YAKINIMSI UZAYLARIN DOKU UZAYLARINA GENELLEMESİ

GENERALIZATION OF PROXIMITY SPACES TO TEXTURES

GÖKHAN YILDIZ

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim - Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

MATEMATİK Bölümü Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI 'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Timur Karaçay
Üye (Danışman)	: Prof. Dr. Rıza Ertürk
Üye	: Prof. Dr. L. Micheal Brown
Üye	: Prof. Dr. Ali Bülbül
Üye	: Doç. Dr. Selma Özçağ

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından 29/11/2011 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ...../...../......... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof.Dr. ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

YAKINIMSI UZAYLARIN DOKU UZAYLARINA GENELLEMESİ

GÖKHAN YILDIZ

ÖZ

Bu tezin amacı yakınlık kavramının, nokta-tabanlı bir yapı olan doku uzaylarına bir genellemesini vermek ve bu kavramın dimetrik ve didüzgün uzaylarla olan ilişkisini incelemektir.

Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezin genel yapısı üzerine bilgi verilerek giriş yapılmıştır.

İkinci bölümde; klasik yapıda yakınlık uzayları ve doku uzayları hakkında tez içerisinde kullanılacak çeşitli ön bilgi ve sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde; di-ekstrem uzaylar tanımı verilmiş ve bu uzayların temel özellikleri incelenmiştir. Di-ekstrem uzayların klasik anlamda yakınlık uzaylarının bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca çarpım ve başlangıç di-ekstrem uzayları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde; di-ekstrem uzayların belirtisiz yakınlık uzaylarının bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Dimetrik ve didüzgün uzaylar ile di-ekstremite arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Beklenildiği gibi di-ekstrem uzaylar kategorisinin, didüzgün uzayların dolu, yansımalı bir altkategorisine izomorf olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yakınlık uzayları, doku, Hutton dokusu, di-ekstremite, çarpım dokusu, dimetrik, didüzgün, tamamiyle sınırlı didüzgün uzaylar

Danışman: Prof. Dr. Rıza Ertürk, Fen Fakültesi, Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümü

GENERALIZATION OF PROXIMITY SPACES TO TEXTURES

GÖKHAN YILDIZ

ABSTRACT

The aim of this thesis is to give a generalization of the notion of proximity to the point-based setting of textures and investigate the relationship with dimetric and di-uniform spaces.

This work consists of four chapters. The first chapter is a short introduction.

In the second chapter; the classical proximity spaces and the basic properties of texture spaces are given that will be used latter.

In the third chapter; di-extremities are introduced and their basic properties are investigated. It is also shown that di-extremities are indeed a generalization of classical proximities. Moreover the definition of product di-extremity and initial di-extremity are given.

In the fourth chapter; it is shown that di-extremities are a generalization of fuzzy proximities. The relationship between di-extremities, dimetrics and di-uniforms are investigated. As expected, the category of di-extremities is isomorphic to a full, reflexive subcategory of di-uniform spaces.

Keywords: Proximity, texture, Hutton texture, di-extremity, product texture, dimetric, di-uniformity, totally bounded di-uniformity

Supervisor: Prof. Dr. Rıza Ertürk, Hacettepe University Faculty of Science, Math Department.

TEŞEKKÜR

Akademik hayatımda bana olan desteği ve sonsuz sabrı nedeniyle değerli hocam Prof. Dr. Rıza Ertürk'e teşekkür ederim.

Bizleri her zaman destekleyen bölüm başkanımız Prof. Dr. Emin Özçağ ve engin bilgisini bizden esirgemeyen Prof. Dr. L. M. Brown başta olmak üzere bölümdeki hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Benden sevgilerini asla esirgemeyen annem, babam ve sevgili kardeşlerime teşekkür ederim.

İçindekiler

SİMGELER VE KISALTMALAR

I, J, Λ	İndis kümeleri
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{I}$	$[0, 1]$ kapalı gerçel aralık
$\mathcal{P}(X)$	X 'in kuvvet kümesi
Δ	Bir X kümesine ait köşegen $\{(x, x) \mid x \in X\}$
$\vee$	Supremum (sup)
$\wedge$	İnfimum (inf)
$(S, \mathcal{S})$	Doku uzayı
$(S, \mathcal{S}, \sigma)$	Tümleyenli doku uzayı
P_s	s noktası ile belirtilen p-küme
Q_s	s noktası ile belirtilen q-küme
$A^\flat$	A nın çekirdeği $(core(A))$
$(M_\mathbb{L}, \mathcal{M}_\mathbb{L})$	Hutton dokusu
$(M_\mathbb{L}, \mathcal{M}_\mathbb{L}, \mu_\mathbb{L})$	Tümleyenli Hutton dokusu
$\otimes$	Doku çarpımı
$(\prod\limits_{i \in I} S_i, \bigotimes\limits_{i \in I} \mathcal{S}_i)$	$(S_i, \mathcal{S}_i)$ dokularının çarpım dokusu
$\overline{P}_{(s,t)}$	$\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun p-kümesi
$\overline{Q}_{(s,t)}$	$\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun q-kümesi
(r, R)	Dibağıntı
$(r, R)'$	Dibağıntının tümleyeni
$(r, R)^{\leftarrow}$	Dibağıntının tersi
$r^{\rightarrow}A$	r bağıntısının A-kesiti
$R^{\rightarrow}A$	R kobağıntısının A-kesiti
$r^{\leftarrow}B$	r bağıntısının A-önkesiti
$R^{\leftarrow}B$	R kobağıntısının A-önkesiti

(f, F)	Difonksiyon
(i_S, I_S)	$(S, \mathcal{S})$ üzerindeki birim dibağıntı (birim difonksiyon)
(π_i, Π_i)	i. izdüşüm difonksiyonu
τ	Topoloji
κ	Kotopoloji
(τ, κ)	Ditopoloji
$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$	Ditopolojik doku uzayı
İç	İç operatörü
Kap	Kapanış operatörü
(X, η)	Klasik anlamda yakınımsı uzay
$(\mathbb{L}, \eta)$	Belirtisiz yakınımsı uzay
$\overline{\delta}$	Ekstremite
$\underline{\delta}$	Ko-ekstremite
$\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$	Di-ekstremite
$(S, \mathcal{S}, \delta)$	Di-ekstrem doku uzayı
$\delta_{\mathcal{U}}$	$\mathcal{U}$ didüzgünlüğü tarafından üretilen di-ekstremite
$(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$	Didüzgün doku uzayı
$\rho = (\overline{\rho}, \underline{\rho})$	Dimetrik
$(S, \mathcal{S}, \rho)$	Dimetrik doku uzayı
$\mathcal{F}^{S}_{\mathcal{RR}}$	Keyfi supremumu koruyan, kapsamaya göre artan $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonlarının ailesi
$\mathcal{F}^{S}_{\mathcal{RCR}}$	Keyfi infumumu koruyan, kapsamaya göre azalan $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonlarının ailesi
$\mathcal{F}^{S}_{\mathcal{RDR}}$	$\mathcal{F}^{S}_{\mathcal{RR}} \times \mathcal{F}^{S}_{\mathcal{RCR}}$
$\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{SB}}$	δ ile uyumlu tamamiyle sınırlı düzgünlüğün alttabanı
$\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$	δ ile uyumlu tamamiyle sınırlı düzgünlüğün tabanı
dfUnif	Difonksiyonel düzgünlük kategorisi
dfTbUnif	Tamamiyle sınırlı difonksiyonel düzgünlük kategorisi
dfEx	Di-ekstremite kategorisi
İng:	İngilizcesi:

1. Giriş

Bir (X,τ) topolojik uzayına ait topoloji, Kurotowski kapanış aksiyomları ile belirlenebilir. x noktası A kümesinin kapanışına aitse “x, A ’ya yakındır.” diyebiliriz. Bu durumda “x, A ’ya yakın $\Longrightarrow f(x)$, $f(A)$’ya yakındır” özelliğine sahip bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna *sürekli* fonksiyon denir.

X’in üzerinde bir d pseudo metriği tanımlı olsun. $D(A,B) = inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$ diyelim. Bu durumda eğer $D(A,B) = 0$ ise “A kümesi, B kümesine yakındır” diyebiliriz. Böylece A kümesinin kapanışı kap$(A) = \{x|D(A,\{x\}) = 0\}$ olur. (Y,e) başka bir pseudo metrik uzay ve E, D’ye benzer biçimde tanımlanmış olsun. Bu durumda, “$D(A,B) = 0 \Longrightarrow E(f(A), f(B)) = 0$” özelliğine sahip bir $f : X \to Y$ fonksiyonuna *düzgün sürekli* fonksiyon denir. Bu bilgilerin ışığında görülmektedir ki, X ’in altkümeleri arasında tanımlı bu yakınlık bağıntısı bu şekilde topoloji, süreklilik ve düzgünlük kavramları ile ilişkilendirilebiliyor. 1951 yılında Efremovic, pseudo metrikten elde edilen bu yakınlık bağıntısının temel özelliklerinden yola çıkarak bu kavramı keyfi bir X kümesi üzerinde belli aksiyomları sağlayan bir bağıntı olarak tanımlamıştır[14].

Yakınlık uzayları topolojik bakımdan çok zengin özelliklere sahiptirler. Bu nedenle yakınlık uzaylarının; topolojik uzaylar, metrik uzaylar ve düzgün uzaylarla olan ilişkileri, yukarıda anılan tarihten itibaren çeşitli yazarlar tarafından incelenmiştir. Zadeh’in 1965 yılında belirtisiz kümeler kavramını tanıtması [26] ve ardından Chang’ın 1968 yılında belirtisiz topolojileri [12] tanımlaması sonrasında pek çok topolojik kavram, belirtisiz kümelere genişletilmiştir. Belirtisiz kümeler üzerinde yakınlık uzayları [15] ise ilk olarak Katsaras tarafından tanımlanmıştır. Belirtisiz kümeler literatüründe birçok yakınlık uzayı tanımı mevcuttur. Bu tez çalışmasında Katsaras’ın yakınlık uzayı tanımının devamı olarak nitelendirebileceğimiz bir yakınlık uzayı [1] tanımını sunan Artico’nun çalışması temel alınmıştır.

Doku uzayları, ilk olarak L.M. Brown tarafından [3, 4] 1990’lı yılların başında, belirtisiz (İng: fuzzy) kümelerin nokta-tabanlı bir karşılığı olarak, belirtisiz yapılar (İng: fuzzy structure) adıyla tanıtıldı. Daha sonra bu yapılar L. M. Brown ve R. Ertürk tarafından [7, 8] geliştirilerek doku uzayları (İng: texture spaces) adıyla verildi ve bundan sonra da bu alanda yapılan çalışmalarda bu isim kullanılmıştır. Yapılan bu araştırmalarda; tümleyen işleminden bağımsız matematiksel kavram ve yapıların bir genel çerçeveye sahip olduğu gözlenmiştir.

Doku uzaylarının ayrıntılı bir tanımı ikinci bölümde verilmektedir. Ancak kısaca; S boş olmayan bir küme olmak üzere S üzerindeki bir $\mathcal{S}$ dokulanması, $\mathcal{P}(S)$ kuvvet kümesinin; noktaları ayıran, kapsamaya göre tam, tamamiyle dağılımlı latis yapısına sahip ve ayrıca sonlu supremumla birleşimin ve keyfi infumum ile keyfi kesişimin çakıştığı, S ve $\emptyset$ kümelerini içeren bir alt ailesidir. Bu $\mathcal{S}$ dokulanması ile birlikte $(S, \mathcal{S})$ ikilisine doku uzayı denir. Genelde doku uzayları kümesel tümleyen işlemi altında kapalı olmak zorunda değildir. Bu gerçek; doku uzaylarını, içerdiği güçlü dualite yapısı sayesinde bir tümleyene sahip olmayan matematiksel kavramların araştırılmasında kullanışlı bir yapı kılmaktadır. Ayrıca bir tümleyen işlemine sahip yapılara yönelik çalışmalar yapılabilmesi amacıyla doku uzayları üzerinde bir genelleştirilmiş tümleyen işlemi de tanımlanmıştır. Bu sayede; hem klasik küme teorisi ve belirtisiz küme teorisi üzerindeki gibi birçok matematiksel yapı doku uzaylarında temsil edilebilmektedir, hem de bir çok matematiksel kavram için uygun genelleştirmeler yapılabilmektedir. Örneğin: Ayrık doku uzayları üzerinde tanımlanan ditopolojiler; topoloji ve ikili topoloji kavramlarının bir genellemesidir.

Bir S kümesi üzerindeki klasik anlamda topoloji, metrik ve düzgünlük kavramlarının genellemesi olarak; bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde ditopoloji, dimetrik ve didüzgün uzay kavramları L. M. Brown ve çeşitli meslektaşları tarafından tanıtılmış ve bu uzaylar arasındaki ilişkiler ayrıntılı bir biçimde incelenmiştir. Bir doku üzerinde ele alınan ditopoloji, nokta ve küme kavramlarının birlikte kullanılabilmesine olanak tanıması ve söz konusu oluşumların belirtisiz topolojiye taşınabilmesi özelliği ile yeni sonuçların elde edilmesinde önemli rol oynamaktadır. Bu konudaki bilgilere [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 18, 19, 20, 21, 22, 24] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

Bu tez çalışmasının amacı, yakınlık uzaylarının doku uzaylarına bir genellemesini vermek ve bu konuda klasik ve belirtisiz kümeler yapısı anlamında ortaya konulmuş bazı sonuçları doku uzayları çerçevesinde ele alarak yeni sonuçlar elde etmektir. Ayrıca yakınlık uzaylarının ditopoloji, dimetrik ve didüzgünlük gibi kavramlarla olan ilişkilerinin araştırılması ve bu ilişkilerin bir analizinin ortaya konulması hedeflenmektedir.

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasında, tez için gerekli önbilgi ve teorilere ikinci bölümde yer verilmiştir. Bu bölümde yer alan yakınlık uzayları ve doku uzaylarına ait bilgiler fazla ayrıntıya girilmeden özet olarak verilmiştir.

Üçüncü bölümde; tezin konusunu oluşturan di-ekstrem uzaylarının tanımı verilmiş ve temel özellikleri incelenmiştir. Di-ekstrem uzayların klasik anlamda yakınlık uzaylarının bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Ayrıca çarpım di-ekstrem uzayları ve başlangıç di-ekstrem uzayları tanıtılmıştır.

Dördüncü bölümde; di-ekstrem uzayların belirtisiz yakınlık uzaylarının bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Di-ekstrem uzaylar ile dimetrik ve didüzgün uzaylar arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Beklenildiği gibi di-ekstrem uzaylar, klasik yapıda ve belirtisiz kümeler yapısında yakınlık uzayların gösterdiği özelliklere paralel özellikler taşımaktadır. Her di-ekstrem uzaya karşılık onunla uyumlu tamamiyle sınırlı bir didüzgün uzay mevcuttur. Bu bölümün sonunda di-ekstrem uzaylar kategorisinin, didüzgün uzaylar kategorisinin dolu, yansımalı bir alt kategorisine izomorf olduğu gösterilmiştir. Sonuç olarak di-ekstrem uzaylar, tamamiyle sınırlı didüzgün uzayların bir karakterizasyonunu vermektedir. Bütün bu özellikler di-ekstrem uzayların, yakınlık uzaylarının dokuya uygun bir genellemesi olduğunu göstermektedir.

2. Önbilgiler

Bu bölüm, tez içerisinde ihtiyaç duyulan klasik yapıdaki yakınlık uzayları ve doku uzayları alanındaki tanım, teorem ve sonuçları içermektedir.

2.1. Klasik Yapıda Yakınlık Uzayları

Yakınlık uzayları ilk olarak 1951 yılında Efremovic tarafından [14] metrik uzayların bir genellemesi olarak tanımlanmıştır. Topolojik açıdan çok zengin olan bu yapı, sonraki yıllarda pek çok matematikçi tarafından incelenmiş ve bu alanda birçok araştırma yayınlanmıştır. Bu bölümdeki tanım ve sonuçlar için [17] nolu kaynak kullanılmıştır.

2.1.1. Tanım : X kümesinin kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlı ve

(P1) $A\eta B \Longrightarrow A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$,

(P2) $(A \cup B)\eta C \Longleftrightarrow A\eta C$ veya $B\eta C$,

(P3) $A\eta(B \cup C) \Longleftrightarrow A\eta B$ veya $A\eta C$,

(P4) $A \not\eta B \Longrightarrow A \not\eta E$ ve $(X - E) \not\eta B$ olacak biçimde bir $E \in \mathcal{P}(X)$ kümesi vardır.

(P5) $A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow A\eta B$

koşullarını sağlayan bir η ikili bağıntısına X üzerinde bir (Efremovic anlamında) *yakınımsı bağıntı (İng: quasi-proximity relation)* ve (X, η) ikilisine de *yakınımsı uzay* denir. Eğer η bağıntısı ek olarak $A\eta B \Longleftrightarrow B\eta A$ simetri koşulunu sağlıyorsa bu durumda η' ya bir *yakınlık bağıntısı (İng: proximity relation)* adı verilir. Eğer η yakınlık bağıntısı P1, ... , P5 koşullarına ek olarak

(P6) $\{x\}\eta\{y\} \Longrightarrow x = y$

koşulunu da sağlıyorsa η'ya *ayrılmış* veya *Hausdorff* yakınlık bağıntısı denir.

P4 aksiyomu literatürde güçlü (İng: strong) aksiyom olarak geçmekte ve yakınlık uzayları teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu aksiyom yakınlık bağıntılarının tamamiyle düzenli topolojilerle olan ilişkisinin gösterilebilmesinde temel bir öneme sahip olduğu için gereklidir.

2.1.2. Önerme : *(X, η) yakınımsı uzayı aşağıdaki özellikleri sağlar.*

(1) $A\eta B, A \subseteq C$ ve $B \subseteq D \Longrightarrow C\eta D$

(2) Eğer $A\eta\{x\}$, $B\eta\{x\}$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa $A\eta B$'dir

2.1.3. Tanım : (X, η) yakınlık uzayı ve $A \subseteq X$ olsun. $\text{kap}(A) = \{x \mid \{x\}\eta A\}$ kümesine A kümesinin *kapanışı* denir.

2.1.4. Teorem : *(X, η) yakınlık uzay olsun. Her $A \subseteq X$ için, kap: $\mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, kap$(A) = \{x \mid \{x\}\eta A\}$ biçimindeki dönüşüm bir Kurotowski kapanış operatörüdür. Bu kapanış operatörü ile elde edilen topolojiye η tarafından üretilen topoloji denir ve $\tau(\eta)$ ile gösterilir.*

2.1.5. Teorem : *(X, η) yakınlık uzayı olsun. Bu durumda $(S, \tau(\eta))$ tamamiyle düzenlidir. Ayrıca η ayrılmış ise $(X, \tau(\eta))$ topolojik uzayı T_2 (Hausdorff)'dir.*

2.1.6. Tanım : (X, τ) topolojik uzay ve (X, η) yakınlık uzay olsun. Eğer $\tau(\eta) = \tau$ oluyorsa τ ile η *uyumludur* denir.

2.1.7. Örnekler :

(1) Tıpkı herhangi bir X kümesi üzerinde ayrık (İng: discrete) ve aşikar (İng: trivial) topolojilerin tanımlandığı gibi ayrık ve aşikar yakınlık bağıntıları da tanımlanabilir. "$A\eta_d B \Longleftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$" ile tanımlanan yakınlık bağıntısına *ayrık yakınlık bağıntısı* denir. Bu yakınlığın ürettiği topoloji, ayrık topolojidir. Öte yandan "$A\eta_t B \Longleftrightarrow A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$" ile tanımlanan yakınlık bağıntısına *aşikar yakınlık bağıntısı* denir. Bu yakınlığın ürettiği topoloji, aşikar topolojidir.

(2) (X,d) bir pseudo metrik uzay olsun. "$A\eta B \Longleftrightarrow D(A,B) = inf\{d(a,b) \mid a \in A, b \in B\} = 0$" ile tanımlanan bağıntıya *d pseudo metriği tarafından üretilen yakınlık bağıntısı* denir ve $\eta(d)$ ile gösterilir. d ile $\eta(d)$'nin ürettiği topolojiler aynıdır. Ayrıca d bir metrik ise bu durumda $\eta(d)$ ayrılmıştır.

(3) $(X,\mathcal{U})$ bir (köşegensel) düzgün uzay olsun. "$A\eta B \Longleftrightarrow$ her $U \in \mathcal{U}$ için $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$" ile tanımlanan bağıntıya *$\mathcal{U}$ düzgünlüğü tarafından üretilen yakınlık bağıntısı* denir ve $\eta(\mathcal{U})$ ile gösterilir. Eğer $\mathcal{U}$ düzgünlüğü ayrılmış, yani $\bigcap\limits_{U\in\mathcal{U}} U = \Delta$ ise $\eta(\mathcal{U})$ da ayrılmıştır. $\mathcal{U}$ ile η'nın ürettiği topolojiler aynıdır.

(4) (X,τ) herhangi bir tamamiyle düzenli topolojik uzay olsun. "$A \not\eta B \Longleftrightarrow f(A) = 0$ ve $f(B) = 1$ olacak biçimde bir sürekli $f : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır" biçiminde tanımlı η, X üzerinde bir yakınlık bağıntısıdır ve $\tau(\eta) = \tau$ olur.

2.1.8. Önerme : *(X,η) yakınlık uzayı aşağıdaki özellikleri sağlar. Her $A,B \subseteq X$ için*

(1) $A \not\eta B \Longrightarrow kap(B) \subseteq X - A$

(2) $A \not\eta B \Longrightarrow B \subseteq$ iç$(X - A)$

(3) $A\eta B \Longleftrightarrow kap(A)\eta kap(B)$

2.1.9. Tanım : $(X,\eta_1),(Y,\eta_2)$ yakınlık uzayları ve $f : (X,\eta_1) \to (Y,\eta_2)$ bir fonksiyon olsun. Her $A,B \subseteq X, C,D \subseteq Y$ için eğer f,

(1) $A\eta_1 B \Longrightarrow f(A)\eta_2 f(B)$

(2) $C \not\eta_2 D \Longrightarrow f^{-1}(C) \not\eta_1 f^{-1}(D)$

denk koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna *yakınsal sürekli* dönüşüm denir.

2.1.10. Tanım : $(X,\mathcal{U}_1),(Y,\mathcal{U}_2)$ düzgün uzaylar ve $f : (X,\mathcal{U}_1) \to (Y,\mathcal{U}_2)$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu; her $V \in \mathcal{U}_2$ için $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}_1$ koşulunu sağlıyor ise f 'ye *düzgün süreklidir* denir.

2.1.11. Teorem: *(X, η_1), (Y, η_2) yakınlık uzayları ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f : (X, \eta_1) \to (Y, \eta_2)$ fonksiyonu yakınsal sürekli ise $f : (X, \tau(\eta_1)) \to (Y, \tau(\eta_2))$ süreklidir.*

2.1.12. Teorem: *$(X, \mathcal{U}_1)$, $(Y, \mathcal{U}_2)$ düzgün uzaylar ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $f : (X, \mathcal{U}_1) \to (Y, \mathcal{U}_2)$ fonksiyonu düzgün sürekli ise $f : (X, \eta(\mathcal{U}_1)) \to (Y, \eta(\mathcal{U}_2))$ yakınsal süreklidir.*

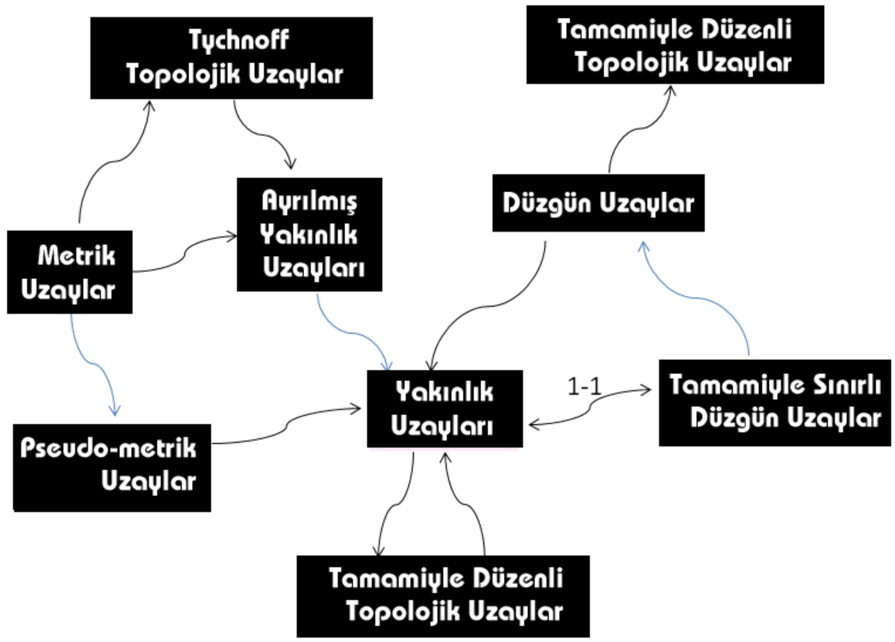
2.1.13. Tanım: $(X, \mathcal{U})$ bir düzgün uzay olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $\bigcup\{C \times C \mid C \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{U}$ olacak biçimde X'in sonlu bir $\mathcal{A}$ örtüsü varsa $\mathcal{U}$ düzgünlüğüne *tamamiyle sınırlı (İng: totally bounded)* denir.

2.1.14. Teorem: *$(X, \mathcal{U}_1)$ bir düzgün uzay ve $(Y, \mathcal{U}_2)$ tamamiyle sınırlı düzgün uzay olsun. Bu durumda $f : (X, \mathcal{U}_1) \to (Y, \mathcal{U}_2)$ düzgün süreklidir ancak ve ancak $f : (X, \eta(\mathcal{U}_1)) \to (Y, \eta(\mathcal{U}_2))$ yakınsal süreklidir.*

2.1.15. Teorem: *(X, η) bir yakınlık uzayı olsun. $B_k \not\eta X - A_k$, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = X$ olmak üzere $V = \bigcup\{A_k \times A_k \mid k = 1, ..., n\}$ biçimindeki V kümelerinden oluşan aile X üzerinde bir düzgünlük tabanıdır. Bu tabanın ürettiği $\mathcal{W}$ düzgünlüğü tamamiyle sınırlıdır. η ve $\mathcal{W}$ uyumludur yani $\eta(\mathcal{W}) = \eta$ olur. Ayrıca $\mathcal{W}$, η ile uyumlu olan düzgünlüklerin en küçüğüdür ve η ile uyumlu tek tamamiyle sınırlı düzgünlüktür.*

2.1.16. Sonuç: *Yakınlık uzayları kategorisi, düzgün uzaylar kategorisinin dolu, yansımalı bir altkategorisine izomorftur.*

Şekil 1'deki diyagram yakınlık uzaylarının metrik, topoloji ve düzgün uzaylarla olan ilişkisini özetlemektedir.



Şekil 1: Yakınlık uzayları ve diğer yapılar arasındaki ilişki

2.2. Doku Uzayları

Doku uzaylarının tanımı ilk olarak L.M. Brown tarafından [3, 4] 1990'lı yılların başında, belirtisiz kümelerin nokta-tabanlı bir karşılığı olarak, belirtisiz yapılar adıyla tanıtıldı. Daha sonra bu yapılar L. M. Brown ve R. Ertürk tarafından [7, 8] geliştirilerek doku uzayları adıyla verildi ve bundan sonra da bu alanda yapılan çalışmalarda bu isim kullanılmıştır. Yapılan bu araştırmalarda; tümleyen işleminden bağımsız matematiksel kavram ve yapıların bir genel çerçeveye sahip olduğu gözlenmiştir.

Bu bölümde doku uzayları hakkında bazı temel tanım ve sonuçlara, fazla ayrıntıya girmeden, değinilmiştir. Daha ayrıntılı bilgi için ilgili okuyucuya [3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11] kaynakları önerilmektedir. Bu kaynakların yanında doku uzayları teorisine giriş niteliğinde bir derleme sunan bir yüksek lisans çalışması da [24] mevcuttur. Ayrıca Latis teorisi, doku uzayları teorisinin anlaşılabilmesi için önemli bir yer teşkil etmektedir. Latis teorisiyle ilgili bu tez çalışmasında kullanılan tanımlar ve sonuçlar için [2, 13] kaynağı kullanılmıştır.

Önce doku uzayı tanımını vererek başlayalım.

2.2.1. Tanım : [3] S boştan farklı bir küme ve $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(S)$ olsun. Aşağıdaki koşulları gerçekleyen $\mathcal{S}$ 'ye S nin bir *dokulanması* ve $(S, \mathcal{S})$ ikilisine de bir *doku uzayı* ya da kısaca bir *dokudur* denir:

(1) $(\mathcal{S}, \subseteq)$, $\emptyset$ ve S yi içeren bir tam latis ve $\mathcal{S}$ deki *sup* ve *inf* işlemleri, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ latisindeki kesişim ve birleşim işlemleriyle şu biçimde ilişkilidir. Her I indeks kümesi için

$$\bigwedge_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} A_i, \;\; A_i \in \mathcal{S}, i \in I,$$

ve her I sonlu indeks kümesi için

$$\bigvee_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} A_i, \;\; A_i \in \mathcal{S}, i \in I,$$

(2) $\mathcal{S}$ tamamiyle dağılımlıdır. Yani Her I indeks kümesi, $i \in I$ ve J_i indeks kümesi için $j \in J_i$ ve $A^i_j \in \mathcal{S}$ olmak üzere

$$\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} A^i_j = \bigvee_{\gamma \in \prod\limits_{i \in I} J_i} \bigwedge_{i \in I} A^i_{\gamma(i)}$$

koşulunu sağlar,

(3) $\mathcal{S}$, S nin noktalarını ayırır. Yani her $s_1, s_2 \in S, s_1 \neq s_2$ için $s_1 \in A, s_2 \notin A$ veya $s_2 \in A, s_1 \notin A$ olacak biçimde $A \in \mathcal{S}$ vardır.

Genelde bir doku uzayı, klasik anlamdaki küme tümleyeni işlemi altında kapalı değildir. Bununla birlikte doku uzayları üzerinde genelleştirilmiş bir tümleyen işlemi tanımlanarak; doku uzaylarının bilinen genel yapılarla ilişkisi, tanımlanan bu tümleyen işlemi yardımıyla ortaya konulmaktadır.

2.2.2. Tanım : [3] Eğer $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonu

(1) Her $A \in \mathcal{S}$ için $\sigma^2(A) = A$,

(2) Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A \subseteq B \Longrightarrow \sigma(B) \subseteq \sigma(A)$

koşullarını gerçekliyorsa σ ya $\mathcal{S}$ üzerinde bir *tümleyen* işlemi ve $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ ya da *tümleyensel doku uzayı* denir. Tümleyen işleminin bire-bir ve örten olduğu açıktır.

2.2.3. Tanım : [**3**] $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve her $s \in S$ için $P_s = \bigcap\{A \in \mathcal{S} \mid s \in A\}$ olsun. P_s kümesine *nokta-küme (İng: point set)* veya kısaca *p-küme* denir.

Açıkça P_s, $\mathcal{S}$ nin s yi içeren en küçük elemanıdır.

Eğer $M \neq \emptyset$, $M \in \mathcal{S}$ kümesi $M \subseteq A \cup B$, $(\ \forall A, B \in \mathcal{S}) \Longrightarrow M \subseteq A$ veya $M \subseteq B$ özelliğini sağlıyorsa M kümesine *molekül* denir. Açıkça $\forall s \in S$ için P_s bir moleküldür. Eğer $\mathcal{S}$ dokulanmasının bütün molekülleri $\{P_s \mid s \in S\}$ ailesine aitse $(S, \mathcal{S})$ ye *basit doku* uzayı denir.

p-kümelerin duali olarak, *q-küme* olarak adlandırılan ve her $s \in S$ için $Q_s = \bigvee\{P_t \mid s \notin P_t\}$ kümesini tanımlamak sıklıkla kullanılacak olan dualite için uygun olacaktır. Ayrıca p-kümeler ile q-kümeler arasındaki temel ilişkileri betimlemek için $A \in \mathcal{S}$ kümesinin *çekirdeği* olarak adlandırılan yardımcı kavramı tanımlanmıştır.

$$A^\flat = core(A) = \bigcap\{\bigcup\{A_i \mid i \in I\} \mid \{A_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{S}, A = \bigvee\{A_i \mid i \in I\}\}$$

2.2.4. Teorem : [**9**] $(S, \mathcal{S})$ *bir doku uzayı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.*

(1) *Her* $s \in S, A \in \mathcal{S}$ *için,* $s \notin A \Longrightarrow\ A \subseteq Q_s \Longrightarrow s \notin A^\flat$.

(2) *Her* $A \in \mathcal{S}$ *için,* $A^\flat = \{s \in S \mid A \not\subseteq Q_s\}$.

(3) *Her* $i \in I$, $A_i \in \mathcal{S}$ *için,* $(\bigvee_{i \in I} A_i)^\flat = \bigcup_{i \in I} A_i^\flat$.

(4) *Her* $A \in \mathcal{S}$ *için* $A, A^\flat$ *yi içeren* $\mathcal{S}$ *nin en küçük elemanıdır.*

(5) *Her* $A, B \in \mathcal{S}$ *için,* $A \not\subseteq B \Longrightarrow A \not\subseteq Q_s$ *ve* $P_s \not\subseteq B$ *olacak biçimde bir* $s \in S$ *vardır.*

(6) *Her* $A \in \mathcal{S}$ *için,* $A = \bigcap\{Q_s \mid P_s \not\subseteq A\}$.

(7) *Her* $A \in \mathcal{S}$ *için,* $A = \bigvee\{P_s \mid A \not\subseteq Q_s\}$.

(6) ve (7)'den görülmektedir ki $\cap$ ve $\vee$, P_s ve Q_s, $P_s \not\subseteq A$ ve $A \not\subseteq Q_s$ arasında bir dualite vardır. Bu dualiteyi vurgulamak için $s \notin A$ yerine $P_s \not\subseteq A$ yazılmaktadır.

Bir doku uzayında keyfi supremumun, birleşimle çakışması zorunlu değildir. Bu durum $\mathcal{S}$ dokusunun birleşim altında kapalı olması durumunda geçerli olur. Supremum ve birleşim çakışıyorsa $\mathcal{S}$ dokusuna *sade* doku denir.

2.2.5. Teorem : [**9**] *Bir $(S, \mathcal{S})$ dokusu için aşağıdakiler denktir.*

(1) *$(S, \mathcal{S})$ sade dokudur.*

(2) *Her $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{S}$ için $\bigcup \mathcal{A} = \bigvee \mathcal{A}$ dir.*

(3) *$\mathcal{S}$, birleşim işlemi altında kapalıdır.*

(4) *Her $s \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_s$ 'dir.*

2.2.6. Önerme : [**9**] *$(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyensel doku uzayı olsun. Bu durumda her $A, B \in \mathcal{S}$ için,*

(1) $A = \bigvee \{\sigma(Q_s) \mid A \not\subseteq \sigma(P_s)\} = \bigcap \{\sigma(P_s) \mid \sigma(Q_s) \not\subseteq A\}$,

(2) *$A \not\subseteq B \Longrightarrow A \not\subseteq \sigma(P_s)$ ve $\sigma(Q_s) \not\subseteq B$ olacak biçimde bir $s \in S$ vardır.*

2.2.7. Örnekler : [6, 7]

(1) Açıkça $(X, \mathcal{P}(X))$ bir doku uzayıdır. Her $x \in X$ için, $P_x = \{x\}$, $Q_x = X \backslash \{x\}$ 'dir. $\mathcal{P}(X)$ in tüm molekülleri P_x biçimindedir. Dolayısıyla bu doku basittir. Her $x \in X$ için $P_x \not\subseteq Q_x$ olduğundan bu doku sadedir. Ayrıca, $\pi_X : Y \subseteq X \mapsto X \backslash Y$ fonksiyonu $(X, \mathcal{P}(X))$ üzerinde bir tümleyendir. $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ dokusu *tümleyensel ayrık doku* olarak adlandırılır. Bu doku, klasik küme yapısını temsil etmektedir.

(2) $L = (0, 1]$ ve $\mathcal{L} = \{(0, r] \mid r \in [0, 1]\}$ olmak üzere $(L, \mathcal{L})$ bir doku uzayıdır. Burada

$$(0, 1] = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 - \frac{1}{n}] \neq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (0, 1 - \frac{1}{n}] = (0, 1)$$

olduğundan bu dokuda sup ile birleşim her zaman eşit değildir. $r \in L$ için, $P_r = Q_r = (0, r]$ 'dir. Bu dokunun bütün molekülleri P_r biçiminde olduğundan bu doku basittir. Fakat $P_r \not\subseteq Q_r$ olmadığından bu doku sade değildir. Son olarak $\lambda((0, r]) = (0, 1 - r]$ fonksiyonu $(L, \mathcal{L})$ dokusu üzerinde doğal bir tümleyendir. Yani $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ bir tümleyensel, basit dokudur.

(3) $\mathbb{I} = [0, 1]$ ve $\mathcal{I} = \{[0, r] \mid r \in [0, 1]\} \bigcup \{[0, r) \mid r \in [0, 1]\}$ ise $(\mathbb{I}, \mathcal{I})$ bir doku uzayıdır. Bu doku uzayında sup ile birleşim çakışırlar. Dolayısı ile bu doku sadedir. Ayrıca $r \in \mathbb{I}$ için $P_r = [0, r]$, $r \in \mathbb{I} \backslash \{0\}$ için $Q_r = [0, r)$ ve $Q_0 = \emptyset$ 'dir. Her $r \in \mathbb{I} \backslash \{0\}$ için Q_r 'ler de moleküldür ve $Q_r \notin \{P_r \mid r \in \mathbb{I}\}$ olduğundan bu doku basit değildir. $r \in \mathbb{I}$ için, $\lambda[0, r] = [0, 1 - r)$ ve $\lambda[0, r) = [0, 1 - r]$ biçiminde bir tümleyen tanımlanabilir. $(\mathbb{I}, \mathcal{I}, \lambda)$ bir tümleyensel, sade dokudur. Klasik yapıdaki birim aralık yapısının özelliklerine benzer özellikler gösterdiği için $(\mathbb{I}, \mathcal{I}, \lambda)$ doku uzayları teorisinde önemli bir role sahiptir ve bu doku *birim aralık dokusu* olarak adlandırılmaktadır.

(4) $M = [0, 1]$, $\mathcal{M} = \{[0, r] \mid r \in [0, 1]\} \cup \{\emptyset\}$ ve $\sigma : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$; $\lambda([0, r]) = [0, 1 - r]$ olmak üzere $(M, \mathcal{M}, \sigma)$ bir tümleyensel doku uzayıdır. Bu doku uzayında supremum ve birleşim işlemlerinin çakışık olmadığı, yani bu dokunun sade olmadığı Örnekler 2.2.7(2)'dekine benzer biçimde gösterilebilir. Her $r \in M$ için $P_r = [0, r]$, $r \in M \backslash \{0\}$ için $Q_r = [0, r]$ ve $Q_0 = \emptyset$ 'dir. Açıkça $P_r \not\subseteq Q_r$ olmadığından sade değildir. Ayrıca $(M, \mathcal{M}, \sigma)$ dokusunun basit olduğu kolayca gösterilebilir.

(5) $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{b\}, \{b, c\}, S\}$, $S = \{a, b, c\}$ üzerinde bir basit dokudur. Açıkça $P_a = \{a, b\}$, $P_b = \{b\}$, $P_c = \{b, c\}$ dir. $Q_a = \{b, c\}$, $Q_b = \emptyset$, $Q_c = \{a, b\}$ 'dir. $(S, \mathcal{S})$ nin üzerinde bir tümleyen tanımlamak mümkün değildir.

(6) $\mathbb{L}$ bir Hutton cebiri ve $\mathbb{L}$ nin moleküllerinin kümesi L olsun. Her $a \in \mathbb{L}$ için $\varphi(a) = \{m \in L \mid m \leq a\}$, $\mathcal{L} = \{\varphi(a) \mid a \in \mathbb{L}\}$ ve $\lambda(\varphi(a)) = \varphi(a')$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ bir tümleyensel basit dokudur ve $\varphi : \mathbb{L} \to \mathcal{L}$, tümleyeni koruyan bir latis izomorfizmasıdır. $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ dokusuna $\mathbb{L}$ *Hutton cebirine karşılık gelen Hutton dokusu* denir.

Tersine her tümleyensel basit doku uzayı bu yolla uygun bir Hutton cebirinden elde edilebilir.

Klasik anlamda $X \times Y$ kartezyen çarpımı, X den Y ye olan bağıntılar ve fonksiyonlar için temel teşkil eder. Kartezyen çarpımı kavramının doku uzaylarına uyarlaması olan çarpım dokusu kavramını hatırlayalım.

I bir indeks kümesi, $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i\in I}$ doku uzayları ve $S = \prod\limits_{i\in I} S_i$, S_i lerin bilinen çarpım kümesi olsun. Her $k \in I$ ve $A \subseteq S_k$ için

$$Y_i = \begin{cases} A & \text{eğer } i = k \text{ ise,} \\ S_i & \text{eğer } i \neq k \text{ ise.} \end{cases}$$

olmak üzere

$$E(k, A) = \prod_{i\in I} Y_i$$

verilsin.

$$\mathcal{E} = \{\bigcup_{k\in K} E(k, L_k) \mid K \subseteq I, L_k \in \mathcal{S}_k\}$$

olarak tanımlansın ve $\mathcal{E}$ kümesinin elemanlarının keyfi kesişimlerinden oluşan küme, $\mathcal{S}$ ile gösterilsin. $(\mathcal{S}, \subseteq)$ bir tam latistir ve her K indeks kümesi, $A_\alpha \in \mathcal{S}$, $\alpha \in K$ için $\bigwedge\limits_{\alpha\in K} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in K} A_\alpha$ 'dir. Ayrıca

$$\bigvee_{\alpha\in K} A_\alpha = \bigcap\{Q \mid \bigcup_{\alpha\in K} A_\alpha \subseteq Q \in \mathcal{S}\} = \bigcap\{P \mid \bigcup_{\alpha\in K} A_\alpha \subseteq P \in \mathcal{E}\}$$

olduğu kolayca görülebilir.

2.2.8. Tanım : [7] Yukarıdaki biçimde oluşturulan $(S, \mathcal{S})$ ye $(S_i, \mathcal{S}_i)_{i\in I}$ doku uzaylarının *çarpım dokusudur* denir ve $\mathcal{S} = \bigotimes\limits_{i\in I} \mathcal{S}_i$ ile gösterilir.

Çarpım dokusunun p- ve q-kümeleri aşağıdaki biçimde karakterize edilmiştir.

2.2.9. Teorem : [7] *$(S = \prod\limits_{i\in I} S_i, \mathcal{S})$ çarpım dokusunda her $s = (s_i)_{i\in I}, t = (t_i)_{i\in I} \in S$ için aşağıdakiler geçerlidir.*

(1) $P_s = \prod\limits_{i\in I} P_{s_i} = \bigcap\limits_{i\in I} E(i, P_{s_i})$,

(2) $Q_s = \bigcup_{i \in I} E(i, Q_{s_i})$,

(3) $S^\flat = \prod_{i \in I} S_i^\flat$,

(4) $P_s \not\subseteq Q_t \Longleftrightarrow$ *Her* $i \in I$ *için* $P_{s_i} \not\subseteq Q_{t_i}$ *'dir.*

Şimdi dibağıntı ve difonksiyon tanımlarına geçebiliriz. Tanımın ayrıntılarına geçmeden önce, bu bölümde kullanılacak bazı notasyonlardan bahsetmek gereklidir. $(S, \mathcal{S})$ dokusunun p- ve q-kümeleri her zaman için $s \in S$ olmak üzere P_s ve Q_s ile, $(T, \mathcal{T})$ dokusununkiler ise $t \in T$ olmak üzere P_t ve Q_t ile gösterilmiştir. $(s, t) \in S \times T$ olmak üzere $\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ çarpım dokusunun p- ve q-kümeleri için $\overline{P}_{(s,t)}$ ve $\overline{Q}_{(s,t)}$, ve benzer şekilde $\mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{S}$ dokusununkiler için ise $\overline{P}_{(t,s)}$ ve $\overline{Q}_{(t,s)}$ sembolleri kullanılmıştır. Bu notasyondaki üst çizgi, olası karışıklığı gidermek amacıyla kullanılmaktadır. Yine karışıklığı gidermek için klasik anlamdaki bağıntılara *noktasal bağıntı*, ve klasik anlamdaki fonksiyonlara ise *noktasal fonksiyon* denilmiştir. Ayrıca aşağıdaki önerme oldukça faydalıdır.

2.2.10. Önerme : [9] *$\mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{T}$ ve $\mathcal{P}(T) \otimes \mathcal{S}$ çarpım dokuları için aşağıdaki özellikler geçerlidir.*

(1) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t')} \Longleftrightarrow P_t \not\subseteq Q_{t'}$

(2) $\overline{P}_{(t,s)} \not\subseteq \overline{Q}_{(t,s')} \Longleftrightarrow P_s \not\subseteq Q_{s'}$

2.2.11. Tanım : [9] $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları olsun.

(1) Aşağıdaki koşulları sağlayan $r \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{T}$ ye $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir *bağıntıdır* denir:

(R1) $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)},\ P_{s'} \not\subseteq Q_s \Longrightarrow r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}$

(R2) $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \Longrightarrow P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ve $r \not\subseteq \overline{Q}_{(s',t)}$ olacak biçimde bir $s' \in S$ vardır.

Özel olarak $(T, \mathcal{T}) = (S, \mathcal{S})$ ise bu durumda r ye $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir bağıntıdır denir.

(2) Aşağıdaki koşulları sağlayan $R \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{T}$ ye $(S, \mathcal{S})$ den $(T, \mathcal{T})$ ye bir *kobağıntıdır* denir:

(CR1) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R$, $P_s \not\subseteq Q_{s'} \Longrightarrow \overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$ 'dir.

(CR2) $\overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Longrightarrow P_{s'} \not\subseteq Q_s$ ve $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq R$ olacak biçimde bir $s' \in S$ vardır.

Özel olarak $(T, \mathcal{T}) = (S, \mathcal{S})$ ise bu durumda R ye $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir kobağıntıdır denir.

(3) r ve R, $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bağıntı ve kobağıntı olsun. Bu durumda (r, R) çiftine $(S, \mathcal{S})$ doku uzayından $(T, \mathcal{T})$ doku uzayına tanımlı bir *dibağıntıdır* denir ve $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ veya $(S, \mathcal{S}) \overset{(r,R)}{\to} (T, \mathcal{T})$ ile gösterilir. Eğer özel olarak $(T, \mathcal{T}) = (S, \mathcal{S})$ ise bu durumda (r, R) ye $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir dibağıntıdır denir. Ayrıca dibağıntılar ailesi üzerinde, (r_1, R_1) ve (r_2, R_2) dibağıntıları için "$(r_1, R_1) \sqsubseteq (r_2, R_2)$
$\Longleftrightarrow r_1 \subseteq r_2$ ve $R_2 \subseteq R_1$" biçiminde tanımlı, bir $\sqsubseteq$ kısmi sıralama bağıntısı bulunmaktadır.

Tanımda olduğu gibi genelde bağıntılar küçük harflerle, kobağıntılar ise büyük harflerle gösterilecektir.

2.2.12. Tanım: [9] $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olmak üzere $i_S = \bigvee\{\overline{P}_{(s,s)} \mid s \in S\}$ bağıntısına $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki *birim bağıntı*, $I_S = \bigcap\{\overline{Q}_{(s,s)} \mid s \in S^\flat\}$ kobağıntısına $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki *birim kobağıntı* ve (i_S, I_S) dibağıntısına $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki *birim dibağıntı* adı verilir.

2.2.13. Tanım: [9] $(S, \mathcal{S})$ ve $(T, \mathcal{T})$ doku uzayları olsun.

(1) $r : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir bağıntı ise

$$r^{\leftarrow} = \bigcap\{\overline{Q}_{(t,s)} \mid r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}\}$$

kobağıntısına, r nin *tersi* denir.

(2) $R : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir kobağıntı ise

$$R^{\leftarrow} = \bigvee \{\overline{P}_{(t,s)} \mid \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R\}$$

bağıntısına, R nin *tersi* denir.

(3) $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı ise $(r, R)^{\leftarrow} = (R^{\leftarrow}, r^{\leftarrow})$ biçiminde tanımlı $(r, R)^{\leftarrow}$ dibağıntısına (r, R) nin *tersi* denir.

Bu tanımların ayrık doku uzayında ne ifade etiğini sormak oldukça önemli ve ilginç bir sorudur. $\varphi \in \mathcal{P}(S \times T) = \mathcal{P}(S) \otimes \mathcal{P}(T)$ elemanını S den T ye bir noktasal bağıntı olarak adlandıracağız. Açıkça φ, $(S, \mathcal{P}(S))$ dokusundan $(T, \mathcal{P}(T))$ dokusuna hem bir bağıntı hem de kobağıntıdır. Her iki anlamda da $\varphi^{\leftarrow} = (\varphi^{-1})' = (\varphi')^{-1}$ 'dir. Burada $\varphi^{-1} = \{(t, s) \mid (s, t) \in \varphi\}$ bilinen noktasal ters bağıntıdır ve $'$ kümesel tümleyen işlemini göstermektedir. $(S, \mathcal{P}(S))$ üzerinde bir birim bağıntı $i_{(S,\mathcal{P}(S))} = \triangle_S$ ve birim ko bağıntı ise $I_{(S,\mathcal{P}(S))} = \triangle_S'$ olur.

2.2.14. Tanım : [9] $(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı olsun.

(1) $A \subseteq S$ olmak üzere

$$r^{\rightarrow} A = \bigcap \{Q_t \mid \forall s,\ r \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)} \Longrightarrow A \subseteq Q_s\} \in \mathcal{T}$$

kümesine r nin A-*kesiti* denir.

(2) $A \subseteq S$ olmak üzere

$$R^{\rightarrow} A = \bigvee \{P_t \mid \forall s,\ \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq R \Longrightarrow P_s \subseteq A\} \in \mathcal{T}$$

kümesine R nin A-*kesiti* denir.

(3) $B \subseteq T$ olsun. $r^{\leftarrow}$ kobağıntısının B-kesiti $(r^{\leftarrow})^{\rightarrow} B \in \mathcal{S}$ ye, r bağıntısının B-önkesiti denir ve $r^{\leftarrow} B$ ile gösterilir. Benzer olarak $R^{\leftarrow}$ bağıntısının B-kesiti $(R^{\leftarrow})^{\rightarrow} B \in \mathcal{S}$ ye, R kobağıntısının B-önkesiti denir ve $R^{\leftarrow} B$ ile gösterilir.

2.2.15. Tanım : [9] $(p, P) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ ve $(q, Q) : (T, \mathcal{T}) \to (U, \mathcal{U})$ dibağıntıları verilsin.

(1) p ile q bağıntılarının *bileşkesi*

$$q \circ p = \bigvee \{ \overline{P}_{(s,u)} \mid \exists t \in T,\ p \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)},\ q \not\subseteq \overline{Q}_{(t,u)} \}$$

biçiminde tanımlıdır.

(2) P ile Q kobağıntılarının *bileşkesi*

$$Q \circ P = \bigcap \{ \overline{Q}_{(s,u)} \mid \exists t \in T,\ \overline{P}_{(s,t)} \not\subseteq P,\ \overline{P}_{(t,u)} \not\subseteq Q \}$$

biçiminde tanımlıdır.

(3) (p, P) ve (q, Q) dibağıntılarının *bileşkesi*

$$(q, Q) \circ (p, P) = (q \circ p, Q \circ P).$$

biçiminde tanımlıdır.

Aşağıdaki önermede bileşke işleminin önemli özellikleri verilmiştir. Bu özellikler, noktasal fonksiyonlara karşılık gelen durumların doğal bir genellemesidir.

2.2.16. Önerme :[9]

(1) *$(r, R) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı, (i_S, I_S), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde ve (i_T, I_T), $(T, \mathcal{T})$ üzerinde birim dibağıntılar olsun. Bu durumda;*

$$(r, R) \circ (i_S, I_S) = (r, R) \quad \text{ve} \quad (i_T, I_T) \circ (r, R) = (r, R)$$

olur.

(2) *$(p, P) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ ve $(q, Q) : (T, \mathcal{T}) \to (U, \mathcal{U})$ dibağıntılar olsun. Bu durumda;*

$$[(q, Q) \circ (p, P)]^{\leftarrow} = (p, P)^{\leftarrow} \circ (q, Q)^{\leftarrow}$$

olur.

(3) $(p,P):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ *ve* $(q,Q):(T,\mathcal{T})\to(U,\mathcal{U})$ *dibağıntılar olsun. Bu durumda;*

- **(a)** *Her* $A\in\mathcal{S}$ *için* $(q\circ p)^{\to}A=q^{\to}(p^{\to})A$ *ve* $(Q\circ P)^{\to}A=Q^{\to}(P^{\to})A$ *'dir.*
- **(b)** *Her* $B\in\mathcal{U}$ *için* $(q\circ p)^{\leftarrow}B=p^{\leftarrow}q^{\leftarrow}B$ *ve* $(Q\circ P)^{\leftarrow}A=P^{\leftarrow}(Q^{\leftarrow})A$ *'dir.*

(4) *Bileşke işlemi, birleşme özelliğine sahiptir. Yani* $(p,P):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$, $(q,Q):(T,\mathcal{T})\to(U,\mathcal{U})$ *ve* $(r,R):(U,\mathcal{U})\to(V,\mathcal{V})$ *dibağıntılar olsun. Bu durumda;*

$$[(r,R)\circ(q,Q)]\circ(p,P)=(r,R)\circ[(q,Q)\circ(p,P)]$$

'dir.

(5) $(p_1,P_1),(p_2,P_2):(S,\mathcal{S})\to(S,\mathcal{S})$ *ve* $(q_1,Q_1),(q_2,Q_2):(T,\mathcal{T})\to(U,\mathcal{U})$ *dibağıntılar,* $(p_1,P_1)\sqsubseteq(p_2,P_2)$ *ve* $(q_1,Q_1)\sqsubseteq(q_2,Q_2)$ *olsun. Bu durumda* $(q_1,Q_1)\circ(p_1,P_1)\sqsubseteq(q_2,Q_2)\circ(q_1,Q_1)$ *olur.*

Her doku uzayı bir tümleyene sahip olmasa da pek çok önemli doku uzayı bir doğal tümleyene sahiptir. Bir doku uzayında tümleyenin var olması durumunda bağıntılar, kobağıntılar ve dibağıntıların tümleyenini aşağıdaki biçimde vermek mümkündür.

2.2.17. Önerme: [9] $(S,\mathcal{S},\sigma)$ *ve* $(T,\mathcal{T},\theta)$ *tümleyensel doku uzayları ve* $(r,R):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ *bir dibağıntı olsun. Bu durumda*

(1) $r'=\bigcap\{\overline{Q}_{(s,t)}\mid\exists u,v\in T,\ r\not\subseteq\overline{Q}_{(u,v)},\ \sigma(Q_s)\not\subseteq Q_u \text{ ve } P_v\not\subseteq\theta(P_t)\}$ *kümesi,* $(S,\mathcal{S},\sigma)$ *den* $(T,\mathcal{T},\theta)$ *ye bir kobağıntıdır.*

(2) $R'=\bigvee\{\overline{P}_{(s,t)}\mid\exists u,v\in T,\ \overline{P}_{(u,v)}\not\subseteq R,\ P_u\not\subseteq\sigma(P_s) \text{ ve } \theta(Q_t)\not\subseteq Q_v\}$ *kümesi,* $(S,\mathcal{S},\sigma)$ *den* $(T,\mathcal{T},\theta)$ *ye bir bağıntıdır.*

2.2.18. Tanım: [4] $(S,\mathcal{S})$ bir doku ve $(r,R):(S,\mathcal{S})\to(S,\mathcal{S})$ bir dibağıntı olsun. Eğer $(i,I)\sqsubseteq(r,R)$ oluyorsa (r,R) ye *yansımalı* dibağıntı denir. Eğer $(r,R)^{\leftarrow}=(r,R)$ oluyosa (r,R) dibağıntısına *simetrik* dibağıntı denir.

Noktasal fonksiyonlar, noktasal bağıntıların özel bir halidir. Daha açık bir ifadeyle; 1) her $x\in X$ için $(x,y)\in f$ olacak biçimde bir $y\in Y$ vardır, 2) her $x\in X$ için

$(x, y_1) \in f$ ve $(x, y_2) \in f \Longrightarrow y_1 = y_2$ koşullarını sağlayan bir $f \subseteq X \times Y$ noktasal bağıntısına X den Y ye bir noktasal fonksiyondur denir. Bu kavramın nokta-küme kavramına genelleştirilmesiyle difonksiyon tanımı elde edilir.

2.2.19. Tanım : [9] $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir dibağıntı olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan (f, F) dibağıntısına *difonksiyon* denir:

(DF1) $s, s' \in S$ için $P_s \not\subseteq Q_{s'}$ ise $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s',t)} \not\subseteq F$ olacak biçimde bir $t \in T$ vardır,

(DF2) $t, t' \in T$ ve $s \in S$ için $f \not\subseteq \overline{Q}_{(s,t)}$ ve $\overline{P}_{(s,t')} \not\subseteq F$ ise $P_{t'} \not\subseteq Q_t$ 'dir.

(i_S, I_S) dibağıntısı $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir difonksiyondur ve bu anlamda kullanıldığında *birim difonksiyon* olarak adlandırılır. $(X, \mathcal{P}(X))$, $(Y, \mathcal{P}(Y))$ ayrık dokuları özel durumunda (ϕ, φ) çifti bir difonksiyondur ancak ve ancak $\phi : X \to Y$ bir noktasal fonksiyondur ve $\varphi = \phi'$ 'dir.

2.2.20. Teorem : [9] $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ *dibağıntısı için aşağıdakiler denktir.*

(1) (f, F) *bir difonksiyondur,*

(2) *Aşağıdaki içermeler geçerlidir.*

(a) *Her* $A \in \mathcal{S}$ *için* $f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}A) \subseteq A \subseteq F^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A)$ *'dir,*

(b) *Her* $B \in \mathcal{T}$ *için* $f^{\rightarrow}(F^{\leftarrow}B) \subseteq B \subseteq F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}B)$ *'dir.*

(3) *Her* $B \in \mathcal{T}$ *için* $f^{\leftarrow}B = F^{\leftarrow}B$ *'dir.*

Ditopolojiler genelde birbirinden bağımsız açık ve kapalı küme aileleri ile tanımlanan ve ikili topolojilere benzeyen yapılardır.

2.2.21. Tanım : [6] $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

(1) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\tau \subseteq \mathcal{S}$ ailesine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *topoloji* ve τ nun elemanlarına topolojinin *açık kümeleridir* denir:

(T1) $S, \emptyset \in \tau$,

(T2) $G_1, G_2 \in \tau \Longrightarrow G_1 \cap G_2 \in \tau$,

(T3) $i \in I, G_i \in \tau \Longrightarrow \bigvee_{i \in I} G_i \in \tau$,

(2) Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $\kappa \subseteq \mathcal{S}$ ailesine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *kotopoloji* ve κ nın elemanlarına kotopolojinin *kapalı kümeleridir* denir:

(CT1) $S, \emptyset \in \kappa$,

(CT2) $K_1, K_2 \in \kappa \Longrightarrow K_1 \cup K_2 \in \kappa$,

(CT3) $i \in I, K_i \in \kappa \Longrightarrow \bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$.

(3) τ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir topoloji ve κ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir kotopoloji ise bu durumda (τ, κ) ikilisine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *ditopoloji* ve $(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ 'ya da bir *ditopolojik doku uzayıdır* denir.

Genelde ditopolojinin açık kümeleri ile kapalı kümeleri arasında bir ilişki olmak zorunda değildir. Bununla beraber σ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir tümleyen ve ditopoloji $\kappa = \sigma(\tau)$ koşulunu sağlıyorsa bu durumda (τ, κ) ditopolojisine $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir *tümleyensel ditopoloji* ve $(S, \mathcal{S}, \sigma, \tau, \kappa)$ ditopolojik doku uzayına ise bir *tümleyensel ditopolojik doku uzayı* denir.

2.2.22. Örnek : [6, 7]

(1) $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ tümleyensel ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyensel ditopolojisi ele alalım. Bu durumda τ, X üzerinde bilinen anlamda topoloji ve $\kappa = \pi(\tau) = \{F \subseteq X \mid \pi(F) = X \backslash F \in \tau\}$ ise, τ topolojisinin bilinen anlamda kapalı kümelerinden oluşur. Sonuç olarak $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde bir (τ, κ) tümleyensel ditopolojisi, bir noktasal topolojiye karşı gelir. Ayrıca (X, τ) bir noktasal topolojik uzay ise $\kappa = \{K \subseteq X \mid \pi_X(K) = X \backslash K \in \tau\}$ olmak üzere $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X, \tau, \kappa)$ bir tümleyensel ditopolojik doku uzayıdır.

(2) Şimdi $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ tümleyensel ayrık dokusu üzerinde tümleyensel olmak zorunda olmayan bir (τ, κ) ditopolojisi alalım. Bu ditopoloji, X üzerinde bir ikili topoloji (İng: bitopology) olarak düşünülebilir. Gerçekten topolojilerden biri τ

ve diğer topoloji de $\upsilon = \pi_X(\kappa) = \{H \subseteq X \mid \pi_X(H) = X \backslash H \in \kappa\}$ olarak alınırsa (τ, υ), X üzerinde bir ikili topoloji olur. Tersine X üzerinde bir (τ, υ) ikili topolojisi için, $(\tau, \kappa = \pi_X(\upsilon))$ olarak alınırsa (τ, κ), $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerinde tümleyensel olmak zorunda olmayan bir ditopoloji olur. Sonuç olarak $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ ayrık dokusu üzerindeki ditopolojiler, X üzerindeki ikili topolojilere bire-bir karşılık gelmektedir.

(3) $(L, \mathcal{L}, \lambda)$, $(\mathbb{L}, ')$ Hutton cebirine karşılık gelen tümleyensel basit doku ve T, $(\mathbb{L}, ')$ üzerinde Chang anlamında **[12]** bir *belirtisiz topoloji* olsun. Yani $T \subseteq \mathbb{L}$, (a) $0, 1 \in T$, (b) $a_1, a_2 \in T \implies a_1 \wedge a_2 \in T$, (c) $i \in I$, $a_i \in T \implies \bigvee_{i \in I} a_i \in T$ koşullarını sağlasın. T nin elemanlarına, belirtisiz topolojinin *açık* belirtisiz kümeleri ve $T' = \{a' \mid a \in T\}$ nin elemanlarına ise belirtisiz topolojinin *kapalı* belirtisiz kümeleri denir. Şimdi $\tau = \varphi(T)$, $\kappa = \varphi(T')$ olarak tanımlayalım. Bu durumda (τ, κ) 'nın $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ üzerinde tümleyensel bir ditopoloji olduğu kolayca görülebilir. Tersine $(L, \mathcal{L}, \lambda)$ üzerinde tanımlı her tümleyensel ditopolojiden bu yolla $(\mathbb{L}, ')$ üzerinde bir belirtisiz topoloji elde etmek mümkündür. Sonuç olarak basit tümleyensel dokuların üzerinde, tümleyensel ditopolojiler ile belirtisiz topolojiler bire-bir karşılık gelmektedirler.

(4) $(S, \mathcal{S})$ herhangi bir doku uzayı olsun. Açıkça $(S, \mathcal{S})$ üzerinde $\tau = \mathcal{S}$ *ayrık topoloji* ve $\kappa = \mathcal{S}$ *ayrık kotopoloji* olmak üzere (τ, κ) ikilisine *ayrık ditopoloji* denir.

(5) $(S, \mathcal{S})$ herhangi bir doku uzayı olsun. Açıkça $(S, \mathcal{S})$ üzerinde $\tau = \{\emptyset, S\}$ *aşikar (İng: trivial) topoloji* ve $\kappa = \{\emptyset, S\}$ *aşikar kotopoloji* olmak üzere (τ, κ) ikilisine *aşikar ditopoloji* denir.

(6) $(\mathbb{I}, \mathcal{I}, \lambda)$ dokusu 2.2.7(3)'deki biçimde tanımlanan birim aralık dokusu olsun. $\tau_{\mathbb{I}} = \{[0, r) \mid r \in [0, 1]\} \bigcup \{\mathbb{I}\}$ ve $\kappa_{\mathbb{I}} = \{[0, r] \mid r \in [0, 1]\} \bigcup \{\emptyset\}$ olarak tanımlayalım. Açıkça $(\tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$, $(\mathbb{I}, \mathcal{I})$ üzerinde bir ditopolojidir. Bu ditopoloji *birim aralık dokusu üzerindeki doğal ditopoloji* olarak adlandırılır.

Klasik yapıda topoloji ve kotopoloji iç ve kapanış operatörleri yardımıyla tanımlanabilmektedir. Benzer durum ditopolojiler için de geçerlidir.

2.2.23. Tanım : $(S, \mathcal{S})$ bir doku olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir iç: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonuna

(I1) iç$(S) = S$

(I2) iç$(A) \subseteq A$

(I3) iç$(A \cap B)$ =iç$(A)\cap$iç(B)

(I4) iç(iç(A)) =iç(A).

$(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *iç operatörüdür* denir. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir kap: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonuna

(C1) kap$(\emptyset) = \emptyset$

(C2) $A \subseteq$kap(A)

(C3) kap$(A \cup B)$ =kap$(A)\cup$kap(B)

(C4) kap(kap(A)) =kap(A).

$(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *kapanış operatörüdür* denir.

$\tau = \{G \in \mathcal{S} \mid G =$iç$(G)\}$ ailesinin $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir topoloji ve $\kappa = \{K \in \mathcal{S} \mid K =kap(K)\}$ ailesinin ise $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir kotopoloji olduğunu görmek kolaydır.

2.2.24. Tanım : [10] $(S_i, \mathcal{S}_i, \tau_i, \kappa_i)_{i=1,2}$ ditopolojik doku uzayları ve $(f, F) : (S_1, \mathcal{S}_1) \to (S_2, \mathcal{S}_2)$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda;

(1) Her $G \in \tau_2 \Longrightarrow F^{\leftarrow}G \in \tau_1$ koşulu sağlanıyorsa (f, F) difonksiyonuna *süreklidir* denir,

(2) Her $K \in \kappa_2 \Longrightarrow f^{\leftarrow}G \in \kappa_1$ koşulu sağlanıyorsa (f, F) difonksiyonuna *kosüreklidir* denir,

(3) Hem sürekli hem de kosürekli olan bir (f, F) difonksiyonuna *ikili süreklidir* denir.

2.2.25. Tanım : [11] (τ, κ), $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ditopoloji olsun.

(1) Eğer her $G \in \tau, G \not\subseteq Q_s$ için $P_s \subseteq f^{\leftarrow} P_0$ ve $F^{\leftarrow} Q_1 \subseteq G$ olacak biçimde bir $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa) \to (\mathbb{I}, \mathcal{I}, \tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ ikili sürekli difonksiyonu varsa (τ, κ) ditopolojisine *tamamiyle düzenli* denir.

(2) Eğer her $K \in \kappa, P_s \not\subseteq K$ için $K \subseteq f^{\leftarrow} P_0$ ve $F^{\leftarrow} Q_1 \subseteq Q_s$ olacak biçimde bir $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \tau, \kappa) \to (\mathbb{I}, \mathcal{I}, \tau_{\mathbb{I}}, \kappa_{\mathbb{I}})$ ikili sürekli difonksiyonu varsa (τ, κ) ditopolojisine *tamamiyle kodüzenli* denir.

(3) Eğer (τ, κ) hem tamamiyle düzenli hem de tamamiyle kodüzenli ise (τ, κ) ditopolojisine *tamamiyle ikili düzenli* denir.

Aşağıdaki teorem, belirli koşulları sağlayan bir noktasal fonksiyon ile uyumlu bir difonksiyonun elde edilebileceğini göstermektedir.

2.2.26. Teorem :[10] $(S, \mathcal{S})$, $(T, \mathcal{T})$ *doku uzayları ve* $\varphi : S \to T$ *bir noktasal fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) φ *aşağıdaki 3 koşulu sağlar,*

   (a) *Her* $B \in \mathcal{T}$ *için* $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{S}$,

   (b) *Her* $i \in I, B_i \in \mathcal{T}$ *için* $\varphi^{-1}(\bigvee_{i\in I} B_i) = \bigvee_{i\in I} \varphi^{-1}(B_i)$,

   (c) *Her* $B \in \mathcal{T}$ *ve* $s \in S$ *için* $B \not\subseteq Q_{\varphi(s)} \Longrightarrow \varphi^{-1}(B) \not\subseteq Q_s$.

(2) *Her* $s \in S$ *için,*

   (a) $P_{s'} \not\subseteq Q_s \Longrightarrow P_{\varphi(s')} \not\subseteq Q_{\varphi(s)}$,

   (b) *Her* $B \in \mathcal{T}$ *için* $P_{\varphi(s)} \not\subseteq B \Longrightarrow P_s \not\subseteq Q_v$ *ve* $P_{\varphi(v)} \not\subseteq B$ *olacak şekilde bir* $v \in S$ *vardır,*

   (c) *Her* $B \in \mathcal{T}$ *için* $B \not\subseteq Q_{\varphi(s)} \Longrightarrow P_v \not\subseteq Q_s$ *ve* $B \not\subseteq Q_{\varphi(v)}$ *olacak şekilde bir* $v \in S$ *vardır.*

(3) *Eğer* $f = \bigvee\{\overline{P}_{(s,\varphi(s))} \mid s \in S\}$ *ve* $F = \bigcap\{\overline{Q}_{(s,\varphi(s))} \mid s \in S\}$ *biçiminde tanımlanırsa bu durumda;*

(a) *$(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyondur,*

(b) *Her $B\in\mathcal{T}$ için $f^{\leftarrow}B=F^{\leftarrow}B=\varphi^{-1}(B)$ olur.*

$(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. $\theta_{(f,F)}=\theta:\mathcal{T}\to\mathcal{S}$, $\theta(B)=f^{\leftarrow}B=F^{\leftarrow}B$ dönüşümü keyfi kesişimi ve infumumu korur [10]. Aşağıdaki teorem bunun tersinin de geçerli olduğunu göstermektedir.

2.2.27. Teorem : [10] *Let $\theta:\mathcal{T}\to\mathcal{S}$ keyfi kesişimi ve infumumu koruyan bir dönüşüm olsun.*

$$f=\{P_{(s,t)}\mid \forall C\in\mathcal{T} \text{ için } P_u\subseteq\theta(C)\Longrightarrow P_v\subseteq C \text{ olacak biçimde } P_s\not\subseteq Q_u, P_v\not\subseteq Q_t \text{ vardır. }\},$$

$$F=\{Q_{(s,t)}\mid \forall C\in\mathcal{T} \text{ için } \theta(C)\subseteq Qu\Longrightarrow C\subseteq Q_v \text{ olacak biçimde } P_u\not\subseteq Q_s, P_t\not\subseteq Q_v \text{ vardır }\}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyondur ve $\theta=\theta_{(f,F)}$ olur.

2.2.28. Tanım : [10] $\alpha\in\Lambda,(S_\alpha,\mathcal{S}_\alpha,\delta_\alpha)$ doku uzayları, $S=\Pi S_\alpha$, $\mathcal{S}=\otimes\mathcal{S}_\alpha$ çarpım dokusu olsun. $\pi_\alpha=\bigvee\{\overline{P}_{(s,s_\alpha)}\mid s\in S\}$ ve $\Pi_\alpha=\bigcap\{\overline{Q}_{(s,s_\alpha)}\mid s\in S^{\flat}\}$ olmak üzere $(\pi_\alpha,\Pi_\alpha):(S,\mathcal{S})\to(S_\alpha,\mathcal{S}_\alpha)$ örten bir difonksiyondur. Bu difonksiyona α. *izdüşüm difonksiyonu* denir.

2.2.29. Sonuç : [10] *$\alpha\in\Lambda,(S_\alpha,\mathcal{S}_\alpha,\delta_\alpha)$ doku uzayları, $S=\Pi S_\alpha$, $\mathcal{S}=\otimes\mathcal{S}_\alpha$ çarpım dokusu olsun. Bu durumda her $\alpha\in\Lambda$, $t_\alpha\in S_\alpha$ ve her $s=(s_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\in S$ için;*

(1) $\pi_\alpha\not\subseteq Q_{(s,t_\alpha)}\Longleftrightarrow P_{s_\alpha}\not\subseteq Q_{t_\alpha}$ *'dir,*

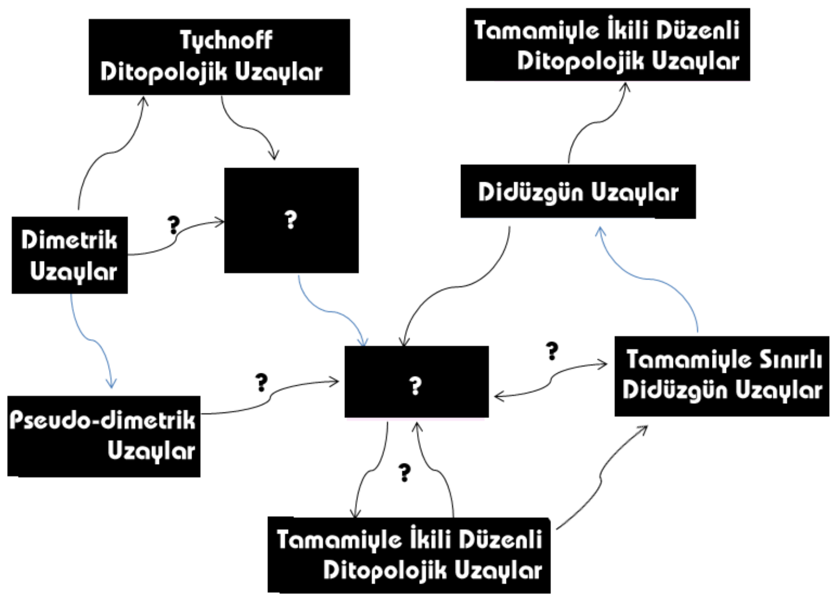
(2) $P_{(s,t_\alpha)}\not\subseteq\Pi_\alpha\Longleftrightarrow P_{t_\alpha}\not\subseteq Q_{s_\alpha}$ *'dir.*

2.2.30. Tanım : [5] $(S,\mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun. $\mathcal{S}\times\mathcal{S}$ nir bir altkümesine $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir *di-aile* denir. Eğer I nın her I_1,I_2 ayrışımı için (aşikar ayrışımlar da dahil olmak üzere) $\bigcap_{i\in I_1}B_i\subseteq\bigvee_{j\in I_2}A_j$ oluyorsa $\mathcal{C}=\{(A_i,B_i)\mid i\in I\}$ di-ailesine bir *di-örtü* denir.

3. Di-ekstrem Uzaylar

Zengin topolojik özellikleri nedeniyle yakınlık ve yakınımsı uzayları klasik ve belirtisiz kümelerde önemli bir yer teşkil etmekte ve yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bu nedenle bu kavramın doku uzaylarına uyarlanması ve dimetrik ve didüzgün uzaylarla olan ilişkisinin incelenmesinin önemli olduğu düşünülerek bu konu araştırılmıştır.

Şekil 2'deki diyagram bizi bu tez çalışmasına yönlendiren açık problemi özetlemektedir. Görüldüğü üzere doku uzaylarında, bölüm 2.1'deki şekil 1'deki diyagrama benzer bir diyagram mevcuttur.



Şekil 2: Ditopoloji, dimetrik ve didüzgün yapılar arasındaki ilişkiler

Bir S kümesi üzerindeki $\mathcal{S}$ dokulanması genellikle küme tümleyeni altında kapalı değildir. Klasik ve belirtisiz yakınlık uzayları tanımında yer alan P4 koşulu tümleyen içerdiğinden bu yapıların doku uzaylarına doğrudan uyarlanması uygun olmamaktadır. Bu problemin üstesinden gelmenin bir yolu belki P4 koşulu yerine daha zayıf bir koşul içeren genelleştirilmiş yakınlık uzaylarını ele almaktır. Fakat bu durumda elde edilen bu yapının düzgün uzaylar ve tamamiyle düzenli topolojilerle olan ilişkisi zayıflamaktadır. Bu nedenle P4 koşulunu değiştirerek elde edilen bir yaklaşım çok uygun görülmemiştir. Bunun yerine bu tez çalışmasında yakınlık uzaylarının alternatif bir tanımı ele alınmıştır.

(X, η) bir yakınımsı uzay olsun ve $A\overline{\delta}_\eta B \Longleftrightarrow A\eta X - B$ tanımlansın. Bu durumda $\overline{\delta} = \overline{\delta}_\eta$ bağıntısının aşağıdaki koşulları sağladığını görmek kolaydır.

(1) $A\overline{\delta}B \Longrightarrow A \neq \emptyset, B \neq S,$

(2) $(A \cup B)\overline{\delta}C \Longleftrightarrow A\overline{\delta}C$ veya $B\overline{\delta}C,$

(3) $A\overline{\delta}(B \cap C) \Longleftrightarrow A\overline{\delta}B$ veya $A\overline{\delta}C,$

(4) $A\overline{\not\delta}B \Longrightarrow A\overline{\not\delta}E$ ve $E\overline{\not\delta}B$ olacak şekilde bir $E \in \mathcal{S}$ vardır.

(5) $A\overline{\not\delta}B \Longrightarrow A \subseteq B.$

$\overline{\delta}_\eta$ bağıntısını, (İngilizce "extremity" sözcüğünden esinlenerek) *η bağıntısına karşılık gelen ekstremite* olarak adlandıracağız. Çünkü A kümesinin $X - B$ kümesine yakın olması bir anlamda A ile B nin birbirlerine göre ekstrem (uç) konumda olmaları anlamına gelmektedir. Tersine $\overline{\delta}$, $\mathcal{P}(X)$ üzerinde yukarıdaki (1), ..., (5) koşullarını sağlayan bir ikili bağıntı ise $A\eta B \Longleftrightarrow A\overline{\delta}X - B$ ile tanımlanan η bağıntısı X üzerinde bir yakınımsı bağıntı olur. Böylece X üzerindeki ekstremite bağıntılarının X üzerindeki yakınımsı bağıntılara birebir karşılık geldiği görülmektedir. Ayrıca $\overline{\delta}_\eta$ bağıntısının duali olarak $A\underline{\delta}_\eta B \Longleftrightarrow B\eta X - A$ tanımlanırsa bu iki bağıntı arasında $A\overline{\delta}_\eta B \Longleftrightarrow B\underline{\delta}_\eta A$ simetri ilişkisinin olduğu görülür.

Görüldüğü üzere bu alternatif tanım, koşullarında tümleyen içermemesi sayesinde doku uzaylarına uyarlamayı mümkün kılmaktadır.

3.1. Di-ekstrem Uzayların Temel Özellikleri

Bir yakınımsı bağıntının yukarda belirtilen biçimde elde edilen alternatif tanımındaki koşulların, keyfi bir doku üzerinde ele alınması ile aşağıdaki tanım elde edilmiştir.

3.1.1. Tanım : [25] $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $\overline{\delta}$, $\underline{\delta}$ $\mathcal{S}$ dokulanması üzerinde ikili bağıntılar olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$ ikilisine

(E1) $A\overline{\delta}B \Longrightarrow A \neq \emptyset, B \neq S,$

(E2) $(A \cup B)\overline{\delta}C \iff A\overline{\delta}C$ veya $B\overline{\delta}C$,

(E3) $A\overline{\delta}(B \cap C) \iff A\overline{\delta}B$ veya $A\overline{\delta}C$,

(E4) $A\overline{\not\delta}B \Longrightarrow A\overline{\not\delta}E$ ve $E\overline{\not\delta}B$ olacak şekilde bir $E \in \mathcal{S}$ vardır.

(E5) $A\overline{\not\delta}B \Longrightarrow A \subseteq B$.

(DE) $A\underline{\delta}B \iff B\overline{\delta}A$

(CE1) $A\underline{\delta}B \Longrightarrow A \neq S, B \neq \emptyset$,

(CE2) $A\underline{\delta}(B \cup C) \iff A\underline{\delta}B$ veya $A\underline{\delta}C$,

(CE3) $(A \cap B)\underline{\delta}C \iff A\underline{\delta}C$ veya $B\underline{\delta}C$,

(CE4) Eğer $A\underline{\not\delta}B \Longrightarrow A\underline{\not\delta}E$ ve $E\underline{\not\delta}B$ olacak şekilde bir $E \in \mathcal{S}$ vardır.

(CE5) $A\underline{\not\delta}B \Longrightarrow B \subseteq A$.

$(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *di-ekstremite* denir. Bu durumda $\overline{\delta}$ 'ya *ekstremite* ve $\underline{\delta}$ 'ya *ko-ekstremite* denir ve $(S, \mathcal{S}, \delta)$ ise *di-ekstrem* doku uzayı olarak adlandırılır.

Bir $\overline{\delta}$ ekstremitesi verildiğinde DE koşulu $\underline{\delta}$ 'yı tanımlamak için kullanılabileceğinden örnekleri verirken sadece $\overline{\delta}$ 'nin ekstremite koşullarını göstermek yeterli olacaktır. Bu simetrik durumun benzeri dimetrik ve difonksiyonel düzgün uzaylar için de geçerlidir. Ancak bir tür quasi di-ekstremite yapısı elde edilmek istendiğinde bu simetri koşulunun kaldırılması düşünülebilir.

Bir di-eksremite, klasik yapıdakine benzer olarak aşağıdaki temel özellikleri sağlamaktadır.

3.1.2. Önerme: **[25]** *$\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olsun. Bu durumda,*

(1) *$A\overline{\delta}B, A \subseteq C, D \subseteq B \Longrightarrow C\overline{\delta}D$.*

(2) *Eğer $A\overline{\delta}Q_s$ ve $P_s\overline{\delta}B$ olacak şekilde $s \in S$ varsa $A\overline{\delta}B$.*

(3) *$A\underline{\delta}B, C \subseteq A, B \subseteq D \Longrightarrow C\underline{\delta}D$.*

(4) *Eğer* $A\underline{\delta}P_s$ *ve* $Q_s\underline{\delta}B$ *olacak şekilde* $s \in S$ *varsa* $A\underline{\delta}B$.

(5) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \overline{\not\delta} \bigcap\limits_{j=1}^{m} B_j \Longleftrightarrow$ *Her* $i = 1, ..., n, j = 1, ..., m$ *için* $A_i \overline{\not\delta} B_j$.

Kanıt: (1) ve (3) tanım gereği açıktır ve (4), (2)'nin kanıtına benzer biçimde yapılabilir.

(2) Herhangi bir $s \in S$ için $A\overline{\delta}Q_s$ ve $P_s\overline{\delta}B$ olsun fakat $A\overline{\not\delta}B$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (E4) gereği $A\overline{\not\delta}E$ ve $E\overline{\not\delta}B$ olacak biçimde $E \in \mathcal{S}$ vardır. Öte yandan her $s \in S$ için ya $P_s \subseteq E$ ya da $P_s \not\subseteq E$ 'dir. Eğer $P_s \subseteq E$ ise bu durumda (1) gereği $E\overline{\delta}B$ olur ve çelişki elde edilir. Eğer $P_s \not\subseteq E$ ise bu durumda $E \subseteq Q_s$ 'dir ve (1) gereği $A\overline{\delta}E$ olur ve yine çelişki elde edilir. Yani $A\overline{\delta}Q_s$ ve $P_s\overline{\delta}B$ ise bu durumda $A\overline{\delta}B$ olmalıdır.

(5) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \overline{\not\delta} \bigcap\limits_{j=1}^{m} B_j$ olsun fakat bir s ve bir r için $A_s\overline{\delta}B_r$ olduğunu varsayalım. $A_s \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ ve $\bigcap\limits_{j=1}^{m} B_j \subseteq B_r$ olduğundan (1) gereği $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\overline{\delta} \bigcap\limits_{j=1}^{m} B_j$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Diğer yönü gösterelim. $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\overline{\delta} \bigcap\limits_{j=1}^{m} B_j$ olsun. Bu durumda (E2) ve (E3) koşulları gereği $A_s\overline{\delta}B_r$ olacak biçimde bir s, r vardır. Böylece istenilen gösterilmiş olur. ■

Aşağıdaki denkliklerin geçerli olduğunu görmek kolaydır.

3.1.3. Önerme : [25] $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S})$ *üzerinde bir di-ekstremite olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır.*

(1) $\overline{\delta}$, *E5 koşulunu sağlar* $\Longleftrightarrow (A \not\subseteq Q_s \Longrightarrow A\overline{\delta}Q_s)$ *'dir.*

(2) $\underline{\delta}$, *CE5 koşulunu sağlar* $\Longleftrightarrow (P_s \not\subseteq A \Longrightarrow A\underline{\delta}P_s)$ *'dir.*

Şimdi bir di-ekstremite tarafından üretilen ditopolojiyi inceleyelim. $A \in \mathcal{S}$, iç$(A) = \bigcap\{Q_s \mid P_s\overline{\delta}A\}$ ve kap$(A) = \bigvee\{P_s \mid Q_s\underline{\delta}A\}$ olarak tanımlayalım.

3.1.4. Önerme : [25] $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S})$ *üzerinde bir di-ekstremite ise iç*: $(S, \mathcal{S}) \to (S, \mathcal{S})$ *ve kap*: $(S, \mathcal{S}) \to (S, \mathcal{S})$ *fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(1) $A \not\subseteq$*iç*$(B) \Longrightarrow P_s\overline{\delta}B$ *ve* $A \not\subseteq Q_s$ *olacak biçimde bir* $s \in S$ *vardır,*

(2) $P_s\overline{\delta}B \Longrightarrow$iç$(B) \subseteq Q_s$,

(3) $A\overline{\not\delta}B \Longrightarrow A \subseteq$*iç*$(B)$.

(4) *kap*$(A) \not\subseteq B \Longrightarrow Q_s\underline{\delta}A$ *ve* $P_s \not\subseteq B$ *olacak biçimde bir* $s \in S$ *vardır,,*

(5) $Q_s\underline{\delta}B \Longrightarrow P_s \subseteq$*kap*$(B)$,

(6) $A\underline{\not\delta}B \Longrightarrow$*kap*$(B) \subseteq A$.

(7) $P_s\overline{\not\delta}B \Longrightarrow P_s \subseteq$*iç*$(B)$.

(8) $Q_s\underline{\not\delta}B \Longrightarrow$*kap*$(B) \subseteq Q_s$.

(9) *iç*$(A) = \bigvee\{P_s \mid P_s\overline{\not\delta}A\}$.

(10) *kap*$(A) = \bigcap\{Q_s \mid Q_s\underline{\not\delta}A\}$.

Kanıt: Sadece (3) ve (6)yı kanıtlayıp diğerlerini ilgili okuyucuya bırakacağız.

(3) $A\overline{\not\delta}B$ ve $A \not\subseteq$iç(B) olduğunu varsayalım. Bu durumda (1) gereği $P_s\overline{\delta}B$ ve $A \not\subseteq Q_s$ olacak biçimde bir $s \in S$ vardır. (E5) koşulundan $A\overline{\delta}Q_s$ ve önerme 3.1.2(2) gereği $A\overline{\delta}B$ olur. Bu ise bir çelişkidir.

(6) $A\underline{\not\delta}B$ ve kap$(B) \not\subseteq A$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4) gereği $Q_s\underline{\delta}B$ ve $P_s \not\subseteq A$ olacak biçimde bir $s \in S$ vardır. (CE5) koşulundan $A\underline{\delta}P_s$ ve önerme 3.1.2(4) gereği $A\underline{\delta}B$ olur. Bu ise bir çelişkidir. ■

3.1.5. Teorem : [25] $(S, \mathcal{S})$ *üzerindeki bir* $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$ *di-ekstremitesi için iç*: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, *iç*$(A) = \bigcap\{Q_s \mid P_s\overline{\delta}A\}$ *fonksiyonu iç operatörü aksiyomlarını sağlar ve kap*: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, *kap*$(A) = \bigvee\{P_s \mid Q_s\underline{\delta}A\}$ *fonksiyonu kapanış operatörü aksiyomlarını sağlar.*

Kanıt: Sadece iç operatörü aksiyomlarını gösterip kapanış operatörü aksiyomlarını ilgili okuyucuya bırakacağız.

(I1) Tanım gereği açıktır.

(I2) $P_s \not\subseteq A$ alalım. Bu durumda $P_s \not\subseteq Q_y$ ve $P_y \not\subseteq A$ olacak biçimde $y \in S$ vardır. (E5) gereği $P_y\overline{\delta}A$ ve tanım gereği iç$(A) \subseteq Q_y$. Dolayısıyla $P_s \not\subseteq$iç(A) olur. Sonuç olarak iç$(A) \subseteq A$ elde edilir.

(I3) $A \subseteq B \Longrightarrow$iç$(A)\subseteq$iç$(B)$ olduğunu göstermek kolaydır. Bu gözlemden iç$(A \cap B) \subseteq$iç$(A)\cap$iç(B) elde edilir. Ters kapsamayı göstermek için, $P_s \not\subseteq$iç$(A \cap B)$ alalım. Bu durumda $P_y \overline{\delta}(A \cap B)$ ve $P_s \not\subseteq Q_y$ olacak biçimde $y \in S$ vardır. (E3) gereği $P_y \overline{\delta} A$ veya $P_y \overline{\delta} B$ 'dir. Öyleyse iç$(A) \subseteq Q_y$ veya iç$(B) \subseteq Q_y$ olur. Dolayısıyla iç$(A)\cap$iç$(B) \subseteq Q_y$ elde edilir. Böylece $P_s \not\subseteq$iç$(A)\cap$iç(B) olur. Sonuç olarak iç$(A)\cap$iç$(B) =$iç$(A \cap B)$ 'dir.

(I4) (I2) gereği iç(iç$(A)) \subseteq$iç(A) olduğu açıktır. Şimdi iç$(A) \not\subseteq Q_x$ alalım. Bu durumda iç$(A) \not\subseteq Q_y$ ve $P_y \not\subseteq Q_x$ olacak biçimde $y \in S$ vardır. iç$(A) \not\subseteq Q_y$ olduğu için $P_y \overline{\not\delta} A$ ve (E4) gereği $P_y \overline{\not\delta} E$ ve $E \overline{\not\delta} A$ olacak biçimde $E \in \mathcal{S}$ vardır. Önerme 3.1.4(3) gereği $E \subseteq$iç(A) elde edilir. Önerme 3.1.2(1) gereği $P_y \overline{\not\delta}$iç$(A)$ olur. Tekrar 3.1.4(3) kullanılırsa, $P_y \subseteq$iç(iç$(A))$ elde edilir. Dolayısıyla iç(iç$(A)) \not\subseteq Q_x$, yani iç$(A) \subseteq$iç(iç$(A))$ olur. Sonuç olarak iç(iç$(A)) =$iç(A) elde edilir. $\blacksquare$

3.1.6. Tanım : [25] $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı ve $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olsun. Bu durumda $\tau(\delta) = \{G \in \mathcal{S} \mid G =$iç$(G)\}$ topolojisine δ *tarafından üretilen topoloji* denir. $\kappa(\delta) = \{F \in \mathcal{S} \mid F =kap(F)\}$ kotopolojisine δ *tarafından üretilen kotopoloji* denir. $(\tau(\delta), \kappa(\delta))$ ikilisine ise δ *tarafından üretilen ditopoloji* denir.

3.1.7. Teorem : [25] *$\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyensel dokusu üzerinde bi di-ekstremite olsun ve her $A, B \in \mathcal{S}$ için, $A\overline{\delta'}B \Longleftrightarrow \sigma(A)\overline{\delta}\sigma(B)$ ve $A\underline{\delta}'B \Longleftrightarrow \sigma(A)\underline{\delta}\sigma(B)$ ile ifade edilsin. Bu durumda $\delta' = \sigma(\delta) = (\sigma(\underline{\delta}), \sigma(\overline{\delta})) = (\underline{\delta}', \overline{\delta'})$ biçiminde tanımlı δ', $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde bir di-ekstremitedir.*

Kanıt: Sadece (E4) koşulunun sağlandığını gösterelim. Diğer koşullar benzer biçimde gösterilebilir. $A\underline{\not\delta}'B$ olsun. Bu durumda tanım gereği $\sigma(A)\underline{\not\delta}\sigma(B)$ olur. $\underline{\not\delta}$ (CE4) koşulunu sağladığından $\sigma(A)\underline{\not\delta}F$ ve $F\underline{\not\delta}\sigma(B)$ olacak biçimde bir $F \in \mathcal{S}$ vardır. Şimdi $\sigma : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, birebir ve örten olduğundan $E = \sigma(F) \in \mathcal{S}$ biçiminde bir $E \in \mathcal{S}$ alınırsa yine tanım gereği $A\underline{\not\delta}'E$ ve $E\underline{\not\delta}'B$ olur. $\blacksquare$

3.1.8. Tanım : [25] Teorem 3.1.7'de verilen δ' di-ekstremitisine δ 'nın *tümleyeni* denir. Eğer $\delta = \delta'$ oluyorsa bu durumda δ 'ya *tümleyensel* denir.

3.1.9. Teorem :[25] *δ , $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ üzerinde tümleyensel di-ekstremite olsun. Bu durumda δ 'nın ürettiği ditopoloji tümleyenseldir.*

Kanıt: $\delta = \delta'$ olsun ve $G \in \tau(\delta)$ alalım. $\sigma(G) \in \kappa$ olduğunu göstermek için kap$(\sigma(G)) \not\subseteq \sigma(G)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda Teorem 2.2.6(2) gereği kap$(\sigma(G)) \not\subseteq \sigma(P_s)$ ve $\sigma(Q_s) \not\subseteq \sigma(G)$ olacak biçimde $s \in S$ vardır. kap$(\sigma(G)) \not\subseteq \sigma(P_s)$ olmasından $\sigma(P_s)\underline{\delta}\sigma(G)$ elde edilir. Diğer taraftan $\sigma(Q_s) \not\subseteq \sigma(G) \Longrightarrow$iç$(G) = G \not\subseteq Q_s \Longrightarrow P_s \overline{\not\delta} G$ ve $\delta = \delta'$ varsayımı gereği $P_s \ \underline{\not\delta}' G$ veya denk olarak $\sigma(P_s)\underline{\not\delta}\sigma(G)$ elde edilir ki bu, $\sigma(P_s)\underline{\delta}\sigma(G)$ olması ile çelişir. Böylece kap$(\sigma(G)) = \sigma(G)$ veya denk olarak $\sigma(G) \in \kappa$ elde edilir.

$K \in \kappa$ ise $\sigma(K) \in \tau$ olduğu benzer biçimde gösterilebilir. ■

3.1.10. Örnekler : [25]

(1) X bir küme olsun ve η, X üzerinde klasik anlamda bir yakınlık bağıntısı olsun. $A\overline{\delta}B \iff A\eta(X - B)$ ve $A\underline{\delta}B \iff B\eta(X - A)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ üzerinde bir di-ekstremitedir. η tarafından üretilen topoloji ile δ tarafından üretilen topoloji aynıdır. Ayrıca $\kappa(\delta) = \{A \mid X - A \in \tau(\delta)\}$ olur. δ 'nın tümleyensel olduğu kolayca gösterilebilir. Tersine δ, $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ üzerinde herhangi bir tümleyensel di-ekstremite olsun. Bu durumda $A\eta B \iff A\overline{\delta}(X - B) \iff B\underline{\delta}(X - A)$ ile tanımlanan η, X üzerinde bir yakınlık bağıntısıdır. Ayrıca $\tau(\eta) = \tau(\delta)$ ve $\kappa(\delta) = \{A \mid (X - A) \in \tau(\delta)\}$ olur. Böylece $(X, \mathcal{P}(X), \pi_X)$ üzerinde tümleyensel di-ekstremitelerin, X üzerindeki yakınlık bağıntılarına birebir karşılık geldiği ve di-ekstremitelerin yakınlık kavramının genelleştirilmiş ifadesi olduğu görülür.

(2) $(S, \mathcal{S})$ bir doku olsun. $A\overline{\delta}B \iff A \not\subseteq B$ biçiminde tanımlı $\overline{\delta}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde *ayrık ekstremite* ve $A\underline{\delta}B \iff B \not\subseteq A$ biçiminde tanımlı $\underline{\delta}$ $(S, \mathcal{S})$ üzerinde *ayrık ko-ekstremite* olarak adlandırılır. $\tau(\delta)$ ve $\kappa(\delta)$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde sırasıyla ayrık topoloji ve ayrık kotopolojidir.

(3) $(S, \mathcal{S})$ bir doku olsun. $A\overline{\delta}B \iff A \neq \emptyset, B \neq S$ biçiminde tanımlı $\overline{\delta}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde *aşikar ekstremite* ve $A\underline{\delta}B \iff B \neq \emptyset, A \neq S$ biçiminde tanımlı $\underline{\delta}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde *aşikar ko-ekstremite* olarak adlandırılır. $\tau(\delta)$ ve $\kappa(\delta)$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde sırasıyla aşikar topoloji ve aşikar kotopolojidir.

(4) $(S, \mathcal{S})$, örnek 2.2.7(5)'daki doku olsun. Her $A, B \in \mathcal{S}$ için, $\emptyset \overline{\not\delta} B$, $A \overline{\not\delta} S$, $\{b\} \overline{\not\delta} \{b, c\}$ ve $\{b, c\} \overline{\not\delta} \{b, c\}$ tanımlayalım ve bunlar haricindeki diğer çiftler bağıntılı olmasın. Bu durumda $\overline{\delta}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir ekstremitedir ve $\tau(\delta) = \{\emptyset, \{b, c\}, S\}$ olur.

3.1.11. Önerme: [25] *$\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir di-ekstremite ve $(\tau(\delta), \kappa(\delta))$, δ tarafından üretilen ditopoloji olsun. Bu durumda aşağıdakiler geçerlidir:*

(1) $A \overline{\delta} B \iff A \overline{\delta}$iç$(B)$.

(2) $A \underline{\delta} B \iff A \underline{\delta}$*kap*$(B)$.

Kanıt: Sadece (1)'i kanıtlayıp diğerini ilgili okuyucuya bırakacağız.

(1) iç$(B) \subseteq B$ olduğu için önerme 3.1.2(1) gereği bir yön açıktır. Diğer yönü gösterelim. $A \overline{\not\delta} B$ olsun. Bu durumda $A \overline{\not\delta} E$ ve $E \overline{\not\delta} B$ olacak biçimde $E \in \mathcal{S}$ vardır. 3.1.4(3) gereği $E \subseteq$iç(B) olur ve önerme 3.1.2(1)'den $A \overline{\not\delta}$iç(B) elde edilir. ■

3.1.12. Tanım: $(S, \mathcal{S}, \delta_1 = (\overline{\delta}_1, \underline{\delta}_1))$, $(S, \mathcal{S}, \delta_2 = (\overline{\delta}_2, \underline{\delta}_2))$ di-ekstrem doku uzayları olsun. Bu durumda

$$\overline{\delta}_1 < \overline{\delta}_2 \iff A \overline{\delta}_2 B \Longrightarrow A \overline{\delta}_1 B$$

$$\underline{\delta}_1 < \underline{\delta}_2 \iff A \underline{\delta}_2 B \Longrightarrow A \underline{\delta}_1 B$$

$$\delta_1 < \delta_2 \iff \overline{\delta}_1 < \overline{\delta}_2 \text{ ve } \underline{\delta}_1 < \underline{\delta}_2$$

olarak tanımlıdır. $\delta_1 < \delta_2$ ise δ_2*, δ_1'den daha incedir* veya δ_1*, δ_2'den daha kabadır* denir.

Aşağıdaki teorem daha ince bir di-ekstremitenin daha ince bir ditopoloji ürettiğini göstermektedir.

3.1.13. Teorem: *$(S, \mathcal{S}, \delta_1)$, $(S, \mathcal{S}, \delta_2)$ di-ekstrem doku uzayları ve $\delta_1 < \delta_2$ olsun. Bu durumda $\tau(\delta_1) \subseteq \tau(\delta_2)$ ve $\kappa(\delta_1) \subseteq \kappa(\delta_2)$ olur.*

Kanıt: $G \in \tau(\delta_1)$ olsun. $G \in \tau(\delta_2)$ olduğunu göstermek için $G \subseteq \text{iç}_{\delta_2}(G)$ olduğunu gösterelim. Bunun için $G \not\subseteq Q_s$ alalım. $G \not\subseteq Q_s$ ise $G \not\subseteq Q_t$ ve $P_t \not\subseteq Q_s$ olacak biçimde bir $t \in S$ vardır. $G \in \tau(\delta_1)$ yani $G = \text{iç}_{\delta_1}(G)$ olduğundan $P_t \overline{\not\delta}_1 G$ dir. δ_2, δ_1 'den daha ince olduğu için $P_t \overline{\not\delta}_2 G$ ve burdan $\text{iç}_{\delta_2}(G) \not\subseteq Q_t$ elde edilir. Öte yandan $P_t \not\subseteq Q_s$ olduğundan $Q_s \subseteq Q_t$ dir. Böylece $\text{iç}_{\delta_2}(G) \not\subseteq Q_s$ olur. Sonuç olarak $G \subseteq \text{iç}_{\delta_2}(G)$ yani $G \in \tau(\delta_2)$ 'dir.

$\kappa(\delta_1) \subseteq \kappa(\delta_2)$ olduğu da benzer biçimde gösterilebilir. ■

Aşağıdaki tanım klasik anlamda yakınsal sürekliliğin doğal bir genellemesidir.

3.1.14. Tanım :[25] $(S, \mathcal{S}, \delta_1)$ ve $(T, \mathcal{T}, \delta_2)$ di-ekstrem doku uzayları ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda:

(1) Eğer her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A\overline{\delta}_1 B \Longrightarrow f^{\to}A\overline{\delta}_2 F^{\to}B$ oluyorsa bu durumda (f, F) difonksiyonuna *ekstrem süreklidir* denir.

(2) Eğer her $A, B \in \mathcal{S}$ için $A\underline{\delta}_1 B \Longrightarrow F^{\to}A\underline{\delta}_2 f^{\to}B$ oluyorsa bu durumda (f, F) difonksiyonuna *ekstrem kosüreklidir* denir.

(3) Eğer (f, F) hem ekstrem sürekli ve hem de kosürekli ise bu durumda (f, F) difonksiyonuna *ekstrem ikili süreklidir* denir.

(DE) simetri koşulu sayesinde ekstrem sürekli ve ekstrem kosürekli tanımlarının birbirine denk olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla bu denk koşullardan birini (dolayısıyla ikisini de) gerçekleyen bir difonksiyon aynı zamanda ekstrem ikili sürekli olmaktadır. Aşağıdaki önerme ekstrem ikili sürekliliğin başka bir denkliği olarak kanıtlarda kullanılacaktır.

3.1.15. Önerme :[25] *$(S, \mathcal{S}, \delta_1)$ ve $(T, \mathcal{T}, \delta_2)$ di-ekstrem doku uzayları ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (T, \mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda (f, F) ekstrem ikili süreklidir ancak ve ancak (f, F), aşağıdaki denk koşullardan birini (dolayısıyla ikisini) gerçekler.*

(1) *Her $C, D \in \mathcal{T}$ için $C\overline{\not\delta}_2 D \Longrightarrow f^{\leftarrow}C\overline{\not\delta}_1 f^{\leftarrow}D$.*

(2) *Her $C, D \in \mathcal{T}$ için $C\underline{\not\delta}_2 D \Longrightarrow F^{\leftarrow}C\underline{\not\delta}_1 F^{\leftarrow}D$.*

Kanıt:

(1) (f,F) ekstrem sürekli olsun ve $C\overline{\not\delta}_2D$ ve $f^{\leftarrow}C\overline{\delta}_1f^{\leftarrow}D$ olacak biçimde $C,D\in\mathcal{T}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda ekstrem sürekli olduğundan $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}C)\overline{\delta}_2F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}D)$ olur. Fakat $f^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}C)\subseteq C$ ve $D\subseteq F^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}D)$ olduğundan önerme 3.1.2(1) gereği $C\overline{\delta}_2D$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Şimdi her $C,D\in\mathcal{T}$ için $C\overline{\not\delta}_2D\Longrightarrow f^{\leftarrow}C\overline{\not\delta}_1f^{\leftarrow}D$ olsun ve $A\overline{\delta}_1B$ ve $f^{\rightarrow}A\overline{\not\delta}_2F^{\rightarrow}B$ olacak biçimde $A,B\in\mathcal{S}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda varsayım gereği $f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A)\overline{\not\delta}_1f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}B)$ olur. $A\subseteq f^{\leftarrow}(f^{\rightarrow}A), f^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}B)\subseteq B$ olduğundan önerme 3.1.2(1) gereği $A\overline{\not\delta}_1B$ elde edilir. Fakat bu, $A\overline{\delta}_1B$ olması ile çelişir .

(2) Kanıt (1)'e benzer olarak yapılabilir. ■

Aşağıdaki teorem ekstrem ikili süreklilik kavramı ile ikili süreklilik kavramının uyumlu olduğunu göstermektedir.

3.1.16. Teorem: [25] *δ_1 ve δ_2 sırasıyla $(S,\mathcal{S})$ ve $(T,\mathcal{T})$ üzerinde di-ekstremite ve $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ ekstrem ikili sürekli difonksiyon olsun. Bu durumda (f,F), δ_1 ve δ_2 di-ekstremiteleri tarafından üretilen ditopolojilere göre ikili sürekli olur.*

Kanıt: $G\in\tau(\delta_2)$ denk olarak $G=\text{iç}_{\delta_2}(G)$ olsun. $f^{\leftarrow}G\in\tau(\delta_1)$ olduğunu göstermek için, $\text{iç}_{\delta_1}(f^{\leftarrow}G)=f^{\leftarrow}G$ olduğunu gösterelim. $f^{\leftarrow}G\not\subseteq\text{iç}_{\delta_1}(f^{\leftarrow}G)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f^{\leftarrow}G\not\subseteq Q_s$ ve $P_s\not\subseteq\text{iç}_{\delta_1}(f^{\leftarrow}G)$ olacak biçimde bir $s\in S$ vardır. Önkesit tanımı gereği, $f^{\leftarrow}G=F^{\leftarrow}G\not\subseteq Q_s$ olduğundan $\overline{P}_{(s,t)}\not\subseteq F$ ve $G\not\subseteq Q_t$ olacak biçimde $t\in T$ vardır. $\overline{P}_{(s,t)}\not\subseteq F$ ve [9]'daki önerme 2.6 kullanılarsa $P_t\not\subseteq F^{\rightarrow}Q_s$ ve buradan da $Q_s\subseteq F^{\leftarrow}(F^{\rightarrow}Q_s)$ olduğundan $F^{\leftarrow}P_t\not\subseteq Q_s$ elde edilir ve böylece (E5) gereği $f^{\leftarrow}P_t\overline{\delta}_1Q_s$ olur. Diğer yandan $P_s\not\subseteq\text{iç}_{\delta_1}(f^{\leftarrow}G)$ ve önerme 3.1.4(3) kullanılırsa $P_s\overline{\delta}_1f^{\leftarrow}G$ elde edilir. Böylece önerme 3.1.2(2) gereği $f^{\leftarrow}P_t\overline{\delta}_1f^{\leftarrow}G$ olur. Diğer taraftan $G=\text{iç}_{\delta_2}(G)\not\subseteq Q_t$ olduğundan $P_t\overline{\not\delta}_2G$ 'dir. Dolayısıyla (f,F) ekstrem sürekli olduğundan $f^{\leftarrow}P_t\overline{\not\delta}_1f^{\leftarrow}G$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Kotopoloji kısmı benzer olarak yapılabilir. ■

3.2. Başlangıç Di-ekstremiteleri ve Çarpım Dokusu Üzerinde Çarpım Di-ekstrem Uzayları

Çarpım di-ekstremitesi izdüşüm difonksiyonlarını ekstrem ikili sürekli kılan en zayıf di-ekstremite olarak tanımlanmıştır.

3.2.1. Tanım: $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $A, B \in \mathcal{S}$ olsun. $\bigcup_{i\in I} A_i = A$ olacak biçimde $\{A_i \mid A_i \in \mathcal{S}, i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir *örtüsüdür* denir. $\bigcap_{i\in I} B_i = B$ olacak biçimde $\{B_i \mid B_i \in \mathcal{S}, i \in I\}$ ailesine B kümesinin bir *ko-örtüsüdür* denir.

3.2.2. Teorem: *$\alpha \in \Lambda, (S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \delta_\alpha)$ di-ekstrem doku uzayları, $(S, \mathcal{S})$ herhangi bir doku, her $\alpha \in \Lambda$ için $(f_\alpha, F_\alpha) : (S, \mathcal{S}) \to (S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ difonksiyon olsun. $A, B \in \mathcal{S}$ için*

$A\overline{\delta}B \iff$ A'nın her sonlu örtüsü $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$, B'nin her sonlu ko-örtüsü $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ ve her α için $f_\alpha^{\rightarrow} A_i \overline{\delta}_\alpha F_\alpha^{\rightarrow} B_j$ olacak şekilde bir i ve bir j vardır.

ve $\underline{\delta} = \overline{\delta}^{-1}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S})$ dokusu üzerinde (f_α, F_α) difonksiyonlarını ekstrem ikili sürekli kılan en zayıf di-ekstremitedir.

Kanıt: İlk olarak bu biçimde tanımlanan δ 'nın $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olduğunu görelim. (E1) koşulunun sağlandığı tanım gereği açıktır ve (E2), (E3) koşullarının sağlandığı kolayca gösterilebilir.

(E4) koşulunun sağlandığını görelim. $A\overline{\not\delta}B$ olsun. δ 'nın tanımı gereği her i, j için $\exists\alpha_{ij}$, $f_{\alpha_{ij}}^{\rightarrow} A_i \overline{\not\delta}_{\alpha_{ij}} F_{\alpha_{ij}}^{\rightarrow} B_j$ olacak biçimde A'nın bir $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ sonlu örtüsü ve B'nin bir $\{B_1, B_2, ..., B_m\}$ sonlu ko-örtüsü vardır. Her i, j için $\overline{\delta}_{\alpha_{ij}}$ bir ekstremite olduğundan $f_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} A_i \overline{\not\delta}_{\alpha_{ij}} E_{ij}$ ve $E_{ij} \overline{\not\delta}_{\alpha_{ij}} F_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} B_j$ olacak biçimde bir $E_{ij} \in \mathcal{S}$ ve α_{ij} vardır. $E_j = \bigcup_{i=1}^{n} f_{\alpha_{ij}}^{\leftarrow} E_{ij}$ ve $E = \bigcap_{j=1}^{m} E_j$ diyelim. Bu durumda $F_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} E_j = F_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow}(\bigcup_{i=1}^{n} f_{\alpha_{ij}}^{\leftarrow} E_{ij}) = F_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} f_{\alpha_{ij}}{}^{\leftarrow}(\bigcup_{i=1}^{n} E_{ij}) \supseteq E_{ij}$ elde edilir. $f_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} A_i \overline{\not\delta}_{\alpha_{ij}} E_{ij}$, $E_{ij} \subseteq F_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} E_j$ ve $\overline{\delta}_{\alpha_{ij}}$ bir ekstremite olduğundan $f_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} A_i \overline{\not\delta}_{\alpha_{ij}} F_{\alpha_{ij}}{}^{\rightarrow} E_j$ olur. Ayrıca açıkca $\{E1, ..., E_n\}$, E 'nin bir sonlu ko-örtüsüdür. Böylece δ 'nın tanımı gereği $A\overline{\not\delta}E$ olduğu görülür. $E\overline{\not\delta}B$ olduğu da benzer biçimde gösterilebilir.

(E5) koşulunun sağlandığını görelim. $A\overline{\not\delta}B$ olsun. δ 'nın tanımı gereği her i,j için $\exists\alpha_{ij}$, $f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i\overline{\not\delta}_{\alpha_{ij}}F^{\to}_{\alpha_{ij}}B_j$ olacak biçimde A'nın bir $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ sonlu örtüsü ve B'nin bir $\{B_1,B_2,...,B_m\}$ sonlu ko-örtüsü vardır. $A \not\subseteq B$ olduğunu varsayalım. Dolayısıyla $A_i \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq B_j$ olacak şekilde bir $s \in S$ ve i,j vardır. $A_i \not\subseteq Q_s$ olduğundan $f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i \not\subseteq F^{\to}_{\alpha_{ij}}Q_s$ olmalıdır. Aksi takdirde; eğer $f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i \subseteq F^{\to}_{\alpha_{ij}}Q_s$ olsaydı $A_i \subseteq f^{\leftarrow}_{\alpha_{ij}}f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i \subseteq f^{\leftarrow}_{\alpha_{ij}}F^{\to}_{\alpha_{ij}}Q_s \subseteq Q_s$ yani $A_i \subseteq Q_s$ olurdu. $f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i \not\subseteq F^{\to}_{\alpha_{ij}}Q_s$ ve $\overline{\delta}_{\alpha_{ij}}$ bir ekstremite olduğundan $f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i\overline{\delta}_{\alpha_{ij}}F^{\to}_{\alpha_{ij}}Q_s$ olur. Öte yandan $P_s \not\subseteq B_j$ olduğundan $B_j \subseteq Q_s$ dir ve dolayısıyla $F^{\to}_{\alpha_{ij}}B_j \subseteq F^{\to}_{\alpha_{ij}}Q_s$ olur. Böylece $f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i\overline{\delta}_{\alpha_{ij}}F^{\to}_{\alpha_{ij}}B_j$ olduğu görülür. Bu ise $f^{\to}_{\alpha_{ij}}A_i\overline{\not\delta}_{\alpha_{ij}}F^{\to}_{\alpha_{ij}}B_j$ olduğu gerçeği ile çelişir. Sonuç olarak $A \subseteq B$ olmalıdır. Böylece $\overline{\delta}$ 'nın ekstremite koşullarını sağladığını göstermiş oluruz.

Her $A,B \in \mathcal{S}$ için açıkça $\{A\}$, A 'nın bir sonlu örtüsü ve $\{B\}$, B nin bir sonlu-ko örtüsü olduğu gerçeği ve δ nın tanımı kullanılarak δ 'nın (f_α, F_α) izdüşüm difonksiyonlarını ekstrem ikili sürekli kıldığı kolayca gösterilebilir. Son olarak $\delta_2 = (\overline{\delta}_2, \underline{\delta}_2)$, (f_α, F_α) difonksiyonlarını ekstrem ikili sürekli kılan $(S,\mathcal{S})$ üzerinde başka bir di-ekstremite olsun. $A\overline{\delta}_2B \implies A\overline{\delta}B$ olduğunu gösterelim. A'nın herhangi bir $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ sonlu örtüsü ve B'nin herhangi bir $\{B_1,B_2,...,B_m\}$ sonlu ko-örtüsü alalım. $A\overline{\delta}_2B$ ve her α için (f_α, F_α) ekstrem sürekli olduğundan ${f_\alpha}^{\to}A\delta_\alpha{F_\alpha}^{\to}B$ dir. Dolayısıyla her α için ${f_\alpha}^{\to}A_i\delta_\alpha{F_\alpha}^{\to}B_j$ olacak şekilde i,j vardır. Böylece $A\overline{\delta}B$ elde edilir. Sonuç olarak δ, δ_2 'den daha zayıftır. ■

3.2.3. Tanım : $\alpha \in \Lambda, (S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \delta_\alpha)$ di-ekstrem doku uzayları, $(S,\mathcal{S})$ herhangi bir doku ve her $\alpha \in \Lambda$ için $(f_\alpha, F_\alpha) : (S,\mathcal{S}) \to (S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ difonksiyonlar olsun. Teorem 3.2.2'deki biçimde tanımlanan $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$ di-ekstremitesine (f_α, F_α) *difonksiyonlarının ürettiği başlangıç di-ekstremitesi(İng: initial di-extremity)* denir.

3.2.4. Tanım : $\alpha \in \Lambda, (S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \delta_\alpha)$ diekstrem doku uzayları, $S = \Pi S_\alpha$, $\mathcal{S} = \otimes\mathcal{S}_\alpha$ çarpım dokusu olsun. (π_α, Π_α) izdüşüm difonksiyonlarının ürettiği başlangıç di-ekstremitesine *çarpım di-ekstremitesi* denir.

Aşağıdaki sonuç çarpım di-ekstremitesi tanımının uygunluğunu göstermektedir.

3.2.5. Sonuç : *$\alpha \in \Lambda, (S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha, \delta_\alpha)$ di-ekstrem doku uzayları, $S = \Pi S_\alpha$, $\mathcal{S} = \otimes\mathcal{S}_\alpha$ çarpım dokusu, δ, çarpım di-ekstremitesi ve $(T, \mathcal{T}, \delta_T)$ herhangi bir di-ekstrem doku* *uzayı olsun. Bu durumda* $(f, F) : (T, \mathcal{T}) \to (S, \mathcal{S})$ *ekstrem süreklidir ancak ve ancak her* α *için* $(\pi_\alpha, \Pi_\alpha) \circ (f, F) : (T, \mathcal{T}) \to (S_\alpha, \mathcal{S}_\alpha)$ *bileşkesi ekstrem süreklidir.*

4. Di-ekstrem Uzaylar ve Diğer Yapılar Arasındaki İlişkiler

4.1. Di-ekstrem Uzaylar ve Belirtisiz Yakınımsı Uzaylar

Bu bölümde, Artico-Hutton anlamında belirtisiz yakınımsı uzaylar ile Hutton dokusu üzerinde tanımlı di-ekstremiteler arasındaki ilişki incelenecektir.

4.1.1. Tanım : [**1**] $\mathbb{L}$ bir Hutton cebiri, yani $\mathbb{L}$ tamamiyle dağılımlı, tam, sırayı tersine çeviren bir $'$ involütüne sahip bir latis olsun. Eğer $\mathbb{L}$ üzerinde η ikili bağıntısı her $a, b, c \in \mathbb{L}$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa;

(FP1) $0 \not\eta 1$,

(FP2) $(a \vee b)\eta c \Longleftrightarrow a\eta c$ veya $b\eta c$,

(FP3) $a\eta(b \vee c) \Longleftrightarrow a\eta b$ veya $a\eta c$,

(FP4) $a \not\eta b \Longrightarrow a \not\eta e$ ve $e' \not\eta b$ olacak biçimde bir $e \in \mathbb{L}$ vardır,

(FP5) $a \not\eta b \Longrightarrow a \leq b'$.

η bağıntısına (Artico-Hutton anlamında) *belirtisiz yakınımsı bağıntı* denir. Eğer η, yukarıdaki koşullara ek olarak $a\eta b \Longleftrightarrow b\eta a$ simetri koşulunu da sağlıyorsa bu durumda η bağıntısına (Artico-Hutton anlamında) *belirtisiz yakınlık bağıntısı* denir . Her $a \in \mathbb{L}$ için a noktasının içi iç$(a) = \vee\{b \mid b \not\eta a'\}$ olarak tanımlanırsa iç:$\mathbb{L} \to \mathbb{L}$ dönüşümü, iç operatörü özelliklerini sağlar ve böylece her belirtisiz yakınımsı bağıntı, $\mathbb{L}$ üzerinde bir $\tau(\eta)$ belirtisiz topolojisi üretir.

$(\mathbb{L}_1, \eta_1)$ ve $(\mathbb{L}_2, \eta_2)$ belirtisiz yakınımsı uzaylar ve $\theta : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ keyfi infumumu ve keyfi supremumu koruyan bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $c, d \in \mathbb{L}_2$ için, $c \not\eta_2 d \Longrightarrow \theta^{\leftarrow}(c) \not\eta_1 \theta^{\leftarrow}(d)$ koşulunu sağlıyorsa θ dönüşümüne *bir yakınsal sürekli dönüşüm* denir.

[1]'de tanımlanan belirtisiz yakınımsı bağıntının $\mathbb{L}^X$ üzerinde tanımlandığını not olarak düşmemiz gerekiyor. Bu bölümde belirtisiz yakınımsı bağıntılar daha genel ha-

liyle ele alınmıştır. Bununla beraber $\mathbb{L}^X$ de bir Hutton cebiri olduğundan $\mathbb{L}^X$ üzerinde tanımlı belirtisiz yakınımsı bağıntılar bu bölümün özel hali olacaktır.

[7]'de belirtildiği üzere her $\mathbb{L}$ Hutton cebirine karşılık bir $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}}, \mu_{\mathbb{L}})$ Hutton dokusu mevcuttur. Burada $M_{\mathbb{L}}$ kümesi $\mathbb{L}$ Hutton cebirinin moleküllerinin kümesi, $\widehat{a} = \{m \in M_{\mathbb{L}} \mid m \leq a\}$ olmak üzere $\mathcal{M}_{\mathbb{L}} = \{\widehat{a} \mid a \in \mathbb{L}\}$ ve $\mu_{\mathbb{L}}(\widehat{a}) = \widehat{a'}$ olarak tanımlıdır. $a \mapsto \widehat{a}$ dönüşümü $(\mathbb{L},')$ ve $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}}, \mu_{\mathbb{L}})$ arasında bir bir Hutton cebiri izomorfizmasıdır. Her $\phi : \mathbb{L} \to \mathbb{L}$ için $\widehat{\phi} : \mathcal{M}_{\mathbb{L}} \to \mathcal{M}_{\mathbb{L}}$, $\widehat{\phi}(\widehat{a}) = \widehat{\phi(a)}$ biçiminde tanımlıdır.

Aşağıdaki teorem, Hutton dokusu üzerinde tanımlı di-ekstremitelerin tam olarak Hutton cebirleri üzerindeki belirtisiz yakınımsı bağıntılara karşılık geldiğini göstermektedir.

4.1.2. Teorem: *η, $(\mathbb{L},')$ üzerinde bir belirtisiz yakınımsı bağıntı olsun. $\widehat{a}\overline{\delta}_\eta\widehat{b} \iff a\eta b'$ ve $\widehat{a}\underline{\delta}_\eta\widehat{b} \iff b'\eta a$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\delta_\eta = (\overline{\delta}_\eta, \underline{\delta}_\eta)$, $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}}, \mu_{\mathbb{L}})$ üzerinde bir di-ekstremitedir. Tersine δ, $(M_{\mathbb{L}}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}}, \mu_{\mathbb{L}})$ Hutton dokusu üzerinde bir di-ekstremite olsun. $a\eta b \iff \widehat{a}\overline{\delta}\mu_{\mathbb{L}}(\widehat{b})$ olarak tanımlayalım. Bu durumda η, $(\mathbb{L},')$ üzerinde bir belirtisiz yakınımsı bağıntı olur. Ayrıca eğer η yakınlık bağıntısı ise bu durumda δ_η tümleyenseldir ve tersine Hutton dokusu üzerinde tanımlı her tümleyensel di-ekstremite, bu yolla bir belirtisiz yakınlık bağıntısından elde edilebilir. Ayrıca her iki durumda da topolojiler uyuşmakta, yani iç$(\widehat{a}) = \widehat{\text{iç}(a)}$ olmaktadır.*

4.1.3. Tanım: Teorem 4.1.2'deki biçimde elde edilen di-ekstremiteye, *η belirtisiz yakınımsı bağıntısına karşılık gelen di-ekstremite* denir ve δ_η ile gösterilir.

Görülmektedir ki klasik yapıda ve belirtisiz kümeler yapısında yakınlık uzayları ile yakınımsı uzayların arasındaki fark simetri koşuludur fakat doku uzaylarında bu fark, di-ekstremitenin tümleyensel olup olmaması sorununa dönüşmektedir. Benzer durum didüzgünlükler için de gözlenmektedir. [21]

Kısa bir kategorik not düşerek bu bölümü tamamlayalım.

$(\mathbb{L}_1,'_1), (\mathbb{L}_2,'_2)$ olsun. [10]'daki önerme 4.1 gereği keyfi infumum ve supremumu koruyan bir $\theta : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{L}_1$ dönüşümüne karşılık her $b \in \mathbb{L}_2$ için $f^{\theta\leftarrow}(\widehat{b}) = \theta(b) = F^{\theta\leftarrow}(\widehat{b})$ koşulunu sağlayan $(f^\theta, F^\theta) : (M_{\mathbb{L}_1}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}_1}, \mu_{\mathbb{L}_1}) \to (M_{\mathbb{L}_2}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}_2}, \mu_{\mathbb{L}_2})$ difonksiyonu vardır. Ayrıca (f^θ, F^θ) tümleyenseldir ancak ve ancak θ involütü korur. Tersine (f, F) : $(M_{\mathbb{L}_1}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}_1}, \mu_{\mathbb{L}_1}) \to (M_{\mathbb{L}_2}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}_2}, \mu_{\mathbb{L}_2})$ herhangi bir (tümleyensel) difonksiyon olsun. Bu durumda $\widehat{\theta_{(f,F)}}(b) = f^{\leftarrow}\widehat{b} = F^{\leftarrow}\widehat{b}$ olarak tanımlı $\theta_{(f,F)} : (\mathbb{L}_2, '_2) \to (\mathbb{L}_1, '_1)$ infumumu ve supremumu (involütü) korur. Ayrıca $\theta = \theta_{(f_\theta, F_\theta)}$ ve $(f, F) = (f^{\theta_{(f,F)}}, F^{\theta_{(f,F)}})$ olmaktadır.

$$\mathfrak{T}((\mathbb{L}_1, '_1) \xrightarrow{\theta} (\mathbb{L}_2, '_2) = (M_{\mathbb{L}_1}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}_1}, \mu_{\mathbb{L}_1}) \xrightarrow{(f^\theta, F^\theta)} (M_{\mathbb{L}_2}, \mathcal{M}_{\mathbb{L}_2}, \mu_{\mathbb{L}_2})$$

olarak tanımlı $\mathfrak{T}$ funktoru $\mathbf{HutAlg^{op}}$ kategorisi ve **cdfSTex** kategorisi arasında bir izomorfizmadır. [10]

4.1.4. Tanım : $(\mathbb{L}_1, '_1, \eta_1), (\mathbb{L}_2, '_2, \eta_2)$ belirtisiz yakınımsı uzaylar ve $\theta : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{L}_1$ keyfi infumum ve supremumu koruyan bir dönüşüm olsun. Her $c, d \in \mathbb{L}_2$ için $c \not\eta_2 d \Longrightarrow \theta(c) \not\eta_1 \theta(d)$ koşulunu sağlayan θ dönüşümüne *yakınsal sürekli* $\mathbf{HutAlg^{op}}$*-morfizması* denir.

Nesneleri Hutton cebirleri üzerinde belirtisiz yakınımsı uzaylar ve morfizmaları yakınsal sürekli $\mathbf{HutAlg^{op}}$-morfizmaları olan kategoriyi $\mathbf{HutAlgQFP^{op}}$ ile gösterelim. Nesneleri Hutton dokuları üzerinde di-ekstremiteler ve morfizmaları ekstrem ikili sürekli tümleyensel difonksiyonlar olan kategoriyi ise **cdfSEx** ile gösterelim.

Teorem 4.1.2'de belirtildiği üzere Hutton cebirleri üzerinde tanımlı belirtisiz yakınımsı uzaylar ile Hutton dokuları üzerindeki di-esktremiteler arasında yani bu iki kategorinin nesneleri arasında birebir eşleme vardır. Bu iki kategorinin morfizmaları arasında birebir karşılık bulunduğu ise önerme 3.1.15 'den ve her $b \in \mathbb{L}_2$ için $f^{\theta\leftarrow}(\widehat{b}) = \theta(b) = F^{\theta\leftarrow}(\widehat{b})$ olması gerçeğinden görülmektedir. Sonuç olarak $\mathfrak{T}$ funktoru bu iki kategori arasında bir izomorfizmadır ve böylece bu iki kategorinin izomorfik olduğu sonucu elde edilir.

Benzer bir sonuç; nesneleri Hutton cebirleri üzerinde belirtisiz yakınlık uzayları ve morfizmaları yakınsal sürekli $\mathbf{HutAlg^{op}}$-morfizması olan $\mathbf{HutAlgFP^{op}}$ kategorisi ile nesneleri Hutton dokuları üzerinde tümleyensel di-ekstremiteler ve morfizmaları ekstrem ikili sürekli tümleyensel difonksiyonlar olan **cdfScEx** için de geçerlidir. Sonuç olarak Hutton dokusu üzerinde tanımlı (tümleyensel) di-ekstremiteler, Hutton cebirleri üzerinde tanımlı belirtisiz yakınımsıları (belirtisiz yakınlıkları) karakterize etmektedir.

Son olarak $L = \{0, 1\}$ alınması durumunda belirtisiz yakınımsı bağıntı tanımının Efremovic anlamında yakınımsı bağıntı tanımıyla örtüştüğünü not düşelim. Bu nedenle $L = \{0, 1\}$ alınırsa burada elde edilen sonuçlar, klasik duruma taşınmış olur. Bu taşıma işlemi doğrudan yapılabileceği için klasik durumla ilgili ayrıntılar atlanmıştır.

4.2. Dimetrik Uzaylar ve Di-ekstrem Uzaylar

Giriş bölümünde de bahsedildiği üzere klasik yapıdaki pseudo metrik ile yakınlık uzayı arasında önemli bir ilişki mevcuttur. Bir d pseudo metriğinin ürettiği η yakınlık bağıntısı iki küme arasındaki uzaklık kavramı ile ifade edilebilir. Benzer bir ilişki, pseudo dimetrik ile di-ekstremite arasında da mevcuttur. Önce pseudo dimetriğin tanımını hatırlayalım.

4.2.1. Tanım : **[18]** $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı, $\overline{\rho}, \underline{\rho} : S \times S \to [0, \infty)$ iki noktasal fonksiyon olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan $\rho = (\overline{\rho}, \underline{\rho})$ ikilisine $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir *pseudo dimetriktir* denir:

(M1) $\overline{\rho}(s, t) \leq \overline{\rho}(s, u) + \overline{\rho}(u, t) \ \forall s, u, t \in S$

(M2) $P_s \not\subseteq Q_t \Longrightarrow \overline{\rho}(s, t) = 0 \ \forall s, t \in S$

(DM) $\overline{\rho}(s, t) = \underline{\rho}(t, s) \ \forall s, t \in S$

(CM1) $\underline{\rho}(s, t) \leq \underline{\rho}(s, u) + \underline{\rho}(u, t) \ \forall s, u, t \in S$

(CM2) $P_t \not\subseteq Q_s \Longrightarrow \underline{\rho}(s, t) = 0 \ \forall s, t \in S$

Bu durumda $\overline{\rho}$, *pseudo metrik* ve $\underline{\rho}$ *pseudo kometrik* olarak adlandırılır.

Eğer ρ aşağıdaki koşulları saplayan bir pseudo dimetrik ise

(M3) $P_s \not\subseteq Q_u, \overline{\rho}(u, v) = 0, P_v \not\subseteq Q_t \Longrightarrow P_s \not\subseteq Q_t \forall s, t, u, v \in S$

(CM3) $P_u \not\subseteq Q_s, \underline{\rho}(u, v) = 0, P_t \not\subseteq Q_v \Longrightarrow P_t \not\subseteq Q_s \forall s, t, u, v \in S$

ρ'ya *dimetriktir* denir.

(DM) simetri koşulu $\underline{\rho}$ kometriğini tanımlamak için kullanılabileceğinden örneklerde sadece $\overline{\rho}$ 'nin metrik koşullarını sağladığını göstermek yeterli olacaktır. Dual yapının simetri ile tanımlanma durumu, di-ekstremite ve difonksiyonel düzgünlük yapılarında da mevcuttur.

4.2.2. Önerme : **[18]** *ρ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir pseudo dimetrik ve $s \in S^{\flat}$, $\epsilon > 0$ için*

$$N_\epsilon^\rho(s) = \bigvee\{P_t \mid \exists u \in S \text{ öyleki } P_s \not\subseteq Q_u, \overline{\rho}(u,t) < \epsilon\},$$

$$M_\epsilon^\rho(s) = \bigcap\{Q_t \mid \exists u \in S \text{ öyleki } P_u \not\subseteq Q_s, \underline{\rho}(u,t) < \epsilon\},$$

tanımları yapılsın. Bu durumda $(S, \mathcal{S})$ üzerinde $(\tau(\overline{\rho}), \kappa(\underline{\rho}))$ ditopolojisi için $\beta_\rho = \{N_\epsilon^\rho(s) \mid s \in S^\flat, \epsilon > 0\}$ bir taban ve $\gamma_\rho = \{M_\epsilon^\rho(s) \mid s \in S^\flat, \epsilon > 0\}$ ise bir kotabandır.

4.2.3. Teorem : *$(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı, $\rho = (\overline{\rho}, \underline{\rho})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir pseudo dimetrik olsun. Her $A, B \in \mathcal{S}$ için $\overline{D}(A,B) = \inf\{\overline{\rho}(s,t) \mid A \not\subseteq Q_s, P_t \not\subseteq B\}$, $\underline{D}(A,B) = \inf\{\underline{\rho}(s,t) \mid A \not\subseteq Q_s, P_t \not\subseteq B\}$ olmak üzere $A\overline{\delta}B \Longleftrightarrow \overline{D}(A,B) = 0$ ve $A\underline{\delta}B \Longleftrightarrow \underline{D}(A,B) = 0$ olarak tanımlansın. Bu durumda $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremitedir. Ayrıca δ ve ρ aynı ditopolojiyi üretirler.*

Kanıt: (DM) koşulundan dolayı $\overline{D}(A,B) = \underline{D}(B,A)$ olduğundan $A\overline{\delta}B \Longleftrightarrow B\underline{\delta}A$. Bu nedenle (DE) koşulu sağlanır ve sadece $\overline{\delta}$ 'nın bir ekstremite olduğunu göstermek yeterlidir.

E1, E2 ve E3 tanımdan açıkça görülür.

(E4)ü gösterelim. $A\overline{\not\delta}B$ olsun. Öyleyse $\overline{D}(A,B) = \epsilon > 0$ 'dir. $E = \bigvee\{P_s \mid \overline{D}(P_s, B) > \frac{\epsilon}{2}\}$ diyelim. İlk olarak $E\overline{\not\delta}B$ olduğunu yani $\overline{D}(E,B) > 0$ eşitsizliğini gösterelim. Bunun için $E \not\subseteq Q_s, P_t \not\subseteq B$ alalım. E 'nin ve $\overline{D}$ 'nin tanımından, Her $y, z \in S$ için $P_x \not\subseteq Q_s$ ve $\overline{\rho}(y,z) > \frac{\epsilon}{2}$, $P_x \not\subseteq Q_y, P_z \not\subseteq B$ olacak biçimde bir $x \in S$ vardır. Şimdi $P_t \not\subseteq B$ ve $P_x \not\subseteq Q_s$ olduğundan $\overline{\rho}(s,t) > \frac{\epsilon}{2}$ elde edilir. Böylece $\overline{D}(E,B) = \inf\{\overline{\rho}(s,t) \mid E \not\subseteq Q_s, P_z \not\subseteq B\} \geq \frac{\epsilon}{2} > 0$ olur. Sonuç olarak $E\overline{\not\delta}B$ 'dir. İkinci olarak $A\overline{\not\delta}E$ olduğunu görelim. $\overline{\rho}$ 'nin üçgen eşitsizliği özelliğinden dolayı her $s, t, y, z \in S$ için $\overline{\rho}(s,z) \leq \overline{\rho}(s,t) + \overline{\rho}(t,y) + \overline{\rho}(y,z)$ 'dir. Şimdilik s, t noktalarını sabit olarak düşünelim. $P_t \not\subseteq Q_y, P_z \not\subseteq B$ biçimindeki her y, z için her iki tarafın infumumunu alırsak $\inf\limits_{y,z}(\overline{\rho}(s,z) \leq \inf\limits_{y,z}\overline{\rho}(s,t) + \overline{\rho}(t,y) + \overline{\rho}(y,z))$ (*) elde edilir. (M2) gereği $\overline{\rho}(t,y) = 0$ 'dır. Bu nedenle $\inf\limits_{y,z}\overline{\rho}(s,z) \leq \overline{\rho}(s,t) + \inf\limits_{y,z}\overline{\rho}(y,z)$ olur. Diğer yandan E 'nin tanımı gereği eğer $P_t \not\subseteq E$ ise $\overline{D}(P_t, B) = \lambda_t \leq \frac{\epsilon}{2}$ 'dir. Böylece $\inf\limits_{y,z}\overline{\rho}(s,z) \leq \overline{\rho}(s,t) + \frac{\epsilon}{2}$ elde edilir. Şimdi $A \not\subseteq Q_s, P_t \not\subseteq E$ olacak biçimdeki her s, t için (*) 'ın her iki tarafının infumumunu alırsak $\inf\limits_{s,t}\inf\limits_{y,z}\overline{\rho}(s,z) \leq \inf\limits_{s,t}\overline{\rho}(s,t) + \frac{\epsilon}{2}$ elde edilir. Burdan da $\epsilon \leq \overline{D}(A,E) + \frac{\epsilon}{2}$ olduğu görülür. Sonuç olarak $\overline{D}(A,E) \neq 0$ yani $A\overline{\delta}E$ 'dir.

(E5)i gösterelim. $A\overline{\delta}B$ veya denk olarak $\overline{D}(A,B) \neq 0$ olsun. $A \not\subseteq B$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A \not\subseteq Q_s, P_s \not\subseteq Q_t, P_t \not\subseteq B$ olacak biçimde $s, t \in S$ vardır. Fakat bu durumda $P_s \not\subseteq Q_t \Longrightarrow \overline{\rho}(s,t) = 0 \Longrightarrow \overline{D}(A,B) = 0$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $A \subseteq B$ olmalıdır.

İndirgenen topolojilerin aynı olduğunu göstermek için β_ρ 'nin aynı zamanda $\tau(\delta)$ topolojisinin bir tabanı olduğunu göstermek yeterlidir. $U \in \tau(\delta)$ ve $U \not\subseteq Q_s$ olsun. İç operatörünün tanımından dolayı $P_s\overline{\delta}U$ veya denk olarak $\overline{D}(P_s, U) = \epsilon > 0$ olur. Şimdi $N_\epsilon^\rho(s) \not\subseteq Q_x$ olacak biçimde bir $x \in S$ alalım. $N_\epsilon^\rho(s)$ 'nin tanımından $P_s \not\subseteq Q_u, \overline{\rho}(u,t) < \epsilon$ ve $P_t \not\subseteq Q_x$ olacak biçimde $u, t \in S$ vardır. $\overline{\rho}(u,t) = \epsilon = \overline{D}(P_s, U) = inf\{\overline{\rho}(y,z) \mid P_s \not\subseteq Q_y, P_z \not\subseteq U\}$ ve $P_s \not\subseteq Q_u$ olduğundan $P_t \subseteq U$ bulunur. Sonuç olarak $U \not\subseteq Q_x$ elde edilir ve $N_\epsilon^\rho(s) \subseteq U$ olur.

Kotopolojilerin de aynı olduğu benzer biçimde gösterilebilir. ■

4.3. Didüzgün Uzaylar ve Di-ekstrem Uzaylar

Doku üzerinde didüzgün uzayların iki karakterizasyonu, dibağıntısal düzgünlükler ve di-örtüsel düzgünlükler [18]'de verilmiştir. Yine aynı makalede bu iki kavramın denk olduğu, yani dibağıntısal düzgünlük ile di-örtüsel düzgünlüklerin birebir eşlendiği gösterilmiştir. Bu bölümde dibağıntısal düzgünlük tanımı kullanılacaktır.

4.3.1. Tanım : [18] $(S, \mathcal{S})$ bir doku ve $\mathcal{U}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerindeki dibağıntıların bir ailesi olsun. Eğer $\mathcal{U}$ ailesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa

(U1) $\forall (u, U) \in \mathcal{U}$ için $(i, I) \sqsubseteq (u, U)$.

(U2) $(u,U) \in \mathcal{U}$ ve (r,R), $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir dibağıntı olmak üzere $(u,U) \sqsubseteq (r,R)$ ise $(r,R) \in \mathcal{U}$ 'dir.

(U3) $(u_1,U_1),(u_2,U_2) \in \mathcal{U} \Longrightarrow (u_1,U_1) \sqcap (u_2,U_2) \in \mathcal{U}$.

(U4) Her $(u,U) \in \mathcal{U}$ için $(r,R) \circ (r,R) \sqsubseteq (u,U)$ olacak biçimde bir $(r,R) \in \mathcal{U}$ vardır.

(U5) Her $(u,U) \in \mathcal{U}$ için $(r,R)^{\leftarrow} \sqsubseteq (u,U)$ olacak biçimde bir $(r,R) \in \mathcal{U}$ vardır.

$\mathcal{U}$ 'ya $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir *dibağıntısal düzgünlük* ve $(S,\mathcal{S},\mathcal{U})$ üçlüsüne de dibağıntısal düzgün doku uzayı denir. Dibağıntısal düzgünlük anlamında taban ve alttaban kavramları [18] nolu kaynakta ele alınmıştır. Bu kavramlar, klasikteki karşılıklarına paralellik arz ettiği için ayrıntılar atlanmıştır.

Kısalık olsun diye her $s \in S$ için $u^{\rightarrow}P_s$ ifadesini $u[s]$ ile ve $U^{\rightarrow}Q_s$ ifadesini $U[s]$ ile gösterelim.

4.3.2. Tanım : **[21]** $\mathcal{U}$, tümleyensel (S,S,σ) dokusu üzerinde bir dibağıntısal düzgünlük olsun. $\mathcal{U}' = \{(u,U)' | (u,U) \in \mathcal{U}\}$ ile tanımlanan $\mathcal{U}'$ dibağıntısal düzgünlüğe $\mathcal{U}$ *'nun tümleyeni* denir. Eğer $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ ise $\mathcal{U}$ *tümleyenseldir* denir.

$(S,\mathcal{S},\mathcal{U})$ bir dibağıntısal düzgün doku uzayı olsun. [18] nolu kaynakta belirtildiği üzere $\mathcal{U}$ dibağıntısal düzgünlüğü $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $(\tau_{\mathcal{U}},\kappa_{\mathcal{U}})$ ditopolojisi üretmektedir. $\mathcal{U}$'nun ürettiği bu ditopolojiye *düzgün ditopoloji* adı verilir. Aşağıdaki yardımcı teorem ile dibağıntısal düzgünlüğün ürettiği ditopoloji karakterize edilmiştir. (Bu konuda daha ayrıntılı bilgi [18, 21] nolu kaynaklardan edinilebilir.)

4.3.3. Yardımcı Teorem : **[18]** $(S,\mathcal{S},\mathcal{U})$ *bir dibağıntısal düzgün doku uzayı olsun.* $\mathcal{U}$ *'nun ürettiği* $(\tau_{\mathcal{U}},\kappa_{\mathcal{U}})$ *ditopolojisi için aşağıdaki ifadeler geçerlidir.*

(1) $G \in \tau_{\mathcal{U}} \Longleftrightarrow$ " $G \not\subseteq Q_s \Longrightarrow u[s] \subseteq G$ *olacak biçimde bir* $(u,U) \in \mathcal{U}$ *vardır.* "

(2) $K \in \kappa_{\mathcal{U}} \Longleftrightarrow$ " $P_s \not\subseteq \kappa \Longrightarrow K \subseteq U[s]$ *olacak biçimde bir* $(u,U) \in \mathcal{U}$ *vardır.* "

4.3.4. Önerme : **[18]** $\mathcal{U}$, $(S,\mathcal{S})$ *üzerinde bir dibağıntısal düzgünlük olsun.* $\mathcal{U}$*'nun simetrik dibağıntılardan oluşan bir tabanı vardır.*

4.3.5. Tanım : [18] $(S,\mathcal{S})$, $(T,\mathcal{T})$ dokuları verilsin ve $(r,R),(T,\mathcal{T})$ dokusu üzerinde bir dibağıntı ve $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda

$(f,F)^{-1}(r) = \bigvee\{\overline{P}_{(s_1,s_2)} \mid \exists P_{s_1} \not\subseteq Q_{s_1'};\ \overline{P}_{(s_1',t1)} \not\subseteq F, f \not\subseteq \overline{Q}_{(s_2,t_2)}, \forall t_1,t_2 \in T \Longrightarrow \overline{P}_{(t_1,t_2)} \subseteq r\}$

$(f,F)^{-1}(R) = \bigcap\{\overline{Q}_{(s_1,s_2)} \mid \exists P_{s_1'} \not\subseteq Q_{s_1};\ f \not\subseteq \overline{Q}_{(s_1',t_1)}, \overline{P}_{(s_2,t_2)} \not\subseteq F, \forall t_1,t_2 \in T \Longrightarrow R \subseteq \overline{Q}_{(t_1,t_2)}\}$

$(f,F)^{-1}((r,R)) = ((f,F)^{-1}(r),(f,F)^{-1}(R))$

4.3.6. Tanım :[18] $\mathcal{U}$, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir dibağıntısal düzgünlük, $\mathcal{V}$, $(T,\mathcal{T})$ üzerinde bir dibağıntısal düzgünlük ve $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon olsun. Eğer $(v,V)\in\mathcal{V} \Longrightarrow (f,F)^{-1}(v,V)\in\mathcal{U}$ ise (f,F) difonksiyonuna *düzgün ikili süreklidir* denir.

4.3.7. Örnek : [18] $(\mathbb{I},\mathcal{I})$ birim aralık dokusu olsun. Her $\epsilon>0$ için $d_\epsilon=\{(r,s)\mid r,s\in\mathbb{I}, s<r+\epsilon\}$, $D_\epsilon=\{(r,s)\mid r,s\in\mathbb{I}, s\leq r-\epsilon\}$ ve $\mathcal{U}_{\mathbb{I}}=\{(d,D)\mid (d,D):(\mathbb{I},\mathcal{I})\to(\mathbb{I},\mathcal{I})$ bir dibağıntı ve $(d_\epsilon,D_\epsilon)\sqsubseteq(d,D)$ olacak biçimde $\epsilon>0$ vardır $\}$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{U}_{\mathbb{I}}$, $(\mathbb{I},\mathcal{I})$ üzerinde bir dibağıntısal düzgünlüktür. Bu düzgünlüğe $(\mathbb{I},\mathcal{I})$ üzerindeki *doğal dibağıntısal düzgünlük* adı verilir.

Klasik durumda olduğu gibi, didüzgün uzaylar doğal yoldan di-ekstremite üretirler.

4.3.8. Önerme : [25] *$\mathcal{U}$, $(S,\mathcal{S})$ dokusu üzerinde bir dibağıntısal düzgünlük olsun. $A\overline{\delta}B \Longleftrightarrow$ Her $(u,U)\in\mathcal{U}$ için $u^{\to}A\not\subseteq B$ ve $A\underline{\delta}B \Longleftrightarrow$ Her $(u,U)\in\mathcal{U}$ için $B\not\subseteq U^{\to}A$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\delta=(\overline{\delta},\underline{\delta})$, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremitedir.*

Kanıt: Sadece (E4) ve (DE) koşullarını kanıtlayacağız. (CE4), (E4)'e benzer olarak yapılabilir ve diğer aksiyomları görmek kolaydır.

(E4)ü göstermek için, $A\overline{\not\delta}B$ varsayalım . Bu durumda $u^{\to}A\subseteq B$ ve $(r,R)\circ(r,R)\sqsubseteq(u,U)$ olacak biçimde $(r,R),(u,U)\in\mathcal{U}$ vardır. $E=r^{\leftarrow}B$ olsun. Bu durumda $u^{\to}A\subseteq B$ olduğu için $r^{\leftarrow}(u^{\to}A)\subseteq r^{\leftarrow}B=E$ olur. r yansımalı olduğundan $u^{\to}A\subseteq r^{\leftarrow}(u^{\to}A)$ ve dolayısıyla $u^{\to}A\subseteq E$ olur. Böylece $A\overline{\not\delta}E$ olduğu görülür. Diğer taraftan [9]'daki yardımcı teorem 2.9(1) gereği $r^{\to}E=r^{\to}(r^{\leftarrow}B)\subseteq B$ olduğundan $E\overline{\not\delta}B$ elde edilir.

Şimdi (DE) aksiyomunun sağlandığını görelim. $A\overline{\delta}B$ veya denk olarak Her $(u,U) \in \mathcal{U}$ için $u^{\rightarrow}A \not\subseteq B$ olsun fakat $B\underline{\not\delta}A$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $A \subseteq R^{\rightarrow}B$ olacak biçimde bir $(r,R) \in \mathcal{U}$ vardır. Her iki tarafa $R^{\leftarrow}$ uygulanırsa, $R^{\leftarrow}A \subseteq R^{\leftarrow}(R^{\rightarrow}B)$ elde edilir ve böylece [9]'daki yardımcı teorem 2.9(2) gereği $R^{\leftarrow}R^{\rightarrow}B \subseteq B$ olur. Şimdi $(u,U) = (r,R)^{\leftarrow}$ seçilirse, $u^{\rightarrow}A \subseteq B$ elde edilir. Bu ise $A\overline{\delta}B$ oluşuyla çelişir. Sonuç olarak $A\overline{\delta}B \Longrightarrow B\underline{\delta}A$ 'dır. Diğer yön de benzer biçimde gösterilebilir. ■

4.3.9. Tanım: Önerme 4.3.8'da tanımlanan $(\overline{\delta},\underline{\delta})$ 'ye $\mathcal{U}$ *tarafından üretilen di-ekstremite* denir ve $\delta_{\mathcal{U}} = (\overline{\delta}_{\mathcal{U}},\underline{\delta}_{\mathcal{U}})$ ile gösterilir.

4.3.10. Önerme: *$(S,\mathcal{S},\mathcal{U})$ bir dibağıntısal düzgün doku uzayı, $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ onun tabanı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) $A\overline{\delta}_{\mathcal{U}}B$.

(2) *Her $(u,U) \in \mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ için $u^{\rightarrow}A \not\subseteq B$.*

Aşağıdaki önerme daha ince bir dibağıntısal düzgünlüğün daha ince bir di-ekstremite ürettiğini göstermektedir.

4.3.11. Teorem: *$(S,\mathcal{S},\mathcal{U}_1)$, $(S,\mathcal{S},\mathcal{U}_2)$ dibağıntısal düzgün doku uzayları ve $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ olsun. Bu durumda $\delta_{\mathcal{U}_1} < \delta_{\mathcal{U}_2}$ olur.*

Kanıt: $A\overline{\delta_{\mathcal{U}_1}}B$ alalım. Bu durumda $u^{\rightarrow}A \subseteq B$ olacak şekilde bir $(u,U) \in \mathcal{U}_1$ vardır. $\mathcal{U}_1 \subseteq \mathcal{U}_2$ olduğundan $(u,U) \in \mathcal{U}_2$ olur ve böylece $A\overline{\delta_{\mathcal{U}_2}}B$ elde edilir. Sonuç olarak $\delta_{\mathcal{U}_1} < \delta_{\mathcal{U}_2}$ dir. ■

4.3.12. Teorem: *$\mathcal{U}$, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir dibağıntısal düzgünlük ve $\delta = \delta_{\mathcal{U}}$ olsun. Bu durumda $\tau(\mathcal{U}) = \tau(\delta)$ ve $\kappa(\mathcal{U}) = \kappa(\delta)$ 'dır.*

Kanıt: $\tau(\mathcal{U}) = \tau(\delta)$ olduğunu göstermek için, önce $G \in \tau(\delta)$ ve $G \not\subseteq Q_s$ alalım. Bu durumda önerme 3.1.4(2) gereği $P_s\overline{\delta}G$ 'dir ve dolayısıyla $u^{\rightarrow}P_s \subseteq G$ olacak biçimde bir $(u,U) \in \mathcal{U}$ vardır. Bu nedenle yardımcı teorem 4.3.3(1) gereği $G \in \tau(\mathcal{U})$ olur. Şimdi $G \in \tau(\mathcal{U})$ alalım ve $G \not\subseteq$ iç(G) olduğunu varsayalım. Bu durumda $G \not\subseteq Q_s$ ve

$P_s \not\subseteq$iç(G) olacak biçimde bir $s \in S$ vardır. $G \not\subseteq Q_s$ ve $G \in \tau(\mathcal{U})$ olduğundan yardımcı teorem 4.3.3(1) gereği $u^{\rightarrow}P_s \subseteq G$ olacak biçimde $(u, U) \in \mathcal{U}$ vardır. Önerme 4.3.8 gereği $P_s \overline{\not\delta} G$ olur ve böylece önerme 3.1.4(3)'den $P_s \subseteq$iç(G) elde edilir. Fakat bu, $P_s \not\subseteq$iç(G) oluşuyla çelişir. Sonuçta $G =$iç(G) yani $G \in \tau(\delta)$ olur. Kotopoloji kısmı benzer biçimde gösterilebilir. ■

Aşağıdaki teorem düzgün ikili süreklilik kavramı ile ekstrem ikili süreklilik kavramının uyumlu olduğunu göstermektedir.

4.3.13. Teorem : $(S, \mathcal{S})$ *üzerinde,* $\mathcal{U}$ *bir dibağıntısal düzgünlük,* $\mathcal{V}$*,* $(T, \mathcal{T})$ *üzerinde bir dibağıntısal düzgünlük ve* $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \to (T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ *bir düzgün ikili sürekli difonksiyon olsun. Bu durumda* $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \delta_{\mathcal{U}}) \to (T, \mathcal{T}, \delta_{\mathcal{V}})$ *ekstrem ikili süreklidir.*

Kanıt: (f, F) düzgün ikili sürekli olsun ve (f, F) 'nin ekstrem ikili sürekli olduğunu göstermek için $C \ \overline{\not\delta}_{\mathcal{V}} D$ alalım. Bu durumda $r^{\rightarrow}C \subseteq D$ olacak biçimde bir $(r, R) \in \mathcal{V}$ vardır. $(u, U) = (f, F)^{-1}((r, R))$ olsun. (f, F) düzgün ikili sürekli olduğundan $(u, U) \in \mathcal{U}$ olur. Şimdi $u^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}C) \subseteq f^{\leftarrow}D$ olduğunu görelim.

$u^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}C) \not\subseteq f^{\leftarrow}D$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $u^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}C) \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq f^{\leftarrow}D$ olacak biçimde bir $s \in S$ vardır. $u^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}C) \not\subseteq Q_s$ olduğu için $u \not\subseteq \overline{Q}_{(s',s)}$, $f^{\leftarrow}C \not\subseteq Q_{s'}$ olacak biçimde bir $s' \in S$ vardır. $(f, F)^{-1}(r)$ 'nin tanımından $\overline{P}_{(s'_1,t_1)} \not\subseteq F, f \not\subseteq \overline{Q}_{(s_2,t_2)} \implies r \not\subseteq \overline{Q}_{(t_1,t_2)}$ $\forall\ t_1, t_2 \in T$ olacak biçimde $P_{s_2} \not\subseteq Q_s$, $P_{s'} \not\subseteq Q_{s'_1}$ koşullarını sağlayan $s'_1, s_2 \in S$ vardır. (*)

Öncelikle $f^{\leftarrow}C \not\subseteq Q_{s'}$ ve $P_{s'} \not\subseteq Q_{s'_1}$ olduğundan $f^{\leftarrow}C \not\subseteq Q_{s'_1}$ olur ve $f^{\leftarrow}C = F^{\leftarrow}C$ olduğu gerçeği kullanılırsa, $\exists t'_1 \in T, \overline{P}_{(s'_1,t'_1)} \not\subseteq F$ ve $C \not\subseteq Q_{t'_1}$ elde edilir. Böylece $P_{t'_1} \subseteq C \implies r^{\rightarrow}P_{t'_1} \subseteq r^{\rightarrow}C$ olur. İkinci olarak $P_s \not\subseteq f^{\leftarrow}D \implies P_{s_2} \not\subseteq f^{\leftarrow}D \implies \exists t'_2 \in T, f \not\subseteq \overline{Q}_{(s_2,t'_2)}$ ve $P_{t'_2} \not\subseteq D$ olur. Şimdi eğer (*)'da $t_1 = t'_1$ ve $t_2 = t'_2$ alınırsa, $r \not\subseteq \overline{Q}_{(t'_1,t'_2)}$ elde edilir. Bununla beraber $r \not\subseteq \overline{Q}_{(t'_1,t'_2)} \implies r^{\rightarrow}P_{t'_1} \not\subseteq Q_{t'_2} \implies P_{t'_2} \subseteq r^{\rightarrow}P_{t'_1}$. Fakat $r^{\rightarrow}P_{t'_1} \subseteq r^{\rightarrow}C$ olduğundan, $r^{\rightarrow}C \not\subseteq D$ elde edilir ki bu ise $r^{\rightarrow}C \subseteq D$ oluşuyla çelişmektedir. Bu nedenle $u^{\rightarrow}(f^{\leftarrow}C) \subseteq f^{\leftarrow}D$ olmalıdır. Sonuç olarak $f^{\leftarrow}C \ \overline{\not\delta}_{\mathcal{U}} f^{\leftarrow}D$ olduğu görülür. Dolayısıyla (f, F) ekstrem ikili süreklidir. ■

4.3.14. Teorem : *Tümleyensel dibağıntısal düzgünlüğün ürettiği di-ekstremite tümleyenseldir.*

Kanıt: $\mathcal{U}$, $(S, \mathcal{S}, \sigma)$ tümleyensel dokusu üzerinde bir didüzgünlük ve $\mathcal{U} = \mathcal{U}'$ olsun. $A\overline{\delta}B$ veya denk olarak $\forall (u, U) \in \mathcal{U}$ için, $u^{\to}A \not\subseteq B$ olduğunu varsayalım. $A\underline{\delta}'B$ olduğunu gösterelim. $(r, R) \in \mathcal{U}$ alalım ve $(u, U) = (r, R)'$ diyelim. Bu durumda [21]'deki önerme 2.2(i) gereği , $A\overline{\delta}B \implies u^{\to}A \not\subseteq B \implies \sigma(B) \not\subseteq \sigma(u^{\to}A) \implies \sigma(B) \not\subseteq (u')^{\to}\sigma(A) \implies \sigma(B) \not\subseteq U^{\to}\sigma(A) \implies \sigma(A)\underline{\delta}\sigma(B) \implies A\underline{\delta}'B$ olur. $A\underline{\delta}'B \implies A\overline{\delta}B$ olduğu da benzer biçimde gösterilebilir. ■

4.3.15. Örnek : $(\mathbb{I}, \mathcal{I})$ birim aralık dokusu olmak üzere örnek 4.3.7'de gösterildiği gibi $\mathcal{U}_{\mathbb{I}}$, bu doku üzerindeki doğal dibağıntısal düzgünlük olsun. Bu durumda örnek 4.3.7'de belirtilen bu dibağıntısal düzgünlüğe ait $\epsilon > 0$, (d_ϵ, D_ϵ) taban elemanları ve önerme 4.3.10 kullanarak bu düzgünlüğün ürettiği di-ekstremite elde edilebilir. Her $r_1, r_2 \in \mathbb{I}$ için

(i) $[0, r_1)\overline{\delta}_{\mathbb{I}}[0, r_2) \iff r_2 \leq r_1$ ve $r_1 \neq 0$.

(ii) $[0, r_1)\overline{\delta}_{\mathbb{I}}[0, r_2] \iff r_2 \leq r_1$ ve $r_2 \neq 1, r_1 \neq 0$.

(iii) $[0, r_1]\overline{\delta}_{\mathbb{I}}[0, r_2) \iff r_2 \leq r_1$.

(iv) $[0, r_1]\overline{\delta}_{\mathbb{I}}[0, r_2] \iff r_2 \leq r_1$ ve $r_2 \neq 1$.

ile tanımlanan $\overline{\delta}_{\mathbb{I}}$, $(\mathbb{I}, \mathcal{I})$ üzerinde bir ekstremite ve $\underline{\delta}_{\mathbb{I}} = \overline{\delta}_{\mathbb{I}}^{-1}$ ise $(\mathbb{I}, \mathcal{I})$ üzerinde bir ko-ekstremitedir. $\delta_{\mathbb{I}} = (\overline{\delta}_{\mathbb{I}}, \underline{\delta}_{\mathbb{I}})$ di-ekstremitesine *birim aralık di-ekstremitesi* denilir.

4.4. Tamamiyle Sınırlı Didüzgün Uzaylar ve Di-ekstrem Uzaylar

[1] nolu makalede belirtildiği üzere belirtisiz yakınlık uzayları ile Hutton anlamında belirtisiz düzgünlükler arasında önemli bir ilişki mevcuttur. Klasik yapıda olduğu gibi; belirtisiz kümeler teorisinde de belirtisiz yakınlık uzayları ile (Hutton anlamında) tamamiyle sınırlı belirtisiz düzgün uzaylar arasında bire-bir karşılık vardır. Belirtisiz yakınlık uzaylarının kategorisi Hutton belirtisiz düzgünlüklerinin dolu (İng: full), yansımalı bir altkategorisine izomorftur.

Klasik ve belirtisiz kümeler teorisinde yakınlık uzaylarının tamamiyle sınırlı düzgün uzaylarla olan bu ilişkisi benzer bir sonucun doku uzaylarında da geçerli olup olmadığı sorusunu doğal olarak akla getirmektedir.

Doku üzerinde didüzgün uzayların iki karakterizasyonu, dibağıntısal düzgünlükler ve di-örtüsel düzgünlükler, 2003 yılında S. Özçağ ve L. M. Brown tarafından [18]'de incelenmiştir. 2009 yılında ise Selma Özçağ, L. M. Brown ve B. Krsteska ortak çalışması [22]'de didüzgün uzayların difonksiyonlar ile karakterizasyonu verilmiştir ve böylece didüzgün uzayların, Hutton anlamında düzgün uzayların bir genellemesi olduğu gösterilmiştir. Difonksiyonel düzgünlükler, Hutton anlamında düzgünlüklerin bir genellemesi olduğundan ve yapısı itibariyle fonksiyonlarla çalışma imkanı verdiğinden, di-ekstrem uzayların tamamiyle sınırlı didüzgünlüklerle olan ilişkisini göstermek için bu bölümde difonksiyonel düzgün uzayları kullanacağız.

Difonksiyonel düzgün uzayların tanımına geçmeden önce aşağıdaki tanımları verelim.

4.4.1. Tanım : [22] $(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun.

(1) $\mathcal{F}^S_{\mathcal{RR}}$ (eğer bir karışıklık söz konusu değilse basitçe $\mathcal{F}_{\mathcal{RR}}$) ile $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağlayan bir ailesi olarak tanımlıdır.

(a) $A \subseteq \varphi(A)$, her $A \in \mathcal{S}$ için ve

(b) $\varphi(\bigvee_{j\in J} A_j) = \bigvee_{j\in J} \varphi(A_j)$ her $A_j \in \mathcal{S}$, $j \in J$ için

(2) $\mathcal{F}^S_{\mathcal{RCR}}$ (eğer bir karışıklık söz konusu değilse basitçe $\mathcal{F}_{\mathcal{RCR}}$) ile $\psi : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları sağlayan bir ailesi olarak tanımlıdır.

(a) $\psi(A) \subseteq A$, her $A \in \mathcal{S}$ için,

(b) $\psi(\bigcap_{j\in J} A_j) = \bigcap_{j\in J} \psi(A_j)$ her $A_j \in \mathcal{S}$, $j \in J$.

(3) Son olarak $\mathcal{F}^S_{\mathcal{RDR}} = \mathcal{F}^S_{\mathcal{RR}} \times \mathcal{F}^S_{\mathcal{RCR}}$ (veya basitçe $\mathcal{F}_{\mathcal{RDR}}$) gösterimi kullanılır.

4.4.2. Tanım : $(\varphi_1, \psi_1), (\varphi_2, \psi_2) \in \mathcal{F}_{\mathcal{RDR}}$ olsun. Eğer $\varphi_1 \leq \varphi_2$ ve $\psi_2 \leq \psi_1$ ise bu durumda $(\varphi_1, \psi_1) \leq (\varphi_2, \psi_2)$ olarak gösterilir.

4.4.3. Önerme: $(\varphi_1,\psi_1),(\varphi_2,\psi_2) \in \mathcal{F}_{\mathcal{RDR}}$ *ve* $(\varphi_1,\psi_1) \leq (\varphi_2,\psi_2)$ *olsun. Eğer* $\{(\varphi_1(A_k),\psi_1(B_k)) \mid k=1,...,n\}$ *bir di-örtü ise bu durumda* $\{(\varphi_2(A_k),\psi_2(B_k)) \mid k = 1,...,n\}$ *de bir di-örtüdür.*

Kanıt: $\{(\varphi_1(A_k),\psi_1(B_k)) \mid k=1,...,n\}$ bir di-örtü olsun. Öyleyse $I=\{1,2,...,n\}$ 'nın her I_1,I_2 ayrışımı için , $\bigcap_{i\in I_1}\psi_1(B_i) \subseteq \bigvee_{j\in I_2}\varphi_1(A_j)$ olur. Her $i\in I_1, j\in I_2$ için, $\psi_2(B_i)\subseteq \psi_1(B_i)$ ve $\varphi_1(A_i)\subseteq\varphi_2(A_i)$ olduğundan I 'nın her I_1,I_2 ayrışımı için $\bigcap_{i\in I_1}\psi_2(B_i)\subseteq \bigvee_{j\in I_2}\varphi_2(A_j)$ elde edilir ki bu, $\{(\varphi_2(A_k),\psi_2(B_k)) \mid k=1,...,n\}$ 'nin bir di-örtü olduğunu gösterir. ■

4.4.4. Tanım: **[22]** $\varphi\in\mathcal{F}_{\mathcal{RR}}$ için, $\overleftarrow{\varphi}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, $\overleftarrow{\varphi}(B)=\bigvee\{A\in\mathcal{S}\mid\varphi(A)\subseteq B\}$ ve dual olarak, $\psi\in\mathcal{F}_{\mathcal{RCR}}$ için $\overleftarrow{\psi}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, $\overleftarrow{\psi}(B)=\bigcap\{A\in\mathcal{S}\mid B\subseteq\psi(A)\}$ biçimindedirler.

4.4.5. Tanım: **[22]** $(f,F):(S,\mathcal{S})\to(T,\mathcal{T})$ bir difonksiyon ve $(\varphi,\psi)\in\mathcal{F}^T_{\mathcal{RDR}}$ olsun. Bu durumda $(f,F)^{-1}(\varphi(A)) = F^{\leftarrow}(\varphi(f^{\rightarrow}A)), A\in\mathcal{S}$ ve $(f,F)^{-1}(\psi(A)) = f^{\leftarrow}(\psi(F^{\rightarrow}A)), A\in\mathcal{S}$ ve $(f,F)^{-1}(\varphi,\psi) = ((f,F)^{-1}(\varphi),(f,F)^{-1}(\psi))\in\mathcal{F}^S_{\mathcal{RDR}}$ biçimindedirler.

Şimdi difonksiyonel düzgün uzaylarının tanımı verilebilir. Bu tanım difonksiyonel düzgünlüklerin **[22]**'de lemma 4.1 ve sonuç 4.4 ile belirtilmiş olan alternatif tanımıdır.

4.4.6. Tanım: **[22]** $(S,\mathcal{S})$ bir doku olsun ve $\overline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{F}_{\mathcal{RR}}$ ve $\underline{\mathcal{U}}\subseteq\mathcal{F}_{\mathcal{RCR}}$ aşağıdaki koşulları gerçeklesin.

(UF1) $\varphi\in\overline{\mathcal{U}},\varphi_1\in\mathcal{F}_{\mathcal{RR}}$ öyle ki $\varphi\leq\varphi_1\Longrightarrow\varphi_1\in\overline{\mathcal{U}}$.

(UF2) $\varphi_1,\varphi_2\in\overline{\mathcal{U}}\Longrightarrow\varphi_1\wedge\varphi_2\in\overline{\mathcal{U}}$.

(UF3) $\varphi\in\overline{\mathcal{U}}\Longrightarrow\exists\varphi_1\in\overline{\mathcal{U}}$ öyle ki $\varphi_1^2\leq\varphi$.

(SYM) $\varphi\in\overline{\mathcal{U}}\Longleftrightarrow\overleftarrow{\varphi}\in\underline{\mathcal{U}}$.

(CUF1) $\psi\in\underline{\mathcal{U}},\psi_1\in\mathcal{F}_{\mathcal{RCR}}$ öyle ki $\psi_1\leq\psi\Longrightarrow\varphi_1\in\underline{\mathcal{U}}$.

(CUF2) $\psi_1,\psi_2\in\underline{\mathcal{U}}\Longrightarrow\psi_1\vee\psi_2\in\underline{\mathcal{U}}$.

(CUF3) $\psi \in \underline{\mathcal{U}} \Longrightarrow \exists \psi_1 \in \underline{\mathcal{U}}$ öyle ki $\psi \leq \psi_1^2$.

Bu durumda $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{U}} \times \underline{\mathcal{U}}$ 'ye $\mathcal{S}$ üzerinde *difonksiyonel düzgünlük* denir.

Yukarıdaki tanımda yer alan (SYM) koşulu, di-ekstremite ve dimetrik tanımlarında simetri koşuluyla paralellik arz etmektedir.

Difonksiyonel düzgünlüklerle ilgili bu bölümde kullanılacak olan diğer tanım ve sonuçları verelim.

4.4.7. Tanım: **[22]** $(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ ve $(T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ difonksiyonel düzgün uzaylar ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \to (T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda eğer her $(\varphi, \psi) \in \mathcal{V} \Longrightarrow (f, F)^{-1}(\varphi, \psi) \in \mathcal{U}$ ise (f, F), ye $\mathcal{U} - \mathcal{V}$ *düzgün ikili süreklidir* denir.

4.4.8. Sonuç: **[22]** *$(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ ve $(T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ difonksiyonel düzgün doku uzayları ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \to (T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) *(f, F), $\mathcal{U} - \mathcal{V}$ düzgün ikili süreklidir.*

(2) $\varphi \in \overline{\mathcal{V}} \Longrightarrow (f, F)^{-1}(\varphi) \in \overline{\mathcal{U}}$.

(3) $\psi \in \underline{\mathcal{V}} \Longrightarrow (f, F)^{-1}(\psi) \in \underline{\mathcal{U}}$.

[18, 22] 'de alttaban ve taban tanımları verilmiş ve bu kavramlarla ilgili sonuçlar klasik yapıdakiyle paralellik gösterdiği için ayrıntılar atlanmıştır. Bu kavramlarla ilgili bu bölümde kullanılacak bazı sonuçları verelim.

4.4.9. Önerme: *$(S, \mathcal{S})$ bir doku uzayı olsun ve $\overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{R}\mathcal{R}}$, $\underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} \subseteq \mathcal{F}_{\mathcal{R}\mathcal{C}\mathcal{R}}$ aşağıdaki koşulları gerçeklesin.*

(UB1) *Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ için $\varphi \leq \varphi_1 \wedge \varphi_2$ olacak şekilde bir $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır.*

(UB2) *Her $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ için, ${\varphi_1}^2 \leq \varphi$ olacak şekilde bir $\varphi_1 \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır.*

(UB3) $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} \Longrightarrow \exists \psi \in \underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ *öyle ki* $\overleftarrow{\varphi} \leq \psi$ *'dir.*

(UB4) $\psi \in \underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} \Longrightarrow \exists \varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ *öyle ki* $\varphi \leq \overleftarrow{\psi}$ *'dir.*

Bu durumda $\mathcal{U}_{\mathcal{B}} = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}, \psi \in \underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}\}$, $(S, \mathcal{S})$ *üzerinde bir difonksiyonel düzgünlük için bir tabandır.*

Kanıt: $\overline{\mathcal{U}} = \{\varphi^* \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}\mathcal{R}} \mid \exists \varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ öyle ki $\varphi \leq \varphi^*\}$ ve $\underline{\mathcal{U}} = \{\psi^* \in \mathcal{F}_{\mathcal{R}\mathcal{C}\mathcal{R}} \mid \exists \psi \in \underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ öyle ki $\psi^* \leq \psi\}$ 'nin UF1, UF2, UF3 ve SYM koşullarını sağladığını gösterelim.
UF1: Açık.
UF2: $\varphi_1^*, \varphi_2^* \in \overline{\mathcal{U}}$ olsun. Bu durumda $\varphi_1 \leq \varphi_1^*, \varphi_2 \leq \varphi_2^*$ olacak şekilde $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır. UB1'den $\varphi \leq \varphi_1 \wedge \varphi_2$ olacak şekilde $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır. Açıkça $\varphi \leq \varphi_1^* \wedge \varphi_2^*$ ve böylece $\varphi_1^* \wedge \varphi_2^* \in \overline{\mathcal{U}}$ olur.
UF3: $\varphi^* \in \overline{\mathcal{U}}$ olsun. Bu durumda $\varphi \leq \varphi^*$ olacak şekilde $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır. UB2'den $\varphi_1^2 \leq \varphi \leq \varphi^*$ olacak şekilde $\varphi_1 \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır. $\overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}$ olduğu için istenen elde edilir.
SYM: $\varphi^* \in \overline{\mathcal{U}}$ olsun. Bu durumda $\varphi \leq \varphi^*$ olacak şekilde $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır. UB3 koşulundan $\overleftarrow{\varphi} \leq \psi$ olacak şekilde bir $\psi \in \underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ vardır. Diğer taraftan $\varphi \leq \varphi^*$ olduğu için $\overleftarrow{\varphi^*} \leq \overleftarrow{\varphi}$ olur. Böylece $\overleftarrow{\varphi^*} \leq \psi$ ve sonuç olarak $\overleftarrow{\varphi^*} \in \underline{\mathcal{U}}$ elde edilir.

Diğer koşullar da benzer şekilde gösterilebilir. ■

Tamamiyle sınırlılık kavramı [21]'de verilmiştir. Aşağıdaki tanım tamamiyle sınırlılığın difonksiyonel düzgün uzaylardaki karşılığıdır.

4.4.10. Tanım : $(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ bir difonksiyonel düzgün doku uzayı olsun. Eğer her $(\varphi, \psi) \in \mathcal{U}$, için $\{(\varphi(P_{s_k}), \psi(Q_{s_k})) \mid k = 1, ..., n\}$ bir di-örtü olacak şekilde $s_1, s_2, ..., s_n \in S$ elemanları varsa $\mathcal{U}$ 'ya *tamamiyle sınırlıdır* denir.

Aşağıdaki tanım, [25]'deki Tanım 4.7'nin difonksiyonel düzgün uzaylardaki doğal karşılığıdır.

4.4.11. Tanım : $(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ difonksiyonel düzgün doku uzayı olsun. $A\overline{\delta}B \iff$ her $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}$ için $\varphi(A) \not\subseteq B$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $\underline{\delta} = \overline{\delta}^{-1}$ olarak alınırsa $\delta = (\overline{\delta}, \underline{\delta})$ 'ya, $\mathcal{U}$ *tarafından üretilen di-ekstremite* denir ve $\delta = \delta_{\mathcal{U}} = (\overline{\delta}_{\mathcal{U}}, \underline{\delta}_{\mathcal{U}})$ ile gösterilir.

4.4.12. Önerme : $(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ *bir difonksiyonel düzgün doku uzayı,* $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$ *onun tabanı olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.*

(1) $A\overline{\delta}_{\mathcal{U}}B$.

(2) *Her* $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ *için* $\varphi(A) \nsubseteq B$.

Şimdi her di-ekstremite için onunla uyumlu bir (tamamiyle sınırlı) difonksiyonel düzgünlüğün açık inşasını vermeden önce ihtiyaç duyulan tanım ve sonuçları belirtelim.

δ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olsun. Her $A \overline{\not\delta} B$ ve $D \underline{\not\delta} C$ için, $\varphi_{AB}, \psi_{DC} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

$$\varphi_{AB}(Z) = \begin{cases} \emptyset & \text{Eğer } Z = \emptyset \text{ ise,} \\ B & \text{Eğer } Z \subseteq A, Z \neq \emptyset \text{ ise,} \\ S & \text{Eğer } Z \nsubseteq A \text{ ise,} \end{cases}$$

$$\psi_{DC}(Z) = \begin{cases} S & \text{Eğer } Z = S \text{ ise,} \\ C & \text{Eğer } D \subseteq Z, Z \neq S \text{ ise,} \\ \emptyset & \text{Eğer } D \nsubseteq Z \text{ ise,} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

4.4.13. Önerme : $\varphi_{AB} \in \mathcal{F}_{\mathcal{RR}}$, $\psi_{DC} \in \mathcal{F}_{\mathcal{RCR}}$ *'dir.*

Kanıt: φ_{AB} ve ψ_{DC} 'nin, 4.4.1'deki koşulları gerçeklediğini görelim. Kısalık olsun diye $\varphi = \varphi_{AB}$ diyelim. $A \overline{\not\delta} B$ olduğundan dolayı $A \subseteq B$ olduğu bilinmektedir. Bu gerçekten ve φ_{AB} 'nin tanımından her $Z \in \mathcal{S}$, $Z \subseteq \varphi(Z)$ olduğu açıktır. Şimdi $Z_j \in \mathcal{S}, j \in J$ olsun. φ 'nin supremumu koruduğunu göstermek için, 3 olasılığı düşünelim. Öncelikle eğer $\bigvee\limits_j Z_j = \emptyset$ ise, bu durumda açıkça $\varphi(\bigvee\limits_j Z_j) = \bigvee\limits_j \varphi(Z_j) = \emptyset$ olur. İkinci olarak eğer $\bigvee Z_j \neq \emptyset$ ve $\bigvee\limits_j Z_j \subseteq A$ ise, bu durumda her j için , $Z_j \subseteq A$ ve $\varphi(Z_j) = B$ olur. Böylece $\varphi(\bigvee\limits_j Z_j) = \bigvee\limits_j \varphi(Z_j) = B$ elde edilir. Son olarak eğer $\bigvee\limits_j Z_j \nsubseteq A$ ise, bu durumda $Z_j \nsubseteq A$ olacak şekilde $j \in J$ vardır. Bu j için, $\varphi(Z_j) = S$ 'dir. Yani $\varphi(\bigvee\limits_j Z_j) = \bigvee\limits_j \varphi(Z_j) = S$ olduğu görülür.

$\psi = \psi_{DC} \in \underline{\mathcal{U}}_{\mathcal{SB}}$ olduğu da benzer şekilde gösterilir. ∎

Şimdi aradığımız difonksiyonel düzgünlüğün alttabanını ve tabanını oluşturalım.

$\overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}} = \{\varphi_{AB} \mid A\overline{\delta}B\}, \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}} = \{\psi_{DC} \mid D\underline{\delta}C\}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{SB}} = \{(\varphi,\psi) \mid \varphi \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}, \psi \in \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}\}$, $\overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}} = \{\overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} \varphi_{A_kB_k} \mid \forall k = 1,...,n, \varphi_{A_kB_k} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}\}$, $\underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}} = \{\overset{n}{\underset{k=1}{\vee}} \psi_{D_kC_k} \mid \forall k = 1,...,n, \psi_{D_kC_k} \in \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}\}$ ve $\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}} = \{(\varphi,\psi) \mid \varphi \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}, \psi \in \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}\}$ olarak tanımlayalım.

$\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ ailesinin gerçekten bir difonksiyonel düzgünlük tabanı olduğunu göstermek için önce aşağıdaki önermeleri gösterelim.

4.4.14. Önerme : *Her $\varphi_{AB} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}, \psi_{DC} \in \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}$ için, $\overleftarrow{\varphi_{AB}} = \psi_{BA}$ ve $\overleftarrow{\psi_{DC}} = \varphi_{CD}$ olur.*

Kanıt: $\overleftarrow{\varphi_{AB}}(Z) = \vee\{L \in \mathcal{S} \mid \varphi_{AB}(L) \subseteq Z\}$ 'dir. Göstereceğiz ki her Z için, $\overleftarrow{\varphi_{AB}}(Z) = \psi_{BA}(Z)$ 'dir. Eğer $Z = S$ ise, her L için, $\varphi(L) \subseteq Z$ ve $\overleftarrow{\varphi_{AB}}(Z) = S = \psi_{BA}(Z)$ olur. Eğer $B \subseteq Z$ ise, bu durumda $\varphi_{AB}(L) \subseteq Z$'dir ancak ve ancak $L \subseteq A$ 'dir. Böylece $\overleftarrow{\varphi_{AB}}(Z) = A = \psi_{BA}(Z)$ olur. Son olarak eğer $B \nsubseteq Z$ ise, bu durumda $\varphi_{AB}(L) \subseteq Z$'dir ancak ve ancak $L = \emptyset$ 'dir. Sonuç olarak $\overleftarrow{\varphi_{AB}}(Z) = \emptyset = \psi_{BA}(Z)$. Diğer kısım da benzer şekilde gösterilir. ■

4.4.15. Önerme : *$(\varphi,\psi) \in \mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda $(\varphi_{AB},\psi_{DC}) \leq (\varphi,\psi)$ olacak şekilde $(\varphi_{AB},\psi_{DC}) \in \mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{SB}}$ vardır.*

Kanıt: $(\varphi,\psi) \in \mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda $\varphi = \overset{n}{\underset{k=1}{\wedge}} \varphi_{A_kB_k}$ ve $\psi = \overset{m}{\underset{l=1}{\vee}} \psi_{D_lC_l}$ olacak şekilde $k = 1,...,n, l = 1,...m$, $\varphi_{A_kB_k} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}, \psi_{D_lC_l} \in \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}$ vardır.

İlk olarak $A = \overset{n}{\underset{k=1}{\vee}} A_k$ ve $B = \overset{n}{\underset{k=1}{\cap}} B_k$ diyelim. Önerme 3.1.2(5) gereği, $A\overline{\delta}B$ 'dir, böylece $\varphi_{AB} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olur. Eğer $Z = \emptyset$ ise, bu durumda açıkça $\varphi_{AB}(Z) \subseteq \varphi(Z)$ olur. Eğer $Z \nsubseteq A$ ise, bu durumda her k için $Z \nsubseteq A_k$ ve böylece $\varphi_{A_kB_k}(Z) = S$ olur. Dolayısıyla $\varphi_{AB}(Z) = S \subseteq \varphi(Z) = S$ 'dir. Eğer $Z \subseteq A$ ise, bu durumda $\varphi_{AB}(Z) = B$ 'dir. Diğer taraftan her k için, $\varphi_{A_kB_k}(Z) = B_k$ veya $\varphi_{A_kB_k}(Z) = S$ 'dir. Sonuç olarak $\varphi_{AB}(Z) = B = \overset{n}{\underset{k=1}{\cap}} B_k \subseteq \varphi(Z)$. Böylece $\varphi_{AB} \leq \varphi$ olur.

İkinci olarak $C = \overset{n}{\underset{l=1}{\vee}} C_l$ ve $D = \overset{m}{\underset{l=1}{\cap}} D_l$ denilirse, $\psi \leq \psi_{DC}$ olduğu yukarıdakine benzer olarak gösterilebilir. ■

Şimdi $\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ ailesinin δ ile uyumlu bir difonksiyonel düzgünlüğün tabanı olduğu iddiasını kanıtlayalım.

4.4.16. Teorem : *δ, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olsun. Bu durumda $\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$, $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir $\mathcal{U}^{\delta}$ difonksiyonel düzgünlüğü için bir tabandır. Ayrıca $\mathcal{U}^{\delta}$, δ ile uyumludur.*

Kanıt: Göstereceğiz ki $\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ önerme 4.4.9 'nın koşullarını sağlar ve dolayısıyla $(S,\mathcal{S})$ üzerinde bir didüzgünlük için bir tabandır.

UB1: $\varphi_1, \varphi_2 \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda $\varphi_1 = \bigwedge\limits_{k=1}^{n} \varphi_{A_kB_k}$ ve $\varphi_2 = \bigwedge\limits_{l=1}^{m} \varphi_{C_kD_k}$ olacak biçimde $k = 1, ..., n$, $l = 1, ...m$, $A_k\overline{\delta}B_k, C_l\overline{\delta}D_l$, $\varphi_{A_kB_k}$ ve $\varphi_{C_lD_l} \in \mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ vardır. Şimdi her $l = 1, ...m$ için $A_{n+l} = C_l$, $B_{n+l} = D_l$, $A = \bigvee\limits_{k=1}^{n+m} A_k$ ve $B = \bigcap\limits_{k=1}^{n+m} B_k$ diyelim. Önerme 3.1.2(5) gereği, $A\overline{\delta}B$ olacak şekilde $\varphi_{AB} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{S}\mathcal{B}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olmuş olur. Buradan $\varphi_{AB} \leq \varphi_1 \wedge \varphi_2$ olduğunu göstereceğiz. Eğer $Z = \emptyset$ ise, bu durumda açıkça $\varphi_{AB}(Z) \subseteq \varphi_1(Z) \cap \varphi_2(Z)$ olur. Eğer $Z \nsubseteq A$ ise, bu durumda her k için $Z \nsubseteq A_k$ olur ve böylece $\varphi_{A_kB_k} = S$ elde edilir. Dolayısıyla $\varphi_{AB}(Z) = S \subseteq \varphi_1(Z) \cap \varphi_2(Z) = S$ 'dir. Eğer $Z \subseteq A$ ise, bu durumda $\varphi_{AB}(Z) = B$ 'dir. Diğer taraftan her k için, $\varphi_{A_kB_k}(Z) = B_k$ veya $\varphi_{A_kB_k}(Z) = S$ 'dir. Sonuç olarak $\varphi_{AB}(Z) = \bigcap\limits_{k=1}^{n+m} B_k \subseteq \varphi_1(Z) \cap \varphi_2(Z)$ elde edilir.

UB2: $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda her $k = 1, ..., n$, $A_k\overline{\delta}B_k$ ve $\varphi_{A_kB_k} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ olmak üzere $\varphi = \bigwedge\limits_{k=1}^{n} \varphi_{A_kB_k}$ biçimindedir. Şimdi $A = \bigvee\limits_{k=1}^{n} A_k$, $B = \bigcap\limits_{k=1}^{n} B_k$ denilirse $\varphi_{AB} \leq \varphi$ olduğu kolayca gösterilebilir. $A\overline{\delta}B$ 'e (E4) uygulanırsa, $A\overline{\delta}E$ ve $E\overline{\delta}B$ olacak biçimde bir $E \in \mathcal{S}$ elde edilir. Böylece $\varphi_{AE}, \varphi_{EB} \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ olur. Şimdi $\varphi_1 = \varphi_{AE} \wedge \varphi_{EB} \in \overline{\mathcal{U}}_{\mathcal{B}}$ diyelim ve $\varphi_1^2 \leq \varphi$ olduğunu gösterelim. $A \subseteq E \subseteq B$ olduğu biliniyor. 2 durum söz konusudur, ya $E = A$ ya da $E \nsubseteq A$. İlk durum için,

$$\varphi_1(Z) = \begin{cases} \emptyset & \text{Eğer } Z = \emptyset \text{ ise,} \\ A & \text{Eğer } Z \subseteq A, Z \neq \emptyset \text{ ise,} \\ S & \text{Eğer } Z \nsubseteq A \text{ ise.} \end{cases}$$

İkinci durum için,

$$\varphi_1(Z) = \begin{cases} \emptyset & \text{Eğer } Z = \emptyset \text{ ise,} \\ E & \text{Eğer } Z \subseteq A, Z \neq \emptyset \text{ ise,} \\ B & \text{Eğer } Z \nsubseteq A, Z \subseteq E \text{ ise,} \\ S & \text{Eğer } Z \nsubseteq E \text{ ise.} \end{cases}$$

Böylece ilk durum için

$$\varphi_1(\varphi_1(Z)) = \begin{cases} \emptyset & \text{Eğer } Z = \emptyset \text{ ise,} \\ A & \text{Eğer } Z \subseteq A, Z \neq \emptyset \text{ ise,} \\ S & \text{Eğer } Z \nsubseteq A \text{ ise} \end{cases}$$

Ve ikinci durum için, ya $\varphi_1(Z) = \emptyset$ ya da $\varphi_1(Z) \nsubseteq A$ olduğu gözlemlenir. Böylece

$$\varphi_1(\varphi_1(Z)) = \begin{cases} \emptyset & \text{Eğer } Z = \emptyset \text{ ise,} \\ B & \text{Eğer } Z \subseteq E, Z \neq \emptyset \text{ ise,} \\ S & \text{Eğer } Z \nsubseteq E \text{ ise.} \end{cases}$$

elde edilir. Sonuç olarak her iki durum için de $\varphi_1^2 \leq \varphi_{AB}$ 'dir.

UB3: $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olsun. Bu durumda önerme 4.4.15 gereği $\varphi_{AB} \leq \varphi$ olacak şekilde $\varphi_{AB} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}$ vardır. Önerme 4.4.14 gereği $\overleftarrow{\varphi_{AB}} = \psi_{BA} \in \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}} \subseteq \underline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ olur. Diğer taraftan $\varphi_{AB} \leq \varphi$ olduğu için $\overleftarrow{\varphi} \leq \overleftarrow{\varphi_{AB}}$ 'dir ve UB3 sağlanır.

UB4 koşulunun sağlandığı da benzer biçimde gösterilebilir.

Sonuç olarak $\mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir $\mathcal{U}^{\delta}$ düzgünlüğünü üretir. Son olarak $\mathcal{U}^{\delta}$ 'nın δ ile uyumlu olduğunu gösterelim. $A\overline{\not\delta}B$ olsun. $\varphi_{AB}(A) = B \subseteq B$ ve $\varphi_{AB} \in \mathcal{U}^{\delta}$ olduğundan, açıkça $A\overline{\not\delta}_{\mathcal{U}}B$ 'dir. Şimdi $A\overline{\not\delta}_{\mathcal{U}}B$ olsun fakat $A\bar{\delta}B$ olduğunu varsayalım. $A\overline{\not\delta}_{\mathcal{U}}B$ olduğundan önerme 4.4.12 gereği $\varphi(A) \subseteq B$ olacak şekilde $\varphi \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ vardır. Önerme 4.4.15 gereği $\varphi_{CD} \leq \varphi$ olacak biçimde bir $\varphi_{CD} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}_{\mathcal{SB}}$ vardır. $\varphi(A) \subseteq B$ ve $\varphi_{CD} \leq \varphi$ olduğundan $\varphi_{CD}(A) \subseteq B$ 'dir. Burada 3 durum söz konusudur.

1. Durum: $A = \emptyset$ ise. Fakat bu durum $A\bar{\delta}B$ olduğundan mümkün değildir.
2. Durum: $A \neq \emptyset$, $A \subseteq C$ ise. Bu durumda $\varphi_{CD}(A) = D \subseteq B$ 'dir. Böylece $A \subseteq C, D \subseteq B$ ve $A\bar{\delta}B$ olduğundan $C\bar{\delta}D$ olur. Fakat bu, $C\overline{\not\delta}D$ oluşuyla çelişir.
3. Durum: $A \nsubseteq C$ ise. Bu durumda $\varphi_{CD}(A) = S$ 'dir ve $B = S$ elde edilir. Fakat bu da $A\bar{\delta}B$ oluşuyla çelişir.

Sonuç olarak $A\overline{\not\delta}B$ 'dir ve kanıt tamamlanmış olur. ∎

4.4.17. Tanım : Bir önceki teoremde elde edilen difonksiyonel di-düzgünlüğüne δ *ta-*

rafından üretilen di-düzgünlük denir ve $\mathcal{U}^{\delta}$ ile gösterilir.

Aşağıdaki teorem bu tez çalışmasının ana hedeflerinden birini ortaya koymaktadır.

4.4.18. Teorem : *δ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olsun. Bu durumda $\mathcal{U}^{\delta}$, tamamiyle sınırlıdır.*

Kanıt: Öncelikle $(\varphi_{AB}, \psi_{DC}) \in \mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ alttaban elemanı için $\{(\varphi_{AB}(P_{s_k}), \psi_{DC}(Q_{s_k})) \mid k = 1, ..., n\}$ bir di-örtü olacak biçimde $s_1, ..., s_n \in S$ elemanlarının var olduğunu gösterelim. Burada C ve B kümeleri için 3 durum söz konusudur.

1. Durum: $C \subseteq B$ ve $B \neq S$ olsun. Bu durumda $P_{s_1} \not\subseteq B, Q_{s_1} \neq S$ olacak şekilde $s_1 \in S$ vardır. Bu s_1 için $\varphi_{AB}(P_{s_1}) = S, \psi_{DC}(Q_{s_1}) = C$ veya $\psi_{DC}(Q_{s_1}) = \emptyset$. 'dir. Şimdi $D \not\subseteq Q_{s_2}$ olacak biçimde herhangi bir s_2 alalım. Bu s_2 için, $\varphi_{AB}(P_{s_2}) = S$ veya $\varphi_{AB}(P_{s_2}) = B, \psi_{DC}(Q_{s_2}) = \emptyset$. 'dir. $\{(\varphi_{AB}(P_{s_1}), \psi_{DC}(Q_{s_1}), (\varphi_{AB}(P_{s_2}), \psi_{DC}(Q_{s_2})\}$ bir di-örtü olduğu kolayca kontrol edilebilir.

2. Durum: $C \subseteq B$ ve $B = S$ olsun. Bu durumda $D \not\subseteq Q_s$ olacak biçimde bir $s \in S$ alalım. Bu s için, $\varphi_{AB}(P_s) = S, \psi_{DC}(Q_s) = \emptyset$ olur. Açıkça $\{(\varphi_{AB}(P_s), \psi_{DC}(Q_s)\}$ bir di-örtüdür.

3. Durum: $C \not\subseteq B$ olsun. Bu durumda $C \not\subseteq Q_s$ ve $P_s \not\subseteq B$ olacak şekilde $s \in S$ vardır. $\varphi_{AB}(P_s) = S$ ve $\psi(Q_s) = \emptyset$ olduğundan açıkça $\{(\varphi_{AB}(P_s), \psi_{DC}(Q_s)\}$ bir di-örtüdür.

Şimdi $(\varphi, \psi) \in \mathcal{U}^{\delta}$ olsun. Bu durumda $(\varphi_*, \psi_*) \leq (\varphi, \psi)$ olacak biçimde bir $(\varphi_*, \psi_*) \in \mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{B}}$ vardır. Önerme 4.4.15 gereği $(\varphi_{AB}, \psi_{DC}) \leq (\varphi_*, \psi_*)$ olacak biçimde bir $(\varphi_{AB}, \psi_{DC}) \in \mathcal{U}^{\delta}_{\mathcal{S}\mathcal{B}}$ vardır. Yukarıda gösterildiği üzere $\{(\varphi_{AB}(P_{s_k}), \psi_{DC}(Q_{s_k})) \mid k = 1, ..., n\}$ bir di-örtü olacak biçimde $s_1, ..., s_n \in S$ elemanları bulunabilir. $(\varphi_{AB}, \psi_{DC}) \leq (\varphi_*, \psi_*) \leq (\varphi, \psi)$ olduğundan önerme 4.4.3 gereği $\{(\varphi(P_{s_k}), \psi(Q_{s_k})) \mid k = 1, ..., n\}$ bir di-örtüdür. Böylece istenen gösterilmiş olur. ∎

4.4.19. Sonuç : *δ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olsun. Bu durumda $\mathcal{U}^{\delta}$, δ ile uyumlu olan en küçük di-düzgünlüktür.*

Kanıt: $\mathcal{W}$, δ ile uyumlu olan başka bir difonksiyonel düzgünlük olsun. SYM koşulu gereği, sadece $\overline{\mathcal{U}}^{\delta} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\overline{\mathcal{U}}^{\delta}$ 'nun bir φ_{AB} alttaban elemanını alalım. $A\overline{\delta}B$ olduğundan ve $\mathcal{W}$, δ ile uyumlu olduğundan $\varphi(A) \subseteq B$ olacak şekilde $\varphi \in \overline{\mathcal{W}}$ vardır. $\varphi \leq \varphi_{AB}$ olduğunu gösterelim. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ olduğu gözlemlemek kolaydır ve φ artan fonksiyon olduğundan φ supremumu korur. Eğer $Z = \emptyset$ ise, bu durumda $\varphi(Z) = \emptyset \subseteq \varphi_{AB}(Z) = \emptyset$ olur. Eğer $Z \neq \emptyset$, $Z \subseteq A$ ise, bu durumda $\varphi(Z) \subseteq \varphi(A) \subseteq B = \varphi_{AB}(Z)$ olur. Eğer $Z \nsubseteq A$ ise, bu durumda $\varphi(Z) \subseteq S = \varphi_{AB}(Z)$ olur. Sonuç olarak $\varphi \leq \varphi_{AB}$ ve $\varphi_{AB} \in \overline{\mathcal{W}}$ 'dir. $\overline{\mathcal{U}}^{\delta}$ 'nun bütün alttaban elemanları $\overline{\mathcal{W}}$ 'ya ait olduğundan $\overline{\mathcal{U}}^{\delta} \subseteq \overline{\mathcal{W}}$ olur. ■

4.4.20. Sonuç: *δ, $(S, \mathcal{S})$ üzerinde bir di-ekstremite olsun. Bu durumda $\mathcal{U}^{\delta}$, δ ile uyumlu olan tek tamamiyle sınırlı di-düzgünlüktür.*

Kanıt: $\mathcal{W}$, δ ile uyumlu bir tamamiyle sınırlı difonksiyonel düzgünlük olsun. Sonuç 4.4.19 gereği $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}^{\delta}$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. $(\varphi, \psi) \in \mathcal{W}$ alalım. Bu durumda $(\varphi_*, \psi_*) = (\varphi_*, \psi_*)^{-1} = (\overleftarrow{\psi}_*, \overleftarrow{\varphi}_*)$ ve $(\varphi_*, \psi_*)^3 \leq (\varphi, \psi)$ olacak biçimde bir $(\varphi_*, \psi_*) \in \mathcal{W}$ vardır. $\mathcal{W}$ tamamiyle sınırlı olduğundan $\mathcal{D} = \{(\varphi_*(P_{s_k}), \psi_*(Q_{s_k})) \mid k = 1, ..., n\}$, S'nin bir di-örtüsü olacak biçimde $s_1, s_2, ..., s_n \in S$ bulunur.

1. Gözlem: $\mathcal{D}$ bir di-örtü olduğundan $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \varphi_*(P_{s_i}) = \varphi_*(\bigvee\limits_{i=1}^{n} P_{s_i}) = S$ dir.

2. Gözlem: Her $Z \in \mathcal{S}$ için ${\varphi_*}^3(P_{s_k}) \subseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olacak biçimde bir k vardır. Aksini varsayalım. Her k için ${\varphi_*}^3(P_{s_k}) \nsubseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olsun. Fakat bu durumda $S = \bigvee\limits_{i=1}^{n} (\varphi_*(P_{s_i})) \subseteq \bigvee\limits_{i=1}^{n} ({\varphi_*}^3(P_{s_i})) \nsubseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olur ki bu bir çelişkidir.

3. Gözlem: $\mathcal{D}$ bir di-örtü olduğundan her k için $\bigcap\limits_{i\neq k} \psi_*(Q_{s_i}) \subseteq \varphi_*(P_{s_k})$ dir. $\varphi_* = \overleftarrow{\psi}_*$ olduğu dikkate alınır ve kapsamanın her iki tarafına φ_* ardışık olarak iki kez uygulanırsa $\bigcap\limits_{i\neq k} \varphi_*(Q_{s_i}) = \varphi_*(\bigcap\limits_{i\neq k} Q_{s_i}) \subseteq {\varphi_*}^3(P_{s_k})$ elde edilir.

Her k için $A_k = \bigcap\limits_{i\neq k} Q_{s_i}$ ve $B_k = {\varphi_*}^3(P_{s_k})$ diyelim. $\mathcal{W}$, δ ile uyumlu ve $\varphi_* \in \overline{\mathcal{W}}$ olduğundan $A_k\overline{\delta}B_k$ olur. Dolayısıyla $A_k \subseteq B_k$ ve $\varphi_{A_kB_k} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta}$ olur.

Şimdi $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \varphi_{A_iB_i} \leq {\varphi_*}^3$ olduğunu görelim. 2. gözlem nedeniyle $B_k = {\varphi_*}^3(P_{s_k}) \subseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olacak biçimde bir k vardır. 3 durum söz konusudur. $Z = \emptyset$ ise açıkça $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \varphi_{A_iB_i}(Z) \subseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olur. $Z \neq \emptyset$, $Z \subseteq A_k$ ise $\varphi_{A_kB_k}(Z) = B_k \subseteq {\varphi_*}^3(Z)$ dir.

Dolayısıyla $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\varphi_{A_iB_i}(Z) \subseteq \varphi_{A_kB_k}(Z) = B_k \subseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olur. $Z \nsubseteq A_k$ ise bu durumda bir $j, j \neq k$ için $Z \nsubseteq Q_{s_j} \Longrightarrow P_{s_j} \subseteq Z \Longrightarrow B_j = {\varphi_*}^3(P_{s_j}) \subseteq {\varphi_*}^3(Z) \Longrightarrow$ $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\varphi_{A_iB_i}(Z) \subseteq \varphi_{A_jB_j}(Z) = B_j \subseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olur. Dolayısıyla $\bigcap\limits_{i=1}^{n}\varphi_{A_iB_i}(Z) \subseteq {\varphi_*}^3(Z)$ olur. Böylece $\varphi_* \leq \varphi \in \overline{\mathcal{U}}^\delta$ ve dolayısıyla $\overline{\mathcal{W}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}^\delta$ olur. Sonuç olarak $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}^\delta$ 'dur. ■

4.4.21. Sonuç : *$(S, \mathcal{S}, \delta_1)$, $(S, \mathcal{S}, \delta_2)$ di-ekstrem doku uzayları ve $\delta_1 < \delta_2$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U}^{\delta_1} \subseteq \mathcal{U}^{\delta_2}$ olur.*

Kanıt: $\overline{\mathcal{U}}^{\delta_1}_{\mathcal{SB}} \subseteq \overline{\mathcal{U}}^{\delta_2}_{\mathcal{SB}}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\varphi_{AB} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta_1}_{\mathcal{SB}}$ olsun. Tanım gereği $A\overline{\delta}_1B$ dir. $\delta_1 < \delta_2$ olduğundan $A\overline{\delta}_2B$ ve dolayısıyla $\varphi_{AB} \in \overline{\mathcal{U}}^{\delta_2}_{\mathcal{SB}}$ olur. ■

4.4.22. Teorem : $(S, \mathcal{S}, \mathcal{U}), (T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ *difonksiyonel düzgün doku uzayları, $\mathcal{V}$ tamamiyle sınırlı ve $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \to (T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ bir difonksiyon olsun. Bu durumda (f, F), $\mathcal{U}-\mathcal{V}$ düzgün ikili süreklidir ancak ve ancak (f, F), ekstrem ikili süreklidir.*

Kanıt: [25]'deki teorem 4.9'un kanıtı uyarlanarak bir yön kolayca gösterilebilir. Diğer yönü gösterelim. $\delta_{\mathcal{U}}$ tarafından üretilen tamamiyle sınırlı didüzgünlüğü $\mathcal{W}$ ile gösterelim. Öncelikle eğer $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \delta_{\mathcal{U}}) \to (T, \mathcal{T}, \delta_{\mathcal{V}})$ ekstrem ikili sürekli ise $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{W}) \to (T, \mathcal{T}, \mathcal{V})$ nin $\mathcal{W}-\mathcal{V}$ düzgün ikili sürekli olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için sonuç 4.4.8 gereği her $\varphi \in \overline{\mathcal{V}}, (f, F)^{-1}(\varphi) \in \mathcal{W}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\overline{\mathcal{V}}$ 'nin bir φ_{CD} alttaban elemanını alalım. $A = f^{\leftarrow}C$ ve $B = f^{\leftarrow}D$ diyelim. Bu durumda (f, F), ekstrem ikili sürekli olduğundan $A\overline{\delta}_{\mathcal{V}}B$ 'dir ve φ_{AB}, $\overline{\mathcal{W}}$ 'nin bir alttaban elemanı olur.

$\varphi_{AB} \leq (f, F)^{-1}(\varphi_{CD})$ olduğu iddiasını kanıtlayalım. Gösterimleri kolaylaştırmak için, $\varphi^* = (f, F)^{-1}(\varphi_{CD})$ ile gösterelim.

$$\varphi^*(Z) = \begin{cases} \emptyset & \text{Eğer } f^{\rightarrow}Z = \emptyset \text{ ise,} \\ f^{\leftarrow}D & \text{Eğer } f^{\rightarrow}Z \subseteq C \text{ ise,} \\ S & \text{Eğer } f^{\rightarrow}Z \nsubseteq C \text{ ise} \end{cases}$$

$$\varphi_{AB}(Z) = \begin{cases} \emptyset & \text{Eğer } Z = \emptyset \text{ ise,} \\ f^{\leftarrow}D & \text{Eğer } f^{\rightarrow}Z \subseteq A = f^{\leftarrow}C \text{ ise,} \\ S & \text{Eğer } Z \nsubseteq A = f^{\leftarrow}C \text{ ise} \end{cases}$$

3 durum söz konusudur.

1. Durum: Eğer $Z = \emptyset$ ise, bu durumda $\varphi_{AB}(Z) = \emptyset \subseteq \varphi^*(Z) = \emptyset$.

2. Durum: Eğer $Z \subseteq A = f^{\leftarrow}C$ ise, bu durumda $f^{\rightarrow}Z \subseteq f^{\rightarrow}A = f^{\rightarrow}f^{\leftarrow}C \subseteq C$. Böylece $\varphi_{AB}(Z) = f^{\leftarrow}D \subseteq \varphi^*(Z) = f^{\leftarrow}D$.

3. Durum: Eğer $Z \not\subseteq A$ ise, bu durumda $f^{\rightarrow}Z \not\subseteq C$ olur. Çünkü aksine eğer $f^{\rightarrow}Z \subseteq C$ olsaydı bu durumda $Z \subseteq f^{\leftarrow}f^{\rightarrow}Z \subseteq f^{\leftarrow}C = A$ olur ve bir çelişki elde ederdik. Böylece $\varphi_{AB}(Z) = S \subseteq \varphi^*(Z) = S$ ve $\varphi_{AB} \leq \varphi^*$ olur. Sonuç olarak (f, F), $\mathcal{W} - \mathcal{V}$ düzgün ikili süreklidir.

Sonuç 4.4.19 gereği $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ olduğu biliniyor. Bu nedenle (f, F), $\mathcal{U} - \mathcal{V}$ düzgün ikili süreklidir ve kanıt tamamlanmış olur. ■

[18] nolu kaynakta belirtildiği üzere; tamamiyle ikili düzenli bir ditopoloji ile uyumlu bir didüzgünlük vardır. Ayrıca bir düzgün uzayın ürettiği düzgün ditopoloji, tamamiyle ikili düzenlidir ve böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.4.23. Sonuç : *$(S, \mathcal{S})$ bir doku ve (τ, κ) onun üzerinde bir ditopoloji olsun. (τ, κ) tamamiyle ikili düzenlidir ancak ve ancak $(S, \mathcal{S})$ üzerinde (τ, κ) ile uyumlu bir di-ekstremite vardır.*

Tamamiyle ikili düzenli bir ditopoloji'den doğrudan uyumlu bir di-ekstremite elde etmenin yolu aşağıdaki önermede gösterilmiştir.

4.4.24. Önerme : *$(S, \mathcal{S}, \tau, \kappa)$ bir tamamiyle ikili düzenli ditopolojik doku uzayı olsun. "$A\overline{\delta}B \iff A \subseteq f^{\leftarrow}P_0$ ve $F^{\leftarrow}Q_1 \subseteq B$ olacak şekilde bir ikili sürekli $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{I}, \mathcal{I})$ difonksiyonu vardır" biçiminde tanımlayalım. Bu durumda $\delta = (\overline{\delta}, \overline{\delta}^{-1})$, (τ, κ) ile uyumlu bir di-ekstremitedir.*

Kanıt: (E1) $A = \emptyset$ olsun. Her $B \in \mathcal{S}$ için, $A\overline{\not\delta}B$ olduğunu gösterelim. $\emptyset \in \kappa$ olduğundan ve (τ, κ) tamamiyle koregüler olduğundan $\emptyset \subseteq f_s^{\leftarrow}P_0$ ve $F_s^{\leftarrow}Q_1 \subseteq Q_s$ olacak şekilde $(f_s, F_s) : (S, \mathcal{S}) \to (\mathbb{I}, \mathcal{I})$ ikili sürekli difonksiyon vardır. Bu her $s \in S$ için geçerli olduğundan özel olarak $P_s \not\subseteq B$ biçimindeki her s için de geçerlidir. şimdi Eğer $(f, F) =$

$\bigsqcap_{P_s \not\subseteq B} (f_s, F_s)$ denilirse, bu durumda (f, F) bir ikili sürekli difonksiyon ve $\emptyset \subseteq f^{\leftarrow} P_0$ ve $F^{\leftarrow} Q_1 \subseteq Q_s$ olur. Sonuç olarak $\emptyset \overline{\delta} B$ 'dır. Benzer biçimde, eğer $B = S$ bu durumda her $A \in \mathcal{S}$ için, $A \overline{\delta} B$ olur.

(E2), (E3) Tanımdan açıkça görülür.

(E4) $A \overline{\delta} B$ olsun. Tanım gereği, $A \subseteq f^{\leftarrow} P_0$ ve $F^{\leftarrow} Q_1 \subseteq B$ olacak şekilde $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (S_i, \mathcal{S}_i)$ vardır. Diğer taraftan, $\phi_1, \phi_2 : \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ noktasal fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\phi_1(y) = \begin{cases} 2y & \text{Eğer } 0 \leq y < \frac{1}{2} \text{ ise,} \\ 1 & \text{Eğer } \frac{1}{2} \leq y \text{ ise.} \end{cases}$$

$$\phi_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{Eğer } 0 \leq y < \frac{1}{2} \text{ ise,} \\ 2y - 1 & \text{Eğer } \frac{1}{2} \leq y \text{ ise.} \end{cases}$$

ϕ_1 hem de ϕ_2 karşılık gelen $(g_1, G_1), (g_2, G_2) : (\mathbb{I}, \mathcal{J}) \to (\mathbb{I}, \mathcal{J})$ vardır $g_1^{\leftarrow}(Z) = G_2^{\leftarrow}(Z) = \phi_1^{-1}(Z)$ ve $g_2^{\leftarrow}(Z) = G_2^{\leftarrow}(Z) = \phi_2^{-1}(Z)$ her $Z \in \mathcal{J}$ için. Kolayca gösterilebilir ki $(g_1, G_1), (g_2, G_2)$ ikili süreklidirler.

Şimdi $(f_1, F_1) = (g_1, G_1) \circ (f, F)$, $(f_2, F_2) = (g_2, G_2) \circ (f, F)$ ve $E = f^{\leftarrow} Q_{\frac{1}{2}}$ diyelim. $(g_1, G_1), (g_2, G_2), (f, F)$ are ikili sürekli olduğundan, $(f_1, F_1), (f_2, F_2)$ de ikili süreklidir. Ayrıca $A \subseteq f^{\leftarrow}(P_0) = f^{\leftarrow}(\phi_1(P_0)) = f^{\leftarrow}(g_1^{\leftarrow}(P_0)) = f_1(P_0)$ olduğu görülür. $F_1^{\leftarrow}(Q_1) = F_1^{\leftarrow}(G_1^{\leftarrow}(Q_1)) = F^{\leftarrow}(\phi_1^{-1}([0, 1)) = F^{\leftarrow}[0, \frac{1}{2}) = F^{\leftarrow} Q_{\frac{1}{2}} = E$. Benzer şekilde $E \subseteq f_2^{\leftarrow} P_0$ ve $F_2^{\leftarrow} Q_1 \subseteq B$ 'dir. Böylece $A \overline{\delta} E$ ve $E \overline{\delta} B$ elde edilir.

(E5) $A \overline{\delta} B$ olsun. Bu durumda $A \subseteq f^{\leftarrow} P_0$ ve $F^{\leftarrow} Q_1 \subseteq B$ olacak şekilde $(f, F) : (S, \mathcal{S}) \to (S_i, \mathcal{S}_i)$ vardır. $P_0 = \{0\} \subseteq Q_0 = [0, 1)$ olduğundan $f^{\leftarrow} P_0 \subseteq F^{\leftarrow} Q_1$ 'dir. Böylece $A \subseteq B$ olur. ■

Bu bölümü di-ekstrem uzaylar kategorisi ve didüzgün uzaylar kategorisi ile ilgili kısa bir not düşerek tamamlayacağız. Difonksiyonel düzgünlükler ve düzgün ikili sürekli difonksiyonlar kategorisini **dfUnif** ile gösterelim. Tamamiyle sınırlı difonksiyonel düzgünlükler ve düzgün ikili sürekli difonksiyonlar kategorisini **dfTbUnif** ile ve son olarak di-ekstremite ve ekstrem ikili sürekli difonksiyonlar kategorisini ise **dfEx** ile gösterelim.

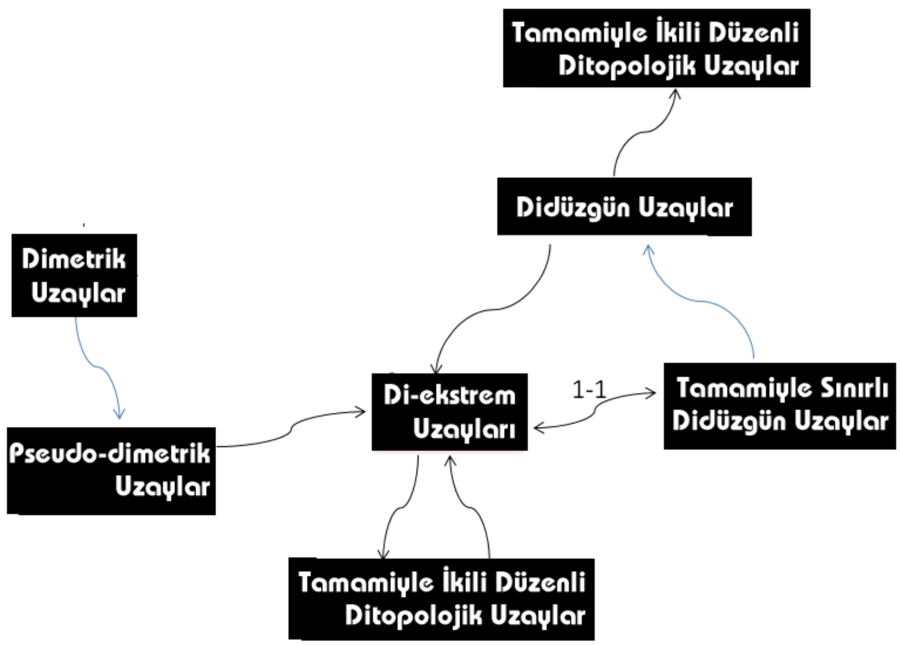
$(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ herhangi bir difonksiyonel düzgünlük olsun. Şimdi $\mathcal{U}$ tarafından indirgenen $\delta_{\mathcal{U}}$ di-ekstremitesini ele alalım. Teorem 4.4.18 gereği, $\delta_{\mathcal{U}}$ ile uyumlu bir $\mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}}$ tamamiyle sınırlı difonksiyonel düzgünlüğü vardır. Kısalık olsun diye $\mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}}$ difonksiyonel düzgünlüğünü $p\mathcal{U}$ ile gösterelim. Eğer $\mathcal{U}$ tamamiyle sınırlı ise, bu durumda sonuç 4.4.20 gereği $\mathcal{U} = p\mathcal{U}$ olur. Böylece **dfTbUnif** kategorisinin nesneleri ile **dfEx** kategorisinin nesneleri arasında birebir olarak karşılaştırılabileceği görülür. Şimdi $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \delta_1) \to (T, \mathcal{T}, \delta_2)$ ekstrem ikili sürekli difonksiyon olsun. Bu durumda Teorem 4.4.22 gereği, $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{U}_{\delta_1}) \to (T, \mathcal{T}, \mathcal{U}_{\delta_2})$ düzgün ikili sürekli difonksiyondur. Bu bilgiler ışığında, **dfTbUnif** ile **dfEx** kategorilerinin izomorfik olduğu görülür.

Şimdi **dfUnif** kategorisinden **dfTbUnif** kategorisine bir yansıtıcı (İng: reflector) olduğunu görelim. $(S, \mathcal{S}, \mathcal{U})$ bir difonksiyonel düzgünlük olsun. Bu durumda açıkça $(i, I) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \to (S, \mathcal{S}, p\mathcal{U})$ düzgün ikili süreklidir. Her $(T, \mathcal{T}, \mathcal{V}) \in Ob(\textbf{dfTbUnif})$, $(f, F) : (S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \to (T, \mathcal{T}, \mathcal{V}) \in hom(\textbf{dfUnif}))$ için, aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd}
(S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \arrow[r, "(i,I)"] \arrow[d, "(f,F)"'] & (S, \mathcal{S}, p\mathcal{U}) \arrow[dl, dotted, "(f,F)"] \\
(T, \mathcal{T}, \mathcal{V}) &
\end{tikzcd}$$

Böylece $(S, \mathcal{S}, \mathcal{U}) \mapsto^{(i,I)} (S, \mathcal{S}, p\mathcal{U})$ 'nin bir yansıtıcı olduğu görülür. Sonuç olarak beklenildiği gibi **dfEx** kategorisi, **dfUnif** kategorisinin bir dolu, yansımalı altkategorisine izomorftur.

Şekil 3'deki diyagram di-ekstremiteler, didüzgünlükler, dimetrik ve ditopoloji arasındaki ilişkiyi özetlemektedir. Sonuç olarak di-ekstrem uzaylar, tamamiyle sınırlı didüzgün uzayların bir karakterizasyonunu vererek dimetrik, didüzgün ve ditopolojik yapılar arasında önemli bir boşluğu doldurmaktadır.



Şekil 3: Di-ekstremite ve diğer yapılar arasındaki ilişki

Kaynaklar

[1] Ärtico G., Moresco, R., 1984, *Fuzzy Proximities and Totally Bounded Fuzzy Uniformities*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 99, 320-337.

[2] Birkhoff G., 1967, Lattice theory, American Mathematical Society

[3] Brown, L. M., 1993, *Ditopological fuzzy structures I*, Fuzzy Systems a A. I M. 3 (1).

[4] Brown, L. M., 1993, *Ditopological fuzzy structures II*, Fuzzy Systems a A. I M. 3 (2).

[5] Brown, L. M., Diker, M., 1998, *Ditopological texture spaces and intuitionistic sets*, Fuzzy Sets and Systems 98, 217-224.

[6] Brown, L. M., Diker M., 1999, Paracompactness and full normality in ditopological texture spaces, J. Math. Anal. Appl. 227(1), 144-165.

[7] Brown, L. M., Ertürk, R., 2000, *Fuzzy sets as texture spaces, I. Representation theorems*, Fuzzy Sets and Systems 110 (2), 227-236.

[8] Brown L. M., Ertürk R., 2000, Fuzzy sets as texture spaces, II. Subtextures and quotient textures, Fuzzy Sets and Systems 110(2), 237-245.

[9] Brown, L. M., Ertürk, R., Dost S., 2004, *Ditopological texture spaces and fuzzy topology I: Basic concepts*, Fuzzy Sets and Systems 147, 171-199.

[10] Brown, L. M., Ertürk, R., Dost S., 2004, *Ditopological texture spaces and fuzzy topology II: Topological Consideration*, Fuzzy Sets and Systems 147, 201-231.

[11] Brown, L. M., Ertürk, R., 2006, *Ditopological texture spaces and fuzzy topology III: Seperation axioms*, Fuzzy Sets and Systems 157, 1886-1912.

[12] Chang, C. L., 1968, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl, Sayı 24, 182-190.

[13] Giertz, G., Hoffman, Keimel K. H., Lawson K., Mislove J.D. and Scott, M., 1980, Compendium of continuous lattices, Springer- Verlag.

[14] Efremovic, V. A., 1952, *The geometry of proximity*, Mat. Sb. 31(73), 189-200 (Rusça).

[15] Katsaras, A., 1980, *Fuzzy Proximity Spaces*, J. Math. Anal. Appl. 75, 571-583.

[16] Leader, S., 1963, *On duality in proximity spaces*, Am. math. Soc. 13, 518-523.

[17] Naimpally, S. A., Warrack, B. D., 1970, *Proximity spaces*, Comb. Univ.

[18] Özçaĝ, S., Brown, L. M., 2003, *Di-uniform texture spaces* , Appl. General Topol. 4 (1), 157-192.

[19] Özçağ, S., 2004, Düzgün doku uzayları, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara, (Türkçe)

[20] Özçaĝ, S., Yıldız, F., Brown, L. M., 2005, *Convergence of Regular Difilters and the Completeness of Di-uniformities* , Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 34S, 53-68.

[21] Özçaĝ, S., Brown, L. M., 2006, *A textural view of the distinction between uniformities and quasi uniformities*, Topology and Its Applications 153, 3294-3307.

[22] Özçaĝ, S., Brown, L. M., Krsteska, B., *Di-uniformities and Hutton Uniformities*, in press.

[23] Pervin, W. J., 1963, *Quasi-proximities for topological spaces*, Math. Annalen. 150(73), 325-326.

[24] Yildiz, G., 2004, Yüksek Lisans Tezi, Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara, (Türkçe).

[25] Yildiz, G., Erturk R., 2009, *Di-extremities on Textures.*, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics 38(3), 243-257.

[26] Zadeh, L. A., 1965, *Fuzzy Sets.*, Inform. Contr. 8, 333 - 353.

Dizin