksiyonu altındaki görüntüsü ve birebir fonksiyon tanımları yer almıştır. Öğrenciler üçer kişilik iki gruba ayrılarak çalışmışlardır.

Veli, Pelin ve Cem'in bulunduğu grup, çift yönlü koşullu önerme olan ilk ifadeyi, her iki yönden de, Cem'in yönlendirmesiyle, olmayana ergi yöntemiyle geçerli bir biçimde kanıtlamışlardır. Olmayana ergi yöntemini tercih ettiğini bireysel görüşmelerde de ifade eden Cem, yöntem konusunda arkadaşlarını yönlendirmiş ve yöntemi önermeye nasıl uygulayacaklarını açıklamıştır. Veli kanıtı yazma görevini üstlenmiş ve öğrenciler, birlikte karar vererek ve anlamadıkları, doğruluğundan emin olmadıkları yerlerde birbirlerine sorular sorarak kanıtı oluşturmuşlardır.

Derya, Emre ve Melis'in bulunduğu diğer grupta da Derya kanıtı yazmaya başlamış, bu sırada arkadaşları yazdıklarını kontrol etmiş ve ne yazmaları gerektiğine birlikte karar vererek karşıt ters yöntemiyle geçerli bir kanıt oluşturmuşlardır. Emre, kullanılan yöntemi anlamakta biraz zorlanmış, verilen ifadeden farklı bir şey kanıtladıklarını düşünmüş ancak arkadaşlarının açıklamalarıyla sorununu gidermiştir.

İkinci önermenin de her iki grup tarafından, çift taraflı kapsamayla gösterilmesinden sonra, Derya ve Cem kanıtlarını tahtada açıklayarak sunmuşlardır. Öğrenciler çözüm yollarını birbirleriyle paylaştıktan, düşüncelerini ifade ettikten ve yazılan kanıtların geçerli olduğu herkes tarafından kabul edildikten sonra, diğer kanıt görevlerine geçmişlerdir.

Öğrencilerin zorlanmadan kanıtladıkları bu iki önerme (Bkz. Ek.4 önerme 1.1 ve 1.2) kavramsal anlama gerektirmeyen, cebirsel işlemlerle ve sentaktik olarak kanıtlanabilecek türde önermelerdir. Öğrenciler, belli bir kanıt yöntemini belirleyip uygulayarak bu iki önermenin kanıtını kolaylıkla oluşturmuşlardır. Önermelerdeki “*eğer… ise - o zaman”* örüntüsü kanıt çerçevesindeki “*varsay - o halde”* biçimine yol açarak, kavramsal anlamaya gerek kalmadan önermenin kanıtının oluşturulmasını sağlayabilmektedir (Selden & Selden, 1995). Bu önermeler de, bu şekilde kanıtlanabilecek kavramsal anlama gerektirmeyen önermelerdir ve her iki grup kolaylıkla kanıtlamışlardır. Önermeler kanıtlanırken, nasıl ilerleyecekleri konusunda zorlanmamalarına rağmen, her iki grupta da kanıtı yazan öğrenciler (Veli ve Derya) yazdıkları sözel ifadelerde ve açıklamalarda tereddüt etmiş ve arkadaşlarına hangi kelimeyi kullanmalarının daha doğru olacağını sormuşlardır. Veli, kanıta başlarken “*Varsayım mı diyeyim, kabul mü*?” diye arkadaşlarına sormuş, diğer grupta da Derya “*Kabul edelim mi yazalım, varsayalım mı? Bunların bir önemi var aslında*” şeklinde kararsızlığını ifade etmiştir. Bu durum, öğrencilerin kanıtlarda belli türde kelimelerin kullanılması gerektiğini düşündüklerini ancak hangi ifadelerin kabul göreceği endişesi taşıdıklarını göstermektedir. Öğrencilerin kanıt yazma konusunda özgüvenleri düşük olduğundan ve genellikle hazır kanıtları çalışıp kitapta gördükleri veya öğretmenin yaptığı kanıtları taklit ettiklerinden, kanıt oluştururken doğru ifadeleri kullanmada ve düşüncelerini yazıya dökmede güçlük çekmektedirler.

Derya, Emre ve Melis, verilen üçüncü önermeyi (Bkz. Ek.4 önerme 1.3), $f(A)$’ dan alınacak bir elemanın $f(B)$’de olacağını göstererek kanıtlayabileceklerini düşünmüşler ancak $f(A)$’dan alınacak elemanı y olarak mı yoksa $f(x)$ olarak mı gösterecekleri konusunda kararsızlık yaşamışlardır. Derya “*$f(x)$ ve y aynı mıdır?*” sorusunu sormuş, Emre’nin aynı olduğunu söylemesi üzerine $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$ …**[1]** şeklinde kanıta başlamış ve bu ifadeyi yazdığı satırın sonuna gerekçe olarak “*görüntü kümesi tanımından*” açıklamasını yazmıştır. Bu satırdan sonraki mantıksal geçişleri yaparak istenilen kapsamayı göstermiştir. Öğrenciler kanıtı oluşturduklarına karar verdikten sonra dördüncü önermeye geçmişlerdir.

Dördüncü önermeye başlarken grup üyeleri arasında şu şekilde bir konuşma geçmiştir:

<u>Melis:</u> Birebirliği nasıl kullanacağız?

<u>Derya:</u> Bir çizeyim mi, ister misiniz?

<u>Melis:</u> Çizelim, ben de çiziyorum.

<u>Emre:</u> Ya şey yapalım, tanımdan gidelim bence

Derya: *Niye? Bir görelim.*

Emre: *Ben diyorum ki tanımdan gidelim, birbirlerinden farklı iki eleman seçelim, bunların görüntülerinden gitmez miyiz? Yani tanımı kullansak birebirliği*

Derya: *Ya şundan* ($f(X\setminus A)'$yı kastediyor) *bir eleman alıp şunda* ($Y\setminus f(A)\,'$yı kastediyor) *olduğunu göstermeyecek miyiz?*

Emre: *Ama bak ise* (önermedeki ise bağlacını kastediyor)

Derya: *E tamam, demin de aynısını yaptık, eğer böyle yanlışsa o da yanlıştır işte. Ben hep onu diyorum zaten orada bir sorun olabilir.*

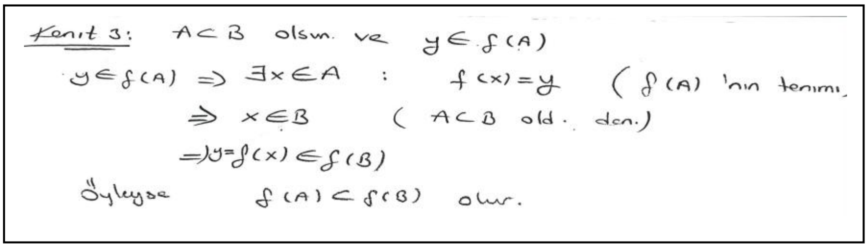
Emre: *Ama birebir tanımını kabul etmen lazım*

Derya: *Tamam bir bakalım işte*

Bu önermede de $f(x) \in f(X\setminus A) \Rightarrow x \in X\setminus A$… **[2]** geçişini yapmış, buradan $x \notin A \Rightarrow f(x) \notin f(A)$…**[3]** ve buradan da $f(x) \in Y\setminus f(A)$ şeklinde ilerleyerek kapsamayı gösterdiklerine karar vermişlerdir. Derya, kanıtta bir sorun olabileceğini, buna benzer sorularda bu şekilde yaptıklarında yanlış olduğunun söylendiğini hatırladığını belirtmiş ve yazdıklarının doğruluğundan şüphe etmiştir. Ancak yanlışlığın nerede olduğunu fark edememiştir. Yazdıklarını tekrar incelemişler ve birebirliği kanıtın neresinde kullandıkları konusunda tartışmaya başlamışlardır. Derya, "*x, A'da değilse, $f(x)$, $f(A)$'da olabilir diyebilir miyiz?*" şeklinde bir soru yöneltmiştir. Melis, birebirliği nerede kullandıklarını hala anlayamadığını ve bir yerde bir sorun olduğunu düşündüğünü belirtmiştir. Emre, seçtikleri elemanın tek bir görüntüsünün olmasının nedenini, fonksiyonun birebir olması olarak açıklamış ve geçerli bir kanıt oluşturduklarını ancak kanıtlamaları kısa sürdüğü için şüphe ettiklerini söylemiştir. Öğrenciler, bu tartışmanın sonunda bir sonuca ulaşamamış ve yazdıklarının doğruluğundan emin olamadıklarını ifade ederek, diğer grupla birlikte tartışmayı önermişlerdir.

Verilen fonksiyonlarla ilgili bu önermelerden ilkinde, fonksiyon birebir olarak verilmemiş ancak ikinci önermedeki fonksiyonun birebir olduğu belirtilmiştir. Öğrencilerin yazdıkları ifadeler (**[1]**, **[2]** ve **[3]**) incelendiğinde her üç satırdaki ifadenin de geçerliliğinin, fonksiyonun birebir olmasıyla mümkün olacağı görülmektedir. Öğrenciler bu ifadeleri yazmış oldukları halde, bunların fonksiyonun birebir olması durumunda geçerli olacağını fark etmemişler fakat verilen bilgiyi kullanmaları gerektiği düşüncesinden hareketle, birebirliği nerede kullanmış olduklarını sorgulamışlardır. Bu iki önermenin kanıtına yönelik olarak yazdıkları, öğrencilerin göstermek istedikleri sonuca ulaşmak için, işlerine yarayacağını düşündükleri ifadeleri gerekçelendirmeden kullandıklarını, tanımları doğru yerde ve doğru biçimde kullanamadıklarını göstermektedir.

Veli, Cem ve Pelin'den oluşan diğer grup üçüncü önermenin kanıtına başlarken, Veli ve Cem önermeyi doğrudan kanıt ve olmayana ergi yöntemlerinden hangisiyle kanıtlayacaklarına karar vermeye çalışmışlardır. Cem olmayana ergi ile direkt istenen ifadeyi gösterebileceklerini ancak doğrudan kanıtı uygularken takılabileceklerini belirtmiştir. Veli ise doğrudan kanıt yöntemiyle deneme konusunda ısrar etmiş ve ifadeyi doğrudan kanıtlamaya başlamıştır. Veli, kanıtı yazmaya çalışırken grup arkadaşları yazdıklarını takip etmiş ve sonuçta geçerli bir kanıt oluşturmuşlardır (Şekil 4.38).


Kanıt 3: $A \subset B$ olsun ve $y \in f(A)$
$y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A : f(x) = y$ ($f(A)$'nın tanımı)
$\Rightarrow x \in B$ ($A \subset B$ old. dan.)
$\Rightarrow y = f(x) \in f(B)$
Öyleyse $f(A) \subset f(B)$ olur.

Şekil 4.38. Veli-Pelin-Cem'in Önerme 1.3 için kanıtı

Dördüncü önermede de Cem, olmayana ergi yöntemini uygulamaları durumunda çelişki elde edeceklerini ve rahatlıkla kanıtlayabileceklerini söylemiştir. Olmayana ergi yöntemini uygularken rahat olamayan Veli ise Cem'in söylediklerini yazarken, nasıl bir çelişki yakalayacaklarını ve ne yapmaya çalıştıklarını anlamakta zorlanmıştır.

<u>Veli:</u> *Bir dakika ne yapmaya çalışıyoruz?*

<u>Cem:</u> *Çelişki yakalayacağız*

<u>Veli:</u> *Nasıl bir çelişki?*

<u>Cem:</u> *Ya bir çelişki yakalayacağız sen devam et*

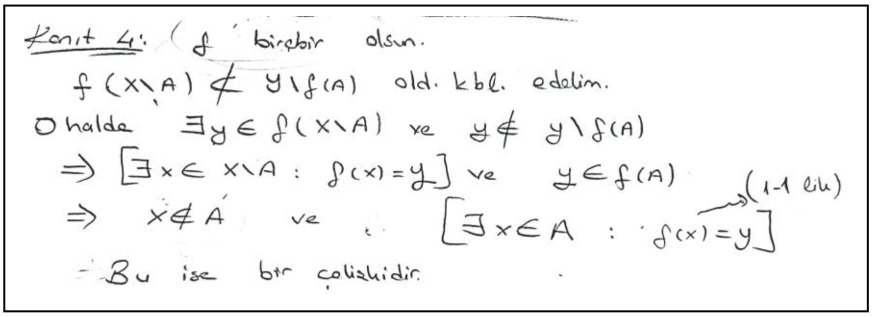
<u>Veli:</u> *f'nin birebirliği ile ilgili*

<u>Cem:</u> *Devam et*

<u>Veli:</u> *Ama bana şey geliyor işte, şunun* (varsayımı kastediyor) *üzerinden gidip de şunun üzerinden çelişki bulmak*

Cem: *Hayır hayır illa varsayımla çelişki olmak zorunda değil olmayana ergide*

Kanıtlama sürecinde, Cem yönlendirmiş, Veli söylenenleri yazmış, Veli ve Pelin anlamadıkları yerlerde Cem'e sormuşlardır. Veli yazarken olmayana ergi yönteminde nasıl bir çelişkiye ulaşılması gerektiği noktasında takılmış ve sonuçta varsayımla çelişki elde edilmesi gerektiğini düşünmüştür. Selden vd. (2008a), kanıtlama deneyimi daha az olan öğrencilerin hipotezi doğru ve sonucu yanlış kabul ederek çelişkiye ulaşabilseler bile ne ile çelişkiye düşüldüğüne şaşırabildiklerini belirtmişlerdir. Veli de, olmayana ergi yönteminde varsayımla çelişen bir sonuç elde edilmesi gerektiğini düşünmüş, bilinen herhangi bir gerçekle çelişen ifadeye ulaşılmasından tam olarak ikna olamamıştır. Öğrencilerin yazdıkları incelendiğinde (Şekil 4.39), mantıksal bir sırayla ilerledikleri ve çelişkiye ulaştıkları ancak çelişkinin gerekçesini açık bir şekilde ifade edemedikleri görülmüştür.


Kanıt 4: (f birebir olsun.
$f(X \setminus A) \not\subset Y \setminus f(A)$ old. kbl. edelim.
O halde $\exists y \in f(X \setminus A)$ ve $y \notin Y \setminus f(A)$
$\Rightarrow [\exists x \in X \setminus A : f(x) = y]$ ve $y \in f(A)$ (1-1 lik)
$\Rightarrow x \notin A$ ve $[\exists x \in A : f(x) = y]$
$\therefore$ Bu ise bir çelişkidir.

Şekil 4.39. Veli-Pelin-Cem'in Önerme 1.4 için kanıtı

Bu oturumdaki kritik olay, öğrencilerin tümünün, dördüncü önermenin kanıtlanmasında, fonksiyonun birebir olmasını nasıl ve nerede kullandıklarını birlikte tartışmalarıdır. Bu tartışma, öğrencilerin kanıt oluşturma sürecinde nasıl düşündükleri, nerelerde güçlük çektikleri ve birlikte tartışarak nasıl sonuca ulaştıkları konusunda açıklayıcı bilgiler sunmaktadır.

Her iki grup da çözümlerini tahtaya yazmış ve birlikte yazılanların doğruluğunu tartışmaya başlamışlardır. Derya, Cem'in yazdıklarında birebirliğin nerede kullanıldığını anlayamadığını belirtmiş ve kendi çalışmalarında takıldıkları noktayı açıklamıştır.

<u>Derya:</u> Netleştiremediğim şey, biz y değil de $f(x)$ dediğimiz için birebirliğe falan hiç gerek kalmadı. Ben y mi yazacağız $f(x)$ mi yazacağız karıştırdığım için soruyorum, yani $f(x) \in f(X \backslash A) \Rightarrow x \in X \backslash A$ dedik görüntü kümesi tanımından ama y alsaydık diyemezdik işimize böyle geldi $f(x)$ aldık.

<u>Melis:</u> Bence bir $y \in f(X \backslash A)$ alalım sonra birebirlikten dolayı bir tane $x \in X \backslash A$ olduğunu yazalım.

<u>Veli:</u> Sanki az önceki gibiyken de böyle bir şey olması gerekiyor. $f(x) \in f(X \backslash A)$ ise $x \in X \backslash A$ diyemezsin, başka bir eleman tarafından meydana getirilmiş olma şansı var bence.

<u>Derya</u>: Şöyle yapalım çizelim aslında

Derya, Veli, Cem ve Melis tartışma sürecine daha aktif katılmış, Pelin ve Emre tartışmayı takip etmişlerdir. Derya düşüncelerini açıklarken şekil çizme ihtiyacı hissetmiş ve Venn diyagramı çizerek birebirlik tartışmasını şekil üzerinde sürdürmüştür. Aynı şekil üzerinde Veli, Cem ve Melis de tartışmış ve açıklamalar yapmaya çalışmışlardır. Öğrencilerin çalışma kağıtlarında fonksiyon, birebir fonksiyon, görüntü kümesi tanımları yer aldığı halde bu tanımları formel olarak uygulanabilir hale getirmekte zorlanmışlardır. Öğrenciler birebir tanımının mutlaka kullanılması gerektiği konusunda hemfikir oldukları halde, her iki grubun yazdıklarında hangi adımın gerekçesinin, fonksiyonun birebir olması olduğunu belirleyebilmek için tartışmışlardır.

<u>Derya:</u> Peki x, A'da değilse, $f(x)$, $f(A)$'da değil midir? (şekil üzerinde de göstererek soruyor)

<u>Melis:</u> Çünkü başka bir eleman da $f(x)$ olabilir.

<u>Araştırmacı:</u> Nasıl başka bir eleman mesela?

<u>Melis:</u> Başka bir a elemanı olsa A kümesi dışında mesela, A'nın dışında başka bir eleman da $f(x)$'e gidebilir birebir olmasa

<u>Araştırmacı:</u> A'nın dışında bir elemanın görüntüsü $f(A)$'nın içinde olamaz mı?

<u>Derya:</u> Olamaz çünkü A'daki x'lerden

<u>Araştırmacı:</u> Çizimden bakalım peki

<u>Veli:</u> O zaman tanımla çelişir tanım ortada, A'daki x'lerden meydana geliyor sonuçta.

<u>Derya:</u> Bi dakika aklıma bir şey geldi sen (Melis'e yönelik) *şunu söylemek istedin aslında*

<u>Melis:</u> *Ben şekilde ifade edemedim, aslında kafamda bir şeyler oluştu ama*

Bu tartışmanın sonunda Derya, tahtaya çizdiği Venn diyagramlarında A kümesinden ve bu kümenin dışından iki eleman alarak $f(A)$ kümesinde bir elemana götürmüş ve fonksiyonun birebir olmaması durumunda, görüntü kümesindeki bir elemanın iki farklı elemana karşılık gelebileceğini söylemiştir. Tartışma bir süre daha devam ettikten sonra Melis tüm söylenenleri toparlamak istemiş ve tahtaya kalkarak çizdiği şekil üzerinde birebirliğin nerede ve neden gerektiğini açıklamıştır. Derya da x yerine 2 elemanını alarak birebirliğe gerek olduğunu örnek üzerinden göstermeye çalışmıştır. Bu açıklamalardan diğer öğrenciler de ikna olmuştur ancak Veli, araştırmacının onayına ihtiyaç duymuştur. Araştırmacı, "*Önemli olan herkesin ikna olması ve anlaması eğer sizin için bir problem yoksa doğrudur*." demesine rağmen, Veli ders sorumlusunun onlar için kriter olduğunu ve onay almadan emin olamadığını belirtmiştir. Süreç boyunca da Veli, "*Ya yanlışsa, acaba doğru mu düşünüyorum, ben yaptım ama emin değilim*" şeklinde özgüven eksikliği olarak değerlendirilebilecek ifadeler kullanmıştır. Veli, doğru yapmış olsa da otorite olarak değerlendirdiği birinden (genellikle ders sorumlusundan) onay almadığı sürece yaptıklarından emin olamamıştır.

Son önermedeki birebirlik tanımının nerede ve nasıl kullanılacağı konusundaki tartışmanın sonuca ulaşmasıyla Derya, "*Şu an çok mutluyum*" şeklinde duygularını dile getirmiştir. Duyuşsal açıdan değerlendirildiğinde Derya'nın kanıtlama sürecinde yaşadığı bilinmezlik duygusu, farklı stratejilerle sonuca ulaşmaya çalışması konusunda tetikleyici olmuş, problemin çözüme ulaşması ile birlikte yerini memnuniyet, gurur ve tatmin olma duygularına bırakmıştır (Goldin, 2000).

Veli ise bu tartışmanın kendileri için geç kalınmış bir tartışma olduğu ve bunları daha önceden öğrenmiş olmaları gerektiği şeklinde bir eleştiride bulunmuştur.

Deneme amaçlı olarak gerçekleştirilen bu oturum, öğrencilerin verilen önermelerden dördünü kanıtlamalarıyla tamamlanmıştır. Öğrencilerin bu dört önermeyi kanıtlama süreci, düşünme biçimleri, ürettikleri fikirler, karşılaştıkları güçlükler ve birbirleriyle etkileşimleri açısından değerlendirildiğinde ilk iki önermede daha çok kanıt yöntemine odaklandıkları, kanıtta kullanacakları ifadeleri nasıl yazacakları konusunda tereddüt ettikleri ve sentaktik kanıt ürettikleri görülmektedir. Bu önermeler kavramsal anlama gerektirmeyen ve sentaktik yolla kanıtlanabilecek önermeler olarak değerlendirilebilir ve öğrenciler bunları kanıtlarken güçlük çekmemişlerdir. Ancak birebirlik kavramını kullanmaları gereken son önermede, tanımları kullanma konusunda güçlük yaşamışlardır.

Öğrencilerin, formel bir argüman oluştururken tanımları kullanmakta güçlük çekmelerinden dolayı, tartışmaya konu olan fonksiyon, görüntü kümesi, birebir fonksiyon gibi tanımlardan özellikle birebirlik tanımının, onlar için formel olarak uygulanabilir olmadığı söylenebilir.

Öğrencilerin üçer kişilik gruplardaki çalışmaları sonucunda, her iki grup yazdıklarından emin olamadıkları için birlikte tartışmak istemiş ve tüm sınıf tartışması sonucunda doğruya ulaşmışlardır. Öğrencilerin birbirleriyle etkileşimleri, farklı fikirleri görmeleri ve değerlendirmeleri, birbirlerine soru sormaları, açıklamalar yapmaları kanıtlama sürecinde ilerlemelerine ve sonuca ulaşmalarına katkı sağlamıştır.

Bu oturumdaki tartışmalarda Derya'nın şekiller çizerek anlatması semantik akıl yürütmeyi kullandığının bir göstergesi olmuştur. Cem'in ise kanıtlarda sürekli belli bir kanıt yöntemini (olmayan ergi yöntemi) uygulamayı önermesi sentaktik kanıtlama eğiliminde olan kişilerin özelliklerindendir. Tartışmalara Pelin ve Emre daha az katılmış, fikir üretmek yerine genellikle arkadaşlarının ürettikleri fikirlerini dinlemiş, doğru olup olamayacağı konusunda yorum yapmaya ve açıklamaları anlamaya çalışmışlardır. Melis, semantik akıl yürütmeyi kullanabilmiş ama şekil çizmede biraz zorlanmış, düşüncelerini daha çok sözel ifadelerle açıklamıştır. Veli ise sürekli sorgulamış, akıl yürütmüş ve arkadaşlarını dinleyip aktif olarak tartışmalara katılmıştır. Ulaşılan sonuçların değerlendirilmesinde ise onlar için kriterin hep ders sorumluları olduğunu söyleyerek, sonuçların doğruluğundan tam emin olabilmek için daha yetkin olduğunu düşündüğü bir kişinin onayına ihtiyaç duyduğunu belirtmiştir.

4.2.2. İkinci hafta sınıf çalışması

Bu oturumda öğrenciler yine Veli, Cem ve Pelin bir grup, Emre, Derya ve Melis bir grup olmak üzere üçer kişilik iki gruba ayrılmışlardır. Verilen çalışma kağıdındaki ilk önermeyi kanıtlayabilmek için yaklaşık 20 dakika kendi gruplarında uğraşmış, daha fazla ilerleyemediklerini ve düşüncelerini diğer grupla tartışmak istediklerini belirttikleri anda sınıf tartışmasına geçmişlerdir.

Veli, Cem ve Pelin önermeyi okuduktan sonra Veli eşitliğin her iki tarafından alınacak elemanın diğer tarafta da olduğunu göstererek kanıtlamayı düşünmüştür. Cem bu fikre:

> *"Buradan eleman almıyoruz ya, bu soruları böyle yapmıyorduk direkt yapıyorduk, eleman falan almıyorduk. Bu sorularda şey yapıyorduk ama eleman almadan yapıyorduk da bir tane ε alacağız zaten $\varepsilon > 0$ diyeceğiz."*

şeklinde itiraz etmiş ve ne olduğu tam olarak anlaşılmayan bir yöntem hatırlamaya çalışmıştır. Bunun üzerine Veli, şekil üzerinde önermenin doğruluğunu görebileceklerini söyleyerek sayı doğrusu çizmiştir. Cem de önermenin doğruluğunun şekil üzerinde açık olduğunu kabul etmiş ancak kanıtı nasıl yazacaklarını, nasıl başlayacaklarını düşünmeleri gerektiğini belirtmiştir. Gökhan'ın önerisi, farklı epsilon değerlerini $\varepsilon_i, \varepsilon_j, \varepsilon_k$ şeklinde indisli biçimde göstererek $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ açık aralıklarının kesişimini görmeleri gerektiğidir. Veli ve Pelin, bu şekilde yaparak kesişimde sıfır olduğunu nasıl gösterebileceklerini sormuşlar, Cem "*bir başlayalım gerisi gelir diye düşündüm*" şeklinde yanıt vermiştir. Cem, kanıtı yazmaya başlamış, aldığı ε değerlerini gittikçe küçülterek belirlediği $(-\varepsilon_1, \varepsilon_1), (-\varepsilon_2, \varepsilon_2) \ldots$ şeklindeki aralıkların kesişimlerini göstermeye çalışmıştır. Ancak yazdıkları karalama şeklindedir ve önermenin doğruluğuna ikna olmasına rağmen formel kanıt oluşturamamıştır.

Cem'in yaptıklarıyla bir sonuca ulaşılamayınca Veli, kendi düşüncesini yazmaya çalışmıştır. Veli, herhangi bir sıfırdan büyük epsilon değeri için $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığından bir $a > 0 \in \mathbb{R}$ alırsa bu sayıyı dışarıda bırakan başka bir $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığı bulabileceğini, dolayısıyla seçeceği sıfırdan farklı her $a \in \mathbb{R}$ için bu sayının dışında kalacağı bir $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığı bulunabileceğini ve bu türdeki aralıklarda kalacak tek sayının 0 olacağını iddia etmiştir.

> <u>Veli:</u> *Sıfırdan başka bir şey alamıyorsun çok açık işte. Sıfırdan farklı en ufak bir şey alsan yarısı kadar bir epsilon seçersin yine dışta kalır.* $0{,}001$ *bile alsan dışta kalır.*
>
> <u>Pelin:</u> *Ben seni anladım.*
>
> <u>Cem:</u> *Kanıt olur mu demek istiyor?*

Pelin: Hıı onu diyorum. Yani baştan beri belli zaten

Öğrenciler ortak bir düşünceye varmış ve sezgisel olarak ikna olmuşlardır. Ancak yazdıkları matematiksel olarak açıklayıcı ve kanıt oluşturmak için yeterli olmamıştır. Öğrenciler düşüncelerini ikna edici argümanlarla sunmalarına, görsel olarak bu argümanları desteklemelerine rağmen, fikirlerini bir bütün olarak matematiksel bir dille ifade edememiş, nereden başlayıp nasıl ilerleyeceklerini öngörememiş ve matematiksel olarak kabul edilebilir bir kanıta dönüştürememişlerdir.

Bu grup 20 dakika tartıştıktan, fikirler ürettikten sonra geçerli bir kanıt ortaya çıkaramamış ve daha fazla ilerleyemediklerini, düşüncelerini hep birlikte tartışmak istediklerini belirtmişlerdir. Veli, bir sonuca ulaşamamaları sonucunda duygularını "*Sinirim bozuldu ya!"* şeklinde ifade etmiştir. Veli'nin duyuşsal durumu ile ilgili ipucu veren bu ifade, gösterdikleri çabanın sonuç vermemesinin yarattığı şaşkınlık durumu olarak değerlendirilebilir. Bu olumsuz duygu onu, diğer grupla birlikte tartışarak sonuca ulaşmaya çalışmaya yöneltmiştir.

Derya, Emre ve Melis de önermeyi okuduktan sonra, Derya çift taraflı kapsama ile gösterilebileceğini düşünmüştür. Emre ise aralıkları gittikçe küçülterek, bu aralıkların kesişimlerini almayı önermiş ama bunu nasıl yazabileceklerini bilmediğini belirtmiştir. Diğer gruba benzer şekilde sayı doğrusu üzerinde önermenin doğruluğunu görmüş ancak nasıl kanıtlayabileceklerine karar verememişlerdir. Emre bu durumu *"Buradan 0 çok rahat görülüyor. İnsan bakınca çok rahat ifade ediyor da ispata gelince…"* şeklinde ifade etmiş ancak kanıtı yazmaya katkı sağlayamamış, daha çok derslerde nasıl yaptıklarını hatırlamaya çalışmıştır. Derya, kesişim tanımından giderek bir şeylere ulaşabileceklerini düşünmüş ama kesişimin matematiksel olarak tanımını hatırlayamadığını belirtmiştir.

Emre: Kesişimi gerçelde de (Gerçel Analiz dersini kastediyor) *görmüştük, K açık aralıkları vardı onlar neydi, en küçük kapalı küme mi diyorduk?*

Derya: Ya şey yapalım mı benim aklıma geldi, öyle olmadığını kabul edelim. Böyle bir K aralık varmış ki

Melis: *Ya aileler seçmemiz lazım* $(-\varepsilon_i, \varepsilon_i)$ *açık aralıklar ailesi olsun hatta sonsuz olsun. Bunun kesişimine ait olması için ne gerekiyor, hepsinde olması gerekiyor.*

Emre: *Evet öyle aileler alacağız* $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ *diyelim* n *'e* (ε_n' i kastediyor) *kadar gitsin*

Derya: *Evet öyle aileler alacağız*

Melis: *Bunlar da* $\varepsilon_1 \subset \varepsilon_2$ *olsun*

Emre: *Ha ha evet hatta biz bunun benzerini topolojide* (Genel Topoloji dersini kastediyor) *yaptık*

Melis: *Evet*

Derya: *Ama topolojiyi hatırlamaya çalışmayalım şimdi öyle yaparsak şaşırırız. Biz kendimiz yapmaya çalışalım.*

(…)

Emre: *Hani gerçelde* (Gerçel Analiz dersini kastediyor*) hatırlıyor musun? Kapanışların kesişimi böyleydi ve mantığı da böyle*

Derya: *Ya ona takılmasak başka bir şeyden yapsak*

Kesişim tanımı olarak hatırlamaya çalıştıkları, aralıkların kesişiminin sembollerle, matematiksel olarak ifade edilmesidir. Böyle bir ifadeyi oluşturamamış ve bir süre önermenin kanıtıyla ilgili-ilgisiz birtakım bilgileri hatırlamaya çalışmışlardır. Bu durum, öğrencilerde temel kavramlarla ilgili eksikler olduğunu, kanıtta işlerine yarayacak kavramları ve düşünceleri tam olarak ayırt edemediklerini göstermektedir. Öğrencilerin tartışmalarından yapılan yukarıdaki alıntıda görüldüğü üzere, Emre derslerde nasıl yaptıklarını hatırlamaya çalışmış ancak tam olarak anlaşılmayan, kopuk kopuk bilgilerden söz etmiştir. Herhangi bir kavramsal bilgi gerektirmeyen bir önermeyi kanıtlarken, nasıl ilerleyebileceği üzerine fikir yürütmek yerine, bunları nasıl yapıyorduk şeklinde bir yaklaşımla, öğretmenlerinin derslerdeki kanıtlama biçimlerini hatırlamaya çalışmıştır. Derya ise önermeyi akıl yürüterek kanıtlamaya çalışmış ve Emre'ye, hatırlamak yerine şu anda bu önerme için ne yapabileceklerini düşünmeleri gerektiğini söylemiştir.

Derya: *Biz neyi göstermek istiyoruz? Yani biz neyi bulmak istiyoruz, ne yapmaya çalışıyoruz, hangi yoldan gidiyoruz önce ona karar verelim bence.*

Melis: *Yani kapsam tarafı açık zaten sıfırı kapsadığı, işte buradan* ($\bigcap_{\varepsilon>0}(-\varepsilon, \varepsilon)$ kesişimini kastediyor) *bir eleman almamız gerekiyor ve onun sıfıra eşit olduğunu görmemiz gerekiyor. Eşit olmadığını kabul etsek*

<u>Derya:</u> İşte şimdi bir dakika, önce biz bunu bir daha düşünelim, yeniden buradan ($\bigcap_{\varepsilon>0}(-\varepsilon,\varepsilon)$ kesişimini kastediyor) *bir eleman almamız gerekiyor bu eleman ne olacak?*

Derya, ne yapmaya çalıştıklarını tekrar düşünmelerini sağlamak ve planlı bir şekilde ilerlemek için sorular sormuştur. Çalışma boyunca sorular sorarak ilerlemesi, her adımda ne yaptıklarını ve ne yapmaya çalıştıklarını denetlemesi Derya'nın kontrol, izleme ve öz düzenleme stratejilerini (Schoenfeld,1992) kullandığını göstermektedir. Bu stratejiler kanıtlama sürecinde ilerlemesine katkıda bulunmuştur. Melis, kanıtlamalarını sağlayacak doğru bir yaklaşımda bulunmuştur ve bu onları çözüme yaklaştırmıştır. Ancak matematiksel olarak ifade edemediklerinden düşündüklerini yazıya dökememişlerdir.

Derya $(-\varepsilon_1,\varepsilon_1)$ aralıklarının kesişimini K kümesi olarak tanımlamış ve bu kümenin boş küme olduğunu kabul ederek çelişki elde edebileceklerini düşünmüştür. Çizdiği sayı doğrusunda K'nın boş küme olmayacağını ve tek elemanının sıfır olacağını görmüş ancak yine de matematiksel bir kanıt yazamamıştır

Öğrencilerin kanıtlama girişimleri başarıya ulaşamamış, geçerli argümanlar üretmelerine, sezgisel olarak ikna olmalarına rağmen kanıtı oluşturamamışlardır. Her iki grubun benzer düşünceler ürettiği, daha çok argümantasyon yaptıkları ancak formel kanıt yazamadıkları görülmektedir. Önermeyi olmayana ergi yöntemiyle kolaylıkla kanıtlayabilecekleri halde bir kanıt yöntemi düşünmemiş ya da uygulayamamışlardır. Sadece ürettikleri fikirleri tartışmış ve sürekli *"nasıl kanıtlayacağız, onu nasıl göstereceğiz*" şeklinde kanıtı yazmaya odaklanmış fakat başaramamışlardır.

Öğrenciler, kendi gruplarında tartışmalarının sonunda, kanıtı oluşturamadıklarını ve diğer grupla birlikte tartışmak istediklerini belirtmişlerdir. Bunun üzerine sınıf tartışmasına geçilmiştir ve önce Veli sonra Derya sırayla tahtaya kalkarak nasıl düşündüklerini arkadaşlarına açıklamışlardır. Onların açıklamaları üzerine Melis ve Cem de fikirleriyle katkıda bulunmuşlardır. Öğrenciler, tartışmanın sonucunda her $(-\varepsilon,\varepsilon)$ aralığında olabilecek tek elemanın sıfır olacağına karar vermişlerdir. Aralarında geçen konuşmalar birbirlerinin fikirlerine katkıda bulunarak ilerlediklerini ve sonuçta sezgisel olarak hepsinin ikna olduğunu göstermektedir.

Veli: a (aralıkların kesişim kümesinden aldıkları herhangi bir eleman*) sıfırın ta kendisi*

Melis: *a sıfır olursa…*

Derya: *Tamam diyelim ki a sıfır* (kesişim kümesinden alınan bir a elemanın sıfıra eşit olmasını kastediyor) *ama bu kümede başka bir eleman da olabilir. Sen şimdi K'dan* (aralıkların kesişim kümesini, yazmayı kolaylaştırması amacıyla K ile gösteriyorlar) *bir a elemanı aldın ve 0 olduğunu gösterdin. Sen nereden biliyorsun ki başka bir elemanı olmadığını?* (Cem'e soruyor)

Emre: *Biz sınıfta da kanıtlarımızda Cem'in dediği gibi öyle bir a seçelim ki sıfıra çok yakın olsun diyorduk*

Derya: *Burada öyle bir a seçmedik, herhangi bir a seçtik*

Araştırmacı: *Peki şimdi herhangi bir a aldık ve siz bu a'nın 0 olduğunu mu göstermiş oldunuz?*

Cem: *Evet*

Araştırmacı: *Peki, Derya'nın dediği gibi sıfırın, elemanı olduğunu gösterdik ama başka eleman olmadığını kesin söyleyebiliyor muyuz?*

Derya: *Ben onu diyorum, bence bunun tek olduğunu da göstermemiz gerekiyor.*

Öğrenciler buraya kadar aralıkların kesişiminde sıfır elemanının olduğunu göstermişler ancak sıfırdan başka bir eleman olmadığını nasıl gösterebileceklerine karar verememişlerdir. Bu noktada takılıp kalmaları üzerine araştırmacı *"Kesişimden aldığınız elemanı sıfırdan farklı alsak*" şeklinde ipucu vermiştir. Veli bu ipucuna karşılık:

"*Hocam eğer çelişkiye düşeceksek, oradan bir sayı alıp ve o aralığa düşmediğini göstereceksek, o zaman bir satırda biter ve ben kendim tatmin olmam yaptığım şeyden. Şimdi sıfırdan farklı herhangi bir a alıyoruz sonuçta hatta ne alırsak alalım sıfırdan büyük, ε 'nu onun* (alınan sayının) *yarısı kadar aldığımda dışında kalır, çelişki olur bitti bu kadar."*

Veli, aslında verilen ipucunu yakalamış ve nasıl kanıtlanabileceğini doğru düşünmüştür. Ancak bu şekilde yapılan bir kanıttan ikna olmayacağını söylemesi ve bunun sebebi olarak da kısa süreceğini göstermesi ilgi çekicidir. Öğrenciler genellikle kanıtı karmaşık ve yapılması zor bir şey olarak gördüklerinden kısa süren veya kolaylıkla yaptıkları kanıtlardan şüphe duyabilmektedirler. Veli, böyle bir kanıtı sınavda yapmış olsa hiç puan alamayacağını söylemiştir. Bu da yazdığı kanıtların kabul görmeyeceği kaygısı taşıdığını göstermektedir. Araştırmacının, bu çalışma süresince değerlendirilme ve sınavdan puan alma kaygısıyla düşünmemelerini hatırlatması üzerine Veli, arkadaşları da destek olursa kanıtlayabileceğini belirtmiş ve tahtaya kalkarak kanıtı oluşturmuştur. Kanıtı yazarken diğer öğrenciler Veli'nin yazdıklarını sorgulamış, anlamadıkları durumda açıklama istemiş ve düzeltilmesi gerektiğini düşündüklerinde fikirlerini söylemişlerdir. Bu şekilde herkesin katılımı ve ikna olmasıyla geçerli bir kanıt ortaya çıkarmışlardır. Öğrenciler, yazılanların doğruluğunu onaylayıp kanıtı anladıktan sonra diğer önermeye geçilmiştir.

İkinci önerme bir öncekine benzer, kavramsal bilgi ve anlama gerektirmeyen, olmayana ergi yöntemiyle kanıtlanabilecek bir önermedir (Bkz. Ek.5 önerme 2.2). Her iki grup, önermeyi kanıtlamaya uğraşırken bir önceki önermede kullanılan yöntemle yapılabileceğini fark etmişlerdir. Ancak yine de kullandıkları ifadeleri seçerken ve kanıtı yazarken tereddüde düşmüşlerdir. Melis, Derya ve Emre doğru düşünmüş ve ne yapmaları gerektiğini sözel olarak ifade edebilmişler ancak kanıtı yazamamışlardır. Diğer grupta Veli, önceki önermeye benzer biçimde kanıtlayabileceklerini belirterek kanıtı yazmaya başlamıştır. Araştırmacı, bu grupta yer alan Pelin'i kanıtı tahtada açıklayarak sunmasını istemiştir. Pelin, grup arkadaşları ile oluşturdukları kanıtı tahtaya yazmıştır ve bu şekilde önerme bir öncekine benzer biçimde kanıtlanmıştır.

Öğrenciler son olarak, kümelerde üst sınır, alt sınır, en küçük üst sınır, en büyük alt sınır kavramlarıyla ilgili önermenin (Bkz. Ek.5 önerme 2.3 (a)) kanıtlanması ile uğraşmışlardır. Önermelerin kanıtında ihtiyaç duyacakları kavram tanımları ve de kullanmaları gereken bir aksiyom verilmiş, bunlar dışında tanıma ihtiyaçları olursa sorabilecekleri belirtilmiştir. Araştırmacı, verilen tanımları ve aksiyomu okuyarak kısa bir açıklama yapmıştır. Veli, $ek\ddot{u}s$ ve $ebas$ kavramlarından korktuğunu, bu kavramlarla karşılaştığında gerildiğini belirtmiş hatta *"Başıma ağrı giriyor, elim ayağım titriyor ya bu* $ek\ddot{u}s$ $ebas$ *olunca"* şeklinde duyduğu güçlü korku ve kaygıyı ifade etmiştir. Bu olumsuz duygular, kanıtları oluşturmaktan kaçınmasına ve yapamayacağını düşünmesine neden olmuştur.

Verilen tanımlar, kanıtı oluşturmaları için yeterli bilgileri içerdiği halde kanıtlama sürecinde nereden başlayacakları, nasıl yazacakları konusunda güçlük çekmişlerdir. Önermenin kanıtıyla ilgili olarak akıl yürütmelerine ve çeşitli fikirler üretmelerine rağmen, nasıl ifade edeceklerini bilememeleri durumunu Veli*, "Bizim sorunumuz, ne yapacağımızı biliyoruz da nasıl yapacağımızı bilmiyoruz"* şeklinde ifade etmiştir. Veli, Cem ve Melis kanıtı oluşturamamışlardır. Diğer grup ise tanımları ve aksiyomu kullanıp birlikte konuşarak önermenin kanıtını oluşturmuşlardır. Derya, tahtaya kalkıp açıklayarak kanıtlamış ve arkadaşlarının sorularını yanıtlamıştır. Grup çalışmaları sırasında iki grup arasında bir rekabet havası oluşmuş ve önce kanıtlayan grup tahtada açıklamak istemiştir.

Öğrenciler, bu oturumda üç önermenin kanıtıyla uğraşmışlardır. Yapılan tartışmalar ve oturum genel olarak değerlendirildiğinde öğrencilerde görülen temel güçlüklerden birinin kanıtı yazma ile ilgili olduğu, sezgisel olarak ikna oldukları durumları, sözel ifadelerle veya görselleştirerek anlamaya ve açıklamaya çalıştıkları halde, matematiksel dili kullanarak formel kanıt yazmada zorlandıkları görülmüştür. Kanıta nasıl başlayacakları, argümanlarını matematiksel olarak nasıl ifade edebilecekleri üzerine tartışmışlardır. Veli'nin, ne yapılacağını bildikleri halde nasıl yapılacağını bilememeleri şeklinde ifade ettiği ve araştırmacı tarafından da gözlenen güçlük, stratejik bilgi (Weber, 2001) veya davranışsal bilgi (Selden & Selden, 2009) eksikliği olarak değerlendirilebilir. Öğrenciler çeşitli fikirler ürettikleri halde bunları uygulamada ve matematiksel olarak açıklamakta güçlük çekmişlerdir. Çalışmalar, öğrencilerde görülen bu güçlüğü vurgulamakta ve kanıt oluşturmadaki sorunların öğrencilere bitmiş ürünler sunulmasına (Alibert & Thomas, 1991; Weber, 2004a) ve onlara kanıt oluşturma fırsatının verilmemesine (Selden & Selden, 2007b; Pedemonte, 2007) bağlamaktadır Bu çalışmada öğrencilerin hazır kanıtları defalarca okuyup yeniden yazarak, kimi zaman ezberleyerek sadece sınavlara yönelik çalışmalarının, bu duruma yol açtığı düşünülmektedir. Birlikte tartışmaları, öğrencilerin verilen göreve farklı açılardan yaklaşmalarını ve birbirlerinin fikirlerine soru sorarak ya da açıklama yaparak katkıda bulunmalarını sağlamış ve önermeleri kanıtlamalarında etkili olmuştur. Öğrenciler kendi gruplarında kanıtı oluşturamadıkları ve daha fazla ilerleyemedikleri noktada diğer grupla birlikte tartışma isteklerini belirtmiş ve bu tartışmaların sonunda kanıtlar oluşturulmuştur. Tartışmalarda araştırmacı da, öğrencileri doğru sonuca götürecek fikirleri vurgulayarak, çeşitli sorularla düşünmelerini sağlayarak destekleyici olmuş ancak kanıtı oluşturmayı ve birbirlerini ikna etmeyi öğrencilere bırakmıştır.

4.2.3. Üçüncü hafta sınıf çalışması

Bu oturumda öğrencilerden, önceki haftadan kalan önermenin b şıkkını (Bkz. Ek.5 önerme 2.3 (b)) öncelikle bireysel olarak kanıtlamaya çalışmaları istenmiş daha sonra sınıf tartışmasına geçilmiştir. Bireysel olarak çalışmalarını istemenin amacı, öğrencilerin tek başlarına kanıtlama deneyimi yaşamalarını sağlamak, birbirlerinden etkilenmeden nasıl düşündüklerini anlamak ve kanıtlama becerilerinde herhangi bir değişiklik olup olmadığını belirlemektir. Ayrıca kanıtın hem bireysel hem sosyal boyutunun olduğu (Cobb & Yackel, 1996; Cobb, 2000) göz önünde bulundurulduğunda, öğrencilere kendi başlarına düşünme fırsatı verilerek bireysel yönün desteklenmesi düşünülmüştür. Çalışmalarda da, öğrencilerin problemleri akranları ile tartışmaya hazır olmadan önce, soruyu anlamak, varsayımda bulunmak ya da belki arkadaşlarına soru sormak için bireysel zaman ihtiyaçları olabileceği belirtilmiştir (Schabel, 2001).

Öğrencilerden, Veli ve Emre çalışmayı önce tamamlayarak diğer arkadaşlarının bitirmelerini beklemişlerdir. Öğrenciler belli bir süre daha uğraştıktan sonra araştırmacı, hep birlikte tartışmayı önermiştir. Derya, Melis ve Cem tek başlarına uğraşmaya devam ederken sadece Pelin birlikte yapmanın daha iyi olacağını belirtmiştir. Pelin görüşmelerde de, tek başına çalışırken kendini sınavda gibi hissettiğini ve bunun sonucu kaygı düzeyinin arttığını ifade etmiştir.

Öğrenciler çalışmaya devam ederlerken Melis *"Küme sınırlı olduğu zaman en küçük üst sınırı kümenin en büyük öğesine mi eşit oluyor?"* şeklinde bir soru sormuştur. Araştırmacı, öğrencilerden ellerindeki kağıtlarda yer alan tanımlara bakarak sorunun yanıtını düşünmelerini istemiştir. Soruyu ilk olarak yanıtlayan Cem'e, Derya ters örnek vererek karşıt görüş bildirmiştir.

> <u>Cem:</u> *Tanımdan dolayı küçük eşittir olduğu için, oradaki* (en küçük üst sınır tanımını kastediyor) *eşitlik olduğu için sonuçta sınırlı, en büyük öğe en küçük üst sınır olacaktır.*
>
> <u>Derya:</u> *Bence değildir. Mesela* $(0,1)$ *aralığını düşünürsek en küçük üst sınır 1 'dir ama 1 aralığın elemanı değil.*
>
> <u>Veli:</u> *Eküs'ün kümeye ait olması gerekmiyor.*

Öğrenciler kendi aralarında tartışarak en küçük üst sınırın, kümenin elemanı olması gerekmediği konusunda fikir birliğine varmışlardır. Daha sonra kanıtı tamamlayamadığını belirten Melis, nasıl düşündüğünü ve kanıtlarken nerede güçlük çektiğini açıklamak için tahtaya kalkmıştır. Cem, verilen tanım ifadesini doğru yorumlayamamış ve Derya ters örnek vererek Cem'in düşüncesinin yanlış olduğunu göstermiştir. Öğrenciler sonuca tartışarak ulaşmaya çalışmış, bu tartışmalar sırasında birbirlerinin düşüncelerini dikkatle dinlemiş, kendi fikirlerini ifade etmiş ve argümanlarının doğru veya yanlışlığına bu etkileşim sonucunda birlikte karar vermeye çalışmışlardır.

Melis, aksiyomdan (Bkz. Ek.5 Aksiyom 2.1) yararlanmış ve kümenin $ek\ddot{u}s$'ünün varlığını göstermeye çalışarak kanıta başlamıştır. Emre, aksiyomdan $ek\ddot{u}s$'ün varlığının görüldüğünü ve buna gerek olmadığını belirtmiştir. Bunun üzerine aksiyomu birlikte tekrar gözden geçirmiş ve aksiyomun $ek\ddot{u}s$'ün varlığını gösterdiğini kabul etmişlerdir. Veli bu konuşmalar arasında "*Aksiyom ne, önerme ne? Niye aksiyomun kanıtını yapmıyoruz?"* sorusunu sormuştur. Öğrenciler arasında şu şekilde bir konuşma geçmiştir.

> *Emre: Aksiyom kabul edilen bilgi, önerme ispatlanan bilgi. Aksiyomu tartışmıyorsun direkt kabul ediyorsun. Aksiyomların üzerine kuruyoruz, sonuçta bir kabule göre gidiyorsun.*
>
> *Derya: Aksiyomu kanıtlayamıyor muyuz? Bence vardır bir kanıtı*
>
> *Araştırmacı: Aksiyomun kanıtlanmasına gerek var mı?*
>
> *Melis: O kabuldür zaten, biz onu irdelemeden kabul eder ve teoremleri ona göre kanıtlarız.*
>
> *Araştırmacı: Aksiyom kanıtlanır mı yoksa direkt kabul edilir mi?*
>
> *Emre: Direkt kabul edilir. Ama önerme doğru da olabilir yanlış da, aksiyom doğruluğu tartışılmayan kabullerdir, mesela geometride kabul ettiğimiz aksiyomlara göre çalışıyoruz.*

Öğrenciler arasında gerçekleşen bu konuşma, Veli ve Derya'nın aksiyom ve önerme kavramlarını tam olarak anlamadıklarını ve bu konuda yetersiz bilgi sahibi olduklarını göstermektedir. Öğrenciler 4. sınıfa kadar birçok matematik dersi almış ve tanım, önerme, aksiyom ve kanıtlarla uğraşmış oldukları halde bu temel kavramlarında sorun olduğu görülmektedir. Tartışma, araştırmacının öğrencilerin açıklamalarını toparlayarak kavramları net bir şekilde ifade etmesiyle sona ermiştir.

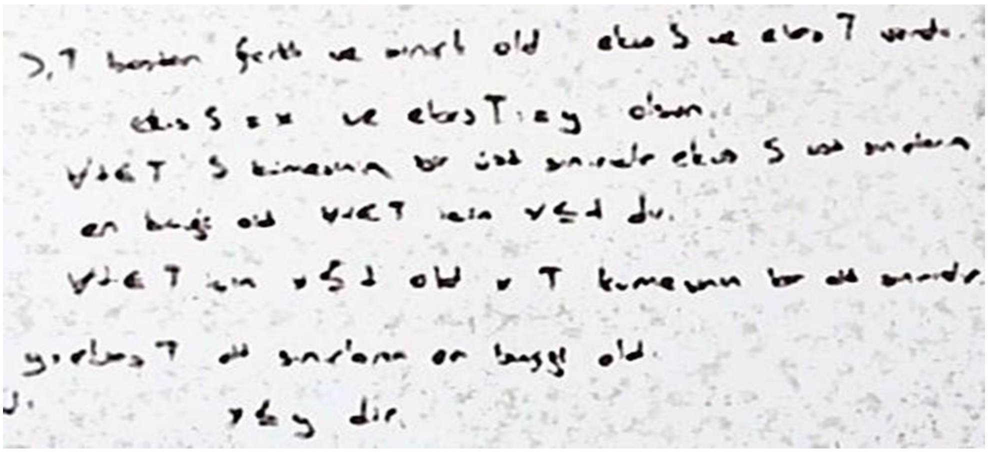
Bu tartışmadan sonra Melis, önermenin kanıtı üzerine düşüncelerini açıklamaya ve yaptıklarını tahtaya yazmaya devam etmiştir. Melis, S kümesinin en küçük üst sınırını $ek\ddot{u}s\, S = x$ ve T kümesinin en büyük alt sınırını $ebas\ T = y$ olarak ifade etmiştir. T kümesinin bütün elemanları, S kümesi için bir üst sınır olacağından tüm $t \in T$'lerin x'ten büyük veya eşit olacağı ve S kümesinin bütün elemanları da T kümesinin bütün elemanlarından küçük veya eşit olacağından T kümesinin $ebas$'ı olan y'nin de S kümesinin bütün elemanlarından büyük eşit olacağı bağıntılarını bulmuştur. Ancak buradan gösterilmesi istenen x ve y arasındaki $x \leq y$ ilişkisine ulaşamamıştır (Şekil 4.40).

3 b) $\forall s \in S$ sayısı $\forall t \in T$ sayısından kucuk veya esit oldupundan
S kumesi ustten sınırlıdır. S kumesi bostan farklı ve ustten sınırlı
bir kume oldupundan Aksiyom 1'e göre ekus S vardır. Aynı sekilde
$\forall s \in S$ sayısı $\forall t \in T$ sayısından kucuk veya esit oldupundan
T kumesi alttan sınırlıdır. T kumesi bostan farklı ve alttan sınırlı
bir kume oldupundan ebas T vardır.
ekus $S = x$ ve ebas $T = y$ olsun.
$\forall t \in T$ S kumesinin bir ust sınırı ve ekus S ust sınırların en
kucuğü oldupundan $\forall t \in T$ icin $x \leq t$ dir.
$\forall s \in S$ T kumesinin bir alt sınırı ve ebas T alt sınırların en
buyuğü oldupundan $\forall s \in S$ icin $s \leq y$ dir.
x S kumesinin ust sınırı oldupundan $\forall s \in S$ icin $s \leq x$
y T " alt " " $\forall t \in T$ icin $y \leq t$ dir.

Şekil 4.40. Melis'in 3.hafta sınıf çalışması Önerme 2.3 (b)'ye yanıtı

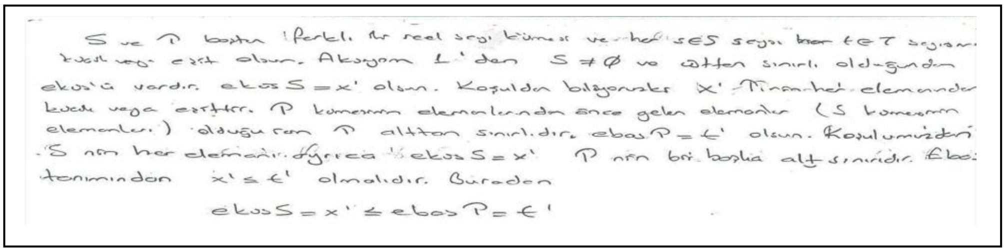
Derya ve Cem, benzer şekilde düşündüklerini ama bu yolla, göstermeleri gereken bağıntıya ulaşamadıklarını belirtmişlerdir. Veli, *"Siz x ve y'yi tekil düşünüyorsunuz birbiriyle bağlantısını düşünmüyorsunuz."* şeklinde bir eleştiride bulunmuş, başlangıçta kendisinin de bu şekilde ilerlediğini ancak buradan sonuca ulaşamayınca daha kısa başka bir yoldan gösterdiğini belirtmiştir. Araştırmacı, diğer öğrencilerin de nasıl düşündüklerini tek tek açıklamalarını istemiştir. Derya ve Cem, Melis'e benzer biçimde düşündüklerini ifade etmişlerdir. Derya söylediklerinin daha net anlaşılması için açıklamalarını tahtaya yazmış ve $ebas\, T = y$'nin, T kümesinin elemanı olması ve elemanı olmaması şeklindeki iki durumu ayrı ayrı incelemeye çalışmıştır. Derya'nın yazdıkları arkadaşlarına biraz karmaşık gelmiş anlamadıkları noktaları sormuşlardır. Yapılan açıklamalar sonucunda herkes yazılanların doğruluğuna ikna olmuştur.

Derya'dan sonra, daha kolay bir biçimde kanıtladığını söyleyen Veli, düşündüklerini açıklamak üzere tahtaya kalkmıştır. Öğrenciler yaptığı açıklamaları anlamış ve ikna olmuşlardır ancak Veli, düşüncelerini yazıya dökmekte zorlanmıştır. Tüm öğrenciler birlikte fikirlerini tartışmışlar ve nasıl yazabilecekleri ile ilgili olarak fikirler öne sürmüşlerdir. Bu tartışmalardan sonra Melis, Veli'nin ne yapmak istediğini anladığını belirtip kendisinin kanıtı yazabileceğini söylemiş ve tahtaya kalkmıştır. Melis, Veli'nin düşünceleri ve kanıta yönelik olarak yazmaya çalıştıkları üzerinden ilerleyerek kanıtı geçerli bir biçimde oluşturmuştur (Şekil 4.41). Diğer öğrenciler Melis'in yazdıklarını takip etmiş ve kanıt geçerli bir biçimde tamamlanıp herkesin ikna olmasıyla bir sonraki önermeye geçilmiştir.



Şekil 4.41. Melis'in Önerme 2.3 (b)'nin kanıtı için tahtaya yazdıkları

Öğrencilerin bireysel çalışmaları süresince yazdıkları incelendiğinde, Veli'nin geçerli bir kanıt oluşturduğu, Melis, Derya ve Cem'in benzer şekilde düşünüp doğru çıkarımlar yaptıkları ancak istenen bağıntıyı elde edemedikleri dolayısıyla kanıtı oluşturamadıkları görülmüştür. Emre ise doğru düşünmüş, istenen bağıntıyı yazmış ancak yazdığı ifadeleri doğru gerekçelere dayandıramamıştır (Şekil 4.42). Örneğin, $eküs\, S$'nin T kümesinin her elemanından küçük veya eşit olduğunun, koşuldan bilindiğini yazmıştır ancak hangi koşulu kastettiği ve gerekçesi anlaşılmamaktadır. Pelin tanımları kullanarak bazı ifadeler yazmış, kanıtlama girişiminde bulunmuş ancak kanıt oluşturamamıştır.


S ve P boştan farklı iki reel sayı kümesi ve her $s \in S$ sayısı her $t \in T$ sayısına küçük veya eşit olsun. Aksiyom 1'den $S \neq \emptyset$ ve üstten sınırlı olduğundan ekos'u vardır. ekos $S = x'$ olsun. Koşuldan biliyoruz ki x' T'nin her elemanından küçük veya eşittir. P kümesinin elemanlarından önce gelen elemanlar (S kümesinin elemanları) olduğu için P alttan sınırlıdır. ebas $P = t'$ olsun. Koşulumuzdan S nin her elemanı. Ayrıca ekos $S = x'$ P nin bir başka alt sınırıdır. Ebas tanımından $x' \leq t'$ olmalıdır. Buradan

ekos $S = x' \leq$ ebas $P = t'$

Şekil 4.42. Emre'nin 3. hafta sınıf çalışması Önerme 2.3 (b)'ye yanıtı

Derya, Cem ve Melis'in kağıtları incelendiğinde neye ulaşmak istediklerini gözden kaçırıp sadece tanımlardan çıkarılabilecek sonuçları yazdıkları ancak istenen bağıntıyı nasıl gösterebileceklerini düşünmedikleri görülmektedir (Bkz. Şekil 4.40). Bu yüzden de uzun süre çaba harcadıkları halde tanımlar arasındaki ilişkiyi görememiş ve önermenin kanıtını oluşturamamışlardır. Bu durum, öğrencilerin önermedeki koşulları ve tanımları anlamış olsalar da, göstermek istedikleri bağıntıya yönelik olarak kullanma güçlüğü yaşadıklarını göstermektedir. Bunun nedenlerinden biri öğrencilerin hangi teoremi ve kuralları, nerede uygulayacakları hakkında doğru karar verememeleridir. Weber (2001)'in çalışmasında da öğrencilerin gerçekleri ifade edebildikleri ve mantıksal kuralları uygulayabildikleri ancak kanıt oluşturamadıkları görülmüştür.

Sınıf tartışması, öğrencilerin önce kendi başlarına düşünmeleri, sonrasında fikirlerini paylaşmalarıyla bir önermenin kanıtına farklı yönlerden bakmalarını sağlamıştır. Önermenin kanıtlanması için verilen tanımlar üzerinde düşünmüş, tanımları ve aksiyomu kullanarak mantıksal çıkarımlar yapmışlardır. Öğrenciler, bireysel olarak geçerli bir şekilde kanıtını oluşturamadıkları önermeleri birbirleriyle tartışmaları sonucunda geçerli olarak kanıtlamışlardır (Bkz. Şekil 4.41).

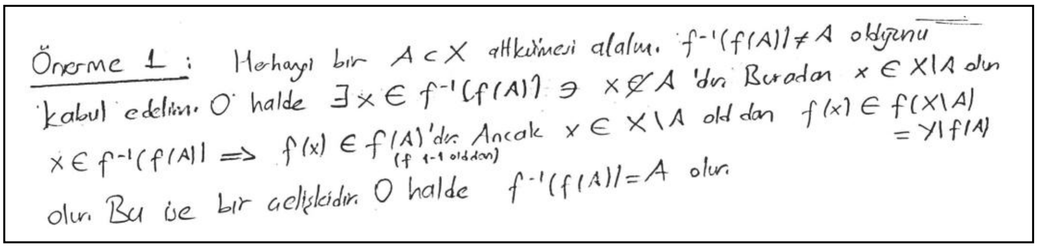
Önceki haftadan kalan önermenin geçerli biçimde kanıtlanmasından sonra, bu oturum için hazırlanan çalışma kağıtlarına (Ek.6) geçilmiştir. Çalışma kağıtlarında öğrencilere, fonksiyonlarla ilgili iki önerme verilmiş ve birebir fonksiyonla ilgili ilk önermeyi bireysel olarak kanıtlamaya çalışmaları istemiştir. Öğrenciler tek başlarına 7-8 dakika kadar çalışmışlar daha sonra araştırmacı kanıtını açıklayarak yapması için Emre'yi tahtaya kaldırmıştır. İlk olarak $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$ ifadesini yazan Emre, bunun tanımdan söylenebileceğini belirtmiştir. İlk hafta verilen bir önermenin (Bkz. Ek.4 önerme 1.3) kanıtında da öğrenciler, yazılan ifadenin her durumda mı yoksa sadece fonksiyon birebir olduğunda mı geçerli olacağını tartışmışlardır. Öğrenciler ters örnekler vererek, şekil üzerinde göstererek tartışmış doğru sonuca ulaşmışlardır. Önceki derste, fonksiyonun sadece birebir olması durumunda bu ifadenin geçerli olacağı sonucuna ulaşıldığı halde bu derste tekrarlanan tartışmada, Pelin, Veli ve Emre'nin birebirlik, örtenlik ve fonksiyon kavramlarını tam oturtamadıkları ve doğru kullanamadıkları görülmüştür. Veli ifadenin tanımdan yazılabileceğini düşündüğünü ve birebir fonksiyon olmasıyla bağlantı kuramadığını, Emre de kafasında somutlaşmadığı için karar vermediğini belirtmiştir.

Öğrenciler bugüne kadar bu kavramlar ve tanımlarla defalarca karşılaşmış, bu kavramların yer aldığı önermelerin kanıtlarıyla uğraşmışlardır. Ancak bu çalışmadaki tartışmalar öğrencilerin bu kavramları tam olarak anlamadıklarını ve bazı şeyleri nedenini bilmeden, üzerinde düşünmeden yaptıklarını göstermektedir. Derya bu tartışma sırasında arkadaşlarına, "*Aslında biz ezberden yapıyoruz, ben de geçen derse kadar öyleydim"* diyerek bu durumu ortaya koymuştur. Öğrenciler ilk hafta yaşanan tartışmaya benzer biçimde tartışmışlar, Melis ve Derya örneklerle göstererek açıklamalar yapmış ve diğer öğrenciler de ikna olduktan sonra kanıtı tamamlamışlardır.

Öğrencilerin bu önerme için bireysel olarak yazdıkları incelendiğinde, Derya'nın yazdıklarının gerekçelerini de belirterek geçerli bir kanıt oluşturduğu ve kanıtlama sürecinde çizdiği şekilden yararlandığı görülmüştür. Melis'in çalışması incelendiğinde, ilk girişiminde göstermesi gereken $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ eşitliğini kabul ederek başladığı ve çelişkiye ulaştığı görülmüştür. Ancak bunun doğru olmadığını fark etmiş, yazdıklarının üzerini çizerek tekrar kanıtlamaya çalışmış ve ikinci girişiminde tanımları doğru yerde kullanarak geçerli ve açıklayıcı bir kanıt oluşturmuştur.

Emre, Veli ve Pelin birbirlerine benzer şekilde iki taraftan kapsama ile eşitliği göstermeye çalışmışlardır. Ancak yazdıkları incelendiğinde birebirlik ve ters görüntü tanımlarını yanlış yerde kullandıkları, yazdıklarını doğru gerekçelendiremedikleri ve geçerli bir kanıt oluşturamadıkları görülmüştür. Üçü de $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in A$ ifadesinin görüntü kümesi tanımından, $f(x) \in f(A) \Rightarrow x \in f^{-1}(f(A))$ ifadesinin de fonksiyonun birebir olmasından dolayı yazılabileceğini belirtmişlerdir. Dolayısıyla öğrencilerde ters görüntü, birebir tanımlarının hala formel olarak uygulanabilir olmadığı görülmektedir.

Cem ise diğer öğrencilerden farklı olarak olmayana ergi yöntemini kullanmış ve şekildeki gibi kanıtlamaya çalışmıştır (Şekil 4.43).


Önerme 1: Herhangi bir $A \subset X$ altkümesi alalım. $f^{-1}(f(A)) \neq A$ olduğunu kabul edelim. O halde $\exists x \in f^{-1}(f(A)) \ni x \notin A$'dır. Buradan $x \in X \setminus A$ olur. $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$'dır (f 1-1 olduğundan). Ancak $x \in X \setminus A$ olduğundan $f(x) \in f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ olur. Bu ise bir çelişkidir. O halde $f^{-1}(f(A)) = A$ olur.

Şekil 4.43. Cem'in 3. hafta sınıf çalışması Önerme 3.1'e yanıtı

Ancak görüldüğü gibi geçerli bir kanıt oluşturamamıştır. $x \in f^{-1}(f(A)) \Rightarrow f(x) \in f(A)$ ifadesini fonksiyonun birebir olmasından dolayı yazdığını belirtmiş ve $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ eşitliğini kullanarak çelişki elde etmiştir. Ancak kullanılan bu eşitlik, fonksiyonun birebir ve örten olması durumunda geçerli olmaktadır. Dolayısıyla birebirlik tanımını yanlış yerde kullanmış ve yazdığı eşitlikleri doğru bir biçimde gerekçelendirememiştir.

Örtenlik ile ilgili ikinci önermeyi ise Emre-Veli ve Melis-Derya-Pelin birlikte kanıtlamışlardır (Cem mazeret bildirerek çalışmadan erken ayrılmıştır). Yazdıkları incelendiğinde her iki grubun önermeyi geçerli bir biçimde kanıtladığı görülmüştür. Öğrenciler, önermeyi kısa sürede kanıtlamışlar ve tahtada yapmaya gerek duymadıklarını belirttiklerinden çalışma burada sonlandırılmıştır.

Öğrenciler oturumlarda, daha çok grup halinde çalışmaya yönlendirilmişlerdir. Ancak bu oturumun başında, kanıtlama süreçlerindeki değişimi gözleyebilmek ve birbirlerinden etkilenmeden nasıl düşündüklerini belirlemek için bireysel çalışmaları istenmiştir. Çalışma sırasında, öğrencilerin sahip oldukları kavramsal güçlükler ve anlamalarındaki eksiklikler de ortaya çıkmış ve bunları sordukları sorularla, tartışarak giderme olanağı bulmuşlardır. Örneğin, Veli'nin aksiyom ve önerme kavramlarını ayırt edememesi, Melis'in bir küme sınırlı olduğunda, en küçük üst sınırının kümenin en büyük öğesi olup olmadığını sorgulaması kendi düşünme süreçlerinde ortaya çıkan sorulardır. Öğrenciler 4. sınıfa kadar birçok matematik dersinde tanım, önerme, aksiyom ve kanıtlarla uğraşmış oldukları halde bu temel kavramların tam yerleşmemiş olduğu görülmektedir. Ancak fikirlerini serbestçe ifade edebildikleri, akıllarına gelen soruyu anında sorabildikleri ve arkadaşlarıyla tartışarak yanıtı bulmaya çalıştıkları sınıf ortamında bunları giderme olanağı bulmuşlardır.

4.2.4. Dördüncü hafta sınıf çalışması

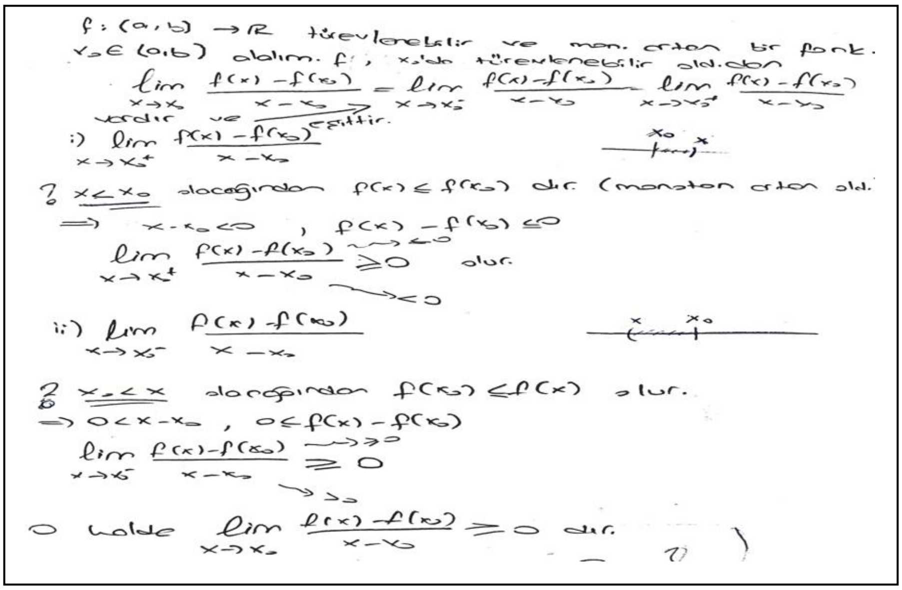
Dördüncü oturumdaki çalışma, Emre katılmadığı için beş öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler, kızlarla erkekler olarak ayrılmak istemişler ve Veli-Cem bir grup, Melis-Derya-Pelin diğer bir grup olarak çalışmışlardır.

Öğrencilere verilen çalışma kağıtlarında (Ek.7) fonksiyonun sürekliliği, artan fonksiyon ve fonksiyonun türevi tanımları ile kanıtlamaları beklenen üç önerme bulunmaktadır. Öğrenciler ilk olarak, fonksiyonun sürekliliği ile ilgili birinci önermeyi (Bkz. Ek.7 önerme 4.1) kendi gruplarında tartışarak kanıtlamaya çalışmışlardır. Yazdıkları incelendiğinde, her iki grubun da göstermeleri gereken ifadeyi yazarak kanıta başladıkları ve tanımları kullanarak doğrudan kanıtla geçerli kanıtlar oluşturdukları görülmüştür. Öğrenciler ilk önermeyi kanıtladıktan sonra, Cem, oluşturdukları kanıtı tahtada açıklayarak yazmıştır.

İlk önermeye benzer biçimde kanıtlanabilecek ikinci önerme (Bkz. Ek.7 önerme 4.2) için önce, öğrencilerin kendi başlarına okuyup biraz düşünmeleri istenmiş sonra sınıfça tartışmaya geçilmiştir. Araştırmacı tartışmalarda biraz pasif kalan Pelin'in katılımını sağlamak amacıyla, önermeyi kanıtlaması için tahtaya kaldırmıştır. Pelin bir önceki önermenin kanıtını düşünerek doğru akıl yürütmüş ve kanıtı oluşturmuştur. Sadece ifadelerinde ve yazımında bazı eksiklerin düzeltilmesine ihtiyaç duyulmuştur. Pelin'in önermeyi kanıtlamasında, bir önceki önermenin kanıtına benzer biçimde olması yardımcı olmuştur. Bu bakımdan Pelin'in aynı prosedürü uygulayarak kanıtı oluşturduğu söylenebilir. Ancak bu şekilde, Pelin'in kanıtlayabileceğini görmesi ve kanıtlamaya karşı olumlu duygular geliştirmesi sağlanmaya çalışılmıştır.

Öğrenciler daha sonra yine iki grup halinde, türevlenebilir ve monoton artan bir fonksiyonun türevinin sıfırdan büyük olduğunu göstermeleri beklenen önermenin (Bkz. Ek.7 önerme 4.3) kanıtıyla uğraşmışlardır Derya, olmayana ergi yöntemini kullanmayı önermiş, Melis ise monoton artanlığı göstermek için, alacakları x ve x_0

değerlerine göre $f(x)$ ve $f(x_0)$'ı karşılaştırmaları gerektiğini söylemiştir. Derya, fonksiyonun türevlenebilir olduğu noktada limiti olacağını ve limit tanımından yola çıkarak kanıtlamayı önermiştir. Melis ve Derya, düşündüklerini tartışarak ilerlemişler ve kanıtlamaya, doğrudan kanıt yöntemine uygun biçimde, fonksiyonun türevlenebilir ve artan olduğunu kabul ederek başlamışlardır. Aldıkları x ve x_0 değerlerine göre fonksiyonun o noktadaki limit değerinin işaretini incelemişler ancak buradan bir sonuca ulaşamayacaklarını düşünüp tekrar olmayana ergi yöntemini denemeye karar vermişlerdir. Öğrenciler fonksiyonun tanım kümesinden aldıkları x ve x_0 değerleri için $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ değerinin fonksiyonun x_0 noktasındaki türevine eşit olup olamayacağından emin olamamış; türev tanımında eşit olması gerektiği verildiği halde, tanıma bakmayı düşünmemişlerdir. Bir süre daha fikirlerini tartıştıktan sonra düşündüklerini yazmaya başlamış ve sonuçta kanıtı tamamladıklarını belirtmişlerdir. Kanıtı Derya yazmış ve yazarken de ifadelerinin anlaşılır ve düzgün olmasına dikkat etmiştir. Pelin ise bu süreçte, daha çok arkadaşlarının tartışmasını takip etmiş ve fikir üretmemiştir. Yazdıkları incelendiğinde geçerli bir kanıt oluşturdukları görülmüştür (Şekil 4.44).


$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ türevlenebilir ve mon. artan bir fonk.
$x_0\in(a,b)$ olalım. f, x_0'da türevlenebilir old.dan
$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
vardır ve eşittir.
i) $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
? $x<x_0$ olacağından $f(x)\le f(x_0)$ dır (monoton artan old.
$\Rightarrow x-x_0<0$, $f(x)-f(x_0)\le 0$
$\lim_{x\to x^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ olur.
ii) $\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
? $x_0<x$ olacağından $f(x_0)\le f(x)$ olur.
$\Rightarrow 0<x-x_0$, $0\le f(x)-f(x_0)$
$\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$
O halde $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ dır.

Şekil 4.44. Derya-Melis-Pelin'in Önerme 4.3'ün kanıtı olarak yazdıkları

Diğer grupta Cem, kanıt için olmayana ergi yöntemini uygulamayı önermiş Veli ise fonksiyonun artan olmasını nasıl kullanacaklarını sormuştur. Cem, bir başlayalım ilerledikçe bir şeylere ulaşırız düşüncesiyle, Veli'nin yazmaya başlamasını istemiştir. Veli, kanıtın nasıl olması gerektiğini, hipotezin ne olduğunu net bir biçimde ifade ederek sesli düşünmüştür:

> "*Şimdi ne yapacağız? Hipotez ne? Türevli ve artan olması, yani orayı* (türevli ve artan olmasını kastediyor) *varsayıp türevin sıfırdan büyük olduğunu ifade edeceğiz. İşte artanlığı nasıl kullanacağız?"*

Cem, Veli'ye yazmaya başlaması konusunda ısrar etmiş ve başladıktan sonra nasıl ilerleyeceklerine karar vereceklerini belirtmiştir. Cem, sentaktik kanıtlama eğilimi göstermiş, belli bir kanıt yöntemiyle başlayarak ilerlediklerinde istenen sonuca ulaşacaklarını düşünmüştür. Veli ise tam olarak ne yapacaklarını karar vermeden, kanıttaki bir sonraki adımı görmeden ve kendini ikna etmeden kanıta başlamak istememiştir.

Öğrenciler artan fonksiyon tanımını nasıl kullanabileceklerini tartıştıktan sonra Veli, bu tanımdan yola çıkarak $a < b$ şeklinde iki farklı sayı alarak $f(a) < f(b)$ yazabileceklerini ve buradan da limit tanımını kullanacaklarını belirtmiştir. Cem, a ve b yerine fonksiyonun tanım aralığından x ve x_0 almasını önermiştir. Bir süre daha tartışmış ve düşünmüşler sonra Veli:

> <u>Veli:</u> *Şimdi iki durum vardır değil mi ya sağdan gidersin ya soldan gidersin*
>
> <u>Cem:</u> *Anlıyorum evet*
>
> <u>Veli:</u> *Bu limitin olması için ne lazım sağdan ve soldan limitlerin olması lazım*

şeklinde düşündüklerini Cem'e açıklamaya çalışmıştır. Son olarak fonksiyonun türevini $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ifadesine eşitlemiş ve buradan $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ ifadesinin $x \to x_0^+$ ve $x \to x_0^-$ durumlarını yani $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kesrinin, x_0 noktasındaki sağdan ve soldan limit değerlerinin sıfırdan büyük eşit olma durumunu incelemişlerdir. Her iki durumda da bu limit değerinin sıfırdan büyük eşit olduğunu, fonksiyonun artan olmasını da kullanarak göstermişlerdir. Bu şekilde kanıtlarını tamamlamışlar ancak Cem, olmayana ergi yöntemi ile de kanıtlamak için bir süre daha uğraşmıştır.

Öğrenciler kanıtlarını tamamladıklarını ve düzgün bir şekilde yazdıklarını belirttikleri anda araştırmacı, grupların yazmış oldukları kağıtları değiştirerek birbirlerinin kanıtlarını kontrol etmelerini istemiştir.

Öğrenciler, kanıtların geçerliğini onaylamış ancak kanıtların daha açıklayıcı ve anlaşılır olmasına yönelik olarak, ifadelerde bazı düzeltmeler önermişlerdir. Özellikle Melis ve Derya, bir kanıtı kim okursa okusun aynı şeyin anlaşılması gerektiğinin önemli olduğunu vurgulamışlardır. Bu da, Melis ve Derya'nın bir kanıtı üçüncü bir kişi okuduğunda da aynı şeyi anlaması gerektiği sosyal yönünün (Gholamazad, 2005) farkında olduklarını, kanıtı, belli bir kişinin ikna olmasına ve kabul etmesine yönelik olarak değil, matematiksel olarak geçerli olmasına dikkat edilerek yazılmasına önem verdiklerini göstermektedir.

Cem, olmayana ergi yöntemi ile oluşturduğu kanıtı tahtada açıklayarak anlatmıştır. Derya, Cem'in açıklamaları üzerine, kendilerinin de önce benzer şekilde düşündüklerini ancak fonksiyonun, tanım kümesinden belirlenen herhangi bir x_0 noktasındaki türevinin, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ değerine eşit olup olmadığı konusunda tereddüt ettiklerini belirtmişlerdir. Araştırmacı tekrar tanımlara dönmelerini ve bu soruyu yanıtlamalarını istemiştir. Öğrenciler birlikte tartışarak Cem'in kanıtının geçerli olduğu, ancak üçüncü bir kişi okuduğunda da açıklamaya gerek kalmaksızın anlaşılır olması için kanıtın daha net yazılması gerektiği konusunda görüş birliğine varmışlardır.

Bu oturumda öğrenciler, üç önermenin kanıtıyla uğraşmış ve en uzun süreyi son önermeyi kanıtlamada harcayarak tümünü geçerli bir biçimde kanıtlamışlardır. Kanıtları yazarken ve birbirlerinin kanıtlarını kontrol ederken öğrencilerin, kanıtların düzgün ve anlaşılır yazılmış olmasına önceki derslere göre daha çok dikkat gösterdikleri görülmüştür. Türev ve limit ilişkisi ile ilgili olarak tereddüt ettikleri noktayı, ellerindeki tanımları yorumlayarak açıklığa kavuşturabilecekleri halde tanımları kullanmayıp kendi aralarında tartışmışlar, daha sonra araştırmacının uyarısıyla tanımlara bakarak sonuç çıkarmışlardır. Öğrencilerin kanıtlama sürecinde daha anlaşılır, belli bir kanıt çerçevesi olan kanıtlar oluşturabildikleri halde, tanım ve kavramları kullanmada hala güçlük yaşadıkları görülmüştür. Fonksiyonun artan olmasını kanıtta nasıl kullanabilecekleri üzerinde her iki grup güçlük çekmiş ve tartışmaların sonunda bir karara varmışlardır.

4.2.5. Beşinci hafta sınıf çalışması

Bu oturumda öğrenciler kızlar ve erkekler şeklinde üçer kişilik iki gruba ayrılmışlardır. Verilen çalışma kağıtlarında (Ek.8.) dizinin yakınsak olması ve limiti, dizinin sınırlı olması ve altdizi tanımları ile birlikte dizilerle ilgili dört önerme bulunmaktadır. Öncelikle öğrenciler tanımları bireysel olarak okuyup anlamaya çalışmış, sonrasında araştırmacı tanımları sesli bir biçimde okuyarak açıklamıştır. Gruplar, yakınsak bir dizinin sınırlı olduğunu göstermeleri gereken önerme üzerinde çalışmaya başlamışlardır.

Veli, Cem ve Emre'nin bulunduğu grup, bir a_n dizisinin yakınsak olduğunu kabul edip verilen yakınsaklık tanımını bu dizi için yazarak kanıtlamaya başlamış ve ilk girişimlerinde Şekil 4.45'teki ifadeleri yazmışlardır.

(a_n) dizisi a sayına yakınsak olsun. (a_n) dizisinin sınırlı olmadığını kabul edelim.
O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq K$ oış bir $K \in \mathbb{R}$ yoktur. (a_n) dizisi yakınsak old.dan
$\forall \varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$; her $n \geq n_0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ dır. Buradan

$$|a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$$
$$\Rightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$$

Bu ise bir çelişkidir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < a + \varepsilon$ oış bir $a + \varepsilon \in \mathbb{R}$ bulduk.
O halde (a_n) yakınsak ise sınırlıdır.

Şekil 4.45. Veli-Cem-Emre'nin Önerme 5.1 için yazdıkları

Kanıtı tamamladıklarını düşünürken Veli, bir problem olduğunu fark ettiğini, gösterdiklerinin belli bir n_0 sayısından sonra gelen n sayıları için sınırlı olduğunu ancak n_0 'dan önceki n değerleri için göstermediklerini belirtmiştir. Cem, Veli'nin önemli bir noktaya değindiğini ve onu da göstermeleri gerektiğini ifade etmiştir. Emre ise yazmaya gerek olmayabileceğini düşünmüş ve bu tereddüt üzerine tanımları tekrar incelemeye başlamışlardır. Öğrenciler yazdıklarının yeterli olup olmadığını bir süre daha tartışmışlardır.

> *<u>Veli:</u> Bir saniye şu tanımı (*Dizinin yakınsaklık tanımını kastediyor*) düşünelim. Her $\varepsilon > 0$ için bir tane n_0 bulunuyor, şimdi ε 'nu 5 seçersem onun için n_0 bulmak kolay ama ε 'nu 1 seçersem onun için de olan bir n_0 var ama bulmak zor. Ama sen ε 'nu küçülttükçe küçülttükçe ne olacak n_0'ı bulmak zorlaşacak belki biraz ileriye kayacak di mi? Ama işte gerisi için olan n_0'larda bundan berisi için olanları da ε büyüdükçe buluruz onları da*

<u>Emre:</u> Ya şimdi şey var şu (a_n dizisini kastediyor) *yakınsak olduğu sürece her ε için bir n_0 bulabiliyorsak sen ε 'nu ne yaparsan yap ister küçült ister büyüt bir tane n sıfır bulabiliyorsun ya o yüzden bu direkt sağlanır.*

<u>Cem:</u> Bence de bu yeterli

<u>Emre:</u> Bu yakınsaklık zaten sağlıyor, bitti

<u>Veli:</u> Tamam.

Tartışmanın sonunda yazdıklarının yeterli olduğu ve önermeyi kanıtladığı konusunda birbirlerini ikna etmişlerdir. Bir sonraki önermeye geçmeden önce, araştırmacıyı yanlarına çağırarak yazdıklarını göstermek istemiş ve şu açıklamaları yapmışlardır:

<u>Veli:</u> Bir şey daha var onu yazmadık ama dört yıldır buradayım, dört yıldır da yazan hoca görmedim daha açık, o yüzden ben de yazmadım. Burada her $n > n_0$ için diyoruz ya ama bizim n'lerimiz n_0'dan sonra gelen n'ler ya şimdi ondan öncesi gelenler için yok mu gibi bir sonuç geliyor, o da aşikar. Şimdi n_0, ε'a bağlı ya farklı ε'lar için farklı n_0'lar bulursunuz.

<u>Emre:</u> Şimdi (a_n) ' i yakınsak kabul ediyoruz ya şimdi bir tane n_0 buluyoruz tek gibi görünüyor ya ε'nu değiştirdikçe bu n_0'lar doğal sayılar kümesini kapsayacaktır çünkü her ε için bir tane n_0 bulunuyor.

Öğrenciler yazdıklarında eksik olan noktayı fark etmiş ancak bununla ilgili bir açıklamaya gerek olmadığı konusunda kendilerini ve birbirlerini ikna etmeye çalışmışlardır. Öğrencilerin aklına, tüm n sayıları için dizinin terimlerini sınırlayacak bir sayı belirlemek gelmemiştir. Dolayısıyla yazdıkları, gerekçelendirme olmaması ve yetersiz açıklama nedeniyle, geçerli bir kanıt oluşturmamıştır. Veli, açıklamaya gerek olmadığını, çünkü bugüne kadar derslerinde de bu bölümün aşikâr denilerek geçiştirilmiş olduğunu ifade etmiştir. Derslerde yapılan veya kitaplarda yazan kanıtlarda, bazen belli geçişlerin açıklama olmadan yazılması, öğrencilerin altında yatan mantığı anlamamalarına ve sorgulamadan, gördükleri şekilde ezberlemelerine neden olmaktadır. Burada görülen durum da bunun bir örneğidir ve öğretmenler, yaptıkları kanıtları yeniden düzenlenmiş haliyle sınıfa sundukları (Brousseau, 1997), düşünme süreçlerini öğrencilere ayrıntılı olarak açıklamadıkları için öğrenciler kanıtları yazarken gerekçelendirmeye gerek olmadığını düşünebilmektedirler. Öğrencilerin yeterince açıklayamadıkları ve yazamadıkları bölüm, Selden vd. (2008a)'nin kanıtlarda belirlemiş oldukları, daha derin anlamalar gerektiren probleme odaklı kısımdır.

Öğrenciler hipotez ve hükmü belli olan geçerli bir kanıt çerçevesi oluşturdukları halde, ara geçişlerdeki mantıksal zinciri yapılandıramamışlardır. Bu durumun, kanıtın probleme yönelik kısmındaki aşamaların kavramsal bilgi, matematiksel sezgi ve doğru kaynakları doğru zamanda akla getirme becerisi gerektirmesi ve öğrencilerde bunların yetersiz olmasından kaynaklandığı düşünülebilir.

Cem, kanıtı bir de olmayana ergi yöntemiyle oluşturmak istemiş ve Emre ile birlikte kanıtlamaya çalışmışlardır. Veli ise bu sırada çizdiği şekiller üzerinde, yazdıklarında eksik olduğunu düşündüğü noktayla ilgili olarak kendini ikna etmeye çalışmıştır.

Derya, Melis ve Pelin'in bulunduğu grup ise önermeyi okuduktan sonra (a_n) dizisini yakınsak kabul ederek kanıtlamaya başlamışlar ve diğer gruba benzer şekilde yakınsaklık tanımını yazarak $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ ifadesini elde etmişlerdir. Bu noktada Derya, neyi göstermek istediklerini sormuş, Melis $|a_n|$'nin bir sayıdan küçük olduğunu göstermeleri gerektiğini belirtmiştir. Derya yazmaya devam etmiş ve diğer grubun yazdıklarına benzer ifadelerle n_0'dan sonraki n değerleri (a_n)'in alttan ve üstten sınırlı olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Melis ile birlikte, yazdıklarındaki eksiklik olduğunu fark etmiş ve n_0'dan önceki n'ler için nasıl gösterebileceklerini düşünmeye başlamışlardır. Bunun üzerine doğrudan kanıt yönteminden vazgeçmişler ve Derya, olmayana ergi yöntemi ile Melis de karşıt ters yöntemi ile kanıtlamayı önermiştir. Ancak bu yöntemlerle de ifadenin değilini almaları ve dizinin sınırlı olmamasını kabul etmeleri gerektiğinden, sınırlı olmamayı nasıl göstereceklerini ve kanıtta nasıl ilerleyeceklerini konusunda zorluk çekmişlerdir. Bir süre tartışmış ancak kendilerini ikna edecek bir kanıt oluşturamamışlardır.

Her iki grupta benzer şekilde düşünmüş ve aynı noktada sorun yaşamışlardır. Ancak erkekler grubu yazdıklarının geçerli bir kanıt oluşturduğu konusunda ikna olmuş ama kızlar ikna olmamış ve yazdıklarındaki eksikliği gidermeye çalışmışlardır. Kızlar kanıtlayamadıklarını belirtmişler ve sonrasında tüm öğrencilerin katıldığı sınıf tartışmasına geçilmiştir.

Derya, tahtada nasıl düşündüklerini açıklayarak yaptıklarını yazmaya başlamıştır. Bu sırada Veli de kalkmış ve tahtanın diğer tarafına ulaşmak istedikleri sonucu "$\exists M \in \mathbb{R}^+ \;\; var\ mıdır\ ki\ \ \forall n \in \mathbb{N} \;\; için \;\; |a_n| < M$" şeklinde yazmıştır. Derya arkadaşlarıyla ne düşündüklerini yazmış ve takıldıkları noktayı açıklayarak kanıtı oluşturamadıklarını belirtmiştir. Veli ise şekil çizerek Derya'ya, kendilerini nasıl ikna ettiklerini açıklamaya ve Emre'nin de katılmasıyla kızlar grubunu da ikna etmeye çalışmıştır. Ancak Derya ikna olmamış ve sınırlılığın n_0 'dan önceki n değerleri için de gösterilmesi gerektiğini belirtmiştir. Öğrenciler arasında şöyle bir tartışma gelişmiştir:

> Derya: *Yani n_0'dan küçük n'leri o zaman incelememiş oluyoruz.*
>
> Veli: *Ama bir de şöyle düşün, n_0 da sürekli değişiyor, bu şey gibi anlaşılmasın ileride bir n_0 vardır değil, ondan öncesi de var*
>
> Derya: *Değişmeyen bir n_0 da olabilir*
>
> Veli: *Değişiyor bence ε'dan dolayı değişiyor. Bak şuraya bakalım* (düzlemde çizdiği noktalarla dizinin terimlerini göstermeye çalışıyor ve şekil üzerinde açıklama yapıyor)
>
> Derya: *Ben buna katılmıyorum*
>
> Emre: *Her ε için bir n_0 bulabiliyorsun değil mi, bu ε değiştikçe ε'na bağlı n_0 bulmak zorundasın*
>
> Derya: *Şu an emin değilim ama bana n_0'ı değişmek zorunda olmayan bir dizi de bulabilirmişim gibi geliyor.*
>
> Cem: *Sabit dizi*
>
> Derya: *Evet, mesela sabit dizi olabilir. n_0 değişmek zorunda değil her ε için belli olabilir yani. Öyle bir dizi vardır ki n_0 değişmek zorunda değil. Şu an hayal edemedim ama bence öyle bir dizi var* (sayı doğrusu çizip üzerinde belli bir nokta belirliyor ve bu noktaya yakınsayan bir dizi olabileceğini göstermeye çalışıyor)
>
> Veli: *Biz ε için n_0 buluyoruz n_0 için ε bulsak tamam*
>
> Derya: *ε için n_0 bulabilirsin ama ε değiştikçe bu n_0 değişecek diye bir şey yok*
>
> Melis: *Ama her ε için bir n_0 buluyoruz yani biz ε'numuzu önceden seçiyoruz, ε'u seçip n_0'ı, bir tane n_0 seçiyoruz.*
>
> Emre: *Tamam ama neye bağlı olarak seçiyoruz ε'a bağlı seçiyoruz. ε değiştiğinde başka n_0 seçiyoruz.*

Öğrencilerin tartışması, tanımları farklı yorumladıklarını dolayısıyla geçerli bir kanıt olması için ne yazmaları gerektiği konusunda farklı düşündüklerini göstermektedir. Cem, başlangıçta grup arkadaşlarının açıklamalarından ikna olmuş ancak sınıf tartışmasında Derya'nın söyledikleriyle tereddüde düşmüş ve yazdıklarının geçerli bir kanıt oluşturmadığını, dizinin sınırlı olması için n_0'dan küçük n'ler için de bir açıklama yapılması gerektiğini düşünmüştür. Veli de aynı noktada tereddüt etmiş ancak nasıl göstereceklerini bilememiş, daha önceki derslerden buna benzer yaptıkları bir kanıt olup olmadığını hatırlamaya çalışmıştır. Emre ise kendini ikna etmiş ancak arkadaşlarını ikna edememiştir. Tahtaya kalkıp arkadaşlarına açıklamalar yapan Emre'nin tanımları yanlış yorumladığı görülmüştür. Pelin ise bu tartışmalarda sessiz kalmış ve hiç görüş bildirmemiştir. Öğrenciler 30 dakika kadar bu sorunu çözmek için tartışmışlardır ancak bir sonuç çıkmayınca araştırmacı, söylenenleri özetlemiş ve göstermek istedikleri şeyi tekrar hatırlatmıştır. Sonrasında öğrencilere şu şekilde bir ipucu vermiştir:

> "*Şöyle düşünelim belli bir yerden sonraki terimleri sınırlayabiliyoruz ama ondan öncekileri sınırlayamadık. Bir de şunu düşünün n_0'a kadar dizinin belli sayıda terimi var ve biz o belli sayıdakileri sınırlayalım."*

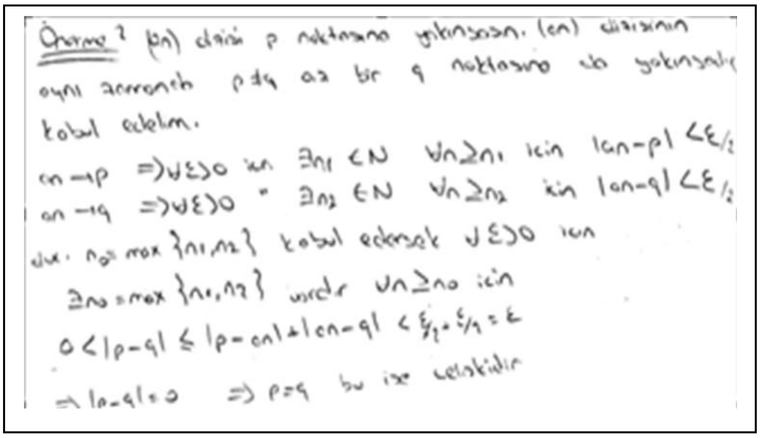
Bu açıklamadan sonra öğrencilerin hepsi birkaç dakika sessizce düşünmüşler ve Veli, "*Ben bir şey buldum. Dizinin bütün terimleri arasındaki uzaklıkları hesaplayalım. Bunların en büyüğüne çap diyelim olsun bitsin*" diyerek bu sessizliği bozmuştur. Ancak düşündüklerini matematiksel olarak ifade etmede ve yazmakta zorlandığı için arkadaşları ne demek istediğini tam olarak anlayamamışlardır. Melis, dizinin terimleri arasındaki uzaklıkları kullanarak bir sonuca varılabileceğini düşünmüş ve bunu tahtada şekil çizerek açıklamıştır.

Bütün bu tartışmaların sonunda öğrenciler ne yapmaları gerektiğine düşünce olarak yaklaşmış, ancak matematiksel olarak tam doğru yazamamış dolayısıyla önermeyi geçerli bir biçimde kanıtlayamamışlardır. Öğrenciler tartışma sürecinde akıl yürütmeye, ortaya çıkan fikirler üzerinden ilerlemeye veya yanlış olduğunu düşündükleri argümanları çürütmeye çalışmışlardır. Bu argümantasyon süreci, öğrencilerin sorgulamalarına, düşüncelerini ifade etmelerine, birbirlerini anlamaya çalışmalarına ve bu şekilde etkileşime girerek akıl yürütme becerilerini kullanmalarına katkı sağlamıştır. Öğrenciler matematiksel olarak tam ifade edememiş ve kanıtı yazamamış olsalar da, doğru akıl yürütmüşlerdir. Bu deneyim sonucunda, önermenin kanıtına farklı açılardan bakabilmiş, geçerli bir kanıt oluşturmak için nasıl düşünmeleri ve nelere dikkat etmeleri gerektiğini fark etmişlerdir.

Bu önermeyi kanıtlama sürecinde görülen güçlük, kanıtın probleme odaklı kısmında ortaya çıkmış; öğrenciler doğru düşündükleri halde nasıl ifade edeceklerini bilememişlerdir. Tartışılan önerme semantik anlama gerektiren ve öğrencilerin sadece tanım ve sembolleri ilerleterek kanıtlayamayacakları bir önermedir. Bu yüzden tartışma daha çok, semantik akıl yürütme eğiliminde olan Derya ve Veli arasında geçmiş ancak her ikisi de düşüncelerini matematiksel olarak yazamamışlardır. Cem, bu tartışma sırasında çok fazla fikir üretememiş, çözüm olarak olmayana ergi yöntemiyle sentaktik yaklaşımla kanıtlamayı düşünmüş, ancak o da, ifadenin değilini almada ve bir fonksiyonun sınırlı olmamasını göstermekte güçlük yaşamıştır. Emre ise yüzeysel düşünerek gerekçelendirmeye gerek olmadan kanıtın yazılabileceğini öne sürmüş ve diğerlerini ikna etmeye çalışmıştır. Tartışmaların sonunda Melis, tüm söylenenlerden yaptığı çıkarımlara göre, tahtada çizdiği şekil üzerinde açıklamalar yaparak neyi göstermeleri gerektiğini ifade etmiştir. Pelin ise bu tartışmalar sırasında arkadaşlarını dinlemekle yetinmiştir.

Bu tartışmalar öğrencileri yormuş ve gösterdikleri çabanın sonucunda geçerli bir kanıta ulaşamadıklarından hüsran duygusu yaşamışlardır. Bu önermede daha fazla ilerleyemeyeceklerini belirtip diğer önermeye bakmak istediklerini söylemişlerdir. Bunun üzerine alt dizilerle ilgili olan bir sonraki önerme 5.3'e geçmişlerdir.

İkinci önermeyi iki grup da olmayana ergi yöntemiyle benzer biçimde kanıtlamıştır (Şekil 4.46) ve Emre, açıklayarak yazmak üzere tahtaya kalkmıştır.


Önerme 3 (an) dizisi p noktasına yakınsasın. (an) dizisinin aynı zamanda p ≠ q olan bir q noktasına da yakınsadığını kabul edelim.
$a_n \to p \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_1 \in N$ $\forall n \geq n_1$ için $|a_n - p| < \varepsilon/2$
$a_n \to q \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ " $\exists n_2 \in N$ $\forall n \geq n_2$ için $|a_n - q| < \varepsilon/2$
dur. $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ kabul edersek $\forall \varepsilon > 0$ için
$\exists n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ vardır $\forall n \geq n_0$ için
$0 < |p-q| \leq |p-a_n| + |a_n - q| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$
$\Rightarrow |p-q| = 0 \Rightarrow p = q$ bu ise çelişkidir

Şekil 4.46. Derya-Melis-Pelin 'in Önerme 5.3'ün kanıtı olarak yazdıkları

Öğrencilerin kanıtlarında ortak olan ve dikkat çeken nokta, (a_n) hem p hem q'ya yakınsayan bir dizi olmak üzere, $\forall\varepsilon > 0$ ve $n \geq n_0$ için $|p-q| = |a_n + p - q - a_n| < |a_n - q| + |p - a_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 < \varepsilon$ eşitsizliğinden $|p-q| < \varepsilon \Rightarrow |p-q| = 0$ sonucunu elde etmiş ve $p = q$ çelişkisine ulaşmış olmalarıdır. Öğrenciler, $|p-q|$ değeri sıfırdan büyük her sayıdan küçük olduğu için bu değerin sıfıra eşit olması gerektiği sonucunu çıkarmış ve açıklamalarını bu şekilde yapmışlardır. Pelin bu sonucu nasıl çıkardıklarını anlamamış ve arkadaşlarına, bu gerekçenin $|p-q|$ değerinin sıfır olmasını söyleyebilmek için yeterli olup olmadığını sormuştur. Öğrenciler bunu başka bir derste tartıştıklarını ve tam olarak ikna olmasalar da, ders sorumlusu tarafından bu şekilde olması gerektiğinin söylendiğini hatırladıklarını belirtmişlerdir. Öğrenciler bir süre tartışmış ve sıfırdan büyük her epsilon değerinden küçük olacağı için sıfır olmaktan başka şansı olmadığına kendilerini ikna etmeye çalışmışlardır. Bunun üzerine araştırmacı, her $\varepsilon > 0$ için bu doğru olduğundan, ε sayısını $|p-q|$'ya bağlı özel bir değer seçebileceklerini ve $\varepsilon := |p-q| > 0$ olarak seçilmesi durumunda $|p-q| < |p-q|$ şeklindeki çelişkinin ortaya çıkacağını açıklamıştır. Öğrenciler bugüne kadar yeterince ikna olmadıkları halde, öyle olması gerektiği için kabul ettikleri sonucun yerine bu çelişkinin daha ikna edici olduğunu ve şimdiye kadar hep soru işareti olarak kalmış bir noktayı aydınlatabildiklerini belirtmişlerdir.

Bu oturumda öğrenciler birinci önermenin kanıtında uzun süre harcadıklarından toplamda sadece iki önermeyle uğraşmışlardır. Her iki önermenin kanıtında dikkat çeken, öğrencilerin ulaşmak istedikleri sonuca yönelik geçişleri gerekçelendirmeden yapma eğiliminde olmaları ancak sezgisel olarak tam ikna olmadıklarında bir eksiklik olduğunu fark etmeleridir. Öğrenciler kanıtları daha önce onlara sunulduğu biçimde, onlara öyle olması gerektiği söylendiği şekliyle yazmaya çalışmışlar, ancak ara basamaklardaki geçişlerde yazdıklarını anlamlandıramamışlardır. Özellikle sezgisel anlamaya ve ikna olmaya önem veren semantik akıl yürütme eğilimindeki öğrencilerin sorularıyla, daha önce üzerinde fazla durulmayan noktalara dikkat etmiş ve fikirlerini tartışmışlardır. Bu oturum, öğrencilerin ne yapmaları gerektiğini bildiklerini ancak nasıl yapacaklarını bilmediklerini yani gerekli ilişkileri kurma ve matematiksel kanıt olarak yazma konusunda sorun yaşadıklarını bir kez daha göstermiştir. Ancak tartışmalar akıl yürütme süreçlerini harekete geçirerek, yazdıkları kanıtları anlamlandırma ihtiyacı hissetmelerini ve sorgulamalarını sağlamış, öğrencilerde bir farkındalık oluşturmuştur.

5. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışma, dördüncü sınıfa devam etmekte olan ortaöğretim matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının kanıtlama biçimleri, kanıtlara yaklaşımları, kanıtlama sürecinde karşılaştıkları güçlükler ve duyuşsal durumları incelenmiştir. Yapılan beş haftalık sınıf çalışmalarının, katılımcıların kanıtlama süreçlerini nasıl etkilediği araştırılmış ve buradan elde edilen sonuçlarla, öğrenme-öğretme ortamlarının düzenlenmesine yönelik önerilerde bulunulmuştur.

Bu bölümde, öğrencilerin bireysel kanıtlama süreçlerinin ve sınıf çalışmalarının analizinden elde edilen bulgulara ilişkin sonuçlar verilecek ve bu sonuçlar alan yazındaki araştırmalarla karşılaştırılarak tartışılacaktır.

Çalışmanın başında, uygulanan ölçme aracıyla ve ön görüşmelerle elde edilen verilerin incelenmesiyle kanıt ve kanıtlamaya ilişkin öğrencilerde var olan güçlükler belirlenmiştir. Belirlenen bu güçlükler Çizelge 5.1'de görülmektedir.

Çizelge 5.1. Öğrencilerde kanıtlama sürecinde görülen güçlükler

Güçlükler	**Emre**	**Pelin**	**Veli**	**Derya**	**Cem**	**Melis**
Matematiksel dil ve notasyon	X	X	X	X		
Kanıt çerçevesi oluşturamama	X	X	X			
Kanıt yöntemleri bilgisi eksikliği	X	X	X		X	
Belli bir kanıt yöntemine odaklanma			X		X	
Kanıta başlayamama	X	X				X
Kavram ve tanım bilgisi eksikliği		X				X
Mantıksal hata ve yetersizlikler	X	X			X	
Açıklayıcı kanıt oluşturamama-gerekçelendirememe	X	X			X	
Uygun kanıt yöntemini belirleyememe	X	X	X	X	X	X
Aşikarlık engeli	X	X				X
Tanımı kullanamama	X	X	X	X	X	X
Kanıtın geçerliliğini belirleyememe	X	X			X	
Yetersiz kanıt kavramı	X	X	X			
Hipoteze ekleme yapma veya sonucu varsayma	X	X				
Kanıt yazamama ve düşündüklerini anlaşılır biçimde ifade edememe	X	X	X	X	X	X

Çizelge 5.1'den görüldüğü gibi, çalışmada belirlenen öğrenci güçlükleri alan yazındaki diğer çalışmaların sonuçlarını destekler niteliktedir. Bu çalışmada dikkat çeken sonuçlardan biri, öğrencilerin kanıtı nasıl oluşturacaklarına karar vermeye çalışırken, geçerli argümanlar öne sürdükleri ve sezgisel olarak ikna oldukları durumlarda bile bu argümanları, formel matematiksel kanıta dönüştürme ve açık, anlaşılır bir dille yazma konusunda güçlük yaşamış olmalarıdır. Öğrencilerin kanıt yazma becerilerinin ve geçerli kanıtın nasıl olması gerektiği ile ilgili bilgilerinin yeterli olmadığı görülmüştür.

Tüm katılımcılarda hem çalışmanın başında hem de çalışma süresince tanımları kanıtta kullanamama güçlüğü görülmüştür. Özellikle yazılı uygulamada verilen 10. ve 11. soruları hiçbir öğrenci tam doğru olarak yanıtlayamamış, kullanmaları gereken birebirlik tanımını kanıtta nasıl ve nerede kullanmaları gerektiğini belirleyememişlerdir. Matematiksel bir tanım veya teoremin kişi için formel olarak uygulanabilir *(formally operable)* olması, onu formel bir argüman yaratırken ya da türetirken kullanabilmesi anlamına gelmektedir (Bills & Tall, 1998). Bu bakımdan birebirlik tanımının öğrenciler için formel olarak uygulanabilir olmadığı, öğrencilerin tanım ve kavram bilgisine sahip oldukları durumlarda bile bu bilgileri doğru kullanamadıkları, stratejik bilgi (Weber, 2001) eksikliklerinin olduğu söylenebilir. Weber (2001), öğrencilerin tanım bilmekten öte tanımı ne zaman ve nasıl kullanacakları bilgisine ihtiyaçları olduğunu ifade etmiş, Selden ve Selden (2009) da çalışmalarında öğrencilerin, birebirlik kavramını sezgi ya da mantık yoluyla anlamış olsalar bile fonksiyonun birebir olduğunu nasıl göstereceklerini bilmiyor olabileceklerini belirtmişlerdir. Knapp (2006) da çalışmasında, tanımı bilen öğrencilerin doğru kullanamadıklarını görmüş ve bir kanıtta tanımı kullanabilmek için ne zaman ve nasıl kullanılması gerektiğini bilmenin önemli olduğunu ifade etmiştir. Bu çalışmanın sonuçları da, bu araştırmaları desteklemekte, öğrencilerin tanım bilgisine sahip olsalar da, tanımları kanıtlarda kullanamadıklarını göstermektedir. Sınıf tartışmalarında 1. ve 3. haftalarda da fonksiyonlarla ilgili ve birebirlik içeren önermelerin kanıtlanmasında öğrenciler güçlük yaşamışlar, birlikte tartışarak tanımları nerede ve nasıl kullanacaklarını belirlemeye çalışmışlardır. Bu tartışmaları, gerekçelendirmeye ve sezgisel olarak ikna olmaya önem veren Veli ve Derya sorularıyla yönlendirmiş, tartışmaların sonunda öğrenciler birlikte ürettikleri fikirlerle doğru sonuçlara ulaşmış ve geçerli kanıtlar oluşturmuşlardır. Çalışmanın sonundaki son görüşmelerde Veli, Derya, Melis ve Emre'nin bu güçlüklerini gidermiş oldukları ve birebirlik içeren fonksiyon önermelerini geçerli bir biçimde kanıtladıkları görülmüştür. Cem ise önermeleri kanıtlarken genellikle olmayana ergi kanıt yöntemine başvurmuş ve yönteme odaklanarak, varsayımlarını belirleyip çelişki bulmaya çalışmıştır. Son görüşmedeki önermelerde de bu yöntemi kullanmış ve çelişki bulmaya fazla odaklandığından, yazdıklarındaki mantıksal ve kavramsal hataları gözden kaçırarak açıklayıcı bir kanıt oluşturamamış, birebirlik tanımını yine kullanamamıştır. Pelin ise sınıf tartışmalarında anladığını ancak yapılanı anlamakla yapmanın aynı şey olmadığını ifade ederek, son görüşmede de önermede birebirliği nerede kullanacağını belirleyememiştir. Sınıf çalışmalarında, birebirliğin kullanımı ile ilgili tartışmalara, Pelin aktif olarak katılmamış ve arkadaşlarının tartışmalarını dinlemekle yetinmiştir, bu güçlüğünü giderememiş olmasında bunun da etkisinin olduğu düşünülebilir.

Kanıtlara prosedürel yaklaşan öğrenciler ile sentaktik kanıtlama eğilimindeki öğrenciler, açıklayıcı kanıtlar yazma ve düşündüklerini gerekçelendirmede daha çok güçlük çekmişlerdir. Öğrenciler, formel kanıt yazmada güçlük çektiklerinden, sınıf tartışmalarında zamanın büyük kısmını argümantasyon yaparak geçirmişler, önermeyi ve nasıl kanıtlanabileceğini yeterince açıklayıp ikna olduktan sonra kanıtı yazmaya başlamışlar ancak yazma sürecinde de, kullanacakları ifadeleri seçmede zorlanmışlardır. Çalışmada ilerleyen haftalarda ve son görüşmede ise matematiksel dil ve notasyon bakımından daha düzgün kanıtlar yazmaya çalışmışlardır. Sınıf çalışmalarının dördüncü haftasında araştırmacı, iki grubun birbirlerinin yazdığı kanıtları kontrol etmelerini istemiştir. Öğrencilerin yaptıkları düzeltmeler ve getirdikleri eleştiriler, kanıtların matematiksel olarak düzgün ve açıklayıcı olması gerektiğine dikkat ettiklerini göstermiştir. Ayrıca son görüşmelerde katılımcıların tümü, kanıtlamaya çalışırken düşüncelerini kağıda aktarıp karalamalar yapmışlar, kanıtı oluşturduktan sonra yeni bir kağıda baştan düzgün bir şekilde yazmak istemişlerdir. Bu da öğrencilerin, kanıtların belli bir düzende, açık ve anlaşılır biçimde, doğru sembol ve notasyon kullanımıyla yazılması gerektiğinin farkına vardıklarının bir göstergesi olarak düşünülebilir.

Çalışmanın başında Derya ve Melis dışındaki öğrenciler karşıt ters ile kanıt yöntemini tanımamış, bu yöntemle verilmiş olan kanıtları olmayana ergi yöntemine uydurmaya çalışmışlardır. Son görüşmelerde, katılımcılarda ortak olan birinci soruya öğrencilerin tümü doğru yanıt vermişler yani çalışmanın sonunda, koşullu önermelerin kanıtlanmasında kullanılabilecek doğrudan kanıt, olmayana ergi ve karşıt ters ile kanıt yöntemlerini tanır ve nasıl uygulandıklarını açıklayabilir duruma gelmişlerdir. Karşıt ters ile kanıt yöntemini fark etmelerinde yazılı uygulama sonrası yapılan ilk görüşmeler de etkili olmuş, öğrenciler yanıtlarının gerekçelerini açıklarken böyle bir yöntem olduğunu hatırlamış ancak kanıtlarda pek kullanmadıklarını belirtmişlerdir.

Öğrencilerin, verilen bir önermenin kanıtlanmasında uygun olan kanıt yöntemini belirlemekte de güçlük çektikleri görülmüştür. Hatta Emre ve Pelin çalışmanın başında yöntem bile düşünmeden, sadece önceki bilgilerinden ve derste gördükleri kanıtlardan hatırladıkları kadarıyla bazı açıklamalar yapmaya çalışmış ancak belli bir yönteme işaret eden geçerli kanıt çerçeveleri oluşturamamışlardır. Böyle durumlarda yazdıkları *mantıksal olarak hatalı kanıtlar* (Selden & Selden, 2003) olarak değerlendirilebilir ve bunları, daha önceden ezberlemiş oldukları şeyleri hatırlayarak ya da taklit ederek yazmaya çalıştıkları sonucu çıkarılabilir. Çalışmanın ilerleyen haftalarında, uyguladıkları yöntemin adımlarına ve nasıl ilerlemeleri gerektiğine daha dikkat etmeye başlamış, son görüşmede ise verilen önermeleri nasıl kanıtlayacaklarını bilemedikleri durumda, hatırlamaya çalışmak ve emin olmadıkları bazı bilgileri yazmak yerine akıl yürütmeye çalışmışlardır. Düşündükleriyle bir sonuca varamadıkları ya da geçerli bir kanıt oluşturamayacaklarına karar verdikleri anda soruyu boş bırakmayı tercih etmişlerdir. Çalışma süresince, olmayana ergi kanıt yöntemine çok fazla vurgu yapan ve tüm önermeleri bu yöntemle kanıtlama yoluna giden Cem'in, çalışmanın sonunda da benzer davranışını sürdürdüğü görülmüştür. Cem bu yöntemle daha rahat ilerleyeceğini düşündüğü ve oluşturduğu kanıtların geçerli olduğu konusunda kendine çok güvendiği için başka yöntemler kullanmamıştır. Ancak sınıf çalışmalarında arkadaşları, özellikle Veli olmayana ergi ile yapılan kanıttan ikna olmadığı ve gerekçelendirmeye ihtiyaç duyduğu zamanlarda açıklama yapmaya çalışmış ve arkadaşlarının önerdiği farklı yöntemlerle de kanıt oluşturmayı denemiştir. Veli ise başlangıçta kullanmaktan çekindiği olmayana ergi yöntemini çalışmanın sonunda kullanmış ve bu yöntemi, sınıf çalışmalarında benimsediğini belirtmiştir. Bu bakımdan sınıf çalışmaları, öğrencilerin birbirlerinin düşünme biçimlerini görmeleri, kanıtlara farklı açılardan yaklaşmaları ve tüm kanıt yöntemlerini kullanmak için uğraşmaları bakımından etkili olmuştur.

Öğrencilerde görülen bir diğer güçlük de, doğruluğunu açıkça gördükleri önermeleri formel olarak kanıtlayamamaktır. Bu güçlüğü yaşadıklarını dile getiren Emre, Pelin ve Melis bazı sorularda, önermenin doğru olduğunun zaten rahatlıkla görüldüğünü ve matematiksel olarak nasıl gösterilebileceğini bilemediklerini belirtmişlerdir. Selden ve Selden (2007b) da çalışmalarında, öğrencilerin basit kanıtları istenen tarzda yazmakta zorlandıklarını görmüşler ve bunu *aşikarlık engeli* olarak ifade etmişlerdir. VanSpronsen (2008) de öğrencilerin, kendileri için doğruluğu açık olan önermeleri kanıtlamada güçlük çektiklerini ve kanıta gerek olmadığını düşünebildiklerini belirtmiştir. Emre, Pelin ve Melis çalışmanın başında, bu güçlük nedeniyle kanıtlayamadıkları önermeleri, son görüşmede geçerli biçimde kanıtlayabilmişlerdir.

Pelin ve Emre de görülen bir diğer güçlük, önermede yer almayan bir varsayımı veya özelliği ya da kanıtlanması gereken önermenin kendisini doğru gibi kabul edip kullanarak, kanıt oluşturmaya çalışmış olmalarıdır. Bu güçlük, hipoteze ekleme yapma veya sonucu varsayma olarak ifade edilmiştir. Çalışmanın başındaki görüşmelerde bunu yaptıkları gözlenen öğrencilerde, son görüşmede böyle bir durumla karşılaşılmamıştır.

Öğrencilerden Pelin ve Emre çalışmanın başında, kanıta yönelik olarak yazdıkları açıklamaları ve eksik kanıt girişimlerini, eksikliğin farkında oldukları halde, görüşme sırasında kanıt olarak değerlendirmişlerdir. Bu açıdan öğrencilerin, bir argümanın matematiksel kanıt olabilmesi için, mantıksal notasyonun uygun yerde kullanılması ve kanıt yöntemini işaret eden belli biçimdeki kelimelerin yer aldığı, mümkün olan en açık şekilde yazılmış olması gerektiğinin (Weber & Alcock, 2009) farkında olmadıkları ve kanıt kavramlarının yetersiz olduğu söylenebilir. McCrone ve Martin (2009) de öğrencilerin, mantıksal sıradaki hataların kanıtın geçersiz olmasına yol açmayacağını düşündüklerini; bunun, okullarda mantıksal hatalar olan yanıtlara puan verildiği durumlar olmasından ve doğru olmayan kanıt girişimlerine ve argümanlara da kanıt denilebilmesinden kaynaklandığını belirtmişlerdir. Çalışmada ayrıca Emre, Pelin ve Veli yazdıklarının geçerli bir kanıt oluşturup oluşturmadığı, kendilerini ikna edip etmediği sorulduğunda kişisel değerlendirmelerde bulunmuş ve kendilerince kabul edilebilir bir kanıt olan açıklamalarının başkası tarafından kabul edilmeyebileceğini düşündüklerini belirtmişlerdir. Emre'nin *"Benim mantığıma göre kabul edilebilir, çünkü düşüncelerimi açıklıyor"*, Veli'nin "*Bilemem, biri beğendim der biri beğenmedim der"*, Pelin'in *"Bir öğrenci okusa anlar da hoca okursa kabul etmeyebilir"* gibi ifadeleri kanıt kavramlarına ilişkin yetersizliklerini ortaya çıkarmaktadır. Bu ifadeler, öğrencilerin kanıtın geçerliliğinin, değerlendirmeyi yapan kişiye göre değişkenlik gösterebileceğini düşündüklerini göstermektedir. Bu sonuç, başka çalışmalarda (Healy & Hoyles, 2000; McCrone & Martin, 2009) ortaya çıkan, öğrencilerin duruma ve dinleyen kişiye göre farklı standartlar ve yöntemler olabileceğine inandıkları; kendileri deneysel veya informel argümanlardan ikna olsalar da öğretmenin bu tür açıklamalara puan vermeyeceğini ve kabul edilebilir kanıtların genel, açıklayıcı ve matematiksel olarak geçerli argümanlar olması gerektiğinin farkında oldukları sonuçlarını desteklemektedir.

Öğrencilerden özellikle Pelin ve Emre'nin, eksik ve yetersiz olduğunu, tam bir kanıt oluşturmadığını bildikleri halde, hatırlayabildikleri bilgileri yazmalarının, sınavlarda da, belki puan alırız düşüncesiyle yanlış da olsa kanıta yönelik bazı açıklamalar yazma alışkanlıkları ile ilgili olduğu söylenebilir. Stylianides ve Stylianides (2009) de çalışmalarında, bazı öğrencilerin değerlendirilirken karşılaştıkları bir soruyu tam olarak çözemeyeceklerini hissettiklerinde yanıt olarak bir şeyler yazmaya çalışabildiklerini ve bunun karşılığında puan almayı beklediklerini ifade etmişlerdir. Bu çalışmada da, öğrencilerden Pelin ve Emre geçerli bir kanıt oluşturmadıklarında bir şeyler bildiklerini göstermek amacıyla ve kısmen de olsa kabul görür düşüncesiyle kanıt olarak görülemeyecek yanıtlar yazmışlardır.

Çalışmada öğrencilerin, verilen önermelerin kanıtlarıyla uğraşırken kullandıkları akıl yürütme yolları ve ortaya çıkardıkları kanıtlar incelenerek her birinin belli bir kanıtlama yaklaşımını daha sıklıkla tercih ettiği belirlenmiştir. Alcock ve Inglis (2008) de çalışmalarında, bazı bireylerde belli bir akıl yürütme biçiminin diğerlerinden daha fazla kullanıldığını ifade etmişlerdir. Bu çalışmanın katılımcılarından Emre ve Pelin'in prosedürel, Cem ve Melis'in sentaktik, Derya ve Veli'nin de semantik yolla kanıtlama eğiliminde oldukları görülmüştür. Emre ve Pelin çalışmanın başında, bazı ezber bilgileri hatırlamaya, benzer kanıtlarda uygulanmış olan yöntemleri kullanmaya çalışmışlar ve yazdıklarının ne anlama geldiğini açıklamakta güçlük çekmişlerdir. Cem ve Melis ise kanıtlama sürecinde çoğunlukla kanıt gösterim sistemiyle çalışmışlar, sezgisel anlama ve gerekçelendirme yerine, belirledikleri kanıt yöntemini uygulayarak formel kanıt yazmaya önem vermişlerdir. Ancak Cem ve Melis, kümelerle ilgili önermenin kanıtında Venn diyagramı çizmiş ve sınıf tartışmalarında yazdıklarını gerekçelendirmeleri, açıklamaları istendiğinde nadiren de olsa diyagram, grafik, örnek gibi farklı gösterimlerden yararlanmaya çalışmışlardır. Bu da ağırlıklı olarak sentaktik kanıtlar oluşturmuş olmalarına rağmen semantik akıl yürütebildiklerini de göstermiştir. Derya ve Veli sezgisel olarak ikna olmak, kanıtı nasıl oluşturacaklarına karar vermek, yazdıklarını gerekçelendirmek ve kavramsal bağlantıları açıklamak için örnekler, görsel gösterimler gibi kanıt gösterim sistemi dışındaki gösterimleri sıklıkla kullanmışlardır. Ancak bu öğrenciler çalışmanın başında, informel argümanlarla sezgisel olarak doğruluğundan ikna oldukları önermelerin formel kanıtlarını yazmada güçlük çekmişlerdir.

Sınıf çalışmalarında farklı akıl yürütme eğiliminde olan öğrenciler birlikte çalışarak etkileşime girmişlerdir. Örneğin, semantik akıl yürüten ve sezgisel anlamaya, gerekçelendirmeye önem veren Veli ile sentaktik kanıtlama eğiliminde olan Cem birlikte çalışırlarken, Veli kanıt gösterim sistemi kullanarak formel kanıt yazmaya çalışmış, Cem de Veli'yi ikna etmek, düşüncelerini açıklamak, yazdıklarını gerekçelendirmek durumunda kalmıştır. Pelin ve Emre başlangıçta sadece prosedürel olarak kanıtlama eğilimi göstermiş, akıl yürütmek yerine hatırlama ve taklit etme yolunu seçmiş ve geçerli kanıtlar oluşturamamışlardır. Ancak bireysel görüşmelerde araştırmacının ve sınıf çalışmalarında arkadaşlarının soruları ve açıklama istemeleri, bu yaklaşımdan biraz uzaklaşıp akıl yürütmeye çalışmalarında etkili olmuş; başlangıçta prosedürel yaklaşan öğrencilerin, son görüşmede sentaktik kanıtlar oluşturdukları görülmüştür. Derya da kanıt gösterim sistemi dışındaki gösterimlerden yararlanarak sezgisel olarak ikna olmuş ve formel kanıtlar yazmak için çabalamıştır. Son görüşmelerde, her öğrencinin kanıtlama sürecinde, farklı düzeylerde de olsa ilerleme olduğu, arkadaşlarının düşünme biçimlerinden etkilendiği ve kanıtlama sürecindeki bazı güçlüklerini giderebildiği görülmüştür. Öğrencilerle yapılan son bireysel görüşmelerin verilerine göre, öğrencilerde görülen güçlüklerin çalışmanın sonundaki durumu Çizelge 5.2'de verilmiştir.

Çizelge 5.2. Son görüşme verilerine göre öğrencilerde görülen güçlükler

Güçlükler	**Emre**	**Pelin**	**Veli**	**Derya**	**Cem**	**Melis**
Matematiksel dil ve notasyon	X					
Kanıt çerçevesi oluşturamama						
Kanıt yöntemleri bilgisi eksikliği						
Belli bir kanıt yöntemine odaklanma					X	
Kanıta başlayamama		X				
Kavram ve tanım bilgisi eksikliği						
Mantıksal hata ve yetersizlikler	X	X			X	
Açıklayıcı kanıt oluşturamama-gerekçelendirememe	X	X			X	
Uygun kanıt yöntemini belirleyememe	X		X		X	
Aşikarlık engeli	X	X				
Tanımı kullanamama		X			X	
Kanıtın geçerliliğini belirleyememe	X				X	
Yetersiz kanıt kavramı		X				
Hipoteze ekleme yapma veya sonucu varsayma						
Kanıt yazamama ve düşündüklerini anlaşılır biçimde ifade edememe	X	X				

Öğrencilerdeki ilerlemenin farklı düzeylerde olmasının sınıf çalışmalarına ve tartışmalara katılımlarıyla ilgili olduğu söylenebilir. Çünkü bu tartışmalar öğrencilerin kanıtlara farklı açılardan bakmalarına, argümanlarını arkadaşlarına açıklamaya çalışmalarına fırsat vermiştir. Bu sayede öğrenciler fikirlerinin doğruluğunu tartışarak doğruysa cesaret ve kendine güven kazanmış, değilse bunu fark ederek düzeltme olanağı bulmuşlardır. Ayrıca öğrencilerde görülen güçlüklerin, katılımcılar arasında farklılık göstermesinin, öğrencilerin geçmiş deneyimleri, kanıta yönelik tutumları, kendilerine ilişkin inançları ve gösterdikleri çaba ile ilgili olduğu düşünülmektedir.

Öğrencilerin tartışmalara katılımlarında ve kanıtlama süreçlerinde, bilişsel yeterliklerinin, fikir üretme ve ifade edebilme becerilerinin yanında, kanıta yönelik görüşlerinin ve duyuşsal durumlarının da etkili olduğu görülmüştür. Öğrencilerin, çalışma boyunca ortaya çıkan duyuşsal alana ilişkin özellikleri ve kanıtlama sürecindeki duygusal durumları Çizelge 5.3'de verilmiştir.

Çizelge 5.3. Öğrencilerde kanıtlama sürecinde ortaya çıkan duyuşsal durumlar

Duyuşsal Durum	Emre	Pelin	Veli	Derya	Cem	Melis
Ön yargı	X	X	X	X		X
Düşük özgüven	X	X	X			
Kaygı	X	X	X	X		X
Korku			X	X		X
Merak				X	X	
Şaşkınlık	X	X	X	X	X	X
Bilinmezlik	X	X	X	X	X	X
Gurur				X		X
Memnuniyet			X	X	X	X
İlgisizlik	X	X	X			
İlgi duyma				X	X	
Umutsuzluk	X	X	X			
Hüsran- Boşa uğraşma	X	X	X			
Teşvik				X		X
Yüksek motivasyon				X	X	
Düşük motivasyon	X	X	X			

Goldin (2000), kişilerin duygusal durumlarının, geçmiş bilişsel deneyimlerinin kodlanması olduğunu ileri sürmüştür. Bu çalışmanın sonuçlarına göre de, öğrencilerin duyuşsal durumlarının, bilişsel güçlükleriyle ve geçmiş deneyimleriyle ilişkili olduğu söylenebilir. Bu tez çalışması, öğrencilerin kanıtlama sürecindeki duyuşsal durumlarının ve sınıf tartışmalarının, kanıtlama sürecini nasıl yönlendirdiğini açıklayıcı örnek durumlar sunmakta ve bilişsel süreçlerle duyuşsal süreçlerin karşılıklı etkileşimini ortaya çıkarmaktadır. Çalışmada, öğrencilerin kanıta ve ileri düzey matematik derslerine yönelik tutumlarının, kendi yeterlikleri ve başarılarına olan inançlarının, kanıtlama becerisi üzerindeki etkisi açıkça görülmüştür. Öğrencilerin kanıtlarla uğraşmayı sevmelerinin, kanıta karşı merak ve ilgi duymalarının, yapabileceklerine dair inançlarının, motivasyon ve özgüvenlerinin yüksek olmasının, sınavlar ve ders dışındaki zamanlarda kanıtlara çalışmaları ve çaba göstermeleri yönünde teşvik edici olduğu ve bu durumun da kanıtlama becerisinde gelişmeye yol açtığı sonucu elde edilmiştir. Bununla birlikte, daha güçlü ve genellikle değişmez olan duyuşsal özelliklere göre değişken olan ve kanıtlarla uğraşma sürecinde aniden ortaya çıkıp yok olabilen duyguların da, kanıtlama sürecinde etkisinin olduğu görülmüştür. Kanıtlama sürecinde yaşanan bilinmezlik, şaşkınlık, hüsran gibi olumsuz duygular, kanıta ilgi duyan ve motivasyonu yüksek öğrencilerin olumsuz durumdan kurtulmak için farklı yöntemler denemelerine ve daha ısrarlı olmalarına yol açarken, özgüveni ve motivasyonu düşük öğrencilerde kanıtla uğraşmaktan kaçınma ve yetersizliği kendine yükleme gibi davranışlara yol açmıştır. Duyuşsal durumların ortaya çıkardığı bu davranışlar da, öğrencilerin bilişsel süreçleri üzerinde ve kanıt oluşturmada başarıya ulaşıp ulaşmamalarında etkili olmuştur.

Cem dışındaki katılımcıların kanıtlara karşı ön yargılı oldukları görülmüştür. Öğrenciler kanıtlamayı, onları zorlayan, uzmanlık gerektiren ve başarılması güç bir iş olarak gördüklerini, ilk defa gördükleri bir önermeyi kanıtlayamayacaklarını, var olan kanıtları çalışarak kanıt yazabilecek duruma gelebildiklerini ifade etmişlerdir. Bu şekilde düşünmelerine, bugüne kadar derslerinde kanıtların onlara hazır sunulmasının, sınavlarda aynı ya da benzerlerini yapmalarının beklenmesinin sonucu kanıtlama deneyimi yaşayamamış olmalarının neden olduğu düşünülmektedir. Öğrenciler, bu çalışma boyunca, bireysel ve grup halinde kanıtlama girişimlerinde bulunmuşlar, arkadaşlarıyla etkileşimde bulunarak, birlikte tartışarak kanıtlar oluşturmuşlar ve çalışmanın sonunda kanıtlara karşı ön yargılarının azaldığını ya da kalmadığını belirtmişlerdir.

Katılımcılardan Pelin, Emre ve Veli’nin kanıtlamada özgüvenlerinin düşük olduğu ortaya çıkmıştır. Bu öğrenciler, önermeleri kanıtlarken desteğe ve ortaya çıkardıkları kanıtların doğruluğundan emin olmak için otorite konumundaki birinin onayına ihtiyaç duymuşlardır. Ancak çalışmanın sonundaki bireysel görüşmede, verdikleri yanıtları kendileri kontrol ederek geçerli bir kanıt oluşturup oluşturmadıklarını değerlendirmiş, varsa eksiklerini fark etmişlerdir. Araştırmacının desteğine ve onayına daha az ihtiyaç duymuş, kanıtlarının geçerliliği ile ilgili kararları kendilerinden daha emin bir şekilde vermişlerdir.

Öğrencilerin, geçmiş deneyimlerinde yaşadıkları başarısızlıklar, özellikle sınavlarda genellikle beklediklerinden düşük not almaları nedeniyle, kanıt oluşturmaları beklendiğinde değerlendirilme kaygısı, başarısız olma ve not korkusu yaşadıkları ve bu korkunun onları, başarılı olmalarını sağlayacağına inandıkları ezber stratejilere yönlendirdiği görülmüştür. Bu durum, başkaları tarafından değerlendirileceklerinde, özellikle değerlendirmenin ve alacakları notların, değerlendirenin yorumlarına bağlı olduğuna inandıklarında, öğrencilerin daha güvensiz çalıştıkları ancak değerlendirme kaygısı olmadığında katılımdan keyif aldıkları sonucunu desteklemektedir (Rodd, 2002; Di Martino & Maracci, 2009). Sınıf çalışmaları ve görüşmelerde araştırmacının sürekli, değerlendirilmeyeceklerini bu yüzden kendilerini rahat hissetmelerini ve kaygı duymamalarını vurgulamasıyla, ilerleyen haftalarda daha rahat çalışmaya ve düşündüklerini özgürce ifade etmeye, akıllarına takılan her soruyu sormaya başlamışlar, ilerleyen haftalarda araştırmacının teşvik etmesine gerek kalmadan tartışmalara katılımları artmıştır.

Derya ve Cem'de görüldüğü gibi öğrencilerdeki merak duygusu, kanıtlamaya olan ilgileri ve motivasyonlarının yüksek olması, sınavlara çalışmanın ötesinde, kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik olarak kişisel çaba göstermelerini ve ek çalışmalar yapmalarını sağlamaktadır. Bu kişisel çaba da, öğrencilerin kanıtlama becerilerine ve geçerli kanıtlar oluşturmadaki başarılarına yansımaktadır. Araştırmalar da, olumlu duyguların ve güdülenme düzeyinin daha ayrıntılı çalışmayı desteklediğini ve öğrenme çabası üzerinde etkisi olduğunu göstermektedir (Heinze & Reiss, 2009).

Karşıtı durumda öğrencilerin kanıtlamaya ilgi duymamaları, kanıtlarla uğraşmayı sevmemeleri, zorunlu oldukları için sınav kaygısıyla kanıtlara çalışmak durumunda kalmaları, motivasyonlarının düşük olması katılımcılardan Pelin, Emre ve Veli'de görüldüğü gibi, sadece sınava yönelik ezberleyerek çalışmalarına ve ek bir çaba göstermemelerine neden olmaktadır.

Bireysel görüşmelerde ve sınıf çalışmalarında, öğrencilerin kanıtlarla uğraştıkları sıradaki duygusal durumları süreci yönlendirmede etkili olmuştur. Öğrenciler önermelerle karşılaştıklarında bilinmezlik durumunu yaşamış ve önermeyi anlamaya, ne yapacaklarına karar vermeye yönelik olarak çeşitli fikirler üretmişlerdir. Kanıtlara karşı yapamayacakları inancı taşıyan ve ön yargılı olan katılımcılar hatırlamaya çalışırken, merak ve ilgisi olanlar nasıl ilerleyeceklerine dair farklı yöntemler düşünme ve belirsizliği ortadan kaldırmaya yönelik çaba gösterme yolunu seçmişlerdir. Kanıtlara karşı ilgisiz olan ve sadece sınavlara yönelik ezbere çalışan öğrenciler, bireysel görüşmelerde bilinmezlik durumundan çıkamamanın yol açtığı kaygı ve umutsuzluk durumunda yardım isteme, veya kanıtlamadan kaçınma gibi davranışlar göstermişlerdir. Ancak sınıf çalışmalarında tıkandıkları ve sonuca ulaşamadıkları ya da sonuçtan emin olamadıkları zaman arkadaşlarıyla birlikte tartışma ve farklı yöntemlerle kanıtı oluşturma yoluna gitmişlerdir. Bu bakımdan çalışma, süre sınırlaması olmadan öğrencilerin birlikte çalışmalarına ve dışarıdan doğrudan bir yardım almadan sadece ipuçlarıyla teşvik edilerek, kendi çabalarıyla sonuca ulaşmalarına olanak sağlamıştır. Bunun sonucunda öğrenciler kendi çabalarıyla kanıt oluşturmanın getirdiği memnuniyet, gurur ve tatmin duygularını yaşamışlardır. Böylece, çalışmanın başında sahip oldukları ön yargıları ve başaramayacaklarına dair olan inançları azalma ve özgüvenleri yükselme göstermiştir.

Çalışmada, tekrarlanan başarısızlığın, öğrencilerin kanıtlara karşı olumsuz tutuma sahip olmalarına ve özgüvenlerinin düşük olmasına neden olması gibi; başarılı sonuçlara ulaşmalarının da, kanıtlara karşı tutumlarının olumlu olmasını ve yapabileceklerine dair kendilerine inanmalarını sağladığı sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Yani kanıtlama sürecinde, bilişsel boyutla duyuşsal boyutun karşılıklı etkileşimi görülmektedir.

Katılımcıların hepsi, derslerin öğretmenin anlatması ve hazır kanıtları sunması şeklinde işlendiğini, öğrencilerin katılımının sağlanmadığını ve bu şekilde yapılan öğretimi etkili bulmadıklarını belirtmişlerdir. Grup tartışmaları yapılması, onların da kanıtlarla uğraşmalarına fırsat verilmesiyle katılımın sağlandığı öğretimin daha verimli olabileceğini düşündüklerini ifade etmişlerdir.

Katılımcıların, kanıtlamayı başarmak ve sınavlarda yüksek not almak için ezberlemenin en etkili yöntem olduğunu düşünmeleri dikkat çekicidir. Öğrencilerin matematiği ve kanıtlamayı ezberlenmesi gereken prosedürler olarak görmeleri (Jones, 1997; Kannemeyer, 2005), başarı için kısa süreli ezber stratejilerin uygun olduğuna inanmaları (Crawford et al., 1994), daha derin matematiği anlamak yerine benzer olan ve hatırlanana odaklanmaları (Lithner, 1998) matematiksel akıl yürütme ve kanıtlama becerilerinin gelişmesinin önündeki önemli engellerdir. Bunun, derslerin işleniş biçimiyle ve değerlendirmenin de yapılmış kanıtların aynısını ya da çok benzerlerini sorup öğrencilerin yapmasını beklemekle ilgili olduğu düşünülmektedir. Crawford vd. (1994), üniversitedeki matematik öğrenme koşullarının öğrenciyi bu şekilde düşünmeye yönelttiğini ifade etmiş, öğrencilerin matematiksel kavramları ile onu öğrenmeye yaklaşımları arasında yapısal bir ilişki olduğunu belirlemişlerdir. Geçmiş deneyimlerinin, öğrenmeye yaklaşımlarının, tutumlarının ve bilişsel etkinliklerinin, öğrencilerin matematik öğrenme çıktılarının kalitesini etkilediği (Crawford et al., 1994) bu çalışmada da ortaya çıkmıştır. Öğrenciler kanıtı, ezberle başarılabilecek bir iş olarak gördüklerinden, defterlerinde var olan kanıtları kapatıp aynısını yazmaya çalışarak ya da defalarca okuyarak ezberleme şeklinde sınavlara hazırlanmaktadırlar. Ezberledikleri dışında bir önermeyle karşılaştıklarında kaygı duymakta ve yapamayacaklarını düşünmektedirler. Çalışmanın başında, en temel önermelerde ve mantıksal becerilerini ölçen sorularda, üzerinden zaman geçtiği için daha önce görmüş oldukları bu bilgileri hatırlamadıklarını, ezberleyip geçtikleri için kalıcı öğrenmeler gerçekleştiremediklerini belirtmişlerdir. Dolayısıyla öğrenciler istenen düzeyde akıl yürütme ve kanıtlama becerilerine sahip olmadan aldıkları matematik derslerini tamamlamışlardır.

Çalışma sürecindeki bireysel görüşmeler ve sınıf çalışmaları, öğrencilerin kanıtlarla uğraşmalarına ve kanıtlama becerilerini geliştirmeye katkı sağlayan "*öğrenme deneyimleri*" olarak adlandırılabilir. Görüşmelerde, sorulara verdikleri yanıtlar üzerinde düşünmeleri, kendi yanıtlarını kontrol etmeleri, araştırmacının sorularıyla açıklama ve gerekçelendirme yapmak durumunda kalmaları, öğrencilerin öğrenmelerini destekleyici olmuştur. Sınıf çalışmalarında ürettikleri argümanları tartışmaları ve girdikleri etkileşimler, bireysel kanıtlama girişiminde bulunmaları, birbirlerinin argümanlarını değerlendirmeleri ve ortaya çıkardıkları kanıtların geçerliliğini kontrol etmeleri, öğrencilerin kanıtlama becerilerini geliştiren öğrenme deneyimleri olarak kabul edilebilir. Bu öğrenme deneyimleri, öğrencilerin başlangıçta sahip oldukları bazı güçlüklerinin giderilmesini sağlamış ve ezber olmadan, akıl yürüterek, birlikte tartışarak kanıt oluşturabileceklerini görmelerine fırsat vermiştir. Ayrıca kanıtlara karşı ön yargılarının azalmasında ve özgüvenlerinin artmasında da olumlu etkisi olmuştur. Son görüşmelerdeki sorulara verdikleri yanıtlar ve çalışmaya ilişkin görüşleri değerlendirildiğinde, tüm katılımcılarda farklı düzeylerde de olsa kanıtlama süreci ve kanıtlara yaklaşım açısından bir ilerleme gerçekleşmiştir.

Sonuç olarak, bu çalışmada belirlenen öğrenci güçlüklerinin alan yazındaki diğer çalışmaların sonuçlarını desteklediği görülmüştür. Ancak ilk defa bu çalışmada, kanıtla ilgili belirlenen güçlüklerin giderilmesine ve öğrencilerin kanıtlama becerilerinin geliştirilmesine yönelik bir öğretme deneyi uygulanmıştır. Bu öğretme deneyinde öğrenciler, bireysel görüşmeler ve sınıf çalışmaları yoluyla öğrenme deneyimleri yaşamışlardır. Öğrencilerin kanıtlarla uğraşmalarını ve birbirleriyle etkileşime girerek çalışmalarını sağlayan bu öğrenme deneyimleri, öğrencilerin bazı güçlüklerini gidermede etkili olmuştur. Öğrenciler başlangıçta kanıtlayamadıkları önermelerden bazılarını, çalışmanın sonunda kanıtlayabilmişlerdir. Ayrıca bireysel olarak yanıtlayamadıkları soruları da sınıf çalışmaları sonucunda birlikte tartışarak yanıtlamış ve işbirliğiyle geçerli kanıtlar oluşturmuşlardır. Bu tez çalışmasında, kanıtla ilgili diğer araştırmalardan farklı olarak öğrencilerin kanıtlama sürecindeki duyuşsal durumları da incelenmiştir. Çalışmadaki öğrenme deneyimlerinin, öğrencileri duyuşsal açıdan da olumlu yönde etkilediği, öğrencilerin özgüvenlerinin artmasını ve kanıtlara yönelik ön yargılarının azalmasını sağladığı belirlenmiştir. Bu çalışma, kanıtlama sürecindeki duyuşsal durumlarla bilişsel süreçlerin karşılıklı etkileşimini de ortaya çıkarmış ve bu etkileşimin kanıtlama performansını nasıl etkileyebileceğini göstermiştir.

6. ÖNERİLER

Matematiğin soyut ve kavramsal yapısını anlayabilmek için, doğru kanıt kavramına ve kanıtlama becerisine sahip olmak önemlidir. Bu durum özellikle, geleceğin matematik öğretmeni olacak öğretmen adaylarının kanıtla ilgili bilgi ve becerilerinin geliştirilmesi gerektiği sonucunu ortaya çıkarmaktadır. Katılımcıların, matematik alan derslerini tamamlamış oldukları halde kanıtlarla ilgili çeşitli güçlüklerinin olduğu ve temel düzeyde önermeleri kanıtlamada yetersiz kaldıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının kanıt kavramlarının ve kanıtlama becerilerinin istenen düzeye getirilebilmesi için kanıt ağırlıklı derslerdeki öğretim yaklaşımlarının gözden geçirilmesi gerekmektedir. Bu derslerde genellikle öğretmenin anlatımına ve kanıtları oluşturmasına dayalı ders işlenmekte, öğrencilerin kanıt oluşturma sürecine katılmasına ve kendi akıl yürütmelerini kullanmalarına fırsat verilmemektedir. Öğrencilerin başarılarını belirlemeye yönelik olarak yapılan sınavlarda da genellikle, derste ders sorumlusu tarafından yapılmış olan veya kitapta yer alan kanıtlar sorulmakta, öğrencilerin hazır kanıtları ezberleyerek aynısını sınavda yazmaları, dersi geçecek notu almaları için yeterli olabilmektedir. Bu durum da öğrencileri, kanıtların mantığını anlamaya ve akıl yürütmeye değil ezberlemeye yöneltmektedir. Öğrenciler, yüksek not alabilmek için defter ve kitaptaki kanıtları ezberleyerek aynısını yazmaları gerektiğine inanmaktadırlar. Çalışmanın sonuçlarını destekleyen öğrenci görüşleri de, bu şekilde bir öğretimin etkili ve verimli olmadığı yönündedir. Araştırmamızın sonuçları, bu çalışmanın öğretme olayları bölümünü oluşturan sınıf çalışmalarına benzer öğrenme etkinliklerinin gerçekleştirilmesinin önemini açıkça ortaya koymaktadır.

Bu amaçla sınıf içinde;

- öğrencilerin verilen matematiksel ifadelerin doğruluğu veya yanlışlığı için argümanlar üretip bu argümanların geçerliliğini tartışmaları,
- üretilen argümanlardan geçerli olanların belirlenip formel matematiksel kanıt olarak yazılması,
- yazılan kanıtların geçerliliğinin değerlendirilerek geçerli bir kanıtın nasıl olması gerektiğinin net olarak ifade edilmesi,
- hem başarı düzeyi hem kanıtlama biçimleri yönünden heterojen grupların oluşturulup öğrencilerin etkileşime girerek birlikte çalışmalarının sağlanması,
- sınavlarda öğrencilere, derste kanıtını gördükleri önermelerden farklı sorular sorulması,
- sınav kağıtlarının dağıtılıp öğrencilerin eksik ve hatalarını görmelerinin sağlanması,
- sınav kağıtlarından seçilen çeşitli öğrenci yanıtlarının sınıfa getirilerek doğru ve yanlışlarının tartışılması,

- sınav dışında öğrencilere kanıtlama ödevleri verilmesi ve bunların daha sonra sınıfta birlikte incelenmesi

şeklinde öğrenme etkinlikleri uygulanabilir.

Çok fazla sayıda öğrencinin yer aldığı kalabalık sınıflarda bu tür etkinliklerin yapılması güç olacaktır. Bu nedenle sınıfların şubelere ayrılması veya ders dışında uygulama saatlerinin belirlenip bu saatlerde küçük gruplar halinde ve asistanlar gözetiminde bu etkinliklerin gerçekleştirilmesi önerilmektedir. Bu çalışmalar, zorunlu dersler kapsamında yapılabileceği gibi, öğretim programlarında öğrencilere matematiksel akıl yürütme veya kanıtlamaya giriş türünde seçmeli dersler sunularak da yapılabilir.

Kanıtlama sürecinde bireylerin kullandığı, sentaktik ve semantik akıl yürütme stratejilerinin her birinin hem güçlü hem zayıf yanları bulunmaktadır (Weber & Alcock, 2009). Her öğrencinin, kanıtlama sürecinde belli bir akıl yürütme eğilimi olduğu düşünüldüğünde, farklı akıl yürütme stratejilerine sahip öğrencilerin bir arada çalışması sağlanarak birbirlerinin düşünme biçimlerini fark etmeleri, kanıtlama sürecinde farklı stratejileri ve kanıt yöntemlerini kullanabilme becerisini kazanmaları sağlanabilir. Öğrencilerin her iki akıl yürütme stratejisini kullanabilmeleri, kanıtlama performanslarının artmasını ve daha farklı önermeleri kanıtlamalarını destekleyecektir. Sentaktik akıl yürütmelerinin gelişmesi, matematiksel dil ve notasyonu doğru kullanarak açık ve anlaşılır kanıtlar yazılabilmeleri için öğrencilere; formel kanıt yazma, bir önermeye ait alternatif kanıtların geçerliliğini inceleme, farklı yöntemleri kullanarak önermeleri kanıtlama etkinlikleri yaptırılabilir. Semantik akıl yürütme ve sezgisel anlamanın gelişmesi için öğrencilerden oluşturdukları kanıtları açıklayarak sunmaları, kanıtlarını gerekçelendirmeleri, sorular sorarak ve tartışarak birbirlerini ikna etmeleri, bu süreçte farklı gösterim sistemlerinden yararlanmaları istenebilir. Ders sorumlusunun da, farklı akıl yürütme biçimlerini ve farklı türdeki kanıtları örneklendirmesi, öğrencilerin fikirlerine değer vermesi, onları akıl yürütme süreçlerini kullanmaları ve düşündüklerini açıklamaları konusunda teşvik etmesi yararlı olacaktır.

Bu çalışmanın katılımcılarının devam ettikleri programın 1. sınıfında, ileri düzey matematik derslerine temel oluşturma amacındaki Soyut Matematik dersi yer almaktadır. Öğrenciler bu dersin önemini sonradan fark ettiklerini ve dersi yeterli öğrenmeleri gerçekleştirmeden, not korkusuyla çoğunlukla ezberleyerek geçtikleri için, sonraki derslerde kanıtlarla sorun yaşadıklarını ve bu çalışmanın onlar için geç kalınmış bir çalışma olduğunu belirtmişlerdir. Bu tür derslerin önemine daha çok vurgu yapılması ve içeriklerinin öğrencilerin kanıtlara yönelik olumsuz tutumlarını ve başarısız olacaklarına dair inançlarını gidermeye katkı sağlayacak şekilde düzenlenmesi gerekmektedir.

Öğrencilerin sınav korkusu, değerlendirilme ve not kaygısı olmadan daha rahat çalıştıkları görülmüştür. Ders sorumluları derslerinde, öğrencilere kanıtlama becerileriyle ilgili dönüt verme amaçlı, not olarak değerlendirilmeyecek çalışmalar ve eğitim araştırmacılarıyla işbirliği içinde, öğrencilerin kanıt oluşturma sürecinde nasıl düşündüklerini ve kanıtlara nasıl yaklaştıklarını ortaya çıkarmaya yönelik araştırmalar yapmalıdırlar. Bu çalışmalarda sadece önermelerin kanıtlanması şeklinde sorulara değil, bu tez çalışmasında kullanılan ölçme aracındaki gibi (Bkz. Ek.1) öğrencilerin kanıta ilişkin temel becerilerini belirlemeye ve onları düşündürmeye yönelik farklı türde sorular sorulabilir. Bu tür çalışmaların, öğrencilerin kanıta ilişkin olumsuz duygularının ve ön yargılarının önüne geçilmesinde etkili olacağı, kanıtlara ilgi duymalarına ve motivasyonlarının artmasına katkıda bulunacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmadaki altı katılımcının dördünde olduğu gibi öğrenciler, kanıtla ilk olarak genellikle üniversite düzeyinde karşılaşmakta ve bu durum kanıtlarla uğraşmaları, kanıtlama sürecine alışmaları ve geçerli kanıtın nasıl oluşturulacağını anlamaları sürecinde güçlüklere neden olmaktadır. Bu nedenle hem ülkemizdeki hem yurtdışındaki güncel öğretim programlarında vurgulandığı gibi, öğrencilerin kanıtlarla daha erken tanışmaları sağlanmalı, ilköğretimden itibaren her düzeydeki matematik derslerinde öğrencilerin argümanlar üretip tartışmalarına olanak veren, akıl yürütme ve kanıtlama becerilerini geliştirmeye yönelik çalışmalar yapılmalı ve yukarıda sözü edilen öğrenme etkinlikleri uygulanmalıdır. Özellikle, ortaöğretim matematik programında kanıt yöntemlerine ve bu yöntemleri kullanarak temel düzeyde kanıtların yapılmasına yer verilmelidir. Öğrencilerin matematiksel dil ve notasyonu doğru kullanmalarına önem verilmeli; derslerde matematiğin sadece işlemsel kısmı değil kavramsal kısmı ve aksiyomatik yapısı da vurgulanmalıdır.

Bu çalışma, öğrencilerin tanımları kanıtta kullanmada sorun yaşadıklarını göstermiştir. Özellikle fonksiyon kavramıyla ilgili olan birebir ve örten fonksiyon tanımlarını kanıtta nasıl kullanmaları gerektiğine ve bu özellikleri nasıl göstereceklerine karar vermekte zorlanmışlardır. Bundan sonraki çalışmalarda, öğrencilerin özellikle fonksiyonlarla ilgili tanımları kullanmadaki güçlüklerinin nedenleri ve bu güçlüklerin nasıl giderilebileceği üzerine daha ayrıntılı araştırmalar yapılması düşünülebilir.

Bu çalışma, kanıtlamaya ilişkin olarak öğretim biçimi ile öğrencilerin öğrenme yaklaşımları arasında bir ilişki olabileceği sorusunu akla getirmektedir. Bu ilişkiyi incelemeye yönelik kapsamlı çalışmalar yapılması düşünülebilir. Ayrıca, öğrencilerin öğrenme yaklaşımları ile kanıtlama biçimleri arasında bir ilişki olup olmadığı, daha kapsamlı ve ayrıntılı çalışmalarla araştırılabilir.

Öğrencilerin kanıtlama biçimlerinde ve kanıtlama sürecinde yaşadıkları güçlüklerde önemli farklar ortaya çıkmıştır. Bu farklılıkların duyuşsal etkenlerle ve öğrencilerin geçmiş deneyimleri ile ilişkili olduğu görülmektedir. Bu ilişkilerin daha net olarak belirlenmesi için farklı konularda benzer çalışmalar yapılabilir.

Bu araştırma, öğrencilerin kanıtlamadaki bilişsel süreçleri ile duyuşsal durumları arasında bir etkileşim olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bu etkileşime yönelik farklı konu alanlarında da çalışmalar yapılması ve bu iki boyut arasındaki etkileşimin matematik ve kanıt dışındaki diğer ders ve konulara genelleştirilip genelleştirilemeyeceğinin araştırılması düşünülebilir. Bu alanda yapılacak kapsamlı çalışmalarda, içsel süreçleri derinlemesine incelemeye ve ayrıntıları ortaya çıkarmaya olanak veren nitel araştırma yöntemlerinden yararlanılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR DİZİNİ

Alcock, L. & Simpson, A., 2005, Convergence of Sequences and Series 2: Interactions Between Nonvisual Reasoning and the Learner's Beliefs About Their Own Role. Educational Studies in Mathematics, 58, pp.77-100.

Alcock, L. & Weber, K., 2005, Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. Journal of Mathematical Behaviour, 24, pp.125-134

Alcock, L., & Weber, K., 2008, Referential and syntactic approaches to proving: Case studies from a transition-to-proof course. Research in Collegiate Mathematics Education VII, Hitt, F., Holton , D. A. & Thompson, P (Eds.), Providence, RI: American Mathematical Society. pp. 101–123.

Alcock, L. & Inglis, M., 2008, Doctoral students' use of examples in evaluating and proving conjectures. Educational Studies in Mathematics. 69, pp.111-129.

Alibert,D., & Thomas, M., 1991, Research on mathematical proof. Advanced mathematical thinking. Tall, D. (Ed.), pp.215-230, Dordrecht: Kluwer.

Almeida, D., 2000, A survey of mathematics undergraduates' interaction with proof: some implications form mathematics education. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31, 6, pp.869–890

Almeida, D., 2001, Pupils' proof potential. International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 32, 1, pp.53-60.

Almeida, D. , 2003, Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34, 4, pp.479–488.

Antonini, S., 2004, A Statement, the contrapositive and the inverse: Intuition and argumentation. Proceedings of the 28th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, July 2004, Bergen, Norway, 2, pp.47-54.

Antonini, S. & Mariotti, M. A., 2006, Reasoning in an absurd world: difficulties with proof by contradiction, Proceedings of the 30th PME Conference, International Group for the Psychology of Mathematics Education, July 2006, Prague, Czech Republic, pp.65-72.

Antonini, S., & Mariotti, M. A., 2007, Indirect proof: an interpreting model. Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Cyprus: Larnaca, pp.541–550

Antonini, S. & Mariotti, M. A., 2008, Indirect proof: what is specific to this way of proving? ZDM Mathematics Education, 40, pp.401-412

Arslan, Ç., 2007, İlöğretim Öğrencilerinde Muhakeme Ve İspatlama Düşüncesinin Gelişimi. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa, 88s.

Atwood, P. R., 2001, Learning to construct proof in a first course on mathematical proof. Doctoral Dissertation, Western Michigan University, Kalamazoo, Michigan

Aydoğdu, T. Olkun, S., & Toluk, Z., 2003, İlköğretim öğrencilerinin çözdükleri matematik problemlerini kanıtlama süreçleri. Eğitim Araştırmaları, 4, 12, s.64-74.

Balacheff, N., 1988, Aspects of proof pupils' practice of school mathematics. Mathematics, Teachers and Children, Pimm, D. (ed.) Hodder & Stoughton, London, pp.216-235.

Baker, D.,& Campbell, C., 2004,Fostering the development of mathematical thinking: Observations from a proofs course. Primus,14, 4, pp.345-353.

Bell, A., 1976, A study of pupils' proof explanations in mathematical situations. Educational Studies in Mathematics, 7, pp.23-40.

Bills, L. & Tall, D., 1998, Operable Definitions in Advanced Mathematics: The case of the Least Upper Bound. Proceedings of PME 22, Stellenbosch, South Africa, 2, pp.104–111.

Blanton, M., Stylianou, D. & David, M., 2009, Understanding Instructional Scaffolding in Classroom Discourse on Proof. The Learning and Teaching Proof Across the Grades. Stylianou, D., Blanton, M. and Knuth, E. (eds.), Routledge Publishers, London. pp.290-306.

Bogdan, R. C .& Biklen, S .K., 1982, Qualitative Research For Education: An Introduction to Theory and Methods. Allyn and Bacon, Boston.

Boero, P., 1999, July/August, Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof.

Brown, S. A., 2003,The Evolution of Students'Understanding of Mathematical Induction: A teaching experiment. Doctoral Dissertation, University of California, San Diego.

Brousseau, G., 1997, Theory of didactical situations in Mathematics. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

César, M., 1998, Social interactions and mathematics learning. IMathematics, education and society: Proceedings of the MEAS 1 (pp. 110-119). Nottingham, pp.110-119.

Chalice, D. R., 1995, How to Teach a Class by the Modified Moore Method. The American Monthly, 102,4, pp.371-321.

Chazan, D., 1993, High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. Educational Studies in Mathematics, 24, pp.359-387.

Cobb, P., & Steffe, L. P., 1983, The constructivist researcher as teacher and model builder. Journal for Research in Mathematics Education, 14, pp.83-94.

Cobb, P. & Whitenack, J. W., 1996, A method for conducting longitudinal analyses of classroom videorecordings and transcripts. Educational Studies in Mathematics, 30, pp.213-228.

Cobb, P., & Yackel, E., 1996, Constructivist, Emergent, and Sociocultural Perspectives in the Context of Developmental Research. Educational Psychologist, 31, 3/4, pp.175-190.

Cobb, P., 2000, Conducting Teaching Experiments in Collaboration with Teachers. Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. Kelly, A. E. & R. A. Lesh, R. A. (eds.), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. pp.307 – 333.

Coe, R., & Ruthven, K., 1994, Proof practices and constructs of advanced mathematical students. British Educational Research Journal, 20, 1, pp.41-54.

Cohen, D., 1982, A Modified Moore Method for Teaching Undergraduate Mathematics. The American Mathematical Monthly, 89, 7, pp.473-490.

Coşkun, F., 2009, Ortaöğretim Öğrencilerinin Van Hiele Geometri Anlama Seviyeleri İle ispat Yazma Becerilerinin İlişkisi, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Trabzon, 88s.

Crawford, K., Gordon, S., Nicholas, J. and Prosser, M., 1994, Conceptions of mathematics and how it is learned: The perspectives of students entering university. Learning and Instruction, 4, pp.331–345.

Dancis, J. & Davidson, N., 1970, The Texas Method and the Small Group Discovery Method. 14.08.2009 tarihinde erişildi. http://legacyrlmoore.org/reference/dancis_davidson.html

Dean, E. E., 1996, Teaching the proof process, a model for discovery learning. College Teaching, 44, 2, pp.52-55.

Di Martino, P. & Maracci, M., 2009, The Secondary- Tertiary Transition: Beyond The Purely Cognitive. Proceedings of 33rd Conference of the International Group For the Pschology of Mathematics Education, Thessaloniki, Greece, pp.401-408.

Dreyfus, T., 1999, Why Johnny Can't Prove. Educational Studies in Mathematics, 38, 1, pp.85-109.

Dubinsky, E., 2000, Meaning and formalism in mathematics,International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, pp.211-240.

Edwards, B. S. & Ward, M. B., 2004, Surprises from Mathematics Education Research:Student (Mis)use of Mathematical Definitions. The American Mathematical Monthly, 111, pp.411–424.

Engelhardt, P. V., Corpuz, E. G.,Ozimek D. J, Rebello, N. S.(2004) 2003 Physics Education Conference. AIP Conference Proceedings, Volume 720, pp. 157-160

Epp, S. S., 2003, The role of logic in teaching proof. American Mathematical Monthly, 110, 10, pp.886–889.

Ferrari, P. L., 2004, Mathematical language and advanced mathematical learning.Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,Bergen, Norway, pp.383-390.

Furinghetti, F. & Morselli, F., 2009, Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. Educational Studies in Mathematics, 70, pp.71-90.

Gholamazad, S., 2005, Proof as literate mathematical discourse in past and present: perspective on students' work. Lloyd, G. M., Wilson, M., Wilkins, J. L. M., & Behm, S. L. (Eds.).Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Gibson, D.,1998, Students' use of diagrams to develop proofs in an introductory analysis course. Research on Collegiate Mathematics Education, III, Dubinsky, E., Schoenfeld, A. & Kaput, J. (Eds.), AMS, pp.284-307.

Goetting, M., 1995, The College Students' Understanding of Mathematical Proof. Doctoral Dissertation, University of Maryland

Goldin, G. A., 1998, Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. Journal of Mathematical Behavior, 17, pp.137-165.

Goldin, G., 2000, Affective pathways and representation in mathematical problem solving. Mathematical Thinking and Learning, 2, pp.209-219.

Goldin, G. A., 2002, Affect, meta-affect, and mathematical belief structures. In G. C. Leder, E. Pehkonen, & G. Törner (Eds.), Beliefs: A hidden variable in mathematics education? Dordrecht: Kluwer, (pp. 59–72).

Good, C., 2006, Teaching by the Moore Method. MSOR Connections, 6, 2.

Gravemeijer, K. and Cobb, P., 2006, Design Research from a Learning Design Perspective. Educational Design Research, J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenny and N. Nieveen (Eds.), GB: Oxon: Ruthledge, pp.17-51

Güven, B., Çelik, D. ve Karataş, İ., 2005. Ortaöğretimdeki Çocukların Matematiksel İspat Yapabilme Durumlarının İncelenmesi. Çağdaş Eğitim Dergisi, 30,s.319.

Hanna, G., & Jahnke, H. N., 1996, Proof and Proving. International Handbook of Mathematics Education, Bishop, A., et al. (Eds.), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.pp.877-908.

Hanna, G. & De Villiers, M., 2008, ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. ZDM Mathematics Education, 40, pp.329-336.

Harel, G. & Sowder, L., 1998, Students' proof schemes. Research on Collegiate Mathematics Education, III, Dubinsky, E., Schoenfeld, A. & Kaput, J. (Eds.), AMS, pp.234-283.

Harel, G., 1999, Students' understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra, Linear Algebra and its Applications 302-303, pp.601-613.

Harel, G., 2001, The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. Campbell, S. & Zazkis, R. (Eds.), Learning and Teaching Number Theory. Journal of Mathematical Behavior, pp.185-212.

Harel, G., Selden, A. & Selden, J., 2006, Advanced Mathematical Thinking. Handbook of Research on the Pschology of Mathematics Education: Past, Present and Future, Gutierrez, A. and Boero, P. (eds.), pp.147-172.

Harel, G. & Sowder, L ,2007, Toward comprehensive perspectives on learning and teaching proof. Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics, Lester, F. (Ed.), Greenwich, CT: Information Age Publishing. pp.805-842.

Hart, E., 1994, A conceptual analysis of the proof-writing performance of expert and novice students in elementary group theory. Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning, Kaput, J.& Dubinsky E. (Ed.), MAA pp.49-63.

Hazzan, O. & Zazkis, R., 2003, Mimicry of proofs with computers: the case of Linear Algebra, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34, 3, pp.385 -402.

Healy L., & Hoyles C., 1998, Justifying and proving in school mathematics: Technical report on the nationwide survey. Institute of Education, Univ. London.

Healy, L. & Hoyles, C., 2000, A Study of Proof Conceptions in Algebra, Journal for Research in Mathematics Education, 31, 4, pp.396-428.

Heinze, A. & Reiss, K., 2003, Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence. Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Bellaria, Italy.

Heinze, A. & Reiss, K., 2009, Developing Argumentation and Proof Competencies in the Mathematics Classroom. The Learning and Teaching Proof Across the Grades. Stylianou, D., Blanton, M. and Knuth, E. (eds.), Routledge Publishers, London. pp.191-203.

Hersh, R., 1993, Proving is convincing and explaining. Educational Studies in Mathematics, 24,4, pp.389-399.

Housman, D.& Porter, M., 2003, Proof schemes and learning strategies of above average mathematics students. Educational Studies in Mathematics, 53, pp.139-158.

Huber, G.L., 2003, Processes of decision-making in small groups learning. Learning and Instruction, 13, pp.255-269.

Jones, B. F., 1977, The Moore Method. The America Mathematical Monthly, 84,4, pp.273-278.

Jones, K., 1997, Student Teachers' Conceptions of Mathematical Proof, Mathematics Education Review, 9, pp.16-24

Jones, K., 2000, The student experience of mathematical proof at university level. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31,1, pp.53-60.

Kannemeyer, L., 2005, Reference framework for describing and assessing students' understanding in first year calculus. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36, 2-3, pp.271-287.

Knapp, J., 2005, Learning to prove in order to prove to learn. 16-Mayıs-2008 tarihinde erişildi URL: http://mathpost.asu.edu/~sjgm/issues/2005_spring/SJGM_knapp.pdf

Knapp, J., 2006, A framework to examine definition use in proof. Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp.15-22

Knuth, E., & Elliott, R., 1997, Preservice secondary mathematics teachers' interpretations of mathematical proof. Proceedings of the 19th Conference of Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, pp.545-551.

Knuth, E. J., 2002, Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 5,pp. 61-88.

Ko, Y. & Knuth, E., 2009, Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. Journal of Mathematical Behavior, 28, pp.68-77.

Lesh, R., & Lehrer, R., 2000, Iterative refinement cycles for videotape analyses of conceptual change. Handbook of research data design in mathematics and science education, Lesh, R. (Ed.), Mahwah, NJ: Lawrence Erblaum Associates. pp. 665–708.

Lithner, J., 1998, Mathematical reasoning and familiar procedures. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31,1, pp.83-95.

Lithner, J., 2000, Mathematical reasoning in task solving. Educational Studies in Mathematics, 41, 2,pp. 165-190.

Mahavier, W. S., 1999, What is the Moore Method? Primus, 9, 4, pp.339-354.

Mariotti, M. A., 2006, Proof and proving in mathematics education. Handbook of Research on the Pschology of Mathematics Education: Past, Present and Future, Gutierrez, A & Boero, P.(eds.), pp.173-204.

Martin, W. G. & Harel, G., 1989, Proof frames of preservice elementary teachers. Journal for Research in Mathematics Education, 20, pp.41–51.

Martino, A. M., & Maher, C. A., 1999, Teacher questioning to promote justification and generalization in mathematics: what research practice has taught us. Journal of Mathematical Behavior, 18, 1, pp.53–78.

McLeod, D. B., 1992, Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. Handbook of research on mathematics learning and teaching, Grouws D. A. (Ed.), New York, NY: Macmillan pp. 575–596.

McCrone, S. S., 2005, The development of mathematical discussion: An investigation in a fifth grade classroom. Mathematical Thinking and Learning, 7, 2, pp.111–133.

McCrone, S. M. S. & Martin, T. S., 2009, Formal Proof in High School Geometry: Student Perceptions of Structure, Validity, and Purpose. Teaching Proving by Coordinating Aspects of Proofs with Students' Abilities. Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective, Stylianou, D. A.,. Blanton,M. L. & Knuth, E.J. (Eds.), New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics. pp. 204-221.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), 2005, Matematik Dersi Öğretim Programı ve Kılavuzu (9-12. Sınıflar). Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı (MEB), 2010. Ortaöğretim Geometri Dersi 9. ve 10. Sınıf Öğretim programı, Ankara.

Mingus, T. T. Y.& Grassl, R. M., 1999, Preservice teacher beliefs about proofs. School Science and Mathematics, 99, 8, pp.438-444.

Moore, R.C.,1994, Making the transition to formal proof. Educational Studies in Mathematics, 27, pp.249-266.

Moralı, S.,Uğurel, I., Türnüklü, E. & Yeşildere, S., 2006, Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. Kastamonu Eğitim Dergisi, 14, 1, s.147-160

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

Ören, D., 2007, Onuncu Sınıf Öğrencilerinin Geometrideki İspat Şemalarının Bilişsel stilleri Ve Cinsiyetlerine Göre incelenmesine Yönelik Bir Çalışma,Yüksek Lisans tezi, Ortadoğu Teknik Üniversitesi, Ankara.105 s.

Özer, O., 1998,. Soyut Matematik. Orhun, N. (Ed.), Anadolu Üniversitesi Açıköğretim Fakültesi Yayınları.

Özer, Ö. & Arıkan, A., 2002,. Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. V.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Bildiriler Kitabı, 16-18 Eylül, Ankara, ,s.1083-1089.

Patrick, J. B., 2003, Moore is better. PRIMUS: September, Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies, http://findarticles.com/p/articles/mi_qa3997/is_200309/ai_n9255840/?tag=content;col1

Patton, M. Q., 2002, Qualitative Evaluation and Research Methods Rhousands Oaks, Calif. Sage Publications.

Pedemonte,B., 2007, How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educational Studies in Mathematics, 66, pp.*23*-41.

Peshkin, A., 1993, The Goodness of Qualitative Research. Educational Researcher, 22,2,pp. 23-29.

Pinto, M. M. F. & Tall, D., 1999, Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning. Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel, pp.281-288.

Pirie, S. E. B., 1996, What are the data? An exploration of the use of video-recording as a data gathering tool in the mathematics classroom. Paper presented at the Sixteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education— North America, Florida State University, Panama City.

Powell, A. B.; Francisco, J.M. & & Maher,C. A., 2003, An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. Journal of Mathematical Behavior, 22, pp.405-435.

Powell, A. B., 2006, Socially emergent cognition: particular outcome of student-to-student discursive interactions during mathematical problem solving. Horizontes, 24, 1, pp.33-42.

Raman, M., 2001, Beliefs about proof in collegiate calculus, Proceedings of the Twenty Second Annual Meeting, North American Chapter for the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Snowbird, Utah.

Raman, M., 2003, Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. Educational Studies in Mathematics, 52, pp.319–325.

Rodd, M. 2002, Hot and abstract: Emotion and learning undergraduate mathematics. Paper presented at the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics, July, University of Crete. http://www.math.uoc.gr/_ictm2/Proceedings/pap203.pdf

Rodd, M., and H. Bartholomew. 2006, Invisible and special: Young women's experiences as undergraduate mathematics students. Gender and Education, 18, pp.35-50.

Sarı, M., Altun, A. ve Aşkar, P., 2007, Üniversite öğrencilerinin analiz dersi kapsamında matematiksel kanıtlama süreçleri: Örnek olay çalışması. Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi , 40, 2, pp.295-319

Schabel, C. J., 2001, An Instructional Model To Improve Proof Writing In College Number Theory. Doctoral Dissertation,. Portland State University. USA

Schoenfeld, A., 1982, Beyond the Purely Cognitive: Metacognition and Social Cognition as Driving Forces Intellectual Performance. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (66th, New York, NY). http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED219433.pdf

Schoenfeld, A. H., 1983, Beyond the purely cognitive: Beliefs systems, social cognitions, and metacognitions as driving forces in intellectual performance. Cognitive Science, 7, pp.329–363.

Schoenfeld, A., 1992, Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. Handbook of research of teaching and learning, Grouws, D. (Ed.), New York: Macmillan Publishing Co. pp. 334-370.

Segal, J., 2000, Learning about mathematical proof: Conviction and validity. Journal of Mathematical Behavior, 18, pp.191–210.

Selden, J. & Selden, A., 1995, Unpacking the Logic of Mathematical Statements. Educational Studies in Mathematics, 29, 2, pp.123-151.

Selden, A. & Selden, J., 2003, Errors and misconceptions in college level theorem proving. Technical Report, Mathematics Department, Tennesse Technological University. 10.05.2008 tarihinde erişildi. URL: http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2003_3.pdf

Selden, A. & Selden, J. , 2007a, Overcoming students'difficulties in learning to understand and construct proofs. Technical Report, Mathematics

Department, Tennesse Technological University 10.05.2008 tarihinde erişildi. URL: http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_1.pdf

Selden, A. & Selden, J., 2007b, Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. Technical Report, Mathematics Department, Tennesse Technological University 10.05.2008 tarihinde erişildi. URL: http://www.math.tntech.edu/techreports/TR_2007_2.pdf

Selden, J , Selden, A. & McKee, K. , 2008a, Improving Advanced Students Proving Abilities. A paper for ICME-11 Topic Study Group 18: Reasoning, proof and proving in mathematics education. 28.11.2010 tarihinde erişildi. http://tsg.icme11.org/tsg/show/19

Selden, A., McKee, K. & Selden, J., 2008b, The relation between affect and the proving process. Paper presented at 11th International Congress on Mathematical Education ICME-11 Mexico27. 07. 2009 tarihinde erişildi http://tsg.icme11.org/document/get/532

Selden, J; Selden, A. & McKee, K., 2008c, The Role of Nonemotional Cognitve Feelings in Constructing Proofs. Proceedings of the 11th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education. 14.5.2010 tarihinde erişildi www.rume.org/crume2008/eproc.html.

Selden, J.,& Selden, A., 2009, Teaching Proving by Coordinating Aspects of Proofs with Students' Abilities. Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective, Stylianou, D. A.,. Blanton,M. L. & Knuth, E.J. (Eds.), New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics. pp. 339-354.

Selden, A.; McKee, K. & Selden, J., 2010, Affect, behavioural schemas and the proving process. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41, 2, pp.199-215.

Sfard, A., 2001, There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. Educational Studies in Mathematics, 46, pp.13–57.

Smith, J.C., 2006, A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. Journal of Mathematical Behaviour, 25, pp.73-90.

Steffe, L. P., 1983, The teaching experiment methodology in a constructivist research program. Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Bosten: Birkhauser, pp.469–471.

Steffe, L. P. and D'Ambrosio, B., 1996, Using teaching experiments to understand students' mathematics. Treagust,D., Duit, R and Fraser, B (eds.) Improving Teaching and Learning in Science and Mathematics, New York: Teacher College Press,pp 65–76.

Steffe, L. & Thompson, P., 2000, Teaching Experiment Methodology: Underlying Principles and essential Elements, New Methodologies in Mathematics and Science Education, Lesh, R. A. and Kelly, A. E. (eds.), Mahwah, NJ:Lawrence Erlbaum, pp.267-306.

Stylianides, A. J., Stylianides, G. J. & Philippou, G.N., 2004, Undergraduate students' understanding of the contraposition equivalence rule in symbolic and verbal contexts. Educational Studies in Mathematics, 55, pp.133-162.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J. & Philippou, G.N., 2007, Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. Journal of Mathematics Teacher Education, 10, pp.145-166.

Stylianides, G. J. & Stylianides, A.J., 2009, Proof constructions and evaluations. Educational Studies in Mathematics, 72, pp.237-253.

Tall, D., 1989, The nature of mathematical proof*.* Mathematics Teaching,127, pp.28-32.

Thompson, D. R., 1996, Learning and Teaching Indirect Proof, The Mathematics Teacher, 89, 6, pp.474-82.

Uğurel, I., 2010, Ortaöğretim matematik programının temel ögeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi. Doktora tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

VanSpronsen, H., 2008, Proof processes of novice mathematics proof writers, Doctoral Dissertation, The University of Montana.

Velleman, D. J., 2006, Kanıt nasıl yapılır, (çev: M. Terziler ve T. Öner),Palme Yayıncılık, Ankara.

Vinner, S., 2007, Mathematics education: Procedures, rituals and man's search for meaning. Journal of Mathematical Behavior, 26, pp.1-10.

Weber, K., 2001, Student difficulty in constructing proof: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48, 1, pp.101–119.

Weber, K., 2003, A procedural route toward understanding the concept of proof. In: Proceedings of the Twenty-third Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Honolulu, USA, pp.395-401.

Weber, K., 2004a, Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. Journal of Mathematical Behavior, *23*, pp.115–133.

Weber, K., 2004b, A Framework for Describing the Processes that Undergraduates Use to Construct Proofs, Hoines, M. J. & Fuglestad, A. B. (Eds.) International Group for the Psychology of Mathematics Education, 28th, Bergen, Norway, pp.14–18

Weber, K. & Alcock, L.J., 2004, Semantic and syntactic proof productions. Educational Studies in Mathematics, 56, 3, pp. 209–234.

Weber, K., 2005, Problem-solving,proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. Journal of Mathematical Behaviour, 24, pp.351-360.

Weber, K., 2006, Investigating and Teaching the Processes Used to Construct Proofs. Research in Collegiate Mathematics Education,VI. AMS, Hitt, F. Harel, G. & Selden, A. (Eds.), pp.197-232.

Weber, K., Alcock, L. & Radu, I., 2007, Proving styles in advanced mathematics. Proceedings of the 10th Conference on Research in Undergraduate Mathematics, California, USA. 19. 07. 2009 tarihinde erişildi http://cresmet.asu.edu/crume2007/papers/weberalcockradu.pdf.

Weber, K., 2008, The role of affect in learning Real Analysis: a case study. Research in Mathematics Education, 10, 1, pp.71-85.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. & Lee, H. S., 2008, Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. Educational Studies in Mathematics, 68, pp.247-261.

Weber, K. & Alcock, L., 2009, Semantic and Syntactic Reasoning in the Representation System of Proof. Teaching and Learning Proof Across Grades: A K-16 Perspective, Stylianou, D.A, Blanton M. L., &. Knuth E. J (Eds.), New York/Washington, DC: Routledge/National Council of Teachers of Mathematics, pp. 323-338

Wu Yu, J., Lin,F., Lee, Y., 2003, Students' understanding of proof by contradiction, Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PMENA, Honolulu, Hawaii,U.S.A., pp.443-449.

Yackel, E.; Cobb, P. & Wood, T., 1991, Small-Group Interactions as a Source of Learning Opportunities in Second-Grade Mathematics. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 5, pp.390-408.

Yıldırım, C., 2000, Matematiksel Düşünme, Remzi Kitabevi, İstanbul

Yıldırım, A. & Şimşek, H., 2006, Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri, Seçkin Yayıncılık, Ankara.

EKLER

Ek 1. Matematiksel Kanıtları Anlama ve Kanıtlama Becerisini Ölçme Aracı

Ek 2. Bireysel Görüşme Formu

Ek 3. İkinci Görüşmede Sorulan Önermeler

Ek 4. Birinci Hafta Çalışma Kağıdı

Ek 5. İkinci Hafta Çalışma Kağıdı

Ek 6. Üçüncü Hafta Çalışma Kağıdı

Ek 7. Dördüncü Hafta Çalışma Kağıdı

Ek 8. Beşinci Hafta Çalışma Kağıdı

Ek 9. Emre’nin Son Görüşme Soruları

Ek 10. Pelin’in Son Görüşme Soruları

Ek 11. Veli’nin Son Görüşme Soruları

Ek 12. Derya’nın Son Görüşme Soruları

Ek 13. Cem’in Son Görüşme Soruları

Ek 14. Melis’in Son Görüşme Soruları

Ek 15. Çalışmaya İlişkin Değerlendirme Soruları

Ek 1. Matematiksel Kanıtları Anlama Ve Kanıtlama Becerisini Ölçme Aracı

AÇIKLAMA

Veri toplama aracı üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, verilerin analiz edilmesinde ve yorumlanmasında katkısı olacağı düşünülen bazı bilgilerinizin; ikinci bölümde ise kanıtla ilgili görüşlerinizin genel olarak belirlenmesine yönelik sorular bulunmaktadır.

Çalışmanın üçüncü bölümü ise, koşullu önermeler ve kanıtlarıyla ilgili anlamalarınızı ve kanıtlama becerilerinizi değerlendirmeye yönelik sorulardan oluşmaktadır. **<u>Bu bir sınav değildir ve sizin başarı durumunuzu belirlemez.</u>** Uygulamanın amacı, önermeler ve matematiksel kanıtlarla ilgili anlamalarınızı, matematiksel kanıtlama becerilerinizi incelemek ve varsa bu konulardaki güçlüklerinizi ortaya çıkarmaktır.

Sizinle ilgili bilgiler ve vereceğiniz yanıtlar araştırmacı dışında kimse ile paylaşılmayacaktır. Toplanan veriler doktora tez çalışmasında kullanılacaktır. Çalışmaya sağladığınız katkı için teşekkür ederim.

Arş. Gör. Meltem Sarı

<u>1.BÖLÜM</u>

KİŞİSEL BİLGİLER

a) Adınız ve Soyadınız:

b) Sınıfınız:

c) Genel Akademik Başarı Ortalaması:

d) Aşağıda verilen derslerden alıp başarılı olduğunuz dersleri işaretleyiniz.

( ) Soyut Matematik I

( ) Soyut Matematik II

( ) Analize Giriş I

( ) Diferansiyel Denklemler I

( ) Diferansiyel Denklemler II

( ) Soyut Cebir I

( ) Analize Giriş II

( ) Analitik Geometri I

( ) Analitik Geometri II

( ) Doğrusal Cebir I

( ) Doğrusal Cebir II

( ) Analiz I

( ) Analiz II

( ) Soyut Cebir II

( ) Gerçel Analiz

( ) Genel Topoloji

( ) Sayılar Teorisi

( ) Olasılık

( ) Topolojide Seçme Konular

( ) Karmaşık Analiz

e) Matematiksel kanıtla ilk olarak ne zaman karşılaştınız?

( ) Lise ( ) Üniversite

2.BÖLÜM

KANITA YÖNELİK GENEL GÖRÜŞLERİ BELİRLEME SORULARI

a) Matematiksel kanıt size ne ifade ediyor? Kanıtın amacı nedir?

b) Bildiğiniz kanıt yöntemlerini yazınız ve nasıl uygulandıklarını kısaca açıklayınız.

c) Kanıt yapma ve kanıtları anlamada güçlük yaşıyor musunuz? Eğer yaşıyorsanız bu güçlükler nelerdir?

3.BÖLÜM

MATEMATİKSEL KANITLARI ANLAMA VE KANITLAMA BECERİSİNİ ÖLÇME ARACI

S.1) P ve Q birer önerme olmak üzere, $P \Longrightarrow Q$ şeklindeki bir ifade kanıtlanmak isteniyor. Kanıt için ilk adım aşağıdakilerden hangisi/hangileri olabilir?

(1) Q'nun doğru olduğunu varsayarız.

(2) P'nin doğru olduğunu varsayarız.

(3) $P \Longrightarrow Q$'nun doğru olduğunu varsayarız.

(4) Q'nun yanlış olduğunu varsayarız.

(5) P'nin yanlış olduğunu varsayarız.

(6) P'nin doğru ve Q'nun yanlış olduğunu varsayarız.

(7) P'nin yanlış ve Q'nun doğru olduğunu varsayarız.

S.2) "Teorem: A ve B aynı evrensel kümenin alt kümeleri olsun. Eğer $A \subset B$ ise, $A \cup B \subset B$ 'dir."

Verilen teoremin kanıtlanması için aşağıdakilerden hangisi/hangileri izlenecek doğru yoldur?

(1) $A \not\subset B$ ve $A \cup B \subset B$ olduğunu kabul ederek çelişki elde ederiz.

(2) $A \subset B$ ve $A \cup B \not\subset B$ olduğunu kabul ederek çelişki elde ederiz.

(3) $A \cup B \not\subset B$ olduğunu kabul ederek $A \not\subset B$ olduğunu gösteririz.

(4) $A \cup B \subset B$ olduğunu kabul ederek $A \subset B$ olduğunu gösteririz.

(5) $A \not\subset B$ olduğunu kabul ederek $A \cup B \not\subset B$ olduğunu gösteririz.

(6) $A \subset B$ olduğunu kabul ederek $A \cup B \subset B$ olduğunu gösteririz.

S.3) “<u>Kanıt:</u> m^2'nin tek tamsayı ve m'nin çift tamsayı olduğunu kabul edelim.

Bu durumda, $m = 2.r$ $(r \in \mathbb{Z})$ şeklinde yazılabilir.

Buradan $m^2 = (2.r)^2 = 4.r^2 = 2.(2.r^2)$ $(2.r^2 \in \mathbb{Z})$ Bu ise m^2'nin çift olduğunu gösterir. Bu bir çelişkidir.”

Verilen kanıt aşağıdaki ifadelerden hangisini kanıtlamaktadır?

(1) m^2 çift tamsayı ise m tek tamsayıdır.

(2) m tek tamsayı ve m^2 çift tamsayı olamaz.

(3) m tek tamsayı ise m^2 de tek tamsayıdır.

(4) m^2 tek tamsayı ise m de tek tamsayıdır.

(5) m^2 çift tamsayı ise m de çift tamsayıdır.

S.4) $a \in \mathbb{R}$ ve f, $x = a$ noktasını içeren bir aralıkta tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun.

Önerme: f, $x = a$ ’da türevlenebilirse, f, $x = a$ ’da süreklidir.

Verilen önerme doğru olduğuna göre, aşağıdaki önermelerin doğrulukları ile ilgili olarak ne söylenebilir?

<u>*Doğru*</u> <u>*Yanlış*</u> <u>*Belirlenemez*</u>

(1) f, $x = a$ ’da sürekliyse, f, $x = a$ ’da türevlenebilirdir.

(2) f, $x = a$ ’da sürekli değilse, f, $x = a$ ’da türevlenebilir değildir.

(3) f, $x = a$ ’da türevlenebilir ve f, $x = a$ ’da sürekli değildir.

(4) f, $x = a$ ’da türevlenebilir değilse, f, $x = a$ ’da sürekli değildir.

S.5) <u>Teorem:</u> $x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olsun. Eğer $x + \frac{1}{x} < 2$ ise $x < 0$ ‘dır.

Aşağıda verilen kanıtlardan <u>hangisi/hangileri</u> teoremi kanıtlamaktadır?

Kanıt 1 : $x \geq 0$ olduğunu kabul edelim. $x \neq 0$ olduğundan $x > 0$ olur.

$(x-1)^2 \geq 0$ 'dır ve buradan

$$x^2 - 2x + 1 \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x^2 + 1 \geq 2x$$

$$\Longrightarrow \quad x + \frac{1}{x} \geq 2$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanır.

Kanıt 2: $x + \frac{1}{x} < 2$ ve $x \geq 0$ olduğunu kabul edelim.

$x \neq 0$ olduğundan $x > 0$ olur. Buradan

$$x\left(x + \frac{1}{x}\right) < 2x \Longrightarrow x^2 + 1 < 2x \Longrightarrow x^2 - 2x + 1 < 0$$

$$\Longrightarrow (x-1)^2 < 0$$

çelişki elde edilir.

Kanıt 3: $x + \frac{1}{x} < 2$ olduğunu kabul edelim.

$x \neq 0$ olduğundan $x^2 > 0$ olur.

$$x^2\left(x + \frac{1}{x}\right) < 2x^2 \Longrightarrow x^3 + x < 2x^2 \Longrightarrow x^3 - 2x^2 + x < 0$$

Buradan $x(x^2 - 2x + 1) = x(x-1)^2 < 0$ bulunur.

$(x-1)^2 \geq 0$ ve $x(x-1)^2 \neq 0$ olduğundan $(x-1)^2 > 0$ dır. Buradan da,

$x(x-1)^2 < 0$ ve $(x-1)^2 > 0$ olduğundan $x < 0$ elde edilir.

1.Kanıt:	2.Kanıt:	3.Kanıt:

S.6) *Teorem:* $A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir.

Aşağıda verilen kanıtlardan hangisi/hangileri teoremi kanıtlamaktadır?

Kanıt 1: $A \cap (X \backslash B) \neq \emptyset$ kabul edelim.

O halde en az bir $x \in A \cap (X \backslash B)$ vardır.

$x \in A \cap (X \backslash B) \Longrightarrow x \in A \wedge x \in (X \backslash B) \Longrightarrow x \in A \wedge x \notin B$

Dolayısıyla $A \not\subset B$ olduğu görülür. Böylece kanıt tamamlanır.

Kanıt 2: $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ kabul edelim.

Bu durumda her $x \in A$ için $x \notin (X \backslash B)$ olur. Buradan $x \in B$ elde edilir. O halde, her $x \in A$ için $x \in B$ olduğundan $A \subset B$ dir.

Kanıt 3: $A \subset B$ olsun.

Bu durumda her $x \in A$ için $x \in B$ olur. Buradan $x \notin (X \backslash B)$ elde edilir.

O halde, her $x \in A$ için $x \notin (X \backslash B)$ olduğundan $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir.

1.Kanıt:	2.Kanıt:	3.Kanıt:

S.7) "$a, b \in \mathbb{R}$ ve $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer $a > 0$ ise $f(x) = ax + b$ fonksiyonu artandır" ifadesini kanıtlayınız.

Kanıt: $a > 0$ ve $x_1 < x_2$ olsun **...** (kanıta devam ediniz**!**)

S.8) "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır" ifadesini kanıtlayınız.

Kanıt: x bir rasyonel sayı, y bir irrasyonel sayı ve $y - x$ bir rasyonel sayı olduğunu kabul edelim**…** (kanıta devam ediniz**!**)

S.9) "$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $0 < a < b,\ d > 0$ olsun. Eğer $ac \geq bd$ ise $c > d$ 'dir"

ifadesini kanıtlayınız.

Kanıt: $c \leq d$ olduğunu kabul edelim … (kanıta devam ediniz!)

S.10) Teorem: $f: X \to Y$, ve $A, B \subset X$ olsun.Eğer f fonksiyonu bire-bir ise $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ dir.

Verilen teoremi her bir adımınızı açıklayarak kanıtlayınız.

Kanıt:

Adımlar	Nedenleri
1) f bire-bir ve $y \in f(A) \cap f(B)$ olsun.	Varsayım
2) $y \in f(A) \wedge y \in f(B)$	Kesişimin tanımı
3) …	Görüntü kümesi tanımı
4) …	…
5) …	…
6) …	…

S.11) Teorem: $f: X \to Y$ bire-bir ve örten bir fonksiyon ve $A \subset X$ ise

$f(X \backslash A) = Y \backslash f(A)$ dır.

Kanıt:

$$y \in f(X\backslash A) \Longrightarrow \exists x \in X\backslash A : y = f(x)$$

$$\Longrightarrow \exists x \notin A : y = f(x)$$

$$\Longrightarrow f(x) \notin f(A)$$

$$\Longrightarrow y = f(x) \in Y\backslash f(A)$$

$$\Longrightarrow f(X\backslash A) \subset Y\backslash f(A) \qquad \textbf{\textit{(1)}}$$

Diğer yandan,

$y \in Y \backslash f(A)$ için $y \notin f(A) \Rightarrow \forall x \in A$ için $y \neq f(x)$

$\Rightarrow \exists x_1 \in X \backslash A: y = f(x_1)$

$\Rightarrow y = f(x_1) \in f(X \backslash A)$

$\Rightarrow Y \backslash f(A) \subset f(X \backslash A)$ ***(2)***

(1) ve ***(2)***'den $f(X \backslash A) = Y \backslash f(A)$

Yukarıda verilen teoremin kanıtı için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a) Verilen kanıt doğru mudur?

b) Verilen kanıtta f'nin "bire-bir" olması ve f'nin "örten" olması hipotezleri nerelerde kullanılmıştır? İlgili "$\Rightarrow$" çıkarım okunun üzerine yazarak belirtiniz.

c) f örten fakat bire-bir olmasaydı verilen kanıt doğru olur muydu? Açıklayınız.

d) f bire-bir fakat örten olmasaydı verilen kanıt doğru olur muydu? Açıklayınız.

S.12) "A, B ve C boştan farklı kümeleri için $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ birebir fonksiyon ise f fonksiyonu da birebirdir." ifadesini kanıtlayınız.

S.13) "$a \geq 2$ ve b bir tamsayı ise a, b'yi bölmez veya a, $(b+1)$'i bölmez." ifadesini kanıtlayınız.

S.14) "$a, b, d \in \mathbb{Z}$ olsun. d, a'yı ve b'yi bölerse; tüm $x, y \in \mathbb{Z}$ sayıları için d, $ax + by$'yi de böler." ifadesini kanıtlayınız.

Ek 2. İkinci Bireysel Görüşme Formu

GÖRÜŞME FORMU

Öğretmen adayları, eğitimleri süresince aldıkları alan derslerinin işlenişini, bu dersler kapsamındaki matematiksel kanıtları ve kişisel çalışma biçimlerini nasıl değerlendirmektedirler?

Tarih ve saat:

Görüşmeci:

Görüşülen kişi:

GÖRÜŞME SORULARI:

1) Bugüne kadar aldığın matematik derslerinin işlenişinden kısaca bahseder misin?

    - Bu işleniş biçiminin sence olumlu ve olumsuz yönleri neler?
    - Dersler nasıl işlenirse senin için daha verimli olabilir?

2) Derslere nasıl çalıştığından biraz bahseder misin?

3) Derslerde ne tür kanıtlar yapılıyor?

    - Derslerde sizden (öğrencilerden) kanıt yapmanız bekleniyor mu?
    - Verilen ödevlerde veya sınavlarda sizden daha önce görmediğiniz bir ifadeyi kanıtlamanız isteniyor mu?
    - Bunları yapmakta zorlanıyor musun? Neden? (niçin zorlan(m)ıyorsun sence?)

4) Kanıt yapmada gereken bilgi ve beceriler nelerdir sana göre? (tanım, teorem, vb. bilgisi soyut düşünme becerisi)

    - Bunların nasıl kazanılabileceğini düşünüyorsun?
    - Buna yönelik olarak sen neler yapıyorsun?

Ek 3. İkinci Bireysel Görüşmede Sorulan Önermeler

S.1: $x, y \in \mathbb{R}$

Eğer $x \neq y$, $x > y$ ve $y > 0$ ise $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ dir.

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

S.2: $A, B, C \subseteq E$ olsun.

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ ise $A = C \backslash B$ dir.

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

Ek 4. Birinci Hafta Çalışma Kağıdı

KÜMELER

***Tanım 1.1**: A* ve B herhangi iki küme olsun.

$$A \times B \coloneqq \{(a,b) | \ a \in A, b \in B\}$$

ile tanımlı $A \times B$ kümesine A ve B'nin *kartezyen çarpımı* denir.

Önerme 1.1: A ve B herhangi iki küme ise

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \quad veya \quad B = \emptyset$$

denkliğini kanıtlayınız.

Önerme 1.2: A, B, C ve D herhangi kümeler ise,

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

eşitliğini kanıtlayınız.

FONKSİYONLAR

Tanım 1.2: A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere, A'nın her bir elemanını B'nin yalnızca bir elemanına eşleyen kurala *A'dan B'ye bir fonksiyon* denir.

Verilen bir $f: A \to B$ fonksiyonu için A'ya f'nin *tanım kümesi* ve B'ye de f'nin *değer kümesi* adı verilir.

Tanım 1.3: Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bir $A \subseteq X$ altkümesi için Y'nin

$$f(A) = \{f(x) | \ x \in A\}$$

olarak tanımlanan altkümesine *A'nın f altındaki görüntüsü* denir.

Önerme 1.3: $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A, B \subseteq X$ boştan farklı iki küme olsun. Eğer $A \subset B$ ise $f(A) \subset f(B)$ dir. Kanıtlayınız.

Tanım 1.4: $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X'in birbirinden farklı herhangi iki elemanının görüntüleri de farklıysa f'ye *birebir fonksiyon* denir.

<u>Önerme 1.4:</u> $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. f birebir ise $f(X \backslash A) \subset Y \backslash f(A)$ olur. Kanıtlayınız.

Ek 5. İkinci Hafta Çalışma Kağıdı

KÜMELER-EKÜS VE EBAS

Önerme 2.1: Eğer $\varepsilon > 0$ ise $(-\varepsilon, \varepsilon)$ biçimindeki bütün açık aralıklar için $\bigcap_{\varepsilon>0}(-\varepsilon, \varepsilon) = \{0\}$ sağlandığını kanıtlayınız.

Önerme 2.2: Eğer $a \in \mathbb{R}$ ise (a, ∞) biçimindeki bütün aralıklar için $\bigcap_{a\in\mathbb{R}}(a, \infty) = \emptyset$ olduğunu kanıtlayınız.

Tanım 2.1 (Üst sınır, alt sınır) :

a) A boştan farklı bir reel sayı kümesi olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $x \leq S$ sağlanacak şekilde bir S sayısı bulunuyor ise bu A kümesine *üstten sınırlı* ve S sayısına da A'nın bir *üst sınırı* denir.

b) A boştan farklı bir reel sayı kümesi olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $R \leq x$ sağlanacak şekilde bir R sayısı bulunuyor ise bu A kümesine *alttan sınırlı* ve R sayısına da A'nın bir *alt sınırı* denir.

Hem alttan hem üstten sınırlı olan bir reel sayı kümesine de *sınırlı küme* denir.

Tanım 2.2 (En küçük üst sınır, en büyük alt sınır):

a) A boştan farklı ve üstten sınırlı bir reel sayı kümesi olsun. Eğer

1) s sayısı A kümesinin bir üst sınırıdır.

2) A kümesinin her K üst sınırı için $s \leq K$ dir.

koşullarının ikisi birlikte sağlanıyorsa, bu s sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı ($eküs$) veya supremumu (sup) denir.

Kolayca görüleceği gibi bir reel sayı kümesinin supremumu varsa, o tektir ve $s = supA$ şeklinde yazılır.

b) A boştan farklı ve alttan sınırlı bir reel sayı kümesi olsun. Eğer

1) r sayısı A kümesinin bir alt sınırıdır.

2) A kümesinin her M alt sınırı için $M \leq r$ dir.

koşullarının ikisi birlikte sağlanıyorsa, bu r sayısına A kümesinin en büyük alt sınırı ($ebas$) veya infimumu (inf) denir.

Kolayca görüleceği gibi bir reel sayı kümesinin infimumu varsa, o tektir ve $r = infA$ şeklinde yazılır.

Aksiyom 2.1: Boştan farklı ve üstten sınırlı bir reel sayı kümesinin bir en küçük üst sınırı (supremumu); boştan farklı ve alttan sınırlı bir reel sayı kümesinin bir en büyük alt sınırı (infimumu) vardır.

Önerme 2.3 : S ve T boştan farklı ve sınırlı iki reel sayı kümesi olsunlar. Eğer her $s \in S$ sayısı her $t \in T$ sayısından küçük veya eşit ise

a) $supS \leq supT$

b) $supS \leq infT$

sağlanırlar. Kanıtlayınız.

Ek 6. Üçüncü Hafta Çalışma Kağıdı

Tanım 3.1: A ve B boştan farklı iki küme olmak üzere, A'nın her bir elemanını B'nin yalnızca bir elemanına eşleyen kurala *A'dan B'ye bir fonksiyon* denir.

Verilen bir $f: A \to B$ fonksiyonu için A'ya f'nin *tanım kümesi* ve B'ye de f'nin *değer kümesi* adı verilir.

Tanım 3.2: Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bir $A \subseteq X$ altkümesi için Y'nin

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}$$

olarak tanımlanan altkümesine *A'nın f altındaki görüntüsü* denir.

Tanım 3.3: $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. X'in birbirinden farklı herhangi iki elemanının görüntüleri de farklıysa f'ye *birebir fonksiyon* denir.

Tanım 3.4: $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her bir $y \in Y$ için $f(x) = y$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa, f'ye *örten* fonksiyon denir.

Tanım 3.5: Bir $f: X \to Y$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bir $B \subseteq Y$ altkümesi için X'in

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

olarak tanımlanan altkümesine *B'nin f altındaki ters görüntüsü* denir.

<u>Önerme 3.1:</u> $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. f birebir fonksiyon ise her $A \subset X$ altkümesi için $f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ olur. Kanıtlayınız.

<u>Önerme 3.2:</u> $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $A \subset X$ olsun. f örten ise $Y \setminus f(A) \subset f(X \setminus A)$ olur. Kanıtlayınız.

Ek 7. Dördüncü Hafta Çalışma Kağıdı

Tanım 4.1 (Fonksiyonun sürekliliği): $A \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. Eğer $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ oluyor ise, f fonksiyonuna a noktasında *süreklidir* denir. A kümesinin her noktasında sürekli olan f fonksiyonuna A'da süreklidir denir.

Sürekliliği diğer bir yazılışla şu şekilde de ifade edebiliriz:

f, a noktasında süreklidir $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ vardır ki $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ dir.

<u>Önerme 4.1</u>: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq |x|$ koşulunu sağlıyor ise bu f fonksiyonu $0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir. Kanıtlayınız.

<u>Önerme 4.2</u> : $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli, $g(0) = 0$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq |g(x)|$ ise f fonksiyonu da $0 \in \mathbb{R}$ noktasında süreklidir. Kanıtlayınız.

Tanım 4.2: $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun *ve* $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $x_1, x_2 \in A$ için $x_1 < x_2$ iken $f(x_1) \leq f(x_2)$ oluyorsa f'ye *(monoton) artan* fonksiyon; $f(x_1) \geq f(x_2)$ oluyorsa f'ye *(monoton) azalan* fonksiyon denir.

Tanım 4.3 (Fonksiyonun türevi): $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $x_0 \in (a, b)$ olmak üzere $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limiti var ise f fonksiyonu $x_0 \in (a, b)$ noktasında türevlenebilirdir. Bu limit değerine f fonksiyonunun x_0'daki *türevi* denir ve $f'(x_0)$ ile gösterilir

<u>Önerme 4.3</u>: $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ türevlenebilir ve monoton artan bir fonksiyon ise $x \in (a, b)$ için $f'(x) \geq 0$ dır. Kanıtlayınız.

Ek 8. Beşinci Hafta Çalışma Kağıdı

DİZİLER

Tanım 5.1: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerçel sayıların bir dizisi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.
Eğer her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$; her $n \geq n_0$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ sağlanacak şekilde mevcut ise (a_n) dizisine a sayısına yakınsar denir. Böyle bir diziye yakınsak dizi ve dizinin yakınsadığı değere de *dizinin limiti* denir.
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ya da $a_n \to a$ $(n \to \infty)$
ile gösterilir.

Tanım 5.2: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$dizisi verilsin. Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \leq K_1$ olacak biçimde bir $K_1 \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (a_n) dizisine *üstten sınırlı*; $K_2 \leq a_n$ olacak biçimde bir $K_2 \in \mathbb{R}$ sayısı varsa (a_n) dizisine *alttan sınırlıdır* denir. Hem alttan hem üstten sınırlı diziye *sınırlı* dizi denir.

Tanım 5.3: (a_n) bir dizi ve $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ doğal sayıların artan bir dizisi olsun. Bu durumda $\left(a_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}} = \left(a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots\right)$ dizisine (a_n) dizisinin bir *alt dizisi* adı verilir.

Önerme 5.1 (Üçgen eşitsizliği): $x, y \in \mathbb{R}$ ise $|x+y| \leq |x| + |y|$ dir.

<u>Önerme 5.2:</u> Bir (a_n) dizisi yakınsaksa sınırlıdır. Kanıtlayınız.

<u>Önerme 5.3:</u> Eğer (a_n) dizisi bir p noktasına yakınsıyorsa ve q noktası p'den farklı bir noktaysa (a_n) dizisi q noktasına yakınsamaz. Kanıtlayınız.

Ek 9. Emre'nin Son Görüşme Soruları

1) "$A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir."

Verilen ifadeyi kanıtlamanız istenildiğinde kaç farklı yoldan kanıtlamayı düşünürsünüz? (Düşündüğünüz her yöntem için başlangıç hipotezini ve ulaşmanız gereken sonucu belirtiniz)

2) "$A, B, C \subseteq E$ olsun.

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ ise $A = C \backslash B$ dir.

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

3) $f: X \to Y$, ve $A, B \subset X$ olsun.

Eğer f fonksiyonu birebir ise $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ dir.

Kanıtlayınız.

4) "$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $0 < a < b,\ d > 0$ olsun. Eğer $ac \geq bd$ ise $c > d$'dir" ifadesini kanıtlayınız.

5) "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır" ifadesini olmayana ergi yöntemi ile kanıtlayınız.

Ek 10. Pelin'in Son Görüşme Soruları

1) "$A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir."
Verilen ifadeyi kanıtlamanız istenildiğinde kaç farklı yoldan kanıtlamayı düşünürsünüz? (Düşündüğünüz her yöntem için başlangıç hipotezini ve ulaşmanız gereken sonucu belirtiniz)

2) $A, B, C \subseteq E$ olsun.

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ ise $A = C \backslash B$ dir.

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

3) $f: X \rightarrow Y$ ve $A, B \subset X$ olsun.

Eğer f fonksiyonu birebir ise $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ dir.

Kanıtlayınız.

4) "A, B ve C boştan farklı kümeleri için $f: A \rightarrow B$ ve $g: B \rightarrow C$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ birebir fonksiyon ise f fonksiyonu da birebirdir." ifadesini kanıtlayınız.

5) "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır" ifadesini olmayana ergi yöntemi ile kanıtlayınız.

.

Ek 11. Veli'nin Son Görüşme Soruları

1) "$A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir."

Verilen ifadeyi kanıtlamanız istenildiğinde kaç farklı yoldan kanıtlamayı düşünürsünüz? (Düşündüğünüz her yöntem için başlangıç hipotezini ve ulaşmanız gereken sonucu belirtiniz)

2) "$x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olsun. Eğer $x + \frac{1}{x} < 2$ ise $x < 0$ dır."

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

3) "$a \geq 2$ ve b bir tamsayı ise a, b'yi bölmez veya a, $(b+1)$'i bölmez." ifadesini kanıtlayınız.

4) "$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $0 < a < b,\ d > 0$ olsun. Eğer $ac \geq bd$ ise $c > d$'dir" ifadesini kanıtlayınız.

5) "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır" ifadesini olmayana ergi yöntemi ile kanıtlayınız.

Ek 12. Derya'nın Son Görüşme Soruları

1) "$A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir."

Verilen ifadeyi kanıtlamanız istenildiğinde kaç farklı yoldan kanıtlamayı düşünürsünüz? (Düşündüğünüz her yöntem için başlangıç hipotezini ve ulaşmanız gereken sonucu belirtiniz)

2) $A, B, C \subseteq E$ olsun.

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ ise $A = C \backslash B$ dir.

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

3) "$x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olsun. Eğer $x + \frac{1}{x} < 2$ ise $x < 0$ dır."

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

4) $f: X \to Y$, ve $A, B \subset X$ olsun.

Eğer f fonksiyonu birebir ise $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ dir.

Kanıtlayınız.

5) "A, B ve C boştan farklı kümeleri için $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ birebir fonksiyon ise f fonksiyonu da birebirdir." ifadesini kanıtlayınız.

Ek 13. Cem'in Son Görüşme Soruları

1) "$A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir."

Verilen ifadeyi kanıtlamanız istenildiğinde kaç farklı yoldan kanıtlamayı düşünürsünüz? (Düşündüğünüz her yöntem için başlangıç hipotezini ve ulaşmanız gereken sonucu belirtiniz)

2) $A, B, C \subseteq E$ olsun.

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ ise $A = C \backslash B$ dir.

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

3) $f: X \to Y$, ve $A, B \subset X$ olsun.

Eğer f fonksiyonu birebir ise $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ dir.

Kanıtlayınız.

4) "$x \in \mathbb{R}$ ve $x \neq 0$ olsun. Eğer $x + \frac{1}{x} < 2$ ise $x < 0$ dır."

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

Ek 14. Melis'in Son Görüşme Soruları

1) "$A, B \subset X$ olsun. Eğer $A \subset B$ ise $A \cap (X \backslash B) = \emptyset$ dir."
Verilen ifadeyi kanıtlamanız istenildiğinde kaç farklı yoldan kanıtlamayı düşünürsünüz? (Düşündüğünüz her yöntem için başlangıç hipotezini ve ulaşmanız gereken sonucu belirtiniz)

2) $A, B, C \subseteq E$ olsun.

Eğer $A \cap B = \emptyset$ ve $A \cup B = C$ ise $A = C \backslash B$ dir.

Verilen ifadeyi kanıtlayınız.

3) $f: X \to Y$, ve $A, B \subset X$ olsun.

Eğer f fonksiyonu birebir ise $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$ dir.

Kanıtlayınız.

4) "A, B ve C boştan farklı kümeleri için $f: A \to B$ ve $g: B \to C$ fonksiyonlar olsun. $g \circ f$ birebir fonksiyon ise f fonksiyonu da birebirdir." ifadesini kanıtlayınız.

5) "Eğer x bir rasyonel sayı ve y bir irrasyonel sayı ise $y - x$ bir irrasyonel sayıdır" ifadesini olmayana ergi yöntemi ile kanıtlayınız.

Ek 15. Çalışmaya İlişkin Değerlendirme Soruları

1) Yaptığımız 1+4 haftalık sınıf çalışmalarına yönelik düşünceleriniz nelerdir? (Olumlu ve olumsuz yönleri ile belirtiniz.)

2) Dönem boyunca bu çalışma kapsamındaki süreci düşündüğünüzde, size bir katkısı olduğunu düşünüyor musunuz? (Yanıtınızın neden(ler)ini açıklayınız.)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Meltem Sarı

Doğum Yeri : Antakya

Doğum Yılı : 1981

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Ortaokul ve Lise: 1992-1999 Hatay Osman Ötken Anadolu Lisesi

Lisans: 1999-2005 Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Doktora: 2005-2011 Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı

Yabancı Dil: İngilizce, Almanca

İş Tecrübesi:

2005- devam ediyor: Araştırma Görevlisi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı