MATEMATİK LİSANS DERSLERİNDEKİ TARTIŞMALARIN TOULMIN MODELİNE GÖRE ANALİZİ

ANALYSIS OF ARGUMENTATION AT THE UNDERGRADUATE MATH COURSES BASED ON THE TOULMIN MODEL

SAYGIN DİNÇER

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

DOKTORA TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :…......................................
Prof. Dr. Haluk SORAN

Üye (Danışman) :.…....................................
Prof. Dr. Ali BÜLBÜL

Üye (Danışman) :.…....................................
Prof. Dr. Behiye UBUZ

Üye :...
Prof. Dr. Petek Aşkar

Üye :...
Prof. Dr. Arif Altun

ONAY

Bu tez ...../...../..... tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca kabul edilmiştir.

Prof.Dr. Adil DENİZLİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

MATEMATİK LİSANS DERSLERİNDEKİ TARTIŞMALARIN TOULMIN MODELİNE GÖRE ANALİZİ

Saygın Dinçer

ÖZ

Bu çalışmanın amacı, matematik lisans derslerinde gerçekleştirilen tartışmalarda, öğrencilerin attıkları adımların yapısını özellikle yaptıkları muhakemeleri, birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan etkileşimlerini incelemek ve Toulmin tarafından alandan bağımsız olarak önerilen Toulmin tartışma modelinin söz konusu tartışmaların yapısını incelemek için nasıl kullanılacağını araştırmaktır.

Çalışma 2008 - 2009 yaz dönemi , 2009 – 2010 bahar dönemi ve 2010-2011 bahar döneminde, Ankara'da bir üniversitenin matematik öğretmenliği programı ikinci ve üçüncü sınıfında öğrenim görmekte olan öğrencilerle gerçekleştirilmiştir. Bu çalışma katılımcı olmayan bir gözlem çalışmasıdır. 2008-2009 öğretim yılında altı hafta, 2009-2010 öğretim yılında sekiz hafta ve 2010-2011 öğretim yılında altı hafta boyunca matematik lisans derslerindeki tartışmalar video kamera ile kayıt altına alınmıştır.

Çalışma sonunda Toulmin modeline eklenebilecek yeni bileşenler bulunmuş ve bu bileşenler arasında etkileşim gözlemlenmiştir. Bu bileşenler rehber desteği ve rehber yönlendirmesidir. Rehber desteği kendi içinde onay, referans ve sonlandırıcı olmak üzere üç sınıfa ayrılmıştır. Bu bileşenlerden onay rehber desteği ve sonlandırıcı rehber desteği bileşenleri hemen hemen tüm tartışmalarda, referans rehber desteği ise tanım koyma haricindeki tartışmalarda yoğun olarak gözlemlenmektedir. Bunun dışında gerekçeler dedüktif ve referans olmak üzere iki sınıfa ayrılmıştır. Dedüktif gerekçe her tartışma türünde ortaya çıkabilirken, referans gerekçe tanım koyma haricindeki tartışmalarda gözlemlenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematik eğitimi, tartışma, argümantasyon, Toulmin Modeli.

Danışman : Prof. Dr. Ali BÜLBÜL, Hacettepe Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı.

Danışman : Prof. Dr. Behiye UBUZ, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı.

ANALYSIS OF ARGUMENTATION AT THE UNDERGRADUATE MATH COURSES BASED ON THE TOULMIN MODEL

Saygın Dinçer

ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate the structure of steps taken by students in argumentations at the undergraduate math courses, purposely their reasoning and interaction with each other and their teachers, and how to use the Toulmin argumentation model proposed by Toulmin as field-independent for exploring the structure of arguments.

This study was conducted with students of second and third class of a university in Ankara in 2008-2009 summer semester, 2009 – 2010 spring semester and 2010-2011 spring semester. In this nonparticipant observation study, argumentations at the undergraduate math courses were recorded by a video camera during six weeks in 2008-2009 academic year, eight weeks in 2009-2010 academic year and six weeks in 2010 – 2011 academic year.

As a result of the study, new components were identified for adding to the Toulmin argumentation model and interactions were observed between these new components. They were named guide-backing and guide-redirecting. Guide backing was divided into three classes : approval, reference and terminator. Approval guide-backing and terminator guide-backing occured in almost all argumentations and reference guide-backing occured in almost all argumentations except argumentations on putting a definition. Furthermore, warrants were divided into two classes : deductive and reference. Deductive warrant occured in any type of an argumantation, reference warrant also occured in any type of an argumentation except in an argumentation for putting a definition.

Keywords: Mathematics education, argument, argumentation, The Toulmin Model

Advisor : Prof. Dr. Ali BÜLBÜL, Hacettepe University, Faculty of Education, Department of Secondary Science and Mathematics Education, Major in Mathematics Education.

Advisor : Prof. Dr. Behiye UBUZ, Middle East Technical University, Faculty of Education, Department of Secondary Science and Mathematics Education, Major in Mathematics Education.

TEŞEKKÜR

Araştırmamın her aşamasında ve tezimin her satırında benden bilgi, birikim ve yardımlarını esirgemeyen, değerli katkıları ve yorumlarıyla beni destekleyen danışmanım Sayın Prof. Dr. Ali BÜLBÜL'e teşekkürlerimi sunarım.

Bilgisini, deneyimini ve tecrübesini esirgemeyen, değerli yorumlarıyla beni yönlendiren danışmanım Sayın Prof. Dr. Behiye UBUZ'a teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme komitelerinde yer alan, öneri ve eleştirileriyle farklı bakış açıları kazanmamı sağlayan Sayın Prof. Dr. Haluk Soran'a ve Sayın Prof. Dr. Petek Aşkar'a teşekkür ederim.

Bu tezin ortaya çıkması için gerekli olan verileri toplamam için gösterdikleri fedakarlıklardan dolayı Sayın Doç. Dr. Ali Erdoğan'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Şenol Dost'a, Sayın Dr. Ayşegül Altay Uğur'a teşekkür ederim.

Tartışma analizlerinde görüşlerine başvurduğum dostum Dr. Yasemin Sağlam'a teşekkür ederim.

Beni bu günlere getiren ve haklarını ödememin mümkün olmadığını iyi bildiğim annem, babam ve kardeşim Ceylan'a, çalışmamın her aşamasında gösterdikleri anlayış ve güven için şükranlarımı sunarım.

Doktora çalışmalarımın bir bölümü sırasında Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında maddi destek veren Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na teşekkür ederim.

Son olarak değerli jüri üyelerine eleştiri, görüş ve önerileri için teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇİZELGELER DİZİNİ

EKLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Üniversitelerin Matematik ve Matematik Öğretmenliği programlarındaki matematik derslerinde en önemli yeri kanıt yapma tutar. Kanıtın matematikçilerin temel aktivitesi, bununla beraber öğrenciler için öğrenilmesi zor bir kavram olduğu kabul edilmektedir. (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009). Özellikle son yirmi yıldır kanıt öğrenimi ve öğretimi üzerine çok sayıda makale yazılmıştır. Tüm bunlar kanıt konusunun matematik eğitiminde önemli derecede göze çarptığının işaretleridir (Hanna, 2000). Bunun bir uzantısı olarak, son zamanlarda, üniversite düzeyinde de kanıt üzerine bir çok çalışma yapılmıştır (Alcock ve Simpson, 2004, 2005; Dorier vd. , 2002 ; Epp, 1998; Jones, 2000; Larsen ve Zandieh, 2008; Leron, 1985; Moore, 1994; Portnoy vd. , 2006; Raman, 2003; Recio ve Godino, 2001; Smith, 2006; Segal,2000; Stylianides vd, 2004; Uhlig, 2002; Weber 2001, 2004, 2005).

Kanıt yapmanın merkezinde ise öğrencilerin kendi aralarında veya öğretmenleriyle olan tartışmalarda geliştirdikleri argümanlar yatar. Argüman kavramı için Büyük Türkçe Sözlük'te kanıt, tez, iddia, sav karşılıkları verilmektedir. Ancak, matematik eğitimi alanında çalışan araştırmacıların çoğu argüman kavramını, bir iddianın ortaya atılması ve bu iddianın savunulması anlamında kullanmıştır. (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009; Knipping, C., 2008). İnformel mantığın kurucularından sayılan Toulmin (1958) de argüman kavramını bu anlamda kullanmıştır. Bir tartışmanın sahip olduğu yapı için Toulmin tarafından tanımlanan altı bileşenli bir örüntü zaman içinde Toulmin modeli adını almıştır. Bu çalışmada Toulmin modeli yoğun olarak kullanılacağından, argüman kavramı bir veriden türetilen bir iddianın savunulması anlamında kullanılacaktır. Argümantasyon ise, muhatabımız için anlaşmazlığa neden olan bir bakış açısının kabul edilebilirliğini artırmak veya azaltmak amacıyla yapılan sözel ve sosyal bir muhakeme aktivitesidir. Bu aktivite, rasyonel bir karara varmadan önce söz konusu bakış açısını savunmak veya reddetmek amacıyla bir takım önermeler sunarak gerçekleştirilir (Eemeren vd., 1996). Bir başka deyişle argümantasyon, birinin bir ifadeye verdiği epistemik değeri değiştirmesine yönelik bir argümanın geliştirildiği bir süreç olarak kabul edilebilir. Kısaca; argümantasyon, birini bir ifadenin doğruluğuna ya da yanlışlığına ikna etmek için kullanılan retorik araçlardan ibarettir.

Argümantasyonun amacı, birinin bakış açısını savunmak veya reddetmektir. “Argümantasyon” kavramı için yukarıda verilen tanımlara karşın “tartışma” kavramı Aldağ (Aldağ, 2005, akt. Aldağ, 2006) tarafından şu şekilde verilmiştir. Tartışma, birbirine benzer ya da farklı pozisyonlara ve bakış açılarına sahip grup ve bireylerin, bir problemi çözmek, bir fenomeni anlamak veya bir konuda karar vermek amacıyla alternatif bakış açılarını değerlendirmeye aldıkları süreç, bu süreç içerisindeki işlemler bütünü ve bu değerlendirme sonucu ortaya çıkan bilişsel ürünlerdir (Aldağ, 2005, akt. Aldağ, 2006). Bu tanımlardan dolayı argümantasyon ve tartışma kavramlarını eş anlamlı olarak kullanacağız. Sınıf ortamında tartışma ise öğrencilere; fikirlerini test etmesi, başkalarının (sınıf arkadaşlarının ya da öğretmenin) fikrini dinleyip bunları kendi fikri ile birleştirmesi, fikirlerini kelimelere dökerek düşüncelerini güçlendirmelerine ve dolayısıyla anahtar kavramlar için daha derin bir anlayış oluşturmalarına izin vermek (McCrone 2005) anlamında kullanılacaktır. Kanıt kavramı ise, bir ifadenin teorik geçerliğini gösteren mantıksal bir dizi (Duval, 1995 akt. Antonini ve Mariotti, 2008) olarak kullanılacaktır.

Lisans düzeyindeki öğrenciler matematik kitaplarındaki ve ders notlarındaki kanıtları anlamaya / ezberlemeye çalışmak için çok vakit harcamakta ve bunu kanıtlarındaki argümanları sınavlarda öğretmenlerine göstermek amacıyla yapmaktadırlar (Mejia-Ramos ve Inglis, 2009). Lisans düzeyinde matematik eğitimi alan öğrencilerin kanıt yapma ile nasıl başa çıktıklarını daha iyi anlamak için öğrencilerin kanıt yaparken geliştirdikleri argümanların incelenmesi gerekmektedir. Özellikle son on yılda tartışma ve kanıta biçilen rol ve önem, bu alanda devasa çeşitlilikte araştırmaya neden olmuştur (Mariotti ve Balacheff, 2008). Bunun dışında matematik eğitimindeki temel konulardan biri, matematik sınıflarındaki tartışma ve söylemlerin oynaması gereken roldür (Sfard, 2001).

1.1. Tartışma Yaklaşımları

Tartışma yaklaşımları mantıksal, retorik ve diyalektik tartışma olmak üzere üç grupta sınıflandırılmaktadır (Brockriede, 1980; Ehninger ve Brockriede, 1978, akt. Aldağ, 2006).

Çizelge 1.1. Tartışma yaklaşımlarında işlevler ve odak (Aldağ,2006)

Yaklaşımlar	**İşlevi**	**Odak**
Mantık Formel Mantık İnformel Mantık	Ürün	Hangi ölçütler bağlamında tartışma geçerli veya yeterli hale gelir?
Retorik	Süreç	Tartışan, karşısındakini nasıl ikna edebilir ?
Diyalektik	İşlem	Tartışmanın amacına ulaşması için ne tür düzenlemeler yapılmalıdır?

Ürün işlevinde tartışma mantıksal boyutuyla ele alınır. Konuşmacılar veya eleştirenler, dil ürünleri olarak nitelendirilebilecek tartışma yapılarını kontrol edebilirler. Süreç işlevi retoriği simgelemektedir. Süreç işlevinde, tartışanın karşısındakini ikna edebilmesi önem kazanmaktadır. Tartışmanın işlem boyutu diyalektik yaklaşımı temsil etmektedir. İşlem işlevinde ise tartışmada ilişkilerin düzenlemesi önem kazanır (Aldağ, 2006).

Klasik mantık olarak da adlandırılan formel mantık Aristotle yaklaşımıdır. Bu yaklaşım, öncül veya öncüllerden akıl yürütme vasıtasıyla bir sonuca gidilmesini benimser. Formel mantığın dayandığı üç ilke vardır (Hançerlioğlu, 1989, akt. Aldağ, 2006): Özdeşlik ilkesi (bir şey kendisinin aynısıdır), çelişmezlik ilkesi (bir şey hem doğru hem yanlış olamaz) ve üçüncü durumun olanaksızlığı ilkesi (bir şey ya doğrudur ya yanlıştır, üçüncü bir olasılık yoktur). Matematik gibi formel mantığın kullanıldığı alanlarda bir tartışma ya geçerlidir ya da geçersizdir.

Toulmin "Argümanın Kullanımları (The Uses of Argument, 1958)" kitabında matematiksel mantığın ve yirminci yüzyıl epistemolojisinin formel kriterlerinin, günlük yaşantımızda tartışmaları incelemek için kullandığımız yöntemlere uygulanabilirliğinin çok az olduğunu savunmuştur (Hitchcock D., ve Verheij, B., 2006). İnformel mantık, kurallarla, ilkelerle sınırlı değildir. Öncüllerle sonuçlar arasındaki ilişkiler zayıf veya kuvvetli olabilir; öncüllerin doğruluğu sonucun doğruluğuna tam bir güvence sağlamamakla birlikte ona, değişen derecelerde olasılık kazandırır. Bu nedenle bu tür tartışmalarda sonuçlar değiştirilemeyecek, kesin ifadelerle değil, olasılıklarla belirtilir (Fisher ve Sayles, 1966, akt. Aldağ,2006).

1.2. Formel Mantığın Yetersizliği

İlk bakışta matematik sınıflarında yapılan tartışmaların analizinin formel mantık çerçevesinde yapılması daha doğru gibi görülebilir. Fakat bu aşağıdaki nedenlerden dolayı doğru değildir.

Birincisi, öğrenciler mantıksal düşünce parçaları geliştirme sürecinde olduklarından formel mantığın "mantıksız" olarak tanımlayacağı fakat öğrencilerin ilerideki düşünce gelişimi için önemli olan düşüncelerini açıklayabilirler (Knipping, 2008). Formel mantığa dayalı bir analiz bir düşünceyi "mantıksız" olarak tanımladıktan sonra analize devam edemez.

İkincisi, sınıf ortamında tartışma kavramını "öğrencilere; fikirlerini test etmesi, başkalarının (sınıf arkadaşlarının ya da öğretmenin) fikrini dinleyip bunları kendi fikri ile birleştirmesi, fikirlerini kelimelere dökerek düşüncesini güçlendirmesine ve dolayısıyla anahtar kavramlar için daha derin bir anlayış oluşturmasına izin vermek (McCrone 2005)" anlamında kullanılacağı belirtilmişti. Toulmin de tartışmayı desteklenen iddialar bütünü olarak ele alır. "Desteklenen iddialar" anlayışı tartışmada iddiaların yeniden formüle edilebileceği anlamına işaret etmektedir (Aldağ, 2006). Formel mantıkta tartışma yalnızca nedenlerden sonuca gitmek olarak algılanır. Formel mantık varsayımsal, nedensel, koşullu, geçici tartışma biçimlerine veya tanımlama, sınıflandırma, açıklama, değerlendirme, karar verme, öneride bulunma gibi farklı tartışma amaçlarını karşılamakta yetersiz kalmaktadır (Brockriede, 1980, akt. Aldağ, 2006).

Üçüncüsü, formel mantığın kuralları alandan bağımsızdır. Halbuki bir tartışma analiz edilirken tartışmanın ait olduğu alan dikkate alınmalıdır. Örneğin, matematik alanında yapılan bir tartışmadaki argümanların değerlendirilmesinde kullanılacak kurallar ile hukuk alanında yapılan bir tartışmada öne sürülen argümanların değerlendirilmesinde kullanılacak kuralların birbirinden farklı olması doğaldır.

Dördüncüsü, formel mantıkta tartışma yalnızca nedenlerden sonuca gitmek olarak algılandığı için tartışmanın bir sonu vardır. Oysaki her tartışmanın bir sonu olmak zorunda değildir. Örneğin siyasi alanda yapılan bir tartışmada sonuç olmayabilir. Bu yüzden bu tür tartışmaları analiz etmek için formel mantık yetersiz kalmaktadır.

Toulmin(1958) alandan bağımsız fakat kullanıldığı içeriğe göre karakterize edilebilen bir tartışma modeli önermiştir. Alan (field) kavramı bir alandaki kuralları, prensipleri bilen insanlar anlamında kullanılacaktır. Hitchcock ve Verheij (2006), Toulmin'in farklı alanlardaki tartışmaların yapısı ve bu tartışmaların değerlendirilmesinde kullanılan standartların karşılıklı farkları üzerine odaklandığını ve geometrik optik, tarihin yazılması ilmi, sivil davalar, ahlak kuralları ve diğer alanlardaki kanıt standartları ve tartışma şekilleri arasındaki farklılıklar ve benzerlikleri incelediğini belirtmiştir. Bir şeyi öne sürmek suretiyle yapılan bir iddiayı savunan tartışma türü üzerine odaklanan Toulmin, tartışmanın alandan bağımsız özelliklerinin olduğuna dikkat çekmiştir. Toulmin alandan bağımsızlık ile kabaca şunu kast etmektedir : İlk olarak bir problem ortaya koyarız. Bu problem için çözüm olabilecek olan belirli bir düşüncemiz vardır. Aklımızda çözüm olabilecek muhtemel adaylar vardır. Bu adaylardan bazılarını "imkansız", bazılarını "muhtemel", bazılarını da aksi koşullar olmadığı müddetçe "büyük ihtimalle doğru" olarak kabul ederiz. Toulmin, alandan bağımsız olan özellikleri bir örüntü olarak sunmuş ve zaman içinde bu örüntü "Toulmin Modeli" olarak tanınmıştır.

1.3. Toulmin Modeli

Toulmin kendi argüman yapısını kurmadan önce kuracağı yapının daha iyi anlaşılması için bazı teknik terimler tanımlamıştır. Bunlardan ilki bir tartışmanın "alanı"dır. Toulmin, iki argümanın aynı alana sahip olmasını her iki argümanda kullanılan veri ve sonuçların aynı mantıksal tipe sahip olması şeklinde tanımlamıştır. Her iki argümanda kullanılan destek ve sonucun aynı mantıksal tipe sahip olmamasını da argümanların farklı alanlardan gelmesi olarak tanımlamıştır. Örneğin, Öklid'in "Elemanlar" eserindeki kanıtlar bir alana ait iken, denizciliğe ait bir almanağın hazırlanışındaki hesaplamalar farklı bir alana aittir.
Toulmin "Argümanın Kullanımları " kitabında argümanların hangi özelliklerinin alandan bağımsız, hangilerinin alana bağımlı olduğunu beklememiz gerektiğini de

incelemiştir. Toulmin'e göre mahkeme salonlarında, soruların ortaya çıktığı hukuki süreçler ile başlangıçtaki iddiayı desteklemek için tartışmaların kurulduğu rasyonel süreçler arasındaki benzerliğin incelenmesiyle bir takım ipucu yakalamak mümkündür.

Toulmin tartışmayı bir organizmaya benzetir. Tartışma kaba olarak bir anatomik yapıya ve ince olarak da bir fizyolojik yapıya sahiptir. Tartışma tüm ayrıntılarıyla ortaya konduğunda; sayfalarca yer kaplayabilir veya belki de çeyrek saat sürebilir. Bu zaman ve mekan içinde, askıda olan bir problemin tartışmanın başlangıcındaki ifadesinden, nihai bir sonucun sunulmasına kadar olan tartışmanın ilerleme sürecini gösteren ana evreler tespit edilebilir. Bu ana evrelerin her biri birkaç dakika alır veya birkaç paragraf sürer ve tartışmanın başlıca anatomik birimlerini gösterirler. Fakat her paragraf, satırlar düzeyine inilerek incelendiğinde daha ince bir yapı fark edilmektedir ve bu yapı mantıkçıların ağırlıklı olarak ilgilendiği yapıdır. Mantıksal biçim düşüncesinin getirildiği bu seviye tartışmanın fizyolojik seviyesidir ve burada tartışmanın geçerliği eninde sonunda kabul veya reddedilir.

Toulmin'e (1958) göre sorgulama odağımızı değiştirmenin ve tartışmanın ince (fizyolojik) seviyesine yoğunlaşmanın zamanı gelmiştir. Fizyolojik süreçler önemli organların işlevlerini korumada oynadığı rol bakımından önemlidir. Toulmin fizyolojik süreçleri mikro-tartışma olarak adlandırmıştır ve zaman zaman bir gözümüz makro tartışmalarda olmak üzere mikro - tartışmalara da bakılması gerektiğini belirtmiştir.

Aristotle'dan bu yana mikro-tartışmalar incelenirken, tartışmaların çok basit bir şekilde düzenlenmesi adeta gelenek haline gelmiştir. Aristotle yaklaşımına göre, tartışma "küçük öncül, büyük öncül; bundan dolayı sonuç" biçiminde üç önerme ile temsil edilir. Aristotle yaklaşımı iki öncülden bir sonuç çıkarmaya dayanır. Örneğin,

Küçük Öncül : Aristotle bir insandır.

Büyük Öncül : Tüm insanlar ölümlüdür.

Sonuç : Aristotle ölümlüdür.

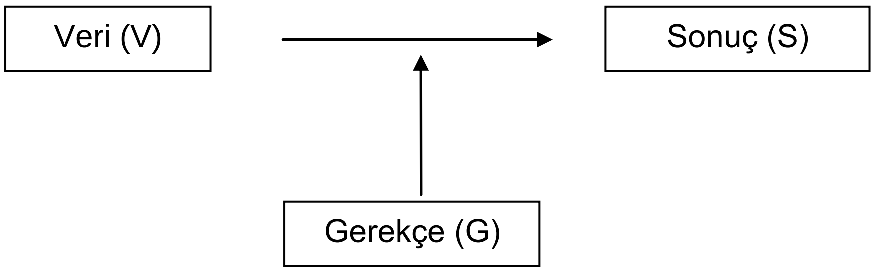
Toulmin'e göre burada yaklaşımın yeteri kadar ayrıntılı olup olmadığı sorusu ortaya çıkmaktadır. Tartışmanın üç önerme ile ifade edilmesi sadelik adına önemli bir değer olmakla beraber son derece pahalıya edinilmiş bir değerdir. Toulmin tartışmalarımızdaki tüm elemanların sadece "küçük öncül", "büyük öncül" ve “sonuç” gibi üç başlık altında doğru dürüst sınıflayıp sınıflayamayacağımızı sormuştur.

Tüm bu sorulara ışık tutması bakımından hukuk ilmindeki tartışmalar ile benzerlik kurmuştur. Bu da doğal olarak geleneksel Aristotle yaklaşımına göre daha büyük bir karmaşıklığa sahip olan bir tartışma modeli kullanımına yol açmıştır. Toulmin’e göre, böyle bir durumda bir hukuk filozofu, bir hukuk davası dersinde hangi tür önermelerin dile getirildiğini ve bu önermelerin, bir iddianın sağlamlığını hangi şekillerde etkilediğini soracaktır. Hukuki olarak söylenen ifadeler farklı işlevlere sahiptir : İddianın ifade edilişi, kimlik saptama kanıtı, anlaşmazlık yaşanan olaylar hakkında tanıklık, bir kanunun yorumlanması veya o kanunun geçerliğinin tartışılması, bir kanunun uygulanmasından muaf olmaya yönelik iddialar, hafifletme talebi, kararlar, cezalar. Hukuktaki tartışmalardan genel rasyonel tartışmalara dönersek bir kez daha, bu tartışmaların aynı derecede karmaşıklığa sahip terimlerle analiz edip edemeyeceğimiz sorusuyla karşı karşıya kalırız. Eğer tartışmalarımızı tam bir mantıksal açıklık ile düzenleyip ve mantıki sürecin doğasını tam olarak anlayacaksak, hukuk için gerekli olan bir tartışma örüntüsünden daha az gelişmiş olmayan bir örüntü kullanmamız gerektiği açıktır.

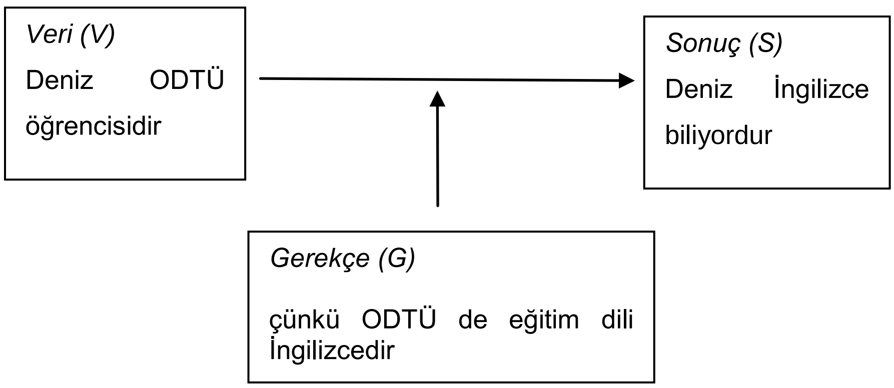
1.3.1. Tartışma Örüntüsü : Veri ve Gerekçeler

Toulmin kendi modelinin sahip olduğu bileşenlerin birbirinden nasıl ayırt edileceğine “Argümanın Kullanımları ” kitabında değinmiştir. Toulmin İlk olarak veri ve gerekçe bileşenleri arasındaki farkı ortaya koymuştur. Aradığımız sonuç (S) ile sonucumuza bir temel olması için başvurduğumuz gerçekler arasında (ki bu gerçekleri Toulmin “veri (V)” olarak adlandırmıştır) net bir ayrım vardır. Eğer tartışmadaki muhatabımızın sorusu “İlerlemek için neye sahipsin ? (What have you got to go on ?)” ise, sonucun dayandığı bilgiyi veya veriyi üretmemiz muhatabımıza cevap verebilir. Veriyi üretmiş olsak bile, bize başka sorular sorulabilir. Bu durumda daha önce yaptığımız gibi gerçeklere dayalı bir bilgi vermek yerine, veriden sonuca nasıl gittiğimizi göstermeliyiz. Yani, bize sorulan soru “ilerlemek için neye sahipsin ? (What have you got to go on ?)” yerine “oraya nasıl gidiyorsun ? (How do you get there ?)” olabilir. Muhatabımız, ortaya koyduğumuz veriden sonuca nasıl gittiğimizi tam olarak anlayamamış veya ikna olmamış olabilir. Bu durumda verimize bir takım maddeler eklemek yerine, kurallar, prensipler, çıkarımlar veya istediğimiz başka bir şey sunarız. Amacımız, tartışmamız için temel görevi gören verimizi savunmak değil bu veriyi bir başlangıç noktası olarak alıp, sonucumuza giden bir adımın uygun olduğunu göstermektir. Bu noktada genel olarak ihtiyacımız olan şey veri ile sonuç arasında köprü görevi görecek olan varsayımsal ifadelerdir. Toulmin, bu tür ifadeleri "gerekçe (G)" olarak adlandırmıştır.

Artık, bir tartışmayı incelemek için gerekli olan örüntünün ilk iskeletini çıkarabilecek bileşenlere sahibiz. Veri ile sonuç arasındaki ilişkiyi yönlü bir ok ile, veriden sonuca giden adımı yani gerekçeyi de yukarıda çizdiğimiz oka doğru yönelmiş olan başka bir yönlü ok ile sembolize edeceğiz.

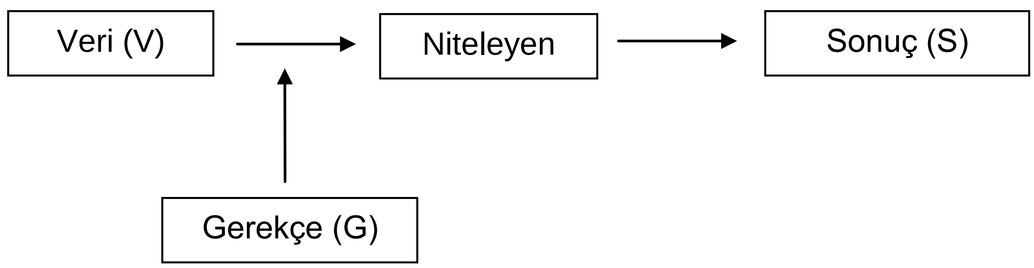


Örneğin, "Deniz ODTÜ de okuyor. ODTÜ nün eğitim dili İngilizce olduğundan, Deniz İngilizce biliyordur" ifadesini yukarıdaki örüntüye göre bileşenlerine ayıralım.

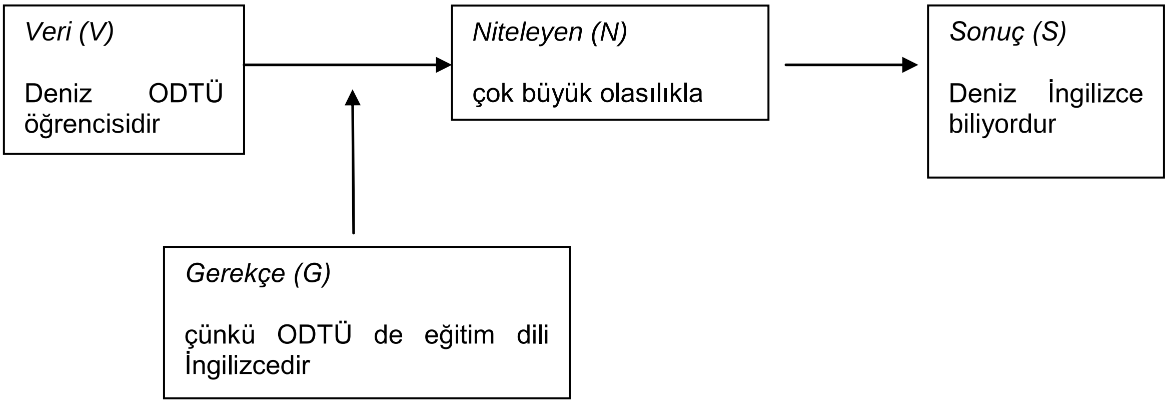


Bu örüntüden açıkça belli olduğu üzere sonuç, veriden direkt olarak çıkmaktadır. Burada gerekçe bir anlamda açıklayıcı ve isteğe bağlıdır. Gerekçenin görevi veriden sonuca doğru atılan adımın geçerliğini göstermektir. Toulmin (1958) gerekçeyi ilk olarak, veri ile sonuç arasında köprü görevi görecek olan varsayımsal ifadeler şeklinde tanımlamasına rağmen, gerekçenin açıklayıcı bir ifade olabileceğini de ifade etmiştir.

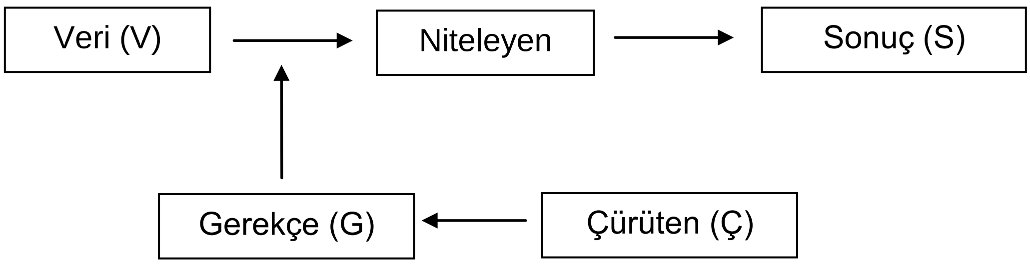
Yukarıda tanımlanan örüntünün iskeleti sadece bir başlangıçtır. Bunun dışında dikkat etmemiz gereken başka soruların da ortaya çıkması mümkündür. Farklı türde gerekçeler vardır ve savundukları sonuçlar üzerinde farklı derecede güce (etkiye) sahiptirler. Bazı gerekçeler bizi su götürmez bir şekilde sonuca götürür. Bu tür gerekçeler bize sonucumuzu “kesinlikle, mutlaka” gibi zarflarla değerlendirmemize olanak tanır. Bazı gerekçeler bizi kesin olmayan bir şekilde veya koşullara, istisnalara, sınırlamalara bağlı olarak sonuca götürür. Bu gibi durumlarda sonucumuzu “muhtemelen, büyük ihtimalle, galiba” gibi zarflarla değerlendiririz. Bu yüzden tartışma analizi için olan bir örüntüde sadece veri, gerekçe ve sonuç gibi bileşenlerin olması yeterli değildir. Verimizin, gerekçe vasıtasıyla elde edilen sonuç üzerindeki etkisinin (gücünün) derecesini ifade eden bir ifadeye ihtiyaç vardır ve bu ifade Toulmin tarafından “niteleyen” olarak isimlendirilmiştir. Niteleyen bileşeninin de eklenmesiyle aradığımız örüntünün şekli aşağıdaki gibi olur.



Burada niteleyen bileşeninden sonra çizilen yönlü ok, sonucun niteleyenden çıktığı anlamında kullanılmamıştır. Niteleyen, gerekçeye dayanarak verinin sonuç üzerindeki etkisinin derecesini gösterdiğinden diyagramda sonuç bileşeninden hemen önce gelmelidir. Örneğin, “Deniz ODTÜ de okuyor. ODTÜ nün eğitim dili İngilizce olduğundan, Deniz çok büyük ihtimalle İngilizce biliyordur” ifadesini yukarıdaki örüntüye göre bileşenlerine ayıralım.

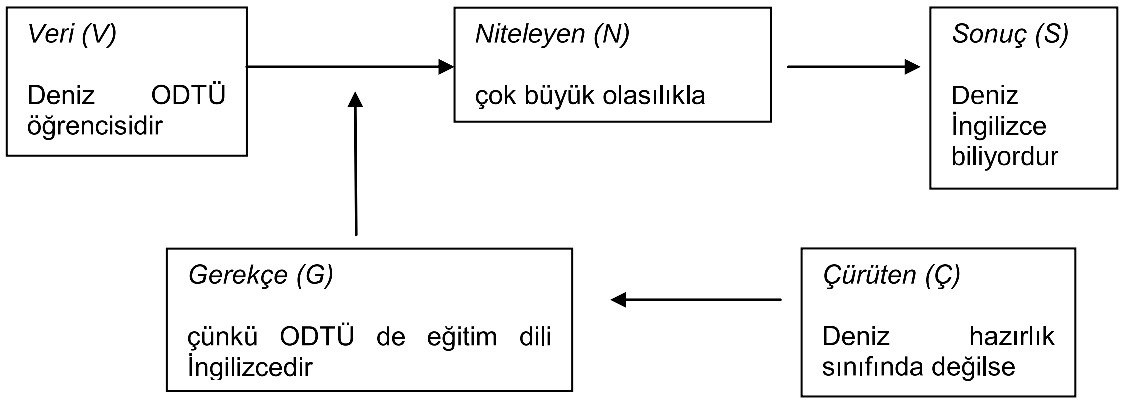


Mahkemelerde sıklıkla gerçekleşen bir durum vardır. Bir davada sadece verilen bir kanuna ya da genel hukuk doktrinine başvurulmaz, kanunun söz konusu davaya hangi oranda uyduğu, davaya uygulanıp uygulanamayacağı, bazı özel gerçeklerin davayı o kanun için bir isitsna haline getirip getirmediği veya kanunun belli niteleyenlere bağlı olarak uygulanıp uygulanmayacağı açık bir şekilde tartışılır. Eğer bu özellikleri örüntü yapısına katacak olursak, örüntü daha karmaşık bir yapıya bürünecektir. Bu özellikler için örüntüde ayrı bir yer vermek gerekir. Gerekçenin genel nüfuzunu geçersiz kılan istisnai koşullara Toulmin "çürüten" demiştir. Bu istisnai koşulların gerekçe vasıtasıyla ulaşılan sonucu çürütme

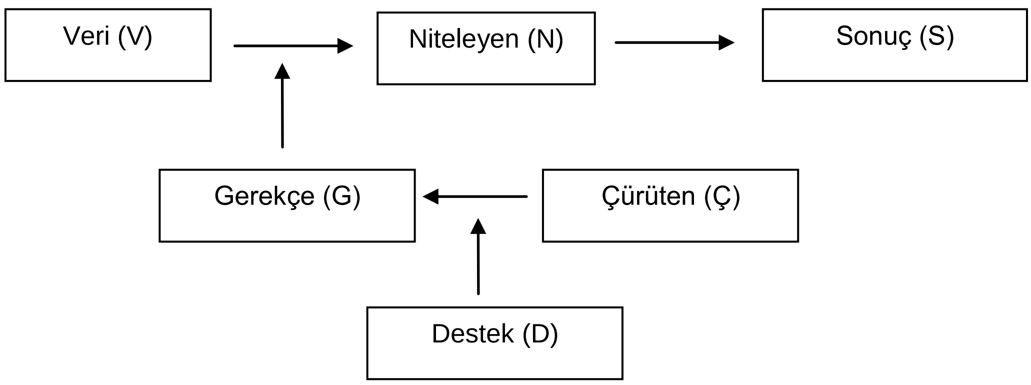


kapasitesi vardır. Çürüten bileşeninin de eklenmesiyle aradığımız örüntünün şekli aşağıdaki gibi olur.

Örneğin, "Deniz ODTÜ de okuyor. ODTÜ nün eğitim dili İngilizce olduğundan ve Deniz hazırlık sınıfında değilse, çok büyük ihtimalle İngilizce biliyordur" ifadesini yukarıdaki örüntüye göre bileşenlerine ayıralım.



Gerekçelerimizin arkasında duran başka güvenceler vardır ve bunlar olmaksızın gerekçelerin tek başına geçerliği yoktur. Buradaki söz konusu güvencelere Toulmin “gerekçenin desteği” adını vermiştir. Destek bileşenin de eklenmesiyle örüntü nihai şeklini alır.



Daha anlaşılır olmak için A ve B kişileri arasındaki tartışmayı Toulmin modeline göre bileşenlerine ayıralım.

A : Deniz ODTÜ de okuyor. ODTÜ de eğitim dili İngilizcedir. O halde, çok büyük olasılıkla Deniz İngilizce biliyordur.

B : Peki, Deniz hazırlık sınıfındaysa ?

A: Deniz ikinci sınıf öğrencisi.

Bu tartışmanın bileşenleri :

(S) Deniz İngilizce biliyordur;

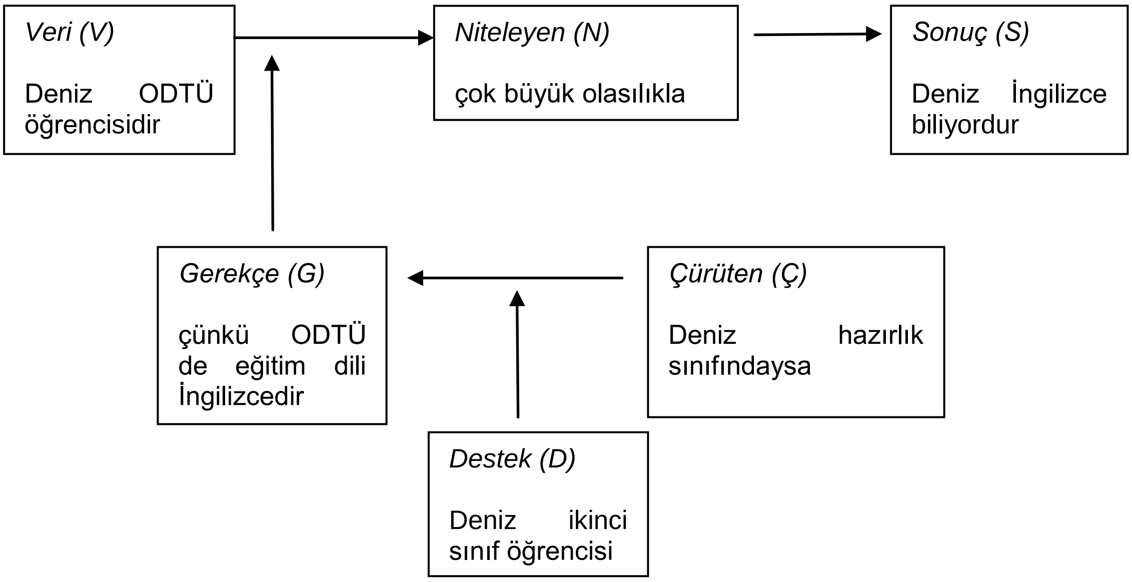
(V) Deniz ODTÜ öğrencisidir;

(G) çünkü ODTÜ de eğitim dili İngilizcedir;

(N) çok büyük olasılıkla;

(Ç) Deniz hazırlık sınıfındaysa;

(D) : Deniz ikinci sınıf öğrencisi.



Daha önce belirtildiği gibi (Bkz. Sayfa 5), Toulmin'in farklı alanlardaki tartışmaların yapısı ve bu tartışmaların değerlendirilmesinde kullanılan standartların karşılıklı farkları üzerine odaklandığını ve geometrik optik, tarihin yazılması ilmi, sivil davalar, ahlak kuralları ve diğer alanlardaki kanıt standartları ve tartışma şekilleri arasındaki farklılıklar ve benzerlikleri incelediğini belirtmiştir. Bir şeyi öne sürmek suretiyle yapılan bir iddiayı savunan tartışma türü üzerine odaklanan Toulmin, tartışmanın alandan bağımsız özelliklerinin olduğuna dikkat çekmiştir. Toulmin alandan bağımsızlık ile kabaca şunu kast etmektedir : İlk olarak bir problem ortaya koyarız. Bu problem için çözüm olabilecek olan belirli bir düşüncemiz vardır. Aklımızda çözüm olabilecek muhtemel adaylar vardır. Bu adaylardan bazılarını “imkansız”, bazılarını “muhtemel”, bazılarını da aksi koşullar olmadığı müddetçe “büyük ihtimalle doğru” olarak kabul ederiz (Hitchcock ve Verheij, 2006).

Hitchcock ve Verheij (2006), Toulmin’in “Argümanın Kullanımları ” kitabında önemle üzerinde durduğu ve hala ilgiyi hak eden noktaları aşağıdaki gibi özetlemiştir :

1. Muhakeme ve tartışma sadece bakış açısına desteği değil, aynı zamanda ona karşı olan hamleyi de içerir.
2. Muhakeme sonucunda nitelendirilmiş yani şartlı (qualified) sonuçlara ulaşılabilir.
3. Standart formel mantıktaki tartışmalardan farklı olan tartışma tipleri vardır.
4. Öncülleri (aksiyomları) sonuca bağlayan ve dile getirilmemiş olan ifadeler, sonuca nasıl gidildiğini açık olarak göstermeyen öncüllere göre daha iyi bir çıkarım ruhsatı olarak düşünülebilir.
5. Muhakemeyi değerlendiren standartlar alana bağlı olabilir ve bu standartların kendisi argümantasyonun konusu olabilir.

Yukarıdaki noktaların her biri Toulmin modelinde gösterilmiştir. Çürüten bileşeni birinci noktayı, niteleyen ikinci noktayı, gerekçe ve destek ise geriye kalan üç noktayı göstermektedir.

1.4. Eleştiri Standartlarının Gelişimi

Toulmin, Kanada’da 2005 yılında Ontario Society for the Study of Argumentation sponsorluğunda gerçekleştirilen bir konferansta şunları dile getirmiştir.

> “Argümanın Kullanımları” kitabımda belirttiğim üzere, eleştirel standartların bir alandan veya aktiviteden bir diğerine (örneğin politikadan estetiğe kadar) nasıl değiştiğine bakmak ve anlamak zorundayız. Dolayısıyla, bu eleştirel standartların nasıl geliştiğini ve herhangi bir alandaki en bilgili ve en yansıtıcı kişilerin bu standartları nasıl arıttıklarını (inceltti klerini) araştırmamız gerekmektedir. Bulunduğumuz yere nasıl geldiğimizi anlamadığımız müddetçe şu an nerede olduğumuzu da anlayamayız, hatta matematik gibi bir alanda bile. Bu yüzden, alçak gönüllülükle kabul etmeliyiz ki şu an elimizden gelenin en iyisi, şu an en iyi

> yapabildiğimiz şeydir ve bizden sonra gelecek olanlar fikirlerimizi daha ileriye taşıyacaklardır (Toulmin, 2006).

Toulmin'e göre eleştiri standartlarının gelişme biçimleri ve ilgili alandaki en bilgili ve en yansıtıcı kişilerin söz konusu standartları nasıl arıttıkları (inceltikleri) iyice araştırılmalıdır. Lakatos'un Proofs and Refutations (1976) kitabında belirttiği gibi, matematikteki kesinliğin bile kendi içinde bir tarihi vardır. Theaetetus'un "kesin" olarak kabul ettiği şeyler Gauss veya Bourbaki için kabul edilemez olabilir. Toulmin'e göre matematiksel argümanlara kabul edilebilirlik veren düşünce biçimimiz kültürel tarihin bir parçasıdır. Bu yüzden, ancak matematik tarihini anlarsak, matematiği tam olarak anlayabiliriz. Belirli bir noktaya nasıl geldiğimizi anlama gerekliliğini fark ettikten sonra, bizden sonra gelenlerin yaptığı çalışmaların bizim fikirlerimizin yerine geçeceğini de kabul etmeli ve elimizden gelenin en iyisini yapmanın aslında elimizden gelenin en iyisini yapmak olduğunu fark etmede alçak gönüllü olmalıyız. Elimizden gelenin en iyisini yapmak; ne zaman, nerede, nasıl yaşadığımıza, farklı alanlardaki meslektaşlarımızın en yansıtıcı ve en bilgilendirici tecrübelerinin ne olduğu ve ileride bizden sonra gelecek ve bizim fikirlerimizin ötesine geçecek olan insanlar için ne gibi seçeneklerin açık olduğunu hesaba katmak anlamındadır.

Yukarıda belirtilen nedenlerden dolayı, matematik eğitimindeki tartışmaların incelenebilmesi için Toulmin tartışma modelinin nasıl yorumlanacağının, bir başka ifade ile Toulmin modelindeki bileşenlerin matematik eğitiminde nasıl anlamlandırılması gerektiğinin bilinmesi gerekir.

1.5. Araştırma Soruları

Bu çalışmanın amacı, matematik lisans derslerinde gerçekleştirilen tartışmalarda öğrencilerin attıkları adımların yapısını özellikle yaptıkları muhakemeleri, birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan etkileşimlerini anlamaya çalışmaktır. Bir başka ifade ile matematik lisans derslerindeki tartışmaların yapısını anlamaya çalışmaktır. Toulmin tarafından alandan bağımsız olarak önerilen Toulmin tartışma modelinin söz konusu tartışmaların yapısını incelemek için nasıl kullanılacağını belirlemektir. Buna göre, çalışmanın amacına uygun olarak yanıt aranacak sorular :

1. Matematik lisans derslerindeki tartışmaların yapısı nasıl analiz edilebilir ?
2. Alandan bağımsız bir model olan Toulmin modeli matematik lisans derslerindeki tartışmaların yapısını analiz etmek için nasıl yorumlanmalıdır ?

1.6. Araştırmanın Önemi

Üniversite son sınıftayken bir dersin sınav sonuçlarını açıklayan öğretmenimiz bazı öğrencilerin son sınıfta olmalarına rağmen hala kanıta ya da soru çözümüne nereden başlayacaklarını bilmediklerini söylemiş ve ardından “burada öğrendiklerinizi elbette unutacaksınız fakat biz size niye matematik öğretiyoruz ? Elinize herhangi bir alanda yazılmış olan bir kitap (matematik) alıp okuduğunuzda orada yazılanları anlıyor ve fikir yürütebiliyorsanız matematik bölümünün hedeflediği matematik okur yazarlığını elde etmişsiniz demektir. Matematiği ezberlemeye çalırsanız bu size bir fayda sağlamaz !” diyerek sitem etmişti.

Eğer matematik bölümlerinin amacı öğrencilerine belirli bir düzeyde matematik okur yazarlığı kazandırmak ise ders veren öğretmenlerin bu amaca yönelik olarak sürekli bir arayış içinde olması gerekir. Öğrenciye vereceği kavramları hemen formel olarak değil de ilk olarak informel yoldan vermeyi tercih eden bir öğretmenin sınıfta yapacağı ilk iş o kavrama yönelik bir tartışma başlatmak olur. Tartışmaların bir yapısı olduğunu, Toulmin’in ifadesiyle tartışmaların adeta yaşayan bir organizma gibi olduğunu bilen bir öğretmen hazırlayacağı ders notlarını veya etkinliklerini buna göre şekillendirebilir. Verilen bir argümanın öğrenci tarafından anlaşılması ve argümanın sunuluşu lisans seviyesindeki öğrencilerin kanıt becerilerini ölçmede kullanılan iki temel aktivitedir (Meija-Ramos ve Inglis, 2009). Bir çok araştırmacı ve etkili kuruluş, reform odakli matematik sınıflarında tartışmanın önemli bir rol oynadığını belirtmiştir (Balacheff, 1991; Bauersfeld,1995; NCTM,2000, akt. Weber vd., 2008.)

Ayrıca, matematik eğitimi literatüründe Toulmin modelini kullanan araştırmacıların tümü, Toulmin’in beklentisinin aksine Toulmin modeline ait bileşenleri kendi alanlarına uyacak şekilde tanımlamadan ve çoğunluğu da sadece mikro tartışmalar için kullanmıştır. Oysa, araştırmalarında Toulmin modelini kullanan filozoflar, Toulmin modelindeki bileşenlere kendi alanlarına ait anlam yükledikten sonra modeli kullanmışlardır. Bu çalışmada da, Toulmin modeline ait bileşenlere matematik eğitimi anlamında nasıl anlam yüklenmesi gerektiği de ele alınmıştır.

Toulmin çok yazarlı kitabında (Toulmin, Rieke ve Janik, 1979;1984 akt. Hitchcock ve Verheij, 2006) tartışmaların sahip olması gereken sekiz temel değerden bahsetmiştir :

1. Tartışmanın ortaya çıkmasına neden olan konuların netliği
2. Tartışmanın altında yatan amacın netliği
3. Sonuç ile ilgili olan nedenler
4. Sonucu yeteri kadar destekleyen nedenler
5. Söz konusu tartışmadaki duruma yönelik uygulanabilir olan gerekçe,
6. Kesin desteğe dayalı gerekçe,
7. Ulaşılan sonucun dayanma gücünün açıkça belirtilmesi,
8. Muhtemel çürütenlerin iyi anlaşılması.

Bu çalışmada matematik lisans derslerindeki bir tartışmanın sahip olduğu değerlerin neler olabileceği de ele alınmıştır.

2. İLGİLİ ALANYAZIN

Matematik eğitiminde argüman ve tartışma üzerine yapılan çalışmaların çoğu öğrencilerin kendi geliştirdikleri argümanları nasıl oluşturdukları ve savundukları (Alcock vd., 2004,2005,2005), bu argümanlardan kanıta nasıl geçiş yaptıkları (Chazan, 1993; Pedemonte, 2007; Selden ve Selden 2003,Weber,2001; Weber vd., 2005) ve çok az bir kısmı da sınıf ortamındaki tartışmaların yapısı (Knipping, 2008; Krummheuer, 1995,2007; Yackel,2001) üzerinde yoğunlaşmıştır. Argüman ve tartışma üzerine yapılan çalışmaların hepsi sadece kanıt sürecini incelemiştir. Buna karşılık lisans düzeyindeki matematik derslerindeki tartışmaların sadece kanıt sürecinde değil, tanım koyma ve bir tanım veya bir teorem verildikten sonra uygulama amaçlı soru çözme sürecinde de ortaya çıktığı bu çalışmada gözlenmiştir.

Ayrıca, Toulmin'in (2006) belirttiği gibi, bulunduğumuz yere nasıl geldiğimizi anlamadığımız müddetçe şu an nerede olduğumuzu da anlayamayız, hatta matematik gibi bir alanda bile. Bu düşünce temel alınırsa Toulmin modelinin tarihi gelişimini, matematik eğitiminde ilk olarak ne zaman ve nasıl kullanıldığını ve ilk olarak kullanıldığı tarihten günümüze kadar nasıl kullanılıp yorumlandığının bilinmesi gereklidir.

Bu çalışmada, lisans düzeyindeki matematik derslerinde ortaya çıkan tartışmaların yapısınının Toulmin modeli ile nasıl analiz edilmesi gerektiği araştırılacaktır. Bu amaç doğrultusunda ilgili alan yazın iki ana başlık, birinci ana başlık iki alt başlık ve ikinci ana başlık üç alt başlık altında incelenecektir. "Toulmin modelinin tarihi gelişimi" ana başlığı altında "gerekçe bileşeninin tarihi gelişimi" ve "çürüten bileşeninin tarihi gelişimi" alt başlıkları, "Toulmin modelinin matematik eğitiminde kullanımı" ana başlığı altında "kanıt sürecindeki tartışmalara odaklanan çalışmalar", "tanım sürecindeki tartışmalara odaklanan çalışmalar" ve "problem çözme sürecindeki tartışmalara odaklanan çalışmalar" alt başlıkları bulunmaktadır.

Çizelge 1.2. İlgili Alanyazın

İlgili Alanyazın	
I) Toulmin Modelinin Tarihi Gelişimi	I.a) Gerekçe Bileşeninin Tarihi Gelişimi
	I.b) Çürüten Bileşeninin Tarihi Gelişimi
II)Toulmin Modelinin Matematik Eğitiminde Kullanımı	II.a) Kanıt Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar
	II.b) Tanım Kurma Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar
	II.c) Problem Çözme Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar

2.1. Toulmin Modelinin Tarihi Gelişimi

Daha önceden de belirtildiği gibi, Toulmin(2006) “Argümanın Kullanımları ” adlı kitabını yazarken, bir retorik teori üretme amaçlı yazmadığını, Kanada’da 2005 yılında Ontario Society for the Study of Argumentation sponsorluğunda gerçekleştirilen bir konferansta açıkça dile getirmiştir (Toulmin, 2006). İnformel mantığın kurucularından sayılan Toulmin bu konferansta muhakemenin sadece teknik yaşama değil de günlük yaşama nasıl girdiğinin incelenmesi gerektiğini kendisinden çok daha önce gören kişi olarak John Dewey’e teşekkür etmiştir. Toulmin tarafından çok değerli bir kitap olarak nitelenen Dewey’in Deneysel Mantıktaki Denemeler (Essays in Experimental Logic) kitabı Toulmin’in Britanya’daki bazı meslektaşları tarafından küçümsenmiştir. Benzer tepkilere Toulmin de maruz kalmıştır. Felsefe çevreleri “Argümanın Kullanımları ” kitabına ilk olarak muhalif olarak durmuştur. Peter Strawson kitabı BBC nin haftalık yayınından (Listener) çıkartmış, Toulmin’in Leeds şehrindeki iş arkadaşı Peter Alexander kitabı “Toulmin’in Mantık Karşıtı kitabı” olarak adlandırmış ve kendi araştırma direktörü Richard Braithwaite de ciddi bir şekilde endişelenmiştir, çünkü Braithwaite bilim felsefesindeki standartları kurmuştu ve Toulmin’i bu standartlardan vazgeçen kişi olarak görüyordu. Bundan dolayı; Toulmin kendi kitabının, Hume tarafından kaleme alınan “Treatise of Human Nature” adlı eseri gibi ölü doğacağına kanaat getirmiştir. Buna karşılık, kitabının basılmasından sonraki yıl Amerika’ya giden Toulmin “Argümanın Kullanımları ” kitabının aşağı ve yukarı Mississippi'de iletişim teorisi olarak okutulduğunu görmüştür. İlk baskısı 1958 yılında yapılan "Argümanın Kullanımları " kitabı günümüzde hala satıştadır.

Toulmin'in (2006) kendisinin de belirttiği gibi "Argümanın Kullanımları " kitabını yayınladığında ilk olarak meslektaşları kitaptaki fikirleri benimsememiş ve muhalif olmuşlardır. Toulmin'in fikirleri hukuk ve psikoloji gibi alanlardaki uzmanlar tarafından ele alınmış ve Toulmin modelinin tartışmalara tam olarak uyduğunu görmüşlerdir. Toulmin modeli Amerika Birleşik Devletlerinde konuşma iletişimi (speech communication) alanında kabul görmüş ve argümantasyon üzerine olan ders kitaplarında Toulmin modeli zorunlu bir bölüm olarak yer almıştır. Bunların dışında, bu model bilgisayar bilimi ve yapay zeka, hukuk ve tıp gibi alanlarda da kullanılmaya başlamıştır. Dolayısıyla bir çok filozof Toulmin'in fikirlerini ciddiye almak durumunda kalmıştır.

Loui (2006); sosyal bilimler, beşeri bilimler, bilim ve teknoloji alanındaki başlıca dergilerde yapılan atıfların Toulmin ve çalışmalarını yirminci yüzyılın felsefi mantıkçıları ve bilim filozofları arasında ilk ona yerleştirdiğini bildirmiştir.
Toulmin (1958) kendi fikirlerinin bir sonu olmadığını bir başka deyişle modelinin çeşitli alanlarda yorumlanması gerektiğinde ısrarcı olmuştur. Gerçekten de Felsefe alanında Toulmin modeli, modelin sahip olduğu bileşenlere çeşitli anlamlar yüklenerek farklı şekillerde yeniden oluşturulmuştur. Toulmin'in iddialarına bazı filozoflar itiraz etmiş ve bu itirazlara cevap başka filozoflar tarafından verilmiştir. Toulmin modelinin, bu çalışmada en çok kullanılan bileşenlerinden "gerekçe" ve "çürüten" bileşenlerine filozofların ne gibi anlamlar yüklediği aşağıdaki iki başlıkta ele alınmıştır.

2.1.1. Gerekçe Bileşeni

Bermejo-Luque ve Freeman'ın (akt. Hitchcock D., ve Verheij, B., 2006) katkılarıyla Toulmin'in "gerekçe" bileşenine nasıl anlam yüklenileceği sorusu sorulmaya başlanmıştır. Bermejo-Luque gerekçeleri "V varsa S vardır" biçimindeki özel koşullar olarak anlamlandırmıştır. Freeman ise gerekçeyi; tartışmanın bağlı olduğu koşulun kanun benzeri genellemesi olarak "V var olursa S var olur (V would be true, C would be true)" şeklinde yorumlamıştır. Klumpp (2006) ise konuşma iletişimi alanındaki öğrencilerden bir tartışmanın bileşenlerini önerme biçiminde ortaya çıkarmaları istendiğinde, öğrencilerin veriyi gerekçeden ayırmakta büyük sıkıntılar yaşadıklarını belirtmiştir. Klumpp, bu soruna çözüm olarak "gerekçe" kelimesini bir isim olarak değil de "gerekçelendirmek" şeklinde bir fiil olarak kullanmayı önermiş ve böylece Toulmin modelinin bir iddiayı savunma sürecindeki dinamik sunumunu yakalayabilmiştir. Toulmin "oraya nasıl gittin?" sorusuna verilecek cevabın gerekçeyi belirlediğini savunurken, Klumpp "bu veriler iddiayı nasıl garanti eder ?" sorusuna cevap verilmesi gerektiğini savunmaktadır. Robert C. Pinto (akt. Hitchcock D., ve Verheij, B., 2006) "Evaluating Inferences : The Nature and Role of Warrants" makalesinde gerekçeyi, genelleme yapmak için bir önerme belirtmek olarak anlamlandırmıştır. Pinto'ya göre Pierce(1955), Sellars (1953,1963), Hitchcock(1985, 1998) ve Brandom(1994,2000) da aynı öneri de bulunmuştur.

2.1.2. Çürüten Bileşeni

Toulmin modelinin farklı özelliklerinden biri çürüten bileşenine yer vermesidir. Çürüten bileşeni, bir gerekçenin yetkinliğini zayıflatan ve bazen de iddianın geri çekilmesini sağlayan istisna koşullar olarak yorumlanabilir. Slob (2006) Toulmin'in "çürüten" kavramı hakkındaki anlayışını, çağdaş diyalektik mantığın karşıt görüşteki tarafın rolünü sağlam bir şekilde diyalektik mantıkla birleştiren bir temel olarak kullanmaktadır. Slob diyalektik mantığın tüm tartışmalara sadece sonuca yönelik destek verici gibi davrandığını ve tartışmaların diyaloğa dayalı perspektifini ciddiye almadığını savunmaktadır. Diyalektik mantığın yaptığı gibi sonucun ne kadar iyi bir şekilde desteklendiğine odaklanmaktan ziyade; tartışmaları "destekleyen" ve "çürüten" güçlerin karşılıklı değişimi olarak almalıyız. Slob bu yaklaşıma "diyaloglu retorik (dialogico - rhetoric)" adını vermiştir. Toulmin diyagramında çürüten bileşeninin olması karşıt görüşün sesine yönelik sağlam bir izindir.

Hitchcock ve Verheij (2006), Toulmin'in "Argümanın Kullanımları " kitabında çürüten bileşeninin işlevini farklı şekillerde tanımladığını belirtmiştir : Gerekçenin yetkinliğini bir kenara koymak, gerekçenin uygulanabilirliğine itiraz etmek, sonucu iptal ettirmek. Hitchcock ve Verheij'e göre Toulmin modelinin veri – gerekçe – sonuç kısmında çürüten bileşeninin uygulanabileceği beş hedef vardır : Veri, sonuç, gerekçe, "V varsa S de vardır" şeklindeki çıkarım sonucu, "G varsa ve sonra V varsa S vardır" şeklindeki gerekçeden türetilen çıkarım sonucu. Toulmin modeli, başka bir düşüncenin doğru olması nedeniyle yanlış olan sonuçların yeniden ifade edilmesine izin vermektedir ve bu özellik Hitchcock ve Verheij'a göre Toulmin modelinin başlıca yeniliğidir.

2.2. Toulmin Modelinin Matematik Eğitiminde Kullanımı

Knipping (2008) Toulmin modelini biraz genişleterek bir model önermiş ve bu modelin sınıf ortamında kanıt sürecindeki tartışmaları incelemek için kullanılabileceğini belirtmiştir. Bu bölümün başında belirtildiği gibi matematik eğitiminde, argüman ve tartışma analizi üzerine yapılan çalışmaların hepsi kanıt sürecini ele almıştır. Bu çalışmada ise görülmüştür ki, kanıt sürecinin dışında, eğer öğretmen bir tanım vereceği zaman, tanımı direkt vermek yerine, tanıma ulaşma amaçlı bir tartışma başlatırsa, doğal bir sonuç olarak sınıf ortamında bir tartışma süreci doğmaktadır. Bunun dışında, öğretmen verdiği - ulaştığı tanım ve teoremlerden sonra uygulama yapmak için soru çözümü yaptığında da sınıfta bir tartışma ortamı doğduğu gözlenmiştir. Bu yüzden; bu kısım kanıt, tanım ve problem çözme üzerine yapılan tartışmaları incelemek üzere üç ayrı alt başlığa bölünmüştür.

2.2.1. Kanıt Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar

Matematik eğitiminde Toulmin modelini ilk olarak Krummheuer (1995) kullanmıştır. Sınıf ortamındaki matematiksel tartışmaları Toulmin modeli ile analiz etmiştir. Krummheuer bu analizinde modelin *çürüten* ve *niteleyen* bileşenlerini kullanmamakla beraber modele yeni bir bileşen ekleme ihtiyacı hissetmemiştir. Krummheuer'in (1995) çalışmasından sonraki çalışmalarda *çürüten* ve *niteleyen* bileşenleri pek dikkate dikkate alınmamıştır. Krummheuer gibi Toulmin modelininin kısıtlı kullanıldığı bir çok çalışma vardır: Temel sayı becerileri (Evens ve Houssart, 2004) , mantıksal çıkarım (Hoyles ve Küchemann 2002; Weber ve Alcock 2005), geometri (Knipping 2003; Pedemonte 2005), kanıt (Yackel 2001).

Inglis vd. (2007) Toulmin modelini kullanan önceki çalışmalarda dikkate alınmayan *niteleyen* bileşeninin matematiksel tartışmalarda önemli bir rol oynadığını belirtmiştir. Çok başarılı yüksek lisans öğrencilerine sayılar teorisinden sorular sormuş ve yarı yapılandırılmış mülakat yapmıştır. Ayrıca, yine aynı çalışmada “gerekçe tipleri” adını verdikleri bir kavram önermişlerdir. Bir “gerekçe tipi” benzer özelliklere sahip gerekçeler topluluğunu belirtmektedir. Inglis vd. (2007) tümevarımsal (inductive), yapısal – sezgisel (structural - intuitive), çıkarımsal (deductive) olmak üzere üç çeşit gerekçe tipi tespit etmişlerdir. Tümevarımsal gerekçe tipini tanımlarken Harel ve Sowder’in (1998) tanımladığı tümevarımsal kanıt şemasından faydalanmışlardır. Harel ve Sowder tümevarımsal kanıt şemasını “bir sanının doğruluğuna kanaat getiren ve başkalarını da sanının doğruluğuna ikna etmeye çalışan bir öğrencinin, sanının doğruluğunu birkaç özel durum için çeşitli değerler vererek göstermesi” olarak tanımlamıştır. Inglis vd. (2007) göre de tümevarımsal gerekçe tümevarımsal kanıt şeması ile aynı stratejiyi kullanır. Yapısal – sezgisel terimi, görsel veya başka türden bir zihinsel yapı üzerine olan gözlem veya deney yapan biri için kullanılır. Bu türden bir muhakame de sezgisel tip olarak adlandırılmıştır. Çıkarımsal gerekçe tipini de Harel’in (2001) en etkili kanıt şeması olarak belirttiği “çıkarımsal-modern-aksiyomatik” şemaya benzer olarak tanımlanmıştır. Harel, “çıkarımsal-modern-aksiyomatik” şema kavramını gerçeğe ulaşmak için aksiyomlardan çıkarımlarda bulunan kişiler için kullanmıştır. Çıkarımsal gerekçe de “formal matematiksel bir savunmanın gerekçe olarak kullanılması” olarak tanımlanmıştır. Aksiyomlardan yapılan çıkarımlar, cebirsel işlemler veya ters örneklerin hepsi çıkarımsal gerekçe olarak sınıflandırılabilir. Inglis vd. (2007) bu üçlü sınıflamanın dışında da başka sınıflamalar yapılabileceğini belirtmişlerdir.

Krummheuer (2007) matematik öğreniminin öğrencinin müşterek argümantasyon sürecine katılımına bağlı olduğunu varsaymaktadır. Krummheuer, ortaklaşa gerçekleştirilen argümantasyon sürecinde gerekçe üretilmesine katkıda bulunan öğrencilerin, bulunmayanlara göre konuyu daha çok bildiğini ve daha çok anladığını söylemiştir.

Alcock ve Weber (2005) reel analiz alanındaki bir kanıtı geçerli kılmak için gerekli olan becerileri incelemiştir. Alcock ve Weber’e (2005) kanıtta kullanılan gerekçeyi dikkate almamanın öğrencinin kanıtı geçersiz olarak düşünmesine yol açtığını belirtmiştir.

Knipping’e (2008) göre, sınıf ortamındaki kanıt sürecinin kendine has önemi vardır. Knipping’e göre bu süreç sınıfta üretilen veya ders kitaplarında sunulan yazılı metinler vasıtasıyla kavranamaz , çünkü böyle bir son ürün kendisini yaratan süreçten hiçbir iz taşımaz. Bu süreçteki argümanların yeniden yapılandırılması söz konusu önemi ortaya çıkarır. Knipping, kanıt yapma sürecindeki lokal argümanları yeniden yapılandırmak için Toulmin modelini kullanmış ve bu modeli sınıftaki kanıtlama sürecini yeniden yapılandırmak için kullanılan global bir argümantasyon modeline genişletmiştir. Knipping bu çalışmasında lokal argümantasyonları kavramsal ve görsel olmak üzere iki sınıfa ayırmıştır. Kavramsal argümantasyon sonuçlara kavramlardan elde edilen çıkarımlarla ulaşılan argümantasyonlar anlamına gelir. Bir kısmı şekillerden oluşan bir argümantasyon görsel argümantasyondur. Global argümanları da kaynak – yapı (source - structure) ve depo – yapı (reservoir - structure) iki sınıfa ayırmıştır. Kaynak – yapıya sahip bir kanıt sürecinde argümanlar ve fikirler çok sayıda farklı öğrenciden gelir tıpkı bir çok kaynaktan fışkıran su gibi. Depo-yapıya sahip bir argümantasyonda argümanlar birbirinden ayrık olan parçalara bölünür ve tartışmanın akışı ara sonuçlara doğru gider. Tartışmayı oluşturan parçalar, suyu bir sonraki aşamaya geçmesinden önce tutan ve temizleyen barajlar gibidir.

Pedemonte (2007) bir sanıyı destekleyen bir argümantasyon ile onun matematiksel kanıtı arasındaki bilişsel sürekliliği ve mesafeyi analiz etmiştir. Ck¢ model (Balacheff ve Margolinas, 2005 akt. Pedemonte, 2007) ile kombine edilmiş Toulmin modeli analizde ana araç olarak kullanılmıştır.

2.2.2. Tanım Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar

Ouvrier-Buffet'a (2006) göre "tanım" kavramının tanımı hafife alınamaz. Tanım kurma matematiksel araştırmalarda önemli bir yer tutmasına rağmen bu konu üzerine çok az çalışma yapılmıştır. Fakat tanım kavramı ve bir çok özelliğinin çok önemli olduğu bir çok çalışmada ortaya konmuştur (Zaslavsky- Shir, 2005). Freudenthal (1973), Mariotti ve Fischbein (1997) ve Borasi (1992) geometride tanım kurma sürecini içeren bazı didaktik durumların olduğuna dikkat çekmiştir. Ouvrier-Buffet bu çalışmaların tanım kurma sürecini tam olarak odağına almadığını ve ayrıca "sınıflama" ve "yeniden tanımlamanın" *Tanım Kurma Durumlarından* (TKD) oluşan buzdağının sadece görünen kısmı olduğunu belirtmiştir. Ouvrier-Buffet TKD'leri, "sınıflama", "Lakatos tipi problem durumları" ve “modelleme” olarak üç tipe ayırmıştır. Ouvrier-Buffet’a göre sınıf ortamında TKD tasarlamak gerektiğinde (özellikle zor bir noktayla uğraşıldığında) öğrencilerden gelen geri dönütleri aydınlatabilecek bir öğretmen gerektirmektedir.

Mariotti ve Fischbein (1997) ise ilköğretim düzeyindeki geometri derslerinde, tanım kurma sürecini “şekilsel kavramlar teorisi” çerçevesinde ele almıştır. Bu çalışmada sadece şekil olarak farklı fakat benzer nesnelerin denkliğini ifade edip, buradan bir genellemeye giden bir sınıflama üzerine çalışılmıştır. Mariotti ve Fischbein’ın (1997) şekilsel kavramlar bakış açısına göre, bir tanımı kurmak ve doğru olarak kullanmak şekilsel ve kavramsal bakımdan iyi bir uyum gerektirir.

2.2.3. Problem Çözme Sürecindeki Tartışmalara Odaklanan Çalışmalar

Literatür taramasının üçüncü ve son kısmını ise problem (soru) çözme sürecindeki tartışmalar üzerine yapılmıştır. Educational Studies in Mathematics, The Journal of Mathematical Behavior, ZDM The International Journal on Mathematics Education, Research in Mathematics Education, For The Learning of Mathematics adlı dergilerde yapılan taramalarda, problem çözme üzerine çok sayıda çalışma yapılmasına rağmen, problem çözme sürecindeki tartışmaların incelendiği bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu dergilerde yayınlanan çalışmlarda, problem çözme süreci bir argümantasyon olarak ele alınmamıştır.

3. YÖNTEM

Bu çalışmanın amacı, daha önce de belirtildiği gibi matematik lisans derslerinde gerçekleştirilen tartışmalarda öğrencilerin attıkları adımların yapısını özellikle yaptıkları muhakemeleri, birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan etkileşimlerini anlamaya çalışmaktır. Bir başka ifade ile matematik lisans derslerinde tartışmaların yapısını anlamaya çalışmaktır. Toulmin tarafından alandan bağımsız olarak önerilen Toulmin tartışma modelinin söz konusu tartışmaların yapısını incelemek için nasıl kullanılacağını belirlemektir.

Fraenkel ve Wallen (2006) katılımcı olmayan bir gözlem çalışmayı, araştırmacının gözlenen aktiviteye katılmaması, bir köşeye çekilip izlemesi ve araştırmacının gözlemlediği olaya direkt olarak dahil olmaması biçiminde tanımlamıştır. Bu anlamda bu çalışma, katılımcı olmayan bir gözlem çalışmasıdır. Fraenkel ve Wallen'e göre katılımcı olmayan bir gözlem çalışmasında araştırmacının üstlenebileceği iki rol vardır. Birincisi katılımcı olarak gözlemci (observer as participant), ikincisi tamamen gözlemci (complete observer). Bir araştırmacı, katılımcı olarak gözlemci rolünü seçerse kendisini araştırma yaptığı gruba bir araştırmacı olarak tanıtır ve aslında grubun bir üyesi olduğunu gizlemez, yani araştırmayı yapan kişi araştırma yaptığı grubun bir üyesidir. Tamamen gözlemci rolünü seçen bir araştırmacı, araştırma yaptığı grubun hiçbir aktivitesine katılmadan sadece aktiviteleri izler. Gruptaki kişiler gözlemlendiklerini bilebilirler veya bilmeyebilirler. Tamamen gözlemci rolünü seçen bir araştırmacının avantajı, çalışılan grubun eylemlerini etkileme olasılığının en az olmasıdır.

Bu çalışmadaki veriler, Ankara'daki bir üniversitede öğrenim gören lisans düzeyindeki matematik öğretmenliği bölümü öğrencilerinin sınıf ortamındaki derslerinin, araştırmacı tarafından tamamen gözlemci rolü ile video kamera çekimlerinden elde edilmiştir.

Video kamera çekimleri 2008 – 2009 öğretim yılı yaz döneminde 6 hafta süreyle haftada 3 gün ve günde 2 ders saati, 2009 – 2010 öğretim yılı bahar döneminde 8 hafta süreyle haftada 2 gün ve günde 3 ders saati, 2010-2011 öğretim yılı bahar döneminde 6 hafta süreyle haftada 2 gün ve günde 2 ders saati yapılmıştır.

Çalışmaya dahil olan öğrencilerin hepsi 2. ya da 3. sınıf lisans öğrencilerinden oluşmaktadır. Her bir dersteki öğrenci sayısı 15 ile 40 arasında, bir ders saati ise 45 dakikadır.

Sınıfta bir video kameralı bir gözlemcinin olması öğrencileri tedirgin edebilir. Bunu önlemek veya minimuma indirmek için, her sınıfta ilk çekim yapılmadan önce dersin öğretmeni ilk olarak araştırmacıyı öğrencilere tanıtmış sonra sözü araştırmacıya vermiştir. Öğrencilere bu çalışmanın amacı hakkında kısa bir bilgi verildikten sonra derse müdahil olmadan sadece gözlem amacıyla çekim yapmak için öğrencilerden izin alınmıştır. Öğrencilerin dikkatini dağıtmamak için video çekimleri öğrencilerin görüş alanı dışında kalan sınıfın en arka sırasında kaydedilmiştir.

3.1. Katılımcıların Belirlenmesi

Çalışmada amaçlı örneklem kullanılmıştır. Amaçlı örneklem kolay erişilebilir bir örnekleme sahip olmaktan ziyade, araştırmacının önceki bilgilerine dayanarak kendisine veri sağlayabileceğini düşündüğü bir örneklem seçmesidir (Fraenkel ve Wallen, 2006).

Katılımcıların belirlenmesinde göz önüne alınan tek ölçüt, katılımcı öğrencilerin Soyut Matematik I ve Soyut Matematik II dersini almış ve bu dersleri başarıyla tamamlamış olmalarıdır. Söz konusu derslerin ilk amacı öğrencilere matematiksel kanıtın ne olduğunu ve nasıl yapılması gerektiğini öğretmektir. Bundan dolayı, bu dersler öğrencilerin sınıf ortamında yoğun olarak tartışmaya girdikleri, ortaya koydukları argümanları nasıl savunmaları gerektiğini, argümanlarını çürüten ve matematikte "ters örnek" olarak adlandırılan durumların var olduğunu ilk olarak öğrendikleri derslerdir.

3.2. Verilerin Analizi

Veri analizi Creswell'deki (2003) adımlar takip edilerek yapılmıştır. Creswell'e göre nitel araştırmalarda yapılan veri analizi genel olarak aşağıdaki altı adımı içerir.

1. Adım : Verinin organize edilmesi ve hazırlanması. Kayıt altına alınan derslerin hangi bölümlerinde bir tartışmanın başladığı ve bittiği tespit edildikten sonra söz konusu bölüm kelime kelime kağıda yazılmıştır.

2. Adım : Tüm verinin baştan sona okunması. Kağıda dökülen verilerin gerçekten bir tartışmayı gösterip göstermediği incelenmiştir. Toulmin modeline göre veri olabilecek satırlar tartışmanın başlangıcı, sonuç olabilecek satırlar tartışmanın sonu olarak alınmıştır.

3. Adım : Kodlamanın yapılması. Kodlama, verileri önce parçalara ayırarak organize etme, sonra bu parçalara anlam verme (sınıflandırma) sürecidir (Rossman ve Rallis, 1998 akt. Cresswell, 2003). Bu süreç kağıda dökülen verilerin veya resimlerin, bazı satırların, paragrafların kategorilere ayrılıp, her bir kategorinin sınıflandırılma sürecidir. Bu anlamda, kağıda dökülen verilerin bazı satırları, paragraflarını, bazı video görüntülerinden dondurularak elde edilen resimler alınarak, veri parçalara ayrılmış ve bu parçalar sınıflandırılarak kodlanmışır.

4. Adım : Sınıfların isimlendirilmesi. 3. adımda belirlenen sınıflar isimlendirilmiştir. Burada isimlendirme yapılırken doğal olarak Toulmin modelinin bileşenleri kullanılmıştır. Ayrıca, Toulmin modeline göre herhangi bir bileşene ait olmayan fakat her kayıtta karşılaşılan gruplar isimlendirilmiştir. Bu durum Toulmin modelinin genişlemesine yol açmıştır.

5. Adım : İsimlendirilen sınıfların nasıl sunulacağının geliştirilmesi. Bu adımdaki en popüler yaklaşım, analizin bulgularını aktaran bir anlatım yapılmasıdır. Nitel araştırmacıların bir çoğu anlatımlarına ek olarak görseller, şekiller veya tablolar kullanırlar. 4. adımdaki tanımlamaların hepsi Toulmin'in önerdiği diyagrama entegre edilip, karmaşık tartışmaların bir diyagramla gösterilmesi sağlanmıştır.

6. Adım : Veriye bir anlam veya yorum verilmesi. Bu adımın temelinde "Hangi dersler çıkarıldı?" sorusu vardır. Bu çalışmada tartışmaları "kanıt üzerine", "tanım oluşturma üzerine" ve "problem (soru) çözme üzerine" olmak üzere üç sınıfa ayrıldığı belirtilmişti. Yukarıda bahsedilen tanımlamalara ve diyagramlara göre hangi tanımlamaların hangi tür tartışmalarda ortaya çıkabileceği, bu tartışmaların birbirlerine göre farklılıkları, benzerlikleri yorumlanmıştır.

Cresswel'e (2003) göre; araştırmacılar, bulgularının tamlığını ve inanılırlığını kontrol etmek için araştırmalarında atacakları adımları bildirmelidirler. Nitel araştırmalarda geçerlik kavramı nicel araştırmadaki aynı anlamı taşımadığı gibi, güvenirlik kavramına karşılık gelen bir anlam yoktur. Yine de sınırlı bir şekilde; nitel araştırmacılar güvenirliği, tutarlı örüntüleri kontrol ermek için kullanabilirler. Bununla birlikte güvenirlik ve genelleştirilebilirlik nitel araştırmalarda küçük bir rol oynamaktadır.

Diğer taraftan, geçerlik nitel araştırmanın güçlü tarafı olarak görülür. Geçerlik kavramı, bulguların araştırmacı veya katılımcı açısından tam olup olmadığını belirlemek için kullanılır. Bu çalışmanın danışmanlarından biri olan Behiye Ubuz, uzman olarak bu çalışmada kullanılan tartışmalardan dört tanesinin Toulmin modeli ile analiz edilmesine katılmıştır. Ubuz, bu analizler sonunda tartışma karakteristiklerinin farklı olduğunu ve tartışmaların kanıt, tanım kurma ve problem çözme olarak tekrar incelenmesi ve farklılıkların ortaya konulması yönünde görüş bildirmiştir. Bunun üzerine, bu çalışmada kullanılan tartışmalar kanıt, tanım kurma ve problem çözme başlıkları altında üç sınıfa ayrılmış, yeniden analiz edilerek Ubuz'a sunulmuştur. Bu çalışmanın danışmanlarından biri olan Ali Bülbül'e de uzman olarak söz konusu dört tartışmanın analizi anlatılmıştır. Bunun dışında analizleri kendisi de incelemiş, yapılan sınıflamalara katılmış fakat tartışmaların matematik olarak doğruluk – yanlışlık anlamında incelenmediğinin vurgulanması gerektiğini belirtmiştir. Sınıflandırılmış olarak sunulan tartışmaların Ubuz'la tekrar incelenmesiyle, Toulmin modelindeki bileşenlerin farklılıklar gösterdiği ve farklılık gösteren bu bileşenlerin sınıflanabileceği sonucuna varılmıştır. Bu bağlamda tartışma analizleri tekrar ele alınmıştır. Bunun sonucu olarak, gerekçe bileşeni referans ve dedüktif olmak üzere iki sınıfa, modele yeni bileşen olarak eklenen rehber desteğinin de referans, onay ve sonlandırıcı olmak üzere üç sınıfa ayrılmıştır. Bu şekilde analiz edilen tartışmaların hepsini (on bir adet) Bülbül incelemiş ve yapılan sınıflamalara katılmıştır. Bunun dışında Bülbül'le yapılan değerlendirmelerde, Toulmin tarafından "oraya nasıl gittin ?" sorusuna verilen cevap olarak tanımlanan gerekçe bileşeninin "beni nasıl ikna edersin ?", "bunu nasıl garanti edersin?" sorularına verilen cevap olarak tanımlanabileceği görüşüne varılmıştır.

Creswell'in (2003), bulguların tamlığını kontrol etmek için tavsiye ettiği stratejilerden biri, tüm projeyi gözden geçirecek olan harici bir denetçinin (external auditor) olmasıdır. Bu anlamda bulguların tamlığını sağlamak için Ankara'daki bir üniversitede öğretim görevlisi olarak çalışan bir matematik eğitimcisi harici denetçi olarak seçilmiştir. Harici denetçiye, bu çalışmada kullanılan tüm tartışmaların tam metni, Toulmin modeli ile analizleri verilmiş, Toulmin modeli alanyazından örnekler verilerek anlatılmıştır. Bir hafta sonra, analizleri ayrıntılı olarak inceleyen harici denetçi ile görüşülmüştür. Bu görüşme ile, çalışmanın başlangıcında "öğrencilerin, veriden sonuca giderken gerçekleştirdikleri akıl yürütme" olarak tanımlanan dedüktif gerekçe tanımının örneklerle güçlendirilmesi yönünde görüş birliğine varılmıştır. Bu yüzden, bu çalışmada akıl yürütme ile sayısal bir işlem, bir cebir kuralının bir eşitsizliğe uygulanması, bir tanım, bir teorem veya bir kuraldan yola çıkarak yeni fikirler üretilmesi kastedilmektedir.

4. BULGULAR

Bu çalışma için kayda alınan derslerdeki tartışmaların üç sınıfta kümelendiği gözlemlenmiştir. Kanıt üzerine, tanım kurma üzerine ve problem çözme üzerine olan tartışmalar. Bu yüzden bu bölüm üç ayrı başlık altında incelenecektir. Burada tartışmaların sadece yapısı Toulmin modeline göre analiz edilmiş olup tartışmaların matematik anlamında, içeriği, doğruluğu ya da yanlışlığı irdelenmemiştir.

4.1. Kanıt Üzerine Tartışmalar

Knipping (2008) çalışmasında sınıf ortamında kanıt sürecindeki tartışmaları analiz etmek için Toulmin modelini biraz genişletmiştir. Knipping'in önerdiği model bu çalışmada kayda alınan tartışmaları analiz etmek için yeterli olmamıştır. Bunun belli başlı sebepleri şunlardır :

Birincisi, sınıf ortamındaki tartışmalar genellikle öğretmen rehberliğinde yapılan tartışmalardır ve Knipping'in çalışmasına konu olan tartışmalar da öğretmen rehberliğinde yapılmıştır. Tartışmanın ulaşması gereken sonuca giden yolda öğrencilerin sonuçtan uzaklaşacak bir yola girmesi, yanlış bir ara sonuca ulaşması veya tartışmanın tıkanması yani öğrencilerin ilerleyememesi durumunda genellikle öğretmen üstüne düşen rehberliği yaparak tartışmanın gitmesi gereken seyirde gitmesini sağlar. Dolayısıyla, öğretmen sınıf ortamında gerçekleştirilen tartışmanın yapısını değiştiren bir etkendir ve bunun doğal bir sonucu olarak tartışma analizinde kullanılacak olan Toulmin modelinde öğretmene ait bileşenlerin olduğu gözlemlenmiştir. Buna karşılık, Knipping'in önerdiği modelde öğretmene ait bir bileşen yoktur.

İkinci olarak, Knipping (2008) tartışmaları kavramsal ve görsel olmak üzere ikiye sınıfa ayırmıştır. Knipping, tartışma adı altında aslında gerekçeleri sınıflandırmıştır. Bu çalışmada ise, bunlara ek olarak üçüncü bir gerekçe tipi "referans gerekçe" ortaya çıkmıştır.

Üçüncü olarak, sınıf ortamında yapılan bir kanıtın geçerli bir kanıt olup olmadığı başlı başına bir sorundur ve son yıllarda bir çok araştırmaya konu olmuştur (Alcock ve Weber, 2005; Selden ve Selden, 1995,2003; Senk, 1985; Chazan, 1993). Öğretmen rehberliğinde yapılan bir kanıtın ne zaman öğrenciler tarafından geçerli olduğunun anlaşılması , tartışmayı analiz etmemizi sağlayan bir modelde mutlaka yer alması beklenir. Zira öğretmen rehberliğinde yapılan bir tartışma mutlaka bir sonuca varmaktadır, yani tartışma sonuçsuz kalmamaktadır.

4.1.1. $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ ifadesinin iyi tanımlı olduğunu gösterme

1. <Ö> Sınırlı mıdır acaba? İntegrali alabiliyor muyum? Maksadım ne? Bu değer var mıdır? Onun üzerine tartışıyoruz arkadaşlar. Sürekliliğine kanaat getirdik ama yetmez. İntegrallenebilir olması için bir de sınırlı olması gerekir. Sınırlı mıdır acaba?

2. <Ebru> a dan b ye diyor.

3. <Ö> O integral aralığı.

4. <Ayşe> Fonksiyonun tanım aralığı da ama a dan, [a, b] den **R** ye gidiyor.

5. <Ö> Evet

6. <Ayşe> Sürekliyse [a, b] kapalı aralığı tanım kümesiyle, değer kümesi zaten bir şekilde sınırlı olacak.

7. <Ö> Hayır. Şöyle olabilir. a ile b arasında çalışırsanız şöyle olabilir (Şekil 4.1).

Şekil 4.1

8. <Ayşe> O kapalı kümeden tanımlı ama.

9. <Ö> Sınırlı ne demek? Fonksiyonun sınırlı olması demek ne demek?

10. <Sınıf> (5-6 öğrenci aynı anda cevap vermeye çalışıyor. Bir uğultu var.)

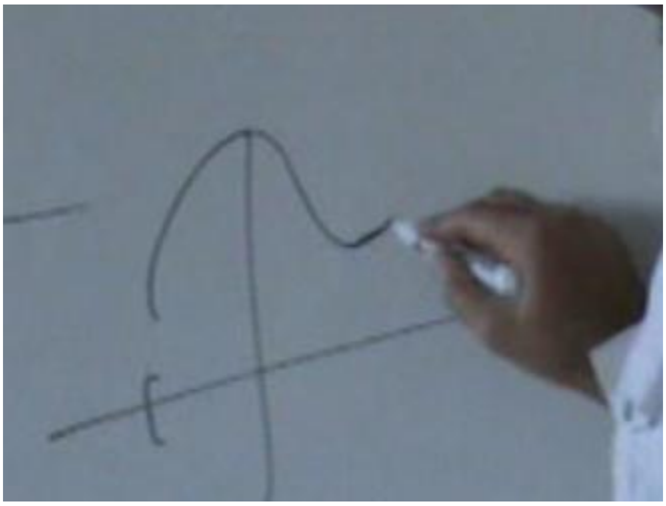
11. <Ö> Efendim?

12. <Ahmet> Değer kümesinin sınırlı olması demek.

13. <Ö> Değer kümesinin sınırlı olması demek. Onu da şuradan söyleyeceksiniz arkadaşlar. Analiz bilgisi bu da. Geçen yılda ileri analizde de aslında karşınıza çıktı bu, analize girişte de karşınıza çıktı. Kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyon sınırlıdır. Hangi teorem? Adı vardı onun.

14. ….

15. <Ö> Kapalı aralıkta sürekli fonksiyon sınırlıdır. Ne demiştik geçen ders? Analiz bilgilerini genelleştirme işi yapacağız. Sizlerin de sorumlu öğrenciler olarak bu bilgileri tekrar gözden geçirmeniz gerekiyordu arkadaşlar. Ara değer teoremi bunu söyler ya da ara değer teoremi değil, özür, ekstremum değer teoremi bunu söyler. Hatırlıyor musunuz analize giriş dersinde sürekli fonksiyonu alıyorsunuz da (Şekil 4.2) a burası b burası, hatta aynen bu şekli çizeriz size değil mi?



Şekil 4.2

Bunun maksimumu ve minimumu vardır diye konuşmuştuk. Evet ekstremum değer teoremi. Dolayısıyla f sürekli, kapalı aralıkta tanımlandığı için sınırlı . g de sınırlı. Sınırlı fonksiyonların farkları sınırlı. Geçen hafta 4 numaralı örnekte zaten sınırlı fonksiyonları görmüştük orada. Sınırlıdır bu da arkadaşlar. Anlaşıldı mı? Hem sürekli hem sınırlı. Hatta sürekliliğin çok kuvvetli bir istek olduğundan söz etmiştik.

Derya’nın söylediği gibi, sınırlı sayıda süreksizlik noktası varsa da razı olabiliriz demişti. Önemli değil ama hem sürekli hem de sınırlı. Dolayısıyla gerçekten bu fonksiyon integrallenebilir bir fonksiyondur ve bu değer vardır ve bu değer tektir. Ne tarif eder bu? Bu integralin sonucu ne tarif eder?

16. <Zeki> İki eğri arasındaki
17. <Ö> Efendim
18. <Zeki> İki eğri arasındaki
19. <Ö> Pozitif bölgede iki eğri arasında kalan alanı tarif edecektir ve bu değer tektir arkadaşlar. Tek olması bizim için önemli, tek olduğunu gösterecektir bize. Dolayısıyla yazdığım bu eşitlik evet bir fonksiyon üretir, iyi tanımlı bir fonksiyon.

Tartışma Analizi

Analize başlamadan önce Toulmin’in gerekçe ve çürüten bileşeninin hatırlatılmasında fayda vardır. Toulmin gerekçe bileşenini, veriden sonuca nasıl ulaşıldığının anlaşılmadığı durumlarda, argüman sahibinin muhatabına bunu açıklayabilmek için “oraya nasıl gidersin ? (how do you get there ?)” sorusuna vereceği cevap olarak ifade etmiştir. Bu sorunun dışında, sınıf ortamındaki tartışmalarda öğrencilerin “Beni nasıl ikna edersin ?”, “Bunu nasıl garanti edersin ?” sorusuna verdikleri cevaplar gerekçe bileşeni olarak görev yapmaktadır. Yani, öğrenciler kendi ulaştıkları sonuçları savunmak için sanki kendilerine yukarıdaki sorular sorulmuş gibi cevap vermektedirler. Öğrencilerin kendi gerekçelerini kurarlarken sık sık akıl yürütmeye başvurdukları gözlemlenmiştir. Burada akıl yürütme ile sayısal bir işlem, bir cebir kuralının bir eşitsizliğe uygulanması, bir tanım, bir teorem veya bir kuraldan yola çıkarak yeni fikirler üretilmesi kast edilmektedir. Bu tür akıl yürütmeye dayalı gerekçelerle her tartışmada karşılaşılmıştır. İleride görüleceği gibi başka tür gerekçelerle de karşılaşılmıştır. Yani gerekçeleri türlerine göre ayırabilmek mümkün olmuştur. Akıl yürütmeye dayalı bu tür gerekçelere *dedüktif gerekçe* adı verilmiştir.

6. satırda, Ayşe fonksiyonun sürekli olduğunu belirterek, kendi *sonucunun* (*iddiasının*) *dedüktif gerekçesini* ortaya koyuyor.

Toulmin çürüten bileşenini iddia sahibinin kullandığı gerekçeyi geçersiz kılan ifadeler, istisna durumlar olarak tanımlamıştır. Burada ise çürüten bileşeni Toulmin'in belirttiği anlama ek olarak, muhatabımız olan kimsenin gerekçemize karşı söylediği ifade veya önerme olarak karşımıza çıkmaktadır. Yani, muhatabımızın çürüten olarak önümüze koyduğu ifade veya önerme ya gerçekten bizim gerekçemizi geçersiz kılan bir durumdur ya da muhatabımız yanlış veya tartışmanın varsayımlarına uymayan bir çürüten ortaya koymuştur. Eğer gerekçemizi geçersiz kılan bir çürüten verilmişse ya gerekçemizi ya da sonucumuzu değiştirmemiz gerekir. Eğer gerekçemizi geçersiz kılmayan yanlış veya tartışmanın varsayımlarına uymayan bir çürüten verilmişse çürütenin yanlışlığını muhatabımıza söylememiz gerekir. Çürüten bileşeninin gerekçeyi geçersiz kılıp kılmadığı destek bileşenine bağlıdır.

7. satırda öğretmen şekil 4.2 deki grafiği çizerek, tartışmanın *çürütenini* veriyor. Yani, Ayşe'nin ortaya koyduğu *gerekçe* öğretmen tarafından kabul edilmiyor. Fakat burada öğretmen yanlış bir çürüten vermektedir. Kapalı küme üzerinde sürekli bir fonksiyon vermesi gerekirken açık bir küme üzerinde sürekli bir fonksiyon vermektedir,yani varsayıma aykırı bir çürüten vermiştir. Bunun üzerine 8. satırda Ayşe, fonksiyonun tanım kümesinin kapalı olduğunu söyleyerek, gerekçesine *destek* sağlamaktadır. Destek bileşeni kullanıldığında iki durum söz konusudur. Destek bileşeni gerekçeyi savunabiliyorsa yani çürüten bileşeninin belirttiği istisna durumların olamayacağını garanti edebiliyorsa bu durumda çürüten bileşeni geçersizdir ve tartışma kaldığı yerden devam eder. Eğer destek bileşeni gerekçeyi savunamıyorsa veya destek bileşeni hiç ortaya konamıyorsa bu durumda yukarıda belirtildiği gibi ya gerekçe ya da sonucun değiştirilmesi gerekir.

Sınıf ortamındaki tartışmalarda, tartışmanın başlangıcından sonuna kadar öğretmen öğrencilerin gitmesi gereken yolda gidip gitmediklerini gözlemlemekte bir nevi öğrencilerine rehberlik etmektedir. Öğrenciler kendi zihinlerinin bir ürünü olan doğru dedüktif gerekçeleri ortaya koysalar bile bazen gittikleri yolun doğruluğundan emin olamamaktadırlar. Bunun gibi olan her durumda öğretmenin devreye girip öğrencilerin gerekçelerini, desteklerini veya ulaştıkları ara sonuçları onaylayan olumlu ifadeler kullandığı görülmüştür. Öğrencilerin tartışmaya daha rahat devam etmesini sağlayan ve öğrencilerin kurduğu gerekçe, desteğe veya ulaştıkları ara sonuçlara öğretmen tarafından verilen onayların hepsi *rehber desteği* olarak isimlendirilecektir. Rehber desteği bileşeni tartışmanın olması gerektiği yolda gittiğini öğrencilere gösteren önemli bir göstergedir. Öğretmen rehber desteğini çeşitli şekillerde sunabilir. Bu durum rehber desteğinin kendi için-de sınıflanabileceğini göstermektedir. Öğretmen öğrencinin gerekçesini, desteğini, ara sonucunu sadece "iyi, güzel, harika, aferin" gibi ifadelerle onaylayıp matematiksel bir ifade kullanmıyorsa bu durumu *onay rehber desteği* olarak isimlendirilecektir. Öğretmen öğrencinin gerekçesini, desteğini, ara sonucunu bir tanıma, teoreme veya geçmişte çözülen bir probleme atıfta bulunarak onaylıyorsa bu durumu *referans rehber desteği* olarak isimlendirilecektir.

13. ve 15. satırlarda, öğretmen kapalı bir aralıkta sürekli bir fonksiyonun sınırlı olduğunu, geçen yıl analiz dersinde gördükleri ekstremum değer teoremine atıfta bulunarak Ayşe'nin desteğine *referans rehber desteği* sağlıyor ve Ayşe'nin söylediği gibi değer kümesinin sınırlı (yani fonksiyonun sınırlı) olduğu sonucuna ulaşılıyor. Dolayısıyla tartışmanın normal seyrinde devam ettiği anlaşılıyor.

Birden fazla argümanın olduğu bir tartışamada, bir argümanın sonucu, bir sonraki argümanın verisi olabilir. Böylece, tartışmalar birbirine bağlanabilir. Burada da elde edilen ilk sonuç bir sonraki argümanın verisi görevini üstleniyor. Bir tartışmanın birden fazla verisi olabilir. Ayşe'nin ulaştığı ilk sonuç ve 15. satırdaki, g fonksiyonunun da sınırlı olması bir sonraki argümanın verileridir.

Bir gerekçede akıl yürütme yapılmayıp bir teoreme, bir tanıma, bir kurala, bir probleme atıfta bulunarak yapılan gerekçeleri *referans gerekçe* alarak isimlendirilecektir. 15. satırda, öğretmenin bir önceki hafta sınırlı fonksiyonlarla ilgili yaptığı örneği hatırlatması yeni argümanın bir *referans gerekçesi* olarak görülebilir ve fonksiyonların farklarının sınırlı olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu sonuçta bir sonraki tartışmaya veri olarak hizmet etmektedir. Söz konusu veri, 15. satırda "hem sürekli hem sınırlı" ifadesi ile öğretmen tarafından dedüktif olarak destekleniyor ve $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ ifadesinin iyi tanımlı olduğu sonucu çıkıyor. Burada tartışmanın sonucuna bizzat öğretmenin kendisi varmaktadır. Böyle bir durumda sonucun doğruluğu sınıf tarafından kabul edilmektedir.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi

Veri – Ayşe

f fonksiyonu [a, b] den **R** ye gidiyor

1

Sonuç / Veri - Ayşe

değer kümesi zaten bir şekilde sınırlı olacak.

Veri - Rehber

g de sınırlı.

2

Dedüktif Gerekçe - Ayşe

fonksiyon sürekliyse

3

4

Destek -Ayşe

f fonksiyonu kapalı kümede tanımlı

Çürüten - Rehber

Hayır. Şöyle olabilir. a ile b arasında çalışırsanız şöyle olabilir.

5

6

Referans Gerekçe-Rehber

Geçen hafta 4 numaralı örnekte zaten sınırlı fonksiyonları görmüştük orada

6

7

Sonuç / Veri - Rehber

Sınırlı fonksiyonların farkları sınırlı

9

8

Dedüktif Gerekçe - Rehber

… hem sürekli hem de sınırlı.

Referans Rehber Desteği :

Kapalı aralıkta sürekli fonksiyon sınırlıdır… Evet ekstremum değer teoremi.

Sonuç - Rehber

Dolayısıyla gerçekten bu fonksiyon integrallenebilir bir fonksiyondur ve bu değer vardır ve bu değer tektir… Pozitif bölgede iki eğri arasında kalan alanı tarif edecektir ve bu değer tektir arkadaşlar. Tek olması bizim için önemli, tek olduğunu gösterecektir bize. Dolayısıyla yazdığım bu eşitlik evet bir fonksiyon üretir, iyi tanımlı bir fonksiyon

Şekil 4.3 $\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$ ifadesinin iyi tanımlı olduğunu gösterme

4.1.2. (X, d) metrik uzayında yakınsak bir dizinin limiti tektir

Açıklama : Bir (X,d) metrik uzayındaki yakınsak bir a_n dizisinin birbirinden farklı a ve b noktalarına yakınsadıkları kabul edilip, bir çelişki aranıyor, yani olmayana ergi yöntemiyle kanıt yapılıyor. Kanıtın ilk adımlarını yapan öğretmen aşağıdaki ifadeleri tahtaya yazıyor:

a_n dizisi a ve b noktalarına yakınsadığından her $\varepsilon > 0$ için öyle n_1 ve n_2 doğal sayıları vardır ki

$$n \geq n_1 \text{ iken } d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$n \geq n_2 \text{ iken } d(a_n, b) < \frac{\varepsilon}{2}$$

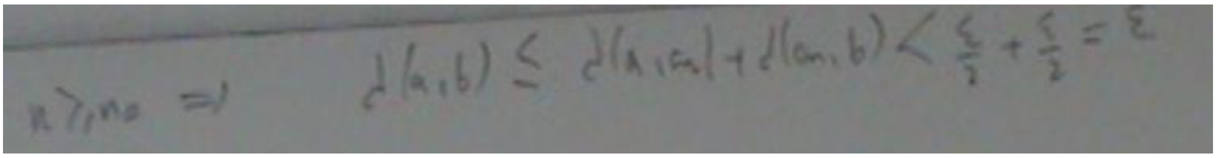
eşitsizlikleri sağlanır. $n_o = \max\{n_1, n_2\}$ olarak seçelim. Üçgen eşitsizliğinden

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n,b) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

yazabiliriz.

Aşağıdaki bölüm bu noktadan sonra çelişkiye düşmek için yapılan tartışmayı göstermektedir.

1. <Ö> Gerçekten yapabileceğimiz bu kadar. Şu an burada yorum yapmamız lazım arkadaşlar.



Şekil 4.4

Hadi yapın bakayım yorumunuzu. Hocam burada çelişki var deyin. Size ne diyor, her ε için böyle yazabilirsiniz diyor. Her ε için, ε u ne seçerseniz seçin a nın b ye olan uzaklığı ε dan küçüktür manası çıkmıyor mu buradan? Hadi yapın bakayım yorumunuzu.

2. <Ahmet> O zaman sıfır olur herhalde a nın b ye olan uzaklığı

3. <Ö> Neden?

4. <Ahmet> Çünkü her ε için mutlaka aşağıda bir ε kalacak

5. <Ö> Diyor arkadaşınız. Diyor ki; Hocam her ε için siz a nın b ye olan uzaklığı ε dan küçükse bu sıfırdır ki diyor.

6. <Ahmet> Yani ondan bir geride bir ε daha vardır.

7. <Nalan> Yani ε nu sıfıra çok yakın seçersek. Ama çok çok yakın. O zaman ░

8. <Ö> Ne kadar yakın mesela? Ömrün boyunca çok yakın seçemezsin.

9. <Nalan> Evet (gülüşmeler)

10. <Nimet> Her ε dan küçük bir ε bulursun. Yani limit olarak sıfıra yakınsıyor.

11. <Ö> Kızım niye kavram karıştırıyorsun orda ne limiti ? Şey demek istiyorsun. Yani çok ░

12. <Nimet> Sonuçta sıfıra yaklaşıyor hocam.

13. <Ö> Çok küçültürsen demek istiyorsun. Niye sıfır?

14. <Funda> Yine Arşimet özelliğini kullanalım.

15. <Ö> Arşimet özelliğini kullanalım. Kullan Funda

16. <Funda> Eğer ε nu burada biz küçük bir şekilde bulmamız gerekiyor ya çok küçük değerler, ε bir sayı olduğu için sıfır ile arasında sonsuz tane reel sayı olacak

17. <Mert > Hocam, a, b den farklı ise ε nu a-b den küçük seçersek çelişki oradan bulunur. Her ε için ya.

18. <Funda> Ha evet a farklı b olduğu için

19. <Mert> Olmuyor mu?

20. <Ö> Bir daha söyle . Eğer siz diyorsunuz ki hocam a, b den farklı olduğu için ε u ne olarak seçelim dedin

21. <Mert> d(a,b) den küçük

22. <Ö> d(a,b) den daha küçük seçersem

23. <Mert> d(a,b)/2 mesela

24. <Ö> Ha öyle de seçersem diyor. Aslında mantıklı söylüyor değil mi çocuklar. Eğer ε küçük olsun d(a,b) den diye seçersem ki seçebilirim. O zaman burada çelişki mi yaşarım diyorsun.

25. <Ö> Efendim.

26. <Mert> Evet

27. <Ö> Doğru mu söylüyor arkadaşlar.

28. <Tugay> d(a,b) küçük eşittir d(a,b)/2

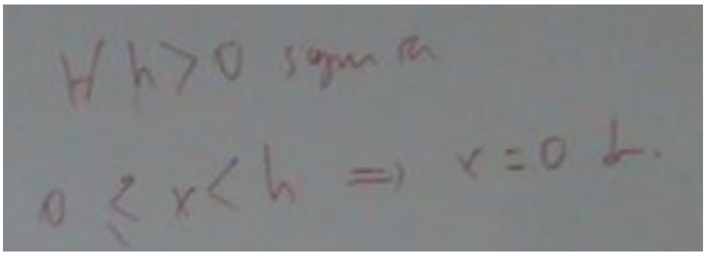
29. <Ö>Mesela ε nun bu seçimi için yazdığınız bu eşitsizlik yanlış olur diyor. Aslında çok doğru yakalıyor arkadaşınız. Efendim Furkan

30. <Furkan> Mesela $\frac{1}{n_0}$ dan küçük de seçebiliriz . Zaten n_o ımız var ya elimizde n lerden büyük

31. <Ö> Ya da diyor. Evet hocam bu noktaya geldiğinizde $\frac{1}{n_0}$ dan daha küçük bir ε için bu da sağlamaz diyorsun.

32. <Furkan> Evet sağlamaz

33. <Ö> Evet güzel. Bunların hepsi Nimet in söylediği Funda nın söylediği şundan yola çıkarak elde ediliyor arkadaşlar . Arşimed aksiyomunun şöyle bir özelliği vardır. Dediklerinizin hepsi doğru. Nalan ile Nimetin söylediği sezgisel . Furkan ile Mert in söylediği gerçekten çelişki. Ama şuradan çıkar o ; Arşimed özelliğinden , hatırlamaya çalışalım .



Şekil 4.5

x sıfırdır değerli arkadaşlar. Arşimed in aksiyomunun sonucudur bu . Size söz etmemiş olmam lazım bundan hani böyle bir özellikten ama bu otomatikman çıkabilen bir şey. Sizler rastlamış olabilirsiniz. Defterinizin bir kenarına not alabilirsiniz. Bu durum altında d(a,b) nin ne olduğunu söylersiniz benim koşullarım altında

34. <Furkan> Sıfır olduğunu

35. <Ö> Evet. Ya da Furkan ve Tugay ın söylediği şekilde seçimler de yapabilirsiniz . O şekilde de yönlendirebilirsiniz kanıtı. Bu biçimde de çelişki elde edilir diye. Anlaştık mı? Peki.

Tartışma Analizi

1. satırda Ahmet a nın b ye olan uzaklığının sıfır olacağını söyleyerek iddiasını yani ulaştığı *sonucu* söylüyor.

2. satırda Ahmet 1. satırda ortaya koyduğu *sonucun verisini* her ε dan daha küçük bir ε nun var olması ile sağlıyor.

7. satırda Nalan, Ahmet'in sonucuna yönelik olarak ε nun sıfıra çok yakın seçilmesi gerektiği yönünde bir *dedüktif gerekçe* sunuyor.

8. satırda öğretmen yakın kavramına itiraz ediyor. "Ne kadar yakın mesela? Ömrün boyu çok yakın seçemezsin" diyerek Nalan'ın dedüktif gerekçesine karşılık *çürüten* olarak davranıyor.

14. satırda Funda, Arşimet özelliğini dile getirerek *sonuç* için bir *referans gerekçe* sunuyor.

15. satırda Mert a ve b nin farklı sayılar olmasına dayanarak (*veri*), ε nu a – b den küçük seçiyor (*dedüktif gerekçe*) ve çelişkinin (*sonuç*) elde edileceğini söylüyor.

(Aslında a – b ile $d(a,b)$yi kast ediyor.)

20. satırda öğretmen Mert'in dediklerini tekrarlattırıyor. Öğretmen burada bir *çürüten* bulabilirse Mert'in ulaştığı *sonuç* geçerli olmayacak.

28. satırda Tugay, "$d(a,b) \leq \frac{d(a,b)}{2}$" diyerek Mert'in kast ettiği çelişkiyi açık bir şekilde dile getiriyor.

29. satırda öğretmen Mert'in söyledikleri için "Aslında çok doğru yakalıyor arkadaşınız" diyerek bir *onay rehber desteği* veriyor.

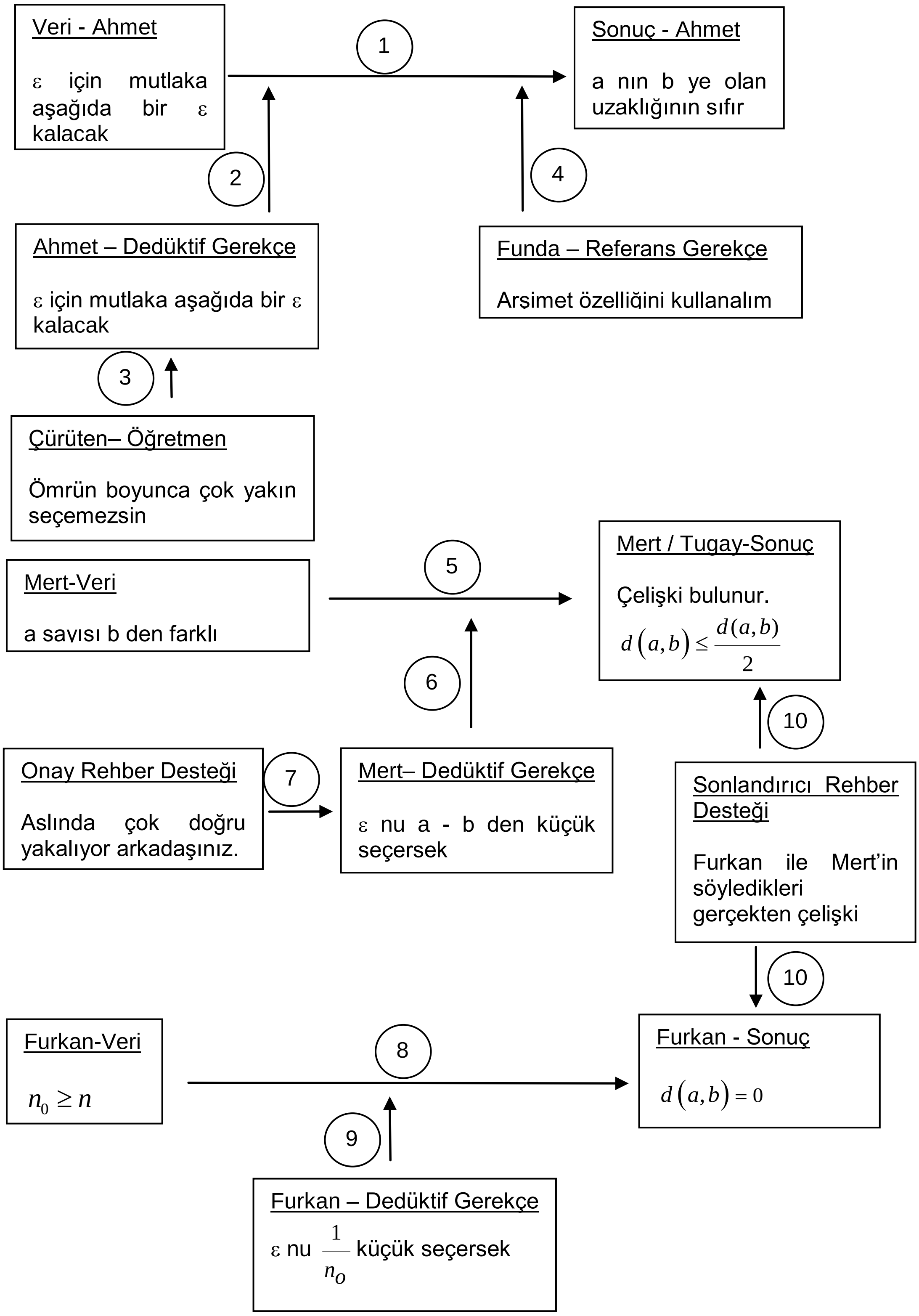
30. satırda Furkan farklı bir çelişkiye ulaşılmasını sağlayan yeni veri ve gerekçe sunuyor. Furkan $n_0 \geq n$ olmasına dayanarak (*veri*) ve ε nu $\frac{1}{n_0}$dan küçük seçiyor (*dedüktif gerekçe*).

Tartışmalar bazen öğretmenin, bazen de öğrencilerin ulaşılması gereken sonuca ulaşmasıyla son bulmaktadır. Öğretmenin sonuca ulaşması durumunda öğrencilerin sonucun doğruluğuna zaten ikna olmaktadır, ancak sonuca öğrencilerin ulaşması durumunda sonucun doğruluğunu göstermek için öğretmen bir destek sunmaktadır. Bu destek tartışmanın yolunda gittiğini değil, tartışmada gelinmesi gereken sonucu yani son durağı göstermektedir. Bu yüzden hayati bir öneme sahiptir. Bundan dolayı, öğretmen tarafından verilen bu tür bir desteği *sonlandırıcı rehber desteği* olarak isimlendirilecektir.

33. satırda öğretmen Furkan ile Mert'in söylediklerinin gerçekten çelişki olduğunu söylerek *sonlandırıcı rehber desteği* veriyor. (34. satırda Furkan $d(a,b)=0$ çelişkisine ulaşacak fakat öğretmen Furkan'ın ulaşacağı çelişkiyi anladığı için henüz Furkan çelişkiyi söylemeden öğretmen Furkan için de *sonlandırıcı rehber desteği* veriyor.)

34. satırda Furkan $d(a,b)=0$çelişkisini elde ediyor.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.6 (X, d) metrik uzayında yakınsak bir dizinin limiti tektir.

4.1.3. R^n de bir $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi yakınsaksa $x_k \to 0$ olduğunu gösterme

Açıklama : Öğretmen yukarıdaki ifadeyi tahtaya yazar.

Aşağıdaki bölüm bu ifade üzerine yapılan tartışmayı göstermektedir.

1. <Ö>Ne diyorsunuz?
2. <Ahmet> Hocam bileşenlerinin tek tek ε dan küçük olduğunu buluruz.
3. <Ö> Efendim?
4. <Ahmet> Mesela x_1 in, x_2 nin, x_3 ün teke tek ε dan küçük olduğunu bulabilir miyiz?
5. <Ö> Nasıl ? $\mathbf{R}^n$ deki x_1, ε dan küçük öyle mi ?
6. <Ahmet> x_k nın bileşenlerini ▒
7. <Ö> x_k nın bileşenlerini…
8. <Ahmet> x_k, $\mathbf{R}^n$ de ya.
9. <Ö> Hı hı
10. <Ahmet> O zaman x_k nın ε dan küçük olması gerekiyor sıfıra yakınsadığı için.
11. <Ö> x_k nın nesi ε dan küçük olması gerekiyor?
12. <Ahmet> Normu.
13. <Ö> Hımm normu. Her k için mi?
14. <Ahmet> Değil mi?
15. <Ö> Bilmiyorum. Sen söylüyorsun. Anlamadım ki!
16. <Ahmet> O zaman normu ε dan küçük ise onun bileşenleri de küçüktür üçgen eşitsizliğinden.

17. <Ö> x_k nın normu ε dan küçük ise…

18. <Ahmet> x_k nın normu hani kök içinde x_1 in karesi artı x_2 nin karesi…Bileşenleri yani. Hani yapmıştık ya.

19. <Cansu> Hocam şey.. Kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olduğunu bulacağız önce. Onun limitinin sıfır olduğunu. O zaman zaten bu seride sıfıra yakınsamaz mı?

20. <Ö> Seri mi?

21. <Cansu> Yani x_k.

22. <Ö> x_k ? Seri mi x_k?

23. <Cansu> Yok.

24. <Ö> Dizi mi?

25. <Cansu> Ha dizi …..

26. <Ö> Yani ?

27. <Şirin> Kısmi toplamlar dizisine bakmak lazım.

28. <Ö> Evet bu yakınsaksa kısmi toplamlar dizisi yakınsak olur. Peki, kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olmasıyla x_k nın sıfıra gitmesinin ne alakası var? Mehmet ?

29. <Mehmet> Geçen sene.. İşte şey yapmıştık. Bir serinin kısmi toplamlar dizisi hocam.. Sıfıra yani limiti sıfır olmak ░

30. <Ö> Kısmi toplamlar dizisinin mi limiti sıfır?

31. <Mehmet> Yok. x_k nın.

32. <Alpaslan> Sadece . x_k nın limiti sıfır olmak zorunda

33. <Ö> Haa. **R** de bir serinin mi? Nerede? **R** de bir serinin mi?

34. <Mehmet> **R** de yakınsak olabilmesi için.

35. <Ö> Seri yakınsaksa ?

36. <Mehmet> x_k nın limiti sıfır yani.

37. <Ö>Bunu biliyorum. Evet **R** de var bu.

38. <Mehmet> Eee $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ de de hocam x_k ların hepsi eee… x_1 sıfıra yakınsamalı, x_2 sıfıra yakınsamalı.

39. <Ersin> Hocam söyleyebilir miyim? x_k , a ya gidiyorsa, x_{k-1} , a ya gidiyorsa yani bunları ee.. x_k - x_{k-1} = x oluyordu ya… Anlıyor musunuz?.. Doğan Çoker'in kitabında böyle ispatlıyordu hocam bunun böyle olduğunu.

40. <Ö> x_k - x_{k-1} = x mi diyordu?

41. <Ersin> x_k - x_{k-1} = x olacak da yani limit x giderken sonsuza.. x eşittir ee limit daha sonra yani x = 0 oluyorsa sıfır eksi sıfırdan yine sıfıra ░

42. <Ö> Onun eşit olmak zorunda değilki.

43. <Ersin> a oluyor ya hocam bir tane dizi (a ya yakınsayan bir diziyi kast ediyor.)

    Onun alt dizisi de a olmuyor mu? (alt dizi de a ya yakınsamıyor mu demek istiyor.)

    O zaman x i elde etmek için limit a eksi a ░

44. <Ö> Peki bunu $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ de nasıl kullanıyorsun?

45. <Ersin> $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ de .. Hocam onun normunu alırım ben. **R** de yapalım. **R** de yaparsak öyle olmaz mı?

46. <Ö>Normunu alalım. Ne olacak? Normu da yakınsak. Haa ha bir dakika! Bu yakınsaksa mutlak yakınsak olmak zorunda değilki.

47. <Ersin> Yani normdan gidebiliriz.

48. <Ö>Normu yakınsak olmak zorunda değilki. Normdan gidebilirmiyiz? Soruyorum. Seri x_k yakınsaksa normu yakınsak olmak zorunda mı ?

49. <Ersin> Hocam $\mathbf{R}^n$ de de yakınsaksa eğer limitini aldığımızda da aynı şey olmuyor mu? Yani **R** ile $\mathbf{R}^n$ de yaptığımız işlemler benzer değil mi?

50. <Ö>Ama şimdi benzerse bile yazmamız lazım.

51. <Ayşe>Hocam $\mathbf{R}^n$ de bir serinin yakınsak olup olmadığına bakarken, bileşenlerinin **R** de yakınsak olup olmadığına bakıyorduk. O zaman bu seri yakınsaksa bileşenleri de yakınsak olmak zorundadır. Bunlar yakınsaksa bileşenleri de zaten dizilerde de sıfır olmak zorundadır. Onların hepsi birleştiğinde de $\mathbf{R}^n$ de sıfır olmak zorundadır.

52. <Ö> Doğru söylüyorsun. Doğru doğru.

53. <Ahmet> Hocam şeyle ilgisi var mı ?

54. <Ö> Söyle Ahmet

55. <Ahmet> Teorem 11 ile bir ilgisi var mı hani $x_k + \ldots + x_{k+p}$ şeklinde yazıp p yi sıfırdan başlatıyorduk.

56. <Ö> Çok güzel, harika. Yani burada şunu söyleyeceksiniz $\mathbf{R}^n$ deki bu seri yakınsaksa o teorem 11 de gerek ve yeter koşul olarak ne vermiştik biz? Her $\varepsilon > 0$ için bir tane n doğal sayısı var öyle ki n den büyük hangi k yi alırsam alayım ben biliyorum ki $x_k + \ldots + x_{k+p}$ nin normu küçük ε dur. Üstelik bu her p = 0, 1 , 2 … için sağlanır. Peki ben p yi sıfır alırsam burada x_k nın normu ε dan küçük kalır. $\mathbf{R}^n$ deki bir dizinin sıfıra yakınsaması bu demek değil mi zaten?

Tartışma Analizi

2. satırda Ahmet her bir x_k bileşeninin ε dan küçük olduğu *iddiasını* (*sonucunu*) söylüyor. Halbuki bu ifade doğru ya da yanlış olmaktan ziyade matematik olarak anlamlı değildir. Aynı ifadeyi 10. satırda tekrarlayan Ahmet buna dayanak (v*eri*) olarak da serinin sıfıra yakınsamasını gösteriyor.

Öğretmen rehberliğinde yapılan tartışmaların çok büyük bir avantajı tartışmanın mutlaka sonlanmasıdır. Tartışmanın, sonuca gidecek yolun dışına çıkması, yanlış ara sonuçlar bulup buradan doğru ara sonuçlara geçilememesi ve hatta bazen öğrenci tarafından kanıta nereden başlanılacağının tam olarak bilinememesi üzerine rehber tartışmaya müdahale eder. Öğretmen rehberliğinde yapılan hemen her tartışmada bu durum ortaya çıkmaktadır. Bundan dolayı, bu durumu *rehber yönlendirmesi* olarak isimlendirilecektir. Daha açık bir ifadeyle, *rehber yönlendirmesi* tartışmanın doğru yerden başlayamaması, bir noktadan sonra ilerleyememesi veya yanlış yolda ilerlemesi durumunda, tartışmanın ulaşılması gereken sonuca yönelik devam edebilmesi için öğretmen tarafından yapılan müdaheledir. Söz konusu müdahele bir örnek, bir soru, bir hatırlatma veya bir matematiksel ifade olabilir.

11. satırda öğretmen, Ahmet'in söylediklerini anlamlı hale getirebilmesi için bir *rehber yönlendirmesinde* bulunuyor. Burada öğretmen x_k nın kendisinin değil de başka bir şeyinin ε dan küçük olacağını belirten bir soru ifadesi kullanıyor.

16.satırda öğretmenin yaptığı *rehber yönlendirmesi* sonucunda x_k nın normunun ε dan küçük olacağını söyleyerek 2. satırda ulaştığı *sonucu* güncelliyor. Bu *sonucu* kendisi için yeni bir *veri* olarak kullanıyor ve x_k nın bileşenlerinin normlarının da ε dan küçük olacağı sonucuna varıyor. Bu çıkarımı yaparken de üçgen eşitsizliğini *referans gerekçe* olarak kullanıyor.

19. satırda Cansu tartışmaya başka bir *veri* ile katılıyor. Kısmi toplamlar dizisinin limitinin sıfır olduğunu (*veri*) göstererek serinin sıfıra yakınsadığı *sonucuna* varılabileceğini düşünüyor.

27. satırda Şirin de kısmi toplamlar dizisini *veri* olarak kullanıyor.

28. satırda öğretmen kısmi toplamlar dizisinin yakınsak olması ile x_k nın sıfıra gitmesi arasında bir alaka olmadığını belirten bir soru sorarak ikna olmadığını gösteriyor. Öğretmen burada kısmi toplamlar dizisinin limitinin sıfır olmasından çok yakınsak olmasına karşı çürüten rolündedir.

29. satırda kısmi toplamlar dizisinin sıfır olması gerektiğine dair bir vurgu yapıyor.

30. satırda Öğretmen yine ikna olmuyor.

31. ve 32. satırda Mehmet ve Alpaslan x_k nın limitinin sıfır olması gerektiğini söyleyerek tartışma için yeni *sonuç* üretiyorlar.

33. satırda öğretmen bir rehber yönlendirmesi daha kullanıyor ve x_k dizisinin **R** de bir seri olup olmadığını soruyor.

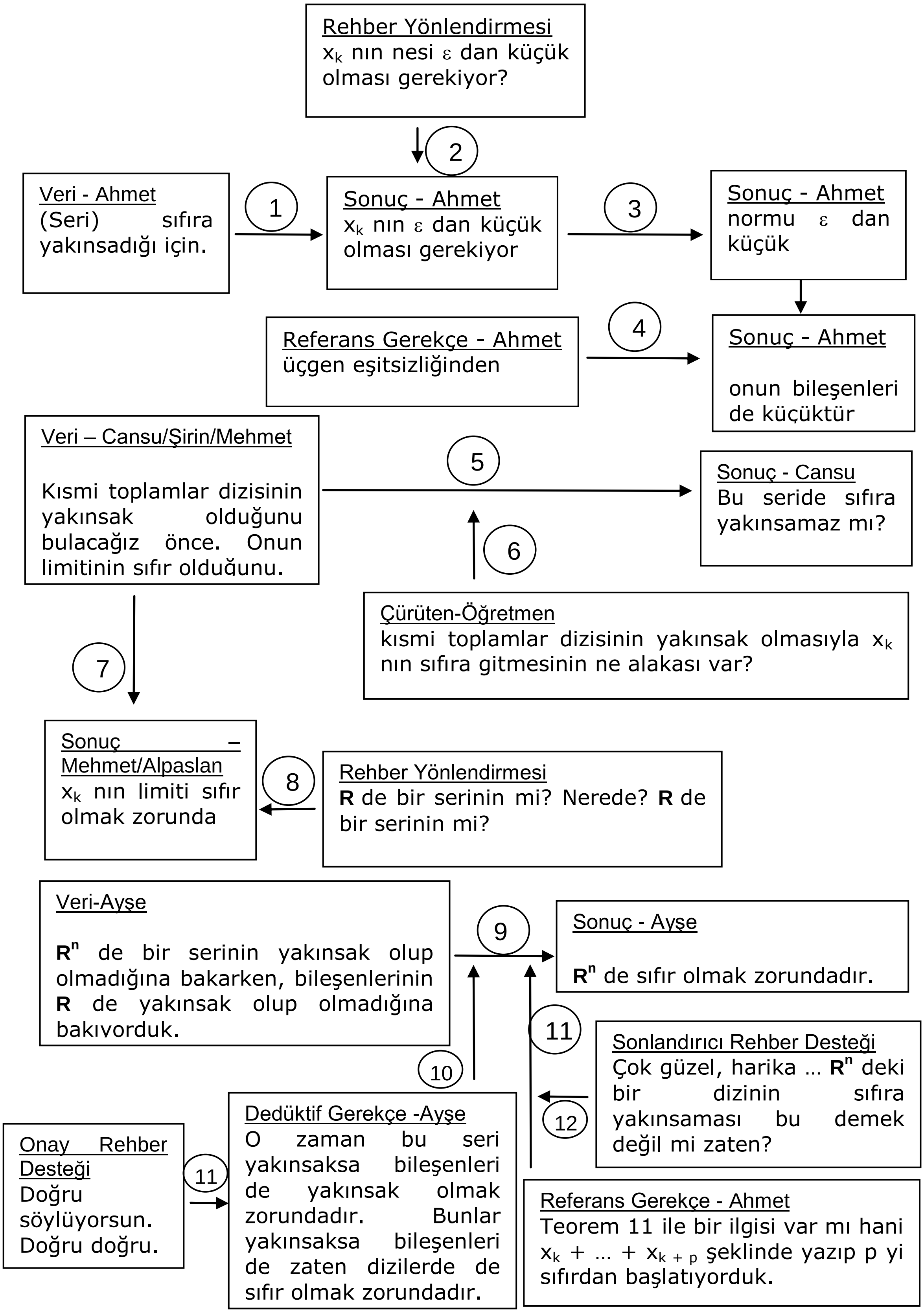
51. satırda Ayşe $\mathbf{R}^n$ deki bir serinin **R** deki bileşenlerine göre yakınsaklığının incelendiği belirterek bunu kendisi için *veri* olarak kullanıyor. Yine aynı satırda yakınsak bir serinin bileşenlerinin **R** de yakınsak ve dolayısıyla her bir bileşen limitinin sıfır olacağını söylüyor. Bu akıl yürütmeyi de *dedüktif gerekçe* olarak kullanıyor ve $x_k \to 0$ *sonucuna* varıyor.

52. satırda öğretmen "Doğru söylüyorsun. Doğru doğru" diyerek sonlandırıcı rehber desteği vermek yerine onay rehber desteği veriyor.

55. satırda Ahmet teorem 11 den bahsederek *referans gerekçe* kullanıyor.

56. satırda "çok güzel, harika" dedikten sonra kanıtı teorem 11 ile yaparak *sonlandırıcı rehber desteği* veriyor.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.7 R^n de bir $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ serisi yakınsaksa $x_k \to 0$ olduğunu gösterme

4.1.4. R^n de sonlu bir kümenin kapalı olduğunu gösterme

Açıklama : Öğretmen tahtaya "$\mathbf{R^n}$ de sonlu bir kümenin kapalı olduğunu gösterin" yazar.

Aşağıdaki bölüm bu soru çerçevesinde yapılan tartışmayı göstermektedir.

1. <Ö> Ne diyorsunuz?
2. <Kübra> Tek nokta kümesinin kapalı olduğunu gösterelim.
3. <Ö> Tek nokta kümesinin kapalı olduğunu gösterelim öyle mi? Gösterdik ya onu zaten.
4. <Kübra> Bir A kümesi olsun. Bu A kümesi x lerden oluşsun ve x tek nokta kümelerinin birleşimi, x tek nokta kümelerinin büyük birleşimi A kümesine eşit olsun. Tek noktalar zaten kapalı. Sonlu olduğu için de, şey kural yazmıştık ya. Keyfi sayıda yok sonlu sayıda birleşimi kapalı kümelerin kapalı olduğu için A kümesi de kapalı kümedir. Çok güzel! İşte budur! Harika!

Tartışma Analizi

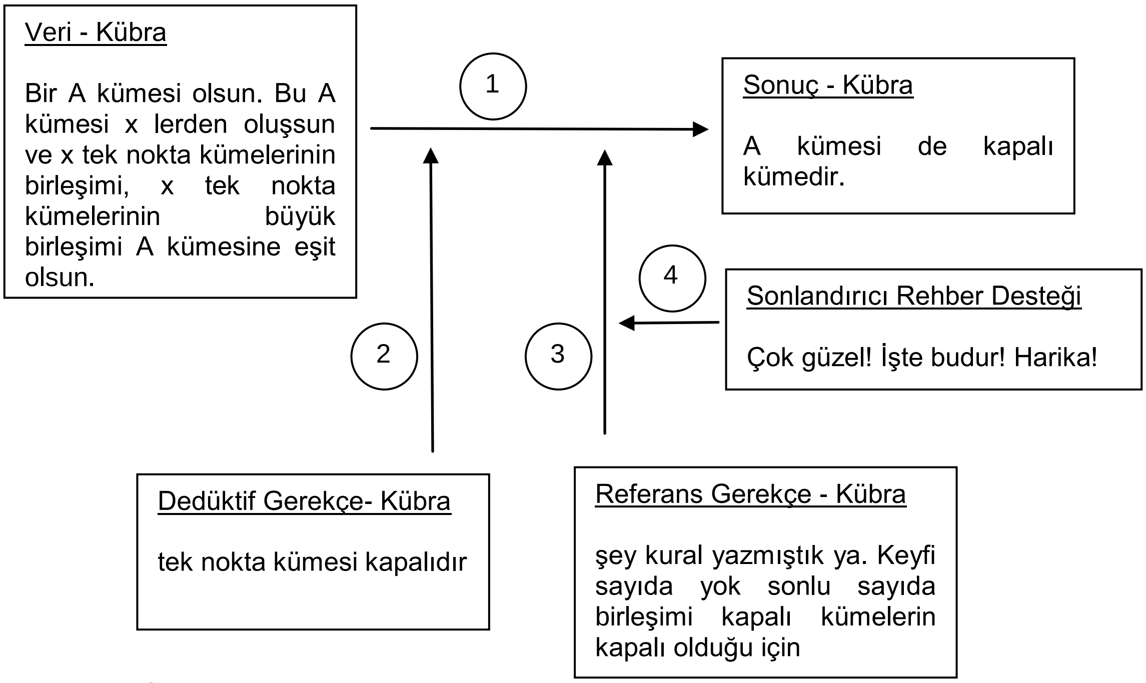
2. satırda Kübra tek nokta kümesinin kapalı olduğunu göstermek istiyor. Kübra bunu *dedüktif gerekçe* olarak kullanıp *sonuca* ulaşmayı düşünüyor.

3. satırda öğretmen tek nokta kümesinin kapalı olduğunu zaten önceden gösterdiklerini söylüyor.

4. satırda Kübra sonlu bir A kümesini tek nokta kümelerinin birleşimi olarak alıyor (*veri*), tek nokta kümelerinin kapalı olmasını *dedüktif gerekçe* ve yazdıkları bir kurala dayanarak sonlu sayıda kapalı kümenin birleşiminin kapalı olduğunu söylüyor (*referans gerekçe*) . Buradan A kümesinin kapalı olduğu *sonucuna* varıyor.

5. satırda öğretmen " Çok güzel! İşte budur! Harika! " ifadelerini kullanarak *sonlandırıcı rehber desteği* veriyor.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.8 R^n de sonlu bir kümenin kapalı olduğunu gösterme

4.2. Tanım Kurma Üzerine Tartışmalar

4.2.1. Bir metrik uzayda “sınırlı küme kavramı” nasıl tanımlanır ?

1. <Ö> **R** de çalışalım. **R** nin bir A alt kümesini alalım boştan farklı osun. Bu bir küme alt küme dediğime göre. Sınırlıdır ne demek? Ayşe. **R** de bir kümenin sınırlı olması ne demek?

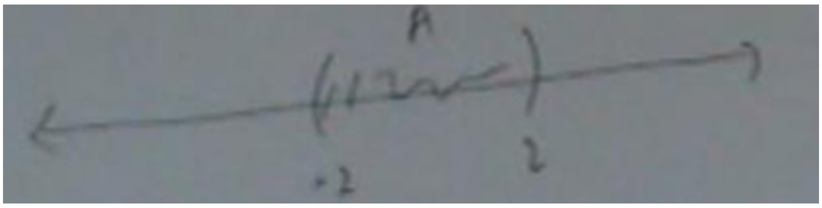
2. <Ayşe> …….

3. <Ö> Ne olabilir?

4. <Ayşe>…

5. <Ö> Peki biraz daha somutlaştıralım. (Tahtaya gerçel ekseni çiziyor.)

6. <Ö> Gerçel eksen, **R** nin kendisi. Bir tane A kümesi alalım. A kümesini değişik biçimlerde seçebilirim. Açık aralık, kapalı aralık, yarı açık yarı kapalı aralık ya da nokta kümesi olarak seçebilirim. Açık aralık seçelim. Şurası -2 şurası da 2 olsun. A kümesi de burası olsun (Şekil 4.9). “A kümesi sınırlı mıdır?” diye sorsalar sana lisede öğrenciler ne diyeceksin?



Şekil 4.9

7. <Ayşe> Sınırlı değildir.

8. <Ö> A kümesi sınırlı değildir derim diyorsun. Şimdi buna cevap verebilmek için Ayşe şöyle düşünmen lazım. Sınırlı olmak ne demektir? Aslında bu soruya cevap vermen lazım. Ne demek sınırlı olmak sence ?

9. <Ayşe> Kapsadığı küme yani o kümenin elemanları belirli olmalı yani kapalı aralıkta tanımlanmalı.

10. <Ö> Peki. A kümesi burası olsun. (Tahtaya Ayşe'nin dediğine uygun bir küme çiziyor.)

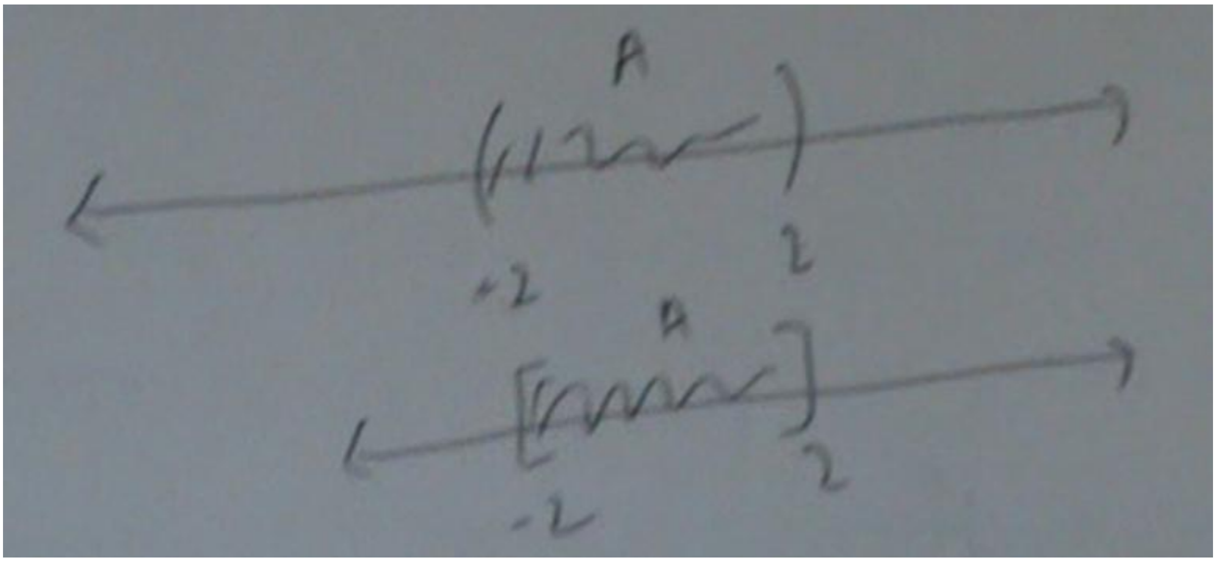
11. <Ö> Şimdi soruyorum. Kapalı olması gerekir dedin. Sınırlı olmak ne demektir? Şu an sınırlı mı küme?

12. <Ayşe>Evet

13. <Ö> Neye dayanarak söylüyorsun? Ne demek "sınırlı olma tanımı" ne demek? Peki sen hani buna göre bunu sınırlı diyorsun. Ney ki senin için tanım?

14. <Ayşe> Yani, mesela iki noktası dahil değil ya

15. <Ö> Evet



Şekil 4.10

16. <Ayşe> 2 ile şeyi yok yani

17. <Ö> Şşşşt! (Sınıfta uğultu var, öğrenciler kendi aralarında konuşuyorlar.)

18. <Ayşe> Son noktayı bilemiyoruz.

19. <Ö>"Son noktayı bilemiyoruz" diyorsun. Ama bak Ayşe, her şey tanımlara dayanır. Tanımın ne olduğunu bilmediğimiz için, aslında söylediğin şeylerin hepsini çürütebilir durumdayım şu an. Söylediğin her şeyi çürütebilir durumdayım. "Buradaki elemanlar en son 2 ile sınırlanmıştır" da diyebilirim mesela. Hani senin mantığından hareket edersem. O yüzden sınırlı olmanın tanımını biliyor olmamız lazım ya da tanımı koymamız lazım. Deniz.

20. <Deniz> Şey olabilir mi hocam? Kümenin en büyük ve en küçük elemanı…

21. <Fatma> Alt sınırı ve üst sınırı olması gerekir.

22. <Sınıf> Alt sınır, üst sınır, kapalı olması lazım. (Öğrenciler kendi aralarında tartışıyorlar, gürültü var.)

23. <Deniz> eküsü ve ebası varsa … (Gürültü devam ediyor.)

24. <Ayla> Alttan ve üstten … (Gürültü devam ediyor.)

25. <Ö> Peki, o zaman taht... Bir dakika ya! Tamam! Peki bu mu sınırlı bu mu sınırlı? (Şekil 4.10 daki iki kümeden önce yukarıdakini, sonra aşağıdakini göstererek soruyor.)

26. <Sınıf> Üstteki (Sınıfın çoğu bu cevabı veriyor.)

    İkisi de sınırlı (Birkaç öğrenci bu cevabı veriyor.)

27. <Ö> Ben Deniz ile konuşuyorum. Bu mu sınırlı bu mu sınırlı ?

28. <Deniz> İkisi de sınırlı.

29. <Ö> İkisi de sınırlı ? O zaman tanımınla uyuşmadı.Deniz dedi ki : “Kümenin en küçük ve en büyük elemanı olmalıdır”. “İkisi de sınırlıdır” dedi. Çelişme, çelişi yaşadık orada.O da değil. Başka.Soru ne? Kümenin sınırlı olmasının tanımı nedir? Bütün her şey buradan çıkıyor. Bir öğretmen çıkıp tahtaya bunları anlattığı zaman lisede anlattığınızda önce tanım budur dersiniz ve tanım üzerinden hareket edersiniz. Veli konuşmak mı istiyorsun?

30. <Veli> Konuşmak istemiyorum da…

31. <Ö> Parmak kaldırmadın mı az önce?

32. <Deniz> eküsü…

33. <Veli> Daha önce kaldırdım.

34. <Deniz> eküsü ve ebası old… vardır. A sınırlıdır.

35. <Ö> Evet eküsü…

36. <Deniz> eküs(A) ve ebas(A) vardır.

37. <Ö> eküs(A) ve ebas(A) vardır dersem aslında bu kümenin sınırlı olduğunu söylerim diyor arkadaşınız. Daha kuvvetli bir şey, yanlış değil. Daha kuvvetli, daha yumuşatın olayı. Evet Ali.

38. <Ali> Her $x \in A$ için x, M den küçükse üstten sınırlıdır, yine aynı şekilde N den büyükse alttan sınırlıdır.

39. <Ö> Aferin.

40. <Ali> Üstten ve alttan sınırlıysa …

41. <Ö> Tam matematiksel tanım budur ama …

42. <Ali> sınırlıdır.

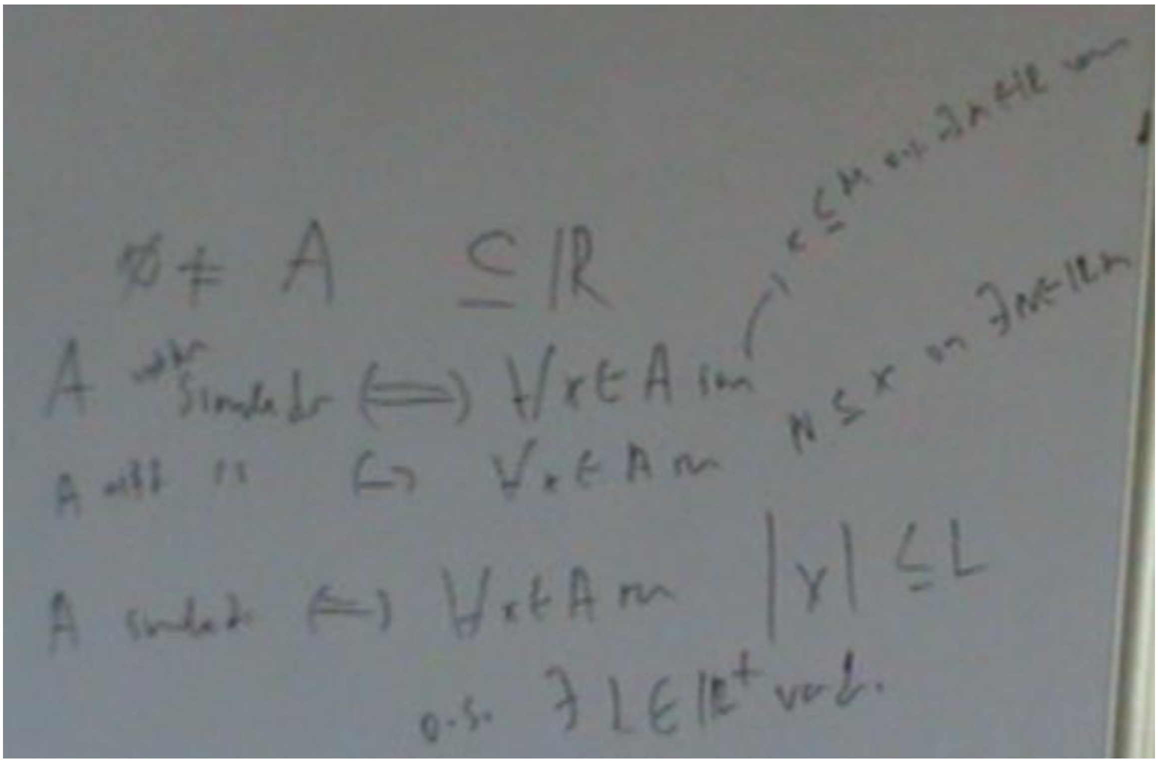
43. <Ö> Ne demek istedi? Bakın. Eğer siz kümedeki tüm elemanları bir gerçel sayıdan daha küçük tutabiliyorsanız ve siz kümedeki tüm elemanları bir gerçel sayıdan daha büyük tutabiliyorsanız bu kümeye "sınırlıdır" adını verirsiniz. Çok aşikar ki, evet bu küme sınırlıdır. (Şekil 4.10 da üstteki kümeyi gösteriyor.)

    Ama tanımı Ali'nin düşündüğü gibi yaparsak ya da benimki biraz daha yukarıya çıktı. Sınırlı olmuş olacaklardır bu kümeler arkadaşlar. Neymiş tanım? Kümedeki her elemandan daha büyük bir öge, bir tane, her ögeden daha büyük bir tane öge. Ondan sonra ne yapılır soyut matematikte sevgili arkadaşlar. eküs ve ebasa geçilir işin doğrusu. Hem üstten hem alttan sınırlıysa, analiz bilgisi, sınırlı küme. Çünkü bir küme sınırlıdır diyince iki ayrı kavram var. Üstten sınırlı olmak, alttan sınırlı olmak, ama sınırlıdır demek…

44. <Zeynep> Hem alttan hem üstten

45. <Ö> Hem alttan hem üstten sınırlı olmak demektir ki o da Ali'nin tümüyle söylediğidir. A sınırlıdır, bakın Ali'nin dediğini yazıyorum. (Şekil 4.11 deki ifadeleri yazmaya başlıyor.)

    Her $x \in A$ için … Aaaaaaah. Niye mutlak değeri aldığımı… Aaaa… Şöyle söyleriz. Her $x \in A$ için $x \le M$ olacak şekilde en az bir M $\in$ **R** vardır, üstten sınırlıdır. A alttan sınırlıdır, Her $x \in A$ için $N \le x$ olacak şekilde en az bir *N* sayısı vardır. Tanım bu. Değil mi arkadaşlar? Sezgisel olarak anlamlı da geliyor size. Peki A nın sınırlı olması, bakın hem üstten hem alttan sınır, yani hem üstten hem alttan sınırlı olması. Sınırlıdır demek hem üstten hem alttan sınırlı olması. Her x için $|x| \le L$ olacak şekilde en az bir *L*, *L* şu an nedir? Negatif midir? Pozitif midir?



Şekil 4.11

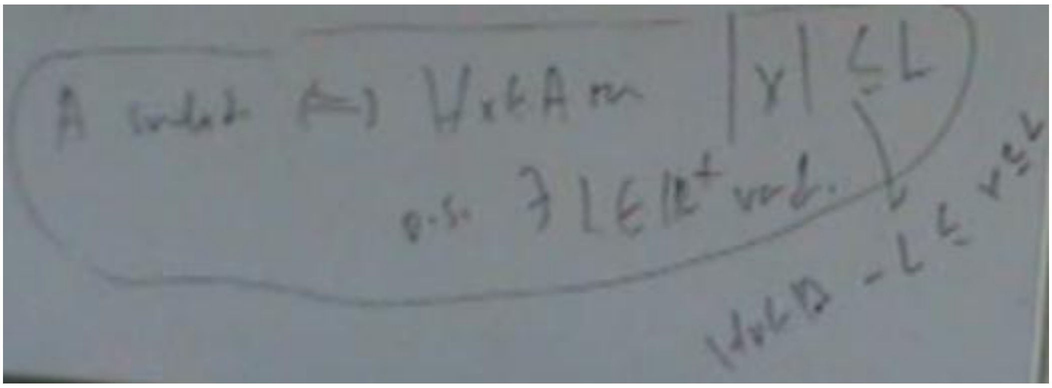
46. <Sınıf> Pozitiftir.

47. <Ö> Burada nedir? (Şekil 4.11 deki *M* harfini gösteriyor.)

Keyfi. Burada nedir ? (Şekil 4.11 deki *L* harfini gösteriyor.)

Pozitif. En az bir *L*, $\mathbf{R}^+$ vardır. E gerçekten sevgili arkadaşlar mutlak değerin özelliğini kullanırsanız bu ($|x| \le L$) demek, her $x \in A$ için eğer burası ($|x| \le L$) gerçekleniyorsa şöyle dersiniz. A daki tüm ögelerden daha büyük bir *L* var, A daki tüm ögelerden daha küçük bir *–L* var. Otomatik olarak üstten ve alttan sınırlı olmuş oluyor ve bunu (Şekil 4.11) da bir önerme olarak görebiliriz. Şimdi benim derdim burayla (Şekil 4.11) çalışmak. Bakın bir kümenin sınırlı olmasını böyle yapıyoruz **R** de çalışırken ve hangi uzaklığı kullandınız görüyor musunuz arkadaşlar? Mutlak değeri kullanıyorsunuz burada. Ben mutlak değerle ifade ettiğim her şeyi metrikle ifade edebilirim arkadaşlar. Söylemek istediğim buydu. Mutlak değerle ifade ettiğim her şeyi metrikle ifade edebilirim. Bakın ben şimdi bu tanımı nasıl aktarıyorum buraya. Bu işin ne kadar eğlenceli olduğunu göreceksiniz bu yolla.

Tanım : (X,d) metrik uzay ve $S \subseteq X$ olsun. Eğer her $a \in S$ için $d(a,x) \leq L$ koşulunu sağlayan bir $x \in X$ ve L $\in$ **R** sayısı varsa *S* ye (X,d) metrik uzayında sınırlıdır, denir.



Şekil 4.12

Tartışma Analizi

7. satırda Ayşe (-2, 2) kümesinin sınırlı olmadığını *iddia* ediyor.

9.satırda, iddiasına dayanak olan *veriyi*, kümenin kapalı olması gerektiğini belirterek ortaya koyuyor.

10. satırda, Öğretmen, Ayşe'nin belirttiği veriye uygun bir küme ([-2, 2]) çiziyor.

12. satırda Ayşe [-2, 2] kümesinin sınırlı olduğunu söylüyor (*iddia)*. Burada [-2, 2] kümesinin kapalı olması açık *gerekçedir*.

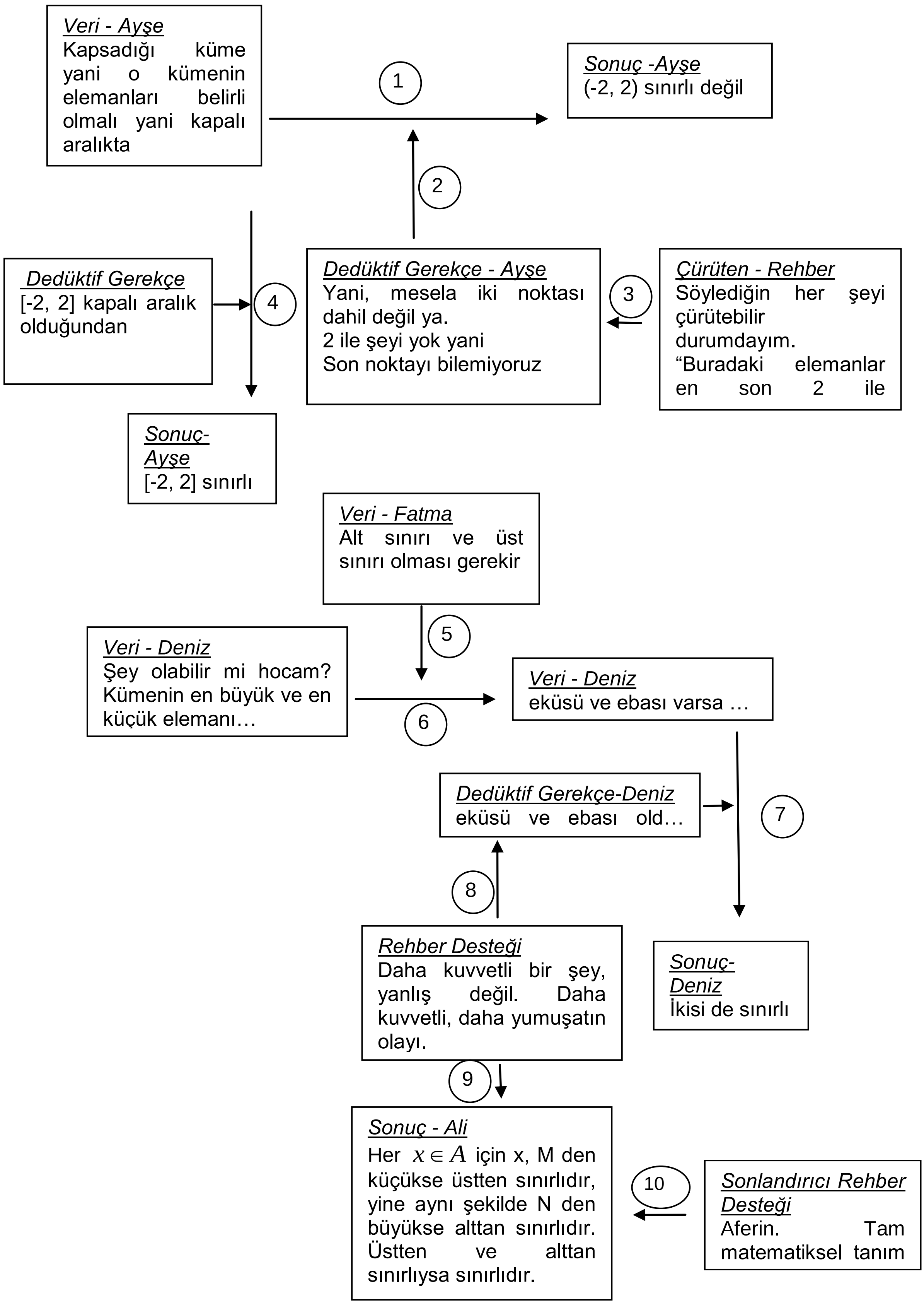
Ayşe, (-2, 2) kümesinin neden sınırlı olmadığına dair *dedüktif gerekçelerini* 14., 16. ve 18. satırlarda (*kümenin uç noktalarının kümeye dahil olmadığını belirterek*) veriyor.

19. satırda öğretmen Ayşe'nin sunduğu *gerekçelerin* geçerli olmayacağı bir durum tanımlayarak tartışmanın *çürütenini* ortaya koymuştur. Bu tartışmada Ayşe'nin *verisine* dayanak olan *gerekçeler rehber desteği* alamamıştır.

20. satırda Deniz ilk olarak *verisini*, kümenin en büyük ve en küçük elemanlarına dayandırarak oluşturacakken, Fatma kümenin alt ve üst sınırı olması gerektiğine dair başka bir *veri* sunuyor. Bunun üzerine 23. satırda Deniz kendi *verisini* değiştirerek kümenin ekusu ve ebasına dayanan bir veri oluşturmaya başlıyor ve 28. satırda (-2, 2) ve [-2, 2] kümelerinin sınırlı olduğu sonucuna varıyor .

Öğretmen, 29. satırda, (-2, 2) kümesinin en küçük ve en büyük elemanları olmadığını, bir çelişki ortaya çıktığını belirterek itiraz ediyor, aslında bu itiraz Denizin 20. satırda kurmaya çalıştığı veriye yöneliktir. Deniz 32. ve 34. satırda kümelerin eküs ve ebasının olduğunu belirterek, yani *dedüktif gerekçesini* söyleyerek, öğretmenin itirazını çürütüyor ve bu da kendisine 37. satırda *rehber desteği* sağlıyor, fakat öğretmen tanımdaki eküs ve ebas koşullarının biraz daha yumuşatılması gerektiğini belirtiyor. 38. satırda Ali en son tanımı, yani tartışmanın sonucunu veriyor ve *sonlandırıcı rehber desteğini* alıyor.

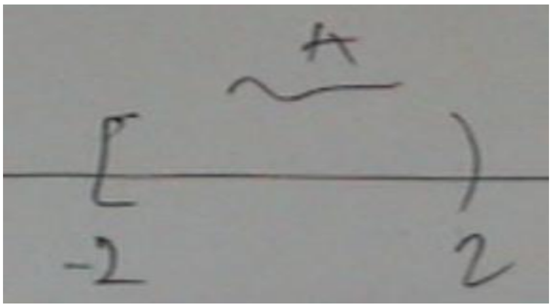
Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.13 Bir metrik uzayda "sınırlı küme kavramı" nasıl tanımlanır ?

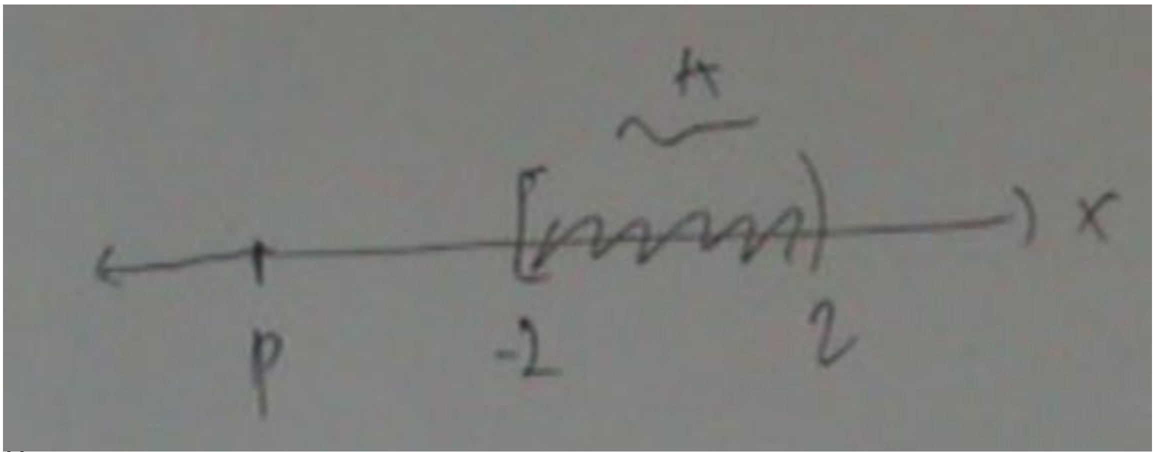
4.2.2. Noktanın kümeye olan uzaklığının tanımlanması

1. <Ö> Şimdi koyacağım tanıma birlikte karar vereceğiz yine. **R** de çalışalım yine sevgili arkadaşlar. Bir tane A kümesi olsun elinizde. Kümeyi hiçbir özelliği yok ama sembolize etmek için nokta kümesi seçmeyeyim de bir aralık seçeyim onu. Örnek veriyorum. Şurası “a”olsun şurası da “b” olsun ya da isim verelim onlara, rakam verelim. A kümesi olsun (Şekil 4.14). **R** de çalışıyorsunuz arkadaşlar.



Şekil 4.14

Dışında da bir tane nokta seçiyorum. P diyelim. A kümesi de burası (Şekil 4.15).



Ş

Şekil 4.15

Fatma soruyu şöyle sorsaydım nasıl yorumlardın acaba? “P noktasının A kümesine olan uzaklığı nedir?” diye sorsam nasıl bir yorum yaparsın?

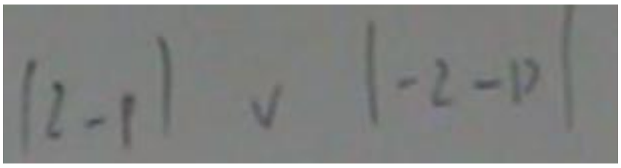
2. <Fatma> İki tane, -2 den P ye olan uzaklığını düşünürdüm bir de 2 den P ye olan uzaklığını düşünürdüm.

3. <Ö> Evet

4. <Fatma> … O aradaki … Yani -2 ile 2 aralığında A kümem. P den o kümeye olan uzaklığı düşününce o ikisinin aralığında bir yer olması lazım. Yani P ile (eeee) -2 noktasıyla, P ile 2 noktası arasındaki iki uzaklığın arasında bir uzaklık olur diye düşünürdüm ama tam olarak kestiremezdim.

5. <Ö> Peki sence şu an “P nin kümeye olan uzaklığı nedir?” dediğine göre. Kestiremem mi diyorsun ya da sembolik olarak bir şey

6. <Fatma> 2 ile… 2 ile P arasında yani … 2 – P nin mutlak değerini alırım veya -2 ile… (öğretmen Fatma’nın dediklerini tahtaya yazıyor)



Şekil 4.16

evet bir de -2 ile P arasında evet –P ░

7. <Ö> Arasındaki uzaklığa bakarım.

8. <Fatma> Evet.

9. <Ö> Evet.

10. <Fatma> Ya bu iki uzaklıktan birisi.

11. <Ö> Hangisi olurdu acaba?

12. <Fatma> Ya onun aralığındakiler olurdu.

13. <Ö> Evet. Doğru diyorsun aslında … Evet ben bunları bulurdum diyorsun bunlardan bir tanesine derdim ama hangisi hangisine uzaklık de… Peki ne olmasını beklersin? Şunun şuna(-2 ile P) olan uzaklığını mı yoksa bunun buna (2 ile P) olan uzaklığını mı beklersin?

14. <Özgür> Küçük olanı

15. <Fatma> O da olabilir, o da olabilir, ikisinin arasında da olabilir. Yani -2 ile 2 aralığında da A nın elemanları var.

16. <Ö> Peki o zaman şöyle düşün. Ankara'dan çıkıyorsun şimdi (eee)…(eeee). Eskişehir diyelim ki buradan kaç kilometre?

17. <Zeynep, Ceyhun> 300, 300 kilometre

18. <Ö> 300 kilometre. Peki. Nasıl ölçüldüğünü biliyor musun 300 kilometrenin? Ha onlar daha farklı ölçüyor. Mesela Eskişehir il sınırına kadar olan kilometre mi 300 dür orada? Yoksa Eskişehir bir alan ya ░

19. <Zeynep> Merkezine

20. <Ö> Sen şimdi şu noktaya kadar ölçüyorsun ama bir de daire düşünün. Bir de dairenin bu tarafında var. Hangisini ölçüyoruz acaba? Sence o 300 diye neyi kastediyor olabiliriz biz?

21. <Sınıf> Uzaklık, en yakın, merkezden, merkezden (uğultu oluşuyor)

22. <Ö> Peki. Yok onların ölçümü, onların bir merkezi var merkeze olan ölçümden bahsediliyor arkadaşlar 300 kilometre diye de. Peki yol üzerinde giderken, şöyle söyleyeyim. Çok uymadı örnek. Şöyle söyleyeyim. Gidiyorsun ya Eskişehir il sınırı diyorsun mesela. Eskişehir'e girdik dersin değil mi mesela? Eskişehir'e girdin de öbür ucunda değilsin ki bu ucundasın …..

23. <Sınıf> En yakın, en yakın

24. <Ö>En yakın, en yakın. Yani bunlar… En yakın ne demek burada?

25. <Sınıf> -2 ile 2, sağdaki ░

26. <Ö> Matematikte en yakın ne demek?

27. <Ahmet> Küçük olan

28. <Ö>En küçük olan. Peki… Güzel… Fatma doğru tahmin etti. Evet ben bunlara bakarım dedi. Ama Fatma şurayı nasıl çözecekti? Kümem böyle değil de P yine burada dursun.Şöyle nokta kümeleri olsaydı arkadaşlar. Noktalar olsaydı böyle (Şekil 4.17).

Şekil 4.17

Anlatabiliyor muyum? Noktalar olsaydı ve bunlar bir ritim içinde değil bazen rasyonel bazen irrasyonel var bu kümenin içerisinde. Hala bu soruyu sorma şansım var mı? Bu P noktasının A kümesine olan uzaklığı nedir diye sorma şansım… Sorabilirim tabi niye sormayayım canım? Düşünen insan sorar bunu. O zaman nasıl söylerim? Fatma'nın söylediği şey mantıklı aslında değil mi arkadaşlar? Ama eksik kalan yerler var. O eksik bu soruya vereceğiniz yanıttan… yanıtla birlikte ortadan kalkacak. Şimdi P noktasının A kümesine olan uzaklığını nasıl tarif etmelisiniz?

29. <Zeynep>A nın her elemanına olan uzaklıklarına bakıp yani mutlak değerini alıp minimumuna ░

30. <Ö>Aferin. İşte bu! Aynı mantığı buraya transfer ederseniz. A daki tüm ögelerle olan uzaklıklarına bakarım… ki uzaklık arıyorum ben pozitif olacak mutlak değerini alıp. Bunların en küçüğüne derimki diyor P nin A kümesine olan uzaklığı derim. Doğru düşünüyor arkadaşlar aslında arkadaşlar.

Tartışma Analizi

Fatma 2. satırda P nin -2 ve 2 ye olan uzaklıklarını ve A kümesinin -2 ile 2 arasında olduğunu düşünerek; 4. satırda ulaştığı P nin A ya olan uzaklığının, P nin -2 ve 2 ye olan uzaklıkları arasında bir uzaklık olacağı sonucuna bir dayanak oluşturuyor.

5. satırda öğretmen, Fatma'yı söylediklerini sembolik olarak ifade etmesi için yönlendiriyor.

Fatma söylediklerini sembolik olarak ifade etmek için mutlak değer kavramını kullanıyor 6. satırda. Fatma 4. satırda ulaştığı sonucu 10. satırda genişletiyor. Bu satırda, Fatma'ya göre P nin -2 ve 2 ye olan uzaklıklarından birisi, P nin A ya olan uzaklığı olabilir.

Öğretmen 13. satırda Fatma'nın elde ettiği sonuca ilk rehber desteğini veriyor fakat bu zayıf bir destek ve Fatma'yı yönlendirmek için hangi uzaklığın (P nin -2 ye mi yoksa 2 ye mi olan uzaklığının) P nin A ya uzaklığı olarak alınması gerektiğini soruyor.

14. satırda Özgür, küçük olanın alınması gerektiğini söyleyerek kendi sonucunu (iddiasını) ortaya koyuyor fakat öğretmen duymuyor.

15. satırda Fatma A nın -2 ile 2 arasında elemanlarının bulunmasını garanti olarak kullanıyor ve 10. satırda ulaştığı sonucun aynısı tekrar ediyor.

22. satırda öğretmen günlük hayatla ilgili verdiği bir örnek vasıtasıyla bir yönlendirme yapıyor.

23. satırda sınıfın çoğunluğu en yakın uzaklığın alınması gerektiği sonucuna varıyor.

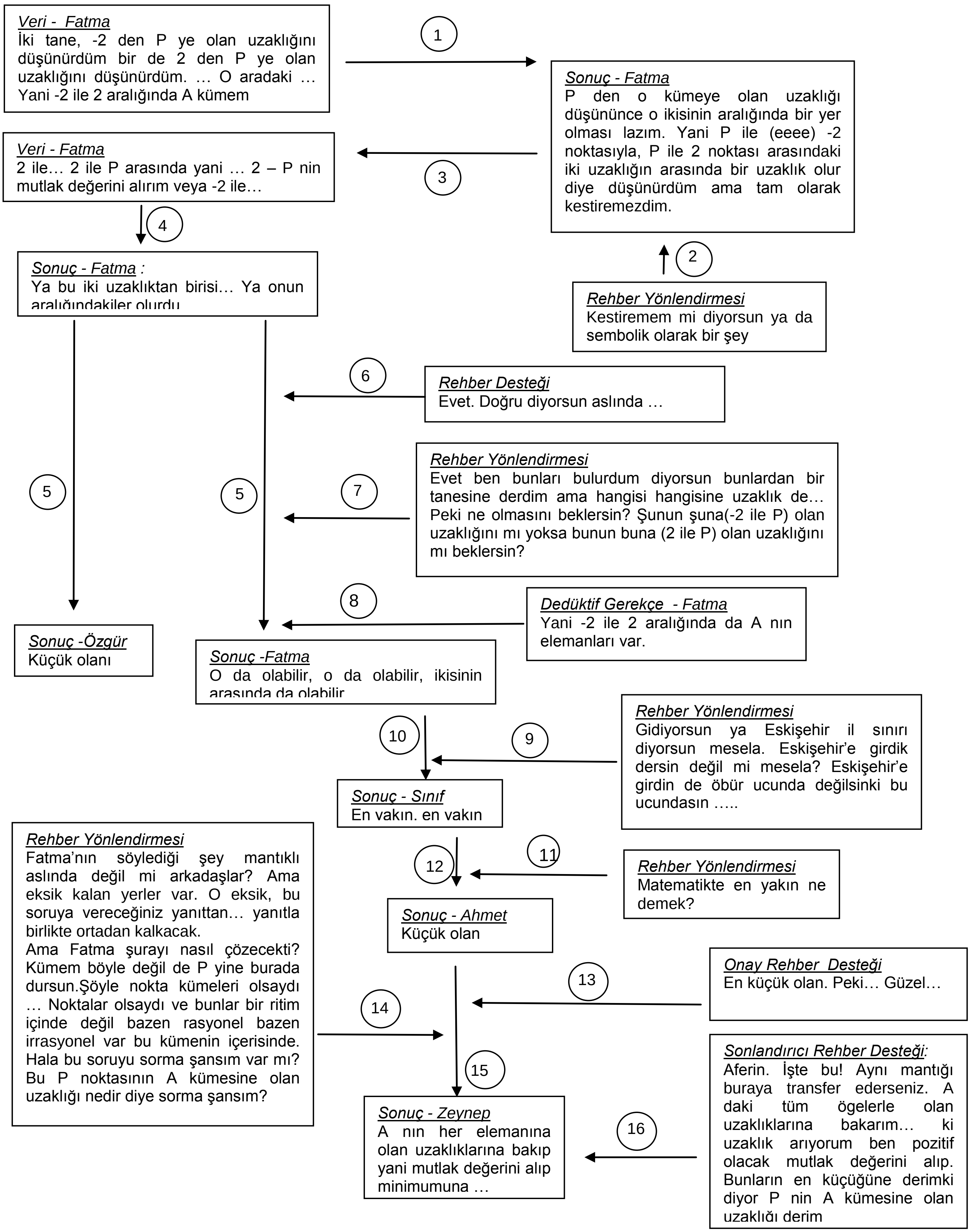
24. satırda öğretmen "en yakın" ifadesinin matematikte nasıl ifade edileceğini sorarak yine bir yönlendirme yapıyor.

27. satırda Ahmet "küçük olan" sonucuna ulaşıyor.

28. satırda öğretmen A kümesini değiştirerek yine P nin A ya olan uzaklığını sorarak bu soruyu rehber yönlendirmesi olarak kullanıyor. Fatma'nın biraz önce söylediklerinin mantıklı fakat eksik olduğunu söyleyerek öğrencileri yönlendiriyor.

Zeynep 29. satırda, P nin A nın her elemanına olan uzaklıklarına bakıp yani mutlak değerini alıp bunların minimumundan bahsederken öğretmen 30. satırda sonlandırıcı rehber desteği vererek tartışmayı sonlandırıyor.

<u>Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi</u>



Şekil 4.18 Noktanın kümeye olan uzaklığının tanımlanması

4.3. Problem Çözme Üzerine Tartışmalar

4.3.1. 1 sayısının (0, 1) kümesine olan uzaklığının 0 olduğunu gösterme

Açıklama : Öğretmen, öğrencilerinden

$$0 = \inf\{1 - x \mid x \in (0,1)\}$$

olduğunu göstermelerini istiyor. Öğrenciler öncelikle 0 ın $\{1 - x \mid x \in (0,1)\}$ kümesi için bir alt sınır olduğunu kolayca gösterebiliyorlar. Bundan sonraki adımda her ε>0 için $1 - x < \varepsilon$ olacak şekilde bir $x \in (0,1)$ elemanının varlığını göstermeleri gerekiyor. Aşağıdaki bölüm söz konusu x elemanını bulmak için yapılan tartışmayı göstermektedir.

1. <Tolga> (Önce tahtaya $1 - x < \varepsilon$ yazıyor.)

   Biz, mesela...En az bir tane $n \in N$ sayısı bulmaya çalışsak. 1 eksi n bölü (n+1)…

2. <Ö> Tolga, $1 - x < \varepsilon$ senin neyin, iddian mı o?

3. <Tolga> Bunu bulmaya çalışıyoruz ya.

4. <Ö> Olacak şekilde bir x arıyorum ben. Yaz istersen. Olacak şekilde bir x∈(0,1) öğesi arıyoruz.

5. <Tolga> Şimdi biz bu x'i nasıl seçtiğimizi saptamaya çalışıyoruz.

6. <Ö> Güzel.

7. <Tolga> x'i $\frac{n}{n+1}$ olarak seçersek ve $n \in N$ olacak şekilde, bu bizim x'imiz (0, 1) aralığında kalır. $1 - x < \varepsilon$ eşitsizliğinde x yerine $\frac{n}{n+1}$ yazdım. Sonra buradan ε'u eşitsizliğin sağ tarafına atarsak $1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ çıkarsak. Sonra eşitsizliğin her iki tarafındaki birleri götürsek

8. <Ö> $\frac{1}{n+1}$ daha küçük ε çıkar.

9. <Tolga> $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$ çıkar. Biz burada, işte $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$

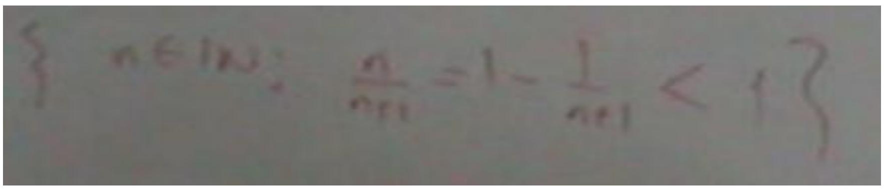
10. <Ö> Evet

11. <Tolga> n'yi de $\frac{1}{\varepsilon} - 1$'den büyük seçersek, $1 - x < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlamış oluruz.

12. <Ö> Bir dakika. Şöyle yapalım. Geriye gideceğim şimdi. ε > 0 sayısı verilsin. Diyorum ki Arşimet özelliğinden $\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n$ olacak şekilde en az bir $n \in N$ vardır. Öyleyse n+1 daha büyüktür $\frac{1}{\varepsilon}$'dan. Başka ne yazabilirim? Öyleyse $\frac{1}{n+1}$ daha küçüktür ε' dan. Öyleyse –ε daha küçüktür $-\frac{1}{n+1}$ den daha küçüktür. Doğru! Başka ? Her iki tarafa 1 eklerim dedi arkadaşınız. Eklersem 1 - ε < $1 - \frac{1}{n+1}$ olur dedi. Peki sonra ne anlama geldi bu ? Buradan neler söyleyebilirim ? Tolga buradan nasıl geçiş yaptı? $1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon$ eşitsizliğine gelmesi lazım. Gelebiliyor mu buraya?

13. <Sınıf> Gelebiliyor.

14. <Ö> İse $1 - \frac{n}{n+1} < \varepsilon$ bunu da yazarım. Harika, çok güzel! Şimdi parantez açıyorum n bir doğal sayı $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ kesinlikle sıfır ile bir arasındadır doğru mu?



Şekil 4.19

Dolayısıyla şöyle der misiniz? $1-\dfrac{n}{n+1}<\varepsilon$ ise burada $x=\dfrac{n}{n+1}$ olarak seçelim, seçtik ! O zaman 1 – x < ε olur. Tolga çok teşekkür ederiz aradığımız şey buydu.

Tartışma Analizi

1. satırda Tolga tahtaya ilk olarak ulaşmak istediği sonucu yani $1-x<\varepsilon$ eşitsizliğini yazıyor fakat hiçbir şey söylemiyor.

2. satırda öğretmen, Tolga'nın yazdığı eşitsizliğin aslında Tolga'nın ulaşmak istediği sonuç olduğuna sınıfın dikkatini çekmek için Tolga'ya "$1-x<\varepsilon$ senin neyin, iddian mı o?" sorusunu soruyor. Öğretmen biraz sonra gerçekleşecek olan tartışmanın sonuç bileşenini açık bir şekilde ortaya koyarak rehberlik yapmaya başlıyor.

3. satırda Tolga ulaşmaya çalıştığı ifadenin zaten $1-x<\varepsilon$ eşitsizliği olduğunu söyleyerek yazdığı eşitsizliğin aynı zamanda iddiası olduğunu belirtiyor.

7. satırda Tolga $n\in N$ olmak üzere x sayısını $\dfrac{n}{n+1}$ olarak seçiyor ve buradan ulaşmak istediği $1-x<\varepsilon$ sonucuna varmak üzere düşüncelerini söylemeye ve yazmaya başlıyor. Bu yüzden, Tolga'nın x sayısını $\dfrac{n}{n+1}$ olarak seçmesi tartışmanın verisidir.

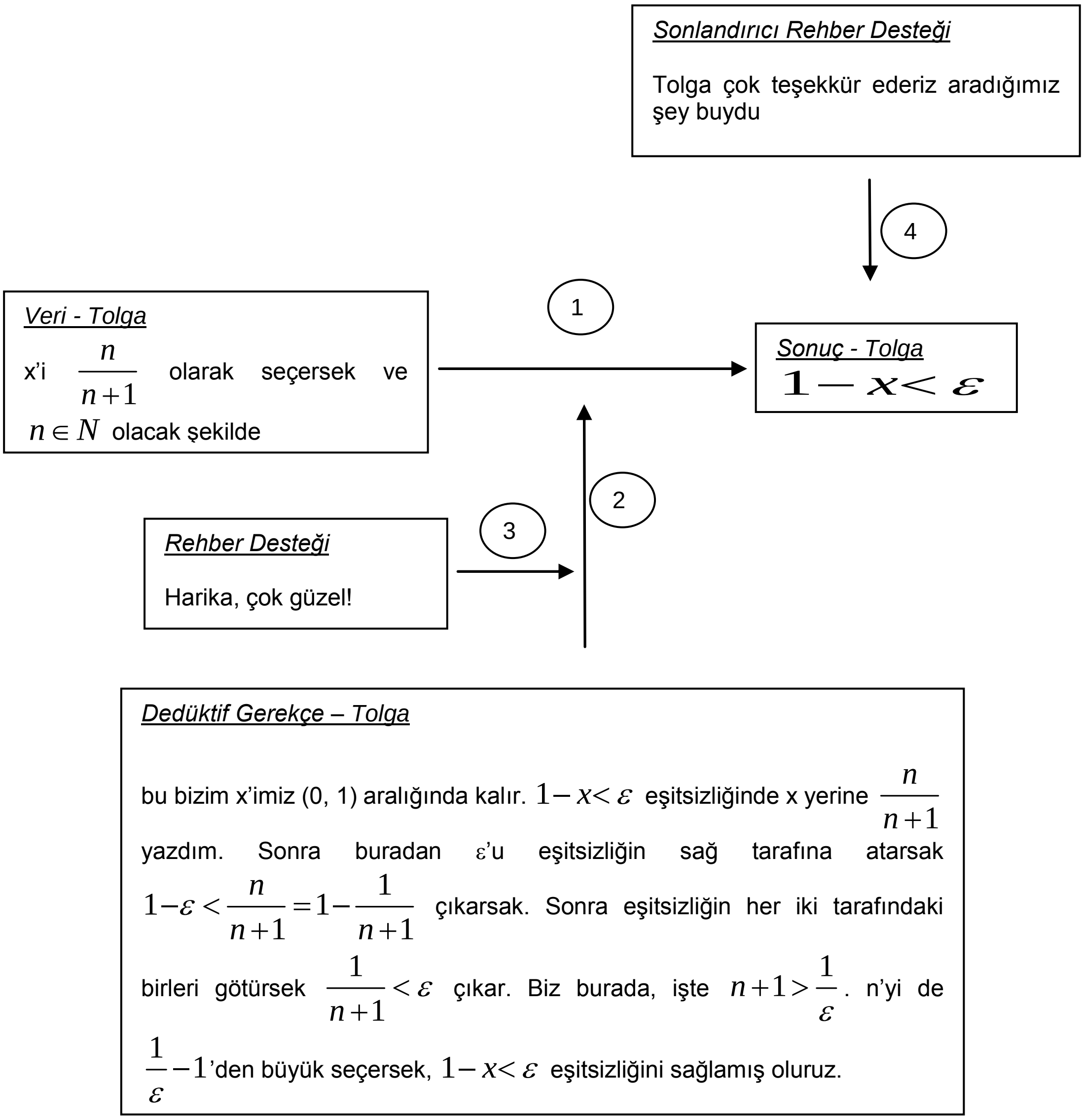
7. satırda "bu bizim x imiz (0, 1) aralığında kalır" ile başlayıp 11. satırdaki "n'yi de $\dfrac{1}{\varepsilon}-1$'den büyük seçersek" ile sonlanan tüm akıl yürütmelerin hepsi Tolga'nın verisi için sağladığı dedüktif gerekçedir. Tolga burada herhangi bir teoreme ya da kurala atıfta bulunmadan sadece cebirsel işlemler ve akıl yürütme yapmaktadır.

12. satırda öğretmen sonlandırıcı rehber desteği vermeden önce Tolga'nın yaptığı cebirsel işlemler ve akıl yürütmeden emin olmak için geriye doğru gidip her adımı tek tek inceliyor. Öğretmenin buradaki amacı Tolga'nın söylediklerini

çürüten bir durum olup olmadığını kontrol etmektir. Böyle bir durumun varlığı, tartışmanın bir de çürüten bileşenine sahip olduğu anlamına gelir.

14. satırda öğretmen “Harika, çok güzel!” diyerek Tolga’nın o ana kadar ortaya koymuş olduğu dedüktif gerekçesine rehber desteği veriyor. Buna göre, bu tartışmada çürüten bileşeni yoktur. Öğretmen, Tolga’nın en son yazdığı adımı da kontrol ettikten sonra ve “Tolga çok teşekkür ederiz aradığımız şey buydu” diyerek tartışma için sonlandırıcı rehber desteği veriyor ve tartışmayı sonlandırıyor.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.20

4.3.2. Ayrık metrik uzayda bir A kümesinin yığılma noktalarının kümesini bulma

1. <Ö> Yığılma noktası olması için ne olması lazım Yasemin oradan başla bakalım.

2. <Yasemin> (Yasemin tahtaya $\forall \varepsilon > 0$ yazarken öğretmen müdahele ediyor.)

3. <Ö> Öyle başlama Yasemin. x, A nın yığılma noktasıdır ancak ve ancak… evet ancak ve ancak. Yazıyor şimdi arkadaşınız… Şimdi bu aslında kafamızdan geçen şeyi tahtaya yazıyoruz arkadaşlar. Bunu buraya yazmanın bir manası yok şimdilik de. Hani öğrencier gibi düşünelim biz de…

4. <Yasemin> (Yasemin tahtaya $x \in A' \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\left(B(x,\varepsilon) - \{x\} \bigcap A \neq \varnothing\right)$ yazdıktan sonra öğretmen konuşmaya devam ediyor)

5. <Ö> Evet bu ne demek arkadaşlar biliyor musunuz? Aslında bunun Türkçe'si şu. Şu anlama gelmez mi? Yığılma noktası olmak demek x in her komşuluğunun içerisinde A kümesinin sonsuz tane elemanı vardır manası vardır öyle değil mi arkadaşlar? x i çıkartıyorum ama hala A ile kesişiyorlar. Sonsuz tane elemanı vardır. Buradan hemen şöyle düşüneceğim… Benim neye ihtiyacım var? Şu yuvarlara. (Eliyle tahtada $B(x,\varepsilon) - \{x\} \bigcap A \neq \varnothing$ yazan yere vuruyor.)
   Ayrık metrikte çalışıyorum. Hemen çalıştırıyorum kafayı.

6. <Ayça> r = 1 için

7. <Ö> Evet.

8. <Ayça> yığılma noktası

9. <Ö> Hemen onları düşünüyorum o noktada.Düşün bakalım.

10. <Yasemin> (Tahtaya r = 1 için yazıyor. Bir kaç saniye duraksadıktan sonra)

    ε seçeyim.

(Tahtaya $\varepsilon = 1$için $B(x,1)$ yazdıktan sonra $B(x,1)$ ifadesini siliyor ve d(x, yazarken öğretmen müdahale ediyor)

11. <Ö> d(x, ne demek? Yuvarları yaz yuvarları.

12. <Yasemin> Yuvarları.

13. <Ö>Hı hı. B… Hani siz o tanımda geçen oraları halletmeye çalışıyorsunuz ya. Mesela epsilonu 1 seçersem x merkezli, 1 yarıçaplı yuvar eşittir kim çıkar burada Yasemin?

14. <Yasemin> …

15. <Ö> Tek nokta kümesi. x in kendisi çıkar… Bak, bak, bak, bak, bak. Evet.

16. <Yasemin> Tek nokta kümesi

17. <Ö> Evet. E şimdi x merkezli, 1 yarıçaplı yuvar bu çıkıyorsa

    (Eliyle tahtadaki $B\left(x,\varepsilon\right)-\{x\}\bigcap A \neq \emptyset$ ifadesini göstererek)

    olabilmesi için çıkardığım zaman kümeyle bu ne yapmıyor arkadaşlar kesişmiyor. O halde ne diyeceksiniz arkadaşlar? Her ε için bu yuvarlar ░

18. <Özgür> Kesişmiyor.

19. <Ö> Evet. x i ne seçersem, keyfi bir x seçtim gördüğünüz gibi. Bu arakesit sağlanmıyor, bu koşul sağlanmıyor arkadaşlar. Ne diyeceksiniz? Uzaydaki herhangi bir x noktası yığılma noktası olabilir mi?

20. <Berna> Olur.

21. <Ö> Olur? Mesela? (Sınıftan uğultu geliyor.)

    Karıştırmayın arkadaşınızın kafasını.O başka bir şey düşündü şimdi.

22. <Berna> x ten x i çıkartırsak boş küme olacak. Boş küme ile A yı kesiştirirsek… ha boş küme olacak. (Yüzünü öğretmene doğru çeviriyor.)

23. <Ö>Hı hı. Niye böyle şaşkınlıkla bakıyorsunuz ki? Sanki çok abes bir şey anlatılıyormuş gibi. Evet öyle oluyor işte. Yazın. Diyelim ki seçilirse, şöyle diyelim yani Yasemin. ε, 1 için olup

24. <Ahmet> Küçük eşit 1 dersek öyle iyi olmaz mı?

25. <Ö> Hiç önemi yok. Bir tanesi için bulduğuma göre…Her ε için sağlanması lazım. Bak ben ε, 1 seçersem sağlamıyor. Evet… olup B(x,1) fark {x} arakesit A eşittir boş olduğundan A nın yığılma noktaları kümesi boştur.

Tartışma Analizi

1. satırda öğretmen Yaseminden yığılma noktası tanımını yazmasını isteyerek, Yasemin'e kanıta nereden başlayacağı konusunda *rehber yönlendirmesi* yapıyor.

2. satırda Yasemin $\forall \varepsilon > 0$ yazarak yığılma noktasının tanımını vermek isterken öğretmenden (3. satırda) tanımın nasıl yazılmasına gerektiğine dair bir *rehber yönlendirmesi* daha geliyor.

4. satırda Yasemin tahtaya öğretmeninin yönlendirmesi üzerine $x \in A' \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\big(B(x,\varepsilon) - \{x\} \bigcap A \neq \emptyset\big)$ yazıyor. Yasemin bu tanıma dayanarak sonuca ulaşacağı için bu tanım tartışmanın *verisidir.* Yani tartışmanın *verisi* rehber yönlendirmeleri sonucunda öğrenci tarafından eksiksiz olarak verilmiştir.

6. satırda Ayça r = 1 için diyerek aslında yukarıdaki tanımda ε yerine 1 verilmesi gerektiğini söyleyerek Yasemin'in ulaşacağı sonuç için bir *dedüktif gerekçe* sunuyor.

7. satırda öğretmenin Ayça'nın yaptığı $\varepsilon = 1$ seçimini uygun buluyor ve Yasemin'in bu seçimle birlikte yoluna devam etmesi için "Hemen onları düşünüyorum o noktada" diyerek Ayça'nın *dedüktif gerekçesine* bir *onay rehber desteği* veriyor.

10. satırda Yasemin $\varepsilon = 1$ alarak $B(x,1)$ açık yuvarını yazmak üzereyken, Yasemin'in açık yuvarı $B(x,1)$ şeklinde sembolik olarak değil de bu sembolün belirttiği anlamı açık bir şekilde yazmasını istiyor 11. ve 13. satırlarda. Eğer Yasemin yazmak istediği yuvarı sadece $B(x,1)$ şeklinde sembolik olarak yazarsa

bir yere varamayacak ve tartışma süreci tıkanacaktı. Bunu engellemek için öğretmen 13. satırda "Mesela epsilonu 1 seçersem x merkezli, 1 yarıçaplı yuvar eşittir kim çıkar burada Yasemin ?" diyerek bir *rehber yönlendirmesinde* bulunuyor.

15. ve 16. satırlarda Yasemin ve öğretmen eş zamanlı olarak $B(x,1)$ açık yuvarının tek nokta kümesi olarak çıkacağı sonucuna varıyor.

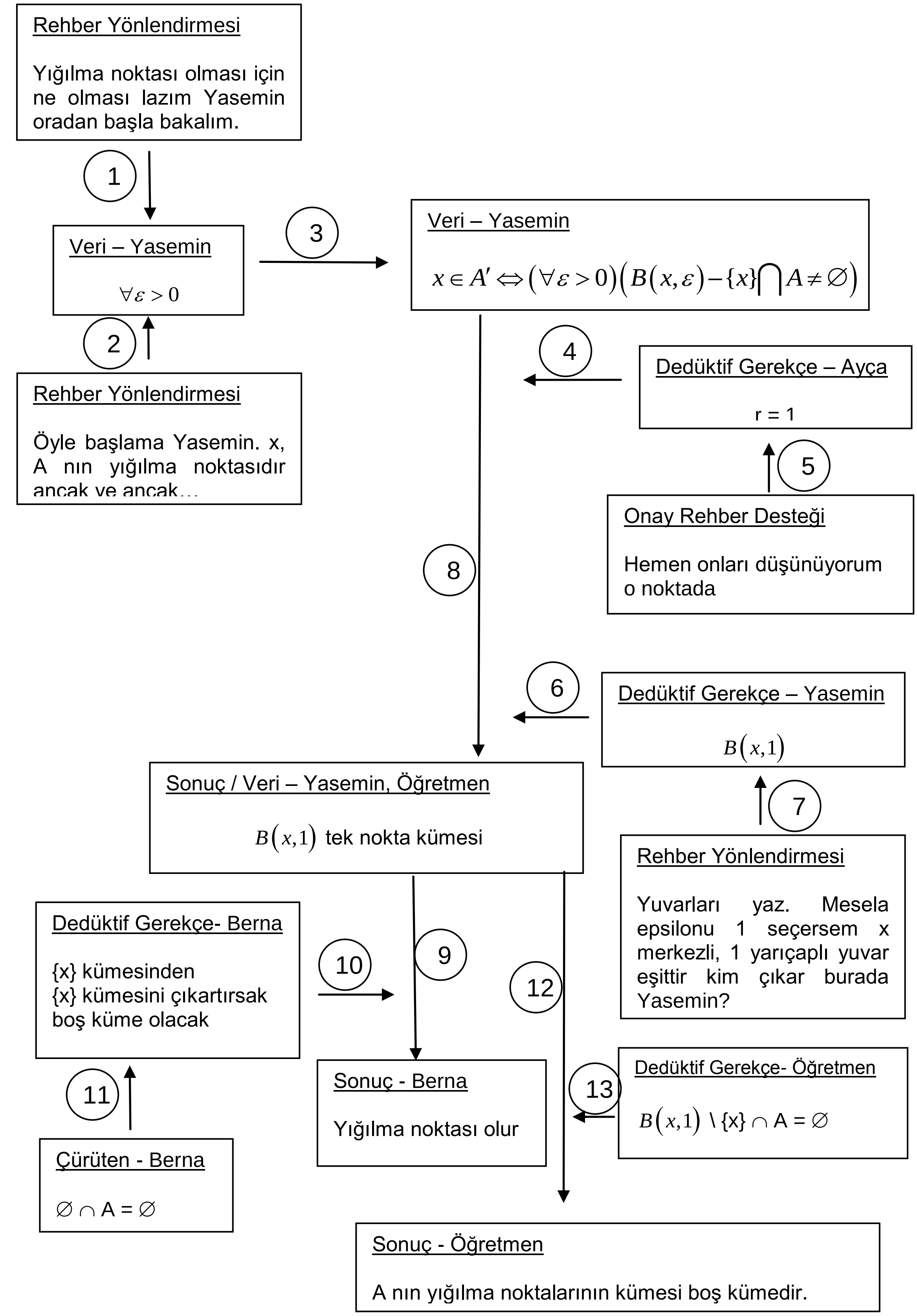
19.satırda öğretmen eliyle tahtadaki $B(x,\varepsilon)-\{x\}\bigcap A\neq\varnothing$ koşulunu göstererek, bu koşulun sağlanmadığına dikkat çekiyor.

20. satırda buna rağmen Berna A nın yığılma noktasına sahip olabileceğini belirtiyor.

22. satırda Berna {x} kümesinden {x} kümesini çıkararak elde ettiği boş kümeyi A ile kesiştirerek bir *dedüktif gerekçe* sunmak isterken A ile boş kümenin kesişiminin boş küme olduğunu fark ediyor bunu kendi *dedüktif gerekçesinin çürüteni* olarak kullanıyor.

25. satırda öğretmen A nın yığılma noktalarının kümesinin boş küme olacağı sonucuna varıyor. Bu tartışmada sonuca sadece öğretmen vardığı için diğer tartışmalarda sürekli olarak gördüğümüz *sonlandırıcı rehber desteğini* göremiyoruz.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.21 Ayrık metrik uzayda bir A kümesinin yığılma noktalarının kümesini bulma

4.3.3. Sürekli bir fonksiyon açık kümeyi korur mu?

Açıklama : Öğretmen, öğrencilerine bir yıl önce gördükleri süreklilik kavramı ile açık küme kavramları arasındaki ilişkiyi soruyor.

Aşağıdaki bölüm öğretmenin sorusuna verilen cevap (öğrenci tarafından ortaya konulan iddia) ile başlıyor.

1. <Beste> Açık küme kavramını koruyordu yani görüntüsünü koruyordu.
2. <Ö> Tam değil ona benzer bir şey. Görüntüyü koruyor değildir o.
3. <Cansın> Ters görüntüyü koruyor.
4. <Ö> Ters görüntüyü koruyor ? Koruyor demek ne demek?
5. <Beste> Yani A kümesi açıksa f sürekli fonksiyonu altındaki görüntüsü de açıktır.
6. <Serhat> Açıktır.
7. <Ö> Diyorsunuz.
8. <Beste> Kaplıysa kapalıdır.
9. <Ö> Derim diyorsun. Mesela Beste, f fonksiyonu sabit fonksiyon sürekli gördün değil mi? Mesela **R** de çalış. **R** de mutlak değer metriği… $f(x) = c$ sabit fonksiyon. Sürekli bu. İspatladım ya az önce. Zaten biliyorsunuz. Tanım kümesinde $(0,1)$ kümesini alalım. Bu bir açık kümedir. Bunun görüntüsü tek başına $\{c\}$ kümesidir ama bu kapalı. Hatırladığın bu değil demekki. Yanlış bir şey hatırlıyorsun.
10. <Beste> Evet.
11. <Beyza> Böyle bir şey vardı.
12. <Ö> Böyle bir şey vardı.
13. <Serhat,Erkan, Özlem> Tersi, ters görüntüsü için geçerli.

<Ö>Evet her açık kümenin ters görüntüsü açıktır.

Tartışma Analizi

1. satırda Beste açık kümenin görüntüsünün de açık olacağı *sonucunu* dile getiriyor. Burada tartışma sürekli fonksiyonlar üzerine olduğu *veri* doğal olarak elimizde sürekli bir *f* fonksiyonunun varlığıdır.

2. satırda öğretmen Bestenin söylediği sonucun doğru olmadığını belirtiyor (*çürüten*)

3. satırda Cansın ters görüntünün korunduğunu söylüyor (*sonuç*)

5. satırda Beste A kümesi açık iken sürekli *f* fonksiyonun altındaki görüntüsünün de açık olduğunu söyleyerek 1. satırda söylediği *sonucu* tekrarlıyor

6. satırda Serhat da Beste ile aynı sonuca varıyor.

8. satırda Beste kapalı bir kümenin de süreki *f* fonksiyonunun altındaki görüntüsünün kapalı olacağını söyleyerek kendisine 1. satırda söylediği *sonuçla* denk olan bir *sonuç* daha söylüyor.

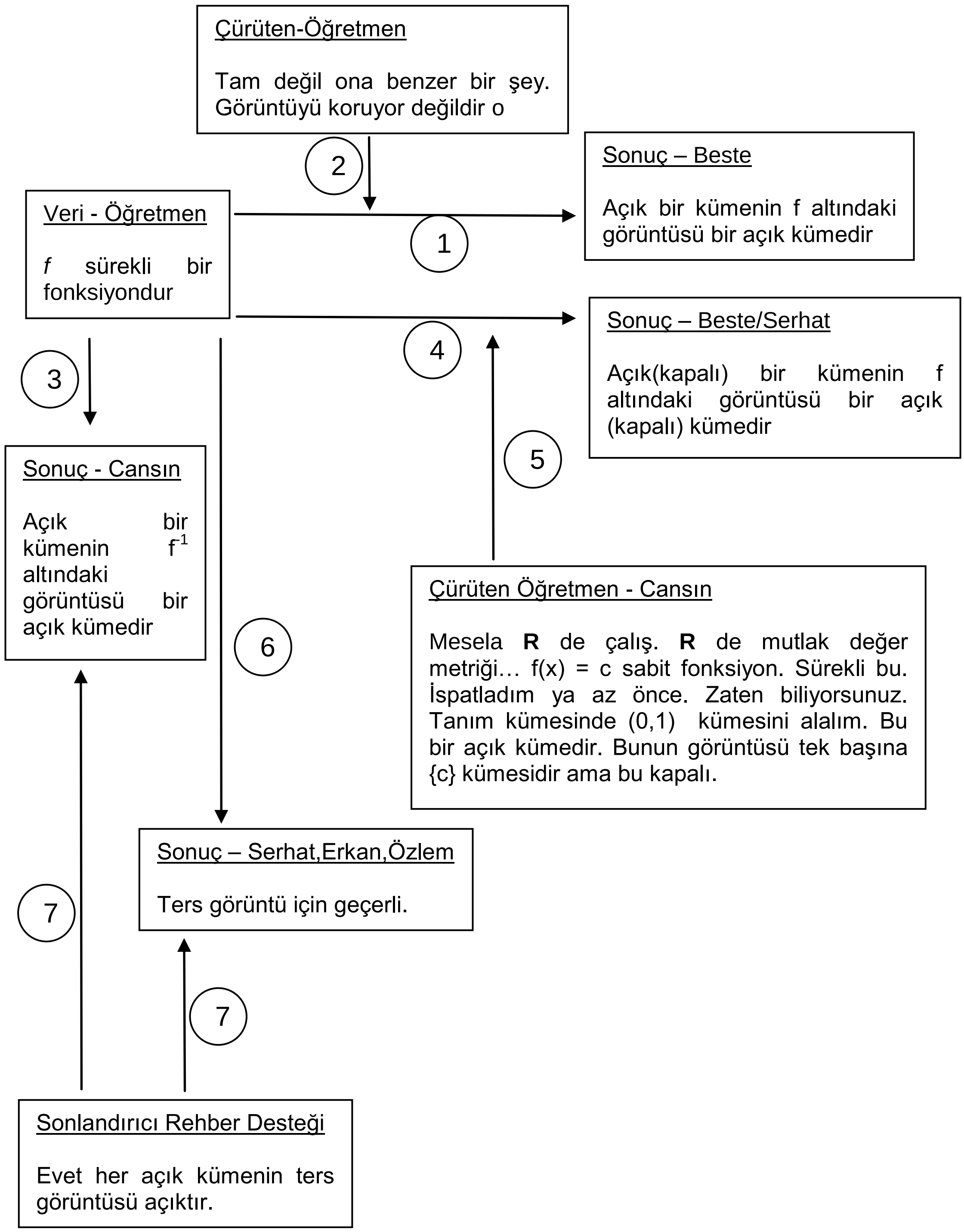
9. satırda Öğretmen Bestenin *sonucunu* çürüten bir ters örnek veriyor. **R** den **R** ye tanımlı sabit bir fonksiyonun tanım kümesindeki (0,1) açık aralığının *f* altındaki görüntüsünün bir tek nokta kümesi, dolayısıyla kapalı küme olduğunu söyleyerek tartışmanın *çürüten* bileşenini ortaya koyuyor.

10. satırda Beste öğretmeninin ortaya koyduğu *çürüteni* abul ediyor.

13. satırda Serhat, Erkan ve Özlem bir açık kümenin sürekli *f* fonksiyonu altındaki ters görüntüsünün açık küme olduğu sonucuna varıyor.

14. satırda öğretmen; Serhat,Erkan, Özlem ve Cansın'ın söylediği sonucu teyit ederek sonlandırıcı rehber desteği vererek tartışmayı bitirmiştir.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.22 Sürekli bir fonksiyon açık kümeyi korur mu?

4.3.4. (C[0, 1], d_{sup}) metrik uzayında $f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$ dizisi nereye yakınsar?

1. <Ö> Peki arkadaşlar. Nereye yakınsar? Bunun cevabını bulmaya çalışalım. Bunun metrikle hiçbir alakası yok.
2. <Yiğit> n ye yakınsar.
3. <Nedim> x e yakınsar.
4. <Ö> x e yakınsar diyor Nedim. Peki doğru mu söylüyor?
5. <Mehmet> Hayır
6. <Can> Nedim söylüyor (Sınıfta gülüşmeler)
7. <Nedim> x e yakınsar hocam.
8. <Ö> Nasıl? Nasıl Nedim? Neden?
9. <Nedim> Hocam…Bunu ben o fonksiyonu şey şeklinde yazdım. x eksi x^2 bölü n artı x. n giderken sonsuza da sağ taraf… Açalım hocam.
10. <Ö> Bu fonksiyonun terimleri nasıldır arkadaşlar? Şöyle midir? n yerine 1 yazarsam $\frac{x}{x+1}$, n yerine 2 yazarsam $\frac{2x}{x+2}$. eeee. Terimler bu şekilde, öyle mi arkadaşlar?
11. <Ahmet> Evet.
12. <Ö> Evet.
13. <Sınıf> (Öğrenciler kendi aralarında konuşuyorlar.)
14. <Ayşe> Hocam
15. <Ö>Terimleri bu biçimdedir bunun. Evet.
16. <Sınıf> (Öğrenciler kendi aralarında konuşuyorlar.)
17. <Ayşe>n ye değil mi?

18. <Ö>n ye yakınsar diyorsun.

19. <Alp>Bence de n ye yakınsar.

20. <Ö> Şimdi n ye yakı… Bakınız. Dikkatli olun ama arkadaşlar dikkatli olun. Bu bir fonksiyon dizisi. Nereye yakınsar yakınsıyorsa eğer? Bir fonksiyona yakınsar. Diyeceksiniz ki cevap verirken “hocam şu fonksiyona yakınsar diyeceksiniz”. Şimdi n ye yakınsar dediğiniz zaman n fonksiyonuna mı yakınsar manası çıkar buradan?... n fonksiyonuna mı yakınsar?

21. <Nedim> O f_1 ,f_2, f_3 fonksiyon dizileri onlar, yani f(x) = x e yakınsayacak.

22. <Ö> f ye ha f(x) = x e yakınsayacak diyor. Nedim diyor ki evet hocam diyor f(x) = x, yani özdeşlik fonksiyonu mu bu?

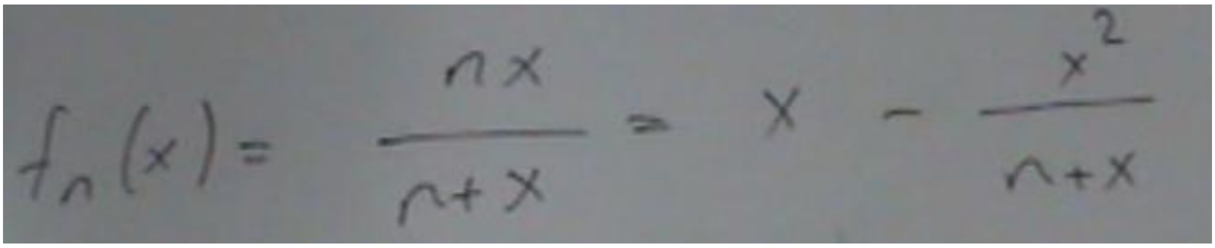
23. <Ayşe>Evet

24. <Ö>Özdeşlik fonksiyonu. Neyle gösterilir? Şöyle gösterilir. Eee. 1, kim üzerinde? [0,1] üzerinde. Yakınsar diyorum. Başka?...Başka? Buna yakınsar diyor? Nedim sence niye buna yakınsar? Bizi ikna et.

25. <Nedim> Geleyim mi hocam? (Ayağa kalkıyor ve tahtaya doğru yöneliyor)

26. <Ö> Hah tahtaya geliyorsun.

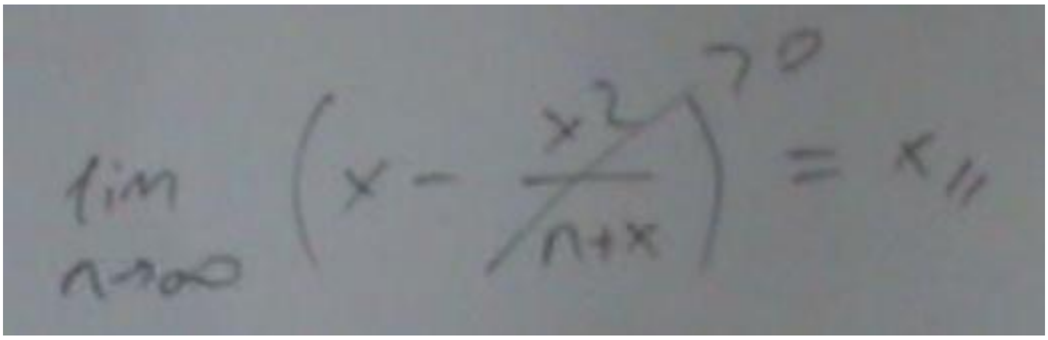
27. <Nedim> (Şekil 4.23 dekileri yazıyor.)



Şekil 4.23

28. <Ö> Bunu diyor böyle yazarım ben hocam diyor… Limit n giderken sonsuza $f_n(x)$ $f_n(x)$. Hah. Onun da limitini alırsam diyorsun. x çıka

29. <Nedim> Burası sıfıra gider. (Şekil 4.24)



Şekil 4.24

30. <Ö> Sıfıra gider.

31. <Nedim> (Yerine dönüyor.)

32. <Ö>Bir dakika! Oturma!

33. <Nedim> Ben..Başka gösterecek bir şeyim yok.

34. <Ö>Ama arkadaşlarının sorusu vardır. (Sınıfta gülüşmeler var.)

35. <Nedim> (Tahtaya geri dönüyor.)

36. <Ö> Siz şimdi bu Nedim'in yazdıklarına ikna oldunuz mu? Selim ikna oldun mu sen buna?

37. <Selim>Aslında oldum da Nedim olduğu için olmadım. (Sınıf gülüyor.)

38. <Ö>Ne demek oldun? Yani arkadaşının yazdığı yanlış mı? Böyle yazabilir mi bir kere? Bir kere Nedim böyle yazabilir mi?

39. <Sınıf> Yazabilir, yazabilir.

40. <Ö>Efendim?

41. <Sınıf> Yazabilir.

42. <Ö>Nedim böyle yazabilir. Neyle yazabilir? $f_n(x)$ i bu şekilde yazabilir.Peki…Elbette yazabilir. Cebirsel işlem yapmış arkadaşımız. Burada

problem yok. Şöyle yazmak (Şekil 4.24 de yazılanları göstererek) mantıklı bir şey mi?

43. <Selim>Şöyle yazmak derken?

44. <Zeynep> Hocam ama sssu░

45. <Ö>Şu şekilde (Şekil 4.24 de yazılanları gösteriyor) limit n giderken sonsuza böyle yazmak mantıklı bir şey mi?

46. <Zeynep>Hocam mutlak değer metriğinde çalışmıyoruz ama sup metriğinde çalışıyoruz.

47. <Ö>Yani ?

48. <Zeynep> sup metriğine göre almamız lazım o yüzden.

49. <Ö>Sup metriğine göre almamız lazım diyorsun.

50. <Zeynep>Şeyy.. dssu… d_{sup} eksi $f_n(x)$ şeklinde almamız lazım.

51. <Ö> Eee yani?

52. <Zeynep> Oradan

53. <Ö> Dolayısıyla öyle yazamaz mı demek istiyorsun?

54. <Zeynep> (Kafasını iki yöne sallıyor)

55. <Ö> Yazamaz? Ne yazmasını istiyorsun o zaman?

56. <Zeynep> İşte burada ░

57. <Ö>Şurada (Şekil 14 de limit içindeki ifadeyi gösteriyor) bir kere şunu yazabilir.Burada bir problem yok. Bu bir cebirsel işlem. Bunu yazabilir. Arkadaşınız diyor ki hayır böyle yazamaz. Sup metriğine göre çalışıyor olması gerekiyor diyor. Nedim acaba sup metriğine göre çalışmadı mı?

58. <Zeynep> Bence mutlak değer metriğine göre çalıştı.

59. <Ö>Sence mutlak değer metriğine göre çalıştı…Peki sup metriğine göre çalışırsak ne olacak orası?

60. <Zeynep>İşte onların mutlak değer farkının sup’unu alacağız.

61. <Ö> Sup’unu alacaksın.

62. <Zeynep> Orada küçük eşit 1/n diyeceğiz.

63. <Ö> Niye diyeceksin? 1/n nereden çıktı?

64. <Zeynep> Burada öyle yazıyor. (Defterine bakıyor. “Burada” ile defterini kast ediyor.)

65. <Ö>Canım orada öyle yazıyor olabilir. Şimdi tartışıyoruz.O noktalara geleceğiz ama nasıl geleceğiz?

66. <Zeynep>sup $f_n(x) – x$ yapacağız.

67. <Ö>Ben ondan bahsetmiyorum ama defterinden yazılandan bahsetmiyorum Zeynep. Nedim bu şekilde yazabilir mi analiz bilgilerine dayanarak? Bunu konuşuyoruz biz şimdi.

68. <Zeynep>Normalde yazar.

69. <Kenan>Hocam yazar da istediğimiz bu mu?

70. <Zeynep>Sup metriğinde çalışıyoruz. Bu değil.

71. <Ö> Soru şu ki… İstediğin ne? Senin istediğin ne? Soru şu : Bu dizi fonksiyon dizisi nereye yakınsar? Siz buna nasıl cevap veriyorsunuz?

72. <Zeynep> İyi de fonksiyon dizisi yani… d_{sup} metriği üzerinde ░

73. <Ö>Ben onu sormuyorum ki!

74. <Nedim>Şey mi yapmamız lazım? İlk önce fonksiyon dizisinin monoton olduğunu göstermemiz gerekir ve sınırlı olduğunu göstermemiz gerekir. Ondan sonra eğer öyleyse limitini alıp nereye yakınsadığını ░

75. <Ö> Eee.Bakınız soru şu : Analiz dersinde fonksiyon dizilerini gördünüz mü arkadaşlar? Gördünüz. Bu fonksiyon dizisi yakınsak mıdır? Evet ya da hayır. Yakınsaktır dedi Nedim hem de x e yakınsar dedi. Arkadaşımız böyle bir iddiada bulundu. Neden dedik? O da bunu yazdı. Soru bu zaten… Ve yazdığı doğru. Yazdığı doğru arkadaşınızın….. Size niye tuhaf geliyor bunun böyle olması. Ben sadece sizi şaşıtmak için soruyorum bunları hani yazılandan yapılandan emin misiniz vs. diye? Yazdığı doğru arkadaşınızın. Bu ne demektir biliyor musunuz arkadaşlar? n giderken sonsuza bu dizinin limiti nedir? Nedim bunu bu şekilde ayırdı anlaşılır olsun diye (Şekil 4.23). n lerin katsayıları oranı. x çıkar zaten.. Öyle değil midir? Dizileri öyle buluruz ya hani. Dizilerde ne yaparız? Pay ve paydadaki en yüksek dereceli terimlerin oranını alırız polinom diziler biçimindeyse. Hadi çevirdik onu o şekilde. Bu şekilde gördünüz arkadaşlar (Şekil 4.24). Bakın ne çıkıyor.. x çıkar. Kaldı ki arkadaşınız “hani bunu böyle görürsek hocam” dedi “n leri sonsuza götürsem x çıkar”. x fonksiyonuna yakınsar gerçekten bu. Neye göre çalıştınız? Analizdeki neyle çalıştınız?.. Normla çalıştınız ya da mutlak değer metriğiyle çalıştınız. O bizim supla eş değer olacak işte arkadaşlar. Evet Nedim doğru yazdın.

Tartışma Analizi

7. satırda Nedim fonksiyon dizisinin x e yakınsadığını belirterek ulaştığı *sonucu (iddiasını)* söylüyor ve buna dayanak olarak, fonksiyon dizisinin genel terimi için yaptığı cebirsel işlemden söz ediyor 9. satırda.

2., 17., ve 19. satırlarda Yiğit,Ayşe ve Alp herhangi bir dayanak(*veri*) göstermeden dizinin n ye yakınsayacağı iddiasında bulunuyorlar.

20. satırda öğretmen bir fonksiyon dizisinin bir fonksiyona yakınsayacağını belirterek *rehber yönlendirmesi* yapıyor.

27. ve 29. satırda Nedim yaptığı cebirsel işlemi gösterip, limit alarak kendi dedüktif *gerekçesini* ortaya koyuyor.

42.satırda öğretmen Nedim’in 27. satırda yazdığı cebirsel işlemin yazılıp yazılamayacağını sorarak *çürüten* rolü oynuyor.

Buna karşılık, 39. ve 41. satırlarda sınıftan, 42. satırda öğretmenden Nedim'in *dedüktif gerekçesine destek* geliyor.

Yine 42. satırda öğretmen, Nedim'in 29. satırda yazdığı ifadenin mantıklı olup olmadığını sorarak *çürüten* rolü oynuyor.

46. satırda Zeynep mutlak değer metriğinde değil de sup metriğinde çalışıldığına dayanarak, 48. satırda (limitin) sup metriğine göre alınması gerektiği *sonucuna* varıyor.

60. ve 62. satırlarda Zeynep (fonksiyonların) mutlak değer farkının supunun alınacağını ve bunun 1/n den küçük olacağını *dedüktif gerekçe* olarak kullanıyor.

63. satırda öğretmen 1/n nin nereden geldiği sorarak çürüten olarak davranıyor.

64. satırda Zeynep defterinde yazanları kendi *dedüktif gerekçesi* için bir *referans destek* olarak kullanıyor.

67. satırda öğretmen tartışma konusunun Zeynep'in defterinde yazanlar olmadığını söyleyerek *çürüten* olarak davranmaya devam ediyor.

69. ve 70. satırda Kenan ve Zeynep öğretmenin dediklerine katılmakla beraber istenilenin öğretmenin dedikleri olmadığını belirterek Zeynep'e *destek* veriyorlar.

Öğretmen 75. satırda *sonlandırıcı rehber* desteği kullanarak tartışmayı sonlandırıyor.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi

1

Veri - Nedim
Bunu ben o fonksiyonu şey şeklinde yazdım. x eksi x² bölü n artı x. n giderken sonsuza da sağ taraf… Açalım hocam.

Sonuç - Yiğit, Ayşe, Alp:
n ye yakınsar

2

Rehber Yönlendirmesi
Bakınız. Dikkatli olun ama arkadaşlar dikkatli olun. Bu bir fonksiyon dizisi. Nereye yakınsar yakınsıyorsa eğer? Bir fonksiyona yakınsar. Diyeceksiniz ki cevap verirken “hocam şu fonksiyona yakınsar diyeceksiniz”. Şimdi n ye yakınsar dediğiniz zaman n fonksiyonuna mı yakınsar manası çıkar buradan?... n fonksiyonuna mı yakınsar?

1

Sonuç - Nedim
x e yakınsar.

15

Sonlandırıcı Rehber Desteği:
Yakınsaktır dedi Nedim hem de x e yakınsar dedi… Ve yazdığı doğru.

3

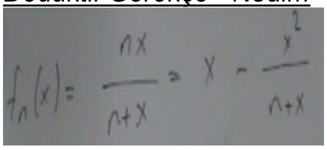
4

Çürüten -Rehber
Böyle yazabilir mi bir kere? Bir kere Nedim böyle yazabilir mi? (Şekil 13)

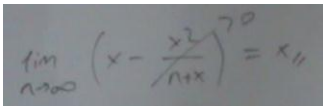
Çürüten - Rehber
Şöyle yazmak mantıklı bir şey mi?(Şekil 14)

7

Dedüktif Gerekçe - Nedim



Şekil 4.23



Şekil 4.24
Burası sıfıra gider.

5

Destek - Sınıf
Yazabilir, yazabilir.

6

Rehber Desteği
Elbette yazabilir. Cebirsel işlem yapmış arkadaşımız. Burada problem yok (Şekil 13 için).

Veri - Zeynep
Hocam mutlak değer metriğinde çalışmıyoruz ama sup metriğinde

8

Sonuç - Zeynep
sup metriğine göre almamız lazım. (Kafasını iki yöne sallıyor. Şekil 14 de yazılanların doğruluğunu tasvip etmiyor)

9

Dedüktif Gerekçe - Zeynep
İşte onların mutlak değer farkının sup’unu alacağız. Orada küçük eşit 1/n

10

Çürüten - Rehber
Niye diyeceksin? 1/n nereden çıktı?

Çürüten - Rehber
Ben ondan bahsetmiyorum ama defterinde yazılandan bahsetmiyorum Zeynep. Nedim bu şekilde yazabilir mi analiz bilgilerine dayanarak? Bunu konuşuyoruz biz şimdi.

11

12

Referans Destek - Zeynep
Burada öyle yazıyor. (Defterine bakıyor.)

13

14

Destek - Kenan
Hocam yazar da istediğimiz bu mu?

Destek - Zeynep
Sup metriğinde çalışıyoruz. Bu değil.

Şekil 4.25 (C[0,1], d_{sup}) metrik uzayında

$$f_n(x) = \frac{nx}{n+x}$$ dizisi nereye yakınsar

4.3.5. R^n de bir sınır noktası yığılma noktası olmak zorunda mıdır?

Açıklama : Öğretmen $\mathbf{R^n}$ de bir A kümesinin bir sınır noktasının aynı zamanda A için bir yığılma noktası olup olmadığını sorar.

Aşağıdaki bölüm bu soruya çerçevesinde yapılan tartışmayı göstermektedir.

1. <Gülşah> Zorunda değildir de olabilir de.
2. <Ö> Zorunda değildir de olabilir de? O zaman ters örnek vermek lazım. Bu her zaman gerçekleşmediğini söylüyorsun demektir. O zaman bir ters örnek vermek gerekir. Hadi bir küme düşünün, bir küme söyleyin o zaman. Bir şeyler yapın.
3. <Deniz> Hocam şeyden yapabilir miyiz?
4. <Ö>Nereden canım?
5. <Deniz> Hani… Şimdi A nın sınırını A nın kapanışıyla tümleyeninin kapanışının arakesiti olarak tanımladık ya.
6. <Ö> Evet doğru.
7. <Deniz> A nın kapanışı yerine de A birleşim A nın yığılma noktaları yazarsak. Orada hani veya bağlacı olmuş olacağı için yani… Gerçi o yanlış oldu tamam… Yani orada x ya A da olacak ya da A nın yığılma noktalarının kümesinde olacak. Yani A nın yığılma noktasında olmasa da olabilir anlamı çıkmıyor mu?
8. <Ö> Ama o biraz şey olmadı. Sezgisel oldu. Şimdi sen diyorsun ki A da olsa ama A nın yığılma noktalarında olmasa olur.
9. <Deniz> Evet ama tanımlarda öyle hani. A nın yığılma noktası ise ░
10. <Ö> Öyle tamam haklısın ama. Hani biz öyle yapmıyoruz kanıtı. O zaman şöyle diyoruz. İşte bakın bu A kümesidir. A nın sınırında bir noktadır bu ama A nın yığılma noktalarında değildir diyoruz Deniz. Buna ters örnekle kanıt yöntemi diyoruz. Anladın mı? Peki öyle bir örneğiniz var mı?
11. <Alpaslan> Tek nokta kümesi olabilir mi?

12. <Ö> Çok güzel.Tek nokta kümesi olabilir mi? Olabilir.

13. <Alpaslan> Boş küme oluyor yığılma noktalarının kümesi.

14. <Ö>Demek ki sınırda olduğu halde yığılma noktalarının kümesinde olmayan noktalar var.

Tartışma Analizi

5. satırda Deniz A kümesinin kapanışının tanımını yani $\overline{A} = A \cup A'$ eşitliğini *veri* olarak kullanıyor.

7. satırda Deniz yukarıdaki tanımda birleşim kümesi olduğundan “veya” bağlacı kullanıldığını ve dolayısıyla $\overline{A}$ kümesine ait bir x elemanı ya A kümesindedir ya da A' kümesindedir. Buradaki akıl yürütme Deniz’in *dedüktif gerekçesidir*. Buna dayanarak x in A' kümesine ait olamayabileceği sonucuna varıyor.

10. satırda öğretmen Deniz’in dedüktif gerekçesine değil fakat yaptığı kanıtın şekline itirazı var. Öğretmen bir A kümesi ve bu kümenin bir sınır noktası olan ama yığılma noktası olmayan bir elemanın varlığını görmek istiyor ve böyle bir örnek istediğini açıkça sınıfa söylüyor. Burada öğretmen *rehber yönlendirmesi* yapıyor.

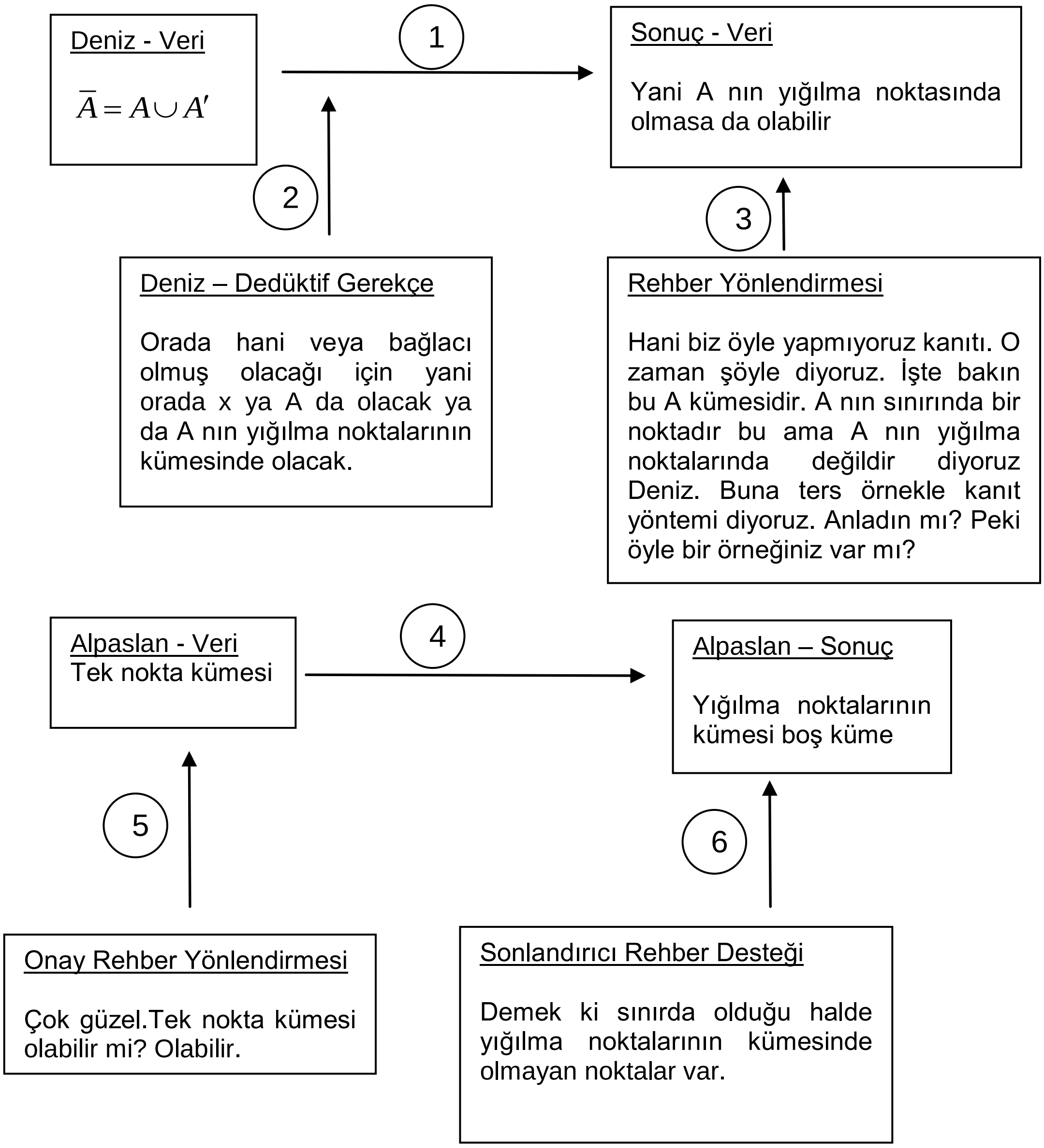
11. satırda Alpaslan tek nokta kümesini örnek olarak veriyor (*veri*)

12. satırda öğretmen tartışamının istediği yönde gittiğini göstermek için “Çok güzel. Tek nokta kümesi olabilir mi? Olabilir !” diyerek *onay rehber desteği* veriyor.

13. satırda Alpaslan tek nokta kümesinin yığılma noktalarının kümesinin boş küme olduğu *sonucuna* varıyor.

14. satırda öğretmen Alpaslan’ın dediklerini teyit ederek *sonlandırıcı rehber desteği* veriyor.

Tartışmanın Toulmin Diyagramı İle Gösterilişi



Şekil 4.26 R^n de bir sınır noktası yığılma noktası olmak zorunda mıdır?

4.4. Sınıf Ortamında Bir Tartışmanın Sahip Olduğu Değerler

Bu bölümde incelenen tartışmaların sahip olduğu değerler aşağıdaki gibi özetlenebilir :

1. Sonucu belli olan tartışmalarda sonucun netliği, sonucu belli olmayan tartışmalarda konunun netliği önemlidir. Örneğin kanıt üzerine olan bir tartışmada sonuç (doğru olan fakat doğruluğunun ispatlanması gereken önerme) tartışmanın başında verilir ve burada hem verilenler hem de sonuç iyi anlaşılmalıdır. Sonucu belli olmayan bir tartışmada, örneğin bir metrik uzayda verilen bir A kümesinin kapanışını soran bir soru üzerine olan tartışmada sonuç belli değildir. Burada verilenler iyi anlaşılmalıdır.
2. Tanım üzerine olan tartışmalarda referans gerekçe veya referans destek bileşenleri yoktur, kanıt ve problem çözme üzerine olan tartışmalarda ise sıklıkla görülebilir.
3. Öğretmen rehberliğinde olan tartışmaların nerede başlayıp nerede biteceği kesin olarak bellidir. Buna karşın, öğrenciler bir bileşenden diğerine geçerken doğru gerekçe kullansa bile attığı adımın doğruluğundan emin olamadığı zamanlar olmaktadır. Böyle bir durumda rehber desteği devreye girer. Bu bileşenin görevi öğrencilere doğru yolda ilerlediklerini göstermektir. Rehber desteği üç tartışma türünde de görülmektedir, yalnız referans rehber desteği tanım kurma tartışmalarında görülmemektedir.
4. Öğrenciler tartışma esnasında yanlış ara sonuçlara yönelir, düşündüğü bir ifadeyi tam olarak dile getiremeyebilir ya da kanıta veya soruya nerden başlayacağını bazen tam olarak bilemez. Böyle bir durumda rehber yönlendirmesi aktif olarak görev alır. Yanlış bir ara sonuca yönelen ya da düşündüğünü net olarak ifade edemeyen bir öğrencinin rehber yönlendirmesi sonucunda gerekçesinde bir değişiklik yapması ve uygulanabilir bir gerekçe sunması beklenir. Bu anlamda rehber yönlendirmesi direkt olarak gerekçe bileşenini etkileyen bir bileşendir.
5. Tartışmaların hiç birinde niteleyen bileşeni yoktur. Bunun iki sebebi vardır. Birincisi ulaşılacak sonuç mutlaktır. İkincisi, rehber yönlendirmesi ve rehber desteği bileşenleri öğrenciyi mutlak sonuca götüren bileşenlerdir. Bu iki bileşen niteleyen bileşeninin var olmasını engeller.

Bunun dışında, Inglis'in (2007) çalışmasında öğretmen rehberliği olmadan geliştirilen argümanlarda niteleyen bileşeninin sıklıkla ortaya çıktığı ve argümanın önemli bileşenlerinden biri olduğu vurgulanmaktadır.

6. Öğrenciler gerekçelerine kendileri destek sağlayabildiği gibi öğretmen tarafından da destek sağlanabilir. Öğrencilerin kendi sağladıkları destekler çürüten bileşenine karşın gerekçelerini savunmak iken öğretmenin sağladığı destek öğrencinin doğru yolda ilerlediğini göstermek içindir.
7. Tartışmalar daima sonlanır. Eğer öğrenciler son aşamaya kadar gelebilmişlerse öğretmenden gelen sonlandırıcı rehber desteği ile ulaşmaları gereken sonuca ulaştıklarını anlarlar. Eğer en son aşamaya kadar öğretmen tek başın gelmişse sonlandırıcı rehber desteği ortaya çıkmaz.

5. SONUÇ

Bu çalışmanın amacı, başlangıçta da belirtildiği gibi, matematik lisans derslerinde gerçekleştirilen tartışmalarda öğrencilerin attıkları adımların yapısını özellikle yaptıkları muhakemeleri, birbirleriyle ve öğretmenleriyle olan etkileşimlerini anlamaya çalışmaktır. Bir başka ifade ile, matematik lisans derslerinde sınıflarındaki tartışmaların yapısını anlamaya çalışmaktır. Toulmin tarafından alandan bağımsız olarak önerilen Toulmin tartışma modelinin söz konusu tartışmaların yapısını incelemek için nasıl kullanılacağını belirlemektir. Bu amaç doğrultusunda oluşturulan araştırma soruları için elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibidir.

5.1. Birinci Araştırma Sorusu

Matematik lisans derslerindeki tartışmaların yapısı nasıl analiz edilebilir ? Matematik lisans derslerinde tartışmaları analiz etmek için literatürde yoğun olarak Toulmin modelinin kullanıldığı daha önceden belirtilmişti. Yalnız Toulmin modeli tartışma analizinden çok argüman analizi için kullanılmıştır. Bir başka deyişle, sınıf ortamındaki tartışmalar yerine öğrencilerin bireysel olarak geliştirdikleri sadece veri,sonuç ve gerekçe bileşenlerinden oluşan basit argümanların Toulmin'in deyimiyle mikro-argümanların analizi yapılmıştır. Matematik eğitiminde sınıf ortamında tartışmaların yapısını ilk inceleyen araştırmacı olan Krummheuer(1995) de aslında ilköğretimn sınıflarındaki basit argüman yapılarını tartışma adı altında incelemiştir. Buna karşılık matematik lisans derslerinde tartışmaların yapısı çok daha karmaşıktır ve bir tartışma birkaç argümandan meydana gelir. Bu tür karmaşık tartışma yapılarının incelenmesi için Toulmin modelini kullanan Knipping(2008), toulmin'in mikro-argüman olarak adlandırdığı argümanları lokal argümantasyon, tartışmaları ise global argümantasyon olarak adlandırıp lokal argümantasyonları görsel ve kavramsal, global argümantasyonları da kaynak – yapı ve depo – yapı olmak üzere ikiye ayırmıştır. Knipping'in incelediği tartışmalarda Toulmin modeline ait tüm bileşenler gözlenememiştir. Örneğin, çürüten bileşenine sahip olmayan tartışma yapıları mevcuttur. Ayrıca, bu çalışmada incelenen tartışmalarda Knipping'in belirttiği anlamda Toulmin modelini kullanmanın yetersiz kaldığı önceden belirtilmişti. Bu yüzden Toulmin modelini verimli bir şekilde bir başka deyişle matematik lisans derslerindeki tartışmaların yapısını tam olarak ortaya koyabilmek için Toulmin modelindeki bileşenleri yeniden yorumlamaya ihtiyaç vardır.

Gerekçe bileşeni Toulmin tarafından “oraya nasıl gittin ?” sorusuna verilen cevap olarak tanımlanmıştır. Matematik eğitiminde ise gerekçe bileşeni bu sorunun dışında “beni nasıl ikna edersin ?”, “bunu nasıl garanti edersin ?” sorularına verilen cevaplar olarak tanımlanabilir.

Toulmin modelini önemli kılan bileşenlerden biri de çürüten bileşenine sahip olmasıdır. Bu bileşen ile model karşı tarafın düşüncesini de kendi bünyesinde barındırmakta ve böylece değişebilen yani dinamik bir yapıya sahip olmaktadır. Toulmin çürüten bileşenini gerekçeyi geçersiz kılan durum veya istisnalar olarak tanımlamıştır. Matematik eğitiminde ise bu tanımdan daha genel olarak, muhatabımızın gerekçemize karşı olarak sunduğu ifade veya önermeye çürüten diyebiliriz. Muhatabımızın sunduğu bu ifade ve önermeler doğru olmak zorunda değildir. Eğer doğru değilse, muhatabımızın sunduğu çürütenin gerekçemizi neden çürütemeyeceğini açıklamak durumundayız. Eğer doğru ise, ya gerekçemizi geri çekeriz ki bu sonucumuzu da geri çekmeyi gerektirebilir ya da gerekçimizi destek bileşeni ile savunup, öne sürülen çürütenin geçersiz olmasını sağlayabiliriz.

Toulmin’in de ifade ettiği gibi kendi modeline ait bileşenler her alanda yeniden yorumlanmalı ve alana göre modeli için uygun bir kullanım bulunmalıdır. Bu anlamda, bu araştırmada gerekçe ve çürüten bileşenlerine matematik eğitiminde yapılacak araştırmalar için yukarıdaki anlamlar yüklenmiştir.

5.2. İkinci Araştırma Sorusu

Alandan bağımsız bir model olan Toulmin modeli lisans matematik derslerindeki tartışmaların yapısını analiz etmek için nasıl yorumlanmalıdır? Toulmin modeline ait gerekçe ve veri bileşenlerini tanımladıktan sonra modelin ihtiyaç duyduğu ek bileşenler tanımlanmıştır. Bu bileşenler rehber desteği ve rehber yönlendirmesidir. Rehber desteği kendi içinde onay, referans ve sonlandırıcı olmak üzere üç sınıfa ayrılmıştır. Bu bileşenlerden onay rehber desteği ve sonlandırıcı rehber desteği bileşenleri hemen hemen tüm tartışmalarda, referans rehber desteği ise tanım koyma haricindeki tartışmalarda yoğun olarak karşımıza çıkmaktadır. Bunun dışında gerekçeler dedüktif ve referans olmak üzere iki sınıfa ayrılmıştır. Dedüktif gerekçe her tartışma türünde ortaya çıkabilirken, referans gerekçe tanım koyma haricindeki tartışmalarda gözlemlenmektedir.

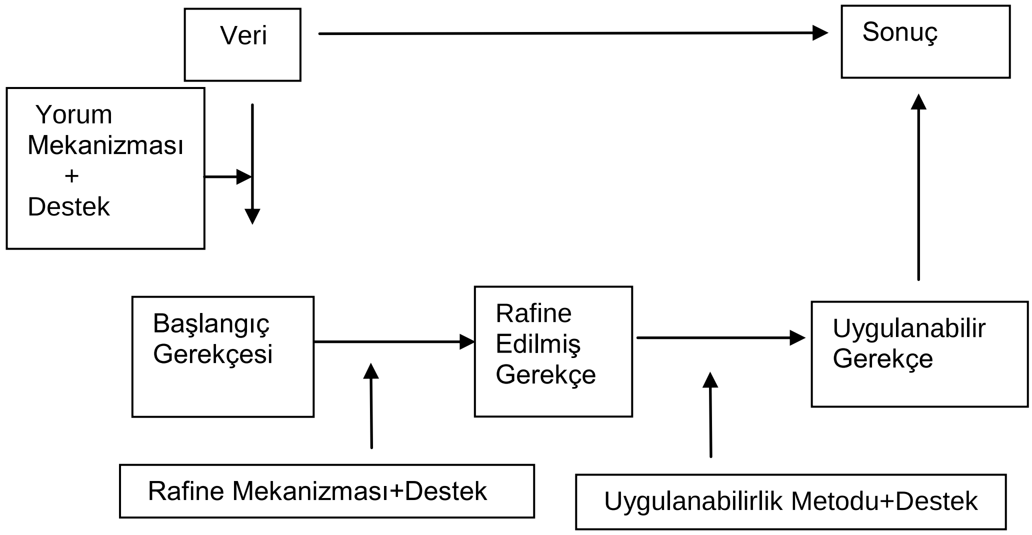
6. TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Knipping'e (2008) göre, sınıf ortamındaki kanıt sürecinin kendine has önemi vardır. O'na göre bu süreç sınıfta üretilen veya ders kitaplarında sunulan yazılı metinler vasıtasıyla kavranamaz , çünkü böyle bir son ürün kendisini yaratan süreçten hiçbir iz taşımaz.

Kanıt yapmanın merkezinde ise öğrencilerin kendi aralarında veya öğretmenleriyle olan tartışmalarda geliştirdikleri argümanların yattığı bu çalışmanın başında belirtilmişti. Bu yüzden tartışmaların yapı taşları olan argümanların yapısını anlamak, daha karmaşık yapılar olan tartışmaların yapısını anlamaya olanak sağlamaktadır. Bunun için dünyada yaygın olarak kabul görmüş Toulmin modeli etkili bir biçimde kullanılabilir. Bu çalışmada, matematik eğitiminde Toulmin modelinin bileşenlerinin nasıl tanımlanması ve bu modelin nasıl kullanılması gerektiğine dair bir öneri yapılmıştır. Bununla birlikte, bu çalışmanın başlangıcında çalışmanın amacı çalışma yapılan gruba net olarak anlatıldığı ve dersi işleyen öğretmenden de mümkün olduğunca tartışma ortamı yaratması istendiğinden buradan elde edilen bulguların bu çalışmanın tekrarlanması durumunda elde edilememesi durumu söz konusu olabilir.

Bu çalışmada gerekçeler dedüktif ve referans olmak üzere iki sınıfa yapılmıştır. Literatürde ise Inglis vd. (2007) gerekçeleri tümevarımsal, yapısal – sezgisel ve dedüktif olmak üzere üç sınıfa ayırmış ve daha farklı sınıflar olabileceğini belirtmiştir. Bu çalışmada farklı bir sınıf olarak referans gerekçe çıkmıştır. Buna benzer başka çalışmaların yapılmasıyla yeni gerekçe tipleri ortaya çıkabilir ve gerekçeler için bir gerekçe şemasının oluşturulması mümkündür.

Öğretmen rehberliğinde yapılan tartışmaların en önemli bileşeni gerekçe bileşenidir. Çünkü, bu bileşenin doğru kullanılıp kullanılmamasına göre ortaya adına rehber desteği ve rehber yönlendirmesi dediğimiz iki yeni bileşen ortaya çıkmakta ve bu bileşenler gerekçe bileşeninin içeriğini değiştirdiği gibi, gerekçeye dayalı olan sonucu da değiştirebilir. Ayrıca, daha önceden belirtildiği gibi rehber desteği ve rehber yönlendirmesi bileşenlerine niteleyen bileşeninin ortaya çıkmasını engellemektedir. Buradaki tartışma yapısı Toulmin'in dediği gibi bir organizmaya benzemektedir. Gerekçe bileşeni bu kadar hayati öneme sahip olduğu için ayrıca ele alınmalıdır. Gerekçenin ilk olarak nasıl oluştuğu, nasıl şekillendiği ve ne zaman öğrencinin kendi geliştirdiği gerekçesinin uygulanabilir yani argümanda kullanılabilir olduğuna karar verdiği araştırılmalıdır. Bunun üzerine Weber vd. (2008) hariç neredeyse hiç araştırma yapılmamıştır. Filozoflar arasından da Tans bunun üzerine kafa yormuş ve hukuk davalarını izleyerek Toulmin modelinde kullanılabilecek üç aşamalı bir süreç bulmuştur. İlk aşama, ilgili yasal kaynakları ve davanın gerçeklerini baz alarak başlangıç gerekçesinin oluşması, ikinci aşama destek, niteleyen ve çürütücü bileşenleri ışığında gerekçenin rafine edilmesi, üçüncü aşama söz konusun rafine sürecinin belirli bir aşamasında gerekçenin dava sürecinde uygulamaya sokulmasıdır. Tans'ın önerdiği modelin diyagramı aşağıdaki gibidir.



Tans'ın bulduğu üç aşamalı sürecin matematik eğitiminde ortaya çıkıp çıkmadığı araştırılabilir ve matematik eğitiminde böyle bir süreç varsa bu diyagrama rehber desteği ve rehber yönlendirmesi de dahil edilebilir çünkü ikisi de gerekçeyi direkt etkileyen bileşenlerdir. Çalışmanın amacı bu olmadığından, gerekçenin nasıl oluştuğu, şekillendiği ve ne zaman uygulanabilir olduğu incelenmemiştir.

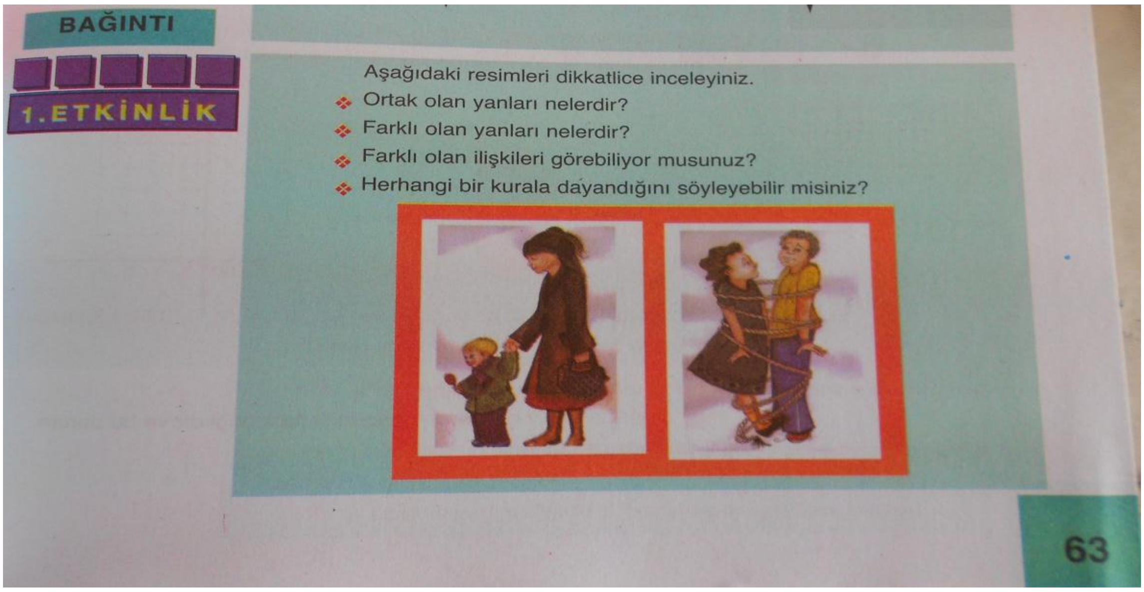
Bunların dışında argüman kuran bir öğrencinin geçtiği aşamaları bilen bir öğretmen ders notlarını, materyallerini hatta sınavlarını bile buna göre ayarlayabilir. Örneğin, 1. sınıf öğrencilerinin ileriki yıllarda sıkıntı yaşamamak için kanıtın ne olduğunu, kanıta nereden başlamak gerektiğini, kanıtın ne zaman sonlanacağını iyice öğrenmeleri gerekmektedir. Buna karşılık liseden yeni gelmiş olan bir öğrenci üniversitedeki öğretmenleri ne kadar çabalarsa çabalasın kanıt gerektiren uygulamaları kavramakta zorlanabilir dolayısıyla sınavlarda da göstermesi gereken becerileri gösteremeyebilir. Sadece 1. sınıf öğrencileri için öğretmenler sınavlarda ya da küçük sınavlarda(quizlerde) direkt olarak kanıt sormak yerine, kanıtta kullanılacak olan veri ve sonucu verip gerekçeyi öğrenciden isteyebilir. Örneğin aşağıdaki gibi üç sütunlu bir soru sorulabilir :

Veri	Sonuç	Gerekçe
x ve sinx sürekli fonksiyondur	x^2 + sinx fonksiyonu süreklidir.	

Bunun dışında benzer bir çalışma orta öğretim öğrencileri için de gerçekleştirilebilir. Fakat orta öğretim düzeyinde kanıt, gerekçe gibi kavramlar üniversite düzeyindekilere göre farklı anlamlara sahip olacağından Toulmin modelinin bileşenleri içerik olarak farklılık gösterebilir. Örneğin,

n doğal sayı olmak üzere $n^2 + n$ işleminin sonucu bir çift sayıdır

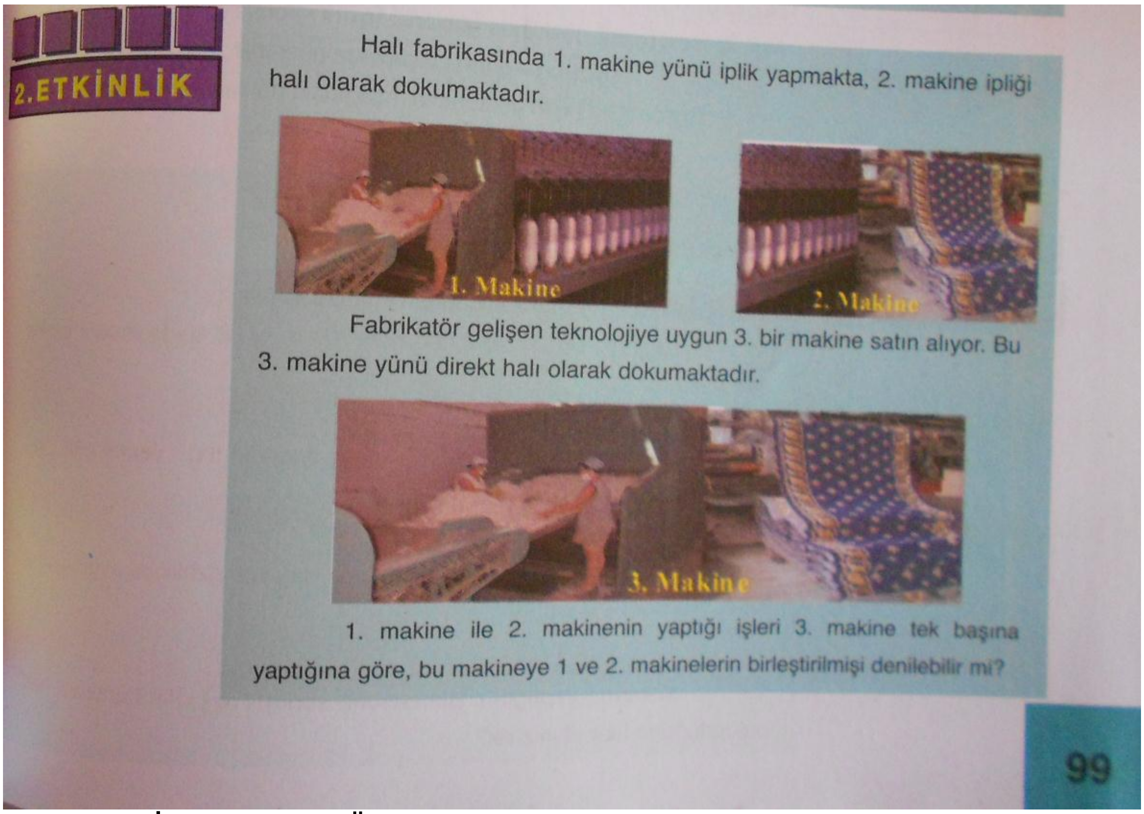
önermesinin doğruluğunu göstermek isteyen bir orta öğretim öğrencisi n yerine 1, 2 gibi birkaç doğal sayı değeri verip önermenin doğruluğunun kendisine göre kanıtlayabilir ve öğretmeni de bunu geçerli bir gerekçe olarak kabul edebilir. Fakat aynı davranışı bir üniversite öğrencisi gösterirse öğretmeni bunu geçerli bir gerekçe olarak kabul etmez ve çürüten olarak davranır. Bu çalışmanın lise düzeyinde yapılması özellikle önemlidir. 2005 – 2006 öğretim yılından itibaren ülkemizde lise eğitimi 4 yıla çıkarıldı ve müfredat konu değişikliği bakımından çok az değişse de MEB tarafından derslerin yapılandırmacı yaklaşımla işlenilmesi istendi ve bütün MEB kitapları buna uygun olacak şekilde yeniden yazıldı. MEB kitapları öğrenciye göstermek istediği bir kavramı (tanımı, teoremi, özelliği, kuralı vs.) direkt vermek yerine, “etkinlik” adını verdiği kutucuklar içine çizilmiş ve çoğu zaman tartışma yaratmayı amaçlayan bir takım ifadelerle doldurarak yazmıştır. Bu etkinliklerden bazıları mükemmel denilebilecek kadar iyiyken bazıları da amacından çok uzak , neredeyse anlamsızdır. Örneğin, orta öğretim matematik 9. sınıf ders kitabının (Bağrıaçık, M. vd., 2008) 63. sayfasında bağıntı tanımından önce verilen etkinlik amacından uzak bir etkinlik olarak görülebilir.



Şekil 4.27 Birinci Etkinlik Örneği

Bu etkinlikte ele ele tutuşmuş bir küçük çocuk ve bir iple birbirine bağlanmış bir kadın ve bir erkek çizimi bulunmaktadır. Bu etkinliğin amacı bağıntı tanımına götürecek bir tartışma başlatmak ise bu çizimler tartışmanın verisi olacaktır. Öğrencilerin tartışma boyunca izlemesi gereken yol, çizimlerin hemen üstünde verilen dört soru ile belirlenmiştir. Bu yüzden, söz konusu sorular tartışmanın rehber yönlendirmesi olarak görülebilir. "Ortak olan yanları nelerdir ?" , "Farklı olan yanları nelerdir ?" sorularına öğrenciler, etkinliği hazırlayanların düşündüklerinden çok uzak olarak kıyafet, saç rengi vb. gibi cevaplar verebilirler. "Farklı olan ilişkileri görebiliyor musunuz ?" sorusuna da anne - çocuk ilişkisi ve zorla alıkonulmuş iki insan ilişkisi belki de akla ilk gelen cevaplar olacaktır. Bu yüzden veri görevi gören çizimler ile rehber yönlendirmesi görevi gören sorular, işlevlerini tam olarak yerine getiremeyebilir. Dolayısıyla, canlı bir organizma olan tartışmanın iki önemli organı olan veri ve rehber yönlendirmesinin tam çalışamamasından dolayı organizma ölebilir, bir başka ifade ile amaçlanan tartışma başlamayabilir, başlasa bile yanlış yolda gidebilir.

Yine Orta öğretim matematik 9. sınıf ders kitabının (Bağrıaçık, M. vd., 2008) 99. sayfasında bileşke fonksiyon tanımından önce verilen etkinlik ise amacına uygun etkinliklerden biri olarak görülebilir.



2.ETKİNLİK

Halı fabrikasında 1. makine yünü iplik yapmakta, 2. makine ipliği halı olarak dokumaktadır.

1. Makine

2. Makine

Fabrikatör gelişen teknolojiye uygun 3. bir makine satın alıyor. Bu 3. makine yünü direkt halı olarak dokumaktadır.

3. Makine

1. makine ile 2. makinenin yaptığı işleri 3. makine tek başına yaptığına göre, bu makineye 1 ve 2. makinelerin birleştirilmişi denilebilir mi?

99

Şekil 4.28 İkinci Etkinlik Örneği

Bu etkinlikte veri olarak 3 tane makine resmi veriliyor ve rehber yönlendirmesi olarak “1. makine ile 2. makinenin yaptığı işleri 3. makine tek başına yaptığına göre, bu makineye 1 ve 2. makinelerin birleştirilmişi denilebilir mi ?” sorusu soruluyor. 2. makine 1. makinenin çıktısı olan ipliği girdi olarak alıp, çıktı olarak halı vermektedir. 3. makine ise 1. makinenin girdisi olan yünü alıp, 2. makinenin çıktısı olan halıyı vermektedir. Buradaki makineler matematikteki fonksiyon kavramının somut bir örneği olarak görülebileceğinden ve makinelerin ardışık olarak yaptığı işlemler, bileşke fonksiyon tanımındaki mantığın günlük hayata uygulanmış hali olduğundan rehber yönlendirmesine “evet” olarak cevap veren öğrenciler bileşke fonksiyon tanımını daha kolay kavrayabilirler.

Lise düzeyinde yapılacak böyle bir çalışmadan elde edilecek bulgular MEB yazarlarına sunulursa amaca daha uygun etkinliklere sahip kitaplar yazılabilir.

KAYNAKLAR

Alcock, L., Simpson, A., 2005, Convergence Of Sequences And Series 2: Interactıons Between Nonvisual Reasoning And The Learner's Beliefs About Their Own Role, Educational Studies in Mathematics, 57, 1 - 32.

Alcock, L., Weber, K., 2005, Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants, Journal of Mathematical Behavior, 24, 125–134.

Alcock, L., Simpson, A. , 2004, Convergence Of Sequences And Series 1: Interactions Between Vısual Reasoning And The Learner's Beliefs About Their Own Role, Educational Studies in Mathematics, 57, 1 - 32.

Aldağ, H., 2006, Ç.Ü. Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi, Cilt 15, Sayı 1,13-34.

Antonini, S., Mariotti, M.A, 2008, Indirect proof: what is specific to this way of proving?, ZDM Mathematics Education, 40, 401–412.

Bağrıaçık, M. vd., 2008, Ortaöğretim Matematik 9. Sınıf,MEB Devlet Kitapları Üçüncü Baskı, Aykut Basım – İstanbul.

Balacheff, N., Margolinas, C, 2005, cK¢ modèle de connaissances pour le calcul des situations didactiques. In A. Mercier, & C. Margolinas (Eds.), Balises pour la didactique des mathématiques (75–106). Grenoble: La pensée sauvage.

Borasi, R., 1992, Learning Mathematics Through Inquiry, Heinemann, New Hampshire.

Chazan, D., 1993, 'High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof', Educational Studies in Mathematics 24, 359–387.

Creswell, J. W., 2003, Research Design: Qualitative, quantitaive, and mixed method approaches, Sage Publications.

Dorier, J. L., Robert A, Rogalski, M., 2002, Some Comments On 'The Role Of Proof In Comprehendıng And Teaching Elementary Linear Algebra' By F. Uhlig, Educational Studies in Mathematics, 51, 185–191.

Eemeren, F.H. van, Grootendorst, R., Snoeck Henkemans, F. et al, 1996. Fundamentels of Argumentation Theory. A Handbook of Historical Backgrounds and Contemporary Developments. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Epp, S., 1998, A unified framework for proof and disproof. Mathematics Teacher 91,8, 708–713.

Evens, H., Houssart, J., 2004, Categorizing pupils' written answers to a mathematics test question: 'I know but I can't explain'. Educational Research, 46, 269–282.

Fraenkel, J. R., Wallen, N., E., 2006, How To Design and Evaluate Research in Education, McGraw – Hill International Edition.

Freudenthal, H, 1973, Mathematics as an Educational Task, Reidel, Dordrecht.

Hanna, G., 2000, Proof, Explanation And Exploration: An Overview, Educational Studies in Mathematics, 44, 5–23.

Harel, G., 2001, The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNRbased instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), Learning and teaching number theory. (185–212). Norwood, New Jersey: Ablex.

Harel, G., & Sowder, L., 1998, Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In A. H.Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), Research in collegiate mathematics III (234–282).Providence, Rhode Island: American Mathematical Society.

Hitchcock D., Verheij, B., 2006, Introduction, Arguing on the Toulmin Model New Essays in Argument Analysis and Evaluation,Springer, 1 - 23.

Hoyles, C., Küchemann, D., 2002, Students' understanding of logical implication. Educational Studies in Mathematics, 51(3), 193–223.

Inglis, M., Mejia-Ramos, J. P., Simpson, A., 2007, Modelling mathematical argumentation: the importance of qualification, Educ. Stud. Math., 66, 3 – 21

Jones, K, 2000, The student experience of mathematical proof at university level, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 31, 53 – 60.

Klumpp, J. F., 2006, Warranting arguments, the virtue of verb, Arguing on the Toulmin Model New Essays in Argument Analysis and Evaluation, Springer, 103 – 113.

Knipping, C., 2003, Argumentation structures in classroom proving situations. In M. A. Mariotti (Ed.), Proceedings of the third congress of the european society for research in mathematics education. Bellaria, Italy, ERME.

Knipping, C., 2008, A method for revealing structures of argumentations in classroomproving processes, ZDM Mathematics Education, 40, 427–441

Krummheuer, G., 1995, The ethnography of argumentation. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.) The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krummheuer, G., 2007, Argumentation and participation in the primary mathematics classroom : Two episodes and related theoretical abductions, Journal of Mathematical Behavior, 60-82.

Lakatos, I., 1976, Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery, Cambridge : Cambridge University Pres.

Larsen, S., Zandieh, M., 2008, Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom, Educ. Stud. Math., 67,3, 205–216.

Leron, U., 1985, A Direct Approach to Indirect Proofs, Educational Studies in Mathematics, 16, 3, 321-325.

Loui, R. P., 2006, A citation-based reflection on Toulmin and Argument, Arguing on the Toulmin Model New Essays in Argument Analysis and Evaluation, Springer, 31 – 38.

Mariotti, M.A., Fischbein, E., 1997, Defining in classroom activities, Educational Studies in Mathematics 34, 219–248.

Mariotti, M.A., Balacheff, N., 2008, Introduction To The Special Issue Didactical And Epistemological Perspectives On Mathematical Proof, 40, 341–344.

McCrone, S. S., (2005), The development of mathematical discussion: An investigation in a fifth grade classroom. Mathematical Thinking and Learning, 7(2), 111–133.

Mejia-Ramos, J. B., Inglis, M., 2009, What are the argumentative activities associated with proof ? Research in Mathematics Education, 11, 1, 77- 78.

Moore R. C., 1994, Making the Transition to Formal Proof, Educational Studies in Mathematics, 27, 3, 249-266.

Ouvrier-Buffet, C., 2006, Exploring Mathematical Definition Construction Processes, Educational Studies in Mathematics, 63, 259–282.

Pedemonte, B., 2005, Quelques outils pour l'analyse cognitive du rapport entre argumentation etdémonstration. Recherches en Didactique des Mathématiques, 25, 313–348.

Pedemonte, B., 2007, How can the relationship between argumentation and proof be analysed? Educ Stud Math, 66(1), 23–41.

Portnoy, N., Grundmeier, T. A., Graham, J. G., 2006, Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs, Journal of Mathematical Behavior, 25, 196–207.

Recio, A. M., Godino, J. D., 2001, Institutional And Personal Meanings Of Mathematical Proof, Educational Studies In Mathematics , 48, 83–99.

Raman, M., 2003, Key Ideas:What Are They And How Can They Help Us Understand How People View Proof ?, Educational Studies in Mathematics, 52, 319–325.

Segal, J., 2000, Learning About Mathematical Proof:Conviction and Validity, Journal Of Mathematical Behavior, 18 (2), 191-210.

Selden, J., Selden, A., 1995, Unpacking The Logic Of Mathematical Statements, Educational Studies in Mathematics, 29, 2, 123-151.

Selden, A., Selden, J., 2003, Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? Journal for Research in Mathematics Education , Vol. 34, No. 1, 4-36.

Senk, S.L., 1985, 'How well do students write geometry proofs?', Mathematics Teacher, 78, 448–456.

Sfard, A., 2001, There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning, Educational Studies in Mathematics, 46, 13–57.

Slob, W., H., 2006, The voice of the other: a dialogico-rhetorical understanding of opponent and of Toulmın's rebuttal, Arguing on the Toulmin Model New Essays in Argument Analysis and Evaluation, Springer, 25 – 29.

Smith, J. C., 2006, A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses, Journal of Mathematical Behavior, 25, 73–90.

Stephan, M., Rasmussen, C., 2002, Classroom mathematical practices in differential equations, Journal of Mathematical Behavior, 21, 459-490.

Stylianides, A . J., Stylianides, G. J., Stylianides, G.N., 2004, Undergraduate Students' Understanding Of The Contraposition Equivalence Rule In Symbolic And Verbal Contexts, Educational Studies in Mathematics, 55, 133-162.

Tans, O., 2006, The fluidity of warrants: Using the Toulmin Model to analyse practical discourse, Arguing on the Toulmin Model New Essays in Argument Analysis and Evaluation, Springer, 219 – 230.

Toulmin, S., 2006, Reasoning in Theory and Practice, Arguing on the Toulmin Model New Essays in Argument Analysis and Evaluation, Springer, 25 – 29.

Toulmin, S., 1958, The Uses of Argument. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Uhlig, F., 2002, The Role Of Proof In Comprehending And Teaching Elementary Linear Algebra, Educational Studies In Mathematics, 50, 335–346.

Yackel, E., 2001, Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th international conference on the psychology of mathematics education, Vol 1, pp.9–23. Utrecht, Holland, IGPME.

Weber, K., Maher, C., Powell, A. ,Lee, H. S., 2008, Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate, Educ Stud Math, 68, 247 – 261.

Weber, K., 2005, Problem-solving, proving, and learning: The relationship between problem-solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction, Journal of Mathematical Behavior, 24, 351–360.

Weber, K., 2004, Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course, Journal of Mathematical Behavior , 23, 115–133.

Weber, K., 2001, Student Difficulty In Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge, Educational Studies In Mathematics, 48, 101–119.

Weber, K., Alcock, L., 2005, Using warranted implications to understand and validate proofs. For the Learning of Mathematics, *25*(1), 34–38.

Whitenack J. W., Knipping, N., 2002, Argumentation, instructional design theory and students' mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses,The Journal Of Mathematical Behavior, 21, 441 – 457.

Zaslavsky, O., Shir, K., 2005, 'Students' conceptions of a mathematical definition', Journal for Research in Mathematics Education 36(4), 317–346.

EKLER

EK1. TRANSKRİPSİYON KURALLARI

Sütun 1 Sırasal olarak numaralandırılmış satır numarası

Sütun 2 Tartışmaya katılan kişi için kullanılan isim

Sütun 3 Tartışmaya katılan kişilerin kurdukları cümleler

( ) Açıklama simgesi

░ Konuşan birisinin sözünün kesildiği an için kullanılan simge

. .. … 1 sn, 2sn ya da 3 snlik duraksamalar için kullanılan simge

<Ö> Öğretmen

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Saygın Dinçer

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Yılı : 1978

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 1989-1995 : Ayrancı Lisesi

Lisans 1996-2001 : Hacettepe Üniversitesi, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Yabancı Dil : Almanca, İngilizce

İş Tecrübesi :

2001- 2005 : Hacettepe Üniversitesi, Matematik Bölümü, Araştırma Görevlisi

2005- : Matematik Öğretmeni, Kitap Yazarı, Yayın Yönetmeni