ANKARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# GENEL SINIR KOŞULLARI İLE VERİLEN FARK DENKLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİ

Şerifenur CEBESOY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANKARA
2011

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENEL SINIR KOŞULLARI İLE VERİLEN
FARK DENKLEMLERİNİN ÖZDEĞERLERİ

Şerifenur CEBESOY

Ankara Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cafer COŞKUN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.
İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.
İkinci bölümde, spektral analizin ve lineer fark denklemlerinin bazı temel tanım ve teoremleri verilmiştir.
Üçüncü bölümde, genel sınır koşulları ile verilen ikinci mertebeden lineer fark denklemlerinin özdeğerlerinin varlığı gösterilip, bu özdeğerlerin sayısı hesaplanmıştır. Ayrıca başlangıç koşullarıyla verilen homogen olmayan denklemlerin çözümlerine ait bir gösterim elde edilmiştir.
Dördüncü bölümde, bu sınır değer probleminin bazı başlangıç koşullarını sağlayan $\varphi$ ve $\psi$ çözümleri yardımıyla, denklemin özdeğerlerine ilişkin özellikleri incelenerek, bu özdeğerler arasındaki sıralama bağıntısı gösterilmiştir.
**Temmuz 2011, 45 sayfa**

**Anahtar Kelimeler :** Fark denklemi, fark operatörü, özdeğer, özfonksiyon, simetrik matris

# ABSTRACT

Master Thesis

EIGENVALUES OF DIFFERENCE EQUATIONS

WITH GENERAL BOUNDARY CONDITIONS



Şerifenur CEBESOY

Ankara University
Graduate School of Natural And Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Cafer COŞKUN



This thesis consists of four chapters.
The first chapter is devoted to the introduction.
In Chapter two, some basic concepts of spectral analysis and linear difference equations have been recalled.
In Chapter three, existence of eigenvalues of second-order linear difference equations with general boundary value problems has been showed, numbers of the eigenvalues has been calculated. In addition, a representation of solutions of a nonhomogeneous linear equation having initial conditions has been obtained.
In Chapter four, by means of solutions $\varphi$ and $\psi$ satisfying some initial conditions, properties of eigenvalues of general boundary value problems of second-order difference equations have been studied and comparison between eigenvalues has been showed.


**July 2011, 45 pages**
**Key Words:** Difference equation, difference operator, eigenvalue, eigenfunction, symmetric matrix

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve önerilerini esirgemeyen danışman hocam, Sayın Yrd. Doç.Dr. Cafer COŞKUN (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi)'a en içten saygı ve minnetlerimi sunarım.

Bu tez "TÜBİTAK-2210 Yüksek Lisans Burs Programı" tarafından desteklenmiştir. TÜBİTAK'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında beni yalnız bırakmayan ve destekleyen, sevgisini ve sabrını eksik etmeyen sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bu tezin her aşamasında anlayışla yanımda bulunan, manevi destekleriyle beni cesaretlendiren sevgili dostlarım Elis Soylu ve Tuğba Yurdakadim'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Şerifenur CEBESOY
Ankara, Temmuz 2011.

## İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{C}$ | Kompleks Sayılar Kümesi |
| $\triangle$ | İleri Fark Operatörü |
| $\nabla$ | Geri Fark Operatörü |
| $\{n\}_{n=0}^{N-1}$ | $[0, N-1]$ aralığındaki tam sayılar |
| $l[0, N-1]$ | $\{y = (y_0, y_1, ..., y_{N-1}) : y_n \in \mathbb{C}, 0 \leq n \leq N-1\}$ |
| $D(T)$ | T Operatörünün Tanım Kümesi |
| $W[y, z]$ | $y$ ve $z$ Çözümlerinin Wronskiyeni |
| $H$ | Hilbert Uzayı |

# 1.GİRİŞ

Fonksiyonel Analiz ve Uygulamalı Matematiğin birçok probleminin çözümünde diferensiyel operatörlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bulunması gerekir. Dolayısıyla diferensiyel operatör ve denklemlerin spektral teorisi önem arz etmiş ve birçok matematikçinin araştırma konusu olmuştur.

Özdeğer ve özvektör kelimelerinin İngilizce karşılıkları *eigenvalue* ve *eigenvector* kelimeleridir. *Eigen* terimini ilk olarak David Hilbert (1862-1943) kullanmıştır. Hilbert *eigenfunktion* ve *eigenwert* ifadelerini ilk olarak integral denklemlerle ilgili bildirilerinde kullanmıştır. Hilbert'in çıkış noktası homogen olmayan integral denklemlerin, bir $\lambda$ parametresiyle matrissel karşılığının $(I-\lambda A)x=y$ olması idi. Hilbert bu eşitliğin homogen kısmının sıfırdan farklı çözümüne karşılık gelen $\lambda$ değerlerine *eigenwerte* adını vermiştir ve $\lambda$ değerleri $A$ matrisinin karakteristik köklerine karşılık gelmektedir. *Eigenvector* kavramı ise ilk olarak Courant ve Hilbert tarafından sonlu boyut ifadesi açıklanırken kullanılmıştır. John Von Neuman (1903-1957) bir eserinde $f \neq 0$ şartı altında $Rf=\lambda f$ ifadesindeki $\lambda$' yı *eigenwerte,* $f$' yi ise *eigenfunktion* olarak adlandırmıştır. Bu yaygın bir kullanım haline gelmiştir. 1946 yılında Jeffreys' in "Methods of Mathematical Physics" adlı eserinde özdeğer kavramı karakteristik değer ve gizli kök kavramlarıyla eş anlamlı olarak ifade edilmiştir.

Son yıllarda özellikle self-adjoint Sturm-Liouville operatörlerinin özdeğerleri ile ilgili pek çok çalışma yapılmış, Sturm-Liouville operatörlerinin yerine fark operatörleri alınarak sürekli durumdan kesikli duruma geçilmiştir. Bu alandaki birçok çalışma Atkinson (1964), Agarwal (1997), Bohner (1996, 1998, 2001, 2003), Shi ve Chen (1999), Wang ve Shi (2005), Sun ve Shi (2006) tarafından yapılmıştır.

Bu yüksek lisans tezinde

$$l\left[0,N-1\right]=\left\{y=\left(y_0,y_1,...,y_{N-1}\right):y_n\in\mathbb{C},0\leq n\leq N-1\right\}$$

uzayında, her $n\in\left[0,N-1\right]=\left\{n\right\}_0^{N-1}=\left\{0,1,2,...,N-1\right\}$ için

$$p_n,q_n,w_n>0,$$

$$p_{-1}=p_{N-1}=1,$$

$$\alpha\in\left(-\pi,\pi\right],$$

$\lambda$ bir spektral parametre,

$$k_1k_3=1 \text{ ve } k_1,k_2,k_3\in\mathbb{R} \text{ için } K=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$-\bigtriangledown\left(p_n\bigtriangleup y_n\right)+q_ny_n=\lambda\omega_ny_n$$

denklem sisteminin

$$\begin{pmatrix} y_{N-1} \\ \Delta y_{N-1} \end{pmatrix}=e^{i\alpha}K\begin{pmatrix} y_{-1} \\ \Delta y_{-1} \end{pmatrix}$$

sınır koşulları yardımıyla özdeğerleri incelenecektir. Burada

$$\begin{aligned} \bigtriangleup y_n &= y_{n+1}-y_n, \\ \bigtriangledown y_n &= y_n-y_{n-1} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı fark operatörleri ele alınacaktır.

## 2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, ileride ihtiyaç duyacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1.** $X$ ve $Y$, $K$ cismi üzerinde iki vektör uzayı olmak üzere,
her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay$$

koşulunu sağlayan $A : X \to Y$ operatörü, **lineerdir** denir (Kreyszig 1978).

**Tanım 2.2.** $X$, $K$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bu durumda;
*(i)* $\forall x \in X$ için $< x, x > \geq 0$ ; $< x, x >= 0 \Longleftrightarrow x = 0$
*(ii)* $\forall x, y \in X$ için $< x, y >= \overline{< y, x >}$
*(iii)* $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$
*(iv)* $\forall x, y, z \in X$ için $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$
özelliklerini gerçekleyen $<, >: X \times X \to K$ dönüşümüne $X$ **üzerinde bir iç çarpım** denir.
$<, >$ , $X$ üzerinde bir iç çarpım olmak üzere $X = (X, <, >)$ ikilisine de bir **iç çarpım uzayı** adı verilir.
$X$ bir iç çarpım uzayı olmak üzere $\| x \|= \sqrt{< x, x >}$ eşitliği ile tanımlı norma göre tam ise **Hilbert Uzayı** adını alır (Kreyszig 1978).

**Tanım 2.3.** $H$ bir Hilbert uzayı ve $A : D(A) \subset H \to H$ lineer bir operatör olsun. $D(A) \subset H$ yoğun olmak üzere her $x \in D(A)$ ve her $y \in H$ için

$$< Ax, y >=< x, A^* y >$$

eşitliğini gerçekleyen $A^*$ operatörüne $A$ **operatörünün adjointi** denir.
Adjointi kendisine eşit olan operatöre de **self-adjoint operatör** adı verilir (Kreyszig 1978).

**Tanım 2.4.** Her $x, y \in D(A)$ için

$$< Ax, y >=< x, Ay >$$

eşitliğini gerçekleyen $A$ operatörüne **simetrik operatör** adı verilir (Kreyszig 1978).

**Tanım 2.5.** $L$ lineer operatörünün tanım bölgesinde

$$Ly = \lambda y$$

denkleminin sıfırdan farklı bir $y$ çözümü varsa, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına $L$ operatörünün **özdeğeri,** $y$ çözümüne de $\lambda$ sayısına karşılık gelen **özfonksiyon** denir (Naimark 1967).

**Tanım 2.6.** $L$ operatörünün bir $\lambda$ özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonlarının sayısına $\lambda$ nın **katı** denir.

$\lambda$ özdeğerinin katı bir ise **basit,** birden büyük ise **çok katlı özdeğer** denir (Naimark 1967).

# 3. GENEL SINIR KOŞULLARI İLE VERİLEN FARK DENKLEMLERİ

## 3.1 İkinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri

Bir $[c,d]$ aralığında; $P$ sürekli ve pozitif değerli, $Q$ ise sürekli ve reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$[P(x)z'(x)]' + Q(x)z(x) = 0 \tag{3.1.1}$$

denklemi uygulamalı matematikte sıkça kullanılan, ikinci mertebeden lineer self-adjoint diferensiyel denklemdir. Şimdi bu denklemi, ikinci mertebeden fark denklemi haline getirmeye çalışalım.

$h = \dfrac{d-c}{n}$ yeterince küçük alındığında

$$z'(x) \simeq \frac{z(x) - z(x-h)}{h} \qquad \text{ve}$$

$$[P(x)z'(x)]' \simeq \frac{1}{h}\left\{\frac{P(x+h)[z(x+h) - z(x)]}{h} - \frac{P(x)[z(x) - z(x-h)]}{h}\right\}$$

yazılır. $t \in \{0,1,2,...,n\}$ ve $z(x)$, $[c,d]$ aralığında (3.1.1) denkleminin bir çözümü olmak üzere

$$\begin{aligned} x &= c + th \\ y(t) &= z(c+th) \end{aligned}$$

dönüşümleri yapıldığında (3.1.1) denklemi

$$P(c+(t+1)h)\ z(c+(t+1)h) - [P(c+(t+1)h) + P(c+th)]\ z(c+th)$$

$$+P(c+th)\ z(c+(t-1)h) + h^2 Q(c+th)\ z(c+th) \simeq 0$$

halini alır.

Burada

$$\begin{aligned} p(t-1) &= P(c+th) \qquad ,1 \leq t \leq n \\ q(t) &= h^2 Q(c+th) \qquad ,1 \leq t \leq n-1 \end{aligned}$$

alınırsa, $1 \leq t \leq n-1$ için (3.1.1) ifadesi

$$p(t)y(t+1) - (p(t)+p(t-1))y(t) + p(t-1)y(t-1) + q(t)y(t) \simeq 0 \qquad (3.1.2)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $0 \leq t \leq n$ için

$$\Delta y(t) = y(t+1) - y(t)$$

ve

$$\nabla y(t) = y(t) - y(t-1)$$

olmak üzere (3.1.2) ifadesi de

$$\Delta \left[ p(t-1)\Delta y(t-1) \right] + q(t)y(t) \simeq 0$$

formunda yazılabilir. Dikkat edilirse, $1 \leq t \leq n-1$ için $y(t)$, $[0,n]$ aralığında tanımlı olur.

Sonuç olarak, $p(t)$ ve $q(t)$, pozitif tamsayılar üzerinde tanımlı olmak üzere (3.1.1) diferensiyel denkleminden

$$\Delta \left[ p(t-1)\ \Delta y(t-1) \right] + q(t)y(t) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\nabla \left[ p(t)\ \Delta y(t) \right] + q(t)y(t) = 0$$

şeklindeki ikinci mertebeden lineer self-adjoint fark denklemi elde edilmiş olur.

## 3.2 Genel Sınır Koşulları ile Verilen İkinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Özdeğerleri

$l\,[0,N-1] = \{y = (y_0, y_{1,}..., y_{N-1}) : y_n \in \mathbb{C},\ 0 \leq n \leq N-1\}$ uzayında, her $n \in [0,N-1] = \{n\}_0^{N-1} = \{0,1,2,...,N-1\}$ için

$$p_n, q_n, w_n > 0,$$

$$p_{-1} = p_{N-1} = 1,$$

$$\alpha \in (-\pi, \pi],$$

$$\lambda \text{ bir spektral parametre,}$$

$$k_1 k_3 = 1 \text{ ve } k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R} \text{ için } K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ k_2 & k_3 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$-\nabla\left(p_n \Delta y_n\right) + q_n y_n = \lambda w_n y_n \qquad , n \in [0, N-1] \tag{3.2.1}$$

ikinci mertebeden self-adjoint fark denklemi

$$\begin{pmatrix} y_{N-1} \\ \Delta y_{N-1} \end{pmatrix} = e^{i\alpha} K \begin{pmatrix} y_{-1} \\ \Delta y_{-1} \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

sınır koşullarıyla ele alınsın.

(3.2.2) sınır koşullarıyla verilen (3.2.1) denklemi iki özel durum içerir.

(i) (3.2.2) sınır koşullarında $\alpha = 0$, $K = I$ alınırsa

$$y_{N-1} = y_{-1} \quad \text{ve} \quad \Delta y_{N-1} = \Delta y_{-1}$$

elde edilir ki, bunlar periyodik sınır koşullarıdır.

(ii) (3.2.2) sınır koşullarında $\alpha = \pi$, $K = I$ alınırsa

$$y_{N-1} = -y_{-1} \qquad \text{ve} \qquad \Delta y_{N-1} = -\Delta y_{-1}$$

elde edilir ki, bunlar da anti-periyodik sınır koşullarıdır.

Şimdi, (3.2.1) denklemini daha açık biçimde yazalım:

$n \in [0, N-1]$ için

$$-\nabla\left(p_n \Delta y_n\right) + q_n y_n = \lambda w_n y_n$$

$$-\left[p_n(y_{n+1} - y_n) - p_{n-1}(y_n - y_{n-1})\right] + q_n y_n = \lambda w_n y_n$$

yazılabilir. Bu son denklem düzenlenirse

$$p_n y_{n+1} = (p_n + p_{n-1} + q_n - \lambda w_n) y_n - p_{n-1} y_{n-1} \qquad , n \in [0, N-1] \qquad (3.2.3)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

Dikkat edilirse,

$p_n$, $q_n$ ve $w_n$ birer reel sayı olduğundan $n \leq N$ için $y_n$, $\lambda$ ya bağlı

eğer $y_0 \neq 0$ ise $n$-inci dereceden reel katsayılı bir polinom,
ve eğer $y_0 = 0$, $y_{-1} \neq 0$ ise de $(n-1)$-inci dereceden reel katsayılı bir polinom olacaktır.

$l[0, N-1]$ uzayında

$$(ly)_n := w_n^{-1} \{(p_n + p_{n-1} + q_n)y_n - p_{n-1}y_{n-1} - p_n y_{n+1}\} \tag{3.2.4}$$

yardımıyla, tanım kümesi

$$D\left(T\right) := \left\{ y = (y_n)_{n=0}^{N-1} : y \in l[0, N-1], \begin{array}{l} 1)\ l(y) \in l[0, N-1] \\ 2) \begin{pmatrix} y_{N-1} \\ \Delta y_{N-1} \end{pmatrix} = e^{i\alpha} K \begin{pmatrix} y_{-1} \\ \Delta y_{-1} \end{pmatrix} \end{array} \right\} \tag{3.2.5}$$

olan ve her $y \in D(T)$ için

$$Ty := l(y)$$

ile tanımlanan $T$ operatörü gözönüne alınsın.

Bu uzay üzerinde her $y, z \in l[0, N-1]$ için

$$< y, z >= \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n \overline{z_n} \tag{3.2.6}$$

şeklinde tanımlanan $<, >$ fonksiyonunun bir iç çarpım olduğu açıktır.

Bu iç çarpım ve $T$ operatörü yardımıyla, ileride yararlanılacak olan bazı teorem ve özellikler aşağıda verilmiştir.

**Teorem 3.2.1.** $y$ ve $z$, (3.2.1) denkleminin herhangi iki çözümü olsun. O halde, her $n \in [-1, N-1]$ için

$$W[y, z](n) = \begin{vmatrix} y_{n+1} & z_{n+1} \\ p_n \Delta y_n & p_n \Delta z_n \end{vmatrix} \tag{3.2.7}$$

şeklinde tanımlanan Wronskiyen sabittir (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** (3.2.7) ile gösterilen Wronskiyen daha açık biçimde yazılırsa

$$W[y,z](n) = \begin{vmatrix} y_{n+1} & z_{n+1} \\ p_n\Delta y_n & p_n\Delta z_n \end{vmatrix} = y_{n+1}(p_n\Delta z_n) - z_{n+1}(p_n\Delta y_n) = p_n(y_n z_{n+1} - y_{n+1}z_n) \tag{3.2.8}$$

ifadesi elde edilir. Her $n \in [0, N-1]$ için

$$(Ty)_n = (ly)_n = w_n^{-1}\{(p_n + p_{n-1} + q_n)y_n - p_{n-1}y_{n-1} - p_n y_{n+1}\} \tag{3.2.9}$$

$$(Tz)_n = (lz)_n = w_n^{-1}\{(p_n + p_{n-1} + q_n)z_n - p_{n-1}z_{n-1} - p_n z_{n+1}\} \tag{3.2.10}$$

olmak üzere, eğer $y$ ve $z$ (3.2.1) denkleminin herhangi iki çözümü ise

$$Ty_n = \lambda y_n \tag{3.2.11}$$

$$Tz_n = \lambda z_n \tag{3.2.12}$$

olmalıdır. (3.2.9) eşitliğinin her iki tarafı $w_n z_n$ ile, (3.2.10) eşitliğinin her iki tarafı da $-w_n y_n$ ile çarpılıp, iki denklem taraf tarafa toplanırsa

$$w_n(z_n T y_n - y_n T z_n) = -p_{n-1}y_{n-1}z_n - p_n y_{n+1}z_n + p_{n-1}y_n z_{n-1} + p_n y_n z_{n+1}$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.2.8), (3.2.11) ve (3.2.12) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} w_n(z_n\lambda y_n - y_n\lambda z_n) &= W[y,z](n) - W[y,z](n-1) \\ 0 &= \nabla W[y,z](n) \end{aligned}$$

bulunur. O halde her $n \in [0, N-1]$ için

$$W[y,z](n) = W[y,z](n-1)$$

olmalıdır.

Buradan da, her $n \in [0, N-1]$ için

$$W[y,z](n) = W[y,z](-1)$$

olur ki, bu da her $n \in [-1, N-1]$ için $y$ ve $z$ çözümlerinin Wronskiyeninin sabit olduğunu gösterir.

**Lemma 3.2.1.** Her $y, z \in D(T)$ için

$$\langle Ty, z \rangle = \langle y, Tz \rangle \tag{3.2.13}$$

eşitliği gerçeklenir (Shi ve Chen 1999).

**İspat.** $D(T)$, (3.2.5) ile gösterilen küme olmak üzere, $y$, $z \in D(T)$ olsun. O halde, $y$ ve $z$ (3.2.2) sınır koşullarını sağlamalıdır. (3.2.2) sınır koşullarını daha açık biçimde yazarsak her $y, z \in D(T)$ için

$$\begin{aligned} y_{N-1} &= e^{i\alpha} k_1 y_{-1} \\ y_N &= e^{i\alpha}(k_2 y_{-1} + k_3 y_0 - k_3 y_{-1} + k_1 y_{-1}) \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

ve

$$\begin{aligned} z_{N-1} &= e^{i\alpha} k_1 z_{-1} \\ z_N &= e^{i\alpha}(k_2 z_{-1} + k_3 z_0 - k_3 z_{-1} + k_1 z_{-1}) \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Ayrıca, (3.2.6) ile verilen iç çarpım tanımına göre

$$\begin{aligned} \langle Ty, z \rangle &= \langle ly, z \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} (ly)_n w_n \overline{z_n} \\ \langle y, Tz \rangle &= \langle y, lz \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} y_n w_n \overline{(lz)}_n \end{aligned}$$

eşitlikleri de gerçeklenir.

$T$ operatörünün tanımı ve sonlu toplamın özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\langle Ty,z\rangle-\langle y,Tz\rangle &= \sum_{n=0}^{N-1}(ly)_n w_n\overline{z_n}-\sum_{n=0}^{N-1}y_n w_n\overline{(lz)}_n \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}\left[(ly)_n w_n\overline{z_n}-y_n w_n\overline{(lz)}_n\right] \\
&= \sum_{n=0}^{N-1}[-p_{n-1}y_{n-1}\overline{z_n}+p_{n-1}y_n\overline{z_{n-1}} \\
&\quad -p_n y_{n+1}\overline{z_n}+p_n y_n\overline{z_{n+1}}] \\
&= -p_{-1}y_{-1}\overline{z_0}+p_{-1}y_0\overline{z_{-1}} \\
&\quad -p_{N-1}y_N\overline{z_{N-1}}+p_{N-1}y_{N-1}\overline{z_N}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $p_{-1}=p_{N-1}=1$ olduğu dikkate alınıp, (3.2.14) ve (3.2.15) sınır koşulları da yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
\langle Ty,z\rangle-\langle y,Tz\rangle &= -y_{-1}\overline{z_0}+y_0\overline{z_{-1}}-e^{i\alpha}(k_2y_{-1}+k_3y_0-k_3y_{-1}+k_1y_{-1})e^{-i\alpha}k_1\overline{z_{-1}} \\
&\quad +e^{i\alpha}k_1y_{-1}e^{-i\alpha}k_2\overline{z_{-1}}+k_3\overline{z_0}-k_3\overline{z_{-1}}+k_1\overline{z_{-1}} \\
&= -y_{-1}\overline{z_0}+y_0\overline{z_{-1}}-k_1\overline{z_{-1}}k_2y_{-1}-k_1\overline{z_{-1}}k_3y_0+k_1\overline{z_{-1}}k_3y_{-1} \\
&\quad -k_1\overline{z_{-1}}k_1y_{-1}+k_1y_{-1}k_2\overline{z_{-1}}+k_1y_{-1}k_3\overline{z_0} \\
&\quad -k_1y_{-1}k_3\overline{z_{-1}}+k_1y_{-1}k_1\overline{z_{-1}}
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak; $k_1k_3=1$ olduğundan bu fark

$$\langle Ty,z\rangle-\langle y,Tz\rangle=0$$

haline dönüşür. Bu da her $y,z\in D(T)$ için

$$\langle Ty,z\rangle=\langle y,Tz\rangle$$

olması demektir.

**Teorem 3.2.2.** (3.2.2) sınır koşullarıyla verilen (3.2.1) denkleminin özdeğerleri reeldir (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $\mu$, (3.2.2) sınır koşullarıyla verilen (3.2.1) fark denkleminin bir özdeğeri olsun. Bu durumda, $Ty = \mu y$ ve $y \neq 0$ olacak biçimde bir $y \in D(T)$ vardır.
$T$ operatörünün tanımı gereğince, $n \in [0, N-1]$ için

$$w_n^{-1} \{(p_n + p_{n-1} + q_n)y_n - p_{n-1}y_{n-1} - p_n y_{n+1}\} = \mu y_n$$

gerçeklenir. Buna göre, Lemma 3.2.1 gereğince

$$\langle Ty, y \rangle = \langle y, Ty \rangle$$

yazılabileceğinden

$$\begin{aligned} \langle \mu y, y \rangle &= \langle y, \mu y \rangle \\ \mu \langle y, y \rangle &= \bar{\mu} \langle y, y \rangle \\ \|y\|^2 (\mu - \bar{\mu}) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\|y\| \neq 0$ olduğundan

$$\mu = \bar{\mu}$$

olmalıdır ki, bu da $\mu$ özdeğerinin reel olduğunu gösterir.

**Teorem 3.2.3.** (3.2.2) sınır koşullarıyla verilen (3.2.1) denkleminin $N$ tane özdeğeri vardır (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $Ty = l(y)$ ile tanımlı operatörün özdeğerleri $T - \lambda I$ matrisinin karakteristik polinomunun kökleridir. (3.2.4) yardımıyla $T - \lambda I$ matrisinin

$$\begin{pmatrix} (p_0 + p_{-1} + q_0 - \omega_0\lambda) & -p_0 & \cdots & \frac{-e^{-i\alpha}}{k_1} \\ -p_0 & (p_1 + p_0 + q_1 - \omega_1\lambda) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{-e^{-i\alpha}}{k_1} & 0 & \ldots & (p_{N-1} + p_{N-2} + q_{N-1} - \omega_{N-1}\lambda) \end{pmatrix}$$

ile verileceği kolayca görülür. Bu matrisin karakteristik polinomu $\det(T - \lambda I)$ olup bu determinant hesaplandığında $\lambda$-nın n-inci dereceden bir polinomu elde edilir. Bir simetrik matrisin özdeğerlerinin reel olduğu bilindiğinden bu karakteristik denklemin N tane kökü vardır ve bu köklerin hepsi reeldir.

**Lemma 3.2.2.** (3.2.1) denkleminin

$$y_{-1} = y_{N-1} = 0 \tag{3.2.16}$$

Dirichlet koşulu altında

$$\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_{N-2}$$

artan şekilde sıralanan $N - 1$ tane reel ve basit özdeğeri vardır (Wang ve Shi 2005).

**İspat.** $y_{N-1}$, $\lambda$'ya göre $(N-1)$-inci dereceden bir polinom olup, (3.2.1) denkleminin özdeğerleri $y_{N-1}(\lambda) = 0$ denkleminin kökleri olacağından özdeğerler $N - 1$ tanedir.

Kabul edelim ki, $\mu$ çok katlı özdeğer olsun. Bu durumda $y$ ve $z$, $\mu$ özdeğerine karşılık gelen iki özfonksiyon olsun.

$$W[y, z] = \begin{vmatrix} y_{n+1} & z_{n+1} \\ p_n\Delta y_n & p_n\Delta z_n \end{vmatrix} = p_n(y_n z_{n+1} - y_{n+1} z_n)$$

eşitliğinde $n = -1$ alınırsa

$$W[y,z] = \begin{vmatrix} y_0 & z_0 \\ p_{-1}\Delta y_{-1} & p_{-1}\Delta z_{-1} \end{vmatrix} = p_{-1}(y_{-1}z_0 - y_0 z_{-1}) = 0$$

elde edilir. Bu da iki çözümün lineer bağımsızlığı ile çelişir. O halde, $\mu$ özdeğerine karşılık gelen tek bir özfonksiyon vardır. Bu da $\mu$ özdeğerinin basitliğini ispatlar.

$\varphi_n$ ve $\psi_n$, (3.2.1) denkleminin

$$\varphi_{-1} = \psi_0 = 1 \ \text{ ve } \varphi_0 = \psi_{-1} = 0 \tag{3.2.17}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.
Teorem 3.2.1 gereğince her $n \in [-1, N-1]$ için

$$W[\varphi,\psi](n) = W[\varphi,\psi](-1)$$

olmalıdır.

$$W[\varphi,\psi](-1) = \begin{vmatrix} \varphi_0 & \psi_0 \\ p_{-1}\Delta\varphi_{-1} & p_{-1}\Delta\psi_{-1} \end{vmatrix} = -p_{-1}(\varphi_0\psi_{-1} - \varphi_{-1}\psi_0) = 1$$

bulunur. O halde, her $n \in [-1, N-1]$ için

$$W[\varphi,\psi](n) = 1 \tag{3.2.18}$$

olur. Bu ise $\varphi$ ve $\psi$ çözümlerinin lineer bağımsız olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\{\varphi,\, \psi\}$, (3.2.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur.

Dördüncü bölümde sıkça kullanılacak olan bir eşitlik de buradan elde edilebilir.

$$W[\varphi,\psi](N-1) = \begin{vmatrix} \varphi_N & \psi_N \\ p_{N-1}\Delta\varphi_{N-1} & p_{N-1}\Delta\psi_{N-1} \end{vmatrix} = -p_{N-1}(\varphi_N\psi_{N-1} - \varphi_{N-1}\psi_N)$$

olduğundan ve $p_{N-1} = 1$ eşitliği bilindiğinden (3.2.18) gereğince

$$\varphi_N\psi_{N-1} - \varphi_{N-1}\psi_N = -1 \tag{3.2.19}$$

eşitliğine ulaşılır.

İleride ihtiyaç duyacağımız bir teorem ve lemma ispatsız olarak verilmiştir.

**Teorem 3.2.4.** $0 \leq k \leq N-2$ olmak üzere $\mu_k$, (3.2.1) denkleminin (3.2.16) Dirichlet koşulu altındaki özdeğeri, $y_n(\lambda)$ ise (3.2.1) denkleminin

$$y_{-1}(\lambda) = 0,\ y_0(\lambda) \neq 0 \tag{3.2.20}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü olsun.

Bu durumda

$$y_0(\lambda), y_1(\lambda), y_2(\lambda), ...y_{N-1}(\lambda)$$

ifadesinin

| | |
|---|---|
| $\lambda < \mu_0$ | ise hiç işaret değişimi yok, |
| $\mu_r < \lambda < \mu_{r+1}$ $(0 \leq r \leq N-3)$ | ise $(r+1)$ tane işaret değişimi var, |
| $\lambda > \mu_{N-2}$ | ise $(N-1)$ tane işaret değişimi vardır |

(Wang ve Shi 2005).

(3.2.1) denkleminin çözümü olan $y_n(\lambda)$, sadece $n = -1, 0, 1, ..., N-1$ tamsayı noktalarında tanımlanan ve her $\lambda$ sabit sayısı için $n$ değişkenine bağlı olan bir fonksiyondur. $[-1, N-1]$ aralığındaki her iki tamsayıyı lineer olacak şekilde birleştirerek $n = -1, 0, ..., N-2$ için

$$y_x(\lambda) = (y_{n+1}(\lambda) - y_n(\lambda))(x-n) + y_n(\lambda), \qquad n \leq x \leq n+1$$

sürekli fonksiyonu elde edilebilir. Bu sürekli fonksiyon yardımıyla aşağıdaki lemma ifade edilebilir.

**Lemma 3.2.3.** $0 \leq k \leq N-2$ olmak üzere $\mu_k$, (3.2.1)-(3.2.16) probleminin özdeğeri; $y_n(\lambda)$ ise (3.2.1)-(3.2.20) probleminin çözümü olsun.
Bu durumda, $n = -1, 0, ..., N-2$ için

$$y_x(\mu_k) = \begin{cases} (y_{n+1}(\mu_k) - y_n(\mu_k))(x-n) + y_n(\mu_k) & , n < x \leq n+1 \\ y_{-1}(\mu_k) & , x = -1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $(-1, N-1)$ aralığında $k$ tane sıfır yerine sahiptir (Wang ve Shi 2005).

**Lemma 3.2.4.** $0 \leq k \leq N-2$ olmak üzere $\mu_k$, (3.2.1) denkleminin (3.2.16) Dirichlet koşulu altındaki özdeğeri olmak üzere, $\psi_n(\mu_k)$ bu problemin bir özfonksiyonu olur. Yani $\psi_n(\mu_k)$,

$$\psi_{-1}(\mu_k) = \psi_{N-1}(\mu_k) = 0$$

koşulunu gerçekleyen aşikar olmayan bir çözümdür. Ayrıca, $0 \leq k \leq N-2$ için

$$k \text{ tek ise } \psi_N(\mu_k) > 0, \tag{3.2.21}$$

$$k \text{ çift ise } \psi_N(\mu_k) < 0 \tag{3.2.22}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. (Sun ve Shi 2006).

**İspat:** $\varphi_n$ ve $\psi_n$ (3.2.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olduğundan;

$|c| + |d| \neq 0$ koşulunu sağlayan $c$ ve $d$ sabitleri için

$$c\varphi_n(\mu_k) + d\psi_n(\mu_k)$$

çözümü (3.2.1) denklemi ile $y_{-1} = y_{N-1} = 0$ koşullu problemin $\mu_k$ özdeğerine göre özfonksiyonudur. $\varphi_{-1} = \psi_0 = 1$ ve $\varphi_0 = \psi_{-1} = 0$ olduğu gözönüne alındığında

$$\begin{aligned} c\varphi_{-1}(\mu_k) + d\psi_{-1}(\mu_k) &= 0 \\ c\varphi_{N-1}(\mu_k) + d\psi_{N-1}(\mu_k) &= 0 \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned} c &= 0 \\ d\psi_{N-1}(\mu_k) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

$c$ ve $d$ aynı anda sıfır olamayacağından $\psi_{N-1}(\mu_k) = 0$ olmalıdır. O halde $\psi_{N-1}$, $\mu_k$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyondur. Diğer yandan

$$p_n y_{n+1} = (p_n + p_{n-1} + q_n - \lambda\omega_n)y_n - p_{n-1}y_{n-1}$$

eşitliğinde; $n$ yerine $N-1$ ve $y_n$ yerine $\psi_n(\mu_k)$ alınırsa

$$p_{N-1}\psi_N(\mu_k) = (p_{N-1} + p_{N-2} + q_{N-1} - \lambda\omega_{N-1})\psi_{N-1}(\mu_k) - p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_k)$$

bulunur. $p_{N-1} = 1$ ve $\psi_{N-1}(\mu_k) = 0$ olduğundan

$$\psi_N(\mu_k) = -p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_k)$$

gerçeklenir. Bu durumda $p_{N-2} > 0$ olduğundan $\psi_{N-2}(\mu_k)$ ile $\psi_N(\mu_k)$ zıt işaretli olur.

$n = -1, 0, ..., N-1$ için, $y_x(\mu_k)$ parçalı fonksiyonu $[-1, N]$ aralığında süreklidir.

Lemma 3.2.3 gereğince;

$\psi_x(\mu_k)$ fonksiyonunun $(-1, N-1)$ aralığında $k$ tane sıfır yeri vardır.

Dolayısıyla; $\psi_x(\mu_0)$ fonksiyonunun $(-1, N-1)$ reel aralığında sıfırı yoktur.
$\psi_0(\mu_0) = 1$ olduğundan;

$$\psi_x(\mu_0) > 0$$

elde edilir.

$$\psi_N(\mu_0) = -p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_0) \Longrightarrow \psi_N(\mu_0) < 0$$

gerçeklenir.

Yine Lemma 3.2.3 gereğince

$\psi_x(\mu_1)$ fonksiyonunun $(-1, N-1)$ reel aralığında bir tane sıfırı vardır.

$$\psi_{-1}(\mu_1) = 0, \psi_0(\mu_1) = 1$$

olduğundan $\psi_{N-2}(\mu_1) < 0$ bulunur.

Aksi halde $\psi_x(\mu_1)$ fonksiyonunun birden fazla sıfırı olurdu. O halde

$$\psi_N(\mu_1) = -p_{N-2}\psi_{N-2}(\mu_1) \Longrightarrow \psi_N(\mu_1) > 0$$

elde edilir.

Benzer şekilde devam edilirse, $2 \leq k \leq N-2$ için

$$\begin{aligned} k \text{ tek ise } \psi_N(\mu_k) > 0 \\ k \text{ çift ise } \psi_N(\mu_k) < 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

**Teorem 3.2.5.** $\varphi_n$ ve $\psi_n$, (3.2.1) denkleminin $\varphi_{-1} = \psi_0 = 1$ ve $\varphi_0 = \psi_{-1} = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$\{f_n\}_{n=0}^{N-1} \subset \mathbb{C}$, $c_{-1}, c_0 \in \mathbb{C}$ ve $\sum_{j=0}^{-2} . = \sum_{j=0}^{-1} . := 0$ olmak üzere,

$$z_{-1} = c_{-1} \text{ ve } z_0 = c_0 \tag{3.2.23}$$

başlangıç koşullarıyla verilen

$$-\nabla (p_n \Delta z_n) + (q_n - \lambda w_n) z_n = w_n f_n \qquad , n \in [0, N-1] \tag{3.2.24}$$

denkleminin tek bir $z$ çözümü vardır ve bu çözüm

$$z_n = c_{-1}\varphi_n + c_0\psi_n + \sum_{j=0}^{n-1} w_j(\varphi_n\psi_j - \varphi_j\psi_n) f_j \qquad , n \in [-1, N]$$

ile verilir. (Wang ve Shi 2005).

**İspat.** $z$, (3.2.1) denkleminin bir çözümü ise, $\varphi_n$ ve $\psi_n$ lineer bağımsız çözümler olduğundan, $A_n$ ve $B_n$ sabit olmak üzere, $n \in [-1, N]$ için

$$z_n = A_n\ \varphi_n + B_n\psi_n \qquad ,n \in [-1, N] \tag{3.2.25}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Delta z_n &= \Delta(A_n\ \varphi_n + B_n\psi_n) \\ &= A_n\Delta\varphi_n + \varphi_{n+1}\Delta A_n + B_n\Delta\psi_n + \psi_{n+1}\Delta B_n \end{aligned}$$

bulunur. Burada sabitlerin değişimi yöntemi kullanılırsa

$$\varphi_{n+1}\Delta A_n + \psi_{n+1}\Delta B_n = 0 \qquad ,n \in [-1, N-1] \tag{3.2.26}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} -\nabla\left(p_n\Delta z_n\right) &= -\nabla[p_n(A_n\Delta\varphi_n + B_n\Delta\psi_n)] \\ &= -\nabla[A_np_n\Delta\varphi_n + B_np_n\Delta\psi_n] \\ &= -A_n\nabla(p_n\Delta\varphi_n) - (\nabla A_n)p_{n-1}\Delta\varphi_{n-1} - B_n\nabla\left(p_n\Delta\psi_n\right) - (\nabla B_n)p_{n-1}\Delta\psi_{n-1} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\varphi_n$ ve $\psi_n$ , (3.2.1) denkleminin çözümleri olduğundan

$$\begin{aligned} -\nabla\left(p_n\Delta z_n\right) &= A_n(\lambda w_n\varphi_n - q_n\varphi_n) + B_n(\lambda w_n\psi_n - q_n\psi_n) \\ &\quad -(\nabla A_n)p_{n-1}\Delta\varphi_{n-1} - (\nabla B_n)p_{n-1}\Delta\psi_{n-1} \\ &= (\lambda w_n - q_n)(A_n\varphi_n + B_n\psi_n) - (\nabla A_n)p_{n-1}\Delta\varphi_{n-1} - (\nabla B_n)p_{n-1}\Delta\psi_{n-1} \\ &= (\lambda w_n - q_n)z_n - (\nabla A_n)p_{n-1}\Delta\varphi_{n-1} - (\nabla B_n)p_{n-1}\Delta\psi_{n-1} \end{aligned}$$

sağlanır. Dolayısıyla $n \in [0, N-1]$ için

$$(\nabla A_n)p_{n-1}\Delta\varphi_{n-1} + (\nabla B_n)p_{n-1}\Delta\psi_{n-1} = \nabla\left(p_n\Delta z_n\right) + (\lambda w_n - q_n)z_n$$

olup

$$(\nabla A_n)p_{n-1}\Delta\varphi_{n-1} + (\nabla B_n)p_{n-1}\Delta\psi_{n-1} = -w_n f_n \tag{3.2.27}$$

eşitliği elde edilir. (3.2.27) eşitliğinin $n = N$ için de gerçeklendiğini kabul edelim. Bu ek koşul, $[-1, N]$ aralığındaki $A_n$ ve $B_n$ sabitlerini bulmamıza yardımcı olacaktır. Bu durumda, $f_N$ bir kompleks sayı olmak üzere

$$(\nabla A_N)p_{N-1}\Delta\varphi_{N-1} + (\nabla B_n)p_{N-1}\Delta\psi_{N-1} = -w_N f_N$$

eşitliği sağlansın. O halde (3.2.27) eşitliği $n \in [0, N]$ için gerçeklenir.

Diğer yandan (3.2.26) ile gösterilen ifadenin de

$$\varphi_n \nabla A_n + \psi_n \nabla B_n = 0 \qquad ,n \in [0, N] \tag{3.2.28}$$

ifadesine denk olacağı açıktır. (3.2.27) ve (3.2.28) eşitlikleri dikkate alınıp, Cramer Kuralı uygulanırsa

$$\nabla A_n = \frac{w_n \psi_n f_n}{W[\varphi, \psi](n-1)} \quad \text{ve} \quad \nabla B_n = \frac{-w_n \varphi_n f_n}{W[\varphi, \psi](n-1)} \qquad ,n \in [0, N]$$

elde edilir. Başlangıç koşullarından

$$W[\varphi, \psi](n-1) = 1$$

bulunacağından

$$\nabla A_n = -w_n \psi_n f_n \text{ ve } \quad \nabla B_n = -w_n \varphi_n f_n \qquad , n \in [0, N]$$

bulunur.

$$\begin{aligned} A_0 - A_{-1} &= w_0 \psi_0 f_0 \\ A_1 - A_0 &= w_1 \psi_1 f_1 \\ &. \\ &. \\ &. \\ A_{N-1} - A_{N-2} &= w_{N-1} \psi_{N-1} f_{N-1} \\ A_N - A_{N-1} &= w_N \psi_N f_N \end{aligned}$$

yazılabileceğinden, $n \in [-1, N]$ için

$$A_n = A_{-1} + \sum_{j=0}^{n} w_j \psi_j f_j$$

ve benzer şekilde

$$B_n = B_{-1} - \sum_{j=0}^{n} w_j \varphi_j f_j$$

elde edilir. Bulduğumuz $A_n$ ve $B_n$ katsayılarını (3.2.25) eşitliğinde yerine yazarsak

$$z_n = \left( A_{-1} + \sum_{j=0}^{n} w_j \psi_j f_j \right) \varphi_n + \left( B_{-1} - \sum_{j=0}^{n} w_j \varphi_j f_j \right) \psi_n \qquad , n \in [-1, N]$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik daha açık biçimde yazıldığında ise

$$z_n = A_{-1} \varphi_n + B_{-1} \psi_n + \sum_{j=0}^{n-1} w_j (\varphi_n \psi_j - \varphi_j \psi_n) f_j \qquad , n \in [-1, N]$$

eşitliğine ulaşılır. Ayrıca $z_{-1} = c_{-1}$ olduğundan ve başlangıç koşullarından

$$\begin{aligned} z_{-1} &= A_{-1} \varphi_{-1} + B_{-1} \psi_{-1} + \sum_{j=0}^{-2} . \\ &= A_{-1} \end{aligned}$$

sağlanır ve buradan

$$A_{-1} = c_{-1} \tag{3.2.29}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde, $z_0 = c_0$ olduğundan ve başlangıç koşullarından

$$\begin{aligned} z_0 &= A_{-1}\varphi_0 + B_{-1}\psi_0 + \sum_{j=0}^{-1} . \\ &= B_{-1} \end{aligned}$$

sağlanır ve buradan da

$$B_{-1} = c_0 \tag{3.2.30}$$

olduğu görülür. Sonuç olarak; (3.2.27) ve (3.2.28) eşitlikleri yardımıyla

$$z_n = c_{-1}\varphi_n + c_0\psi_n + \sum_{j=0}^{n-1} w_j(\varphi_n\psi_j - \varphi_j\psi_n)f_j \qquad , n \in [-1, N]$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar.

# 4.ÖZDEĞERLERİN SIRALANMASI

$0 \leq j \leq N-1$ için $\lambda_j(e^{i\alpha}K)$ ile, (3.2.1)-(3.2.2) sınır değer probleminin

$$\lambda_0(e^{i\alpha}K) \leq \lambda_1(e^{i\alpha}K) \leq \lambda_2(e^{i\alpha}K) \leq ... \leq \lambda_{N-1}(e^{i\alpha}K)$$

şeklinde sıralanan özdeğerleri gösterilsin. Açıkça görülüyor ki

$$\alpha = 0 \text{ ise, } \lambda_j(K) \text{ periyodik problemin özdeğeri,}$$

$$\alpha = \pi \text{ ise } \lambda_j(-K) \text{ anti-periyodik problemin özdeğeri}$$

olacaktır. Bu bölümde $0 < \alpha < \pi$ için bu özdeğerlerin sıralanmasında kullanılacak olan bazı önermeler verilecek, bu önermeler yardımıyla bazı sonuçlara varılacaktır.

**Önerme 4.1.** $\lambda \in \mathbb{C}$ ve

$$f(\lambda) := k_3\varphi_{N-1}(\lambda) + k_1\Delta\psi_{N-1}(\lambda) - (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere, $\lambda$ sayısının (3.2.1)-(3.2.2) probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$f(\lambda) = 2\cos\alpha \tag{4.1}$$

olmasıdır. Ayrıca

$$\lambda \text{ çok katlı özdeğerdir} \Longleftrightarrow \begin{cases} \varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_1 \\ \Delta\varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}(k_2 - k_3) \\ \psi_{N-1}(\lambda) = 0 \\ \Delta\psi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_3 \end{cases} \tag{4.2}$$

önermesi doğrudur (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $\varphi_n$ ve $\psi_n$, (3.2.1) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olduğundan, $\lambda$ sayısının, (3.2.1)-(3.2.2) probleminin bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart

$$C_1\varphi_n + C_2\psi_n \qquad\qquad (|C_1| + |C_2| \neq 0) \tag{4.3}$$

ifadesinde (3.2.2) sınır koşullarını sağlayacak biçimde $C_1, C_2$ sabitlerinin mevcut olmasıdır. İlk sınır koşulu yerine yazıldığında

$$C_1\varphi_{N-1} + C_2\psi_{N-1} = e^{i\alpha}k_1(C_1\varphi_{-1} + C_2\psi_{-1})$$

eşitliği, ardından (3.2.17) başlangıç koşullarının yardımıyla da

$$C_1(\varphi_{N-1} - e^{i\alpha}k_1) + C_2\psi_{N-1} = 0 \tag{4.4}$$

eşitliği elde edilir. İkinci sınır koşulu yerine yazıldığında ise

$$\begin{aligned}
\Delta(C_1\varphi_{N-1} + C_2\psi_{N-1}) &= e^{i\alpha}k_2(C_1\varphi_{-1} + C_2\psi_{-1}) + e^{i\alpha}k_3\Delta(C_1\varphi_{-1} + C_2\psi_{-1}) \\
&= e^{i\alpha}k_2C_1 + e^{i\alpha}k_3\Delta(-C_1 + C_2) \\
&= C_1(e^{i\alpha}k_2 - e^{i\alpha}k_3) + C_2e^{i\alpha}k_3
\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$C_1[\Delta\varphi_{N-1} - e^{i\alpha}(k_2 - k_3)] + C_2(\Delta\psi_{N-1} - e^{i\alpha}k_3) = 0 \tag{4.5}$$

eşitliğine ulaşılır. (4.4) ve (4.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{pmatrix} \varphi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}k_1 & \psi_{N-1}(\lambda) \\ \Delta\varphi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}(k_2 - k_3) & \Delta\psi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}k_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{4.6}$$

sonucuna varılır. $C_1$ ve $C_2$ aynı anda sıfır olamayacağından (4.6) denklem sisteminin aşikar olmayan bir çözümünün olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$\det \begin{pmatrix} \varphi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}k_1 & \psi_{N-1}(\lambda) \\ \Delta\varphi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}(k_2 - k_3) & \Delta\psi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}k_3 \end{pmatrix} = 0$$

olmasıdır. Buradan

$$[\varphi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}k_1][\Delta\psi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}k_3)] - [\Delta\varphi_{N-1}(\lambda) - e^{i\alpha}(k_2 - k_3)]\psi_{N-1}(\lambda) = 0$$

eşitliği sağlanmalıdır. (3.2.17) ve (3.2.19) eşitlikleri dikkate alındığında

$$1 + 2e^{i\alpha} - e^{i\alpha}[f(\lambda)] = 0$$

bulunur. Buradan da

$$f(\lambda) = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}$$

ve dolayısıyla

$$f(\lambda) = 2\cos\alpha$$

eşitliğine ulaşılır.

$\lambda$ özdeğerinin çok katlı olması için, yani (3.2.1) denkleminin (3.2.2) sınır koşullarını gerçekleyen lineer bağımsız iki çözümünün olması için gerek ve yeter şart ise (4.6) sistemindeki katsayılar matrisinin bileşenlerinin 0 olmasıdır. Bütün bileşenler tek tek sıfıra eşitlendiğinde

$$\varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_1$$
$$\Delta\varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}(k_2 - k_3)$$
$$\psi_{N-1}(\lambda) = 0$$
$$\Delta\psi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_3$$

eşitlikleri elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

**Sonuç 4.1.** $\alpha \in (-\pi, \pi]$ ve $0 \leq j \leq N-1$ olmak üzere

$$\lambda_j(e^{i\alpha}K) = \lambda_j(e^{-i\alpha}K)$$

eşitliği gerçeklenir (Sun ve Shi 2006).

**Önerme 4.2.** $0 \leq k \leq N-2$ için $\mu_k$, (3.2.1) denkleminin $y_{-1} = y_{N-1} = 0$ Dirichlet koşulları altındaki özdeğeri olsun. Buradan $k_3 > 0$ olmak üzere

$$k \text{ tek ise } f(\mu_k) \geqslant 2,$$

$$k \text{ çift ise } f(\mu_k) \leq -2$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $k$ tek olsun. Önerme 4.1. dikkate alındığında

$$f(\mu_k) = k_3\varphi_{N-1}(\mu_k) + k_1\Delta\psi_{N-1}(\mu_k) - (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\mu_k)$$

olmalıdır. Lemma 3.2.4 gereğince

$$\psi_{-1}(\mu_k) = \psi_{N-1}(\mu_k) = 0$$

eşitliği ve (3.2.19) eşitliği kullanılarak, ayrıca $k_1k_3 = 1$ eşitliğinden yararlanılarak

$$f(\mu_k) = \frac{1}{k_1\psi_N(\mu_k)} + k_1\psi_N(\mu_k) \tag{4.7}$$

bulunur. (4.7) ifadesinden

$$\begin{aligned} f(\mu_k) - 2 &= \frac{k_1^2\psi_N^2(\mu_k) - 2k_1\psi_N(\mu_k) + 1}{k_1\psi_N(\mu_k)} \\ &= \frac{[k_1\psi_N(\mu_k) - 1]^2}{k_1\psi_N(\mu_k)} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Lemma 3.2.4 gereğince $k$ tek iken $\psi_N(\mu_k) > 0$ olduğu bilindiğinden

$$f(\mu_k) - 2 \geq 0$$

yani

$$f(\mu_k) \geq 2$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Benzer şekilde kabul edelim ki, $k$ çift olsun. (4.7) eşitliğinin her iki tarafına 2 reel sayısı eklendiğinde

$$f(\mu_k) + 2 = \frac{[k_1\psi_N(\mu_k) + 1]^2}{k_1\psi_N(\mu_k)}$$

elde edilir. Yine Lemma 3.2.4 gereğince, $k$ çift iken $\psi_N(\mu_k) < 0$ olduğu bilindiğinden

$$f(\mu_k) + 2 \leq 0$$

olup bu durumda

$$f(\mu_k) \leq -2$$

eşitsizliği gerçeklenir.

**Önerme 4.3.** $k_3 > 0$ olmak üzere,

*(i)* $f(\lambda) = 2$(veya $f(\lambda) = -2$) ve $f'(\lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 0$ (veya $\alpha = \pi$) iken $\lambda$ sayısının (3.2.1)-(3.2.2) probleminin çok katlı özdeğeri olmasıdır.

*(ii)* $0 \leq i \leq N - 2$ için $\lambda = \mu_i$ iken $f(\lambda) = 2$(veya $f(\lambda) = -2$) olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 0$(veya $\alpha = \pi$) iken $\lambda$ sayısının (3.2.1)-(3.2.2) probleminin çok katlı özdeğeri olmasıdır.

*(iii)* $0 \leq i \leq N-2$ için $\lambda \neq \mu_i$ iken $f(\lambda) = 2$(veya $f(\lambda) = -2$) olması için gerek ve yeter şart $\alpha = 0$(veya $\alpha = \pi$) iken $\lambda$ sayısının (3.2.1)-(3.2.2) probleminin basit özdeğeri olmasıdır
(Sun ve Shi 2006).

Ayrıca

$$\begin{array}{lll} f'(\lambda) < 0 & , & \lambda < \mu_0 \\ (-1)^r f'(\lambda) > 0 \quad \mu_r < \lambda < \mu_{r+1} & , & 0 \leq r \leq N-3 \\ (-1)^{N-2} f'(\lambda) > 0 & , & \lambda > \mu_{N-2} \end{array}$$

olmalıdır.

**İspat.** *(i)* $f(\lambda) = 2$ (veya $f(\lambda) = -2$) ve $f'(\lambda) = 0$ olsun. $\varphi_n$ ve $\psi_n$, (3.2.1) denkleminin iki çözümü olduğundan, her $n \in [0, N-1]$ için

$$\begin{aligned} -\nabla[p_n \Delta \varphi_n(\lambda)] + q_n \varphi_n(\lambda) &= \lambda w_n \varphi_n(\lambda) \\ -\nabla[p_n \Delta \psi_n(\lambda)] + q_n \psi_n(\lambda) &= \lambda w_n \psi_n(\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri gerçeklenir. $\varphi_n$ ve $\psi_n$, $\lambda$ ya göre polinom olduklarından iki denklemin de $\lambda$ ya göre türevleri alındığında

$$\begin{aligned} -\nabla[p_n \Delta \varphi_n'(\lambda)] + (q_n - \lambda w_n)\varphi_n'(\lambda) &= w_n \varphi_n(\lambda) \\ -\nabla[p_n \Delta \psi_n'(\lambda)] + (q_n - \lambda w_n)\psi_n'(\lambda) &= w_n \psi_n(\lambda) \end{aligned}$$

bulunur. $\varphi_n$ ve $\psi_n$ çözümlerinin başlangıç koşulları $\varphi_{-1} = \psi_0 = 1$ ve $\varphi_0 = \psi_{-1} = 0$ olduğundan

$$\varphi_{-1}' = \psi_0' = \varphi_0' = \psi_{-1}' = 0 \tag{4.8}$$

eşitlikleri gerçeklenmelidir. Teorem 3.2.5'in hipotezlerinde

$$\begin{aligned} c_{-1} &= c_0 = 0 \\ f_n &= \varphi_n(\lambda)(\text{ ya da } \psi_n(\lambda)) \\ z_n &= \varphi_n'(\lambda)(\text{ya da } \psi_n'(\lambda)) \end{aligned}$$

alındığında, bu teorem gereğince

$$\begin{aligned}
\varphi_n'(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n-1} w_j\varphi_j(\lambda)[\varphi_n(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\psi_n(\lambda)] \qquad ,n\in[-1,N]\\
\psi_n'(\lambda) &= \sum_{j=0}^{n-1} w_j\psi_j(\lambda)[\varphi_n(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\psi_n(\lambda)] \qquad ,n\in[-1,N]
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla ise

$$\Delta\psi_{n-1}'(\lambda)=\sum_{j=0}^{n-1} w_j\psi_j(\lambda)[\Delta\varphi_{n-1}(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\Delta\psi_{N-1}(\lambda)] \tag{4.9}$$

ifadesine ulaşılır.

Önerme 4.1 de tanımlanan $f$ fonksiyonunun $\lambda$ ya göre türevi alınıp, yukarıda bulunan eşitsizlikler yerlerine yazıldığında

$$\begin{aligned}
f'(\lambda) &= k_3\varphi_{N-1}'(\lambda)+k_1\Delta\psi_{N-1}'(\lambda)-(k_2-k_3)\psi_{N-1}'(\lambda)\\
&= k_3\sum_{j=0}^{N-2} w_j\varphi_j(\lambda)[\varphi_{N-1}(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\psi_{N-1}(\lambda)]\\
&\quad +k_1\sum_{j=0}^{N-1} w_j\psi_j(\lambda)[\Delta\varphi_{N-1}(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\psi_{N-1}(\lambda)\\
&\quad -(k_2-k_3)\sum_{j=0}^{N-2} w_j\psi_j(\lambda)[\varphi_{N-1}(\lambda)\psi_j(\lambda)-\varphi_j(\lambda)\psi_{N-1}(\lambda)
\end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Bu eşitlikte

$$\begin{aligned}
\delta_j &= [k_1\Delta\varphi_{N-1}-(k_2-k_3)\varphi_{N-1}]\psi_j^2\\
&\quad +[k_3\varphi_{N-1}-k_1\Delta\psi_{N-1}+(k_2-k_3)\psi_{N-1}]\psi_j\varphi_j-k_3\psi_{N-1}\varphi_j^2
\end{aligned}$$

alındığında

$$f'(\lambda)=\sum_{j=0}^{N-1} w_j\delta_j$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca

$$A(\lambda) := \begin{pmatrix} k_1\Delta\varphi_{N-1} - (k_2 - k_3)\varphi_{N-1} & \dfrac{k_3\varphi_{N-1} - k_1\Delta\psi_{N-1} + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}}{2} \\ \dfrac{k_3\varphi_{N-1} - k_1\Delta\psi_{N-1} + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}}{2} & -k_3\psi_{N-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlı $A$ matrisi yardımıyla her $j \in [0, N-1]$ için

$$\delta_j = \begin{pmatrix} \psi_j & \varphi_j \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \psi_j \\ \varphi_j \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $A$ matrisinin determinantı hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \det A(\lambda) &= -k_3\varphi_{N-1}(\lambda)[k_1\Delta\varphi_{N-1}(\lambda) - (k_2 - k_3)\varphi_{N-1}(\lambda)] \\ &\quad - \frac{[k_3\varphi_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda)]^2}{4} \\ &= -\frac{1}{4}f^2(\lambda) + 1 \end{aligned} \tag{4.10}$$

elde edilir. $f(\lambda) = 2$(veya $f(\lambda) = -2$) durumu göz önüne alındığında

$$\det A(\lambda) = 0$$

olduğu kolayca görülür. O halde

$$\begin{aligned} & -k_3\varphi_{N-1}(\lambda)[k_1\Delta\varphi_{N-1}(\lambda) - (k_2 - k_3)\varphi_{N-1}(\lambda)] \\ = & \ \frac{[k_3\varphi_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda)]^2}{4} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilip, bu eşitlik $\delta_j$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\delta_j = -k_3\psi_{N-1}(\lambda)\left[\varphi_j(\lambda) - \frac{[k_3\varphi_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda)]}{2k_3\psi_{N-1}(\lambda)}\psi_j(\lambda)\right]^2$$

bulunur. $0 \leq j \leq N-1$ olmak üzere, her bir $\delta_j$ nin işareti aynı olacağından, herhangi bir $\lambda$ sayısı için $f'(\lambda) = 0$ olması için gerek ve yeter şart her bir $\delta_j$ nin sıfır olmasıdır. Başka bir ifadeyle,

$$\text{Her } j \in [0, N-1] \text{ için } \delta_j = \begin{pmatrix} \psi_j & \varphi_j \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \psi_j \\ \varphi_j \end{pmatrix} = 0$$

olmalıdır. $\varphi_n$ ve $\psi_n$ lineer bağımsız çözümler olduğundan $A$ matrisi özdeş olarak sıfır olmalıdır. O halde

$$\varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_1$$
$$\Delta\varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}(k_2 - k_3)$$
$$\psi_{N-1}(\lambda) = 0$$
$$\Delta\psi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_3$$

eşitlikleri gerçeklenir. Bu da $\lambda$ özdeğerinin çok katlılığını ispatlar.

*(ii)* $f(\lambda) = 2$(veya $f(\lambda) = -2$) ve $0 \leq i \leq N-2$ için $\lambda = \mu_i$ olsun. (4.10) eşitliği yardımıyla

$$\delta_j = -k_3\psi_{N-1}(\lambda)\left( \varphi_j(\lambda) - \frac{k_3\varphi_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda)}{2k_3\psi_{N-1}(\lambda)} \psi_j(\lambda) \right)^2$$

olarak bulunur. Buradan da

$$f' = -k_3\psi_{N-1}\sum_{j=0}^{N-1} w_j \left( \varphi_j - \frac{k_3\varphi_{N-1} - k_1\Delta\psi_{N-1} + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}}{2k_3\psi_{N-1}} \psi_j \right)^2 \quad (4.11)$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte $0 \leq i \leq N-2$ için $\psi_{N-1}(\mu_i) = 0$ olduğundan ayrıca

$$\lim_{\lambda \to \mu_i} \frac{k_3\varphi_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda)}{2k_3\psi_{N-1}(\lambda)} \quad (4.12)$$

limitinde pay ve paydanın her ikisi birden sıfıra eşit olacağından $L'Hospital$ kuralı gereğince bu limit

$$\lim_{\lambda \to \mu_i} \frac{k_3\varphi'_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi'_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi'_{N-1}(\lambda)}{2k_3\psi'_{N-1}(\lambda)}$$

haline dönüşür. $0 \leq i \leq N-2$ için $\mu_i$ özdeğerleri basit olduğundan $\psi'_{N-1}(\mu_i) \neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\frac{k_3\varphi'_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi'_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi'_{N-1}(\lambda)}{2k_3\psi'_{N-1}(\lambda)} \in \mathbb{R}$$

bulunur. O halde $f'(\mu_i) = 0$ gerçeklenir. *(i)* gereğince $\alpha = 0$ veya $\alpha = \pi$ durumunda $\lambda$ özdeğerinin çok katlılığı ispatlanmış olur.

*(iii)* $f(\lambda) = 2$(veya $f(\lambda) = -2$) ve $0 \leq i \leq N-2$ için $\lambda \neq \mu_i$ olsun. Bu durumda $\psi_{N-1}(\mu_i) \neq 0$ olacağından çok katlılık için gereken (4.2) şartlarından en az biri sağlanmamış olur. O halde $\lambda$ özdeğeri basittir.

Ayrıca (4.11) eşitliğinden $f'$ ile $\psi_{N-1}$ zıt işaretli olmalıdır. Teorem 3.2.4 dikkate alındığında

$\lambda < \mu_0$ ise

$$\psi_0(\lambda), \psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), ..., \psi_{N-1}(\lambda) \tag{4.13}$$

ifadesi hiç işaret değiştirmez. Başlangıç koşullarından $\psi_0(\lambda) = 1$ olduğu bilindiğinden $\psi_{N-1}(\lambda) > 0$ olmalıdır. O halde $f'(\lambda) < 0$ eşitsizliği gerçeklenir.

$0 \leq r \leq N-3$ için $\mu_r < \lambda < \mu_{r+1}$ ise (4.13) ifadesi $(r+1)$ kez işaret değiştirir. Bu durumda

$$sgn[\psi_{N-1}(\lambda)] = (-1)^{r+1}$$

eşitliği ve buradan da

$$sgn[f'(\lambda)] = (-1)^{r+1}(-1) = (-1)^r$$

eşitliği sağlanır. O halde

$$sgn[(-1)^r f'(\lambda)] = (-1)^{2r} = 1$$

olur. Bu sebeple

$$(-1)^r f'(\lambda) > 0$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$\lambda > \mu_{N-2}$ ise (4.13) ifadesi $N-1$ kez işaret değiştirir. O halde

$$sgn[\psi_{N-1}(\lambda)] = (-1)^{N-1}$$

olacağından

$$sgn[f'(\lambda)] = (-1)(-1)^{N-1} = (-1)^{N-2}$$

eşitliği elde edilir. Buradan ise

$$sgn[(-1)^{N-2} f'(\lambda)] = 1$$

eşitliği gerçeklendiğinden

$$(-1)^{N-2} f'(\lambda) > 0$$

olmalıdır ki bu da ispatı tamamlar.

**Önerme 4.4.** $\alpha \neq 0$ ve $-\pi < \alpha < \pi$ olmak üzere, (3.2.1)-(3.2.2) probleminin özdeğerleri basittir (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $\alpha \neq 0$ ve $-\pi < \alpha < \pi$ alalım. $\lambda$, (3.2.1)-(3.2.2) probleminin özdeğeri olduğundan Önerme 4.1 gereğince $f(\lambda) = 2\cos\alpha$ olmalıdır.

Önerme 4.3 de oluşturulan $A$ matrisi için $\det A = -\frac{1}{4} f^2(\lambda) + 1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\det A = -\frac{1}{4} f^2(\lambda) + 1 = -\frac{1}{4} 4\cos^2\alpha + 1 > 0$$

eşitsizliğine ulaşılır.

$$A = \begin{pmatrix} k_1 \triangle \varphi_{N-1} - (k_2 - k_3)\,\varphi_{N-1} & \dfrac{k_3\varphi_{N-1} - k_1 \triangle \psi_{N-1} + (k_2 - k_3)\,\psi_{N-1}}{2} \\ \dfrac{k_3\varphi_{N-1} - k_1 \triangle \psi_{N-1} + (k_2 - k_3)\,\psi_{N-1}}{2} & -k_3\psi_{N-1} \end{pmatrix}$$

simetrik matrisi

$$\begin{aligned} a &= k_1 \triangle \varphi_{N-1} - (k_2 - k_3)\,\varphi_{N-1} \\ b &= \frac{k_3\varphi_{N-1} - k_1 \triangle \psi_{N-1} + (k_2 - k_3)\,\psi_{N-1}}{2} \\ c &= -k_3\psi_{N-1} \end{aligned}$$

alınarak elementer operasyonlar yardımıyla köşegenleştirildiğinde

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} ab^2 & 0 \\ 0 & a\,(ac - b^2) \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu operasyonlarla elde edilen matrisin özdeğerleri, $A$ matrisinin özdeğerleri ile aynı olmalıdır. O halde bu özdeğerler

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= ab^2 \\ \lambda_2 &= a\left(ac - b^2\right) \end{aligned}$$

şeklinde olmak üzere iki tanedir. $\det A(\lambda) = ac - b^2 > 0$ ve $b \neq 0$ olduğu bilindiğinden $\lambda_1$ ile $\lambda_2$ özdeğerlerinin işaretleri aynı olmalıdır. Başka bir ifadeyle, $A$ matrisinin özdeğerlerinin ikisi de ya pozitif ya da negatif olmalıdır. Bu şekildeki bir matrise pozitif tanımlı veya negatif tanımlıdır denir. O halde,

$$\text{Her } j \in [0, N-1] \text{ için } \delta_j > 0 \text{ ya da } \delta_j < 0$$

gerçeklenir.

Kabul edelim ki, $\lambda$ (3.2.1)-(3.2.2) probleminin çok katlı özdeğeri olsun. O halde, Önerme 4.1 gereğince

$$\varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_1$$
$$\Delta\varphi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}(k_2 - k_3)$$
$$\psi_{N-1}(\lambda) = 0$$
$$\Delta\psi_{N-1}(\lambda) = e^{i\alpha}k_3$$

eşitlikleri gerçeklenir. Buradan da

$$k_3\psi_{N-1}(\lambda) = 0$$
$$k_3\varphi_{N-1}(\lambda) - (k_2 - k_3)\varphi_{N-1}(\lambda) = 0$$
$$k_3\varphi_{N-1}(\lambda) - k_1\Delta\psi_{N-1}(\lambda) + (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. O halde $A$ matrisinin bütün bileşenleri sıfır olmalıdır. Bu durumda $A$ matrisi sıfır matrisi olacağından $0 \leq j \leq N-1$ için $\delta_j = 0$ olmalıdır. Simetrik bir $A$ matrisinin pozitif tanımlı olması için her $X \neq 0$ matrisi için $XAX^T > 0$, benzer şekilde negatif tanımlı olması için de her $X \neq 0$ matrisi için $XAX^T < 0$ olmalıdır. Halbuki

$$0 \leq j \leq N-1 \text{ için } \delta_j = \begin{pmatrix} \psi_j & \varphi_j \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \psi_j \\ \varphi_j \end{pmatrix} = 0$$

bulunması $A$ matrisinin pozitif ya da negatif tanımlı olmasıyla çelişir. O halde $\lambda$ özdeğerleri basittir.

**Önerme 4.5.** $k_3 > 0$ olmak üzere, $f(\nu_0) \geq 2$ olacak şekilde bir $\nu_0 < \mu_0$ sabiti vardır (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $\psi_{N-1}$, $\lambda$ nın (N-1)-inci dereceden polinomu, $\varphi_{N-1}$ de $\lambda$ nın (N-2)-inci dereceden polinomudur. Böylece

$$\psi_{N-1}(\lambda) = (-1)^N A_N \lambda^N + A_{N-1}\lambda^{N-1} + ... + A_0$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda, $n \in [0, N-1]$ için

$$A_N = \frac{\omega_0 \omega_1 ... \omega_{N-1}}{p_0 p_1 ... p_{N-1}} > 0$$

olduğundan

$$f(\lambda) = k_3 \varphi_{N-1}(\lambda) + k_1 \Delta \psi_{N-1}(\lambda) - (k_2 - k_3) \psi_{N-1}(\lambda) = (-1)^N A_N \lambda^N + h(\lambda)$$

elde edilir. Burada $h(\lambda)$ polinonomu N-1 den büyük olmayan dereceye sahiptir.

$$\lim_{\lambda \to -\infty} f(\lambda) = \lim_{\lambda \to -\infty} \left[ (-\lambda)^N A_N + h(\lambda) \right] = +\infty$$

gerçeklenir. Önerme 4.2 yardımıyla $f(\nu_0) \geq 2$ olan $\nu_0 < \mu_0$ şeklinde bir $\nu_0$ sabiti olduğu görülür.

**Önerme 4.6.** *N tek ise,* $f(\xi_0) \leq -2$ *ve* $\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_{N-2} < \xi_0$ *olacak şekilde en az bir* $\xi_0$ *sabiti vardır.*
*N çift ise,* $f(\eta_0) \geq 2$ *ve* $\mu_0 < \mu_1 < ... < \mu_{N-2} < \eta_0$ *olacak şekilde en az bir* $\eta_0$ *sabiti vardır (Sun ve Shi 2006).*
**İspat.** Önerme 4.2 gereğince

$$\begin{array}{ll} N \text{ tek ise} & f(\mu_{N-2}) \geq 2 \\ N \text{ çift ise} & f(\mu_{N-2}) \leq -2 \end{array}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Önerme 4.5 gereğince ise

$$f(\lambda) = (-1)^N A_N \lambda^N + h(\lambda)$$

olduğundan

$$\begin{array}{ll} \text{N tek ise,} & \lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = -\infty \\ \text{N çift ise,} & \lim_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty \end{array}$$

bulunur.

Dolayısıyla

$N$ tek olmak üzere; $\xi_0 > \mu_{N-2}$ ve $f(\xi_0) \leq -2$ olacak şekilde en az bir $\xi_0$ sabiti,

$N$ çift olmak üzere, $\eta_0 > \mu_{N-2}$ ve $f(\eta_0) \geq 2$ olacak şekilde en az bir $\eta_0$ sabiti vardır.

**Önerme 4.7.** $0 \leq k \leq N-2$ için, $k_3 > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} k \text{ tek, } f(\mu_k) &= 2 \text{ ve } f'(\mu_k) = 0 \text{ ise } f''(\mu_k) < 0 \\ k \text{ çift, } f(\mu_k) &= -2 \text{ ve } f'(\mu_k) = 0 \text{ ise } f''(\mu_k) > 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir (Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $k_3 > 0$, $k$ tek, $f(\mu_k) = 2$ ve $f'(\mu_k) = 0$ olsun.

Önerme 4.3 gereğince $f'(\lambda) = 0$ ve $f(\lambda) = 2$ olması için gerek ve yeter şart, $\lambda$ sayısının (3.2.1)-(3.2.2) probleminin çok katlı özdeğeri olmasıdır. O halde $0 \leq k \leq N-2$ için $\mu_k$, (3.2.1)-(3.2.2) probleminin çok katlı özdeğeridir. Önerme 4.1 gereğince $\alpha = 0$ iken

$$\begin{aligned} \varphi_{N-1}(\mu_k) &= k_1 \\ \triangle\varphi_{N-1}(\mu_k) &= k_2 - k_3 \\ \psi_{N-1}(\mu_k) &= 0 \\ \triangle\psi_{N-1}(\mu_k) &= k_3 \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

$$f(\lambda) = k_3\varphi_{N-1}(\lambda) + k_1 \triangle \psi_{N-1}(\lambda) - (k_2 - k_3)\psi_{N-1}(\lambda)$$

denkleminde $\lambda$ değişkenine göre 2 kere türev alınırsa

$$f''(\mu_k) = k_3\varphi''_{N-1}(\mu_k) + k_1 \triangle \psi''_{N-1}(\mu_k) - (k_2 - k_3)\psi''_{N-1}(\mu_k)$$

elde edilir.

(3.2.19) ile verilen $\varphi_N\psi_{N-1}-\varphi_{N-1}\psi_N=-1$ denkleminin $\lambda$ ya göre birinci türevinden

$$\varphi'_N\psi_{N-1}+\varphi_N\psi'_{N-1}-\varphi'_{N-1}\psi_N-\varphi_{N-1}\psi'_N$$

eşitliği, ikinci türevinden ise

$$\varphi''_N\psi_{N-1}+\varphi'_N\psi'_{N-1}+\varphi'_N\psi'_{N-1}+\varphi_N\psi''_{N-1}-\varphi''_{N-1}\psi_N-\varphi'_{N-1}\psi'_N-\varphi'_{N-1}\psi'_N-\varphi_{N-1}\psi''_N$$

$$2\left(\varphi'_N\psi'_{N-1}-\varphi'_{N-1}\psi'_N\right)=\left(k_3\varphi''_{N-1}+k_1\bigtriangleup\psi''_{N-1}-(k_2-k_3)\,\psi''_{N-1}\right)$$

eşitliği elde edilir. O halde

$$f''(\mu_k)=2\left(\varphi'_N(\mu_k)\,\psi'_{N-1}(\mu_k)-\varphi'_{N-1}(\mu_k)\,\psi'_N(\mu_k)\right)$$

gerçeklenir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\varphi'_N\psi'_{N-1}-\varphi'_{N-1}\psi'_N &= \sum_{j=0}^{N-1}w_j\varphi_j\left(\varphi_N\psi_j-\varphi_j\psi_N\right).\sum_{j=0}^{N-2}w_j\left(\varphi_{N-1}\psi_j-\varphi_j\psi_{N-1}\right)\\ &\quad-\sum_{j=0}^{N-2}w_j\varphi_j\left(\varphi_{N-1}\psi_j-\varphi_j\psi_{N-1}\right)\sum_{j=0}^{N-1}w_j\psi_j\left(\varphi_N\psi_j-\varphi_j\psi_N\right)\\ &= \left(\sum_{j=0}^{N-1}w_j\varphi_j\psi_j\right)^2-\sum_{j=0}^{N-1}w_j\varphi_j^2\sum_{j=0}^{N-1}w_j\psi_j^2\end{aligned}$$

bulunur. $\varphi_n$ ve $\psi_n$ $[-1,N]$ aralığında lineer bağımsız olduğundan Hölder eşitsizliğinden, $f''(\mu_k)<0$ eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde işlemler yapılırsa, $k$ çift, $f(\mu_k)=-2$ ve $f'(\mu_k)=0$ olduğunda ise $f''(\mu_k)>0$ eşitliği elde edilir.

**Teorem 4.1.** $k_3 > 0$ olsun. $\alpha \neq 0$ olmak üzere, $-\pi < \alpha < \pi$ için aşağıdaki eşitsizlikler gerçeklenir:

*(i)* $N$ tek ise

$$\begin{aligned}
\lambda_0(K) &< \lambda_0\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_0(-K) \\
&\leq \lambda_1(-K) < \lambda_1\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_1(K) \\
&\leq \lambda_2(K) < \lambda_2\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_2(-K) \\
&\leq \lambda_3(-K) < \lambda_3\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_3(K) \\
&\quad \vdots \\
&\leq \lambda_{N-2}(-K) < \lambda_{N-2}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-2}(K) \\
&\leq \lambda_{N-1}(K) < \lambda_{N-1}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-1}(-K)
\end{aligned}$$

*(ii)* $N$ çift ise

$$\begin{aligned}
\lambda_0(K) &< \lambda_0\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_0(-K) \\
&\leq \lambda_1(-K) < \lambda_1\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_1(K) \\
&\leq \lambda_2(K) < \lambda_2\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_2(-K) \\
&\leq \lambda_3(-K) < \lambda_3\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_3(K) \\
&\quad \vdots \\
&\leq \lambda_{N-2}(K) < \lambda_{N-2}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-2}(-K) \\
&\leq \lambda_{N-1}(-K) < \lambda_{N-1}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-1}(K)
\end{aligned}$$

(Sun ve Shi 2006).

**İspat.** $k_3 > 0$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere, $-\pi < \alpha < \pi$ olsun. Dördüncü bölümdeki önermeler, Teorem 3.2.3 ve ara değer teoremi kullanılırsa,

$N$ tek ise

$$\begin{aligned}
\nu_0 &\leq \lambda_0(K) < \lambda_0\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_0(-K) \\
&\leq \mu_0 \leq \lambda_1(-K) < \lambda_1\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_1(K) \leq \mu_1 \\
&\leq \lambda_2(K) < \lambda_2\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_2(-K) \\
&\leq \mu_2 \leq \lambda_3(-K) < \lambda_3\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_3(K) \leq \mu_3 \\
&\leq \ldots \\
&\leq \mu_{N-3} \leq \lambda_{N-2}(K) < \lambda_{N-2}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-2}(-K) \\
&\leq \mu_{N-2} \leq \lambda_{N-1}(-K) < \lambda_{N-1}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-1}(K) \leq \xi_0
\end{aligned}$$

$N$ çift ise

$$\begin{aligned}
\nu_0 &\leq \lambda_0(K) < \lambda_0\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_0(-K) \\
&\leq \mu_0 \leq \lambda_1(-K) < \lambda_1\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_1(K) \\
&\leq \mu_1 \leq \lambda_2(K) < \lambda_2\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_2(-K) \\
&\leq \mu_2 \leq \lambda_3(-K) < \lambda_3\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_3(K) \leq \mu_3 \\
&\quad \vdots \\
&\leq \mu_{N-3} \leq \lambda_{N-2}(K) < \lambda_{N-2}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-2}(-K) \\
&\leq \mu_{N-2} \leq \lambda_{N-1}(-K) < \lambda_{N-1}\left(e^{i\alpha}K\right) < \lambda_{N-1}(K) \leq \eta_0
\end{aligned}$$

gerçeklenir.

**Sonuç 4.1.** $\alpha \in (-\pi, 0)$ ise $e^{i\alpha}K = e^{i(\pi+\alpha)}(-K)$ ve $\alpha \in (0, \pi)$ ise $e^{i\alpha}K = e^{i(-\pi+\alpha)}(-K)$ eşitlikleri gerçeklendiğinden $K$ yerine $-K$ matrisi, $(-\pi, 0)$ aralığındaki $\alpha$ yerine $\pi + \alpha$, $(0, \pi)$ aralığındaki $\alpha$ yerine ise $-\pi + \alpha$ alınarak $-\pi < \alpha < \pi$ için $k_3 < 0$ olması durumunda da Teorem 4.1 deki sıralama bağıntısının aynısına ulaşılır.

## KAYNAKLAR


Atkinson , F. V. 1964. *Discrete and Continuous Boundary Problems.* New York, Academic Press.

Coddington, E. A. and Levinson, N. 1955. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw-Hill Book Company, Inc.

Kelley, W. G. and Peterson, A. C. 1991. *Difference Equations An Introduction with Applications.* Academic, 403, New York.

Kreyszig , E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications.* New York: Wiley&Sons. Inc.

Naimark , M. A. 1968. *Linear Differantial Operators I* George G. Harrap&Company

Shi, Y. and Chen, S. 1999. *Spectral theory of second-order vector difference equations*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 239. pp. 195-212.

Sun, H. and Shi, Y. 2006. *Eigenvalues of second-order difference equations with coupled boundary conditions*. Linear Algebra and its Applications Vol. 414. pp. 361-372.

Wang, Y. and Shi, Y. 2005. *Eigenvalues of second-order difference equations with periodic and antiperiodic boundary conditions*. J. Math. Anal. Appl. Vol. 309. pp. 56-69.

## ÖZGEÇMİŞ

| | | |
|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | : | Şerifenur CEBESOY |
| **Doğum Yeri** | : | Ankara |
| **Doğum Tarihi** | : | 31.05.1985 |
| **Medeni Hali** | : | Bekar |
| **Yabancı Dili** | : | İngilizce |

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

| | | |
|---|---|---|
| **Lise** | : | Etimesgut Anadolu Lisesi (2003) |
| **Lisans** | : | Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2008) |

### Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Hitit Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi ($Eylül$ 2010 $-$ $Nisan$ 2010)