KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİEMANN SUBMERSİYONLAR İÇİN CHEN-TİPİ EŞİTSİZLİKLER

DOKTORA TEZİ

Şemsi MERİÇ

EKİM - 2016
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİEMANN SUBMERSİYONLAR İÇİN CHEN-TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Şemsi MERİÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 26 / 09 /2016
Tezin Savunma Tarihi : 21 / 10 /2016

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
İkinci Danışman : Prof. Dr. Erol KILIÇ

Trabzon 2016

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Şemsi MERİÇ Tarafından Hazırlanan

RİEMANN SUBMERSİYONLAR İÇİN CHEN-TİPİ EŞİTSİZLİKLER

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 27 /10 /2016 gün ve 1669 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan :	**Prof. Dr. Ziya YAPAR**	....
Üye :	**Prof. Dr. İsmail AYDEMİR**	....
Üye :	**Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN**	....
Üye :	**Prof. Dr. Emin BACAKSIZ**	....
Üye :	**Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tezin her aşamasında ve doktora eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen ve beni her zaman yüreklendiren hocam Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ' a ve değerli fikirlerinden faydalandığım hocam Sayın Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU'na ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü hocalarıma emeklerinden dolayı en içten teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca büyük ilgi ve destekleri ile her zaman yanımda olan canım aileme ve eşime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şemsi MERİÇ
Trabzon 2016

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Riemann Submersiyonlar İçin Chen-Tipi Eşitsizlikler" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU ve Prof. Dr. Erol KILIÇ'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 21/10/2016

Şemsi MERİÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

RİEMANN SUBMERSİYONLAR İÇİN CHEN-TİPİ EŞİTSİZLİKLER

Şemsi MERİÇ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
İkinci Danışman: Prof. Dr. Erol KILIÇ
2016, 74 Sayfa

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihsel gelişimine yer verdikten sonra bu tezde ele alınan problemler sunuldu. Daha sonra ise Riemann manifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilerek Riemann submersiyonlar hakkında genel bilgiler verildi. Ayrıca Hermitiyen manifoldlar arasında tanımlı olan Hermitiyen submersiyonlar ile ilgili bazı temel kavramlara yer verildi. Özel olarak, Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı olan Lagrangian Riemann submersiyonlar ele alındı ve özellikleri verildi.

İkinci bölümde Riemann manifoldlar arasında tanımlı Riemann submersiyonlar için kesit eğriliği, skalar eğrilik ve ortalama eğrilik gibi eğrilik invaryantlarını içeren eşitsizlikler kuruldu. Kurulan bu eşitsizlikler yardımıyla bazı karakterizasyonlar elde edildi. Ayrıca bu submersiyonlar için Chen-Ricci eşitsizliği hesaplandı ve Chen-Ricci eşitsizliğini sağlayan Riemann submersiyon örnekleri sunuldu. Diğer yandan, Lagrangian Riemann submersiyonlar için eğrilik invaryantları kullanılarak bazı eşitsizlikler verildi ve bu eşitsizliklerin eşitlik durumları da incelendi. Ayrıca Lagrangian Riemann submersiyonların harmonikliği çalışıldı ve bu submersiyonların harmonik olmaları için gerek ve yeter şartlar belirlendi.

Üçüncü bölümde bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar sunuldu ve dördüncü bölümde konu ile ilgili önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: Riemann Manifold, Riemann Submersiyon, Eğrilik, Harmonik Dönüşüm

PhD. Thesis

SUMMARY

CHEN-TYPE INEQUALITIES FOR RIEMANNIAN SUBMERSIONS

Şemsi MERİÇ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Doç. Dr. Yasemin SAĞIROĞLU
Co-Supervisor: Prof. Dr. Erol KILIÇ
2016, 74 Pages

This study as a philosophy doctoral thesis covers four main chapters. In the first chapter, the historical developments and the problems which are discussed in the thesis are presented. Then, the basic definitions and theorems on Riemannian manifolds are expressed and general facts about Riemannian submersions are given. Moreover, some basic notions are given on Hermitian submersions between Hermitian manifolds. In particular, we focus on a Lagrangian Riemannian submersion from Kaehler manifold to Riemannian manifold and their properties are examined.

In the second chapter, some inequalities are established involving curvature invariants such as sectional curvature, scalar curvature and mean curvature for Riemannian submersions between Riemannian manifolds. Using these inequalities, some characterizations are obtained. Also, Chen-Ricci inequality is established for such a submersion and some basic examples are presented which is satisfied Chen-Ricci inequality. On the other hand, some inequalities are given for Lagrangian Riemannian submersions using curvature invariants and the equality case of these inequalities are considered. Moreover, the harmonicity of Lagrangian Riemannian submersion is studied and the necessary and sufficient conditions for which such a submersion is harmonic are provided.

In the third chapter, the results are presented which are obtained from this philosophy doctoral thesis and some suggestions on this topic are given in the last chapter.

Key Words: Riemannian Manifold, Riemannian Submersion, Curvature, Harmonic Map

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{R}^n$	: $n-$boyutlu Öklidyen uzay
$\lVert \ \rVert$	: Norm
T_pM	: $p \in M$ Noktasındaki Tanjant Uzay
$K(\mathcal{P})$	: $\mathcal{P}$ Düzleminin Kesit Eğriliği
$\otimes$	: Tensör Çarpımı
∇	: Lineer Konneksiyon
$\mathcal{F}$	: Folasyon
A	: Yatay Tensör Alanı
H	: Yatay Distribüsyon
$\mathcal{H}$	: Ortalama Eğrilik Vektörü
K	: Kesit Eğrilik
R	: Riemann Eğrilik Tensörü
Ric	: Ricci Eğrilik
T	: Dikey Tensör Alanı
V	: Dikey Distribüsyon
τ	: Skalar Eğrilik

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Riemann manifoldlar arasında tanımlı diferensiyellenebilir dönüşümler diferensiyel geometride önemli rol oynamaktadır. Çünkü bu tip dönüşümler Riemann manifoldlar arasındaki çeşitli geometrik özellikleri karşılaştırmak için oldukça kullanışlıdır. Riemann manifoldlar arasında tanımlanan diferensiyellenebilir dönüşümlerin en çok kullanılanı ise izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonlardır. İzometrik immersiyonların teorisi ve altmanifoldların geometrisi 1827 yılında C. F. Gauss' un "Theorema Egregium" adlı çalışmasıyla ortaya koymuş olduğu 3-boyutlu Öklidyen uzayda yüzeyler üzerinedir [31].

Diğer yandan, J. F. Nash 1956 yılında her $n-$boyutlu bir Riemann manifoldun izometrik olarak $m=\frac{n}{2}(n+1)(3n+11)$ olmak şartıyla $\mathbb{R}^m$ Öklidyen uzayının bir altmanifolduna gömülebileceğini göstererek Riemann manifoldlar ile ilgili çığır açan çalışmasını ortaya koymuştur [47]. J. F. Nash'in gömme teoreminden sonra altmanifold teorisinin en temel problemlerinden biri ise bir Riemann manifoldun içsel ve dışsal invaryantları arasındaki ilişkiyi belirlemek olmuştur.

Altmanifoldlar üzerine ilk kapsamlı derleme B.-Y. Chen' in sunmuş olduğu "Geometry of Submanifolds" çalışmasıdır. Günümüzde de bu kitap özellikle altmanifold teorisi çalışanlar için en temel kaynaklardan biridir [12].

Riemann invaryantlar, modern diferensiyel geometrinin teorisini oluşturur. Riemann invaryantlar, Riemann manifoldların içsel ve dışsal karakteristikleridir ve bu invaryantlar, bir Riemann manifoldun genelindeki davranışını etkiler. Bir benzetme yapılacak olursa Riemann invaryantlar, Riemann manifoldun DNA' sı gibidirler. Sabun köpüklerinin şekillerinden kan hücrelerinin şekillerine kadar tüm şekiller aslında eğrilikler tarafından belirlenebilir [13, 16, 19, 21].

1973 yılında B.-Y. Chen ve M. Okumura, eğer M manifoldu c sabit eğrilikli bir reel uzay formunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu ise herhangi bir $p\in M$ noktasında

$$2\tau \quad \geq \quad (n-2)\left\|\sigma\right\|^2+(n-2)(n-1)c \tag{1.1.1}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermişlerdir [11]. Burada τ ve σ sırasıyla M manifoldunun skalar eğriliğini ve ikinci temel formunu göstermektedir. 1996 yılında ise B.-Y. Chen, $\mathbb{R}^m(c)$ bir reel uzay formunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu olan M ' nin herhangi bir noktasında

$$\tau \quad \leq \quad \frac{1}{2}n(n-1)\|\mathcal{H}\|^2 + \frac{1}{2}n(n-1)c \tag{1.1.2}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermiştir [15]. Burada τ ve $\mathcal{H}$, M manifoldunun sırasıyla skalar eğriliğini ve ortalama eğrilik vektörünü göstermektedir. Ayrıca (1.1.2) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartın $p \in M$ noktasının bir total umbilik nokta olması gerektiğini göstermiştir. Literatürde bu tip eşitsizlikler, Chen-tipi eşitsizlikler veya Chen eşitsizlikleri olarak adlandırılır. Ayrıca bir manifoldun temel içsel invaryantları kesit eğriliği, Ricci eğriliği ve skalar eğrilik iken, ortalama eğrilik vektörü ise bir dışsal invaryanttır. Chen eşitsizlikleri ise bir altmanifoldun içsel ve dışsal invaryantları arasında ilişki elde etmeyi sağladığından altmanifold teorisi çalışan kişiler için bu konu son dönemlerin en popüler konularından biridir. Bu nedenle literatürde bu konu üzerine birçok çalışmalar mevcuttur. Örneğin 1996 yılında B.-Y. Chen [14] deki çalışmasında, kompleks uzay formunun bir altmanifoldunun Ricci eğriliğini ve ortalama eğriliğini içeren bir eşitsizlik kurduktan sonra bunu takiben S. Hong, K. Matsumoto ve M. M. Tripathi ise B.-Y. Chen'in kurmuş olduğu eşitsizliğin daha genel bir formunu çalışmışlardır [38]. Böylece bu alanda çalışan birçok kişi, farklı geometrik yapılarla donatılmış manifoldların altmanifoldlarını ele alarak yeni Chen eşitsizlikleri kurmuş ve çeşitli karakterizasyonlar vermişlerdir [17, 18, 19, 23, 25, 42, 46, 49, 59, 60, 64].

Diğer yandan, Riemann submersiyonların teorisi yaklaşık 50 yıl öncesine dayanmaktadır. O zamanlarda B. O'Neill ve A. Gray bu teori üzerine oldukça önemli formulasyonlar vermiş olup, bu kavramın kısa zamanda gelişmesine büyük katkı sağlamışlardır [32, 48]. B. O'Neill bu çalışmasında Riemann submersiyonlar için iki önemli tensör alanı tanımlamış olup bu tensör alanlarının izometrik immersiyonlardaki ikinci temel forma ve şekil operatörüne karşılık geldiğini göstermiştir. Dolayısıyla bu tensör alanları O'Neill tensörleri veya temel tensörler olarak bilinir. Daha sonra B. O'Neill, Riemann submersiyonlar için kesit eğrilikleri ile ilgili bazı eşitlikleri ortaya koydu.

Özellikle matematiksel fizikte bu dönüşümlerin uygulaması oldukça sık kullanılmaktadır. Örneğin Kaluza-Klein teorisinde Einstein denklemlerini sağlayan harmonik dönüşümler cinsinden ifade edilebilen bir modelin en genel çözümlerinin Riemann submersiyonlar olduğu belirlendikten sonra yaklaşık son 30 yıldan beri bu teori modern diferensiyel geometrinin en popüler konularından biri haline gelmiştir [8, 9, 22, 29, 30, 35, 39, 40, 57].

B.-Y. Chen, [19] daki çalışmasında Riemann submersiyonlar için aşağıdaki eşitsizliği kurmuştur:

$\pi : M \to B,$ total jeodezik liflere sahip bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda M manifoldunun bir c sabit eğrilikli $m-$boyutlu $\mathbb{R}^m(c)$ altmanifoldu için,

$$\breve{A}_\pi \leq \frac{n^2}{4}\|\mathcal{H}\|^2 + b(n-b)c, \tag{1.1.3}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\breve{A}_\pi = \sum_{i=1}^{b}\sum_{s=b+1}^{m}\|A_{X_i}V_s\|^2$ şeklinde olup, $\{X_1, X_2, ..., X_b\}$ ve $\{V_{b+1}, V_{b+2}, ..., V_m\}$ sırasıyla yatay ve dikey uzayın bazlarını göstermektedir.

P. Alegre, B.-Y. Chen ve M. I. Munteanu, [1]' deki çalışmalarında, $\pi : S^{2m+1} \to \mathbb{C}P^m(4)$ Hopf titreşimi kullanarak $\delta-$invaryantları içeren $\mathbb{C}P^m(4)$ kompleks projektif uzayın altmanifoldları için

$$\delta^H \leq \frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|\mathcal{H}\|^2 + \|P\|^2 + \frac{1}{2}\left(n^2 - n - 2\right), \tag{1.1.4}$$

eşitsizliğini vermişlerdir. Burada $\mathcal{H}$, $\mathbb{C}P^m(4)$ de N altmanifoldu için ortalama eğrilik vektörünü göstermektedir.

Bu tezde ele alınan problemler,

- Riemann manifoldlar arasında tanımlı bir Riemann submersiyon için eğrilik invaryantlarını içeren bazı eşitsizliklerin kurulması,
- Riemann submersiyonlar için Chen-Ricci eşitsizliğinin kurulması ve bunu sağlayan örneklerin verilmesi,

- Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı olan Lagrangian Riemann submersiyonlar ele alınarak bu submersiyonlar için eğrilik invaryantlarını içeren bazı eşitsizliklerin elde edilmesi,
- Lagrangian Riemann submersiyonların harmonikliğinin incelenmesi,

şeklindedir.

1.2. Tensörler

Bu alt bölümde, manifoldlar teorisinin önemli kavramlarından biri olan tensör kavramı tanıtılacaktır. Öncelikle lineer dönüşüm tanımı verilecektir.

Tanım 1.2.1. V ve W, aynı F cismi üzerinde iki vektör uzayı $T : V \to W$ bir dönüşüm olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa T dönüşümüne bir lineer dönüşüm adı verilir:

(1) $\forall\ v, w \in V$ için, $T(v+w) \;=\; T(v) + T(w)$

(2) $\forall\ \lambda \in F$ ve $v \in V$ için $T(\lambda v) \;=\; \lambda T(v)$ [53].

Tanım 1.2.2. V, F cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir $f : V \to F$ dönüşümü her $u, v \in V$ ve $\lambda_1, \lambda_2 \in F$ için

$$f(\lambda_1 u + \lambda_2 v) \;=\; \lambda_1 f(u) + \lambda_2 f(v)$$

ise f dönüşümüne lineer fonksiyonel adı verilir. Böylece bir lineer fonksiyonel V vektör uzayının elemanlarına skalarlar karşılık getiren bir dönüşümdür ve lineer fonksiyonellerin kümesi F cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına V uzayının dual uzayı denir ve V^* ile gösterilir. Dual uzayın elemanlarına ise dual vektör adı verilir. Bir V vektör uzayının bazı $\{v_1, ..., v_n\}$ ise

$$\phi_i(v_j) \;=\; \delta_i^j \;=\; \begin{cases} 1, & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ile tanımlanan $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ lineer fonksiyonellerinin kümesi V^* dual uzayının bir ortonormal bazıdır [53].

Tanım 1.2.3. V bir vektör uzayı ve V^* da V vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda

$$\phi \quad : \quad \overbrace{V \times V \times \ldots \times V}^{r-\text{tane}} \times \overbrace{V^* \times V^* \times \ldots \times V^*}^{\text{s}-\text{tane}} \quad \to \quad \mathbb{R}$$

ile tanımlanan $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \ldots, v_r \in V$ ve $v_1^*, v_2^*, \ldots, v_s^* \in V^*$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \phi(v_1, \ldots, v_{k-1}, \lambda_1 u_k + \lambda_2 v_k, v_{k+1}, \ldots) \quad &= \quad \lambda_1 \phi(v_1, \ldots, v_{k-1}, u_k, v_{k+1}, \ldots) \\ &\quad + \lambda_2 \phi(v_1, \ldots, v_{k-1}, v_k, v_{k+1}, \ldots) \end{aligned}$$

şartını sağlayan ϕ dönüşümüne $r.$ mertebeden kovaryant ve s. mertebeden kontravaryant tensör denir. Genel olarak $r.$ mertebeden kovaryant ve $s.$ mertebeden kontravaryant tensörlerin kümesi $\Im_s^r$ ile gösterilir ve bu durumda $\Im_s^r$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı yapısına sahiptir [53].

Örnek 1.2.1. Bir dual vektör $v^* : V \to \mathbb{R}$, 1. mertebeden bir kovaryant tensördür [53].

Örnek 1.2.2. V bir vektör uzayı olsun. V ile $(V^*)^*$ özdeş olduğundan, her bir $v \in V$ vektörü $v^* : V \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümü olarak ele alınabilir. Bu nedenle her bir vektör, 1. mertebeden kontravaryant tensördür [53].

Örnek 1.2.3. Her bilineer form, 2. mertebeden bir kovaryant tensördür [53].

1.3. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 1.3.1. X boştan farklı bir küme ve $d \; : \; X \times X \; \to \; \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için,

(i) $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$, $d(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$,

(ii) $d(x, y) \; = \; d(y, x)$,

(iii) $d(x, y) \; \leq \; d(x, z) + d(z, y)$,

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir. (X, d) metrik uzayında, d metriği X üzerinde bir tek topoloji üretir [53].

Örnek 1.3.1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere,

$$\mathbb{R}^m = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_m) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesi verilsin. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^m$ için,

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2}$$

şeklinde tanımlana d fonksiyonu, $\mathbb{R}^m$ üzerinde bir metrik tanımlar, ve bu metrik ile $\mathbb{R}^m$ bir metrik uzaydır. Bu $(\mathbb{R}^m, d)$ metrik uzayına Öklid uzayı denir ve bu metrik uzay $B_{x,r} = \left\{ y \in \mathbb{R}^m \mid d(x,y) < r \right\}$ açık yuvarı ile üretilen topolojiye sahiptir [53].

Tanım 1.3.2. V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ve

$$[\ ,\ ] : V \times V \to V$$

dönüşümü de

1. 2-lineer

2. Alterne ($\forall X, Y \in V$ için $[X,Y] = -[Y,X]$)

3. $\forall X, Y, Z \in V$ için, $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

olarak verilsin. [,] dönüşümüne V üstünde bir Lie operatörü (Lie parantez operatörü) denir [36].

Teorem 1.3.1. $\mathbb{R}^n$ üstünde vektör alanlarının cümlesi $\chi(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} [\ ,\ ] \ : \ \chi(\mathbb{R}^n) \times \chi(\mathbb{R}^n) &\to \chi(\mathbb{R}^n) \\ (X,Y) &\to [X,Y] \end{aligned}$$

dönüşümü, $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ için,

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{1.3.1}$$

şeklinde tanımlanırsa, [,] bir Lie operatörüdür [36].

Teorem 1.3.2. $\chi(\mathbb{R}^n)$ üstünde [,] Lie operatörü verilsin. Bu durumda, $\forall X, Y \in \chi(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ için,

1. $[X,Y](fg) \;=\; f[X,Y](g) + g[X,Y](f)$,

2. $[fX, gY] \;=\; f(Xg)Y - g(Yf)X + fg[X,Y]$

3. $[X, X] = 0$

eşitlikleri sağlanır [36].

Yukarıdaki kavramlar verildikten sonra manifoldun tanımı için öncelikle aşağıdaki kavramlar verilecektir.

Tanım 1.3.3. *M* bir topolojik uzay olsun. *M* için aşağıdaki önermeler doğru ise *M*’ ye *n*-boyutlu bir topolojik manifold denir.

1. *M* bir Hausdorff uzayıdır.

2. *M*’nin her bir açık alt cümlesi $\mathbb{R}^n$ ’ e veya $\mathbb{R}^n$ ’ nin bir açık alt cümlesine homeomorftur.

3. *M* sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir [36].

M bir topolojik *n*-manifold ve bir $p \in M$ noktasının açık komşulukları da W_α olsun. *p* noktasının lokal koordinatları, W_α lar değiştikçe, ψ_α değişeceğinden W_α ların sayısı kadar ψ_α vardır. Her bir $\alpha \in A$ için (ψ_α, W_α) üzerindeki lokal koordinat sistemi $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ ile gösterilsin. *p* noktasının iki açık komşuluğu W_α ve W_β ise $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ ise $W_\alpha \cap W_\beta$ nın her bir noktasında $(x_1^\alpha, ..., x_n^\alpha)$ ve $(x_1^\beta, ..., x_n^\beta)$ şeklinde iki koordinat sistemi vardır. Burada

$$\psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

$$\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta : \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \to \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

fonksiyonları ikişer homeomorfizmin birleşimi olduklarından birer homeomorfizmdirler [36].

Tanım 1.3.4. M bir topolojin n-manifold ve M' nin bir atlası $S=\{(\psi_\alpha,W_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \varnothing$ olmak üzere $\forall \alpha,\beta \in A$ ya karşılık $\psi_\beta^{-1}\circ\psi_\alpha$ ve $\psi_\alpha^{-1}\circ\psi_\beta$ fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S' ye C sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S' ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir. Eğer M üzerinde C^k sınıfından bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanabilirse M' ye C^k sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir [36].

Tanım 1.3.5. M bir manifold ve manifold üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda $X,Y,Z\in\chi(M)$ ve $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için,

$$\nabla \;:\; \chi(M)\times\chi(M) \;\to\; \chi(M)$$

ile tanımlı olan ve

(i) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z+\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y+\nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$,

(iv) $\nabla_X(fY) = X[f]Y+f\nabla_X Y$,

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. Ayrıca $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi adı verilir. Afin konneksiyonunun tanımından açıktır ki bir afin konneksiyon M üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan bir dönüşümdür [53].

1.3.1. Distribüsyonlar

Bu alt bölümde bir manifold üzerinde distribüsyon kavramı ve temel özellikleri verilecektir.

Tanım 1.3.6. M , $m-$ boyutlu bir manifold olsun. M üzerinde

$$
\begin{array}{rcl} D : M & \to & \bigcup T_p M \\ p & \to & D_p \subset T_p M, \quad boy(D_p) = r \end{array}
$$

ile tanımlı D dönüşümüne $r-$boyutlu distribüsyon denir. $X \in \chi(M)$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için D_p alt uzayına ait $r-$tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör var ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir [53].

Örnek 1.3.2. M manifoldu üzerindeki bir vektör alanı 1-boyutlu bir distribüsyondur [53].

Tanım 1.3.7. M bir C^∞-manifold ve D, M üzerinde $r-$boyutlu bir distribüsyon olsun. $\Gamma(D)$, D distribüsyonuna ait vektör alanlarının kümesini göstermek üzere, eğer her $X,Y \in \Gamma(D)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna integrallenebilirdir denir [53].

1.4. Riemann Manifoldlar

Tanım 1.4.1. M bir diferensiyellenebilir manifold ve M manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda,

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

(i) $\quad g(X,Y) = g(Y,X)$

(ii) $\quad g(X,X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$,

şartları sağlanıyorsa, g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine ise Riemann manifold denir [53].

Örnek 1.4.1. $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayını ve bu uzay üzerinde

$$\langle X,Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

iç çarpımını göz önüne alalım. Bu durumda kolayca görülebilir ki $\langle \, , \, \rangle$ bilineer, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $\langle \, , \, \rangle$ bir Riemann metrik ve $(\mathbb{R}^n, \langle \, , \, \rangle)$ ikilisi ise bir Riemann manifoldudur [53].

Aşağıda verilecek olan teorem bir Riemann manifoldu üzerinde özel bir lineer konneksiyonun varlığını garanti etmektedir.

Teorem 1.4.1. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde torsiyonsuz ve g metriği ile uyumlu olan $(\nabla g = 0)$ bir tek ∇ lineer konneksiyonu vardır [53].

İspat. M üzerindeki torsiyon tensör alanı $\mathcal{T}$ ile gösterilmek üzere kabul edelim ki $\mathcal{T} = 0$ ve $\nabla g = 0$ olacak şekilde bir ∇ lineer konneksiyonu var olsun. Bu durumda $X,Y \in \chi(M)$ için $\mathcal{T}(X,Y) = 0$ olduğundan

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X \tag{1.4.1}$$

dir. Diğer taraftan $Z \in \chi(M)$ için $(\nabla_X g)(Y,Z) = 0$ olduğundan

$$Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z) \tag{1.4.2}$$

olur. Yukarıda verilen (1.4.1) ve (1.4.2) denklemleri kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(Y,\nabla_Z X) + g([Z,X],Y)$$

bulunur. Bu işlem devam ettirilirse

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y,Z) = {} & Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) + g(Z,[X,Y]) \\ & + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z]) - g(\nabla_X Y,Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada Koszul formülü adı verilen

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y,Z) = {} & \frac{1}{2}\{Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ & + g(Z,[X,Y]) + g(Y,[Z,X]) - g(X,[Y,Z])\} \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

denklemi bulunur. Bu ifadede M üzerinde (1.4.1) ve (1.4.2) şartlarını sağlayan her ∇ konneksiyonu için sağlandığından ve g Riemann metriği pozitif tanımlı olduğundan ∇ tektir.

X ve Y seçilmiş vektör alanları olmak üzere ∇ konneksiyonu (1.4.3) ile tanımlansın. Bu durumda kolayca görülebilir ki ∇ lineerdir. Doğrudan işlemlerle (1.4.1) ve (1.4.2) şartlarının sağlandığı da görülür.

Böylece Teorem 1.4.1. de verilen konneksiyona Levi-Civita konneksiyon, Riemann konneksiyonu veya metrik konneksiyon denir.

1.4.1. Eğrilikler

Bu alt bölümde, bir Riemann manifoldu üzerinde tanımlı olan Riemann Christoffel eğrilik tensör alanı, Ricci tensör alanı ve skalar eğrilik kavramları tanıtılacaktır. Ayrıca bir manifoldun kesit eğriliği tanımlanarak, manifoldun sabit kesit eğrilikli olma durumları tartışılacaktır.

Tanım 1.4.2. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇, g metriğinin bir Riemann konneksiyonu olsun. Bu durumda herhangi bir $X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$\begin{array}{rlcl} R: & \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) & \to & C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ & (X,Y,Z,W) & \to & R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W) \end{array}$$

olarak tanımlı 4. mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir. Burada

$$\begin{array}{rlcl} R: & \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) & \to & \chi(M) \\ & (X,Y,Z) & \to & R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \end{array}$$

ifadesine de Riemann eğrilik tensörü denir. Böylece, R Riemann eğrilik tensörü için

$$R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z),$$

$$R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W),$$

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y = 0,$$

$$R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y),$$

özellikleri sağlanır [37].

Tanım 1.4.3. (M, g) *n*-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. $\mathcal{P}$, T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu bir altuzayı ve $\mathcal{P}$ düzlemini geren vektörler x ile y olmak üzere

$$K(\mathcal{P}) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2} \tag{1.4.4}$$

değerine M manifoldunun $\mathcal{P}$ düzlemine göre kesit eğriliği denir [53].

Tanım 1.4.4. (M, g) *n*-boyutlu bir Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM 'deki herhangi bir ortonormal baz $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ile gösterilmek üzere, herhangi bir $X, Y \in T_pM$ için S Ricci tensörü

$$S(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} R(e_j, X, Y, e_j) \tag{1.4.5}$$

ile tanımlanır. Ayrıca yukarıda verilen (1.4.5) ifadesinden açıktır ki $\forall\ X, Y \in T_pM$ için

$$S(X,Y) = S(Y, X)$$

dir, yani S Ricci tensörü simetriktir. $\forall\ X \in T_pM$ için Ricci eğriliği $Ric(X)$ ile gösterilir ve

$$Ric(X) = S(X, X) \tag{1.4.6}$$

ile tanımlanır. Diğer yandan, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ için,

$$\begin{aligned} Ric(e_i) &= S(e_i, e_i) = \sum_{j=1}^{n} R(e_j, e_i, e_i, e_j) = \sum_{j=1}^{n} R(e_i, e_j, e_j, e_i) \\ &= \sum_{i \neq j}^{n} R(e_i, e_j, e_j, e_i) = \sum_{i \neq j}^{n} K_M(e_i \wedge e_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadede $X = e_1$ olarak alınırsa,

$$Ric(X) = \sum_{j=2}^{n} K_M(e_i \wedge e_j) \tag{1.4.7}$$

bulunur [58].

Tanım 1.4.5. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, $p \in M$ noktasındaki skalar eğrilik

$$\tau(p) = \sum_{1 \le i < j \le n} K_M(e_i \wedge e_j) \tag{1.4.8}$$

ile tanımlanır. Burada $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, T_pM' nin herhangi bir ortonormal bazını ve $K_M(e_i \wedge e_j)$, $p \in M$ noktasında e_i ve e_j ortonormal vektörleri tarafından gerilen düzlem kesitinin eğriliğini göstermektedir. Özel olarak, 2-boyutlu bir Riemann manifoldu için, skalar eğrilik aynı zamanda manifoldun Gauss eğriliğine eşittir. Ayrıca, burada

$$\tau(p) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{i \ne j=1}^{n} K_M(e_i \wedge e_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} S\left(e_i, e_i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Ric(e_i) \tag{1.4.9}$$

yazılabilir. Bazı kaynaklarda skalar eğrilik

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

ile de tanımlanır. Bu durumda $r = 2\tau$ dir [58].

Teorem 1.4.2. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. Eğer p noktasındaki bütün kesit eğrilikleri biliniyorsa p noktasındaki Riemann eğrilik tensörü tek olarak bilinir [53].

Yukarıda verilen Teorem 1.4.2' ye göre T_pM deki bütün $\mathcal{P}$ düzlemleri için elde edilen kesit eğriliği manifoldun eğrilik tensörünü belirlemektedir. Kesit eğriliği 2. mertebeden kovaryant tensör olduğundan, 4. mertebeden olan eğrilik tensörüne büyük kolaylık sağlar. Eğer her $p \in M$ noktasındaki M manifoldunun tüm $\mathcal{P}$ düzlemleri için $K_{\mathcal{P}}$ sabit ise manifolda sabit eğrilikli uzay veya sadece uzay formu denir. Öklidyen uzayda kesit eğriliği Gauss eğriliğine karşılık geldiğinden aşağıdaki iki örnek sıralanabilir [53].

Örnek 1.4.2. $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayı, 0 kesit eğrilikli bir uzay formudur [53].

Örnek 1.4.3. $\mathbb{R}^{n+1}$ de $S^n(r)$ küresi, $\dfrac{1}{r^2}$ eğrilikli bir uzay formudur [53].

Sonuç 1.4.1. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Eğer M manifoldu k sabit eğrilikli ise, her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$R(X,Y)Z \quad = \quad k(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

şeklindedir [53].

1.5. Riemann Altmanifoldlar

Bu kısımda, yüzeyler teorisinin genelleştirilmişi olan bir Riemann manifoldunun altmanifoldu tanımlanacak ve bu altmanifoldun geometrisi incelenecektir. Bu altmanifoldlar için bazı temel teoremler ve sonuçlar verilecektir.

1.5.1. İndirgenmiş Konneksiyon ve İkinci Temel Form

Bu alt bölümde altmanifold üzerine indirgenmiş olan metrik tensör ve konneksiyon gibi bazı geometrik yapılar incelenecektir. Ayrıca altmanifoldlar için Weingarten temel tensörü ve ikinci temel form kavramlarının tanımları verilecek ve onların özellikleri incelenecektir.

Tanım 1.5.1. (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ birer Riemann manifoldları olsunlar. Bu durumda

$$\varphi^*(\tilde{g}) \quad = \quad g \tag{1.5.1}$$

olacak şekilde metrik tensörleri koruyan $\varphi \; : \; M \;\to\; N$ diffeomorfizmine bir izometri denir. Herhangi bir $p \in M$ ' nin bir $U \subset M$ komşuluğu için

$$g_p(u,v) \quad = \quad \tilde{g}(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v)), \qquad \forall u,v \in T_pM$$

ise $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümüne bir lokal izometri ve M ile N Riemann manifoldlarına da lokal izometriktir, denir [33].

Tanım 1.5.2. (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ birer Riemann manifoldları ve $\varphi : M \rightarrow N$ dönüşümü verilsin. Eğer her $p \in M$ için, $\varphi_{*p} : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ türev dönüşümü birebir ise φ' ye bir immersiyon denir. Ayrıca φ immersiyonu bir homeomorfizm ise yani φ' nin tersi var ve sürekli ise φ' ye bir embedding denir.

$\varphi : M \rightarrow N$ immersiyonu için daima $boyM \leq boyN$ dir. Böylece $boyN - boyM$ farkına φ immersiyonunun ek boyutu denir [33].

Tanım 1.5.3. (M,g) ve $(N,\tilde{g})$ birer Riemann manifoldları ve $\varphi : M \rightarrow N$ immersiyonu verilsin. Bu durumda, her $u,v \in T_pM$ ve $p \in M$ için

$$g_p(u,v) = \tilde{g}_{\varphi(p)}(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v)) \qquad (1.5.2)$$

ise φ' ye bir izometrik immersiyon ve M' ye N manifoldunun bir altmanifoldu denir.

(M,g) ve $(N,\tilde{g})$ Riemann manifoldları arasındaki bir izometrik immersiyon $\varphi : M \rightarrow N$ olsun. Bu durumda, her bir $p \in M$ için p noktasının öyle bir U komşuluğu vardır ki $\varphi : U \rightarrow N$ bir embeddingdir ve her $u \in T_pM$ vektörüne bir $\varphi_*(u) \in T_{\varphi(p)}N$ vektörü karşılık gelir. Bu nedenle her $u \in T_pM$ vektörü $\varphi_*(u) \in T_{\varphi(p)}N$ ile gösterilebilir. Böylece $\varphi_*(T_pM)$, $T_{\varphi(p)}N$' nin bir non-dejenere alt uzayı olup

$$T_{\varphi(p)}N = T_pM \oplus T_pM^{\perp} \qquad (1.5.3)$$

olarak yazılabilir. Burada $T_{\varphi(p)}N$' nin non-dejenere alt uzayı olan $T_pM^{\perp}$ uzayına $p \in M$ de M' nin normal uzayı denir. Yukarıda verilen (1.5.3) ifadesi göz önüne alınarak her $v \in T_{\varphi(p)}N$ vektörü

$$v = \tan v + \text{nor}\, v \qquad (1.5.4)$$

olacak şekilde tek türlü yazılabilir. Burada $\tan v \in T_pM$ ve $\operatorname{nor} v \in T_pM^{\perp}$ dir. Ayrıca

$$\tan v \ : \ T_{\varphi(p)}N \ \to \ T_pM \quad \text{ve} \quad \operatorname{nor} v \ : \ T_{\varphi(p)}N \ \to \ T_pM^{\perp} \tag{1.5.5}$$

ortogonal projeksiyonları lineerdir [33].

Diğer yandan N, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M, N Riemann manifoldunda gömülü olan m-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda M, N üzerinden indirgenmiş olan bir Riemann metriği ile birlikte N manifoldunun bir Riemann altmanifoldudur. Burada $TM^{\perp}$, M' ye dik olan normal demetini ve g, M ve N üzerindeki Riemann metriklerini göstersin. Ayrıca $\tilde{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla N ve M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonlarını göstermek üzere herhangi bir $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y \ = \ \nabla_X Y + \sigma(X,Y), \tag{1.5.6}$$

ayrışımı yazılabilir. Burada $\sigma \ : \ \chi(M) \times \chi(M) \ \to \ \chi(M)^{\perp}$ şeklinde tanımlı olan bir normal demetidir. Böylece (1.5.6) eşitliği ile tanımlı olan ifadeye Gauss formülü ve σ' ya ise M Riemann altmanifoldunun ikinci temel formu denir [5].

$X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^{\perp}$ için $-A_V X$ ve $\nabla^{\perp}_X V$, $\tilde{\nabla}_X V$' nin sırasıyla teğet ve normal kısımlarını göstermek üzere

$$\tilde{\nabla}_X V \ = \ -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{1.5.7}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece herhangi bir $V \in \chi(M)^{\perp}$ için

$$g(\sigma(X,Y),V) \ = \ g(A_V X, Y) \tag{1.5.8}$$

eşitliğini sağlayan $A_V : \chi(M) \to \chi(M)$ bir lineer operatörü mevcuttur. A_V lineer operatörüne V normal kesitine göre Weingarten temel tensörü ve (1.5.7) ile verilen ifadeye ise Weingarten formülü denir [5].

Diğer yandan, $\nabla^{\perp}$ operatörü $TM^{\perp}$ normal demeti üzerinde bir lineer operatör tanımlar ve bu $\nabla^{\perp}$ diferensiyel operatörüne M nin normal konneksiyonu denir.

R ve $\tilde{R}$ sırasıyla M ve N manifoldları üzerindeki eğrilik tensörlerini göstermek üzere, herhangi bir $X,Y,Z,U \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,U) &= g(R(X,Y)Z,U) + g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,U)) \\ &\quad -g(\sigma(Y,Z),\sigma(X,U)) \end{aligned} \tag{1.5.9}$$

elde edilir ve (1.5.9) ile verilen ifadeye Gauss denklemi denir. Ayrıca M manifoldunun normal demetinin eğrilik tensörü

$$R^{\perp}(X,Y)N = \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}N - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}N - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}N \tag{1.5.10}$$

ile tanımlanır. Burada eğer $R^{\perp}=0$ ise M manifoldunun $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna aşikar (trivial) veya flat denir [5].

Gauss ve Weingarten formülleri kullanılarak, herhangi bir $X,Y \in \chi(M)$ ve $U,V \in \chi(M)^{\perp}$ için,

$$g(\tilde{R}(X,Y)V,U) = g(R^{\perp}(X,Y)V,U) + g([A_U,A_V]X,Y) \tag{1.5.11}$$

bulunur. Yukarıdaki gibi verilen (1.5.11) eşitliğine Ricci denklemi denir [5].

Tanım 1.5.4. M bir C^{∞}-manifold ve D, M üzerinde $r-$boyutlu bir distribüsyon olsun. $\bar{M}$, M manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, eğer $\bar{M}$ nin her p noktasında $\bar{M}$ manifoldunun tanjant uzayı ile D_p aynı ise $\bar{M}$ ' ye D distribüsyonunun integral manifoldu denir. Yani

$$f : \bar{M} \rightarrow M$$

bir imbedding olmak üzere $\forall p \in \bar{M}$ için

$$f_*(T_p\bar{M}) = D_p$$

dir. Eğer D distribüsyonunun $\bar{M}$ manifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun maksimal integral manifoldu denir [53].

Örnek 1.5.1. Bir vektör alanına ait bir integral eğrisi 1-boyutlu distribüsyon olan vektör alanının integral manifoldudur [53].

Tanım 1.5.5. M bir diferensiyellenebilir manifold ve $\bar{M}$, M manifoldununun bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall p \in \bar{M}$ için D distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna integrallenebilirdir denir [53].

Tanım 1.5.6. N n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M, N Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda, eğer ikinci temel form sıfır, yani $\sigma = 0$ veya buna denk olarak $\forall\ V \in \chi(M)^{\perp}$ için $A_V = 0$ ise M altmanifolduna N ’ de total jeodeziktir denir [5].

Tanım 1.5.7. N n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M, N Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Burada α diferensiyellenebilir bir fonksiyonu ve I, $\chi(M)$ üzerinde birim dönüşümü göstermek üzere $\forall\ V \in \chi(M)^{\perp}$ için, eğer

$$A_V = \alpha I$$

ise M altmanifolduna V normal kesitine göre N de total umbiliktir denir [5].

Tanım 1.5.8. N n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de N Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $x \in M$ noktası için $\{e_1, e_2, ..., e_m\}$, T_xM de bir ortonormal bazı göstermek üzere

$$\dot{I}z(\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \{\sigma(e_i, e_i)\} \tag{1.5.12}$$

eşitliğine σ ikinci temel formunun izi denir. Ayrıca σ ikinci temel formunun izi baz seçiminden bağımsızdır. Ayrıca yukarıda (1.5.12) ifadesinde verilen $\dot{I}z(\sigma)$ kullanılarak,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{m} \dot{I}z(\sigma) \tag{1.5.13}$$

yazılabilir. Bu şekilde tanımlanan $\mathcal{H}$ ' ya M manifoldunun ortalama eğrilik vektörü denir. Eğer $\mathcal{H}=0$ ise M ' ye N Riemann manifoldunun bir minimal altmanifoldu denir [5].

Bu durumda total umbilik altmanifoldlar için aşağıdaki karakterizasyon verilebilir:

Teorem 1.5.1. N n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve M de N Riemann manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\mathcal{H}$, altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanını göstermek üzere, M altmanifoldunun total umbilik olması için gerek ve yeter şart $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için

$$\sigma(X,Y) = g(X,Y)\mathcal{H} \tag{1.5.14}$$

olmasıdır [50].

T_pM tanjant uzayının bir ortonormal bazı $\{e_1,e_2,...,e_m\}$ ve e_r, $T_p^{\perp}M$ normal uzayının $\{e_{m+1},...,e_n\}$ ortonormal bazına ait olsun. Bu durumda

$$\sigma_{ij}^r = g(\sigma(e_i,e_j),e_r) \quad \text{ve} \quad \|\sigma\|^2 = \sum_{i,j=1}^{m} g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j))$$

tanımlanır. Diğer yandan, K_{ij} ve $\tilde{K}_{ij}$, sırasıyla M ve N manifoldlarının $p\in M$ noktasındaki e_i ve e_j vektörleri tarafından gerilen düzlem kesitinin eğriliğini göstersin. Böylece K_{ij} ve $\tilde{K}_{ij}$, $p\in M$ noktasında $Span\{e_i,e_j\}$ ' nin sırasıyla "içsel" ve "dışsal" kesit eğrilikleridir. Gauss denkleminden,

$$K_{ij} = \tilde{K}_{ij} + \sum_{r=m+1}^{n} (\sigma_{ii}^r\sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2) \tag{1.5.15}$$

yazılabilir. (1.5.15) den

$$2\tau(p) = 2\tilde{\tau}(T_pM) + n^2\|\mathcal{H}(p)\|^2 - \|\sigma\|^2 \tag{1.5.16}$$

elde edilir, burada

$$\tilde{\tau}(T_pM) = \sum_{1\le i<j\le m} \tilde{K}_{ij}$$

ile N esas manifoldunda T_pM ' nin m-düzlem kesitinin skalar eğriliği gösterilmektedir. Böylece $\tau(p)$ ve $\tilde{\tau}(T_pM)$ ' ye sırasıyla altmanifoldun p noktasındaki "içsel" ve "dışsal" skalar eğrilikleri denilebilir.

Ayrıca ikinci temel form ve ortalama eğrilik arasındaki ilişki

$$\begin{aligned}\|\sigma\|^2 &= \frac{1}{2}n^2\|\mathcal{H}(p)\|^2 + \frac{1}{2}\sum_{r=m+1}^{n}(\sigma_{11}^r - \sigma_{22}^r - \ldots - \sigma_{mm}^r)^2 + 2\sum_{r=m+1}^{n}\sum_{j=2}^{m}(\sigma_{1j}^r)^2 \\ &\quad -2\sum_{r=m+1}^{n}\sum_{2\le i<j\le m}(\sigma_{ii}^r\sigma_{jj}^r - (\sigma_{ij}^r)^2)\end{aligned} \tag{1.5.17}$$

şeklindedir [58].

[45] çalışması göz önüne alındığında aşağıdaki lemma verilebilir:

Lemma 1.5.1. b ve c birer negatif olmayan reel sayılar olsun. Bu durumda b ve c sayılarının aritmetik ve geometrik ortalamaları kullanılırsa

$$\frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc} \tag{1.5.18}$$

eşitsizliği söz konusudur. Yukarıda verilen (1.5.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $b=c$ olmasıdır.

Diğer yandan aşağıdaki lemmalar verilebilir:

Lemma 1.5.2. Eğer, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n>1)$ reel sayılar ise, bu durumda

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \le \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2, \tag{1.5.19}$$

eşitsizliği vardır. (1.5.19) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$ olmasıdır [58].

Lemma 1.5.3. $n > k \geq 2$ olmak üzere $a, a_1, a_2, ..., a_n$ reel sayıları için,

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = (n-k+1)(\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 + a)$$

olmak üzere

$$2\sum_{1\leq i<j\leq k} a_i a_j \geq a, \tag{1.5.20}$$

eşitsizliği vardır. Yukarıda verilen (1.5.20) ifadesinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$a_1 + a_2 = ... = a_k = a_{k+1} = ... = a_n$$

olmasıdır [58].

1.6. Riemann Submersiyonlar

Bu alt bölümde Riemann submersiyonların geometrisi verilecektir. Bunun için öncelikle Riemann submersiyonların tanımı verilecek ve bunlarla ilgili çeşitli örnekler sunulacaktır. Ayrıca O'Neill tensörleri tanımlanarak ve onların özellikleri incelenecektir. Daha sonra ise Riemann submersiyonların total uzayı ve baz uzayının eğrilikleri arasındaki ilişkiler ortaya konulacaktır.

Öncelikle submersiyon kavramı verilecektir.

Tanım 1.6.1. M ve B diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi : M \to B$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer $p \in M$ noktasındaki $\pi_* : T_pM \to T_{\pi(p)}B$ türev dönüşümü örten ise, bu durumda π dönüşümüne bir submersiyon denir [24].

(M, g) ve (B, g') manifoldları arasında tanımlı olan $\pi : (M, g) \to (B, g')$ dönüşümü bir submersiyon olsun. Herhangi bir $x \in B$ üzerindeki lif, $\pi^{-1}(x)$ olmak üzere $r = m - n$ şartını sağlayan M ' nin kapalı $r-$boyutlu bir altmanifoldudur. Burada $p \in M$

için $V_p = \text{çek}\,\pi_{*p}$ ile gösterildiğinde π dönüşümünün lifleri ile belirlenen ve M manifoldunun bir folasyonuna karşılık gelen V integrallenebilir distribüsyonu elde edilir. Burada her bir V_p ’ ye $p \in M$ noktasındaki dikey uzay, V ’ ye dikey distribüsyon ve V ’ nin kesitlerine ise dikey vektör alanları denir.

Diğer yandan H, g Riemann metriği tarafından belirlenen V dikey distribüsyonunun bir tamamlayan distribüsyonu olsun. Böylece herhangi bir $p \in M$ noktasındaki ortogonal ayrışım

$$T_p(M) \;=\; V_p \oplus H_p$$

şeklindedir. Burada H_p ’ ye, yani H yatay distribüsyonunun kesitlerine $p \in M$ noktasındaki yatay uzay denir. Yani Herhangi bir $E \in \chi(M)$ için vE ve hE sırasıyla E vektör alanının dikey ve yatay bileşenlerini göstermektedir [29].

Teorem 1.6.1. $\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir submersiyon ve M manifoldunun dikey distribüsyonu V olsun. Bu durumda $\pi(p)=x$ ve $p \in M$ için her V_p dikey distribüsyonu $\pi^{-1}(x)$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile çakışır [53].

İspat. $T_p\pi^{-1}(x)$ de bir v vektörü ve

$$c(0)=p, \quad c'(0)=v$$

olacak şekilde

$$c:[0,1]\to\pi^{-1}(x)$$

eğrisi seçilebilir, bu durumda $(\pi\circ c)(t)=x, \quad t\in[0,1]$ için

$$\pi_*(c'(0)) = (\pi\circ c)_*\frac{d}{dt} = 0$$

elde edilir. Buradan $v=c'(0)\in V_p$ bulunur. O halde $T_p\pi^{-1}(x)$, V_p ’ nin $r=(m-n)$-boyutlu alt uzayına dönüşür. Boyutların eşitliğinden

$$V_p = T_p\pi^{-1}(x)$$

olur. Böylece $x \in M$ noktasında, M Riemann manifoldu

$$T_xM = V_x \oplus H_x = V_x \oplus V_x^{\perp}$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

Submersiyona bir örnek aşağıdaki şekilde verilebilir:

Örnek 1.6.1.

$$\begin{array}{llll} \pi & : & \mathbb{R}^4 & \to \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \to \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_3,x_2+x_4) \end{array}$$

dönüşümü verilsin. Bu durumda görülebilir ki $rank\pi_* = 2$ olur. Böylece π dönüşümü bir submersiyondur ve lifleri

$$Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_3} \quad , \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_4}$$

vektörleri tarafından gerilir. Yani Z_1 ve Z_2 birer dikey vektörlerdir [29].

Tanım 1.6.2. (M,g) ve (B,g') birer Riemann manifoldu olmak üzere, eğer

$$\pi \ : \ (M,g) \ \to \ (B,g')$$

diferensiyellenebilir dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa π dönüşümüne bir Riemann submersiyon denir.

1) π dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

2) Her $p \in M$ noktasında π_{*_p} dönüşümü $X_p \in \chi^h(M)$ yatay vektörlerinin uzunluğunu korur.

Yukarıda verilen tanım göz önüne alındığında birinci şart π dönüşümünün submersiyon olmasını garantilerken, ikinci şart ise $p \in M$ noktasında π_{*_p} türev dönüşümünün H_p yatay uzayından $T_{\pi(p)}B$ üzerine bir lineer izometri olduğunu göstermektedir. Yani $p \in M$ noktasında herhangi bir $X,Y \in \chi^h(M)$ için

$$g_p(X,Y) = g'(\pi_{*_p}X, \pi_{*_p}Y)$$

şeklindedir [53].

Riemann submersiyonlara bir örnek aşağıdaki gibi verilebilir:

Örnek 1.6.2. $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ olmak üzere

$$\begin{array}{llll} \pi & : & \mathbb{R}^4 & \to \mathbb{R}^2 \\ & & (x_1,x_2,x_3,x_4) & \to (x_1\cos\alpha + x_3\sin\alpha, x_2\sin\alpha + x_4\cos\alpha) \end{array}$$

dönüşümü verilsin. Burada $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ ile $\mathbb{R}^4$ Öklidyen uzayın bir koordinat sistemi gösterilmiştir. Doğrudan işlemlerle

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla rank $\mathcal{J} = boy(\mathbb{R}^2) = 2$ dir. Yani π bir submersiyondur. Diğer yandan

$$V = çek\pi_* = Sp\left\{ X_1 = \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} - \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_3},\ X_2 = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_2} - \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

ve

$$V^{\perp} = H = Sp\left\{ X_3 = \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_3},\ X_4 = \sin\alpha \frac{\partial}{\partial x_2} + \cos\alpha \frac{\partial}{\partial x_4} \right\}$$

elde edilir. Ayrıca kolayca görülebilir ki

$$\pi_*(X_3) = \frac{\partial}{\partial y_1} \quad , \quad \pi_*(X_4) = \frac{\partial}{\partial y_2}$$

dir, burada $\{y_1, y_2\}$, $\mathbb{R}^2$ Öklidyen uzayının bir koordinat sistemidir. Böylece $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerindeki iç çarpımlar g ve g' ile gösterilirse

$$g(X_3, X_3) = g'(\pi_*(X_3), \pi_*(X_3)) = 1$$

ve

$$g(X_4, X_4) = g'(\pi_*(X_4), \pi_*(X_4)) = 1$$

bulunur. Bu ise π dönüşümünün bir Riemann submersiyon olduğunu gösterir [53].

Aşağıdaki lemma bir Riemann submersiyonun temel özelliklerini göstermektedir.

Lemma 1.6.1. (M, g) ve (B, g'), sırasıyla ∇ ve ∇' Levi-Civita konneksiyonlarına sahip birer Riemann manifoldu olmak üzere

$$\pi : (M, g) \to (B, g')$$

bir Riemann submersiyon olsun. M üzerindeki X, Y temel vektör alanlarına π-bağlı vektör alanları X', Y' olmak üzere

1. $g(X, Y) = g'(X', Y') \circ \pi$,
2. $h[X, Y]$ temel vektör alanı, $[X', Y']$ vektör alanına π-bağlıdır,
3. $h(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı ve $\nabla'_{X'} Y'$ π-bağlıdır,

4. Herhangi bir $V \in \chi^{v}(M)$ için, $[X,V]$ dikey vektör alanıdır [53].

1.6.1. Riemann Submersiyonlar İçin Temel Tensörler

Burada Riemann altmanifoldlarda Gauss ve Weingarten formüllerinin oynadığı role benzer rolü Riemann submersiyonlarda oynayan temel tensörleri verilecek onların ve özellikleri incelenecektir.

(M,g) ve (B,g') birer Riemann manifoldu ve $\pi : (M,g) \rightarrow (B,g')$ bir Riemann submersiyon olsun. π Riemann submersiyonu, M üzerinde (1,2)-mertebeli T ve A temel tensör alanları belirler. Bu tensör alanlarına π Riemann submersiyonun temel tensör alanları, O'Neill tensörleri veya π dönüşümünün invaryantları denir. T ve A temel tensör alanları $v:\chi(M)\rightarrow\chi^{v}(M)$ ve $h:\chi(M)\rightarrow\chi^{h}(M)$ dikey ve yatay projeksiyonları aracılığıyla, herhangi bir $E,F \in \chi(M)$ için,

$$T(E,F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF \tag{1.6.1}$$

$$A(E,F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF \tag{1.6.2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ∇, (M,g) Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonunu göstermektedir. Yukarıda verilen tanımdan aşağıdaki özellikler kolayca görülebilir. Yani herhangi bir $E \in \chi(M)$ için T_E ve A_E lineer operatörlerdir ve T_E, A_E operatörleri yatay ve dikey alt uzayların rollerini değiştirir. Böylece T ve A sırasıyla dikey ve yatay tensör alanlarıdırlar. Yani $E \in \chi(M)$ için $T_E = T_{vE}$ ve $A_E = A_{hE}$ dir [29].

Lemma 1.6.2. Herhangi bir $E,F,G \in \chi(M)$ için,

$$g(T_E F, G) + g(T_E G, F) = 0, \tag{1.6.3}$$

$$g(A_E F, G) + g(A_E G, F) = 0, \tag{1.6.4}$$

eşitlikleri sağlanır [29].

İspat. Yukarıda verilen (1.6.1) ifadesinden

$$g(T_E G,F)=g(h\nabla_{vE}vG,hF)+g(v\nabla_{vE}hG,vF)$$

dir. Buradan

$$g(T_E G,F)=g(\nabla_{vE}vG,hF)+g(\nabla_{vE}hG,vF)$$

olur. ∇ Levi-Civita konneksiyonu olduğundan

$$g(T_E G,F)=vEg(vG,hF)-g(vG,\nabla_{vE}hF)+vEg(hG,vF)-g(hG,\nabla_{vE}vF)$$

elde edilir. Burada $g(vG,hF)=0$ olduğundan dolayı

$$g(T_E G,F)=-g(vG,\nabla_{vE}hF)+g(hG,\nabla_{vE}vF)$$

olur. Bu ise

$$g(T_E G,F)=-(g(vG,v\nabla_{vE}hF)+g(hG,h\nabla_{vE}vF))$$

demektir. (1.6.1) sağ tarafa uygulanırsa

$$g(T_E G,F)=-g(G,T_E F)$$

elde edilir. Bu ise (1.6.3) ifadesidir. Benzer şekilde (1.6.4) ifadesi de gösterilebilir.

Önerme 1.6.1. Herhangi bir $U,W\in\chi^v(M)$ ve $X,Y\in\chi^h(M)$ için T ve A tensör alanları

$$T_U W=T_W U, \tag{1.6.5}$$

$$A_X Y=-A_Y X=\frac{1}{2}v[X,Y]. \tag{1.6.6}$$

özelliklerini sağlarlar [29].

İspat. (M,g) manifoldunun ∇ Levi-Civita konneksiyonu simetrik olduğundan ve dikey distribüsyon integrallenebilir olduğundan yukarıda verilen (1.6.5) ifadesi doğrudan elde edilir. (1.6.6) eşitliğini göstermek için ise öncelikle herhangi bir $X\in\chi^h(M)$ olmak üzere $A_X X$ 'nin sıfır olduğu gösterilmelidir. Kabul edilsin ki X bir temel vektör alanı olsun. Bu durumda herhangi bir $W\in\chi^v(M)$ için,

$$g(A_X X,W)=g(\nabla_X X,W)=-g(X,\nabla_W X)=-\frac{1}{2}W(g(X,X))=0$$

elde edilir, çünkü her bir lif üzerinde $g(X,X)$ sabittir. Böylece, $A_X X$ bir yatay vektör alanına dönüşecektir ve $A_X X = v(\nabla_X X)$ olduğundan sıfır olmalıdır. Son olarak, eğer $X,Y \in \chi^h(M)$ alınırsa

$$v[X,Y] = v(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = A_X Y - A_Y X = 2A_X Y$$

elde edilir.

Lemma 1.6.3. (M,g) ve (B,g') birer Riemann manifoldları ve

$$\pi \ : \ (M,g) \ \rightarrow \ (B,g')$$

bir Riemann submersiyon olmak üzere $X,Y \in \chi^h(M)$ ve $V,W \in \chi^v(M)$ için,

$$\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W \tag{1.6.7}$$

$$\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X \tag{1.6.8}$$

$$\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V \tag{1.6.9}$$

$$\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X V \tag{1.6.10}$$

eşitlikleri sağlanır, burada $\hat{\nabla}_V W = v\nabla_V W$' dır. Liflere ait diğer geometrik yapılar "$\wedge$" sembolü ile gösterilecektir. Ayrıca X temel vektör alanı ise $[X,V]$ dikey vektör alanı olduğundan,

$$h\nabla_V X = h\nabla_X V = A_X V$$

dir [29].

1.6.2. İnvaryantların Geometrik Anlamları

Yukarıda verilen (1.6.6) eşitliği göz önüne alındığında A temel tensörünün $\chi^h(M) \times \chi^h(M)$ üzerine kısıtlanmışı yatay distribüsyonun integrallenebilirliğini ölçer.

Dahası (1.6.6) eşitliği ve Lemma 1.6.1. ele alınırsa $U \in \chi^{v}(M)$ için, $A_U = 0$, yani $A = 0$ dır. Böylece H yatay distribüsyonu integrallenebilirdir.

Diğer yandan, T temel tensörünün $\chi^{v}(M) \times \chi^{v}(M)$ üzerine kısıtlanmışı ise herhangi bir lifin ikinci temel formuna karşılık gelir. Böylece T temel tensörünün sıfır olmasının anlamı, herhangi bir lifin M manifoldunun bir total jeodezik altmanifolduna karşılık gelmesidir. Ayrıca bunun tersi de doğrudur, yani Lemma 1.6.1 den, $X \in \chi^{h}(M)$ için $T_X = 0$ olmasıdır [29].

Önerme 1.6.2. (M, g) ve (B, g') birer Riemann manifoldu olmak üzere

$$\pi \; : \; (M, g) \; \rightarrow \; (B, g')$$

bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) Eğer A paralel ise, $A = 0$ dır.

ii) Eğer T paralel ise, $T = 0$ dır.

Bir Riemann submersiyonunun lifleri tanım manifoldunun altmanifoldları olduklarından altmanifoldlar için tanımlanan kavramlar lifler için de verilebilir. Eğer lifler total umbilik ise, yani $U, V \in \chi^{v}(M)$ için

$$T_U V \;=\; g(U,V)\mathcal{H} \tag{1.6.11}$$

sağlanıyorsa submersiyona total umbilik liflere sahip bir Riemann submersiyon denir. Burada $\mathcal{H}$ ile liflerin ortalama eğrilik vektör alanı gösterilmektedir. $\{U_j\}_{1 \le j \le r}$, V dikey uzayının bir yerel ortonormal bazı olmak üzere herhangi bir lifin ortalama eğrilik vektör alanı

$$\mathcal{H} \;=\; \frac{1}{r} iz(T) \;=\; \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} T_{U_j} U_j \tag{1.6.12}$$

ile tanımlanır. Eğer $\mathcal{H} = 0$ ise submersiyona minimal liflere sahip Riemann submersiyonu denir [53].

1.6.3. Riemann Submersiyonlar İçin Temel Denklemler ve Eğrilikler

Bu alt bölümde bir Riemann submersiyonun total uzayı ile yatay ve dikey uzayların eğrilikleri arasındaki bağıntılar ortaya konulmuştur. (M,g) ve (B,g') birer Riemann manifoldu ve $\pi : (M,g) \to (B,g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. $\forall\, U,V,W \in \chi^v(M)$ için (1.6.7) denkleminden,

$$R(U,V)W = \nabla_U T_V W + \nabla_U \hat{\nabla}_V W - \nabla_V T_U W - \nabla_V \hat{\nabla}_U W - T_{[U,V]}W - \hat{\nabla}_{[U,V]}W$$

yazılabilir. Burada (1.6.7) - (1.6.10) kullanılırsa ve yukarıdaki ifadenin her iki tarafı $F \in \chi^v(M)$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$g(R(U,V)W,F) = g(\hat{R}(U,V)W,F) - g(T_U F, T_V W) + g(T_V F, T_U W) \qquad (1.6.13)$$

elde edilir. Benzer hesaplamalar diğer vektör alanları için de yapılırsa, sonuç olarak

$$g(R(U,V)W,X) = g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X) \qquad (1.6.14)$$

bulunur. Yukarıda elde edilen (1.6.13) ve (1.6.14) ifadeleri submersiyonlar için Gauss ve Codazzi denklemleridir.

(M,g) ve (B,g') birer Riemann manifoldları ve $\pi : (M,g) \to (B,g')$ bir Riemann submersiyonu olsun. H, (M,g) manifoldunun yatay distribüsyonunu ve R', B manifoldunun eğrilik tensör alanını göstermek üzere $p \in M$ için $R'_{\pi(p)}(\pi_*(p)X_p, \pi_*(p)Y_p)\pi_*(p)Z_p$ vektörünün yatay gönderileni $R^*_p(X_p, Y_p)Z_p$ olsun. Daha açık olarak herhangi bir $X,Y,Z \in \chi^h(M)$ için

$$\pi_*(R^*(X,Y)Z) = R'(\pi_* X, \pi_* Y)\pi_* Z$$

ile tanımlanabilir. Ayrıca herhangi bir $X,Y,Z \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} R^*(X,Y,Z,H) &= g(R^*(X,Y,Z),H) \\ &= R'(\pi_* X, \pi_* Y, \pi_* Z, \pi_* H) \circ \pi \end{aligned} \qquad (1.6.15)$$

dir. Diğer yandan, herhangi bir X,Y,Z vektör alanlarını temel vektör alanları ve $[X,Y]$, $[Y,Z]$, $[Z,X]$ braketlerini dikey olarak kabul edebiliriz. Ayrıca $h\nabla_X Y$ vektör alanı ile $\nabla'_{X'}Y'$ vektör alanları π-bağlı olduklarından, $\nabla'_{X'}Y'$ vektör alanının yatay gönderileni $\nabla^*_X Y$ ile gösterilirse, (1.6.7) ve (1.6.8) denklemlerinden

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,H) &= g(R^*(X,Y)Z,H)+2g(A_Z H, A_X Y) \\ &\quad +g(A_Y H, A_X Z)-g(A_X H, A_Y Z) \end{aligned} \tag{1.6.16}$$

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,V) &= -g((\nabla_Z A)_X Y,V)-g(T_V Z, A_X Y)-g(A_X Z, T_V Y) \\ &\quad +g(A_Y Z, T_V X) \end{aligned} \tag{1.6.17}$$

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)V,W) &= g((\nabla_V A)_X Y,W)-g((\nabla_W A)_X Y,V) \\ &\quad +g(A_x V, A_Y W)-g(A_X W, A_Y V) \\ &\quad -g(T_V X, T_W Y)+g(T_W X, T_V Y) \end{aligned} \tag{1.6.18}$$

$$\begin{aligned} g(R(X,V)Y,W) &= -g((\nabla_X T)_V W,Y)+g((\nabla_V A)_X Y,W) \\ &\quad -g(T_V X, T_W Y)+g(A_X V, A_Y W) \end{aligned} \tag{1.6.19}$$

eşitlikleri elde edilir [29].

Aşağıdaki teoremde (1.6.13), (1.6.16) ve (1.6.19) denklemleri yardımıyla M ve B manifoldlarının kesit eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Teorem 1.6.2. (M,g) ve (B,g') birer Riemann manifoldları, $\pi:(M,g)\to(B,g')$ bir Riemann submersiyon olsun. K, K' ve $\hat{K}$ sırası ile M manifoldunun, B manifoldunun ve $p\in M$ noktasından geçen lifin kesit eğriliklerini göstermek üzere $\forall\ X,Y\in\chi^h(M)$ ve $\forall\ U,V\in\chi^v(M)$ ortonormal yatay ve dikey vektörleri için

$$K(U,V) = \hat{K}(U,V)+\|T_U V\|^2-g(T_U U, T_V V) \tag{1.6.20}$$

$$K(X,Y) = K'(X',Y')\circ\pi-3\|A_X Y\|^2 \tag{1.6.21}$$

$$K(X,V) \quad = \quad g((\nabla_X T)_V V, X) + \|T_V X\|^2 - \|A_X V\|^2 \tag{1.6.22}$$

eşitlikleri bulunur [29].

(M,g) ve (B,g') birer Riemann manifoldları ve $\pi\ :\ (M,g)\ \rightarrow\ (B,g')$ bir Riemann submersiyon olsun. Yukarıda verilen (1.6.20), (1.6.21) ve (1.6.22) denklemleri kullanılarak M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki $\tau(p)$ skalar eğriliği

$$\tau(p) \quad = \quad \sum_{1\le i<j\le r} K(U_i,U_j) + \sum_{1\le i<j\le n} K(X_i,X_j) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} K(U_j,X_i) \tag{1.6.23}$$

şeklindedir. Ayrıca herhangi bir lif üzerindeki $\mathcal{H}(p)$ ortalama eğrilik vektör alanı

$$N \quad = \quad r\mathcal{H} \tag{1.6.24}$$

ile verilir, burada

$$N \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} T_{U_j} U_j$$

şeklindedir. $\{U_1,U_2,...,U_r\}$, $\chi^v(M)$' nin bir ortonormal bazını göstermek üzere herhangi bir $E \in \chi(M)$ ve $X \in \chi^h(M)$ için

$$g(\nabla_E N, X) \quad = \quad \sum_{j=1}^{r} g((\nabla_E T)(U_j,U_j), X)$$

eşitliği verilebilir [29].

$\chi^h(M)$ üzerindeki herhangi bir X yatay vektör alanının yatay diverjansı $\breve{\delta}(X)$ ile gösterilmek üzere

$$\breve{\delta}(X) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{X_i} X, X_i) \tag{1.6.25}$$

ile tanımlanır. Burada $\{X_1, X_2,..., X_n\}$, $\chi^h(M)$' nin bir ortonormal bazını göstermektedir. Böylece

$$\breve{\delta}(N) = \sum_{j=1}^{r} g((\nabla_E T)(U_j, U_j), X) \tag{1.6.26}$$

elde edilir [7].

1.7. Lagrangian Riemann Submersiyonlar

Öncelikle aşağıdaki kavramlar verilebilir:

Tanım 1.7.1. M, m-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{F} = \{L_t\}_{t\in I}$, M manifoldunun bağlantılı altkümelerinin bir ailesi olsun. Ayrıca kabul edilsin ki $\mathcal{F}$, M manifoldunun bir parçası olsun, yani $t \neq s$ için

$$M = \bigcup_{t\in I} L_t \quad \text{ve} \quad L_t \cap L_s = \varnothing$$

sağlansın. Burada M üzerinde bir lokal harita (U,φ) ve $n < m$ pozitif sayısı ele alınsın. Bu durumda eğer $t \in I$ için $L_t \cap U \neq 0$ olduğunda φ dönüşümü her bir bağlantılı $L_t \cap U$ nın bileşenini $\mathbb{R}^m$' nin n-plağı üzerine gönderir ise bu durumda (U,φ)'ye n-folasyonlu harita denir. M üzerinde $\mathcal{F}$ ile ilişkili olan n-folasyonlu atlas, M manifoldunu tamamen örten n-folasyonlu haritaların bir topluluğudur. Eğer, M üzerinde bir maksimal $\mathcal{F}$ ile ilişkili olan bir n-folasyonlu atlas varsa bu durumda $\mathcal{F}$' ye n-boyutlu bir folasyon denir. Böylece $\mathcal{F}$' ye M' nin bir n-folasyonu ve $(M,\mathcal{F})$ ikilisine de n-folasyonlu manifold denir [6].

Bir $\mathcal{F}$ folasyonu, herhangi bir manifoldun aynı boyutlu yaprakları olan bağlantılı altmanifoldlarının birleşimi aynı zamanda bu manifoldun ayrışımına karşılık gelir.

Tanım 1.6.2 deki gibi verilen π Riemann submersiyonu aynı zamanda M manifoldu üzerinde bir folasyon tanımlar. Böylece lif demetinin total uzayı π Riemann submersiyonun liflerinin birleşimi, yaprakları olan bir n-folasyondur. Dolayısıyla π Riemann submersiyonun lifleri ile belirlenen $\mathcal{F}$ folasyonunun teğet distribüsyonuna dikey distribüsyon denir ve V ile gösterilir [6].

M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerindeki her x noktasında $T_x(M)$ tanjant uzayının $J^2 = -I$ şartını sağlayan bir J endomorfizmi varsa bu durumda

J tensör alanına M üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı denir. J hemen hemen kompleks yapısı ile donatılmış M manifolduna bir hemen hemen kompleks manifold denir. Aynı zamanda, eğer M üzerinde torsiyonu $\mathcal{T}=0$ ve $\nabla J=0$ şartını sağlayan bir lineer konneksiyon varsa M ' ye bir kompleks manifold denir [63].

M manifoldu J hemen hemen kompleks yapısı ile donatılmış bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer $\forall\ X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(JX,JY) \quad = \quad g(X,Y) \tag{1.7.1}$$

ise bu durumda g Riemann metriğine M üzerinde bir Hermitiyen metrik denir. Hermitiyen metrik ile donatılmış bir hemen hemen kompleks manifolduna hemen hemen Hermitiyen manifold ve benzer şekilde Hermitiyen metrik ile donatılmış bir kompleks manifolda da Hermitiyen manifold denir. Ayrıca (M,J,g) (hemen hemen) Hermitiyen manifoldu üzerinde herhangi bir $X,Y\in\chi(M)$ için

$$\Omega(X,Y)=g(X,JY)$$

şeklinde bir temel 2-form tanımlansın. Eğer Ω kapalı ise yani $d\Omega=0$ ise bu durumda (M,J,g) (hemen hemen) Hermitiyen manifolduna (hemen hemen) Kaehler manifold denir [6].

M , g Hermitiyen metriği ve J hemen hemen kompleks yapısı ile donatılmış bir Hermitiyen manifold ve B ise g' Riemann metriği ile birlikte bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ Riemann submersiyonu için, V dikey distribüsyonu J hemen hemen kompleks yapısına göre anti-invaryant ise yani, $JV \subseteq H$ ise bu durumda π Riemann submersiyonuna bir anti-invaryant submersiyon denir [3, 26, 43, 51, 52, 54, 55, 61].

Diğer yandan, H. M. Taştan'ın [56] çalışması göz önüne alınarak aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 1.7.2. M , kompleks $n-$boyutlu bir g Hermitiyen metriği ve J hemen hemen kompleks yapısı ile donatılmış bir hemen hemen Hermitiyen manifold ve B Riemann manifold olsun. $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir anti-invaryant Riemannian submersiyon olmak üzere, eğer V dikey distribüsyonunun boyutu H yatay distribüsyonunun boyutuna eşit ise yani boy(çekπ_*) = boy(çekπ_*)$^{\perp}$ sağlanırsa, π'ye Lagrangian Riemann submersiyon denir. Bu durumda, M manifoldunun J hemen hemen kompleks yapısı yatay ve dikey distribüsyonları birbirine dönüştürür, yani $JV = H$ ve $JH = V$ dir.

Diğer yandan kompleks geometri ile simplektik geometri arasında yakın bir ilişki vardır. (M, J, g) bir hemen hemen Kaehler manifold olsun. Bu durumda, M üzerindeki Ω temel 2- formu her $E, F \in \chi(M)$ için

$$\Omega(E, F) \;=\; g(E, JF)$$

şartını sağlar. Eğer, Ω temel 2- formu kapalı ve non-dejenere ise (M, Ω) ikilisine bir simplektik manifold denir. Bu durumda, (M, Ω) simplektik manifoldu üzerinde bir J hemen hemen kompleks yapısı ve g Riemann metriği vardır, öyle ki (M, J, g) bir Kaehler manifoldudur. Böylece diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde simplektik yapının olması için gerek ve yeter şart bu manifoldun üzerinde bir hemen hemen Kaehler yapının olmasıdır.

(M, Ω) $2n$-boyutlu bir simplektik manifold ve $\mathcal{F}$, tüm lifleri M'nin birer Lagrangian altmanifoldu olan bir folasyon ve V, $\mathcal{F}$ folasyonunun bir tanjant distribüsyonu olsun. Bu durumda V'nin tüm lifleri TM'nin birer Lagrange altmanifoldları olduklarından dolayı $\mathcal{F}$'ye bir Lagrangian folasyon denir [6].

$\pi : (M, J, g) \to (B, g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

i) $\mathcal{F}$ bir Lagrangian Riemann folasyondur.

ii) π Riemann submersiyonun total uzayı üzerinde bir simplektik yapı vardır [6].

Diğer yandan, [4] çalışması göz önüne alınarak aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 1.7.3. M ve B birer Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi \;:\; (M^m, g) \;\to\; (B^n, g')$$

bir dönüşüm ve ∇ ile $\nabla^{\pi^{-1}TB}$ sırasıyla M manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ve geri-çekme konneksiyonu olsun. Bu durumda, π dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart, $\sigma(\pi)$ tensiyon alanının sıfır olmasıdır. Yani

$$\sigma(\pi) \;=\; \mathrm{iz}_g(\nabla_{\bullet}\pi_* \bullet) \;=\; \sum_{i=1}^{m}(\nabla\pi_*)(e_i, e_i) \;=\; 0, \qquad (1.7.2)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada $\{e_i\}_{i=1,2,...,m}$, M manifoldunun ortonormal bazını göstermektedir. Ayrıca π dönüşümünün ikinci temel formu olan $\nabla\pi_*$, herhangi $E,F\in\chi(M)$ için,

$$(\nabla\pi_*)(E,F) \quad = \quad \nabla_E^{\pi^{-1}TB}\pi_*F-\pi_*(\nabla_E F)\,,$$

şeklinde tanımlanır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR VE BULGULAR

Riemann submersiyonlar, 1966 yılında B. O'Neill tarafından ve 1967 yılında ise A. Gray tarafından tanımlandı [32, 48]. Bu tarihten itibaren Riemann submersiyonlar, iki manifold verildiğinde bunların geometrisini karşılaştırmada etkin bir araç olarak kullanıldı.

Riemann submersiyonlar teorik fizikte ve kinematikte önemli rol oynamaktadır. Özellikle teorik fiziğin en popüler konularından biri olan Kaluza-Klein teorisinde Riemann submersiyonlar geniş bir uygulama alanına sahiptir. Kaluza-Klein teorisi, Einstein'ın genel görelilik teorisi ile Maxwell'in elektromanyetik teorisini birleştirmek için ortaya çıkan bir teoridir. 5-boyutta bu iki teori arasında yakın bir ilişki olduğu da Kaluza-Klein modelde gösterildi. Son zamanlarda bu modelin uzay zaman modeli için boyutun $5+m$ durumu göz önüne alındı ve modelin çözümlerinin ekstra boyutlu uzaydan skalar alanların değer aldığı uzaya olan Riemann submersiyonlar olduğu gösterildi [29].

Riemann submersiyonların bir diğer uygulaması ise C. Altafini tarafından ortaya atılmıştır. C. Altafini, Riemann submersiyonların gereğinden çok serbestlik derecesine sahip robot manipülatörlerin modellenmesinde ve kontrolünde kullanılabileceğini göstermiştir. Robotikte kinematik, hareket inceleme bilimidir. Robot kolu uzuvları referans koordinat çerçevesine göre dönebilir veya ötelenebilir. Uç noktasının koordinatlarının verilmesi durumunda, geriye doğru gidilerek uzuv değişkenleri elde edilebilir. Bu işlem ters kinematik olarak adlandırılır. Altafini Riemann submersiyonlarda yatay gönderilen vektör alanı kavramını robot teoride belli şartlar altında ters kinematik işlemine karşılık geldiğini göstermiştir [2].

2.1. Riemann Submersiyonlar İçin Chen-Tipi Eşitsizlikler

Bu bölümde, herhangi iki Riemann manifold arasında tanımlı olan Riemann submersiyonlar için kesit eğriliği, skalar eğrilik, ortalama eğrilik ve Ricci eğriliği gibi taban manifoldun içsel ve dışsal invaryantlarını içeren bazı eşitsizlikler hesaplanacak ve bu eşitsizlikler yardımıyla submersiyonlar için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

Lemma 2.1.1. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 2\tau(p) &= 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) - \left\|T_{V\times V}\right\|^2 + r^2 \left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2 + 3\left\|A_{H\times H}\right\|^2 \\ &\quad -\breve{\delta}(N) + \left\|T_{V\times H}\right\|^2 - \left\|A_{H\times V}\right\|^2, \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

şeklindedir, burada

$$\hat{\tau}(p) = \sum_{1\le i<j\le r} \hat{K}(U_i, U_j)$$

ve

$$\tau^*(p) = \sum_{1\le i<j\le n} K^*(X_i, X_j)$$

sırasıyla M manifoldunun dikey ve yatay uzaylarının skalar eğriliğini göstermektedir.

İspat. Eğer (1.6.13), (1.6.16) ve (1.6.19) eşitlikleri göz önüne alınırsa ve aşağıdaki eşitlikte yerine konulursa

$$\tau(p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} R(U_i, U_j, U_j, U_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(X_i, X_j, X_j, X_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} R(X_i, U_j, U_j, X_i)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2\tau(p) &= \sum_{i,j=1}^{r} \hat{R}(U_i, U_j, U_j, U_i) - \sum_{i,j=1}^{r}\sum_{s=1}^{n} (T_{ij}^s)^2 + \sum_{i,j=1}^{r}\sum_{s=1}^{n} T_{ii}^s T_{jj}^s + \sum_{i,j=1}^{n} R^*(X_i, X_j, X_j, X_i) \\ &\quad +3\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} (A_{ij}^s)^2 - \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} g((\nabla_{X_i} T)(U_j, U_j), X_i) + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} (T_{ji}^s)^2 \\ &\quad -\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} (A_{ij}^s)^2. \end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca yukarıdaki ifadede (1.6.25) eşitliği göz önüne alınırsa (2.1.1) elde edilir. □

Lemma 2.1.1 kullanılarak aşağıdaki teorem ve sonuçlar doğrudan verilebilir:

Teorem 2.1.1. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\tau(p) \ge 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) - \left\|T_{V\times V}\right\|^2 + r^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2 - \breve{\delta}(N) - \left\|A_{H\times V}\right\|^2 + \left\|T_{V\times H}\right\|^2 \tag{2.1.2}$$

$$2\tau(p) \quad \leq \quad 2\hat{\tau}(p)+2\tau^{*}(p)-\left\|T_{V\times V}\right\|^{2}+r^{2}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2}-\breve{\delta}(N)+\left\|T_{V\times H}\right\|^{2}+3\left\|A_{H\times H}\right\|^{2} \quad (2.1.3)$$

eşitsizlikleri vardır. $\forall p\in M$ için, (2.1.2) ve (2.1.3) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart H yatay distribüsyonun integrallenebilir olmasıdır.

Yukarıdaki Teorem 2.1.1' den aşağıdaki sonuç doğrudan verilebilir:

Sonuç 2.1.1. (M^{m},g) ve $\left(B^{n},g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi:M\rightarrow B$ total jeodezik liflere sahip bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\tau(p) \quad \geq \quad 2\hat{\tau}(p)+2\tau^{*}(p)-\left\|A_{H\times V}\right\|^{2} \quad (2.1.4)$$

$$2\tau(p) \quad \leq \quad 2\hat{\tau}(p)+2\tau^{*}(p)+3\left\|A_{H\times H}\right\|^{2} \quad (2.1.5)$$

şeklindedir. $\forall p\in M$ için, (2.1.4) ve (2.1.5) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart H yatay distribüsyonun integrallenebilir olmasıdır.

Teorem 2.1.2. (M^{m},g) ve $\left(B^{n},g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi:M\rightarrow B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\tau(p) \quad \leq \quad 2\hat{\tau}(p)+2\tau^{*}(p)+r^{2}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2}+3\left\|A_{H\times H}\right\|^{2}-\breve{\delta}(N)-\left\|A_{H\times V}\right\|^{2}+\left\|T_{V\times H}\right\|^{2} \quad (2.1.6)$$

$$2\tau(p) \quad \geq \quad 2\hat{\tau}(p)+2\tau^{*}(p)+r^{2}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2}+3\left\|A_{H\times H}\right\|^{2}-\breve{\delta}(N)-\left\|A_{H\times V}\right\|^{2}-\left\|T_{V\times V}\right\|^{2} \quad (2.1.7)$$

eşitsizlikleri vardır. $\forall p\in M$ için, (2.1.6) ve (2.1.7) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart π Riemann submersiyonunun $p\in M$ noktasından geçen lifin, M Riemann manifoldunun bir total jeodezik altmanifolduna karşılık gelmesidir.

Yukarıdaki Teorem 2.1.2 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.1.2. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon ve H yatay distribüsyon integrallenebilir olsun. Bu durumda,

$$2\tau(p) \quad \leq \quad 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) + \|T_{V\times H}\|^2 + r^2 \|\mathcal{H}(p)\|^2 - \breve{\delta}(N) \tag{2.1.8}$$

$$2\tau(p) \quad \geq \quad 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) - \|T_{V\times V}\|^2 + r^2 \|\mathcal{H}(p)\|^2 - \breve{\delta}(N) \tag{2.1.9}$$

eşitsizlikleri vardır. $\forall p \in M$ için yukarıdaki (2.1.8) ve (2.1.9) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart π Riemann submersiyonunun $p \in M$ noktasından geçen lifin M Riemann manifoldunun bir total jeodezik altmanifolduna karşılık gelmesidir.

Lemma 1.5.1. kullanılarak aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 2.1.3. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 2\tau(p) \quad \leq \quad & 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) - 2\|T_{V\times V}\|\|A_{H\times V}\| + r^2 \|\mathcal{H}(p)\|^2 + 3\|A_{H\times H}\|^2 \\ & -\breve{\delta}(N) + \|T_{V\times H}\|^2 \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

eşitsizliği vardır. $\forall p \in M$ için (2.1.10) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\|A_{H\times V}\| = \|T_{V\times V}\|$ olmasıdır.

Teorem 2.1.4. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 2\tau(p) \quad \geq \quad & 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) + 2\sqrt{3}\|A_{H\times H}\|\|T_{V\times H}\| + r^2 \|\mathcal{H}(p)\|^2 - \|A_{H\times V}\|^2 \\ & -\breve{\delta}(N) - \|T_{V\times V}\|^2 \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

eşitsizliği vardır. $\forall p\in M$ için (2.1.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\|A_{H\times H}\| = \|T_{V\times H}\|$ olmasıdır.

Lemma 1.5.2. göz önüne alınarak aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 2.1.5. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 2\tau(p) \;\le\; & 2\hat{\tau}(p)+2\tau^*(p)-r(1-r)\|\mathcal{H}(p)\|^2+3\|A_{H\times H}\|^2-\breve{\delta}(N) \\ & -\|A_{H\times V}\|^2+\|T_{V\times H}\|^2 \end{aligned} \tag{2.1.12}$$

eşitsizliği vardır. $\forall p\in M$ için (2.1.12) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

i) π Riemann submersiyonunun total umbilik liflere sahip olması,

ii) herhangi bir $i\neq j\in\{1,2,...,r\}$ için $T_{ij}=0$,

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. Burada (2.1.1) eşitliği ele alındığında,

$$\begin{aligned} 2\tau(p) \;=\; & 2\hat{\tau}(p)+2\tau^*(p)-\sum_{s=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}(T_{ii}^s)^2-\sum_{s=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{r}(T_{ij}^s)^2+\sum_{s=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{r}T_{ii}^sT_{jj}^s \\ & +3\|A_{H\times H}\|^2-\breve{\delta}(N)+\|T_{V\times H}\|^2-\|A_{H\times V}\|^2, \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadede (1.5.19) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} 2\tau(p) \;\le\; & 2\hat{\tau}(p)+2\tau^*(p)-\frac{1}{r}\sum_{s=1}^{n}(\sum_{i=1}^{r}T_{ii}^s)^2-\sum_{s=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{r}(T_{ij}^s)^2+r^2\|\mathcal{H}(p)\|^2 \\ & +3\|A_{H\times H}\|^2-\breve{\delta}(N)+\|T_{V\times H}\|^2-\|A_{H\times V}\|^2, \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da (2.1.12) ifadesine denktir. Böylece $\forall p\in M$ için (2.1.12) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$T_{11} = T_{22} = ... = T_{rr} \qquad \text{ve} \qquad \sum_{s=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{r}(T_{ij}^{s})^2 \;=\; 0 \tag{2.1.15}$$

olmasıdır. Dolayısıyla bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 2.1.6. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} 2\tau(p) \quad \geq \quad & 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^{*}(p) - \left\|T_{V\times V}\right\|^2 + r^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2 + \frac{3}{n}\text{iz}(A_{H\times H})^2 \\ & -\breve{\delta}(N) + \left\|T_{V\times H}\right\|^2 - \left\|A_{H\times V}\right\|^2, \end{aligned} \tag{2.1.16}$$

eşitsizliği vardır. $\forall p \in M$ için (2.1.16) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn} \quad \text{ve} \quad \text{herhangi bir } i \neq j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ için } A_{ij} = 0,$$

olmasıdır.

İspat. Bu teoremin ispatı, yukarıda verilen Teorem 2.1.5' in ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

Sonuç 2.1.3. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ total jeodezik liflere sahip bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\tau(p) \quad \geq \quad 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^{*}(p) + \frac{3}{n}\text{iz}(A_{H\times H})^2 \tag{2.1.17}$$

eşitsizliği vardır. (2.1.17) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn} \quad \text{ve} \quad \text{herhangi bir } i \neq j \in \{1, 2, ..., n\} \text{ için } A_{ij} = 0$$

olmasıdır.

Sonuç 2.1.4. $\forall p \in M$ için (2.1.6) - (2.1.9) ve (2.1.12) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart π Riemann submersiyonunun harmonik olmasıdır.

Teorem 2.1.7. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldu olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. $\mathcal{P}$, U_1 ve U_2 dikey vektörlerinin gerdiği düzlemi göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \tau(p) - K_{\mathcal{P}} \quad \leq \quad & \hat{\tau}(p) + \tau^*(p) + \hat{K}_{\mathcal{P}} - \frac{r^2(r-2)}{2(r-1)} \|\mathcal{H}(p)\|^2 + \frac{1}{2} \breve{\delta}(N) \\ & + \frac{1}{2} \|T_{V \times H}\|^2 - \frac{1}{2} \|A_{H \times V}\|^2 + \frac{3}{2} \|A_{H \times H}\|^2 \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

eşitsizliği vardır. $\forall p \in M$ için (2.1.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması gerek ve yeter şart $\chi^v(M)$' nin $\{U_1, U_2, ..., U_r\}$ ve $\chi^h(M)$' nin $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ ortonormal bazları için M manifoldunun dikey uzayının $S_{X_1}, S_{X_2}, ..., S_{X_n}$ şekil operatörlerinin

$$S_{X_1} \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, \qquad \lambda = a + b \tag{2.1.19}$$

ve

$$S_{X_s} \quad = \quad \begin{pmatrix} c_s & d_s & 0 & \dots & 0 \\ d_s & -c_s & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad 2 \leq s \leq n \tag{2.1.20}$$

formunda olmasıdır.

İspat. Eğer

$$w = 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) - 2\tau(p) + \frac{r^2(r-2)}{r-1}\|\mathcal{H}(p)\|^2 + \|T_{V\times H}\|^2 - \|A_{H\times V}\|^2 + 3\|A_{H\times H}\|^2 - \breve{\delta}(N) \tag{2.1.21}$$

yazılır ve bu ifade (2.1.1) eşitliğinde yerine konursa

$$w = \|T_{V\times V}\|^2 - \frac{r^2}{(r-1)}\|\mathcal{H}(p)\|^2 \tag{2.1.22}$$

elde edilir. Diğer yandan, $p \in M$ noktasındaki ortalama eğrilik vektörünün yönü X_1 olarak seçilir ve (2.1.22) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\left(\sum_{i=1}^{r} T_{ii}^1 X_1\right)^2 = (r-1)\left(-w + \sum_{i=1}^{r}(T_{ii}^1)^2 + \sum_{i\neq j=1}^{r}(T_{ij}^1)^2 + \sum_{s=2}^{n}\sum_{i,j=1}^{r}(T_{ij}^s)^2\right) \tag{2.1.23}$$

bulunur. Ayrıca (2.1.23) ifadesinde Lemma 1.5.3 kullanılırsa,

$$T_{11}^1 T_{22}^1 \geq -\frac{w}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{r}(T_{ij}^1)^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n}\sum_{i,j=1}^{r}(T_{ij}^s)^2 \tag{2.1.24}$$

elde edilir. Diğer yandan $\mathcal{P}$, $\chi^v(M)$ üzerindeki U_1 ve U_2 ortonormal vektörlerinin gerdiği 2-düzlem kesitini göstermek üzere (1.6.13) ve (2.1.23) ifadelerinden,

$$\begin{aligned}
K_{\mathcal{P}} &\leq \hat{K}_{\mathcal{P}} + \sum_{s=1}^{n}(T_{12}^s)^2 - \frac{w}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{r}(T_{ij}^1)^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n}\sum_{i,j=1}^{r}(T_{ij}^s)^2 + \sum_{s=2}^{n}T_{11}^s T_{22}^s \\
&\leq \hat{K}_{\mathcal{P}} - \frac{w}{2} + \frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n}\left(T_{11}^s + T_{22}^s\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=2}^{n}\sum_{i,j>2}(T_{ij}^s)^2 \\
&\quad + \sum_{s=1}^{n}\sum_{j>2}^{r}\left((T_{1j}^s)^2 + (T_{2j}^s)^2\right) \\
&\leq \hat{K}_{\mathcal{P}} - \frac{w}{2}
\end{aligned} \tag{2.1.25}$$

yazılabilir. Bu ise (2.1.18) ifadesine denktir. Ayrıca $\forall p \in M$ için (2.1.18) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
\sum_{s=2}^{n}\left(T_{11}^{s}+T_{22}^{s}\right)^{2} &= 0,\\
\sum_{s=1}^{n}\sum_{j>2}^{r}\left((T_{1j}^{s})^{2}+(T_{2j}^{s})^{2}\right) &= 0,\\
\sum_{s=2}^{n}\sum_{i,j>2}(T_{ij}^{s})^{2} &= 0,\\
T_{11}^{1}+T_{22}^{1}=T_{33}^{1}=\ldots=T_{rr}^{s}
\end{aligned}$$

olmasıdır. Böylece $p \in M$ noktasındaki dikey uzayın şekil operatörleri $S_{X_1},\ldots,S_{X_n}$, (2.1.19) ve (2.1.20) şeklindedirler. □

Örnek 2.1.1. S^{2n+1}, 1 sabit eğrilikli ve $\mathbb{C}P^{n}(4)$, 4 sabit holomorfik kesit eğrilikli kompleks projektif 4-uzayını göstermek üzere $\pi : S^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}P^{n}(4)$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda açıktır ki π kompleks Hopf titreşimi (2.1.18) eşitsizliğini sağlamaktadır.

2.2. Riemann Submersiyonlar İçin Ricci Eğriliğini İçeren Bazı Eşitsizlikler

Bu kısımda, Riemann submersiyonlar için yatay ve dikey distribüsyonların Ricci eğriliğini içeren bazı eşitsizlikler verildi. Ayrıca verilen bu eşitsizliklerin eşitlik durumları düşünülerek Riemann submersiyonlar için bazı karakterizasyonlar elde edildi.

Diğer yandan, Riemann submersiyonlar için Chen-Ricci eşitsizliği kurularak bu eşitsizliğin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartlar belirlenecektir. Ayrıca Riemann submersiyonlar için Chen-Ricci eşitsizliğini sağlayan bazı örnekler sunulacaktır.

Bu bölüm için öncelikle aşağıdaki lemmayı verelim:

Lemma 2.2.1. (M^{m},g) ve $\left(B^{n},g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \rightarrow B$ bir Riemann submersiyon olsun. Ayrıca T_pM ’ nin herhangi bir $p \in M$ noktasında öyle bir $\{U_1,U_2,\ldots,U_r,X_1,X_2,\ldots,X_n\}$ ortonormal bazı vardır ki $V = Span\{U_1,\ldots,U_r\}$ ve $H = Span\{X_1,\ldots,X_n\}$ şeklindedir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Ric(U_i) &= \hat{R}ic(U_i)+\sum_{j=1}^{r}\Big(g(T_{U_i}U_i,T_{U_j}U_j)-g(T_{U_i}U_j,T_{U_i}U_j)\Big) \\ &\quad +\sum_{j=1}^{n}\Big(g(T_{U_i}X_j,T_{U_i}X_j)-g(A_{X_j}U_i,A_{X_j}U_i)-g((\nabla_{X_j}T)(U_i,U_i),X_j)\Big) \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

$$\begin{aligned} Ric(X_i) &= Ric^{*}(X_i)+\sum_{j=1}^{r}(g(T_{U_j}X_i,T_{U_j}X_i)-g(A_{X_i}U_j,A_{X_i}U_j) \\ &\quad -g((\nabla_{X_i}T)(U_j,U_j),X_i))+3\sum_{j=1}^{n}g(A_{X_i}X_j,A_{X_i}X_j) \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

eşitlikleri vardır. Burada

$$\hat{R}ic(U_i) = \sum_{j=1}^{r}\hat{R}(U_i,U_j,U_j,U_i)$$

ve

$$Ric^{*}(X_i) = \sum_{j=1}^{n}R^{*}(X_i,X_j,X_j,X_i)$$

şeklindedir.

İspat: Herhangi bir $U_i\in\chi^{v}(M)$ ve $X_i\in\chi^{h}(M)$ için Ricci eğrilikleri aşağıdaki formdadır:

$$Ric(U_i) = \sum_{j=1}^{r}R(U_i,U_j,U_j,U_i)+\sum_{j=1}^{n}R(U_i,X_j,X_j,U_i) \tag{2.2.3}$$

$$Ric(X_i) = \sum_{j=1}^{r}R(X_i,U_j,U_j,X_i)+\sum_{j=1}^{n}R(X_i,X_j,X_j,X_i)\,. \tag{2.2.4}$$

Yukarıda verilen (2.2.3) ve (2.2.4) ifadelerinde (1.6.13), (1.6.16) ve (1.6.19) eşitlikleri kullanılırsa (2.2.1) ve (2.2.2) eşitlikleri doğrudan elde edilir. □

(M^{m},g) ve $\left(B^{n},g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi:M\to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki lineer dönüşümler mevcuttur:

$$\begin{aligned} T_1^{h} \;:\; &\chi^{v}(M) \to \chi^{h}(M)^{*} \\ &U \to T_1^{h}(U)=T_U^{h}V \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} T_1^v & : & \chi^v(M) & \to \chi^v(M)^* \\ & & U & \to T_1^v(U) = T_U^v X \\ T_2^v & : & \chi^h(M) & \to \chi^v(M)^* \\ & & X & \to T_2^v(X) = T_U^v X \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{llll} A_1^v & : & \chi^h(M) & \to \chi^v(M)^* \\ & & X & \to A_1^v(X) = A_X^v Y \\ A_1^h & : & \chi^h(M) & \to \chi^h(M)^* \\ & & X & \to A_1^h(X) = A_X^h U \\ A_2^h & : & \chi^v(M) & \to \chi^h(M)^* \\ & & U & \to A_2^h(U) = A_X^h U. \end{array}$$

Burada $\chi^h(M)^*$ ve $\chi^v(M)^*$ sırasıyla $\chi^h(M)$ ve $\chi^v(M)$ yatay ve dikey vektör uzaylarının dual vektör uzaylarını göstermektedir. Ayrıca yukarıda verilen lineer dönüşümlerin normlarının kareleri

$$\begin{aligned} \left\|T_1^h(U)\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{r} g(T_U^h U_j, T_U^h U_j), \\ \left\|T_1^v(U)\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} g(T_U^v X_j, T_U^v X_j), \\ \left\|T_2^v(X)\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{r} g(T_{U_j}^v X, T_{U_j}^v X), \\ \left\|A_1^v(X)\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} g(A_X^v X_j, A_X^v X_j), \\ \left\|A_1^h(X)\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{r} g(A_X^h U_j, A_X^h U_j), \\ \left\|A_2^h(U)\right\|^2 &= \sum_{j=1}^{n} g(A_{X_j}^h U, A_{X_j}^h U), \end{aligned}$$

şeklinde olup burada $\{U_1,...,U_r\}$ ve $\{X_1,...,X_n\}$ sırasıyla $\chi^v(M)$ dikey distribüsyonunun ve $\chi^h(M)$ yatay distribüsyonunun ortonormal bazlarını göstermektedir.

Yukarıda verilen notasyonlar göz önüne alınarak aşağıdaki teoremler verilebilir:

Teorem 2.2.1. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi: M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$Ric(U) \leq \hat{R}ic(U) + rg(T_U^h U, N) + \left\| T_1^v(U) \right\|^2 - \breve{\delta}(T_U^h U) \tag{2.2.5}$$

eşitsizliği vardır. Birim dikey vektör alanı $U \in \chi^v(M)$ için yukarıda verilen (2.2.5) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\forall\, V \in \chi^v(M)$ ve $X \in \chi^h(M)$ için

$$\begin{aligned} T_U^h V &= 0, \\ A_X^h U &= 0, \end{aligned}$$

olmasıdır. Ayrıca her $U \in \chi^v(M)$ için (2.2.5) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart T^h ve A^h lineer dönüşümlerinin sıfır olmasıdır. Diğer yandan,

$$Ric(U) \geq \hat{R}ic(U) + rg(T_U^h U, \mathcal{H}(p)) - \left\| T_1^h(U) \right\|^2 - \left\| A_2^h(U) \right\|^2 - \breve{\delta}(T_U^h U) \tag{2.2.6}$$

eşitsizliği vardır. Birim dikey vektör alanı $U \in \chi^v(M)$ için yukarıda verilen (2.2.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\forall\; X \in \chi^h(M)$ için,

$$T_U^v X = 0 \tag{2.2.7}$$

olmasıdır. Ayrıca $\forall\, U \in \chi^v(M)$ için (2.2.6) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart T^v lineer dönüşümünün sıfır olmasıdır.

İspat. $\forall\; p \in M$ için, birim dikey vektör alanı $U \in \chi^v(M)$ için (2.2.1) ifadesi göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} Ric(U_i) = {} & \hat{R}ic(U_i) + rg(T_{U_i}^h U_i, \mathcal{H}(p)) - \left\| T_1^h(U_i) \right\|^2 + \left\| T_1^v(U_i) \right\|^2 \\ & - \left\| A_2^h(U_i) \right\|^2 - \breve{\delta}(T_{U_i}^h U_i) \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

yazılabilir. $1 \leq i \leq r$ için yukarıda verilen (2.2.8) eşitliğinde $U = U_i$ kullanılırsa istenen ifade doğrudan elde edilir. □

Teorem 2.2.2. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$Ric(X) \quad \leq \quad Ric^*(X) + g(\nabla_X N, X) + \left\|T_2^v(X)\right\|^2 + 3\left\|A_1^v(X)\right\|^2 \tag{2.2.9}$$

eşitsizliği vardır. Birim yatay vektör alanı $X \in \chi^h(M)$ için yukarıda verilen (2.2.9) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\forall\ V \in \chi^v(M)$ için

$$A_X^h V \quad = \quad 0, \tag{2.2.10}$$

olmasıdır. Ayrıca, $\forall\ X \in \chi^h(M)$ için (2.2.9) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart A^h lineer dönüşümünün sıfır olmasıdır. Diğer yandan

$$Ric(X) \quad \geq \quad Ric^*(X) + g(\nabla_X N, X) - \left\|A_1^h(X)\right\|^2 \tag{2.2.11}$$

eşitsizliği vardır. Birim yatay vektör alanı $X \in \chi^h(M)$ için (2.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart $\forall\ Y \in \chi^h(M)$ ve $V \in \chi^v(M)$ vektör alanları için,

$$\begin{aligned} T_V^v X \quad &= \quad 0 \\ A_X^v Y \quad &= \quad 0 \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

olmasıdır. Ayrıca burada $\forall\ X \in \chi^h(M)$ birim yatay vektör alanı için (2.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart T^v ve A^h lineer dönüşümlerinin sıfır olmasıdır.

İspat. $\forall\ p \in M$ noktasında birim yatay vektör alanı $X \in \chi^h(M)$ için (2.2.2) eşitliği göz önüne alınırsa

$$Ric(X_i) \quad = \quad Ric^*(X_i) + g(\nabla_X N, X) + \left\|T_2^v(X)\right\|^2 - \left\|A_1^h(X)\right\|^2 + 3\left\|A_1^v(X)\right\|^2 \qquad (2.2.13)$$

yazılabilir. $1 \leq i \leq n$ için, yukarıda verilen (2.2.13) eşitliğinde $X = X_i$ kullanılırsa istenen ifade doğrudan elde edilir. □

Burada daha önce verilmiş olan (1.6.20), (1.6.21) ve (1.6.22) eşitlikleri göz önüne alınarak denilebilir ki, eğer M pozitif olmayan sabit kesit eğrilikli bir manifold ise bu durumda H yatay distribüsyon integrallenebilirdir ve B Riemann manifoldu pozitif olmayan kesit eğriliğine sahiptir. Ayrıca [50] çalışması ele alındığında görülebilir ki C. Pro ve F. Wilhelm, pozitif Ricci eğrilikli herhangi bir kompakt Riemann manifoldundan pozitif olmayan Ricci eğrilikli bir B Riemann manifolduna tanımlı bir Riemann submersiyon olmadığını göstermişlerdir.

Sonuç 2.2.1. (M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Yukarıda verilen notlar göz önüne alınırsa π Riemann submersiyonunun pozitif Ricci eğriliğini koruduğu görülür. Özel olarak, eğer M manifoldu bir Einstein manifoldu ise ve herhangi bir birim yatay vektör alanı $X \in \chi^h(M)$ için (2.2.9) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanırsa, bu durumda M ve B manifoldlarının her ikisi de düzlemseldir.

2.2.1. Chen-Ricci Eşitsizliği

Bu kısımda, Riemann submersiyonlar için Chen-Ricci eşitsizliği kurulacaktır. Burada temel tensör alanları ile total uzayın içsel ve dışsal invaryantları arasındaki bağlantılar çalışılacak ve Riemann submersiyonlar için bazı karakterizasyonlar verilecektir.

(M^m, g) ve $\left(B^n, g'\right)$ birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon ve M üzerindeki bir lokal ortonormal çatı alanı $\left\{X_i, U_j\right\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq r}$ olsun. Bu durumda temel tensörlerin normlarının karesi aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\left\|T^h\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{r} g(T^h_{U_i}U_j, T^h_{U_i}U_j) \tag{2.2.14}$$

$$\left\|T^v\right\|^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} g(T^v_{U_i}X_j, T^v_{U_i}X_j) \tag{2.2.15}$$

$$\left\|A^h\right\|^2 = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} g(A^h_{X_j}U_i, A^h_{X_j}U_i) \tag{2.2.16}$$

$$\left\|A^v\right\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(A^v_{X_i}X_j, A^v_{X_i}X_j). \tag{2.2.17}$$

Lemma 2.2.2. (M^m, g) ve (B^n, g') birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon ve M üzerindeki bir lokal ortonormal çatı alanı $\{X_i, U_j\}_{1\le i\le n, 1\le j\le r}$ olsun. Burada H yatay ve V dikey distribüsyonları, sırasıyla $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ ve $\{U_j\}_{1\le j\le r}$ tarafından gerilmek üzere

$$\begin{aligned} 2\tau(p) &= 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^*(p) + r^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2 - \left\|T^h\right\|^2 + 3\left\|A^v\right\|^2 \\ &\quad -\breve{\delta}(N) + \left\|T^v\right\|^2 - \left\|A^h\right\|^2, \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

şeklindedir. Burada

$$\hat{\tau}(p) = \sum_{1\le i<j\le r} \hat{K}(U_i, U_j)$$

ve

$$\tau^*(p) = \sum_{1\le i<j\le n} K^*(X_i, X_j)$$

sırasıyla dikey ve yatay distribüsyonların skalar eğriliklerini göstermektedir.

İspat. $\forall\ p \in M$ noktasında M manifoldunun $\tau(p)$ skalar eğriliği

$$\begin{aligned}\tau(p) &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{r} R(U_i,U_j,U_j,U_i)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(X_i,X_j,X_j,X_i)\\ &\quad \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r} R(X_i,U_j,U_j,X_i)\end{aligned} \tag{2.2.19}$$

şeklindedir. Yukarıda verilen (2.2.19) ifadesinde (1.6.26) eşitliği göz önüne alınırsa (2.2.18) doğrudan elde edilir. □

Teorem 2.2.3. (Chen-Ricci Eşitsizliği) (M^m, g) ve (B^n, g') birer Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : M \to B$ bir Riemann submersiyon ve M üzerindeki bir lokal ortonormal çatı alanı $\{X_i, U_j\}_{1\le i\le n;1\le j\le r}$ olsun. Burada H yatay ve V dikey distribüsyonları sırasıyla $\{X_i\}_{1\le i\le n}$ ve $\{U_j\}_{1\le j\le r}$ tarafından gerilmek üzere aşağıdaki durumlar söz konusudur:

i) $\forall\, U \in \chi^v(M)$ birim dikey vektör alanı için,

$$Ric_V(U) - \hat{R}ic(U) - \tau^*(p) \le \frac{1}{4}r^2\|\mathcal{H}(p)\|^2 + \frac{1}{2}\|T^v\|^2 + \frac{3}{2}\|A^v\|^2 + \frac{1}{2}\breve{\delta}(N), \tag{2.2.20}$$

eşitsizliği vardır ve burada

$$Ric_V(U) = \sum_{j=1}^{r} R(U,U_j,U_j,U)$$

şeklindedir.

ii) Birim dikey vektör alanı $U \in \chi^v(M)$ olmak üzere, (2.2.20) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart A^h' nın sıfır ve U vektör alanına ortogonal olan tüm $V \in \chi^v(M)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} T_U V &= 0,\\ T_U^h U &= \frac{r}{2}\mathcal{H}(p), \end{aligned} \tag{2.2.21}$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

iii) $\forall\, U \in \chi^{v}(M)$ birim dikey vektör alanı için yukarıda verilen (2.2.20) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart A^{h} sıfırdır ve aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanır:

a) eğer $r = 2$ ise π Riemann submersiyonu total umbilik liflere sahiptir,

b) eğer $r \neq 2$ ise π Riemann submersiyonu total jeodezik liflere sahiptir.

İspat. (2.2.18) ifadesinde (1.5.17) eşitliği kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
2\tau(p) \;=\;& 2\hat{\tau}(p) + 2\tau^{*}(p) + \frac{1}{2}r^{2}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2} - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(T_{11}^{s} - T_{22}^{s} - \ldots - T_{rr}^{s})^{2} \\
& - 2\sum_{s=1}^{n}\sum_{j=2}^{r}(T_{1j}^{s})^{2} + 2\sum_{s=1}^{n}\sum_{2\le i<j\le n} T_{ii}^{s}T_{jj}^{s} - (T_{ij}^{s})^{2} + 3\left\|A^{v}\right\|^{2} \\
& - \breve{\delta}(N) + \left\|T^{v}\right\|^{2} - \left\|A^{h}\right\|^{2}
\end{aligned}
\tag{2.2.22}
$$

yazılabilir. Ayrıca burada

$$
\sum_{s=1}^{n}\sum_{2\le i<j\le n}(T_{ii}^{s}T_{jj}^{s} - (T_{ij}^{s})^{2}) \;=\; \tau(p) - Ric_{V}(U_{1}) + \hat{R}ic(U_{1}) - \hat{\tau}(p),
$$

ifadesi kullanılırsa

$$
\tau^{*}(p) + \hat{R}ic(U_{1}) - Ric_{V}(U_{1}) \;\le\; \frac{1}{4}r^{2}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2} + \frac{3}{2}\left\|A^{v}\right\|^{2} + \frac{1}{2}\left\|T^{v}\right\|^{2} + \frac{1}{2}\breve{\delta}(N), \tag{2.2.23}
$$

elde edilir. Yukarıda verilen (2.2.23) ifadesinde $U = U_{1}$ kullanıldığında (2.2.20) eşitsizliği bulunur.

Birim dikey vektör alanı $U \in \chi^{v}(M)$ için (2.2.20) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart A^{h} ' nın sıfır ve $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için

$$
\begin{aligned}
& T_{12}^{s} = T_{13}^{s} = \ldots = T_{1r}^{s} = 0, \\
& T_{11}^{s} = T_{22}^{s} + \ldots + T_{rr}^{s},
\end{aligned}
\tag{2.2.24}
$$

olmasıdır ve bu da (2.2.21) ifadesine denktir.

Sıradaki adımı göstermek için kabul edilsin ki tüm $U \in \chi^v(M)$ birim dikey vektör alanları için (2.2.20) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlansın. Bilindiği gibi T^h, $\chi^v(M)\times\chi^v(M)$ üzerinde bir simetrik operatör olduğundan ve yukarıdaki (2.2.24) ifadesi göz önüne alınırsa $i \neq j \in \{1,2,...,r\}$ ve $s \in \{1,2,...,n\}$ için

$$\begin{aligned} T_{ij}^s &= 0, \\ 2T_{ii}^s &= T_{11}^s + T_{22}^s + ... + T_{rr}^s, \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

bulunur. Bu durumda yukarıda verilen (2.2.25) eşitlikleri ele alınırsa

$$(r-2)(T_{11}^s + T_{22}^s + ... + T_{rr}^s) \quad = \quad 0 \tag{2.2.26}$$

elde edilir. Böylece ya $T_{11}^s + T_{22}^s + ... + T_{rr}^s = 0$' dır ya da $r = 2$' dir. Eğer $T_{11}^s + T_{22}^s + ... + T_{rr}^s = 0$ ise (2.2.25) ifadesinden tüm $i \neq j \in \{1,2,...,r\}$ ve $s \in \{1,2,...,n\}$ için $T_{ii}^s = 0$' dır. Ayrıca (2.2.26) eşitliği de kullanılarak tüm $i \neq j \in \{1,2,...,r\}$ ve $s \in \{1,2,...,n\}$ için $T_{ij}^s = 0$ şeklindedir ve bunun anlamı ise $\forall\ p \in M$ noktasında π Riemann submersiyonunun liflerinin total jeodezik olmasıdır. Eğer $r = 2$ ise (2.2.24) ifadesinden tüm $s \in \{1,2,...,n\}$ için $2T_{11}^s = 2T_{22}^s = (T_{11}^s + T_{22}^s)$ bulunur. Bunun anlamı ise $\forall\ p \in M$ noktasında π Riemann submersiyonunun liflerinin total umbilik olmasıdır. Dolayısıyla ispat tamamlanır. □

Bazı özel durumlar göz önüne alınarak aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 2.2.2. $(\mathbb{R}^m, g)$ ve (B, g') sırasıyla *m*-boyutlu Öklidyen uzayı ve *n*-boyutlu Riemann manifoldu olmak üzere $\pi : \mathbb{R} \to B$ bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, $\forall U \in \chi^v(\mathbb{R})$ birim dikey vektör alanı için

$$Ric_V(U) - \hat{R}ic(U) \quad \leq \quad \frac{1}{4} r^2 \left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2 + \frac{3}{2}\left\|A^v\right\|^2 + \frac{1}{2}\breve{\delta}(N), \tag{2.2.27}$$

eşitsizliği vardır. Birim dikey vektör alanı $U \in \chi^{v}(\mathbb{R})$ için yukarıdaki (2.2.27) eşitsizliğinin eşitlik durumu sağlanması için gerek ve yeter şart (2.2.21) ifadesinin sağlanmasıdır.

$\forall\, U \in \chi^{v}(\mathbb{R})$ birim dikey vektör alanı için yukarıdaki (2.2.27) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart A^{h}' nın sıfır olması ve bunun yanında ya $r = 2$ ve π Riemann submersiyonu total umbilik liflere sahip ya da π Riemann submersiyonunun total jeodezik liflere sahip olmasıdır.

2.2.2. Chen-Ricci Eşitsizliğini Sağlayan Riemann Submersiyonlar ile İlgili Bazı Örnekler

Bu kısımda (2.2.20) eşitsizliğini sağlayan iki örnek verilecektir.

Örnek 2.2.1. M , $\mathbb{R}^5$ Öklidyen uzayının $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ koordinatlarına sahip 5-boyutlu bir altmanifoldu olmak üzere

$$\cot x_3 = \frac{x_1}{x_2}, \qquad x_2 \neq 0 \qquad \text{ve} \qquad x_3 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \tag{2.2.28}$$

olsun. Burada

$$\pi \;:\; M \;\rightarrow\; \mathbb{R}^3$$

dönüşümü

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \;=\; (x_1 \cos x_3 + x_2 \cos x_3, x_4, x_5) \tag{2.2.29}$$

şeklinde olmak üzere π dönüşümünün $\mathcal{J}$ Jakobiyan matrisi

$$\mathcal{J} \;=\; \begin{pmatrix} \sin x_3 & \cos x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.30}$$

şeklindedir. Burada rank $\mathcal{J} = \text{boy}\ \mathbb{R}^3$ olduğundan π dönüşümü bir submersiyondur. Diğer yandan, M manifoldunun yatay ve dikey uzayları

$$H = Span\left\{X_1 = \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_2},\ X_2 = \frac{\partial}{\partial x_4},\ X_3 = \frac{\partial}{\partial x_5}\right\} \tag{2.2.31}$$

$$V = Span\left\{U_1 = -\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_2},\ \mathrm{U}_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}\right\}, \tag{2.2.32}$$

şeklindedir. Buradan açıkça görülebilir ki $\pi : M \to \mathbb{R}^3$ dönüşümü bir Riemann submersiyondur. Ayrıca doğrudan hesaplamalarla

$$T^v_{U_2} X_1 = -U_1,$$
$$T^h_{U_1} U_2 = X_1,$$

elde edilir. T^h, T^v, A^h ve A^v operatörlerinin diğer bileşenleri ise sıfırdır. Dahası,

$$\tau^*(p) = 0,\quad \hat{R}ic(U_1) = 0,\quad Ric_V(U_1) = 0$$

bulunur. Buradan açıkça görülebilir ki Örnek 2.2.1 deki π Riemann submersiyonu (2.2.20) eşitsizliğini sağlar.

Yukarıdaki (2.2.20) eşitsizliğini sağlayan bir diğer örnek ise aşağıdaki gibidir:

Örnek 2.2.2. B bir profil eğrisi olmak üzere, C katenoidi

$$X(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \tag{2.2.33}$$

parametrizasyonu ile verilsin. Bu durumda $\pi : C \to B$ bir submersiyondur ve π projeksiyonu $(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v)$' yi $(\cosh v, v)$' ye taşıyan bir dönüşümdür. Böylece C katenoidinin yatay ve dikey uzayları

$$H = Span\{X_v = (\sinh v \cos u, \sinh v \sin u, 1)\},$$

$$V = Span\{X_u = (-\cosh v \sin u, \cosh v \cos u, 0)\}.$$

şeklindedir. Doğrudan hesaplamalarla,

$$\langle X_v, X_v \rangle = \cosh^2 v, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad \langle X_u, X_u \rangle = \cosh^2 v$$

elde edilir. Burada "$\langle \ , \ \rangle$" $\mathbb{R}^3$ deki iç çarpımı göstermektedir. Diğer yandan,

$$\langle X_{vv}, X_v \rangle = -\langle X_{uu}, X_v \rangle = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \cosh v \sinh v,$$
$$\langle X_{vv}, X_u \rangle = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \langle X_{uu}, X_u \rangle = 0,$$

şeklindedir. T_pC' nin ortonormal bazı

$$\left\{ e_1 = \frac{1}{\cosh v} X_u \quad , \quad \mathrm{e}_2 = \frac{1}{\cosh v} X_v \right\}$$

seçilirse

$$\begin{aligned} T^h_{e_1} e_1 &= -\sinh v e_2 \\ T^v_{e_1} e_2 &= \sinh v e_2 \\ A^v_{e_2} e_2 &= A^h_{e_2} e_1 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda C katenoidinin Gauss eğriliği

$$R(e_1, e_2, e_2, e_1) = -\frac{1}{\cosh^4 v}$$

elde edilir.

2.3. Lagrangian Riemann Submersiyonların Skalar Eğriliği ve Harmonikliği

Bu bölümde, Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlı olan Lagrangian Riemann submersiyonlar çalışıldı. Lagrangian Riemann submersiyonların total uzayının içsel ve dışsal invaryantları arasındaki bağıntıyı elde edebilmek için bazı temel eşitsizlikler kuruldu ve kurulan bu eşitsizlikler kullanılarak Lagrangian Riemann submersiyonların liflerinin total jeodezik veya total umbilik olması için gerek ve yeter şartlar belirlendi. Ayrıca tanımlanan bu submersiyonların harmonikliği de incelendi ve burada tensiyon alanı hesaplanarak $\pi : M \to B$ şeklinde tanımlı olan Lagrangian Riemann submersiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şartlar verildi.

2.3.1. Lagrangian Riemann Submersiyonlar İçin Chen Eşitsizlikleri

Bu bölümde π Lagrangian Riemann submersiyonu için eğrilik invaryantları kullanılarak Chen eşitsizlikleri hesaplanacaktır. Ayrıca Lagrangian Riemann submersiyonların harmonikliği incelenerek bu submersiyonların harmonik olmaları için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Lemma 2.3.1. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\tau^*(p) = 2\hat{\tau}(p)-\left\|T^h_{V\times V}\right\|^2+n^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2, \tag{2.3.1}$$

$$2\tau(p) = 2\hat{\tau}(p)+2\tau^*(p)-\breve{\delta}(N)+n^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2, \tag{2.3.2}$$

eşitlikleri mevcuttur. Burada

$$\hat{\tau}(p) = \sum_{1\le i,j\le n}\hat{K}(U_i,U_j)$$
$$\tau^*(p) = \sum_{1\le i,j\le n}K^*(JU_i,JU_j)$$

ifadeleri $T_p(M)$ uzayının sırasıyla dikey ve yatay n-düzlem kesitlerinin skalar eğriliklerini göstermektedir.

İspat. M bir Kaehler manifold olduğundan,

$$\sum_{i,j=1}^{n}R(U_i,U_j,U_j,U_i) = \sum_{i,j=1}^{n}R(JU_i,JU_j,JU_j,JU_i) \tag{2.3.3}$$

yazılabilir. Burada R, M Kaehler manifoldunun Riemann eğrilik tensörünü göstermektedir. Yukarıda verilen (2.3.3) ifadesinde Riemann submersiyonlar için verilen Gauss-Codazzi denklemleri kullanılırsa,

$$\sum_{i,j=1}^{n} R^*(JU_i, JU_j, JU_j, JU_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \hat{R}(U_i, U_j, U_j, U_i) - \sum_{i,j,k=1}^{n} ((T_{ij}^k)^2 + T_{ii}^k T_{jj}^k) \tag{2.3.4}$$

bulunur. (2.3.4) eşitliğinden (2.3.1) ifadesi elde edilir.

Ayrıca (M, J, g) manifoldu Kaehler şartını sağladığından, yani

$$\nabla_U JV = J\nabla_U V$$

yazılabilir. Dolayısıyla buradan

$$T_U JV = JT_U V$$

bulunur. Burada gerekli notasyonlar kullanıldığında,

$$\left\|T_{V\times V}^h\right\|^2 = \left\|T_{V\times H}^v\right\|^2$$

eşitliği elde edilir. Diğer yandan, (2.3.2) eşitliğini ispatlamak için, π Lagrangian Riemann submersiyonunun skalar eğriliği ele alınırsa,

$$\tau(p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(U_i, U_j, U_j, U_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(JU_i, JU_j, JU_j, JU_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(U_i, JU_j, JU_j, U_i) \tag{2.3.5}$$

yazılabilir. Burada $\{U_i\}_{1\le i\le n}$, π Lagrangian Riemann submersiyonun dikey uzayının bir ortonormal bazını göstermektedir. Burada Gauss-Codazzi denklemleri yeniden kullanılırsa,

$$2\tau(p) = 2\sum_{i,j=1}^{n} \hat{R}(U_i, U_j, U_j, U_i) - \sum_{i,j,k=1}^{n} (T_{ij}^k)^2 + 2\sum_{i,j,k=1}^{n} T_{ii}^k T_{jj}^k - \sum_{i,j=1}^{n} g((\nabla_{JU_i} T)(U_j, U_j), JU_i)$$

$$2\tau(p) = \hat{R}(U_i, U_j, U_j, U_i) - \sum_{i,j,k=1}^{n} (T_{ij}^k)^2 + \sum_{i,j,k=1}^{n} T_{ii}^k T_{jj}^k + \sum_{i,j=1}^{n} R^*(JU_i, JU_j, JU_j, JU_i) - \sum_{i,j=1}^{n} g((\nabla_{JU_i} T)_{U_j} U_j, JU_i) + \sum_{i,j,k=1}^{n} (T_{ij}^k)^2 \tag{2.3.6}$$

bulunur. Burada yukarıda verilen (2.3.6) ifadesinde (1.6.26) kullanılırsa (2.3.2) eşitliği elde edilir. □

Diğer yandan, burada not edilmelidir ki H. M. Taştan [56]' daki çalışmasında Kaehler manifoldtan Riemann manifolda tanımlı Lagrangian Rieman submersiyonları ele almış ve bu submersiyonların yatay distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla buradan söylenebilir ki Lagrangian Riemann submersiyonlar için A temel tensörü her zaman sıfırdır.

Yukarıdaki kavramlardan aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.3.1. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\hat{\tau}(p)-n(1-n)\|\mathcal{H}(p)\|^2 \quad \geq \quad 2\tau^*(p), \tag{2.3.7}$$

$$2\tau(p) \quad \leq \quad 2\hat{\tau}(p)+2\tau^*(p)-n(1-n)\|\mathcal{H}(p)\|^2+\left\|T^v_{V\times H}\right\|^2-\breve{\delta}(N), \tag{2.3.8}$$

eşitsizlikleri mevcuttur. Yukarıda verilen (2.3.7) ve (2.3.8) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart aşağıdaki durumlardan herhangi birinin sağlanmasıdır:

i) π Lagrangian Riemann submersiyonu total umbilik liflere sahiptir.

ii) $\mathcal{F}$ bir total umbilik folasyondur.

İspat. Lemma 1.5.2 ve (2.3.1) ifadesi göz önüne alınırsa,

$$2\tau^*(p)=2\hat{\tau}(p)-\sum_{i,s=1}^{n}(T^s_{ii})^2-\sum_{s=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}(T^s_{ij})^2+\sum_{i,j,s=1}^{n}T^s_{ii}T^s_{jj}$$

yazılabilir. Yukarıdaki ifadede (2.1.13) eşitsizliği kullanılırsa

$$2\tau^*(p)\leq 2\hat{\tau}(p)-\frac{1}{n}\sum_{i,s=1}^{n}(T^s_{ii})^2-\sum_{s=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}(T^s_{ij})^2+n^2\|\mathcal{H}(p)\|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise (2.3.7) ifadesine denktir. Böylece $\forall p\in M$ için (2.3.7) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$T_{11} = T_{22} = \ldots = T_{nn} \quad \text{ve} \quad \sum_{s=1}^{n}\sum_{i\neq j}^{n}(T_{ij}^{s})^2 = 0$$

olmasıdır. Dolayısıyla (2.3.7) ifadesinin ispatı tamamlanır. (2.3.8) ifadesinin ispatı ise benzer şekilde gösterilebilir.

Lemma 2.3.2. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\tau(p) = 4\hat{\tau}(p) - \left\|T_{V\times V}^{h}\right\|^2 + 2n^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2 - \breve{\delta}(N), \tag{2.3.9}$$

$$2\tau(p) = 4\tau^{*}(p) + \left\|T_{V\times H}^{v}\right\|^2 - \breve{\delta}(N), \tag{2.3.10}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. Riemann submersiyonlar için skalar eğrilik

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^{n} R(U_i,U_j,U_j,U_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(JU_i,U_j,U_j,JU_i)$$

şeklindedir. Yukarıdaki ifadede Gauss-Codazzi denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned} 2\tau(p) = {} & 2\sum_{i,j=1}^{n}\hat{R}(U_i,U_j,U_j,U_i) - \sum_{i,j,k=1}^{n}(T_{ij}^{k})^2 + 2\sum_{i,j,k=1}^{n}T_{ii}^{k}T_{jj}^{k} \\ & -\sum_{i,j=1}^{n} g((\nabla_{JU_i}T)(U_j,U_j),JU_i) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan (2.3.9) ifadesi doğrudan elde edilir. Ayrıca Riemann submersiyonlar için skalar eğrilik

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^{n} R(JU_i,JU_j,JU_j,JU_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} R(JU_i,U_j,U_j,JU_i)$$

ile de yazılabilir. Böylece yukarıdaki ifadelerin eşitleri yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned} 2\tau(p) = {} & 2\sum_{i,j=1}^{n} R^{*}(JU_i,JU_j,JU_j,JU_i) + \sum_{i,j,k=1}^{n}(T_{ij}^{k})^2 \\ & -\sum_{i,j=1}^{n} g((\nabla_{JU_i}T)(U_j,U_j),JU_i) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (2.3.10) eşitliğinin ispatını verir. □

Sonuç 2.3.1. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ total jeodezik liflere sahip bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. (2.3.9) ve (2.3.10) ifadeleri göz önüne alındığında yatay ve dikey uzayların skalar eğriliklerinin aynı olduğu görülür.

Yukarıda verilen (2.3.9) ve (2.3.10) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki karakterizasyonlar verilebilir:

Teorem 2.3.2. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$2\tau(p) \quad \leq \quad 4\hat{\tau}(p)+2n^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2-\breve{\delta}(N), \tag{2.3.11}$$

$$2\tau(p) \quad \geq \quad 4\tau^*(p)-\breve{\delta}(N), \tag{2.3.12}$$

eşitsizlikleri vardır. Yukarıdaki (2.3.11) ve (2.3.12) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart π Lagrangian Riemann submersiyonun $p\in M$ noktasından geçen lifin M ’ nin bir total jeodezik altmanifoldu olması veya $\mathcal{F}$ ’nin total jeodezik bir folasyon olmasıdır. Ayrıca buna ek olarak,

$$2\tau(p) \quad \leq \quad 4\hat{\tau}(p)+n(2n-1)\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2-\breve{\delta}(N), \tag{2.3.13}$$

$$2\tau(p) \quad \geq \quad 4\tau^*(p)+n^2\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^2-\breve{\delta}(N), \tag{2.3.14}$$

eşitsizlikleri vardır. $\forall p\in M$ için yukarıdaki (2.3.13) ve (2.3.14) eşitsizliklerinin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şart π Lagrangian Riemann submersiyonu total umbilik liflere sahip veya $\mathcal{F}$ ’ nin bir total umbilik folasyon olmasıdır.

Lemma 1.5.2 göz önüne alınarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.3.3. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda,

$$\tau(p)-K_{\mathcal{P}} \;\leq\; \hat{\tau}(p)+\tau^{*}(p)-\hat{K}_{\mathcal{P}}+\frac{n^{2}(n-2)}{2(n-1)}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2}+\frac{1}{2}\left\|T^{v}_{V\times H}\right\|^{2}-\frac{1}{2}\breve{\delta}(N) \qquad (2.3.15)$$

eşitsizliği vardır. $\forall p\in M$ için yukarıdaki (2.3.15) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart T^{h} tensörüne karşılık gelen matrislerin

$$S_{JU_1} \;=\; \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}, \;\; \lambda = a+b$$

ve

$$S_{JU_k} \;=\; \begin{pmatrix} c_k & d_k & 0 & \dots & 0 \\ d_k & -c_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \;\; 2\leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$$

formunda olmasıdır.

İspat. Burada eğer

$$w \;=\; 2\hat{\tau}(p)+2\tau^{*}(p)-2\tau(p)+\left\|T^{v}_{V\times H}\right\|^{2}+\frac{n^{2}(n-2)}{(n-1)}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2}-\breve{\delta}(N) \qquad (2.3.16)$$

ve $T_U JV \;=\; JT_U V$ eşitlikleri kullanılırsa,

$$w-\frac{n^{2}}{(n-1)}\left\|\mathcal{H}(p)\right\|^{2}+\left\|T^{h}_{V\times V}\right\|^{2} \;=\; 0$$

bulunur. Ayrıca, $\chi^{v}(M)$ dikey distribüsyonun 2-düzlem kesiti $\mathcal{P}=\{U_1,U_2\}$ olmak üzere,

$$R(U_1,U_2,U_2,U_1) \;=\; \hat{R}(U_1,U_2,U_2,U_1)+T^{1}_{11}T^{1}_{22}+\sum_{k=2}^{n}(T^{k}_{11}T^{k}_{22}-(T^{k}_{12})^{2})$$

elde edilir. Burada Lemma 1.5.3 kullanılırsa,

$$T_{11}^1 T_{22}^1 \geq -\frac{w}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i\neq j=1}^{n}(T_{ij}^1)^2+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=2}^{n}(T_{ij}^k)^2 \tag{2.3.17}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned} R(U_1,U_2,U_2,U_1) \geq\ & \hat{R}(U_1,U_2,U_2,U_1)-\frac{w}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(T_{11}^k+T_{22}^k)^2 \\ & +\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i,j>2}(T_{ij}^k)^2+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j>2}^{n}((T_{1j}^k)^2+(T_{2j}^k)^2) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$R(U_1,U_2,U_2,U_1) \leq \hat{R}(U_1,U_2,U_2,U_1)-\frac{w}{2}$$

bulunur ki bunun anlamı da

$$K_{\mathcal{P}} \leq \hat{K}_{\mathcal{P}}-\frac{w}{2}$$

olmasıdır. Ayrıca (2.3.16) ve (2.3.17) ifadeleri de göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} R(U_1,U_2,U_2,U_1) \geq\ & \hat{R}(U_1,U_2,U_2,U_1)-\hat{\tau}(p)-\tau^*(p)+\tau(p)-\frac{n^2(n-2)}{2(n-1)}\|\mathcal{H}(p)\|^2 \\ & -\frac{1}{2}\|T_{V\times H}^v\|^2+\frac{1}{2}\breve{\delta}(N) \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan ise (2.3.15) ifadesi elde edilir. Ayrıca herhangi bir $p\in M$ için, (2.3.15) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^{n}(T_{11}^k+T_{22}^k)=0, \\ & \sum_{k=1}^{n}\sum_{j>2}^{n}((T_{1j}^k)^2+(T_{2j}^k)^2)=0, \\ & \sum_{k=2}^{n}\sum_{j>2}^{n}(T_{ij}^k)^2=0, \\ & T_{11}^1+T_{22}^1=T_{33}^1=\ldots=T_{nn}^1, \end{aligned}$$

olmasıdır. Dolayısıyla bu ifadeler T^h tensörüne karşılık gelen matrislerin istenen formda olduğunu gösterir. □

Önerme 2.3.1. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$, total jeodezik liflere sahip bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda, (M,J,g) total uzayının bir Einstein manifoldu olması için gerek ve yeter şart, B manifoldunun ve π submersiyonun liflerinin Einstein manifoldu olmasıdır [42].

Örnek 2.3.1. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$, total jeodezik liflere sahip bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Eğer M manifoldu bir Einstein manifoldu ise ve Önerme 2.3.1 göz önüne alınırsa $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ Lagrangian Riemann submersiyonunun (2.3.15) eşitsizliğini sağladığı görülür.

2.3.2. Lagrangian Riemann Submersiyonların Harmonikliği

Lemma 2.3.3. M ve B, sırasıyla, Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda π submersiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart π submersiyonunun bir $p\in M$ noktasından geçen lifin minimal olmasıdır.

İspat. Daha önce verilen (1.7.2) ifadesindeki tensiyon alanının tanımı kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\sigma(\pi) &= iz_g(\nabla.\pi_*\bullet)=\sum_{i=1}^{2n}(\nabla\pi_*)(E_i,E_i)\\
&= \sum_{i=1}^{2n}\left\{\nabla_{E_i}^{\pi^{-1}TB}\pi_*E_i-\pi_*(\nabla_{E_i}E_i)\right\}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\left\{\nabla_{U_j}^{\pi^{-1}TB}\pi_*U_j-\pi_*(\nabla_{U_j}U_j)\right\}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\nabla_{JU_i}^{\pi^{-1}TB}\pi_*JU_i-\pi_*(\nabla_{JU_i}JU_i)\right\}\\
&\quad+\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\nabla_{JU_i}^{\pi^{-1}TB}\pi_*U_j-\pi_*(\nabla_{JU_i}U_j)\right\}+\sum_{i,j=1}^{n}\left\{\nabla_{U_j}^{\pi^{-1}TB}\pi_*JU_i-\pi_*(\nabla_{U_j}JU_i)\right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\{E_1,E_2,...,E_{2n}\}$, $\{U_1,U_2,...,U_n\}$ ve $\{JU_1,JU_2,...,JU_n\}$, sırasıyla M total uzayının, dikey ve yatay uzayların ortonormal bazlarını göstermektedir.

Diğer yandan, (1.6.7) - (1.6.10) eşitlikleri göz önüne alınırsa ve Kaehler şartı kullanılırsa,

$$\sigma(\pi) = \sum_{j=1}^{n} \nabla_{U_j}^{\pi^{-1}TB} \pi_* U_j + \sum_{i=1}^{n} \nabla_{JU_i}^{\pi^{-1}TB} \pi_*(JU_i) + \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{JU_i}^{\pi^{-1}TB} U_j$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{U_j}^{\pi^{-1}TB} JU_i - \sum_{j=1}^{n} \pi_*(T_{U_j} U_j) - \sum_{i=1}^{n} \pi_*(h\nabla_{JU_i} JU_i)$$
$$- \sum_{i,j=1}^{n} \pi_*(h\nabla_{U_j} JU_i) - \sum_{i,j=1}^{n} \pi_*(A_{JU_i} U_j)$$

bulunur. Böylece doğrudan hesaplamalarla

$$\sigma(\pi) = -\sum_{j=1}^{n} \pi_*(T_{U_j} U_j) \tag{2.3.18}$$

elde edilir. Dolayısıyla yukarıda verilen (2.3.18) ifadesi ispatı tamamlar. □

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.3.4. M ve B sırasıyla Kaehler manifold ve Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g)\to(B,g')$ bir Lagrangian Riemann submersiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki herhangi üç şart diğer bir şartı sağlar:

i) π dönüşümü harmoniktir,

ii) V dikey distribüsyon minimaldir,

iii) H yatay distribüsyon minimaldir.

iv) $\mathcal{F}$ bir minimal folasyondur.

3. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasından elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi verilebilir:

1. Bir Riemann submersiyonun taban manifoldu üzerinde skalar eğrilik hesaplandı. Taban manifoldun, hedef manifoldun ve liflerin skalar eğriliğini içeren bazı eşitsizlikler kuruldu ve bu eşitsizliklerin eşitlik durumlarının sağlanması için gerek ve yeter şartın $\pi : M \to B$ Riemann submersiyonunun liflerinin total jeodezik veya total umbilik olması gerektiği sonucuna varıldı.

2. Özel olarak, total jeodezik liflere sahip bir $\pi : M \to B$ Riemann submersiyonunun taban manifoldu, hedef manifoldu ve liflerinin skalar eğriliklerini içeren bazı eşitsizlikler kurulmuş olup M manifoldunun her noktasında elde edilen bu eşitsizliklerin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartın $A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn}$ ve $A_{ij} = 0$ olması gerektiği bulundu.

3. M. M. Tripathi' nin [58] 'de verdiği lemma göz önüne alınarak $\pi : M \to B$ Riemann submersiyonu için kesit eğrilik, skalar eğrilik, ortalama eğriliği ve Riemann submersiyonunun temel tensörlerini içeren

$$\begin{aligned} \tau(p) - K_{\mathcal{P}} \quad \leq \quad & \hat{\tau}(p) + \tau^{*}(p) + \hat{K}_{\mathcal{P}} - \frac{r^2(r-2)}{2(r-1)} \|\mathcal{H}(p)\|^2 + \frac{1}{2}\breve{\delta}(N) \\ & + \frac{1}{2}\|T_{V\times H}\|^2 - \frac{1}{2}\|A_{H\times V}\|^2 + \frac{3}{2}\|A_{H\times H}\|^2 \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

eşitsizliği elde edildi. Burada (3.1.1) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartın M manifoldunun dikey uzayının $S_{X_1}, S_{X_2}, ..., S_{X_n}$ şekil operatörlerine karşılık gelen matrislerin hangi formda olması gerektiği ortaya konuldu.

4. Riemann manifoldlar arasında tanımlı olan $\pi : M \to B$ Riemann submersiyonu için Chen-Ricci eşitsizliği hesaplanarak herhangi bir birim dikey vektör alanı $U \in \chi^{v}(M)$ için,

$$Ric_V(U) - \hat{R}ic(U) - \tau^*(p) \leq \frac{1}{4} r^2 \|\mathcal{H}(p)\|^2 + \frac{1}{2}\|T^v\|^2 + \frac{3}{2}\|A^v\|^2 + \frac{1}{2}\breve{\delta}(N), \qquad (3.1.2)$$

eşitsizliği elde edildi. Birim dikey vektör alanı $U \in \chi^v(M)$ için (3.1.2) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartın A^h' nın sıfır ve U vektör alanına ortogonal olan tüm $V \in \chi^v(M)$ vektör alanları için

$$\begin{aligned} T_U^h V &= 0, \\ T_U^h U &= \frac{r}{2}\mathcal{H}(p), \end{aligned} \qquad (3.1.3)$$

ifadelerinin sağlanması gerektiği bulundu. Ayrıca tüm birim dikey vektör alanı $U \in \chi^v(M)$ için yukarıda verilen (3.1.3) eşitsizliğinin eşitlik durumunun sağlanması için gerek ve yeter şartın A^h' nın sıfır olması gerektiği ve $r = 2$ olması durumunda π Riemann submersiyonunun total umbilik liflere sahip olduğu ya da $r \neq 2$ olması durumunda ise π Riemann submersiyonu total jeodezik liflere sahip olduğu sonucuna varılmıştır.

5. M bir Kaehler manifold ve B de bir Riemann manifold olmak üzere $\pi:(M,J,g) \to (B,g')$ ile tanımlı Lagrangian Riemann submersiyonu için bazı eşitsizlikler kuruldu. Bu eşitsizliklerin eşitlik durumlarının sağlanması durumunda ise gerek ve yeter şartlar belirlendi.

6. Son olarak, Kaehler manifoldtan Riemann manifoldlara tanımlı olan $\pi:(M,J,g) \to (B,g')$ Lagrangian Riemann submersiyonunun harmonikliği incelenmiş olup sonuç olarak aşağıda verilen herhangi üç şartın sağlanması durumunda dördüncü şartın da doğrudan sağlandığı sonucuna varıldı.

i) π Lagrangian Riemann submersiyonu harmoniktir,
ii) V dikey distribüsyonu minimaldir,
iii) H yatay distribüsyonu minimaldir,
iv) $\mathcal{F}$ folasyonu minimaldir.

Alınan bu sonuçlar birçok ulusal ve uluslararası konferanslarda sunulmuş olup ayrıca elde edilen sonuçlar [27] ve [34] makalelerinde kabul edilmiştir. Ayrıca

- Scalar Curvature of the Lagrangian Riemannian Submersions and Their Harmonicity,

adlı çalışma dergiye gönderilmiştir.

4. ÖNERİLER

Riemann manifoldlar arasında tanımlı diferensiyellenebilir dönüşümlerin teorisi Riemann geometride geniş bir yer kaplamaktadır. Bu tür dönüşümler, Riemann manifoldlar arasındaki geometrik özellikleri kıyaslamada etkin bir araç olarak kullanılmaktadır. Bu dönüşümlerin en iyi bilinenleri ise izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonlardır. Bu tezde Riemann submersiyonlar için taban manifoldunun içsel ve dışsal invaryantları kullanılarak eşitsizlikler kurulmuş olup, bu submersiyonlar için çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir. Böylece bu tezde elde edilen sonuçlar, Riemann submersiyon teorisinin gelişimine ve alt manifold teorisine katkı sağlayacaktır.

Farklı manifoldlar arasında yeni submersiyonlar tanımlanabilir ve manifoldlar üzerinde tanımlı olan çeşitli geometrik yapılar ile submersiyonun temel tensörleri arasındaki ilişkiler ortaya konulabilir. Daha sonra bu tip submersiyonlar için Chen eşitsizlikleri kurulabilir ve kurulan bu eşitsizliklerin eşitlik durumlarının sağlanması durumunda ise yeni karakterizasyonlar elde edilebilir.

1. $\tilde{M}$, üzerinde tanımlı J kompleks yapısı ile birlikte bir hemen hemen Hermitiyen manifold ve M de $\tilde{M}$ nin bir CR-altmanifoldu olsun [5]. (B, J', g') bir hemen hemen Hermitiyen manifold olmak üzere $\pi : M \to B$ dönüşümüne bir CR-submersiyon denir, eğer aşağıdaki şartlar sağlanır ise.

a) V dikey distribüsyonu TM'de H yatay distribüsyonunun ortogonal tamamlayanıdır.

b) J kompleks yapısı V ile $TM^{\perp}$' i birbirine dönüştürür.

c) Herhangi bir $p \in M$ için, $\pi_{*p} : H_p \to T_{\pi(p)}N$ bir kompleks izometridir, yani $\pi_{*p} \circ J = J' \circ \pi_{*p}$ sağlanır.

Bu şekilde tanımlı olan CR-submersiyonlar için Chen eşitsizlikleri kurulabilir, dolayısıyla bu submersiyonlar için çeşitli karakterizasyonlar verilebilir.

2. Diğer bir öneri olarak, taban manifoldu hemen hemen kontak manifold, hedef manifold ise Riemann manifold alınarak hemen hemen kontak Riemann submersiyonlar için Chen-Ricci eşitsizliği incelenebilir. Elde edilmesi planlanan eşitsizlik taban manifold üzerinde tanımlı olan bazı geometrik yapıları da içereceğinden yeni sonuçlar bulunabilir.

3. Benzer hesaplamalar Einstein Riemann submersiyonlar için de incelenebilir.

5. KAYNAKLAR

1. Alegre, P., Chen, B.-Y. ve Munteanu, M. M., Riemannian Submersion, $\delta-$ Invariants and Optimal Inequality, Ann. Glob. Geom., 42 (2012) 317-331.

2. Altafini, C., Redundant Robotic Chains on Riemannian Submersions, Ieee. Tran. Rob. Aut., 20 (2004) 335-340.

3. Atçeken, M., Anti-invariant Riemannian Submersions from a Locally Riemannian Product Manifold to any Riemannian Manifold, Gulf. J. Math., 1 (2013) 25-35.

4. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., Conformality on semi-Riemannian Manifolds, Mediterr. J. Math., 13 (2016) 2185-2198.

5. Bejancu, A., Geometry of CR-Submanifolds, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1986.

6. Bejancu, A. ve Farran, H. R., Foliations and Geometric Structures, Springer, Dordrecht, Netherlands, 2006.

7. Besse, A. L., Einstein Manifolds, Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag, 1987.

8. Bonome, A., Hervella, L. M. ve Rozas, I., On the Classes of Almost Hermitian Structures on the Tangent Bundle of an Almost Contact Metric Manifold, Acta Math. Hung., 56 (1990) 29-37.

9. Cabrerizo, J., Carriazo, A., Fernandez, L. ve Fernandez, M., Riemannian Submersions and Slant submanifolds, Publ. Math., 61 (2002) 523-532.

10. Cartan, E., Sur la Possibilite de Plonger un Espace Riemannian Donne Dans un Espace Euclidien, Ann. Soc. Pol. Math., 6 (1927) 1-7.

11. Chen, B.-Y. ve Okumura, M., Scalar Curvature, Inequality and Submanifold, Proc. Amer. Math. Soc., 3 (1973) 605-608.

12. Chen, B.-Y., Geometry of Submanifolds, Pure and Applied Mathematics, Marcel Dekker, New York, 1973.

13. Chen, B.-Y., Some Pinching and Classification Theorems for Minimal Submanifolds, Arch. Math., 60 (1993) 568-578.

14. Chen, B.-Y., A General Inequality for Submanifolds in Complex Space Forms and Its Applications, Archiv. Math., 67 (1996) 519-528.

15. Chen, B.-Y., Mean Curvature and Shape Operator of Isometric Immersions in Real Space Form, Glasgow. Math. J., 38 (1996) 87-97.

16. Chen, B.-Y., Riemannian DNA, Inequalities and their Applications, Tamkang J. Sci. Eng., 3 (2000) 123-130.

17. Chen, B.-Y., Riemannian Geometry of Lagrangian Submanifolds, Taiwan. J. Math., 5 (2001) 681-723.

18. Chen, B.-Y., What Can We Do with Nash's Embedding Theorem?, Soochow J. Math., 30 (2004) 303-338.

19. Chen, B.-Y., Riemannian Submersions, Minimal Immersions and Cohomology Class, Proc. Japan. Acad., 81 (2005) 162-167.

20. Chen, B.-Y. ve Wei, S., P-Harmonic Morphisms, Cohomology Classes and Submersions, Tamkang J. Math., 40 (2009) 377-382.

21. Chen, B.-Y., Pseudo-Riemannian Geometry, δ-invariants and Applications, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2011.

22. Chinea, D., Almost Contact Metric Submersions, Rend. Circ. Math. Palermo, 34 (1985) 89-104.

23. Cioroboiu, D., Some Inequalities for Ricci Curvature of Certain Submanifolds in Sasakian Space Forms, Acta Math. Acad. Pae. Nyi., 19 (2003) 233-243.

24. Crampin, M. ve Pirani, F. A. E., Applicable Differential Geometry, Cambridge University Press, 1986.

25. Deng, S., An Improved Chen-Ricci Inequality, Int. Elec. J. Geom., 2 (2009) 39-45.

26. Deshmukh, S., Ghazal, T. ve Hashem, H., Submersions of CR-Submanifolds on an Almost Hermitian Manifold, Yokohama Math. J., 40 (1992) 45-57.

27. Eken, Ş., Gülbahar ve Kılıç, E., Some Inequalities for Riemannian Submersions, An. St. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Math. (2015) (Kabul edildi).

28. Eells, J. ve Sampson, H. J., Harmonic Mappings of Riemannian Manifolds, Amer. J. Math., 86 (1964) 109-160.

29. Falcitelli, M., Ianus, S. ve Pastore, A. M., Riemannian Submersions and Related Topics, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2004.

30. Falcitelli, M., Some Classes of Almost Contact Metric Manifolds and Contact Riemannian Submersions, Acta Math. Hung., 105 (2004) 291-312.

31. Gauss, C. F., Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas, Comment. Soc. Sci. Gotting. Recent. Calssis Math., 6 (1827) 99-146.

32. Gray, A., Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions, J. Math. Metch., 16 (1967) 715-737.

33. Gülbahar, M., Lightlike Manifoldlar Üzerinde Chen-Tipi Eşitsizlikler, Doktora tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya, 2014.

34. Gülbahar, M., Eken Meriç, Ş. ve Kılıç, E., Sharp Inequalities Involving the Ricci Curvature for Riemannian Submersions, Kragujevac J. Math. (2016) (Kabul edildi).

35. Güzdüzalp, Y., Slant Submersions from Almost Product Riemannian Manifolds, Turkish J. Math., 37 (2013) 863-873.

36. Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, 1. Cilt, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Malatya, 1998.

37. Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri, 3. Cilt, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Malatya, 2003.

38. Hong, S, Matsumoto, K. ve Tripathi, M. M., Certain Basic Inequalities for Submanifolds of Locally Conformal Kaehler Space Forms, SUT J. Math., 41 (2005) 75-94.

39. Ianus, S., Mazzocco, R. and Vilcu, G. E., Riemannian Submersions from Quaternionic Manifolds, Acta Appl. Math., 104 (2008) 83-89.

40. Ianus, S., Ionescu, A. M., Mazzocco, R. ve Vilcu, G. E., Riemannian Submersions from Almost Contact Metric Manifolds, Abd. Math. Sem. Univ. Hamb., 81 (2011) 101-114.

41. Janet, M., Sur la Possibilite der Plonger un Espace Riemannian Donne Dans un Espace Euclidien, Ann. Soc. Polon. Math., 5 (1926) 38-43.

42. Kim, J.-S., Tripathi, M. M., Ricci Curvature of Submanifolds in Locally Conformal Almost Cosymplectic Manifolds, Indian J. Pure Appl. Math., 35 (2004) 259-271.

43. Lee, J., Park, J., Şahin, B. ve Song, D., Einstein Conditions for the Base Space of Anti-invariant Riemannian Submersions and its Clauiraut Submersions, Taiwan. J. Math., doi:10.11650/tjm.19.2015.5283.

44. Loubeau, E., On p-Harmonic Morphisms, Diff. Geo. Its. Appl., 12 (2000) 219-229.

45. Lu, Z., Optimal inequality, The Mathematical Gazette, 91 (2007) 522-523.

46. Mihai, A., Inequalities on the Ricci Curvature, J. Math. Ineq., 9 (2015) 811-822.

47. Nash, J. N., The Imbedding Theorem Problem for Riemannian Manifolds, Annals Math., 63 (1956) 20-63.

48. O'Neill, B., The Fundamental Equations of a Riemannian Submersions, Michigan Math. J., 13 (1966) 459-469.

49. Özgür, C. ve Murathan, C., Chen Inequalities for Submanifolds of a Cosymplectic Space Form with a Semi-Symmetric Metric Connection, An. St. Univ. Al. I. Cuza Iasi Math., 2 (2012) 395-408.

50. Pro, C. ve Wilhelm, F., Riemannian Submersions Need Not Preserve Positive Ricci Curvature, Proc. Amer. Math. Soc., 142 (2014) 2529-2535.

51. Şahin, B., Anti-invariant Riemannian Submersions from Almost Hermitian Manifolds, Cent. Eur. J. Math., 8 (2010) 437-447.

52. Şahin, B., Slant Submersions from Almost Hermitian Manifolds, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome, 54 (2011) 93-105.

53. Şahin, B., Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Akademik Yayın. Eğt. Dan. Tic. Ltd. Şti., 2012.

54. Şahin, B., Semi-invariant Riemannian Submersions from Almost Hermitian Manifolds, Canadian Math. Bull., 56 (2013) 173-187.

55. Şahin, B., Riemannian Submersions from Almost Hermitian Manifolds, Taiwan. J. Math., 17 (2013) 629-659.

56. Taştan, H. M., On Lagrangian Submersions, Hacett. J. Math. Stat., 43 (2014) 993-1000.

57. Taştan, H. M., Şahin, B. ve Yanan, Ş., Hemi-Slant Submersions, Mediterr. J. Math., Doi: 10.1007/s0009-015-0602-7.

58. Tripathi, M. M., Certain Basic Inequalities for Submanifolds in (κ, μ)-space, Recent Advances in Riemannian and Lorentzian Geometries, Baltimore, MD, 2003.

59. Tripathi, M. M., Chen-Ricci Inequality for Submanifolds of Contact Metric Manifolds, Adv. Math. Stud., 1 (2008) 111-134.

60. Vilcu, G. E., On Chen Invariants and Inequalities in Quaternionic Geometry, J. Ineq. Appl., 66 (2013).

61. Watson, B., Almost Hermitian Submersions, J. Diff. Geom., 1 (1976) 147-165.

62. Wei, S. W., The Unity of p-Harmonic Geometry, Recent Development and Analysis, Advanced Lectures in Mathematics 23, Higher Education Press and International Press, Beijing-Boston, 2012.

63. Yano, K. ve Kon, M., Structure on Manifolds, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1984.

64. Yoon, D. W., Inequality for Ricci Curvature of Slant Submanifolds in Costmplectic Space Forms, Turkish J. Math., 30 (2006) 43-56.

ÖZGEÇMİŞ

Şemsi MERİÇ, 16.11.1986 tarihinde Kilis de doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kilis de tamamladı. 2004 yılında Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü kazandı ve 2008 yılında mezun oldu. Aynı yıl Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı ve 2010 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. Daha sonra 2011 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başladı. 2012 yılında araştırma görevlisi olarak kadro aldığı Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne yatay geçiş yaptı. 2015 yılında TÜBİTAK' ın 2214 – Doktora sırası yurtdışı araştırma bursu programını kazanarak 6 ay süreliğine Romanya' ya gitti. Yabancı dili İngilizcedir. Ekim 2015 de evlenmiş ve "Eken" olan soyadı "Meriç" olarak değişmiştir.

Makaleler

1. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., Conformality of Semi-Riemannian Manifolds, Mediterr. J. Math., 13 (2016) 2185-2198.
2. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., A Characterization of the Riemann Extension in terms of Harmonicity, Czech. J. Math. (Kabul edildi)
3. Eken, Ş., Gülbahar, M. ve Kılıç, E., Some Inequalities for Riemannian Submersions, An. St. Univ. Al. I. Cuza Iasi. Math. (Kabul edildi)
4. Gülbahar, M., Eken Meriç, Ş., ve Kılıç, E., Sharp Inequalities Involving the Ricci Curvature for Riemannian Submersions, Kragujevac J. Math. (Kabul edildi)
5. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., A Harmonic Endomorphism in a Semi-Riemannian Context, Geometry, Integrability and Quantization XVII, Bulgar. Acad. Sci., Sofia, (2016) 172-181.

Uluslararası Konferanslarda Yapılmış sunumlar

1. Bejan, C.-L., Eken, Ş. ve Kılıç, E., Generalized Paracontact Metric Manifolds, International Workshop on Finite Type Submanifolds, June 2 - 4, 2016, Istanbul, Turkey, 1 - 1.
2. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., A Harmonic Endomorphism in a Semi-Riemannian Context, The 12-th International Workshop on Differential Geometry and Its Applications, September 23 - 26, 2015, Ploieşti, Romania, 10 - 10.
3. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., Harmonicity with respect to Riemann Extension, CAIM, 2015, September 17 - 20, 2015, Suceava, Romania, 55 - 55.
4. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., Conformality on Semi-Riemannian Manifolds, Seventeenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization, June 5 - 10, 2015, Varna, Bulgaria, 172 - 181.
5. Eken, Ş., Gülbahar, M. ve Kılıç, E., Some Inequalties for Riemannian Submersions, Riemannian Geometry and Applications to Engineering and Economics, RIGA-2014, May 19 - 21, 2014, Bucharest, Romania, 7 - 8.

Ulusal Konferanslarda Yapılmış Sunumlar

1. Gülbahar, M., Eken, Ş. ve Kılıç, E., Chen-Ricci Inequalities on Riemannian Manifolds Admitting a Riemannian Submersion, XIII. Geometri Sempozyumu, 26 - 30 Temmuz, 2015, İstanbul, Türkiye, 1 - 1.
2. Bejan, C.-L. ve Eken, Ş., Harmonicity in Semi-Riemannian Context, XIII. Geometri Sempozyumu, 26 - 30 Temmuz, 2015, İstanbul, Türkiye, 1 - 1.
3. Eken, Ş. ve Kılıç, E., Some Inequalities for Lagrangian Riemannian Submersions, XII. Geometri Sempozyumu, 23 - 26 Haziran, 2014, Bilecik, Türkiye, 107 - 107.
4. Eken, Ş. Kılıç, E. ve Sağıroğlu, Y., CR-Submanifolds of Kaehler-Finsler Manifolds, XI. Geometri Sempozyumu, 1-5 Temmuz, 2013, Ordu, Türkiye, 74-74.
5. Eken, Ş. ve Çöken, A. C., On Surfaces in Lorentz Space, VII. Geometri Sempozyumu, 29 Nisan – 2 Mayıs, 2010, Antalya, Türkiye, 127 - 127.

Katıldığı Bilimsel Kongre / Sempozyum ve Bilimsel Toplantılar

1. IV. Uluslararası Geometry Symposium, Zonguldak, July 17 - 21, 2006.
2. V. Ulusal Geometri Sempozyumu, Sakarya, 4 - 7 Temmuz 2007.
3. III. Geometri Sempozyumu, Eskişehir, 4 - 6 Temmuz 2005.