

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SOSYAL-EKONOMİK BİR NÜFUS MODELİ ÜZERİNE**

**DOKTORA TEZİ**

**Olgun CABRİ**

**OCAK 2016**

**TRABZON**



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**SOSYAL-EKONOMİK BİR NÜFUS MODELİ ÜZERİNE**

**Olgun CABRİ**

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde**  
**DOKTOR (MATEMATİK)**  
**Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

**Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 04/01/2016**

**Tezin Savunma Tarihi : 29/01/2016**

**Tez Danışmanı : Prof. Dr. İhsan ÜNVER**  
**İkinci Danışman : Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU**

**Trabzon 2016**

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Matematik Anabilim Dalında  
Olgun CABRİ**

**SOSYAL-EKONOMİK BİR NÜFUS MODELİ ÜZERİNE**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 05 /01 /2016 gün ve 1634 sayılı  
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda  
DOKTORA TEZİ  
olarak kabul edilmiştir.**

**Jüri Üyeleri**

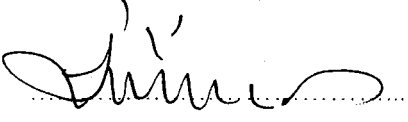
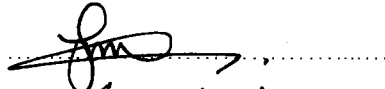

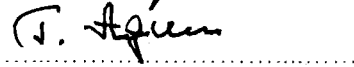
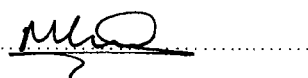
**Başkan : Prof. Dr. İhsan ÜNVER**

**Üye : Prof. Dr. Funda KARAÇAL**

**Üye : Prof. Dr. Orhan AYDIN**

**Üye : Prof. Dr. Gabil ADİLOV**

**Üye : Prof. Dr. Murat SUBAŞI**

**Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ  
Enstitü Müdürü**

## ÖNSÖZ

Çalışmanın başından sonuna kadar olan süreçte emeği, öneri ve yönlendirmeleri ile önemli katkıda bulunan, öğrenimim boyunca en başından beri bana inanan, bana yol gösteren, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım çok değerli danışman hocalarım Sayın Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Sayın Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU ve sonsuz teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Aynı zamanda çalışma süresince, değerli öneri ve yardımlarıyla katkıda bulunan tez izleme jüri üyeleri hocalarım Prof. Dr. Funda KARAÇAL ve Prof. Dr. Orhan AYDIN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Yardımlarıyla katkıda bulunan KTÜ Fen Fakültesi Matematik Bölümü ve Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü mensuplarına teşekkür ederim.

Tüm eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, özellikle değerli babam Hayrettin CABRİ'ye, sevgili annem Gönül CABRİ'ye, eşim Havva Aydın CABRİ'ye ve kardeşlerime şükranlarımı sunarım.

Olgun CABRİ

Ocak 2016

## **TEZ ETİK BEYANNAMESİ**

Doktora tezi olarak sunduğum SOSYAL-EKONOMİK BİR NÜFUS MODELİ ÜZERİNE başlıklı bu çalışmayı, baştan sona kadar danışmanlarım Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'nun sorumluluğunda tamamladığımı, veri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri kendim yaptığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma süresince bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 29/01/2016

Olgun CABRİ

## İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET .....	VII
SUMMARY .....	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	IX
TABLolar DİZİNİ.....	X
1.GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Para Birikim Modeli.....	6
1.2.1. Sonlu Uzayda Para Birikimi Modeli İçin Sınır Koşulları .....	12
1.2.1.1. Maksimum ve Minimum Birikimin Sınırlandığı Sınır Koşulları.....	12
1.2.1.2. Aile Akışını İçeren Sınır Koşulları.....	13
1.2.1.3. İntegral Sınır Koşulları.....	14
1.3. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler .....	17
1.4. Isı Denklemi .....	19
1.4.1. Isı Denklemine İndirgenebilen Denklemler .....	20
1.4.2. Isı Denklemine Temel Çözümü .....	21
1.5. Lineer Diferansiyel Denklemler Teorisi.....	25
2.YAPILAN ÇALIŞMALAR ve BULGULAR .....	42
2.1. Minimum Birikimin ve Toplam Para Miktarının Verildiği Para Birikim Modeli .....	42
2.2. Toplam Aile Sayısı ve Toplam Para Miktarı Verilen Para Birikim Modeli .....	51
2.3. Başka Bölgelerden Lineer Göç Alan Para Birikim Modeli 1 .....	61
2.3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Özdeğerlerin Bulunuşu .....	66
2.4. Başka Bölgelerden Lineer Göç Alan Para Birikim Modeli 2 .....	68
2.4.1. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Özdeğerlerin Bulunuşu .....	73
2.5. Sonlu Fark Yöntemiyle Para Birikim Modelinin Çözümü.....	74
2.5.1. Minimum Birikim ve Toplam Para Miktarı Verilen Para Birikim Modeli .....	74
2.5.1.1. Çizgiler Metodu.....	74
2.5.1.2. Crank Nicolson Yöntemi.....	78
2.5.2. Toplam Aile Sayısı ve Toplam Para Miktarının Verildiği Para Birikim Modeli .....	83

2.5.2.1. ÇizgilerMetodu.....	83
2.5.2.2. Crank Nicolson Yöntemi.....	85
3. BULGULAR ve TARTIŞMA .....	91
4. SONUÇLAR.....	92
5. ÖNERİLER .....	93
6. KAYNAKLAR.....	94
7. EKLER .....	98
ÖZGEÇMİŞ	

Doktora Tezi

## ÖZET

SOSYAL-EKONOMİK BİR NÜFUS MODELİ ÜZERİNE

Olgun CABRİ

Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. İhsan ÜNVER ve Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

2016, 97 Sayfa, 1 Ek

Bu tezde ısı denklemi ile ifade edilebilen bir para birikim modeli, integral sınır koşullarına sahip olduğu durumda incelenmiştir. Fourier yöntemi ile problemlere karşılık gelen Sturm Liouville problemleri elde edilmiştir. İki farklı problem için elde edilen Sturm Liouville probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları bulunarak sınır değer problemlerinin çözümü yazılmıştır. Ayrıca, Çizgiler yöntemi ve Crank Nicolson yöntemleri ile integral sınır şartlarına sahip para birikim modellerine uygulanarak sonuçlar karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Sturm-Liouville Problemi, İntegral Sınır Şartı, Lokal Olmayan Sınır Koşulu, Para Birikim Modeli



PhD. Thesis

**SUMMARY**

ON A SOCIAL AND ECONOMICAL POPULATION MODEL

Olgun CABRİ

Karadeniz Technical University

The Graduate School of Natural and Applied Sciences

Mathematics Graduate Program

Supervisor: Prof. Dr. İhsan ÜNVER and Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

2016, 97 Pages, 1 Appendix

In this thesis a family saving model which can be represented by heat equation is studied with different integral boundary conditions. By the Fourier method, corresponding Sturm-Liouville problems are obtained. Eigenvalues and eigenfunctions of the two different problems are given and solutions of the problems are showed. In addition, Method of Lines method and Crank Nicolson method are applied to family saving model with integral boundary conditions. Results of the numerical methods are compared.

**Keywords:** Sturm-Liouville Problem, Integral Boundary Conditions, Nonlocal Boundary Condition, Family Saving Model

## ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. $\Delta t$ süresinde bir noktanın aldığı yol.....	8
Şekil 2. $t$ ve $t + \Delta t$ zaman aralıklarına uygun ailelerin birikimi.....	9
Şekil 4. $t = 0$ anında $u(x, t)$ grafiği .....	23
Şekil 5. $t > 0$ iken $u(x, t)$ grafiği .....	23
Şekil 4. $\tan k = k$ grafiği .....	47
Şekil 5. $k \sin k + \cos k = 2$ grafiği .....	58
Şekil 6. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği .....	80
Şekil 7. Crank Nicolson metodu ile çözümün grafiği .....	81
Şekil 8. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği .....	82
Şekil 9. Crank Nicolson metodu ile çözümün grafiği .....	83
Şekil 10. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği .....	88
Şekil 11. Crank Nicolson metodu ile çözümün grafiği .....	88
Şekil 12. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği .....	90

## TABLULAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. $q(x)=x$ için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler.....	67
Tablo 2. $q(x)=1/(1+100x)$ için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler.....	68
Tablo 3. $q(x) = x$ için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler .....	73
Tablo 4. $q(x) = 1/(1+100x)$ için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler .....	74
Tablo 5. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar .....	80
Tablo 6. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar .....	82
Tablo 7. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar .....	87
Tablo 8. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar .....	89

## SEMBOLLER DİZİNİ

$C[a, b]$	[a,b] aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
$L_2[a, b]$	[a,b] aralığında karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$H^1[a, b]$	Sobolev uzayı, [a,b] aralığında karesi ve türevinin karesi integrallenebilen fonksiyonlar uzayı
$U_k(y)$	Sınır koşulları
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik determinant
$grad(u)$	$u$ fonksiyonunun gradyanı
$div(u)$	$u$ vektör alanının diverjansı
$\Delta u$	$u$ 'nun Laplasyeni
$L$	Diferansiyel operatör
$\lambda$	Özdeğer
$\delta$	Kronecker delta sembolü

## 1.GENEL BİLGİLER

### 1.1. Giriş

Son yıllarda birçok fiziksel olay içerisinde aranan çözümün integralini barındıran, klasik olmayan parabolik veya hiperbolik başlangıç-sınır değer problemler ile modellendi. Bu integral hem kısmi diferansiyel denklemin kendisinde hem de sınır koşulunda ortaya çıkabilir (Fairweather ve Saylor, 1991).

Lokal olmayan sınır koşulları, aranan çözümün veya çözümün türevlerinin farklı sınır noktalarında veya iç noktadaki değerler ile verilen bağlantıdır. Aranan çözümün integral biçiminde sınır koşulları da lokal olmayan sınır koşullarına indirgenir (Samarskii, 1980).

Uygulamada kimyasal difüzyon, ısı iletim süreci, termoelastisite, nüfus dinamiği, titreşim problemleri, nükleer reaktör dinamiği ve bazı biyolojik süreçler gibi alanlarda lokal olmayan sınır problemleri ile karşılaşılır (Fairweather ve Saylor, 1991).

Literatürde integral sınır koşuluna sahip parabolik ve hiperbolik başlangıç-sınır değer problemleri ile ilgili yapılan çalışmaları verelim.

Klasik olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \quad (1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T \quad (3)$$

$$\int_0^{b(t)} u(x, t) dx = m(t), \quad 0 < b(t) < 1, \quad 0 < t \leq T \quad (4)$$

(1)-(4) parabolik başlangıç sınır problemi bir çok fiziksel olayı modeller. Katı kimyasalın difüzyon süreci için  $u(x, t)$  kimyasalın konsantrasyonunu gösterirse  $m(t)$ ,  $0 < x < b(t)$  arasında  $t$  zamanında toplam kimyasalın kütlesini ifade eder. Isı iletim süreci için  $u(x, t)$

sıcaklığı gösterirse  $m(t)$ ,  $0 < x < b(t)$  arasında  $t$  zamanında toplam iç enerjiyi belirtir (Cannon ve Van Der Hoek, 1980).

Cannon ve Van Der Hoek (1986) (1)-(4) problemi için çözümün varlığını, tekliğini ve başlangıç değerlerine bağlılığını gösterdi.

Kamynin (1963)  $S_T = \{(x, t) : X_1(t) < x < X_2(t), 0 < t < T\}$  bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} + c(x, t)u + f(x, t)$$

lineer parabolik denkleminin

$$u(x, 0) = h(x)$$

başlangıç koşulu ve

$$u(X_2(t), t) = \varphi(t)$$

$$\int_{X_1(t)}^{X_2(t)} g(x, t)u(x, t)dx = E(t)$$

sınır koşulları altında varlığını ve tekliğini inceledi.

Ionkin (1977)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (6)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (7)$$

$$\int_0^1 u(x, t)dx = m(t) \quad (8)$$

probleminin çözümü için (8) integral sınır koşulunu

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = m'(t) \quad (9)$$

(9) sınır şartına dönüştürerek problemin varlığını, tekliğini ve başlangıç değerlerine olan bağlılığını kanıtladı. Ionkin, Fourier yöntemiyle elde edilen Sturm Liouville probleminin özdeşlenik olmadığını, sınır koşullarının zayıf regüler olduğunu ve karşılık gelen özfonksiyonların tam sistem oluşturmadığını gösterdi. Ionkin, ek özfonksiyonlar yardımıyla sınır probleminin özfonksiyonlarını tam sisteme tamamlamıştır.

Ionkin ve Moisiyev (1977)

$$u_t = u_{xx} - q(x)u + f(x,t)$$

kısmi diferansiyel denklemi için en genel halde sınır koşullarının

$$a_0u_x(0,t) + a_1u_x(1,t) + b_0u(0,t) + b_1u(1,t) = 0$$

$$c_0u_x(0,t) + c_1u_x(1,t) + d_0u(0,t) + d_1u(1,t) = 0$$

kuvvetli regüler olması durumunda çözümün varlığını, tekliğini ve başlangıç değerlerine olan bağlılığını gösterdi.

Lin (1988) (1)-(4) probleminde  $f(x,t)$  yerine nonlinear  $f(x,t,u,u_x)$  olarak çözümün varlığını, tekliğini ve başlangıç değerlere olan bağlılığı üzere çalışmalar yapmıştır.

Day (1983) termoelastik bir çubuğun yarı statik bükülmesi üzerine yaptığı çalışmalarda entropinin

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \quad (10)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (11)$$

$$u(0,t) = \int_0^1 K_0(x)u(x,t)dx + g_0(t) \quad (12)$$

$$u(1,t) = \int_0^1 K_1(x)u(x,t)dx + g_1(t) \quad (13)$$

parabolik tipli kısmi diferansiyel denklemi sağlandığını gösterdi.

Ayrıca Day (1983)

$$\int_0^1 |K_0(x)| dx < 1, \quad \int_0^1 |K_1(x)| dx < 1$$

şartı altında (10)-(13) denklemlerinin varlığını, tekliğini ve çözümün bazı analitik özelliklerini inceledi.

Bouziani (1996)  $Q = (0, b) \times (0, T)$  dikdörtgensel bölgede  $a(t), a'(t)$  fonksiyonları sınırlı olmak üzere

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + (-1)^m a(t) \frac{\partial^{2m} u}{\partial x^{2m}} = f(x, t)$$

denklemini için başlangıç koşulu

$$l(u) = u(x, 0) = \varphi(x)$$

ve sınır şartları

$$\int_0^b x^k u(x, t) dx = 0, \quad k = 0, \dots, 2m - 1$$

olan problem için çözümün varlığını ve tekliğini göstermiştir.

Popov ve Tıkhonov (2004) parabolik tip denklem için

$$\int_0^T u(x, t) dt = \varphi(x)$$

zamana göre lokal olmayan sınır koşullarını incelemiştir.

Blasio (1983) balık popülasyonu üzerinde birinci dereceden hiperbolik başlangıç sınır değer problemi olan yaş temelli nüfus modelinin çözümünü inceledi. Blasio tarafından incelenen yaş temelli nüfus modeli,  $u(a, t)$   $t$  zamanında  $a$  yaşında olan nüfusun yoğunluğunu göstermek üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = -m(x)u, \quad x \in [0, A]$$

$$u(0, t) = f(E(t))E(t)$$



$$u(x, 0) = u_0(x)$$

şeklindedir. Burada

$$E(t) = \int_0^A b(s)u(s, t)ds$$

ile verilir. Bu problemde  $m(t)$  ve  $b(t)$  sırasıyla ölüm ve doğum oranını  $E(t)$ , anneden gelen yumurta üretimini ve  $f$  ise avlanma sonucunda hayatta kalan yumurta oranını gösterir.

Lokal olmayan sınır değer problemlerinin ters problemler ile de sıkı ilişkisi vardır. İntegral sınır şartı bu problemlerde ek koşul olarak ortaya çıkar. Örnek olarak Cannon ve Lin (1988)

$$u_t = u_{xx} + p(t)u + F(x, t, u, u_x), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T$$

parabolik kısmi diferansiyel denklem için başlangıç koşulu

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1$$

sınır koşulları

$$u_x(0, t) = f(t), \quad u_x(1, t) = g(t), \quad 0 < t \leq T$$

olan problem için

$$\int_0^1 \psi(x, t)u(x, t)dx = E(t), \quad 0 < t \leq T$$

şeklinde ek koşul alarak  $(u, p)$  çiftini bulma problemini inceledi.

İntegral sınır şartına sahip problemler için bir çok sayısal çalışmalar yapılmıştır. Cannon, Lin ve Wang (1990), (1)-(4) problemi için Crank Nicolson temelinde sonlu fark yöntemi sunmuştur. Kullanılan yöntem kararlı,  $x$  ve  $t$  ye göre ikinci dereceden hassaslığa sahiptir. Bu problem için Cannon ve Van Der Hoek (1982) çalışmalarında sonlu fark yöntemi, Cannon vd (1987) çalışmasında Galerkin şeması geliştirdiler.

Fairweather ve Saylor (1991) (1)-(4) problemi için keller box şemasını geliştirdi ve Galerkin şeması ile karşılaştırdı. Bu çalışmada 1 örnek hariç Keller-Box şemasının daha kesin sonuçlar verdiğini gösterilmiştir.

Murthy ve Verver (1992), Runge Kutta Chebyshev (RKC) metodunu (4) integral sınır şartını

$$u_x(0,t) = u_x(b,t) + m'(t)$$

Neuman tipli sınır şartına dönüştürerek uyguladı.

Gumel (1999) çizgiler metodunu (1)-(4) problemine uygulamıştır. Çizgiler yöntemi ile benzer çalışmalar Ang (2003-2005), Ekolin (1991), Dehghan (2003) ve Rehmana vd (2011) tarafından yapılmıştır.

Wang ve Lin (1990) (10)-(13) denkleminde Crank Nicolson metodu uyguladı. Bu problemde integral sınır şartlarına ağırlık içerisinde Simpson kuralını kullanmıştır.

Bu tezde de ekonomide karşılaşılan parabolik tipli kısmi diferansiyel denklem ile verilen para birikim modelinin integral sınır şartına sahip olduğu durum incelenmektedir. Bu amaçla önce Erofeenko ve Kozlovski (2011) tarafından çalışılan para birikim modelini ve integral sınır şartlarını verelim.

## 1.2. Para Birikim Modeli

Bir ailenin para birikim denklemi,  $x(t)$ ,  $t$  anındaki para birikimini göstermek üzere

$$dx = F(x,t)dt + G(x,t)dX, \quad G \geq 0 \quad (14)$$

ile verilir. (14) denkleminde  $F(x,t)$  ailenin gelir ile gider oranı arasındaki farkını veya birikim hızını temsil eder. Birimi [TL]/ay'dır.  $X$  Markov stokastik süreci olmak üzere  $G(x,t)dX$  terimi ise ailenin rasgele gelir veya gider oranını gösterir.

Bir  $N_0$  sayıda aile kümesi düşünelim. Ailelerin bireysel birikimini göz ardı ederek her bir aile birikiminin (14) denklemini sağladığı varsayalım. Zaman değiştiğinde bu aile kümesinde birikimin dağılımı için model oluşturulmak istensin.

Bu amaçla OX eksenini üzerinde  $N_0$  tane nokta alalım. Her bir nokta  $t$  anında bir ailenin birikimini gösterebilir.

$\Delta Q(x, t)$ ,  $t$  anında  $[x, x + \Delta x]$  aralığına yerleşen ailelerin sayısı olsun.  $t$  anında  $x$  birikimine sahip ailelerin yoğunluğu  $u(x, t)$

$$u(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(x, t)}{\Delta x} \quad (15)$$

ile verilir. Açık ki

$$Q(t) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx \quad (16)$$

$t$  anında birikimi  $[x_1, x_2]$  aralığında yerleşen ailelerin sayısı olur. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx = N_0$$

olur.

$\Omega_0 = (-\infty < x < x_1) \cup (x_2 < x < \infty)$  olsun. Zamanla ailelerin birikimi değişir.  $[t_1, t_2]$  zaman aralığında birikim değişiminden dolayı ailelerin bir kısmı  $[x_1, x_2]$  aralığına girer bir kısmı ise bu aralıktan çıkmış olur.  $t_1$  den  $t_2$  ye geçen zaman aralığında  $[x_1, x_2]$  aralığında aile dengesi için bir bağıntı yazalım.

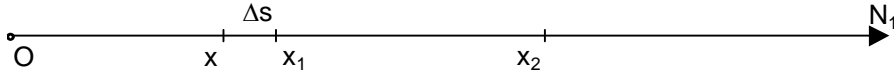
$$\Delta Q_{t_1 t_2} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 \quad (17)$$

Burada  $\Delta Q_{t_1 t_2}$ ,  $t_1$  den  $t_2$  ye geçen zaman aralığında  $[x_1, x_2]$  aralığında aile sayısının değişimidir.  $\Pi_1$  bu zaman aralığında belirli sabit gelir veya gider ile  $[x_1, x_2]$  aralığına yerleşen ailelerin sayısı,  $\Pi_2$  rasgele artış ve azalmalar göre  $[x_1, x_2]$  aralığına yerleşen ailelerin sayısı,  $\Pi_3$  bu zaman süresince başka aile kümelerinden  $N$  kümesine gelen ve  $[x_1, x_2]$  aralığına düşen ailelerin sayısı veya  $N$  kümesinde birikimi  $[x_1, x_2]$  aralığında olup başka aile kümelerine giden ailelerin sayısı olsun.

$\Delta Q_{t_1 t_2}$  yi hesaplayalım.

$$\begin{aligned}\Delta Q_{t_1 t_2} &= Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) dx - \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) \Big|_{t=t_1}^{t=t_2} dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} dt dx\end{aligned}\quad (18)$$

$\Pi_1$  hesaplayalım.  $\Delta t$  süresinde OX ekseninde bir noktanın gittiği yol  $\Delta S = F(x, t)\Delta t$  olur. Burada  $\Delta S$  aile birikiminin değişimini gösterir. Yani  $\Delta t$  zaman



Şekil 1.  $\Delta t$  süresinde bir noktanın aldığı yol

süresince  $\Delta S$  aralığında yerleşen bütün aileler  $[x_1, x_2]$  aralığına dahil olur.

$x_1$  noktasının komşuluğunda  $u(x, t)$  nüfus yoğunluğu  $u(x_1, t)$  ye eşittir. O halde  $\Delta t$  süresinde  $x_1$  den geçerek  $[x_1, x_2]$  aralığına dahil olan ailelerin sayısı

$$M(x_1) = u(x_1, t)\Delta S = u(x_1, t)F(x_1, t)\Delta t$$

ifadesi ile tanımlanır. Benzer olarak  $x_2$  noktası için

$$M(x_2) = -u(x_2, t)F(x_2, t)\Delta t$$

ifadesi  $\Delta t$  süresinde  $x_2$  den geçerek  $[x_1, x_2]$  aralığından çıkan ailelerin sayısını verir.

Dolayısıyla  $\Delta t$  süresinde  $[x_1, x_2]$  aralığına belirli artım ve azalmalar ile yerleşen aile sayısı

$$\Delta M = -[u(x_2, t)F(x_2, t) - u(x_1, t)F(x_1, t)]\Delta t$$

olarak bulunur.  $t_1$  den  $t_2$  ye kadar  $\Delta t^i$  zaman aralıklarına göre toplanırsa

$$\sum_i \Delta M_i = -\sum_i [u(x_2, t^i)F(x_2, t^i) - u(x_1, t^i)F(x_1, t^i)]\Delta t^i \xrightarrow{\Delta t^i \rightarrow 0}$$

$$\xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} - \int_{t_1}^{t_2} [u(x_2, t)F(x_2, t) - u(x_1, t)F(x_1, t)] dt = - \int_{t_1}^{t_2} u(x, t)F(x, t) \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (uF) dx dt$$

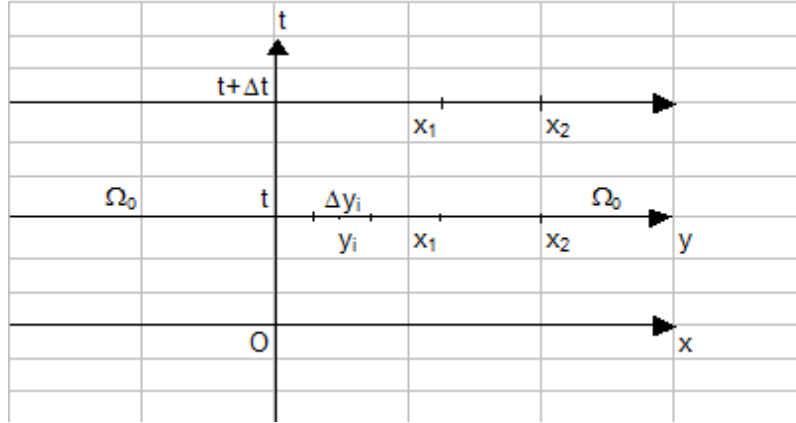
elde edilir. Dolayısıyla

$$\Pi_1 = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (u(x, t)F(x, t)) dx dt \quad (19)$$

bulunur.

$\Pi_2$  yi hesaplayalım.  $t$  ve  $t + \Delta t$  zaman aralıklarına uygun ailelerin birikimi gösteren Şekil 3'teki gibi iki OX eksenini göz önüne alalım.

$t$  anından başlayarak  $t + \Delta t$  anına kadar rasgele artış ve azalmalara göre  $\Omega_0$  'dan  $[x_1, x_2]$  aralığına düşen ailelerin sayısını bulalım.



Şekil 2.  $t$  ve  $t + \Delta t$  zaman aralıklarına uygun ailelerin birikimi

Bunun için  $\Omega_0$  bölgesini  $\Delta y_i$  uzunluklu elementer aralıklara bölelim.  $t$  anında  $\Delta y_i$  elementer aralığında  $u(y_i, t)\Delta t_i$  sayıda aile vardır. Bu aileler  $\Delta t$  zaman aralığında OX eksenini boyunca rasgele olarak dağılır.  $t + \Delta t$  anında bu dağılımın yoğunluğu  $\rho(y_i, t, x, t + \Delta t)$  olsun.  $t + \Delta t$  anında  $y_i$  noktasından  $[x_1, x_2]$  aralığına düşme olasılığı

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(y_i, t, x, t + \Delta t) dx$$

olur. O halde  $\Delta y_i$  aralığından rasgele olarak  $[x_1, x_2]$  aralığına yerleşen aile sayısı

$$\Delta L_i = \int_{x_1}^{x_2} \rho(y_i, t; x, t + \Delta t) dx u(y_i, t) \Delta y_i$$

olur. Bu değerler  $\Omega_0$  kümesinin bölündüğü tüm  $\Delta y_i$  aralıklarına göre toplanırsa

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta L_i &= \sum_i \int_{x_1}^{x_2} \rho(y_i, t; x, t + \Delta t) dx u(y_i, t) \Delta y_i \xrightarrow{\Delta y_i \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{\Delta y_i \rightarrow 0} \int_{\Omega_0} \left[ \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx \right] dy \equiv I_1 \end{aligned}$$

integrali elde edilir.  $I_1$  integrali  $\Delta t$  zaman süresince  $\Omega_0$  kümesinden  $[x_1, x_2]$  aralığına düşen ailelerin sayısını verir.

Şimdi  $[x_1, x_2]$  aralığında  $\Omega_0$  kümesine düşen ailelerin sayısını bulalım. Açık ki  $[x_1, x_2]$  dan  $\Omega_0$  kümesine düşen noktaların sayısı

$$I_2 = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{\Omega_0} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx \right] dy.$$

Sonuçta  $\Delta t$  zaman süresinde  $[x_1, x_2]$  aralığındaki aile sayısındaki değişim

$$\Delta I = I_1 - I_2 = \int_{\Omega_0} \left[ \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx \right] dy - \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{\Omega_0} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dx \right] dy$$

olarak elde edilir. İntegrallerin yerini değiştirilerek ve dönüşümler yapılarak

$$\begin{aligned} \Delta I &= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{\Omega_0} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dy \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dy dx - \\ &- \int_{x_1}^{x_2} \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dy dx - \int_{\Omega_0} \left[ \int_{x_1}^{x_2} u(y, t) \rho(y, t; x, t + \Delta t) dy \right] dx = \end{aligned}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(y,t) \rho(y,t; x, t + \Delta t) dy \right] dx - \int_{-\infty, x_1}^{\infty, x_2} u(y,t) \rho(y,t; x, t + \Delta t) dy dx$$

elde edilir.

Olasılık yoğunluğu için  $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(y,t, x, t + \Delta t) u(y,t) dx = 1$  eşitliğini dikkate alınırsa

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} u(y,t) \rho(y,t; x, t + \Delta t) dy - u(x,t) \right] dx$$

olarak bulunur. Ayrıca yoğunluk fonksiyonunun

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(y) \rho(y,t; x, t + \Delta t) dy - u(x) = \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (c(x,t)u(x)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x,t)u(x)) \right] \Delta t + o(\Delta t)$$

özelliği ile

$$\Delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (cu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (bu) \right] dx \Delta t.$$

olarak elde edilir.

$[t_1, t_2]$  zaman aralığını  $\Delta t_i$  mümkün elementer aralıklara bölerek ve bu integrallerin ifadelerini toplayarak

$$\begin{aligned} \sum_i \Delta I_i &= \sum_i \int_{x_1}^x \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (c(x, t^i)u(x, t^i)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x, t^i)u(x, t^i)) \right] dx \Delta t^i \xrightarrow{\Delta t^i \rightarrow 0} \\ &\xrightarrow{\Delta t^i \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} (c(x,t)u(x,t)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (b(x,t)u(x,t)) \right] dx dt \equiv \Pi_2 \end{aligned} \quad (20)$$

olarak bulunur.

Şimdi  $\Pi_3$  ü bulalım.  $t_1$  den  $t_2$  ye geçen zaman sürecinde başka aile kümelerinden bazı aileler  $N$  kümesine gelip  $[x_1, x_2]$  aralığına yerleşir veya  $[x_1, x_2]$  aralığında olup başka aile kümelerine göç eden aileler vardır. Bu zaman sürecinde  $[x_1, x_2]$  aralığına göç ile değişimi gösteren yardımcı bir  $f(x,t)$  fonksiyonu alınsın. Açıktır ki

$$\Pi_3 = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x,t) dx dt \quad (21)$$

$f(x,t) > 0$  ise  $t_1$  den  $t_2$  ye geçen zaman sürecinde başka aile kümelerinden  $N$  kümesine gelip  $[x_1, x_2]$  aralığına yerleşen ailelerin, göç ile gidenlerden fazla olduğunu gösterir. Eğer  $f(x,t) < 0$   $[x_1, x_2]$  aralığında olup başka aile kümelerine göç eden ailelerin sayısının fazla olduğunu gösterir.

(17) eşitliğinde (18),(19),(20) ve (21) kullanılırsa

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (uF) dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[ - \frac{\partial}{\partial x} (cu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (bu) \right] dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} f dx dt$$

integral özdeşliği bulunur.

$[t_1, t_2]$  zaman aralığının ve  $[x_1, x_2]$  aralığının keyfiliğine ve ortalama değer teoremine göre integraller kaldırılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} ((c + F)u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (bu) + f \quad (22)$$

parabolik kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Literatürde bu tipli denklemler Kolmogorov denklemleri olarak da bilinir. Şayet stokastik süreç yoksa  $c = 0$  ve  $b = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Fu) = f$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

### 1.2.1. Sonlu Uzayda Para Birikimi Modeli İçin Sınır Koşulları

#### 1.2.1.1. Maksimum ve Minimum Birikimin Sınırlandığı Sınır Koşulları

Bir  $N = (0 \leq x \leq l)$  aileler kümesinde (22) birikim modelini ele alınsın. Bu aile kümesi için  $t=0$  anında birikimin yoğunluğu verilsin. Uçlarda sınır koşulları



$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0$$

olarak verilir. Yani çok büyük ve çok küçük birikime sahip olan aillerin yoğunluğu sıfıra yaklaşır. Bu durumda model

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) = f \quad D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < l),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geq 0,$$

şeklindedir.

### 1.2.1.2. Aile Akışını İçeren Sınır Koşulları

Bir  $[x_1, x_2]$  aralığındaki ailelerin sayısındaki değişim (16) ve (20) kullanılarak

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \int_{x_1}^{x_2} \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(Cu) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) \right] dx = \Pi(x_1, t) - \Pi(x_2, t)$$

olarak bulunur. Burada  $\Pi(x, t)$ ,  $x$  noktasından pozitif yönde geçen (akan) ailelerin sayısıdır ve

$$\Pi(x, t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(b(x, t)u(x, t)) + C(x, t)u(x, t)$$

şeklindedir. Şayet  $\Pi(x_1, t) = 0$ ,  $\Pi(x_2, t) = 0$ , ise  $\frac{dQ(t)}{dt} = 0$  dır. Yani bu aralıktaki ailelerin

sayısı  $Q(t) = N_0$  sabittir. Böylece  $0 \leq x \leq l$  aralığında akış olduğunda sınır koşulları

$$\Pi(0, t) = \alpha_1(t), \quad \Pi(l, t) = \alpha_2(t).$$

şeklinde tanımlanır. Buradan başlangıç koşulu ve sınır koşulları yazıldığında kısmi diferensiyel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) = f \quad D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < l),$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l,$$

$$\left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(bu) + Cu \right) \Big|_{x=0} = \alpha_1(t), \quad \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(bu) + Cu \right) \Big|_{x=l} = \alpha_2(t), \quad t \geq 0,$$

olarak elde edilir.

### 1.2.1.3. İntegral Sınır Koşulları

$[0, l]$  aralığını  $\Delta x_i$  uzunluklu  $I_i = [x^i, x^i + \Delta x^i]$  aralıklara bölelim. Birikimin yoğunluğu tanımına göre

$$u(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q(x, t)}{\Delta x}$$

olduğundan o halde  $I_i$  aralığında  $\Delta Q_i = u(x^i, t) \Delta x^i$  tane aile vardır. Her bir  $I_i$  aralığındaki ailelerin birikimi  $x_i$  olduğundan bu aralıktaki aillerin toplam birikimi

$$\Delta K_i = x^i u(x^i, t) \Delta x^i$$

olur. Elementer aralıklara göre toplanırsa aralığındaki  $[0, l]$  toplam birikim

$$\sum_i \Delta K_i = \sum_i x^i u(x^i, t) \Delta x^i \xrightarrow{\Delta x_i \rightarrow 0} \int_0^l x u(x, t) dx = K_0(t)$$

olarak bulunur.  $K_0(t)$ , t anında  $[0, l]$  aralığındaki toplam birikimi gösteren fonksiyondur.

Sınır koşulları birleştirilirse sınır koşullarının biri lokal olmayan parabolik kısmi diferensiyel denklem

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) = f, \quad D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < l) \quad (23)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (24)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^l x u(x, t) dx = K_0(t), \quad t \geq 0 \quad (26)$$

elde edilir.

Ayrıca  $\Delta Q_i = u(x^i, t) \Delta x^i$  olduğundan  $u|_{x=0} = 0$  sınır koşulu yerine

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Cu) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(bu) = f, \quad D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < l) \quad (27)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (28)$$

$$\int_0^l u(x, t) dx = N_0(t), \quad t \geq 0 \quad (29)$$

$$\int_0^l x u(x, t) dx = K_0(t), \quad t \geq 0 \quad (30)$$

olarak alınırsa iki tane lokal olmayan sınır koşullarından ibaret problem elde edilir. Burada  $N_0(t)$ , aralıktaki ailelerin sayısını belirtir (Erofeenko ve Kozlovski, 2011).

Tez iki bölümden oluşur. Tezin 1. bölümde (23)-(26) ve (27)-(30) kısmi diferansiyel denklemlerinde  $f = f(x, t)$  olmak üzere para birikim modelinin özel durumu olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < 1) \quad (31)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (32)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (33)$$

$$\int_0^l x u(x, t) dx = K_0(t), \quad t \geq 0 \quad (34)$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad D = (0 < t < \infty) \times (0 < x < l) \quad (35)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (36)$$

$$\int_0^l u(x,t) dx = N_0(t), \quad t \geq 0 \quad (37)$$

$$\int_0^l x u(x,t) dx = K_0(t), \quad t \geq 0 \quad (38)$$

kısmi diferansiyel denklemlerinin çözümü incelenmektedir. Ayrıca (31)-(34) ve (35)-(38) para birikim modeli  $f = q(x)u + f(x,t)$  olmak üzere dönüştürülen integral sınır koşulları alınarak elde edilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u + f(x,t) \quad (39)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (40)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (41)$$

$$u_x(1,t) - u(1,t) = \alpha(t) \quad (42)$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u + f(x,t) \quad (43)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (44)$$

$$u_x(1,t) - u_x(0,t) = \alpha(t) \quad (45)$$

$$u_x(1,t) - u(1,t) + u(0,t) = \beta(t) \quad (46)$$

kısmi diferansiyel denklemin çözümü incelenmiştir.

Tezin 2. bölümünde (31)-(34) ve (35)-(38) kısmi diferansiyel denklemlerine literatürde yer alan Çizgiler metodu ve Crank Nicolson sayısal yöntemleri uygulanmıştır.

### 1.3. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

**Tanım 1.3.1.**  $U \subset \mathbb{R}^n$  açık küme,  $x \in U$  ve  $u:U \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere bilinmeyen  $u(x)$  fonksiyonu ve onun kısmi türevlerini içerisinde barındıran denkleme kısmi diferansiyel denklem denir.

En genel halde  $k$ . mertebeden ( $k \geq 1$ ) kısmi diferansiyel denklem

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \dots, Du(x), u(x), x) = 0 \quad (47)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k-1} \times \dots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde bilinen bir fonksiyondur.

Kısmi diferansiyel denklemler  $L_x$  operatör olmak üzere

$$L_x u(x) = f$$

operatör formda da gösterilebilir.

**Tanım 1.3.2.**

i) Verilen  $a_\alpha$  ( $|\alpha| \leq k$ ) ve  $f$  fonksiyonları ile (47) denklemi

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f$$

formuna sahip ise lineer kısmi diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer  $f = 0$  ise lineer kısmi diferansiyel denklem homojen olarak adlandırılır aksi durumda kısmi diferansiyel denklem homojen olmayandır denir.

ii) Eğer (47) denklemi

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

formuna sahip ise yarı lineer kısmi diferansiyel olarak adlandırılır.

iii) Eğer (47)denklemini

$$\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \dots, Du, u, x) = 0$$

formuna sahip ise quazi lineer olarak adlandırılır.

iv) Diğer bütün formlarda kısmi diferansiyel denklem nonlinear olarak adlandırılır.

**Tanım 1.3.3.** Bir  $D$  bölgesinde tanımlanan, sürekli türevlenebilir türevlere sahip olan ve (47) eşitliğini sağlayan  $u(x)$  fonksiyonuna kısmi diferansiyel denkleminin klasik çözümü denir. Eğer  $u$  çözümü,  $D$  bölgesinin içindeki bazı noktalarda kendi veya kısmi türevleri sürekli değil ise bu çözüme zayıf çözüm veya genelleştirilmiş çözüm olarak adlandırılır.

**Tanım 1.3.4.** Kısmi diferansiyel denklemin bütün çözümlerinin koleksiyonuna genel çözüm denir.

**Tanım 1.3.5.** Bir bölgede başlangıç ve sınır değerleriyle verilen bir kısmi diferansiyel denklem aşağıdaki kriterleri sağlıyorsa iyi tanımlıdır denir.

- i) Varlık: En azından bir çözüm vardır.
- ii) Teklik: En fazla tek çözüm vardır.
- iii) Kararlılık: Verilen verilerdeki küçük değişiklik çözümde küçük değişimler üretmelidir.

**Tanım 1.3.6.** Uygulamada fiziksel durumdan dolayı ortaya çıkan, yardımcı koşulları sağlayan özel çözümler aranır. Bu yardımcı koşullar, başlangıç veya sınır koşulları olarak verilir.

Genel olarak sınır ve başlangıç koşulları 4 başlıkta toplanabilir.

i) Cauchy Şartı: Bilinmeyen fonksiyon  $u(x, t)$  veya  $u_t(x, t)$  'nin özel bir noktada  $t = 0$  veya  $t = t_0$  da değerleri ile tanımlanan koşuldur.

ii) Drihlet Şartı:  $u$  çözümü,  $D$  bölgesinin  $\partial D$  sınırının her noktasında tanımlandığı koşuldur.

iii) Neuman Koşulu:  $u$  çözümü,  $D$  bölgesinin  $\partial D$  sınırında  $\frac{\partial u}{\partial n}$  normal türev değerleriyle tanımlandığı koşuldur.

iv) Robin Koşulu:  $u$  çözümü,  $D$  bölgesinin  $\partial D$  sınırında  $\frac{\partial u}{\partial n} + au$  değerleriyle tanımlandığı koşuldur.

Bu tezde yukarıdaki sınır koşullarından farklı olarak  $u$  çözümünün integrali ile verilen sınır koşulları incelenmektedir. Bu tür sınır koşullarına lokal olmayan sınır koşulları denir.

#### 1.4. Isı Denklemi

$u(x, y, z, t)$  katı bir cisimde  $t$  anında  $(x, y, z)$  noktasında sıcaklığı gösterebilir.  $k$  cismin iletkenlik katsayısı,  $\rho$  cismin yoğunluğu,  $c$  özısı olmak üzere ısı denklemi

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \text{div}(k \text{ grad } u) + F(x, t)$$

ile verilir. Eğer cisim homojen ise ısı denklemi

$$u_t = a^2 \Delta u + F(x, t)$$

şeklindedir. Bir boyutta  $l$  uzunluğunda bir çubuk için ısı denklemi

$$u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t)$$

şeklindedir (Evans, 2010).

### 1.4.1. Isı Denklemine İndirgenebilen Denklemler

$$u_t = a(t)u_{xx}, \quad a(t) > 0$$

kısmi diferansiyel denklemde

$$A(t) = \int_0^t a(\eta)d\eta, \quad t = \phi(A(t))$$

değişken dönüşümü yapalım.  $\phi$ ,  $A$  'nın ters fonksiyonu olmak üzere  $U(x, \tau) = u(x, \phi(\tau))$  değişken dönüşümü yapılırsa

$$U_\tau = U_{xx}$$

kısmi diferansiyel denkleme indirgenir.

$$u_t = u_{xx} - b(t)u_x$$

kısmi diferansiyel denklemde  $x = \xi + \int_0^t b(\eta)d\eta$  olmak üzere

$$U(\xi, t) = u\left(\xi + \int_0^t b(\eta)d\eta, t\right)$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$U_t = U_{\xi\xi}$$

denkleme indirgenir.

$$u_t = u_{xx} - c(t)u$$

kısmi diferansiyel denklemde

$$v = u \exp\left[\int_0^t c(\eta)d\eta\right]$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$v_t = v_{xx}$$

ısı denklemine indirgenir.

Dolayısıyla



$$u_t = a(t)u_{xx} - b(t)u_x - c(t)u$$

kısmi diferansiyel denklemi yukarıdaki dönüşümler sayesinde ısı denklemine indirgenebilir (Cannon, 1984).

#### 1.4.2. Isı Denkleminin Temel Çözümü

Tek boyutta

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx < \infty$$

ile verilen Cauchy probleminin genel çözümünü bulmak için

$$U(k, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U(k, t) e^{ikx} dk$$

Fourier dönüşümü kullanalım. Bu dönüşüm ile ısı denklemini

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\partial U(k, t)}{\partial t} + k^2 U(k, t) \right] e^{ikx} dk = 0, \quad \forall x$$

denklemine dönüşür. Bu eşitlikten

$$\frac{\partial U(k, t)}{\partial t} + k^2 U(k, t) = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denkleminin çözümü

$$U(k, t) = F(k) e^{-k^2 t}$$

şeklindedir. Burada  $F(k)$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

başlangıç değeri  $f(x)$  'in Fourier dönüşümüdür. Ters Fourier dönüşümü uygulanırsa çözüm

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{-k^2 t} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} e^{ik(x-\xi)} dk d\xi$$

olarak elde edilir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-k^2 t} e^{ik(x-\xi)} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-(x-\xi)^2/4t}$$

olduğundan dolayı Cauchy probleminin çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} K(x-\xi, t) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada

$$K(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}$$

şeklinde olup bu fonksiyon ısı denkleminin temel çözümü olarak adlandırılır (Tikhonov ve Samarskii, 1963).

**Örnek:** Para birikim modelinde  $C > 0$  ve  $b$  sabit olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C \frac{\partial u}{\partial x}$$

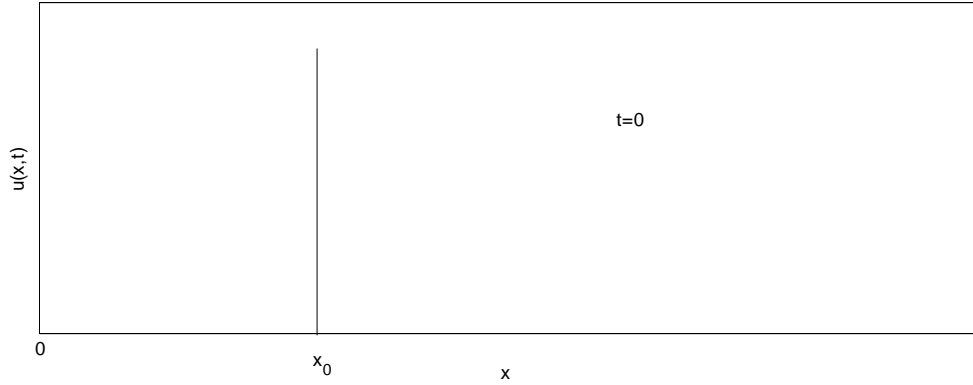
$$u(x, 0) = N_0 \delta(x - x_0), \quad -\infty < x < \infty$$

Cauchy problemini göz önüne alalım.  $t = 0$  anında  $\int_{-\infty}^{\infty} N_0 \delta(x - x_0) dx = N_0$  aile vardır.

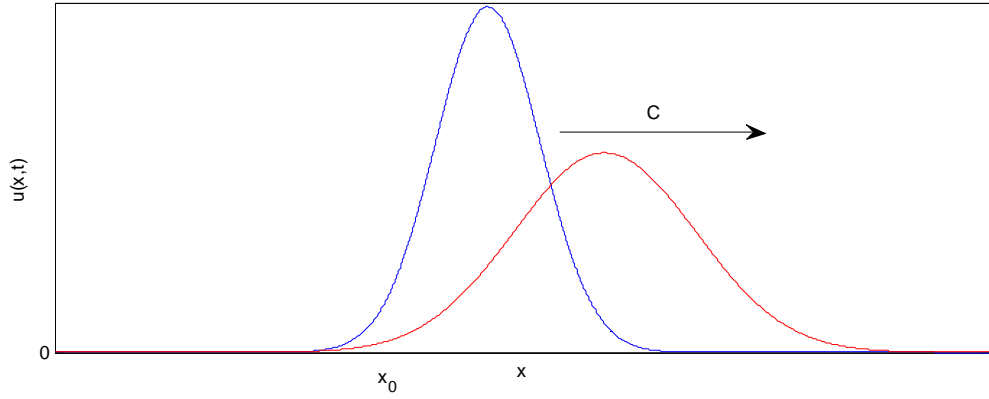
Temel çözüm kullanılarak  $u(x, t)$  çözümü

$$u(x, t) = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - x_0) K(x - \xi, t) d\xi = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi b t}} \exp \left\{ -\frac{(x - x_0 - C t)^2}{2 b t} \right\}$$

şeklindedir.



Şekil 4.  $t = 0$  anında  $u(x,t)$  grafiği



Şekil 5.  $t > 0$  iken  $u(x,t)$  grafiği

Şekil 4'de  $t=0$  anında  $x_0$  noktasında bulunan yoğunluk ilerleyen  $t$  değerlerinde Şekil 5 deki gibi dağılır. Yani bazı ailelerin birikim artarken bazı ailelerin birikimi ise azalır.  $C > 0$  ise bu dağılma sabit gelir olan  $C$  hızıyla sağa doğru hareket ederek gerçekleşir.

## FOURIER METODU

Genel olarak

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x) \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \dots + p_n(x) u, \quad a \leq x \leq b \quad (48)$$

kısmi diferansiyel denklemi

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \varphi(x) \quad (49)$$

başlangıç koşulları ve

$$\sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{jv} \left( \frac{\partial^v u}{\partial x^v} \right)_{x=a} + \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{jv} \left( \frac{\partial^v u}{\partial x^v} \right)_{x=b} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (50)$$

sınır koşulları ile verilen sınır değer probleminin çözümü için Fourier metodu kullanılmak istensin. Burada (48) denklemini (49) ve (50) sınır koşullarını sağlayan

$$u = y(x)(A \cos \rho t + B \sin \rho t) \quad (51)$$

şeklinde olan bir çözüm aranır.

(51) ifadesi (48) denkleminde ve (50) sınır koşullarında yerine yazılırsa  $y(x)$  fonksiyonunun

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + p_1(x) \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \dots + p_n(x) y + \rho^n y = 0 \quad (52)$$

diferansiyel denklemini ve

$$U_j(y) = \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{jv} \left( \frac{\partial^v y}{\partial x^v} \right)_{x=a} + \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{jv} \left( \frac{\partial^v y}{\partial x^v} \right)_{x=b} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (53)$$

sınır koşullarını sağladığı görülür.

Eğer  $y(x) \neq 0$  ise  $y(x)$  fonksiyonu (52)-(53) sınır değer probleminin  $\rho^2$  özdeğerine uygun özfonksiyonu olur. (52)-(53) sınır-değer probleminin bütün özdeğerleri

$$-\rho_1^2, -\rho_2^2, -\rho_3^2, \dots$$

ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonları da

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \dots$$

şekline sıralanırlar.

(49) başlangıç koşullarını sağlamak için aşağıdaki seri oluşturulur.

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x) (A_n \cos \rho_n t + B_n \sin \rho_n t)$$

serisi formal olarak (48) denklemini ve (50) sınır koşullarını sağlar. (49) başlangıç koşullarından birincisi sağlatılırsa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) \quad (54)$$

elde edilir. Burada  $f(x)$  fonksiyonu, (52)-(53) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre açılımdan oluşur. Fourier katsayıları  $A_n$

$$A_n = (f, y_n) = \int_a^b f(x) \overline{y_n(x)} dx$$

ile verilir (Naimark, 1968).

## 1.5. Lineer Diferansiyel Denklemler Teorisi

### Tanım 1.5.1.

$$l(y) = p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y \quad (55)$$

biçimindeki ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. Burada  $n$  sayısı diferansiyel ifadenin mertebesi ve  $p_0(x), \dots, p_n(x)$  fonksiyonları da diferansiyel ifadenin katsayısı olarak adlandırılır.  $[p_0(x)]^{-1}, p_1(x) \dots p_n(x)$  fonksiyonlarının sürekli olduğu varsayılır. Bu fonksiyonların üzerine ek koşullar da konulabilir.

**Tanım 1.5.2.**  $y$  fonksiyonunun ve onun  $[a, b]$  aralığında  $(n-1)$ . dereceden türevlerinin  $a$  ve  $b$  noktalarındaki değerlerini

$$y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)} \quad (56)$$

ile belirtelim. (56) değerleriyle oluşturulan

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + \dots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + \dots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} \quad (57)$$

ifadesi bir lineer form belirtir.

**Tanım 1.5.3.**  $k=1, 2, \dots, m$  ve  $y(x) \in C^{(n)}$  için (57) biçimde  $U_k(y)$  ile oluşturulan

$$U_k(y)=0, \quad k=1,2,\dots,m \quad (58)$$

eşitliklerine sınır koşulları denir.

**Tanım 1.5.4.**  $l(y)=0$ ,  $U_k(y)=0$ , ( $k=1,2,\dots,m$ ) eşitliklerini sağlayan  $y(x) \in C^{(n)}[a,b]$  fonksiyonlarının bulunmasına ilişkin verilen  $l(y)=0$  diferansiyel ifadesi homojen sınır problemi olarak adlandırılır.

**Tanım 1.5.5.** Homojen sınır probleminin sıfır olmayan  $y(x)$  çözümünün bulunmak istensin.  $m=n$  olsun.  $\lambda$  bir parametre olmak üzere

$$l(y)=\lambda y, \quad U_k(y)=0, \quad k=\overline{1,m} \quad (59)$$

homojen sınır probleminin sıfır olmayan çözümünü garanti eden  $\lambda$  sayısına  $L$  diferansiyel operatörün özdeğeri ve  $\lambda$ 'ya karşılık gelen, sıfır olmayan  $y$  çözümüne ise özfonksiyon denir.

**Tanım 1.5.6.**  $y_k = y_k(x, \lambda)$ , ( $k = \overline{1,n}$ ) olmak üzere  $l(y) = \lambda y$  denkleminin

$$y_k^{s-1}(0, \lambda) = \begin{cases} 0, & s \neq k \\ 1, & s = k \end{cases}$$

koşullarını sağlayan çözümleri olsun. O halde (59) probleminin genel çözümü

$$y(x) = y(x, \lambda) = c_1 y_1(x, \lambda) + c_2 y_2(x, \lambda) + \dots + c_n y_n(x, \lambda)$$

şeklindedir. Burada  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sabitleri bulmak için  $U_k(y) = 0$ ,  $k = \overline{1..m}$  sınır koşulları kullanılırsa

$$U_k(y) = U_k(c_1 y_1 + \dots + c_n y_n) = c_1 U_1(y) + \dots + c_n U_n(y), \quad k = \overline{1,n}$$

şeklinde denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı  $c_i$  çözümü için

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \dots & U_2(y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \dots & U_m(y_n) \end{vmatrix}$$

determinantının sıfır olması gerekir.  $\Delta(\lambda)$  'ya (59) sınır probleminin *karakteristik* determinantı denir.  $\Delta(\lambda)$  'nın sıfırları (59) sınır probleminin özdeğerleri olduğundan dolayı (59)'ya spektral problem de denir.

$y_k(x, \lambda)$  ( $k = \overline{1..n}$ )  $\lambda$  ya göre analitik fonksiyonlar olduğundan dolayı  $\Delta(\lambda)$  karakteristik fonksiyonu da analitik fonksiyondur. Bu nedenle  $D$  bölgesinde

- i)  $\Delta(\lambda) = 0$  ise o halde her bir  $\lambda \in D$  sayısı özdeğerdir.
- ii)  $\Delta(\lambda) \neq 0$  ise o halde  $D$  bölgesinde sayılabilirinden fazla olmayan sayıda özdeğer vardır. Bu özdeğerlerin  $D$  'nin dahilinde limit noktasına sahip değildir.

Başka deyişle sınır probleminin sayılabilirinden fazla olmayan sonlu limit noktasına sahip olmayan özdeğerleri vardır.

Dolayısıyla sınır probleminin özdeğerlerinin bulunması  $\Delta(\lambda) = 0$  denkleminin köklerinin bulunmasına indirgenir.

### Örnek:

$$l(y) = -y'' = \lambda y$$

$$U_1(y) = y(0) = 0, \quad U_2(y) = y(\pi) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğerini ve özfonksiyonlarını bulalım.

$\lambda = k^2$  olsun. O halde denklemin genel çözümü  $y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$  ve karakteristik denklem

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin k\pi & \cos k\pi \end{vmatrix} = -\sin k\pi = 0$$

şeklindedir. Buradan karakteristik denklemin sıfırları  $\lambda_n = k_n^2 = n^2$ , bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ise  $y_n(x) = c_n \sin nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$  şeklindedir.

**Örnek 2:**

$$l(y) = -y'' = \lambda y$$

$$U_1(y) = y(0) - y(1) = 0, \quad U_2(y) = y'(0) + y'(1) = 0$$

probleminin özdeğerlerini ve özfonksiyonlarını bulalım.

$\lambda = k^2$  olsun. Bu problemin genel çözümü  $y = c_1 \sin(kx) + c_2 \cos(kx)$  ve karakteristik determinant

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} -\sin k & 1 - \cos k \\ k(1 + \cos k) & -k \sin k \end{vmatrix} = k(\sin^2 k + \cos^2 k - 1) = 0$$

şeklinde. Buradan her bir  $\lambda$  özdeğerdir. Bu durumda özfonksiyon  $y(x, \lambda) = C \cos k(x + \frac{1}{2})$  biçiminde yazılabilir. Burada C sıfırdan farklı keyfi bir sabittir.

**Tanım 1.5.7.** Bir  $[a, b]$  aralığında

$$-(p(x)y'(x))' + q(x)y(x) = \lambda \rho(x)y(x) \quad (60)$$

denkleminde Sturm Liouville denklemi denir. Bu probleme homojen sınır koşulları eklendiğinde bir sınır değer problemi elde edilir. Bu sınır değer problemine Sturm Liouville problemi denir.

İkinci dereceden herbir

$$p_0(x)y''(x) + p_1(x)y'(x) + p_2(x)y(x) = \lambda h(x)y(x)$$

diferansiyel denkleminin her iki tarafı  $\exp(\int \frac{p_1(x)}{p_0(x)} dx) / p_0(x)$  ifadesi ile çarpılırsa (60)

Sturm Liouville problemine indirgenir. Burada  $p(x) = 1$  ise  $\rho(x)$  fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

**Tanım 1.5.8.**  $p(x) \in C^1[a, b]$ ,  $\rho(x) \in C^2[a, b]$  olduğunda  $c = \frac{1}{\pi} \int_a^b \left( \frac{\rho(x)}{q(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx$  olmak üzere

$$z(x) = \frac{1}{c} \int_a^x \left( \frac{\rho(x)}{p(x)} \right)^{\frac{1}{2}} dx, \quad u(x) = (\rho(x)p(x))^{\frac{1}{4}} y(x), \quad \mu = c\lambda$$



değişken dönüşümü ile (60) denklemi

$$-y''(x) + Q(x)y(x) = \mu y(x)$$

halini alır. Burada

$$Q(z) = \frac{\theta''(z)}{\theta(z)} - c^2 \frac{q(x)}{r(x)}, \quad \theta(z) = (r(x)p(x))^{1/4}$$

şeklindedir.

Ayrıca  $[a, b]$  aralığı  $t = \frac{x-a}{b-a}$  değişken dönüşümü ile  $[0, 1]$  aralığına

dönüştürülebilir. Burada sınır koşullarının biçimi değişmeyebilir.

**Tanım 1.5.9.**  $U_\nu(y)$ ,  $(\nu=1, 2, \dots, n)$  lineer formu göz önüne alındığında eğer  $U_\nu(y)$  formu  $\nu > k$  için  $y_0^{(k)}$  veya  $y_1^{(k)}$  ları bulundurup da  $y_0^{(\nu)}$  veya  $y_1^{(\nu)}$  ları bulundurmuyorsa  $k$  sayısına  $U(y)$  formunun mertebesi denir.

$n-1$ . mertebeden  $U_\nu(y)$  formlarını göz önüne alalım. Bunları diğerlerinin lineer toplamları ile değiştirerek derecesi  $n-1$  olan formların maksimum sayısını ikiden küçük veya eşit yapılabilir. Geride kalan formların derecesi  $n-2$  olur. Aynı işlemleri derecesi  $n-2$  olan formlara uygulanırsa sayıları minimuma indirilir. Bu işleme sınır koşulların normlaştırılması adı verilir. İşlem sonunda elde edilen sınır koşullarına normleştirilmiş sınır koşulları adı verilir.

Normleştirilmiş sınır koşulları  $n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n \geq 0$ ,  $k_{\nu+2} < k_\nu$  olmak üzere

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y)$$

$$U_{\nu 0}(y) \equiv \alpha_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \alpha_{\nu j} y_0^{(j)}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu-1} \beta_{\nu j} y_1^{(j)}$$

biçimine sahiptir.

Burada  $\alpha_\nu$  ve  $\beta_\nu$  katsayılarından en az biri sıfırdan farklıdır.

**Tanım 1.5.10.**  $n$ . mertebeden lineer diferansiyel denklem  $l(y) = \lambda y$  ve  $\lambda = -\rho^n$  olmak üzere

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + p_1(x) \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \dots + p_n(x) y + \rho^n y = 0$$

şeklindedir.

Genelliği bozmadan  $p_n(x) \neq 0$  olsun.  $p_1(x) \neq 0$  ise

$$y = \tilde{y} e^{-\int p_1(x) dx}$$

değişken dönüşümü yapılırsa

$$\frac{\partial^n \tilde{y}}{\partial x^n} + \tilde{p}_2(x) \frac{\partial^{n-2} \tilde{y}}{\partial x^{n-2}} + \dots + \tilde{p}_n(x) \tilde{y} + \rho^n \tilde{y} = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Tüm  $\rho$  düzlemini  $v\pi/n \leq \arg(\rho) \leq (v+1)\pi/n$  eşitsizlikleri ile  $2n$  tane  $S_v$ , dilimlere ( $v=0,1,2,\dots,2n-1$ ) ayırılımsın.  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  ise  $-1$ 'in  $n$ . dereceden kökleri olsun.  $Re(\rho\omega_1) \leq Re(\rho\omega_2) \leq \dots \leq Re(\rho\omega_n)$  eşitsizliği sağlayacak şekilde bu köklerin bir dizilimi mevcuttur.

Denklemin mertebesi  $n$  nin çift veya tek olmasına bağlı olarak sınır koşulları için aşağıdaki sınıflandırma mevcuttur.

$n = 2\mu - 1$  olduğunda

$$\theta_0 + \theta_1 S = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{k_1} \dots \alpha_1 \omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1) \omega_\mu^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1) \omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1 \omega_{\mu+2}^{k_1} \dots \beta_1 \omega_n^{k_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{k_1} \dots \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2) \omega_\mu^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2) \omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+2}^{k_2} \dots \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n \omega_1^{k_1} \dots \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n) \omega_\mu^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n) \omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+2}^{k_n} \dots \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

determinantındaki  $\theta_0$  ve  $\theta_1$  sayıları sıfırdan farklı ise sınır koşullarına regülerdir denir.

$n = 2\mu$  olduğunda

$$\frac{\theta_1}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1 \omega_1^{k_1} \dots \alpha_1 \omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1) \omega_\mu^{k_1} & \left(\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1\right) \omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1 \omega_{\mu+2}^{k_1} \dots \beta_1 \omega_n^{k_1} \\ \alpha_2 \omega_1^{k_2} \dots \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2) \omega_\mu^{k_2} & \left(\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2\right) \omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+2}^{k_2} \dots \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} \dots \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n) \omega_\mu^{k_n} & \left(\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n\right) \omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+2}^{k_n} \dots \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğinden tanımlanan  $\theta_{-1}$  ve  $\theta_1$  sayıları sıfırdan farklı ise sınır koşullarına *regülerdir* denir.

**Örnek:** İkinci dereceden diferansiyel denklemin sınır koşulları genel olarak

$$a_1 y_0' + b_1 y_1' + a_0 y_0 + b_0 y_1 = 0 \quad (61)$$

$$c_1 y_0' + d_1 y_1' + c_0 y_0 + d_0 y_1 = 0 \quad (62)$$

şeklinde dir. Bu sınır koşullarının regülerliği inceleyelim.

i)  $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$  olsun bu durumda  $y_0'$  ve  $y_1'$  çözümlerse sınır koşulları

$$y_0' + \alpha_{11} y_0 + \alpha_{11} y_1 = 0$$

$$y_1' + \alpha_{21} y_0 + \alpha_{22} y_1 = 0$$

halini alır. O halde

$$\frac{\theta_1}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ s\omega_1 & \frac{1}{s}\omega_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\theta_0 = 0$  ve  $\theta_1 = -1$  ve  $\theta_{-1} = 1$  olur. Buradan sınır koşulları regülerdir.

Hatta  $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$  olduğundan kuvvetli regüler olur.

ii)  $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$  ve  $|a_1| + |b_1| > 0$  olsun bu durumda sınır koşulları

$$a_1 y_0' + b_1 y_1' + a_0 y_0 + b_0 y_1 = 0$$

$$c_0 y_0 + d_0 y_1 = 0$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s &= \begin{vmatrix} (a_1 + sb_1)\omega_1 & -(a_1 + \frac{1}{s}b_1)\omega_2 \\ c_0 + sd_0 & c_0 + \frac{1}{s}d_0 \end{vmatrix} \\ &= \omega_1 (b_1 c_0 + a_1 d_0) \left( s + \frac{1}{s} \right) + 2\omega_1 (a_1 c_0 + b_1 d_0) \end{aligned}$$

olduğundan  $b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0$  olduğunda sınır koşulları regülerdir.

iii)  $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$  Bu durumda  $a_0 d_0 - b_0 c_0 \neq 0$  olması gerekir.  $y_0 = 0$  ve  $y_1 = 0$  olur. Bu durumda

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s$$

olduğundan dolayı sınır koşulları regüler olur.

Sonuç olarak

- a)  $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$
- b)  $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$  ve  $|a_1| + |b_1| > 0$  olduğunda  $b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0$
- c)  $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$  ise  $a_0 d_0 - b_0 c_0 \neq 0$

olduğunda sınır koşulları regüler olur.

Özdeşlerin asimptotik ifadelerindeki esas terimlerin biçiminin belirlenmesinde verilen sınır koşulları için tanımlanan  $n$  tek olduğunda  $\theta_0, \theta_1$  sayılarının  $n$  çift olduğunda ise  $\theta_0, \theta_1, \theta_{-1}$  sayılarının büyük önemi vardır.

$n$ . mertebeden  $l(y)$  diferansiyel ifadesinin katsayıları  $[0,1]$  aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere aşağıdaki teoremler sağlanır.

**Teorem 1.5.11.**  $[0,1]$  aralığında regüler sınır koşulları ile üretilen  $n$ . mertebe diferansiyel operatörün özdeğerleri iki sonsuz  $\lambda_k', \lambda_k''$  ( $k = N, N+1, \dots$ ) dizileri oluşturur.

$n = 4q - 1$  için

$$\lambda_k' = (2k\pi i)^n \left[ 1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]$$

$$\lambda_k'' = (-2k\pi i)^n \left[ 1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]$$

$n = 4q + 1$  için

$$\lambda_k' = (2k\pi i)^n \left[ 1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]$$

$$\lambda_k'' = (-2k\pi i)^n \left[ 1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right]$$

iki özdeğer dizileri elde edilir. Burada  $\xi^{(1)}$  ve  $\xi^{(2)}$  çift ve tek sayısına uygun olarak  $S_v$  bölgesinde  $\theta_1 \xi + \theta_0 = 0$  denkleminin kökleridir.

$n = 2\mu$  için ve  $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$  olduğunda

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[ 1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right]$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[ 1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right]$$

dizileri elde edilir.

Burada  $\xi'$  ve  $\xi''$   $S_0$  bölgesinde  $\theta_1 \xi^2 + \theta_0 \xi + \theta_{-1} = 0$  denkleminin kökleridir.

$n = 2\mu$  için ve  $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} = 0$  olduğunda

$$\lambda_k' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[ 1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right]$$

$$\lambda_k'' = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[ 1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right) \right]$$

dizileri elde edilir. Burada  $\xi$   $S_0$  bölgesinde  $\theta_1 \xi^2 + \theta_0 \xi + \theta_{-1} = 0$  denkleminin kökleridir (Naimark, 1968).

İlk üç durumda özdeğerler bir yerden başlayarak basittirler dördüncü durumda ise bir yerden başlayarak basittirler veya iki katlıdır. Bu teoremden her yerde  $\ln_0 \xi$  olarak doğal logaritmanın sadeleştirilerek işaretlenmesidir.

Bu teorem diferansiyel denklemin katsayıları  $[0,1]$  aralığında keyfi toplanabilir fonksiyonlar olduğunda da sağlanır.

$p_2(x), p_3(x), \dots, p_n(x)$  fonksiyonları ne kadar düzgün örneğin sürekli türevlenebilir fonksiyon ise o kadar kesin asimptotik formüller elde edilebilir. Özdeğerlerin asimptotik biçimlerini bilerek özfonksiyonların asimptotik ifadeleri de bulunabilir. Örneğin  $n=2$  durumunu ele alalım.  $\rho$  kompleks düzlemi 4 bölgeye oluşturur.  $S_0, S_1, S_2, S_3$  (bunlar 1.2.3.4. bölgelerdir.)

Bu bölgelerin herbirinde

$$y'' + q(x)y + \rho^2 y = 0$$

denkleminin  $y_1, y_2$  lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = e^{i\rho x} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right], y_2 = e^{-i\rho x} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \right] \quad (63)$$

biçiminde asimptotik çözümlere sahiptirler. Eğer T bölgesi olarak  $\rho$  düzleminin 1. bölgesi olarak alınırsa  $\omega_\mu = i, \omega_{\mu+1} = -i$  olur ve özfonksiyonlar için

$$y_{k1} = (-i)^{k2} e^{i\rho_k x} \left[ \alpha_2 + \frac{1}{\xi'} \beta_2 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] - (-i)^{k2} e^{-i\rho_k x} \left[ \alpha_2 \xi' + \beta_2 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right]$$

asimptotik formüller sağlanır.

**Tanım 1.5.12.** Sınır problemi  $L(y) = \lambda ry$  biçiminde olsun. Burada  $r(x)$  sürekli fonksiyondur ve  $[a, b]$  aralığında işareti aynıdır. Genelliği bozmadan  $r(x) > 0$  alınabilir.

$$h = \int_a^b \sqrt[r]{r(x)} dx$$

olmak üzere

$$t = \frac{1}{h} \int_a^x \sqrt[r]{r(\xi)} d\xi$$

değişken dönüşümü ile  $Ly = \lambda ry$  denklemi  $L_1 y = \lambda y$  biçimine indirgenir. Burada  $L_1$   $0 \leq t \leq 1$  aralığında tanımlıdır.

**Tanım 1.5.13.**  $A$ , bir Hilbert uzayında lineer dönüşüm olmak üzere  $\lambda_0$   $A$ 'nın bir özdeğeri  $x$  ise bu özdeğer karşılık olan özvektör olsun. Başka bir deyişle

$$Ax = \lambda_0 x$$

sağlansın. O halde

$$Ay_1 = \lambda_0 y_1 + x, Ay_2 = \lambda_0 y_2 + y_1, \dots, Ay_k = \lambda_0 y_k + y_{k-1}$$

yineleme bağlantısı sağlayan  $y_1, y_2, \dots, y_k$  vektörleri bulunabiliyorsa, bu  $y_1, y_2, \dots, y_k$  vektörlerine  $x$  özvektörüne ek vektörler denir.

**Örnek:**  $A$  operatörü

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisi ile tanımlansın. Bu matrisin özdeğerleri

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda) = 0$$

denkleminin kökleridir. Buradan  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$   $\lambda_3 = 2$  olur. Çift olan  $\lambda_1 = 1$  özdeğerine düşen özvektörü bulmak için  $(A - \lambda I)x = 0$  sisteminde  $\lambda_1 = 1$  alınırsa özvektör  $x = (1, 0, 0)$  olarak bulunur. Bu özvektöre ilişkin ek vektörü bulmak için  $Ay = \lambda_1 y + x$  sistemini çözülürse ek özvektör  $y_1 = (1, 1/2, 0)$  olarak bulunur.  $\lambda_2 = 2$  özdeğerine karşılık gelen özvektör ise  $x_2 = (-1/5, -1, 1)$  özvektörü olur. Bu özvektöre ilişkin ek vektör yoktur. Her tekrarlanan özdeğere karşılık özvektöre karşılık ek vektör olmayabilir.

Örneğin,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerleri

$$\Delta(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0$$

denkleminin kökleridir. Yani  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$   $\lambda_3 = 2$  olur. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler ise  $x_1 = (1, 0, 0)$ ,  $x_2 = (0, 1, 0)$ ,  $x_3 = (-3, -1, 1)$  lineer bağımsız özvektörler uygundur ve bunların hiçbirine ait ek vektör bulunmamaktadır.

**Tanım 1.5.14.** (59) sınır probleminde  $l(y)$  diferansiyel ifadesinin ve  $U_k(y)$  sınır şartlarının katsayıları  $\lambda$  'a bağlı analitik fonksiyonlar olsun.  $\lambda_0$  özdeğer  $\varphi(x)$  ise uygun özfonksiyon olsun.  $\lambda = \lambda_0$  olduğunda

$$l(\varphi) = 0$$

$$l(\varphi_1) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\varphi) = 0$$

$$l(\varphi_j) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\varphi_{j-1}) + \dots + \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} l(\varphi_0) = 0, j = 0, \dots, k$$

diferansiyel ifadesini ve



$$U_v(\varphi_j) + \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} U_v(\varphi_{j-1}) + \dots + \frac{1}{j!} \frac{\partial^j}{\partial \lambda^j} U(\varphi_0) = 0, \quad j = 0, \dots, k; \quad v = 1, \dots, n$$

sınır koşullarını sağlayan  $\varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$  fonksiyonlarına  $\varphi(x)$  özfonksiyonlarına *ek* özfonksiyon dizisi denir.

Bu tanım aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

$$l(y) = y'' + q(x)y - \lambda y$$

$$U_v(y) = 0, \quad v=1,2$$

sınır probleminin  $\lambda_0$  özdeğeri ve  $\varphi_0(x)$  ise uygun özfonksiyon olsun. Yani

$$\varphi_0'' + q(x)\varphi_0 = \lambda\varphi_0$$

ve sınır koşulları sağlansın O halde

$$\varphi_1'' + q(x)\varphi_1 = \lambda\varphi_1 + \varphi_0$$

$$\varphi_2'' + q(x)\varphi_2 = \lambda\varphi_2 + \varphi_1$$

$$\varphi_k'' + q(x)\varphi_k = \lambda\varphi_k + \varphi_{k-1}$$

bağlantılarını ve sınır koşullarını sağlayan  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  fonksiyonları,  $\varphi_0(x)$  özfonksiyonuna ilişkin ek fonksiyonlar zinciridir.

### Örnek:

$$y'' - q(x)y - \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1$$

$$a_1 y'(0) + b_1 y'(1) + a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0$$

$$c_1 y'(0) + d_1 y'(1) + c_0 y(0) + d_0 y(1) = 0$$

sınır probleminin  $\lambda_k$  özdeğeri  $y_{2k}$  ise uygun özfonksiyonu olsun. O halde

$$y_{2k-1}'' - q(x)y_{2k-1} - \lambda y_{2k-1} = p_k y_{2k}, \quad 0 < x < 1$$

$$a_1 y'_{2k-1}(0) + b_1 y'_{2k-1}(1) + a_0 y_{2k-1}(0) + b_0 y_{2k-1}(1) = 0$$

$$c_1 y'_{2k-1}(0) + d_1 y'_{2k-1}(1) + c_0 y_{2k-1}(0) + d_0 y_{2k-1}(1) = 0$$

sınır probleminin  $y_{2k-1}$  çözümü  $y_{2k}$  özfonksiyonuna ek vektör olur. Burada  $p_k \neq 0$  ortonormalleştirme sabiti olarak seçilebilir.

**Tanım 1.5.15.** Lineer operatör için aşağıdaki koşullar sağlanırsa bu operatöre simetriktir denir.

- Operatörün  $D(A)$  tanım kümesi  $H$  Hilbert uzayında yoğundur.
- $\forall f, g \in D(A)$  için  $(Af, g) = (f, A^*g)$  eşitliği sağlanır.

Eğer  $A = A^*$  ise operatör özeşleniktir denir. Yani  $D(A) = D(A^*)$

**Örnek:**  $L_0$  operatörü  $l(y) = y''$  diferansiyel ifade ve  $D(L_0) = \{y(x) \mid y(0) = y(1) = 0\}$

olsun. O halde  $\forall y, z \in D(L_0)$

$$(L_0 y, z) = \int_0^1 y'' z dx = (y, L_0 z)$$

olduğundan  $L_0$  özeşleniktir.

Bu örnekte  $L$  operatörü için  $D(L_0) = \{y(x) \mid y(x) \in C^\infty[0, 1]\}$  ise

$$(Ly, z) = (y, L_0 z) + y' z \Big|_{x=0}^{x=1} - y z' \Big|_{x=0}^{x=1}$$

olur ki bu da  $L$ 'nin simetrik olmadığını gösterir.

$[a, b]$  aralığında

$$l(y) = p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \dots + p_n(x) y$$

diferansiyel ifadesinin  $p_k(x)$ ,  $k=1, 2, \dots, m$  katsayılarının  $(n-k)$ . mertebeden sürekli türevleri var olsun.  $y, z \in C^{(n)}$  keyfi fonksiyonlar olsun.  $k$  defa kısmi integralleme ile

$$\int_a^b p_{n-k} \bar{z} y^k dx = [p_{n-k} \bar{z} y^{(k-1)} - (p_{n-k} \bar{z}) y^{(k-2)} + \dots + (p_{n-k} \bar{z})^{(k-1)} y]_a^b + (-1)^k \int_a^b y (p_{n-k} \bar{z})^{(k-1)} y dx \quad (64)$$

elde edilir. Eğer (64)'de  $k$  yerine  $k=n, n-1, \dots, 0$  koyarsak ve elde edilen denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\int_a^b l(y) \bar{z} dx = P(\zeta, \xi) + \int_a^b y \overline{l^*(z)} dz \quad (65)$$

formu bulunur. Burada

$$l^*(z) = (-1)^n (\overline{p_0 z})^{(n)} + (-1)^{n-1} (\overline{p_1 z})^{(n-1)} + \dots + \overline{p_n} z \quad (66)$$

biçiminde elde edilir.

**Tanım 1.5.17.**  $l^*(z)$  diferansiyel ifadesine  $l(y)$ 'ye eşlenik diferansiyel ifade denir. (65) eşitliğine ise Lagrange Formülü denir .

$P(\zeta, \xi)$  ifadesi ise  $\zeta = (y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)})$ ,  $\xi = (z_a, z_a', \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z_b', \dots, z_b^{(n-1)})$  ile belirli bilineer formdur.

$U_1, \dots, U_m$  ifadeleri,  $y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)}$  değişkenlerine göre lineer bağımsız fonksiyonlar olsunlar. Bu fonksiyonları  $m < 2n$  olduğunda  $U_{m+1}, \dots, U_{2n}$  fonksiyonları ile  $2n$  sayıda lineer  $U_1, \dots, U_{2n}$  fonksiyonlarına tümleyelim. Bu fonksiyonlar lineer bağımsız olduğuna göre  $y_a, y_a', \dots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', \dots, y_b^{(n-1)}$  değişkenleri,  $U_1, \dots, U_{2n}$  lineer fonksiyonlarının lineer kombinasyonu gibi ifade edilebilir. Bu ifadeler Lagrange formülünde  $P(\zeta, \xi)$  ifadesinde yerine yazılırsa  $P(\zeta, \xi)$ ,  $U_1, \dots, U_{2n}$  değişkenlerine göre lineer fonksiyon olur. O halde  $U_1, \dots, U_{2n}$  değişkenlerinin katsayıları  $z_a, z_a', \dots, z_a^{(n-1)}, z_b, z_b', \dots, z_b^{(n-1)}$  değişkenlerine bağlı lineer homojen fonksiyon olur. Bu katsayılar  $V_{2n}, \dots, V_1$  olarak alınırsa Lagrange formülü

$$\int_a^b l(y) \bar{z} dx = U_1 V_{2n} + \dots + U_{2n} V_1 + \int_a^b y \overline{l^*(z)} dz \quad (67)$$

şeklinde olur. Bu ifadede  $V_{2n}, \dots, V_1$  fonksiyonları lineer bağımsızdır.

**Tanım 1.5.18:**

$$V_1 = 0, V_2 = 0, \dots, V_{2n-m} = 0 \quad (68)$$

sınır koşullarına

$$U_1 = 0, U_2 = 0, \dots, U_m = 0 \quad (69)$$

sınır koşullarının eşlenik sınır koşulu denir. Eşlenik sınır koşullarına denk olan koşullara özeşlenik sınır koşulları denir .

**Tanım 1.5.19.**  $l^*(y)$  ve eşlenik (68) sınır koşullarının oluşturduğu operatöre  $L$  'ye eşlenik operatör denir ve  $L^*$  ile gösterilir .

(67) formülünden ve (68), (69) sınır koşullarından

$$\int_a^b Ly(x) \overline{z(x)} dx = \int_a^b y(x) \overline{L^* z(x)} dx \quad (70)$$

elde edilir. Eğer

$$(y, z) = \int_a^b y(x) \overline{z(x)} dx \quad (71)$$

ifadesi göz önüne alınırsa (70) eşitliği

$$(Ly, z) = (y, L^* z) \quad (72)$$

şeklinde yazılabilir.

Eşlenik operatörün tanımına göre  $L$  operatörü  $L^*$  'ın eşlenik operatörüdür. O halde

$$L^{**} = L$$

olur.

**Teorem 1.5.20.** Özeşlenik diferansiyel operatörün özfonksiyonları  $L^2(a,b)$  de tam sistem oluştururlar (Naimark, 1968)

**Tanım 1.5.21.**  $H$  Hilbert uzayında  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$  bir dizi olsun. Herhangi bir  $f \in H$  vektörü tek türlü olarak

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$$

serisine ayrışabiliyor ise  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$  dizisine  $H$  Hilbert uzayının tabanı denir.

**Tanım 1.5.22.**  $H$  Hilbert uzayında  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$  taban ve  $A$  sınırlı tersi olan bir operatör olsun.

$$\psi_k = A\varphi_k$$

biçiminde elde edilen  $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$  dizisine  $H$  Hilbert uzayında Riesz tabanı denir.

## 2.YAPILAN ÇALIŞMALAR ve BULGULAR

### 2.1. Minimum Birikimin ve Toplam Para Miktarının Verildiği Para Birikim Modeli

Bu bölümde para birikim modelini, minimum birikime sahip aile üye sayısının sıfır olduğu ve toplam para miktarının verildiği sınır koşulları için incelenecektir.

$D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  bölgesinde homojen olmayan

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (73)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (74)$$

$$v(0, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (75)$$

$$\int_0^1 xv(x, t) dx = K(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (76)$$

problemini göz önüne alalım.

Bu sınır değer probleminin  $\bar{D} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  bölgesinde sürekli çözümünü bulalım.

Varsayalım ki  $f(x, t), K(t)$  ve  $\varphi(x)$  verilen  $D$  bölgesinde tanımlı, sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu problemin çözümünün varlığı için

$$\int_0^1 x\varphi(x) dx = K(0), \quad \varphi(0)=0 \quad (77)$$

uyum koşullarının sağlanması gerekir.

**Tanım:** Aşağıdaki koşulları sağlayan çözüme (73)-(76) sınır değer probleminin klasik çözümü denir. Bu çözüm

- i)  $\bar{D}$  bölgesinde süreklidir.

ii)  $D$  bölgesinde  $t$  ye göre 1. mertebeden ve  $x$  e göre 2. Mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

iii) (73)-(76) koşullarını sağlar.

(73)-(76) sınır değer probleminin çözümünü incelemeden önce (76) sınır koşulunu homojen hale getirilir. Bunun için

$$v(x, t) = u(x, t) + 3K(t)x \quad (78)$$

değişken dönüşümü yapılır. (73)-(76) problemi bu değişken dönüşümü altında

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (79)$$

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (80)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (81)$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = 0 \quad (82)$$

sınır koşulları homojen olan homojen probleme dönüşür. Burada

$$F(x, t) = f(x, t) - 3K'(t)x$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - 3K(0)x$$

ile gösterilmiştir.

(79)-(82) problemi lineer olduğundan bu problemin çözümü aşağıdaki biçimde iki sınır değer probleminin çözümleri toplamı biçiminde gösterilebilir.

I.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (83)$$

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (84)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (85)$$

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = 0 \quad (86)$$

II.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (87)$$

$$u(x,0) = 0 \quad (88)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (89)$$

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = 0 \quad (90)$$

Böylece I.sınır değer probleminin çözümü  $u_1(x,t)$  , II.sınır değer probleminin çözümü  $u_2(x,t)$  ise (79)-(82) sınır değer probleminin çözümü  $u_1(x,t)+u_2(x,t)$  şeklindedir. Burada homojen olmayan (87)-(90) II.sınır değer probleminin çözümü, homojen (83)-(86) I.sınır değer probleminin özfonksiyonlarına açılarak bulunabilir.

Sınır değer problemlerinin çözümü incelenmeden önce lokal biçimde verilmemiş (86) sınır koşulu noktasal biçime indirilir. Bunun için (83) eşitliğinin her iki tarafını  $x$  ile çarpıp  $[0,1]$  aralığında integral alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^1 xu_t(x,t)dx &= a^2 \int_0^1 xu_{xx}(x,t)dx \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 xu(x,t)dx \right) &= a^2 \int_0^1 xu_{xx}(x,t)dx \\ \Rightarrow 0 &= a^2 \int_0^1 xu_{xx}(x,t)dx \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan kısmi integrasyon ile

$$u_x(1,t) - u(1,t) = 0 \quad (91)$$

sınır koşulu bulunur.



Dolayısıyla (83)-(86) sınır değer problemi ona denk olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (92)$$

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (93)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (94)$$

$$u_x(1, t) - u(1, t) = 0 \quad (95)$$

sınır değer problemine dönüşür.

(92)-(95) probleminin çözümünü bulmak için Fourier metodunu kullanalım.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (96)$$

şeklinde çözüm arayalım. Bu çözüm (92)da yerine yazılırsa

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

elde edilir. Buradan (94), (95) kullanılarak

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (97)$$

$$X(0) = 0 \quad (98)$$

$$X'(1) - X(1) = 0 \quad (99)$$

Sturm-Liouville problemi ve

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (100)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

### EŞLENİK SINIR KOŞULLARI VE SINIR KOŞULLARININ REGÜLERLİĞİ

Lagrange formülü kullanılarak (97)-(99) sınır değer probleminin eşlenik sınır değer problemini bulalım.

$$\int_0^1 X'' \bar{Y} dx = X(1)(\bar{Y}(1) - \bar{Y}'(1)) - X'(0)\bar{Y}(0) + \int_0^1 X \bar{Y}'' dx$$

Buradan eşlenik sınır değer problemi

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0 \quad (101)$$

$$Y(0) = 0 \quad (102)$$

$$Y'(1) - Y(1) = 0 \quad (103)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (97)-(99) sınır değer problemi özeşleniktir. Özeşlenik diferansiyel operatörün özfonksiyonları  $L^2[a, b]$  uzayında tam sistem oluşturduğundan problemin özfonksiyonları  $L^2[0, 1]$  de tamdır.

(98)-(99) sınır koşulunda katsayılar (61)-(62) ile karşılaştırılırsa

$$a_1 = 0, b_1 = 0, a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0, c_1 = -1, d_1 = -1, d_0 = 0$$

elde edilir. Böylece  $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$ ,  $|a_1| + |b_1| > 0$  olduğundan ve  $b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0$  şartı sağlandığından sınır koşulları regülerdir. Ayrıca

$$\theta_0^2 - 4\theta_1 \theta_{-1} = 0^2 - 4(-1)(1) \neq 0$$

olduğundan sınır şartları kuvvetli regülerdir.

Böylelikle (97)-(99) sınır değer probleminin özfonksiyonları  $L^2[0, 1]$  de Riesz tabanı oluşturur.

## ÖZDEĞER ve ÖZFONKSİYONLARIN HESAPLANMASI

Kolaylıkla görülebilir ki  $\lambda < 0$  olduğunda Sturm Liouville problemin sıfırdan farklı çözümü yoktur.

$\lambda = 0$  olduğunda (97)-(99) probleminin çözümü  $c \neq 0$  olmak üzere  $X_0(x) = cx$  olarak elde edilir.

$\lambda > 0$  olsun. Problemin genel çözümü

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$$

şeklindedir.

(98) sınır şartı çözüme sağlatılırsa  $c_1 = 0$  elde edilir.

(99) sınır şartı sağlatılırsa

$$c_2 (\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda}) = 0$$

denklemini bulunur. Burada  $c_2 \neq 0$  olması için

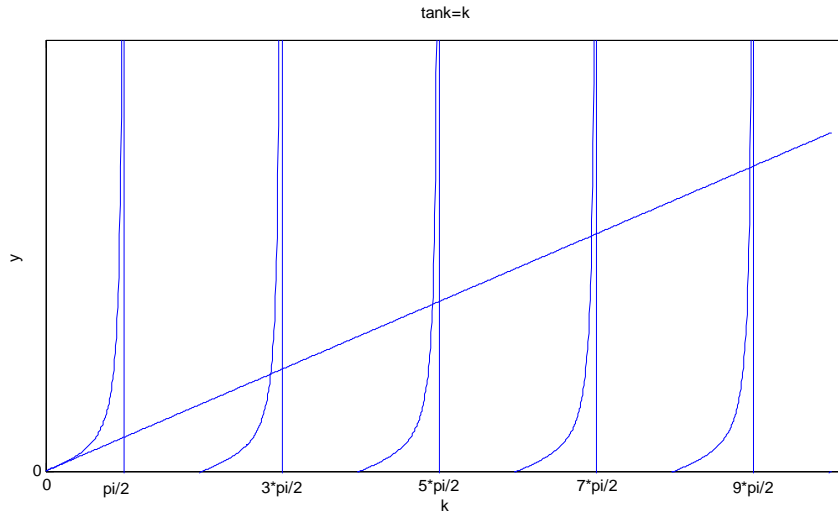
$$\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

$$\Rightarrow \tan \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda}$$

olması gerekir. Özdeğerler için asimptotik formül elde edilmek istenirse  $\sqrt{\lambda} = k$  alınır

$$\tan k = k \quad (104)$$

elde edilir.



Şekil 4.  $\tan k = k$  grafiği

(104) denkleminin kökleri  $k_n \in \left[ n\pi, \frac{(2n+1)\pi}{2} \right]$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) aralığındadır.

$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \varepsilon$  olsun. Kökü asimptotik olarak bulmak için Ek 1'te gösterilen

Lagrange'in ters formülünü kullanalım.

$$\tan\left(\frac{(2n+1)\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \varepsilon$$

$$\frac{\cos(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \varepsilon \Rightarrow \frac{\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} = \frac{(2n+1)\pi}{2} = \omega^{-1}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon \left( \frac{\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} \right)} = \omega$$

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)\pi}{2} - c_1 \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-1} - c_2 \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-3} \dots$$

Burada

$$c_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left( \frac{d}{d\varepsilon} \right)^{k-1} h(\varepsilon)^k \right\} \Big|_{\varepsilon=0}, \quad h(\varepsilon) = \varepsilon \left( \frac{\cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon)}{\sin(\varepsilon)} \right)$$

şeklindedir. Katsayılar hesaplanırsa (104) denkleminin kökleri

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-1} - \frac{2}{3} \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-3} - \frac{13}{15} \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-5} - \frac{146}{105} \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-7} + O\left(\frac{1}{n^9}\right) \quad (105)$$

olarak bulunur. (105) özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar ise

$$X_n(x) = \sin(k_n x) \quad (106)$$

şeklindedir. Kolayca gösterilebilir ki

$$\langle x, \sin k_n x \rangle = \int_0^1 x \sin k_n x dx = \frac{-k_n \cos(k_n) + \sin(k_n)}{k_n^2} = 0$$

olduğundan  $X_0(x) = x$  özfonksiyonu  $X_n(x) = \sin k_n x$  fonksiyonlarına  $L^2[0,1]$ 'de diktir.

Bu özfonksiyonların normları

$$\|X_0(x)\|^2 = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \quad (107)$$

$$\|X_n(x)\|^2 = \int_0^1 \sin(k_n x) \sin(k_n x) dx = \frac{1}{2} - \frac{\sin(2k_n)}{4k_n} \quad (108)$$

şeklindedir.

(100) probleminin çözümü  $A_n$  ler keyfi sabitler olmak üzere

$$T(t) = A_n e^{-a^2 k_n^2 t}$$

şeklindedir. Bu durumda (96)'a göre her bir

$$u_n(x, t) = A_n e^{-a^2 k_n^2 t} \sin k_n x \quad (109)$$

fonksiyonları çözümdür.

### ÇÖZÜMÜN İFADESİ

(83)-(86) probleminin çözümü için

$$u_1(x, t) = A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2 k_n^2 t} \sin(k_n x) \quad (110)$$

serisi oluşturulsun. Burada (93) başlangıç koşulunu sağlatılmasıyla

$$u(x, 0) = \psi(x) = A_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x) \quad (111)$$

elde edilir. (111) serisinde Fourier  $A_n$  katsayıları

$$A_0 = 3 \int_0^1 x \psi(x) dx \quad (112)$$

$$A_n = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sin(2k_n)}{4k_n}} \int_0^1 \psi(x) \sin(k_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (113)$$

şeklindedir. Oluşturulan (110) serisi (83)-(86) probleminin çözümüdür (Ionkin ve Moiceev, 1977).

(87)-(90) homojen olmayan sınır değer probleminin çözümünü bulalım. Burada  $F(x,t)$  fonksiyonunun birinci kısmi türevleri süreklidir. (97)-(99) probleminin özfonksiyonları kullanılarak (87)-(90) sınır değer probleminin  $u_2(x,t)$  çözümü

$$u_2(x,t) = u_0(t)x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(k_n x) \quad (114)$$

şeklinde aranır.

$F(x,t)$  fonksiyonu,

$$F(x,t) = F_0(t)x + \sum_{n=0}^{\infty} F_n(t) \sin(k_n x) \quad (115)$$

şeklinde özfonksiyonlarına açılır. Burada katsayılar

$$F_0(t) = 3 \int_0^1 x F(x,t) dx$$

$$F_n(t) = \frac{1}{\frac{1}{2} \frac{\sin(2k_n)}{4k_n}} \int_0^1 f(x,t) \sin(k_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklindedir.

(114) serisi (87) denkleminde yerine yazılırsa

$$(u_0'(t) - F_0(t))x + \sum_{n=1}^{\infty} [u_n'(t) + (\alpha k_n)^2 u_n(t) - F_n(t)] \sin(k_n x) = 0$$

elde edilir. Buradan

$$u_0'(t) - F_0(t) = 0 \quad (116)$$

$$u_n'(t) + (\alpha k_n)^2 u_n(t) = F_n(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (117)$$

$$u_n(0) = 0 \quad (118)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü

$$u_0(t) = \int_0^t F_0(\tau) d\tau \quad (119)$$

$$u_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) e^{-k_n^2(t-\tau)} d\tau, \quad n = 1, 2 \quad (120)$$

şeklindedir. Böylece (87)-(90) probleminin çözümü

$$u_2(x, t) = \left[ \int_0^t F_0(\tau) d\tau \right] x + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_0^t F_n(\tau) e^{-a^2 k_n^2(t-\tau)} d\tau \right] \sin(k_n(x)) \quad (121)$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$F_n(\tau) = \int_0^1 F(x, \tau) \sin(k_n x) dx$$

$$F_0(\tau) = \int_0^1 F(x, \tau) x dx$$

ile ifade edilir. Dolayısıyla (79)-(82) probleminin çözümü

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

olarak bulunur. Böylece (73)-(76) probleminin çözümü

$$v(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + 3K(t)x \quad (122)$$

olarak elde edilir.

## 2.2. Toplam Aile Sayısı ve Toplam Para Miktarı Verilen Para Birikim Modeli

Bu bölümde para birikim modeli,  $[0, 1]$  aralığında toplam aile sayısının ve toplam para birikimin verildiği sınır koşulları için çözümü incelenmektedir.

$D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  bölgesinde homojen olmayan

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t) \quad (123)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) \quad (124)$$

$$\int_0^1 v(x,t)dx = N(t) \quad (125)$$

$$\int_0^1 xv(x,t)dx = K(t) \quad (126)$$

problemini göz önüne alalım.

Bu sınır değer probleminin  $\bar{D} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$  bölgesinde sürekli çözümünü bulalım.

Varsayalım ki  $f(x,t), K(t), N(t)$  ve  $\varphi(x)$  verilen  $D$  bölgesinde tanımlı, sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır. Bu problemin çözümünün varlığı için

$$\int_0^1 x\varphi(x)dx = N(0)$$

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = K(0)$$

uyum koşullarının sağlanması gerekir.

**Tanım:** Aşağıdaki koşulları sağlayan çözüme (123)-(126) sınır değer probleminin klasik çözümü denir. Bu çözüm

- i)  $\bar{D}$  bölgesinde süreklidir.
- ii)  $D$  bölgesinde  $t$  ye göre 1. mertebeden ve  $x$  e göre 2. Mertebeden sürekli türevlere sahiptir.
- iii) (73)-(76) koşullarını sağlar.

(123)-(126) sınır değer probleminin çözümünü incelemeye önce (125) ve (126) sınır koşulunu homojen hale getirilir. Bunun için

$$v(x,t) = u(x,t) + (12K(t) - 6N(t))x + 4N(t) - 6K(t) \quad (127)$$

değişken dönüşümü yapılırsa (123)-(126) problemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \quad (128)$$



$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (129)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (130)$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = 0 \quad (131)$$

sınır koşulları homojen olan probleme dönüşür. Burada

$$F(x, t) = f(x, t) - (12K'(t) - 6N'(t))x + 4N'(t) - 6K'(t)$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - (12K(0) - 6N(0))x + 4N(0) - 6K(0)$$

dir.

Bir önceki probleme benzer olarak (128)-(131) problemi lineer olduğundan bu problemin çözümü aşağıdaki biçimde iki sınır değer probleminin çözümleri toplamı biçiminde gösterilebilir.

I.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (132)$$

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (133)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (134)$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = 0 \quad (135)$$

II.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x, t) \quad (136)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (137)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = 0 \quad (138)$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = 0 \quad (139)$$

Böylece I.sınır değer probleminin çözümü  $u_1(x, t)$ , II.sınır değer probleminin çözümü  $u_2(x, t)$  ise (132)-(135) sınır değer probleminin çözümü  $u_1(x, t) + u_2(x, t)$  şeklindedir. Burada homojen olmayan (136)-(139) denkleminin oluşturduğu II.sınır değer probleminin çözümü, uygun homojen (132)-(135) denkleminin oluşturduğu I.sınır değer probleminin özfonksiyonlarına açılarak bulunabilir.

I. ve II.sınır değer problemlerinin çözümünü incelemeden önce yerel biçimde verilmemiş (134)-(135) sınır koşullarını noktasal biçime indirgeyelim.

(132) denklemden

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_t(x, t) dx &= a^2 \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 u(x, t) dx \right) &= a^2 \int_0^1 u_{xx}(x, t) dx \\ \Rightarrow 0 &= a^2 \int_0^1 xu_{xx}(x, t) dx \end{aligned}$$

bulunur.

Buradan kısmi integrasyon ile

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = 0 \quad (140)$$

elde edilir.

(135) sınır koşulu noktasal sınır koşuluna indirelim. Öncekine benzer olarak

$$\int_0^1 xu_t(x,t)dx = a^2 \int_0^1 xu_{xx}(x,t)dx$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \left( \int_0^1 xu_t(x,t)dx \right) = a^2 \int_0^1 xu_{xx}(x,t)dx$$

$$\Rightarrow 0 = a^2 \int_0^1 xu_{xx}(x,t)dx$$

eşitliği bulunur. Buradan kısmi integrasyon ile

$$u_x(1,t) - u(1,t) + u(0,t) = 0 \quad (141)$$

elde edilir. Dolayısıyla (132)-(135) sınır değer problemi ona denk olan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (142)$$

$$u(x,0) = \psi(x) \quad (143)$$

$$u_x(1,t) - u_x(0,t) = 0 \quad (144)$$

$$u_x(1,t) - u(1,t) + u(0,t) = 0 \quad (145)$$

sınır değer problemine dönüşür. Fourier metodu ile

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

şeklinde çözüm aranırsa

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad (146)$$

$$X'(1) - X'(0) = 0 \quad (147)$$

$$X'(1) - X(1) + X(0) = 0 \quad (148)$$

Sturm-Liouville problemi ve

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (149)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

## EŞLENİK SINIR PROBLEMİ ve SINIR KOŞULLARININ REGÜLERLİĞİ

Lagrange formülü kullanarak (146)-(148) sınır değer probleminin eşlenik sınır değer problemini bulalım. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$\int_0^1 X'' \bar{Y} dx = [X'(1) - X'(0)] \bar{Y}(1) + [X'(1) - X(1) + X(0)] \bar{Y}'(0) \\ - X'(0) (-\bar{Y}(1) + \bar{Y}(0) - \bar{Y}'(0)) + X(1) (-\bar{Y}'(1) + \bar{Y}'(0)) + \int_0^1 X \bar{Y}'' dx$$

elde edilir. Buradan eşlenik sınır değer problemi

$$Y''(x) + \lambda Y(x) = 0 \quad (150)$$

$$Y'(1) - Y'(0) = 0 \quad (151)$$

$$Y'(1) - Y(1) + Y(0) = 0 \quad (152)$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla (146)-(148) sınır değer problemi özeşleniktir.

Sınır koşullarının regülerliğini inceleyelim. (61)-(62) ile karşılaştırılırsa sınır koşullarının katsayıları

$$a_1 = 0, b_1 = 1, a_0 = 0, b_0 = -1, c_0 = 1, c_1 = 0, d_1 = 0, d_0 = 0$$

şeklindedir.  $b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0$  olduğundan sınır şartları regülerdir.

Ayrıca

$$\theta_0^2 - 4\theta_1 \theta_{-1} = 0^2 - 4(-1)(1) \neq 0$$

olduğundan sınır şartları kuvvetli regülerdir.

Dolayısıyla bir önceki probleme benzer olarak (146)-(148) probleminin özfonksiyonları Riesz tabanı oluşturur.

## ÖZDEĞER ve ÖZFONKSİYONLARIN HESAPLANMASI

$\lambda < 0$  olduğundan problemin sıfırdan farklı çözümü yoktur.

$\lambda = 0$  olduğunda (146)-(148) probleminin çözümü  $c \neq 0$  keyfi bir sabit olmak üzere  $X_0(x) = c$  çözümü elde edilir. Buradan  $\lambda = 0$  'a karşılık özfonksiyon ise  $X_0(x) = 1$  dir.

$\lambda > 0$  olsun. Bu durumda çözüm

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x$$

şeklindedir.

(147) sınır şartı çözüme sağlatılırsa

$$-\sin \sqrt{\lambda}c_1 + (\cos \sqrt{\lambda} - 1)c_2 = 0$$

eşitliği elde edilir. (148) sınır şartı sağlatılırsa

$$(1 - \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda})c_1 + (\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda})c_2 = 0$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikler matris formatında

$$\begin{bmatrix} -\sin \sqrt{\lambda} & \cos \sqrt{\lambda} - 1 \\ 1 - \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} - \sin \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

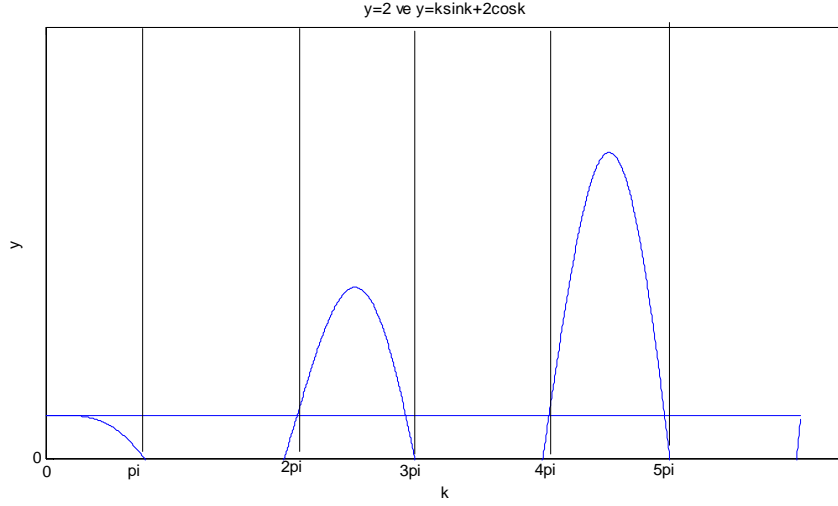
şeklinde ifade edilir. Bu sistemin sıfırdan farklı çözümü olması için determinantının sıfır olması gerekir. Aksi durumda sıfır çözümü elde edilir. Buradan bu matrisin determinanı

$$\Delta = 2 - 2 \cos \sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} = 0$$

olarak bulunur.  $\sqrt{\lambda} = k$  alınarak eşitlik

$$2 - 2 \cos k - k \sin k = 0 \tag{153}$$

şeklinde yazılabilir.



Şekil 5.  $k \sin k + \cos k = 2$  grafiği

Kolayca görülebilir ki

$$k_{2n} = 2n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (154)$$

(153) denkleminin köküdür. (153) denkleminin  $k_{2n+1} \in \left[2\pi n + \frac{\pi}{2}, (2n+1)\pi\right]$  aralığında bir kökü daha vardır. Bu kökün asimptotik formülünü bulalım.

$k_{2n} = (2n+1)\pi - \varepsilon$  olsun. Buradan [7] deki Lagrange'ın ters formülünü kullanalım.

$$\frac{2 \cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) + 2}{\sin(\varepsilon)} = (2n+1)\pi = \omega^{-1}$$

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon \left( \frac{2 \cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) + 2}{\sin(\varepsilon)} \right)} = \omega$$

$$\varepsilon = \frac{(2n+1)\pi}{2} - c_1 \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-1} - c_2 \left( \frac{(2n+1)\pi}{2} \right)^{-3} \dots$$

Burada

$$c_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left( \frac{d}{d\varepsilon} \right)^{k-1} h(\varepsilon)^k \right\} \Bigg|_{\varepsilon=0}, \quad h(\varepsilon) = \varepsilon \left( \frac{2 \cos(\varepsilon) + \varepsilon \sin(\varepsilon) + 2}{\sin(\varepsilon)} \right)$$

şeklindedir.  $c_k$  katsayıları hesaplanırsa kökler

$$k_{2n+1} = (2n+1)\pi - 4((2n+1)\pi)^{-1} - \frac{32}{3}((2n+1)\pi)^{-3} - \frac{832}{15}((2n+1)\pi)^{-5} + O\left(\frac{1}{n^7}\right) \quad (155)$$

olarak elde edilir.

Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar

$$X_{2n} = \cos(2\pi n)x \quad (156)$$

$$X_{2n+1} = \frac{\cos k - 1}{\sin k} \cos(k_n x) + \sin(k_n x) \quad (157)$$

olarak bulunur.  $\cos k - 1 = -k \sin k / 2$  olduğundan

$$X_{2n+1} = \frac{-k_n}{2} \cos(k_n x) + \sin(k_n x) \quad (158)$$

şeklinde de yazılabilir.

Bu özfonksiyonların normları

$$\|X_0(x)\|^2 = 1$$

$$\|X_{2n}(x)\|^2 = \int_0^1 \cos(2\pi nx)^2 dx = \frac{1}{2} + \frac{\sin(4\pi nx)}{8\pi n} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\|X_{2n+1}(x)\|^2 = \frac{(2 + \sin k_n)k_n^2}{16} + \frac{(1 + \cos 2k_n)}{2} + \frac{2 - \sin 2k_n}{4}$$

şeklindedir.

(149) probleminin çözümü  $A_n$  ler keyfi sabitler olmak üzere

$$T(t) = A_n e^{a^2 k_n^2 t}$$

şeklindedir.

Bu durumda (96)'a göre her bir

$$u_n(x,t) = A_n \cos(2\pi n)x e^{-4a^2\pi^2 n^2 t} + B_n \left( \frac{-k_n}{2} \cos(k_n x) + \sin(k_n x) \right) e^{-4a^2 k_n^2 t} \quad (159)$$

fonksiyonları çözümdür.

### ÇÖZÜMÜN İFADESİ

(142)-(145) probleminin çözümü için

$$u_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n} \cos(2\pi n x) e^{-a^2 4\pi^2 n^2 t} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left( \frac{-k_n}{2} \cos(k_n x) + \sin(k_n x) \right) e^{-a^2 k_n^2 t} \quad (160)$$

serisi oluşturulsun. Burada

$$A_0 = \int_0^1 \psi(x) dx$$

$$A_n = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos(2\pi n x), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$B_n = \frac{1}{\|X_{2n+1}(x)\|^2} \int_0^1 \psi(x) \left( \frac{-k_n}{2} \cos(k_n x) + \sin(k_n x) \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

şekindedir.

(160) serisi (142)-(145) probleminin çözümüdür (Ionkin ve Moiceev, 1977).

(136)-(139) homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü ise  $F(x,t)$  fonksiyonu

$$F(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}(t) X_{2n}(x) + F_{2n+1}(t) X_{2n+1}(x)$$

şeklinde özfonksiyonlarına açılarak

$$u_2(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \int_0^t F_{2n}(\tau) e^{-k_n^2(t-\tau)} d\tau \right] X_{2n}(x) + \left[ \int_0^t F_{2n+1}(\tau) e^{-k_n^2(t-\tau)} d\tau \right] X_{2n+1}(x)$$

biçiminde elde edilir. Burada



$$F_0(\tau) = \int_0^1 F(x, \tau) x dx$$

$$F_{2n}(\tau) = \int_0^1 F(x, \tau) X_{2n}(x) dx$$

$$F_{2n+1}(\tau) = \int_0^1 F(x, \tau) X_{2n+1}(x) dx$$

olarak ifade edilir. Dolayısıyla (128)-(131) probleminin çözümü

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$$

olarak bulunur.

### 2.3. Başka Bölgelerden Lineer Göç Alan Para Birikim Modeli 1

Bu bölümde başka bölgelerden gelen göçün yoğunluğa göre lineer olduğu para birikim modeli İonkin dönüşümü ile dönüştürülen sınır şartları ile incelenecektir.

$D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  bölgesinde

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x)v + f(x, t) \quad (161)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) \quad (162)$$

$$v(0, t) = 0 \quad (163)$$

$$v_x(1, t) - v(1, t) = \alpha(t) \quad (164)$$

probleminin çözümünü inceleyelim.

Varsayalım ki  $f(x, t)$  ve  $\varphi(x)$  verilen  $D$  bölgesinde tanımlı, türevlenebilir, sürekli fonksiyonlardır.  $q(x)$  ise integrallenebilir bir fonksiyon olsun.

(161)-(164) problemi için

$$v(x,t) = u(x,t) + \frac{\alpha(t)}{3}x^2 \quad (165)$$

şeklinde değişken dönüşümü yapılırsa  $u(x,t)$  için

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u + F(x,t) \quad (166)$$

$$u(x,0) = \psi(x) \quad (167)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (168)$$

$$u_x(1,t) - u(1,t) = 0 \quad (169)$$

sınır koşulları homojen olan kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada

$$F(x,t) = f(x,t) + q(x)x^2 \frac{\alpha(t)}{3} - \frac{\alpha'(t)}{3}x^2$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - \frac{\alpha(0)}{3}x^2$$

şeklindedir.

(166)-(169) problemi lineer olduğundan bu problemin çözümü aşağıdaki biçimde iki sınır değer probleminin çözümleri toplamı biçiminde gösterilebilir.

i)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u \quad (170)$$

$$u(x,0) = \psi(x) \quad (171)$$

$$u(0,t) = 0 \quad (172)$$

$$u_x(1,t) - u(1,t) = 0 \quad (173)$$

ii)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u + F(x,t) \quad (174)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (175)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (176)$$

$$u_x(1, t) - u(1, t) = 0 \quad (177)$$

Böylece I.sınır değer probleminin çözümü  $u_1(x, t)$ , II.sınır değer probleminin çözümü  $u_2(x, t)$  ise (161)-(164) sınır değer probleminin çözümü  $u_1(x, t) + u_2(x, t)$  olarak bulunur.

(170)-(173) probleminin çözümü bulmak için Fourier metodunu kullanalım.

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

şeklinde çözüm arayalım. Bu çözüm (170)'de yerine yazılırsa

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + q(x) = \lambda$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenip sınır şartları kullanılırsa

$$X''(x) + q(x)X(x) = \lambda X(x) \quad (178)$$

$$U_1 : X(0) = 0 \quad (179)$$

$$U_2 : X'(1) - X(1) = 0 \quad (180)$$

Sturm-Liouville problemi ve

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (181)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Önceki bölümlere benzer olarak kolayca görülebilir ki (178)-(180) problemi özeşleniktir ve sınır koşulları kuvvetli regülerdir.

ÖZDEĞER ve ÖZFONKSİYONLARIN ASİMPOTOTİK İFADESİ

(63)'e göre (178)-(180) sınır değer probleminin özfonksiyonları,  $\lambda = k^2$  özdeğerler olmak üzere

$$x_1 = e^{ikx} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad (182)$$

$$x_2 = e^{-ikx} \left(1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right) \quad (183)$$

şeklindedir. Bu çözümler sınır koşullarında yazılarak karakteristik determinant

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \begin{vmatrix} U_1(x_1) & U_1(x_2) \\ U_2(x_1) & U_2(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ ike^{ik} - e^{ik} & -ike^{-ik} - e^{-ik} \end{vmatrix} \times \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] \\ &= 2(\sin k - k \cos k) \left[1 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right] = 0 \end{aligned} \quad (184)$$

olarak elde edilir.

Buradan  $k \rightarrow \infty$  iken  $\Delta(k)$ 'nin kökleri

$$\sin k - k \cos k = 0 \quad (185)$$

köklerine yaklaşır.

(105)' dan (185) eşitliğinin kökleri

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} - \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^{-1} - \frac{2}{3} \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^{-3} - \frac{13}{15} \left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)^{-5} + O\left(\frac{1}{n^9}\right)$$

şeklindedir. Ya da bu ifade  $k \rightarrow \infty$  iken kaba bir ifadeyle

$$k_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad (186)$$

şeklindedir.

$k_n \rightarrow \infty$  özfonksiyonlar ise

$$\begin{aligned}
X_n(x) &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ U_1(x_1) & U_2(x_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{ik_n x} & e^{-ik_n x} \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] \\
&= \sin(k_n(x)) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right]
\end{aligned} \tag{187}$$

olarak elde edilir. (186) özdeğerleri (187)'de yerine yazılırsa özfonksiyonlar asimptotik olarak

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n = 0, 1, \dots$$

elde edilir.

#### ÇÖZÜMÜN ASİMPTOTİK İFADESİ

$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  fonksiyonlar dizisi (178)-(180) sınır değer probleminin özfonksiyonları,  $\lambda_n$  ise özdeğerleri olsun.

O halde (170)-(173) probleminin çözümü  $k_n \rightarrow \infty$

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) e^{-a^2 \lambda_n t} \tag{188}$$

serisidir [22]. Başlangıç koşulu sağlatılırsa

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)$$

elde edilir. Burada  $A_n$  Fourier katsayıları

$$A_n = \int_0^1 \psi(x) X_n(x) dx$$

şeklindedir. (174)-(177) problemin çözümü ise

$$u_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \int_0^t F_n(\tau) e^{-k_n^2(t-\tau)} d\tau$$

olarak elde edilir. Burada

$$F_n(\tau) = \int_0^1 F(x,\tau) X_n(x) dx$$

şeklindedir.

### 2.3.1. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Özdeğerlerin Bulunuşu

(178)-(180) Sturm Liouville probleminin özdeğerlerini sayısal olarak bulalım. Bunun için (Boffi, 2010) 'da gösterilen sonlu elemanlar yöntemini kullanalım.

$H = L^2[0,1]$  ve  $V = H_0^1[0,1]$  olmak üzere özdeğer problemi için

$$V_h = \{v \mid v \in V, v \text{ parçalı sürekli, } v(0)=0\}$$

test fonksiyon uzayı alınsın.  $\varphi_i$  şekil fonksiyonları lineer olmak üzere

$$X(x) = \sum_{i=1}^N \xi_i \varphi_i(x)$$

şeklinde çözüm aransın.

(178) eşitliğinin her iki tarafı  $v$  ile çarpılır ve kısmi integrasyon uygulanırsa

$$X(1)v(1) - \int_0^1 X'v' + \int_0^1 q(x)Xv = \lambda \int_0^1 Xv \quad (189)$$

zayıf formu elde edilir.  $v$  yerine  $\varphi_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$  alınırsa (189) eşitliği

$$A\xi = \lambda M \xi$$

özdeğer problemine indirgenir. Burada

$$A_{i,j} = (\varphi_i', \varphi_j') + (q(x)\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

$$M_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

şeklindedir.

Tablo 1 'de (178)-(180) probleminde  $q(x) = x$  alınarak farklı N değerlerinde sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak elde edilen özdeğerler verilmiştir. Burada  $A$  ve  $M$  matrislerindeki integraller Gauss quadrature yöntemi ile  $[-1,1]$  aralığında 4 nokta alınarak hesaplanmıştır. Tablo 2 'de ise  $q(x) = 1/(1+100x)$  alınarak elde edilen özdeğerler gösterilmiştir. N büyüdükçe özdeğerlerin yakınsadığı görülmektedir. Ayrıca her iki durumda da büyük özdeğerlere daha büyük N değerlerinde yakınsama gerçekleşmektedir. Ayrıca özdeğerlerin  $q(x) = 0$  olan problemin özdeğerlerinin komşuluğunda olduğu gözlenmektedir.

Tablo 1.  $q(x)=x$  için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler

Özdeğerler	Asimptotik Özdeğerler $q(x) = 0$	N=32	N=128	N=512	N=1024
$\lambda_1$	0	0.7482	0.7482	0.7482	0.7482
$\lambda_2$	20.8	20.7247	20.6936	20.6917	20.6916
$\lambda_3$	60.3	60.4702	60.1980	60.1810	60.1801
$\lambda_4$	119.6	120.5548	119.4720	119.4045	119.4012
$\lambda_5$	198.5	201.5634	198.5571	198.3704	198.3610
$\lambda_6$	297.2	304.2774	297.5021	297.0824	297.0615
$\lambda_7$	415.7	429.6839	416.3667	415.5448	415.5037
$\lambda_8$	553.8	578.9837	555.2228	553.7620	553.6890
$\lambda_9$	711.7	753.5964	714.1539	711.7392	711.6187
$\lambda_{10}$	889.4	955.1650	893.2560	889.4826	889.2942

Tablo 2.  $q(x)=1/(1+100x)$  için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler

Özdeğerler	Asimptotik Özdeğerler $q(x) = 0$	N=32	N=128	N=512	N=1024
$\lambda_1$	0	0.0147	0.0147	0.0147	0.0147
$\lambda_2$	20.8	20.2512	20.2201	20.2181	20.2180
$\lambda_3$	60.3	60.0014	59.7291	59.7121	59.7113
$\lambda_4$	119.6	120.0887	119.0058	118.9384	118.9350
$\lambda_5$	198.5	201.0992	198.0929	197.9061	197.8968
$\lambda_6$	297.2	303.8145	297.0392	296.6196	296.5986
$\lambda_7$	415.7	429.2221	415.9049	415.0830	415.0419
$\lambda_8$	553.8	578.5228	554.7618	553.3010	553.2281
$\lambda_9$	711.7	753.1362	713.6937	711.2790	711.1585
$\lambda_{10}$	889.4	954.7054	892.7964	889.0230	888.8346

#### 2.4. Başka Bölgelerden Lineer Göç Alan Para Birikim Modeli 2

Bu bölümde başka bölgelerden gelen göçün yoğunluğa göre lineer olduğu para birikim modeli İonkin dönüşümü ile dönüştürülen sınır şartları ile incelenecektir.

$D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  bölgesinde homojen olmayan

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + q(x)v + f(x, t) \quad (190)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x) \quad (191)$$

$$v_x(1, t) - v_x(0, t) = \alpha(t) \quad (192)$$

$$v_x(1, t) - v(1, t) + v(0, t) = \beta(t) \quad (193)$$

problemi ile verilir.

(190)-(193) probleminde

$$v(x, t) = u(x, t) + (2\beta(t) - \alpha(t))x^3 + (2\alpha(t) - 3\beta(t))x^2 \quad (194)$$

şeklinde değişken dönüşümü yapılırsa  $u(x, t)$  için



$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u + F(x, t) \quad (195)$$

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (196)$$

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = 0 \quad (197)$$

$$u_x(1, t) - u(1, t) + u(0, t) = 0 \quad (198)$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Burada

$$F(x, t) = f(x, t) + (2\beta(t) - \alpha(t))(q(x)x^3 - 6a^2x) + (2\alpha(t) - 3\beta(t))(q(x)x^2 - 4a^2) \\ - (2\beta'(t) - \alpha'(t))x^3 - (2\alpha'(t) - 3\beta'(t))x^2$$

$$\psi(x) = \varphi(x) - (2\beta(0) - \alpha(0))x^3 - (2\alpha(0) - 3\beta(0))x^2$$

şeklindedir.

(195)-(198) problemi lineer olduğundan bu problemin çözümü aşağıdaki gibi iki sınır değer probleminin çözümleri toplamı şeklinde yazılabilir.

i)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u \quad (199)$$

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (200)$$

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = 0 \quad (201)$$

$$u_x(1, t) - u(1, t) + u(0, t) = 0 \quad (202)$$

ii)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u + F(x, t) \quad (203)$$

$$u(x, 0) = 0 \quad (204)$$

$$u_x(1, t) - u_x(0, t) = 0 \quad (205)$$

$$u_x(1,t) - u(1,t) + u(0,t) = 0 \quad (206)$$

Bir önceki probleme benzer olarak (199)-(202) probleminin çözümü bulmak için Fourier yöntemi uygulanırsa

$$X''(x) + q(x)X(x) = \lambda X(x) \quad (207)$$

$$X'(1) - X'(0) = 0 \quad (208)$$

$$X'(1) - X(1) + X(0) = 0 \quad (209)$$

Sturm-Liouville problemi ve

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \quad (210)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

### ÖZDEĞER ve ÖZFONKSİYONLARIN ASİMPOTOTİK İFADESİ

(207)-(209) sınır değer probleminin özdeğerlerini asimptotik olmak için karakteristik denklemi oluşturalım.

$$\begin{aligned} \Delta(k) &= \begin{vmatrix} ik - ike^{ik} & -ik - ike^{-ik} \\ ik - e^{ik} + 1 & -ik - ke^{-ik} + 1 \end{vmatrix} \times \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] \\ &= -4ik(2 \cos k - 2 + k \sin k) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Buradan  $k \rightarrow \infty$  iken  $\Delta(k)$  nu kökleri

$$k(2 \cos k - 2 + k \sin k) = 0$$

köklerine yaklaşır. Önceki bölümden bilinir ki bu denklemin kökleri

$$k_{2n} = 2\pi n$$

$$k_{2n+1} = (2n+1)\pi - 4((2n+1)\pi)^{-1} - \frac{32}{3}((2n+1)\pi)^{-3} - \frac{832}{15}((2n+1)\pi)^{-5} + O\left(\frac{1}{n^7}\right)$$

şeklindedir. Ya da bu kökler kaba bir ifadeyle  $k \rightarrow \infty$

$$k_{2n} = 2\pi n + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$k_{2n+1} = (2n+1)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

şeklinde yazılabilir.

$k \rightarrow \infty$  asimptotik özfonksiyonları bulalım.

$$\begin{aligned} X_{2n}(x) &= \frac{1}{2i} \begin{vmatrix} e^{ik_n x} & e^{-ik_n x} \\ ik_n e^{ik_n} - e^{ik_n} + 1 & -ik_n e^{-ik_n} - e^{-ik_n} + 1 \end{vmatrix} \times \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] \\ &= \frac{k_n}{2i} \left[ -ik_n e^{ik_n(x-1)} - e^{ik_n(x-1)} + e^{ik_n x} - ik_n e^{-ik_n(x-1)} + e^{-ik_n(x-1)} - e^{-ik_n x} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] \\ &= \{ -k_n (\cos(k_n(x-1))) - \sin(k_n(x-1)) + \sin k_n x \} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] \\ &= (-k_n (\cos k_n x \cos k_n + \sin k_n x \sin k_n) - \sin k_n x \cos k_n - \sin k_n \sin k_n x + \sin k_n x) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{k_n}\right) \right] \end{aligned}$$

Buradan özfonksiyonlar

$$k_{2n} = 2\pi n + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ için}$$

$$X_{2n}(x) = \cos 2\pi n x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$k_{2n+1} = (2n+1)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \text{ için}$$

$$X_{2n+1}(x) = \left( (-1)^n k_n \cos k_n x + (1 - (-1)^n) \sin k_n x \right)$$

olarak bulunur.

ÇÖZÜMÜN ASİMPOTİK İFADESİ

$\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  fonksiyonlar dizisi (207)-(209) sınır değer probleminin özfonksiyonları,  $\lambda_n$  ise özdeğerleri olsun.

O halde (199)-(202) probleminin çözümü

$$u_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) e^{-a^2 k_{2n}^2 t} + B_{2n+1} X_{2n+1}(x) e^{-a^2 k_{2n+1}^2 t} \quad (211)$$

şeklindedir [22]. Başlangıç koşulu sağlatılırsa

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{2n} X_{2n}(x) + B_{2n+1} X_{2n+1}(x)$$

elde edilir.  $A_n$  Fourier katsayıları

$$A_n = \int_0^1 \psi(x) X_{2n}(x) dx$$

$$B_n = \int_0^1 \psi(x) X_{2n+1}(x) dx$$

olarak bulunur. (203)-(206) probleminin çözümü ise

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n}(x) \int_0^1 F_{2n}(\tau) e^{-k_{2n}^2(t-\tau)} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} X_{2n+1}(x) \int_0^1 F_{2n+1}(\tau) e^{-k_{2n+1}^2(t-\tau)} d\tau \quad (212)$$

olarak elde edilir. Burada

$$F_{2n}(\tau) = \int_0^1 F(x, \tau) X_{2n}(x) dx$$

$$F_{2n+1}(\tau) = \int_0^1 F(x, \tau) X_{2n+1}(x) dx$$

şeklindedir.

### 2.4.1. Sonlu Elemanlar Yöntemiyle Özdeğerlerin Bulunuşu

Bir önceki bölümdeki adımlar uygulanırsa (207)-(209) problemi için zayıf form

$$(X(1) - X(0))v(1) - (X(1) - X(0))v(0) - \int_0^1 X'v' + \int_0^1 q(x)Xv = \lambda \int_0^1 Xv$$

şeklinde bulunur. Bu zayıf form

$$A\xi = \lambda M\xi \quad (213)$$

özdeğer problemine indirgenir.

Tablo 3 'de (207)-(209) probleminde  $q(x) = x$  alınarak sonlu elemanlar yöntemi ile elde edilen özdeğerler verilmiştir. Tablo 4'te ise  $q(x) = 1/(1+100x)$  alınarak elde edilen özdeğerler gösterilmiştir. Her iki durumda özdeğerler,  $q(x) = 0$  olan durumdaki asimptotik özdeğerlerin komşuluğunda yakınsamaktadır. Aynı  $N$  değerinde büyük özdeğerlerdeki hatanın daha fazla olduğu gözlemlenmiştir.

Tablo 3.  $q(x) = x$  için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler

Özdeğerler	Asimptotik Özdeğerler $q(x) = 0$	N=32	N=128	N=512	N=1024
$\lambda_1$	0	0.2105	0.2105	0.2105	0.2105
$\lambda_2$	0	0.7879	0.7879	0.7879	0.7879
$\lambda_3$	39.4784	40.1061	39.9871	39.9796	39.9793
$\lambda_4$	80.7640	81.7951	81.2963	81.2652	81.2637
$\lambda_5$	157.9137	160.4534	158.5407	158.4217	158.4158
$\lambda_6$	238.7181	243.8883	239.5081	239.2363	239.2227
$\lambda_7$	355.3058	366.1938	356.4484	355.8460	355.8159
$\lambda_8$	475.5995	494.7667	477.2511	476.1714	476.1175
$\lambda_9$	631.6547	665.2451	634.1867	632.2816	632.1864
$\lambda_{10}$	791.4312	844.0658	795.1221	792.1304	791.9811

Tablo 4.  $q(x) = 1/(1+100x)$  için sonlu elemanlar yöntemi ile bulunan özdeğerler

Özdeğerler	Asimptotik Özdeğerler	N=32	N=128	N=512	N=1024
$\lambda_1$	0	0.0141	0.0141	0.0141	0.0141
$\lambda_2$	0	0.1147	0.1147	0.1147	0.1147
$\lambda_3$	39.4784	39.6683	39.5492	39.5417	39.5414
$\lambda_4$	80.7640	81.3510	80.8522	80.8211	80.8195
$\lambda_5$	157.9137	160.0107	158.0979	157.9790	157.9730
$\lambda_6$	238.7181	243.4421	239.0619	238.7900	238.7764
$\lambda_7$	355.3058	365.7484	356.0029	355.4005	355.3704
$\lambda_8$	475.5995	494.3191	476.8033	475.7237	475.6698
$\lambda_9$	631.6547	664.7981	633.7395	631.8344	631.7392
$\lambda_{10}$	791.4312	843.6173	794.6733	791.6816	791.5323

## 2.5. Sonlu Fark Yöntemiyle Para Birikim Modelinin Çözümü

Bu bölümde integral sınır şartlarına sahip para birikim modelinin sonlu fark yöntemleri ile çözümü incelenmektedir.

### 2.5.1. Minimum Birikim ve Toplam Para Miktarı Verilen Para Birikim Modeli

#### 2.5.1.1. Çizgiler Metodu

Çizgiler metodu parabolik kısmi türevli diferansiyel denklemler için sıkça kullanılan bir yöntemdir. Bu yöntem ile kısmi türevli diferansiyel denklem matris formatında yazılabilen ve çözümü yineleme bağıntısı ile ifade edilebilen adi diferansiyel denklem sistemine dönüşür. Daha sonra bu bağıntıya sayısal yöntemler uygulanır (Dehghan, 2003).

Problemin çözümü için ele alınan yöntem (Rehmana ve Taj, 2011)'de uygulanan Çizgiler yöntemidir. Önce  $[0,1]$  aralığında tanımlanan para birikim modelinin minimum birikimin 0 ve toplam para miktarının verildiği problemi ele alalım.

$D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  bölgesinde homojen olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t) \quad (214)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (215)$$

$$u(0, t) = 0 \quad (216)$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = K(t) \quad (217)$$

problemini göz önüne alalım.

D bölgesi için  $[0, 1]$  aralığını  $(N+1)h=1$  olacak şekilde  $h$  uzunluklu  $N+1$  alt aralığa ve zaman değişkenini  $l$  uzunluklu zaman aralıklarına bölerek  $(x_m, t_n) = (mh, nl)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots, N+1, n = 0, 1, 2, \dots$ ) koordinatlarına sahip bir dikdörtgensel ağ oluşturalım.

$u(x, t)$ ,  $x$  değişkenine göre 5. mertebeden sürekli türevlenebilir ve bu türevler sınırlı olsun. Bu durumda  $m = 1, 2, 3, \dots, N-2$  noktalarına  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  terimi için 3. Mertebeden 5 noktalı

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} \{ & 11u(x-h, t) - 20u(x, t) + 6u(x+h, t) + 4u(x+2h, t) \\ & -u(x+3h, t) \} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^5} + O(h^4) \quad h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (218)$$

yaklaşımını kullanalım.

$m = N-1$  ve  $m = N$  noktaları için ise aynı  $\frac{h^3}{12} \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^5}$  baskın hataya sahip sırasıyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} \{ & u(x-3h, t) - 6u(x-2h, t) + 26u(x-h, t) + 40u(x, t) \\ & + 21u(x+h, t) - 2u(x+2h, t) \} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^5} + O(h^4) \quad h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (219)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{12h^2} \{ & 2u(x-4h, t) - 11u(x-3h, t) + 21u(x-2h, t) - 14u(x-h, t) \\ & - 10u(x, t) + 9u(x+h, t) \} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial^5 u(x, t)}{\partial x^5} + O(h^4) \quad h \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (220)$$

yaklaşımlarını kullanalım.





ve sütun vektörü

$$v(t) = [q_1, q_2, \dots, q_{N-2} + \frac{K(t)}{4h^3}, q_{N-1} + \frac{K(t)}{2h^3}, q_N - \frac{9K(t)}{4h^3}]^T$$

dir.

(221)-(222) sisteminin çözümü

$$U(t) = \exp(tA)f + \int_0^t \exp[(t-s)A]v(s)ds, \quad t \geq 0 \quad (223)$$

şeklindedir ve bu çözüm

$$U(t+l) = \exp(tA)U(t) + \int_t^{t+l} \exp[(t+l-s)A]v(s)ds, \quad t = 0, l, 2l, \dots \quad (224)$$

yineleme bağıntısını sağlar.

(224) deki üstel matris fonksiyonunu yaklaşık olarak hesaplamak için

$$E_3(\theta) = \frac{b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2}{a_0 - a_1\theta + a_2\theta^2 - a_3\theta^3} = \frac{p(\theta)}{q(\theta)}$$

rasyonel yaklaşım kullanılsın. Burada  $a_i$  ve  $b_i$  reel sayılar olmak üzere

$$a_0 = 1, b_0 = 1 - a_1, b_2 = 0.5 - a_1 + a_2 \text{ ve } a_3 = \frac{1}{6} - \frac{a_1}{2} + a_3$$

eşitliklerini sağlamaktadır. Dolayısıyla

$$\exp(lA) = G^{-1}(I + (1 - a_1)lA + (\frac{1}{2} - a_1 + a_2)l^2 A^2)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$G = I - a_1 l A + a_2 l^2 A^2 - (\frac{1}{6} - \frac{1}{2} a_1 + a_2) l^3 A^3$$

olarak ifade edilir.

(224) deki integral terimi ise

$$\int_t^{t+l} \exp[(t+l-s)A]v(s)ds = W_1v(s_1) + W_2v(s_2) + W_3v(s_3)$$

ile yaklaşık olarak hesaplanır. Burada

$$W_1 = \frac{l}{6} \{I + (4 - 9a_1 + 12a_2)lA\} G^{-1}$$

$$W_2 = \frac{2l}{3} \{I - (1 - 3a_1 + 6a_2)lA\} G^{-1}$$

$$W_3 = \frac{l}{6} \{I + (3 - 9a_1 + 12a_2)lA + (1 - 3a_1 + 6a_2)l^2 A^2\} G^{-1}$$

şeklindedir. Dolayısıyla (224) eşitliği

$$U(t+l) = \exp(lA)U(t) + W_1v(t) + W_2v(t + \frac{l}{2}) + W_3v(t+l)$$

halini alır [34].

### 2.5.1.2. Crank Nicolson Yöntemi

(214)-(217) problemine (Shingmin ve Lin, 1990)'te çalışılan Crank Nicolson yöntemini uygulayalım.

$[0, 1] \times [0, T]$  aralığını  $h = 1/N$  ve  $\tau = 1/M$  adım uzunluklu  $N \times M$  ağıza bölelim.

Crank Nicolson yöntemi ile (214) eşitliği  $j = 1, 2, \dots, N-1$   $n = 1, 2, \dots, M$  olmak üzere

$$u_{j-1}^{n+1} - 2 \left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right) u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = u_{j-1}^n + 2 \left(1 - \frac{h^2}{\tau}\right) u_j^n + u_{j+1}^n - h^2 (q_j^n + q_j^{n+1}) \quad (225)$$

şeklinde yazılır. (216) sınır şartı uygulanırsa

$$u_0^n = 0 \quad (226)$$

elde edilir. (217) sınır şartına

$$\int_0^1 xu(x,t) \approx \frac{h}{3} \left[ u(0,t) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}} (2i-1)u(2i-1,t) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}-1} (2i)u(2i,t) + u(N+1,t) \right] + O(h^4) \quad (227)$$

Simpson integral yaklaşımını kullanalım.

(225),(226),(227) birleştirilmesiyle

$$Au = b \quad (228)$$

denklem sistemi elde edilir.

Burada  $A$  matrisi  $R = -2(1 + h^2 / \tau)$  olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} R & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & R & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & R \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

ve  $\alpha_i$  ler

$$\alpha_i = \begin{cases} 4x_i h, & i = 1, 3, \dots \\ 2x_i h, & i = 2, 4, \dots \\ h, & i = N \end{cases}$$

şeklindedir. (228) denklem sisteminin çözümü ile

$$U^{n+1} = [u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_M^{n+1}]^T$$

aranan sayısal çözüm bulunur.

### Örnek 1:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^2 - 2)e^t$$

$$u(x, 0) = x^2$$

$$u(0, t) = 0$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = \frac{e^t}{4}$$

Bu problemin gerçek çözümü

$$u(x, t) = x^2 e^t$$

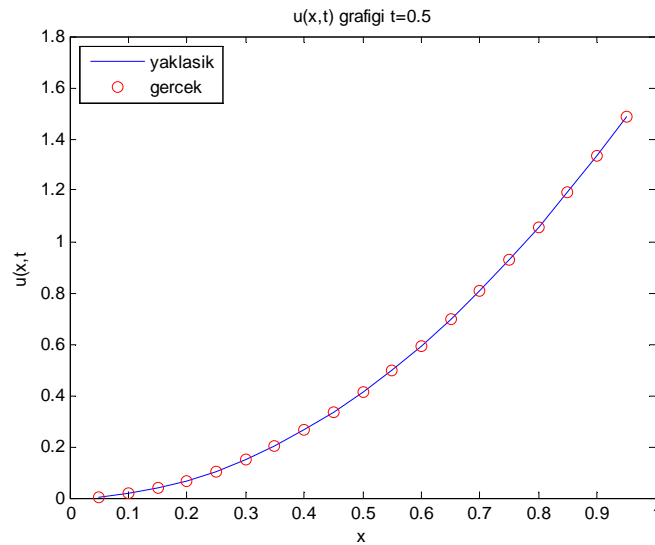
şeklindedir. Kullanılan yaklaşık yöntem ile  $U(0.5, 0.5)$  noktasında bağıl hata

$$e_b = \left| \frac{U_{\text{yaklaşık}} - U_{\text{gerçek}}}{U_{\text{gerçek}}} \right| \text{ aşağıdaki tabloda verilmiştir.}$$

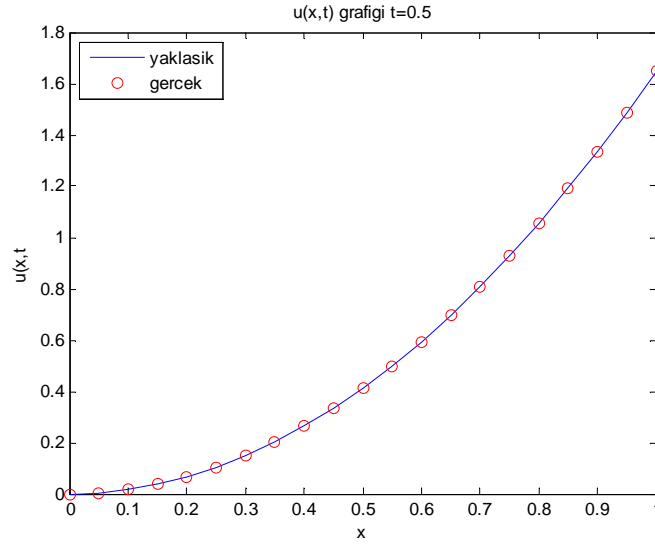
Tablo 5. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar

Aralık uzunluğu	Çizgiler Metodu	Crank Nicolson Metodu
$h = 0.1$	$1.6291 \times 10^{-5}$	$4.8730 \times 10^{-5}$
$h = 0.05$	$2.553 \times 10^{-6}$	$1.2398 \times 10^{-5}$
$h = 0.025$	$3.6733 \times 10^{-7}$	$3.1067 \times 10^{-6}$
$h = 0.0125$	$4.8533 \times 10^{-8}$	$7.7699 \times 10^{-7}$

Tablodan görüldüğü üzere kullanılan sayısal yöntemlerdeki hata  $h$  küçüldükçe azalmaktadır. Aynı adım uzunluğunda Çizgiler metodu, Crank Nicolson yönteminden daha az hata ile çözüme yaklaşmaktadır.



Şekil 6. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği



Şekil 7. Crank Nicolson metodu ile çözümün grafiği

### Örnek 2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{-2(x^2 + t + 1)}{(t+1)^3}$$

$$u(x, 0) = x^2$$

$$u(0, t) = 0$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = \frac{1}{4(t+1)^2}$$

problemini ele alalım. Bu problemin gerçek çözümü

$$u(x, t) = \frac{x^2}{(t+1)^2}$$

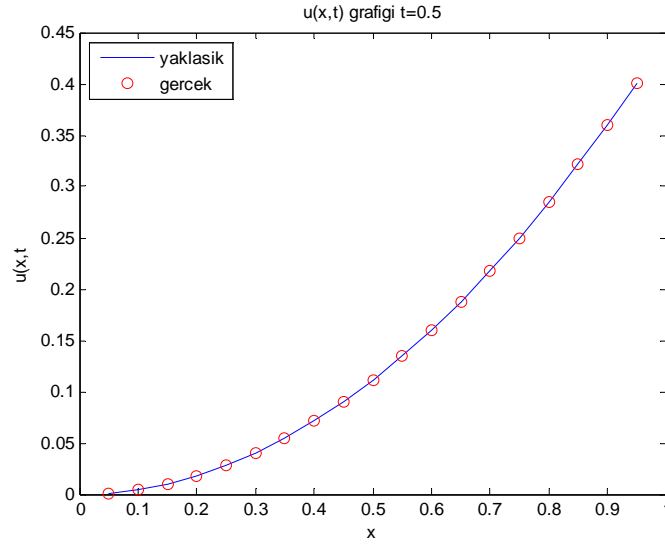
olarak bilinmektedir. Kullanılan yaklaşık yöntem ile  $U(0.5, 0.5)$  noktasında bağıl hata

$$e_b = \left| \frac{U_{yaklasik} - U_{gercek}}{U_{gercek}} \right| \text{ aşağıdaki tabloda verilmiştir.}$$

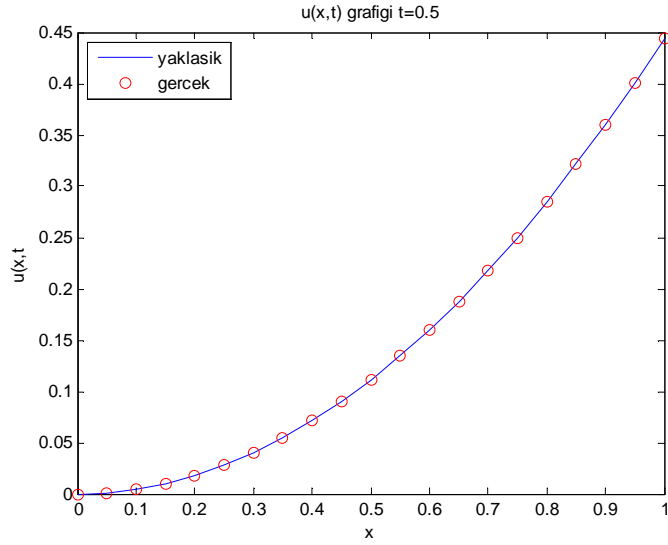
Tablo 6. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar

Aralık uzunluğu	Çizgiler Metodu	Crank Nicolson Metodu
$h = 0.1$	$1.4572 \times 10^{-4}$	$3.7936 \times 10^{-4}$
$h = 0.05$	$2.2868 \times 10^{-5}$	$1.0927 \times 10^{-4}$
$h = 0.025$	$3.3245 \times 10^{-6}$	$2.7647 \times 10^{-5}$
$h = 0.0125$	$4.468 \times 10^{-7}$	$6.9193 \times 10^{-6}$

Tablodan görüldüğü üzere kullanılan sayısal yöntemlerdeki hata  $h$  küçüldükçe azalmaktadır. Bir önceki örneğe benzer olarak aynı adım uzunluğunda Çizgiler metodu, Crank Nicolson yönteminden daha az hata ile çözüme yaklaşmaktadır.



Şekil 8. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği



Şekil 9. Crank Nicolson metodu ile çözümün grafiği

### 2.5.2. Toplam Aile Sayısı ve Toplam Para Miktarının Verildiği Para Birikim Modeli

Bir önceki probleme uygulanan sayısal yöntemleri (123)-(126) problemine uygulayalım.

$D = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$  bölgesinde olmayan

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x, t) \quad (229)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (230)$$

$$\int_0^1 u(x, t) dx = N(t) \quad (231)$$

$$\int_0^1 xu(x, t) dx = K(t) \quad (232)$$

problemini göz önüne alalım.

#### 2.5.2.1. Çizgiler Metodu

Bir önceki problemde kullanılan (218), (219), (220) sonlu fark yaklaşımlarını kullanalım. (231) ve (232) sınır koşullarına

$$\int_0^1 u(x,t) \approx \frac{h}{3} \left[ u(0,t) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}} u(2i-1,t) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}-1} u(2i,t) + u(N+1,t) \right] + O(h^5)$$

$$\int_0^1 xu(x,t) \approx \frac{h}{3} \left[ 4 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}} (2i-1)u(2i-1,t) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}-1} (2i)u(2i,t) + u(N+1,t) \right] + O(h^5)$$

Simpson integral yaklaşımlarını kullanalım. Bu yaklaşımlar ile

$$\frac{dU}{dt} = AU(t) + v(t), \quad t > 0$$

$$U(0) = f$$

şeklinde adi diferansiyel denklem elde edilir. Burada

$U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T$  ve  $f = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)]^T$  şeklinde sütun vektörleri ve A matrisi ise

$$A = \frac{1}{12h^2} \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_2 & \cdots & & & \cdots & \theta_N \\ 11 & -20 & 6 & 4 & -1 & & \\ & 11 & -20 & 6 & 4 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 11 & -20 & 6 & 4 & -1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & & & \cdots & \alpha_N \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & & & \cdots & \beta_N \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \cdots & & & \cdots & \gamma_N \end{pmatrix}$$

şeklinindedir. Burada A matrisinin ilk satırı ve son 3 satırı



$$\alpha_i = \begin{cases} 4x_i, & i = 1, 3, \dots \\ 2x_i, & i = 2, 4, \dots \\ 2x_i, & i = N-4 \\ 11+4x_i & i = N-3 \\ 2x_i - 20 & i = N-2 \\ 4x_i + 6 & i = N-1 \\ 2x_i + 4 & i = N \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} 8x_i, & i = 1, 3, \dots \\ 4x_i, & i = 2, 4, \dots \\ 4x_i + 1, & i = N-4 \\ 8x_i - 6 & i = N-3 \\ 4x_i - 26 & i = N-2 \\ 8x_i - 40 & i = N-1 \\ 4x_i + 21 & i = N \end{cases} \quad \gamma_i = \begin{cases} -36x_i, & i = 1, 3, \dots \\ -18x_i, & i = 2, 4, \dots \\ -18x_i + 2, & i = N-4 \\ -36x_i - 11, & i = N-3 \\ -18x_i + 24, & i = N-2 \\ -36x_i - 40, & i = N-1 \\ -18x_i + 10, & i = N \end{cases}$$

$$\theta_i = \begin{cases} -20 + 11(4x_1 - 4), & i = 1 \\ 6 + 11(2x_2 - 2), & i = 2 \\ 4 + 11(4x_3 - 4), & i = N-4 \\ -1 + 11(2x_1 - 2), & i = N-3 \\ 4x_i - 4 & i = 4, 6, \dots \\ 2x_i - 2 & i = 5, 7, \dots \end{cases}$$

ve

$$v(t) = [q_1 + 33\left(\frac{K(t) - N(t)}{12h^2}\right), q_2, \dots, q_{N-2} + \frac{K(t)}{4h^3}, q_{N-1} - 6\frac{N(t)}{12h^3}, q_N - \frac{27K(t)}{12h^3}]^T$$

olarak bulunur.

### 2.5.2.2. Crank Nicolson Yöntemi

$[0, 1] \times [0, T]$  aralığını  $h = 1/N$  ve  $\tau = 1/M$  adım uzunluklu  $N \times M$  ağıza bölelim.

Crank Nicolson yöntemi ile (229) eşitliği  $j = 1, 2, \dots, N-1$   $n = 1, 2, \dots, M$

$$u_{j-1}^{n+1} - 2\left(1 + \frac{h^2}{\tau}\right)u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} = u_{j-1}^n + 2\left(1 - \frac{h^2}{\tau}\right)u_j^n + u_{j+1}^n - h^2(q_j^n + q_j^{n+1}) \quad (233)$$

şeklinde yazılır.

(231) ve (232) sınır şartlarına Simpson kuralını uygulayalım.

$$\int_0^1 u(x, t) \approx \frac{h}{3} [u(0, t) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}} u(2i-1, t) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}-1} u(2i, t) + u(N+1, t)] + O(h^5) \quad (234)$$

$$\int_0^1 xu(x,t) \approx \frac{h}{3} [u(0,t) + 4 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}} (2i-1)u(2i-1,t) + 2 \sum_{i=1}^{\frac{N+1}{2}-1} (2i)u(2i,t) + u(N+1,t)] + O(h^4) \quad (235)$$

(233),(234) ve (235) birleştirilmesiyle

$$Au = b \quad (236)$$

denklem sistemi elde edilir.

Burada  $A$  matrisi  $R = -2(1 + h^2 / \tau)$  olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & R & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & R & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-1} & \beta_n \end{pmatrix}$$

ve  $\alpha_i$  ve  $\beta_i$  ler

$$\alpha_i = \begin{cases} 4h, & i = 1, 3, \dots \\ 2h, & i = 2, 4, \dots \\ h, & i = N \end{cases} \quad \beta_i = \begin{cases} 4x_i h, & i = 2, 4, \dots \\ 2x_i h, & i = 3, 5, \dots \\ h, & i = 1 \\ h, & i = N \end{cases}$$

şeklindedir. (236) denklem sisteminin çözümü ile

$$U^{n+1} = [u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_M^{n+1}]^T$$

aranan sayısal çözüm bulunur.

**Örnek:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = x - x^2$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx = (1/6) - 2t$$

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = (1/12) - t$$

Bu problemin çözümü

$$u(x,t) = x - x^2 - 2t$$

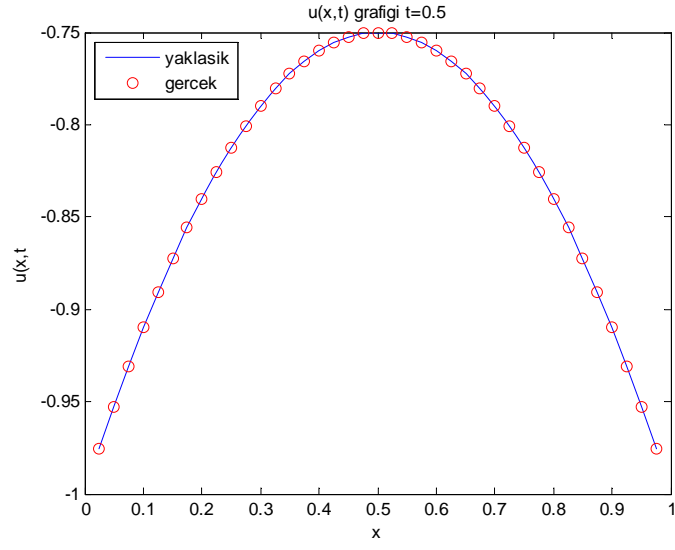
olarak bilinmektedir.

Kullanılan yaklaşık yöntem ile  $U(0.5, 0.5)$  noktasında bağıl hata  $e_b = \left| \frac{U_{yaklaşık} - U_{gerçek}}{U_{gerçek}} \right|$  aşağıdaki tabloda verilmiştir.

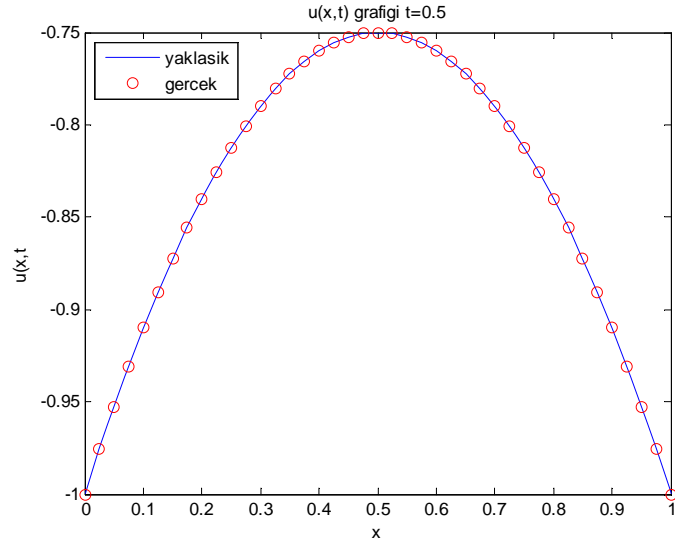
Tablo 7. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar

Aralık uzunluğu	Çizgiler Metodu	Crank Nicolson Metodu
$h = 0.1$	$1.3471 \times 10^{-14}$	$2.9606 \times 10^{-16}$
$h = 0.05$	$8.4510 \times 10^{-13}$	$2.9606 \times 10^{-16}$
$h = 0.025$	$1.7494 \times 10^{-12}$	$6.8094 \times 10^{-15}$
$h = 0.0125$	$4.6876 \times 10^{-12}$	$1.9244 \times 10^{-15}$

Tablodan görüldüğü üzere sayısal çözümle elde edilen hatalar çok küçüktür. Bir önceki problemin aksine aynı adım uzunluğunda Crank Nicolson metodu Çizgiler metodu yönteminden daha az hata ile çözüme yaklaşmaktadır.



Şekil 10. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği



Şekil 11. Crank Nicolson metodu ile çözümün grafiği

## Örnek 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = \sin(\pi x)$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx = \frac{2}{\pi} \exp(-\pi^2 t)$$

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = \frac{1}{\pi} \exp(-\pi^2 t)$$

Bu problemin çözümü

$$u(x,t) = \sin(\pi x) \exp(-\pi^2 t)$$

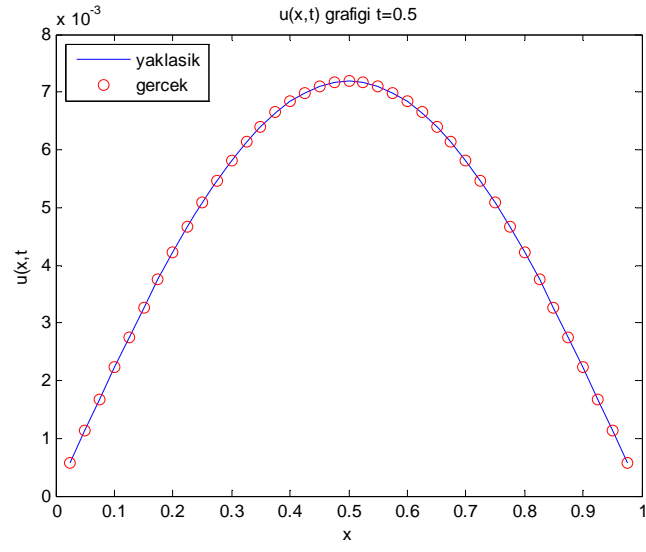
şeklindedir.

Kullanılan yaklaşık yöntem ile  $U(0.5, 0.5)$  noktasında bağıl hata  $e_b = \left| \frac{U_{yaklaşık} - U_{gerçek}}{U_{gerçek}} \right|$  Tablo 8 de verilmiştir.

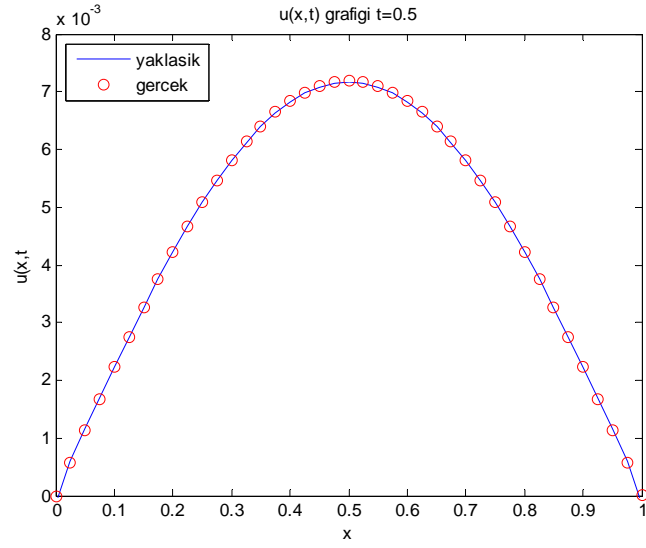
Tablo 8. Çizgiler Metodu ve Crank Nicolson ile elde edilen bağıl hatalar

Aralık uzunluğu	Çizgiler Metodu	Crank-Nicolson Metodu
$h = 0.1$	0.0029	0.0075
$h = 0.05$	$4.5074 \times 10^{-4}$	0.0023
$h = 0.025$	$6.4370 \times 10^{-5}$	$5.6888 \times 10^{-4}$
$h = 0.0125$	$4.4595 \times 10^{-6}$	$9.1160 \times 10^{-5}$

Tablo 8'den görüldüğü üzere kullanılan sayısal yöntemlerdeki hata  $h$  küçüldükçe azalmaktadır. Bütün adım uzunluklarında Çizgiler metodu, Crank Nicolson yönteminden daha az hata ile çözüme yaklaşmıştır.



Şekil 12. Çizgiler metodu ile çözümün grafiği



Şekil 13. Crank Nicolson metodu ile çözümün grafiği

### 3. BULGULAR ve TARTIŞMA

Son yıllarda integral sınır koşulları ile uygulamalarda sıkça karşılaşılmaktadır. İlk olarak Cannon (1963) tarafından integral sınır koşulları ortaya atılmıştır. Ionkin (1977), Cannon tarafından ortaya atılan problemin özel bir durumunu çalışmıştır. Ionkin'in ısı probleminin sınır şartları

$$u_x(0,t) = 0, \quad \int_0^1 u(x,t) dx = m(t)$$

şeklindedir. Ionkin, integral sınır şartını noktasala indirerek özeşlenik olmayan ve sınır şartları zayıf regüler olan Sturm Liouville problemi elde etmiştir.

Bu tezde, Erofeenko ve Kozlovski (2011) tarafından çalışılan para birikim modelinin özel durumu olan ısı denklemi

$$u(0,t) = 0, \quad \int_0^1 xu(x,t) dx = K(t) \quad \text{ve} \quad \int_0^1 u(x,t) dx = N(t), \quad \int_0^1 xu(x,t) dx = K(t)$$

sınır koşulları alınarak incelenmiştir. Ionkin'in kullandığı dönüşüm yardımıyla integral sınır koşulları noktasal sınır koşullarına indirgenmiştir. Fourier yöntemi ile karşılık gelen Sturm Liouville probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları bulunmuştur. Sturm Liouville problemlerinin özeşlenik olduğu ve sınır koşullarının kuvvetli regüler olduğu gösterilmiştir. Her iki problem için özfonksiyonların Riesz taban özelliği kullanılarak çözüm yazılmıştır. Literatürde bulunan Çizgiler metodu ve Crank Nicolson metodu bu problemlere uygulanmıştır. Bir örnek hariç çizgiler metodunun Crank Nicolson metodundan daha iyi sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir.

Ayrıca bu tezde birikime göre lineer göç terimi  $f = q(x)u + f(x,t)$  olarak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u + f(x,t)$$

parabolik kısmi diferansiyel denklemi dönüştürülen sınır şartları ile incelenip özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik formülleri elde edilmiştir. Sonlu elemanlar yöntemi ile yaklaşık özdeğerler bulunup asimptotik özdeğerler ile karşılaştırılmıştır. Sonlu elemanlar ile hesaplanan özdeğerlerin  $q(x)=0$  olduğu durumdaki özdeğerlerin komşuluğunda yakınsadığı gözlemlenmiştir.

#### 4. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında incelenen para birikim modeli için elde edilen sonuçlar aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

1) Minimum birikim ve toplam para birikim ile verilen para birikim modelinde integral ile verilen sınır şartı noktasal sınır şartlarına dönüştürülmüştür. Elde edilen Sturm Liouville problemi özdeşleniktir. Sınır koşulları regülerdir. Ayrıca kuvvetli regülerdir.

2) Aile sayısı birikim ve toplam para birikim ile verilen para birikim modelinde integral ile verilen iki tane sınır şartı noktasal sınır şartlarına dönüştürülmüştür. Elde edilen Sturm Liouville problemi özdeşleniktir. Sınır koşulları regülerdir. Ayrıca kuvvetli regülerdir.

3) Sınır şartları integral ile verilen para birikim modeline Crank Nicolson metodu ve Çizgiler metodu uygulanmıştır. Bir örnek hariç Çizgiler metodunun daha iyi sonuç verdiği gözlemlenmiştir.

4) Başka bölgelerden lineer göç alan para birikim modelleri için elde edilen Sturm Liouville problemlerinin özdeğerleri değişik  $q(x)$  için hesaplanmıştır. Özdeğerlerin  $q(x) = 0$  olan durumdaki özdeğerlerin komşuluğunda yakınsadığı ve büyük özdeğerlerde hatanın daha büyük olduğu gözlemlenmiştir.



## 5. ÖNERİLER

Para birikim modelinin özel bir durumu değişken katsayılı

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta x \frac{\partial v}{\partial x} + f(x, t)$$

$$v(x, 0) = \varphi(x)$$

$$v(0, t) \text{ ve } v_x(0, t) \text{ sonlu } x \rightarrow 0$$

$$\int_0^1 x v(x, t) dx = K(t)$$

parabolik kısmi diferansiyel denkleminin çözümü incelenebilir. Fourier yöntemi ile elde edilen sınır değer problemi

$$x^2 X''(x) + \omega x X'(x) + \lambda X(x) = 0$$

$$X(x), X'(x) \text{ sınırlı } x \rightarrow 0$$

$$X'(1) + (\omega - 3)X(1) = 0$$

şeklindedir. Bu problemin özfonksiyonları

$$\lambda = (\omega - 1)^2 / 4 \text{ olduğunda } X(x) = \left(1 + \frac{5 - \omega}{2} \ln x\right) x^{\frac{1 - \omega}{2}}, \quad \omega < -1$$

$$\lambda > (\omega - 1)^2 / 4 \text{ olduğunda } X(x) = x^{\frac{1 - \omega}{2}} \left( \cos(k \ln x) + \frac{5 - \omega}{2k} \sin(k \ln x) \right)$$

şeklindedir. Bu özfonksiyonları tabanlılığı incelenip para birikim modelinin çözümü yazılabilir.

## 6. KAYNAKLAR

1. Ang, W. T., A method of solution for the one-dimensional heat equation subject to nonlocal conditions, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 26,2, (2003), 185-191.
2. Ang, W.T., Numerical solution of a non-classical parabolic problem: an integro-differential approach. Applied mathematics and computation, 175,2, (2006), 969-979
3. Atkinson, K. ve Han, W., Elementary Numerical Analysis, Wiley, Third Edition, 2003
4. Batten, G. W., Second-order correct boundary conditions for the numerical solution of the mixed boundary problem for parabolic equations, Mathematics of Computation, 17,84, (1963), 405-413.
5. Boffi, D., Finite element approximation of eigenvalue problems. Acta Numer, 19,01, (2010), 1-120.
6. Bouzani, A., Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation, International Journal of Stochastic Analysis, 9,3, (1996), 323-330.
7. Bruijn, N.G., Asymptotic Methods in Analysis, Dover Publications, 1970
8. Cannon, J. R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quart. Appl. Math, 21,2, (1963), 155-160.
9. Cannon, J.R., The one-dimensional heat equation. Cambridge University Press, 1984.
10. Cannon, J. R., The solution of the heat equation subject to the specification of energy. Quart. Appl. Math, 1963, 21.2: 155-160.
11. Cannon, J. R. ve Matheson, A. L., A numerical procedure for diffusion subject to the specification of mass, International Journal of Engineering Science, 31.3, (1993), 347-355.

12. Cannon, J. R.; ESTEVA, ve Salvador P. ve Van Der Hoek, J., A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass. SIAM Journal on Numerical Analysis, 24,3, (1987),499-515.
13. Cannon, J. R. ve Van Der Hoek, J., An implicit finite difference scheme for the diffusion of mass in a portion of the domain, Numerical Solutions of Partial Differential Equations (J. Noye, Ed), 1982,527-539.
14. Cannon, J. R. ve Lin, Y. ve Shingmin, W., An implicit finite difference scheme for the diffusion equation subject to mass specification, International journal of engineering science, 28,7, (1990), 573-578.
15. Cannon, J. R ve Lin, Y., Determination of a parameter  $p(t)$  in some quasi-linear parabolic differential equations, Inverse Problems, 4.1, (1988), 35.
16. Day, W. A., Extension of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories, Quarterly of Applied Mathematics, 40,3, (1982), 319-330.
17. Day, W. A. A decreasing property of solutions of parabolic equations with applications to thermoelasticity, Quarterly of Applied Mathematics, 40,4, (1983), 468-475.
18. Dehghan, M. On the numerical solution of the diffusion equation with a nonlocal boundary condition, Mathematical Problems in Engineering, 2003,2, (2003), 81-92.
19. Di Blasio, G., Asymptotic behavior of an age structured fish population, Hyperbolic Partial Differential Equations: Populations, Reactors, Tides, and Waves: Theory and Applications, 1983, 1, 377.
20. Ekolin, G., Finite difference methods for a nonlocal boundary value problem for the heat equation, BIT Numerical Mathematics, 31,2, (1991), 245-261.
21. Erofeenko, V.T. ve Kozlovski, I.Y., Partial Differential Equation and Mathematical Models in Economic, URRS, 2011
22. Evans L.C., Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 2010
23. Fairweather, G. ve Saylor, R. D., The reformulation and numerical solution of certain nonclassical initial-boundary value problems, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 12,1, (1991), 127-144.

24. Gumel, A. B., On the numerical solution of the diffusion equation subject to the specification of mass, Journal-Australian Mathematical Society Series B, 40, (1991), 475-483.
25. Ionkin N. I, Solution of a boundary-value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition, Diff. Eqs., Vol. 13, No. 2, 1977, pp. 294-304.
26. Ionkin N. I. ve Moiceev, E. I., Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differential Equations, 13.2, (1977), 294-304.
27. Kamynin, L. I., A boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 4,6, (1964), 33-59.
28. Kozhanov, A. I. ve Pulkina, L. S., On the solvability of boundary value problems with a nonlocal boundary condition of integral form for multidimensional hyperbolic equations, Differential equations, 42,9, (2006), 1233-1246.
29. Lin, Y., Parabolic partial differential equation subject to nonlocal boundary conditions Ph. D. thesis. 1988.
30. Murthy, A V. ve Verwer, J. G., Solving parabolic integro-differential equations by an explicit integration method. Journal of Computational and Applied Mathematics, 39,1, (1992), 121-132.
31. Naimark, M. A. Linear Differential Operators: Elementary theory of linear differential operators. F. Ungar Publishing Company, 1968.
32. Samarskii, A., A some problems in differential equation theory, Differential Equations, 16.11, (1980) 1221-1228.
33. L.S. Pontryagin, Ordinary differential equations , Nauka, 1974.
34. Popov, A. Yu; Tikhonov, I. V. Uniqueness classes in a time-nonlocal problem for the heat equation and complex eigenfunctions of the Laplace operator, Differential Equations, 40.3, (2004) 428-437.
35. Rehmana, M. A. ve TaJ, M. S., A Numerical technique for heat equation subject to integral specification, Sci.İnt(Lahore), 24(1), 2011, 21-26

36. Shingmin W. ve Lin, Y. A numerical method for the diffusion equation with nonlocal boundary specifications, International Journal of Engineering Science, 28.6, (1990), 543-546.
37. Tikhonov A.N. ve Samarskii A.A., Equations of Mathematical Physics, Dover Publications, New York, 1963

## 7. EKLER

### EK 1

#### Teorem 5.1. (Lagrange Ters Formülü)

$f(z)$  kompleks düzlemde  $z = 0$  'ın bir komşuluğunda analitik olsun.  $f'(0) \neq 0$  olduğunu varsayarak ve  $z$  bilinmeyen olmak üzere

$$w = \frac{z}{f(z)} \quad (237)$$

eşitliğini düşünelim. O zaman  $|z| < b$  bölgesinde  $|w| < a$  için (237) eşitliğinin tek çözümü olacak şekilde  $a$  ve  $b$  sayıları vardır. Ayrıca bu çözüm  $w$  nin analitik fonksiyonudur:

$$z = \sum_{k=1}^{\infty} c_k w^k \quad (|w| < a) \quad (238)$$

Burada katsayılar

$$c_k = \frac{1}{k!} \left\{ \left( \frac{d}{dz} \right)^{k-1} h(z)^k \right\} \Big|_{z=0}$$

şeklindedir.

## ÖZGEÇMİŞ

Olgun CABRİ, 22.06.1985 tarihinde Trabzon'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Beşikdüzü'nde tamamladı. 2003-2008 yılları arasında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 3.lük ile bitirdi. Aynı yıl Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı'nda yüksek lisans eğitimine kabul edildi. 2009 yılında Artvin Çoruh Üniversitesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atandı. 2011 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı'nda doktora eğitimine başladı. Halen Artvin Çoruh Üniversitesi İşletme Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaktadır.