TOPOLOJİDE SEÇME PRENSİPLERİ

SELECTION PRINCIPLES IN TOPOLOGY

ALİ EMRE EYSEN

HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Matematik Anabilim Dalı için Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.
2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma jürimiz tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan :...

Prof. Dr. Lawrance Michael BROWN

Üye (Danışman) :............................

Doç. Dr. Selma ÖZÇAĞ

Üye :...

Prof. Dr. A.Haydar EŞ

Üye :...

Prof. Dr. Rıza ERTÜRK

Üye :...

Doç. Dr. Alev KANIBİR CAMGÖZ

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ..../..../2012 tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ..../..../2012 tarihinde kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Adil DENİZLİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

TOPOLOJİDE SEÇME PRENSİPLERİ

ALİ EMRE EYSEN

ÖZ

Bu tezin amacı köşegenleştirme yöntemi olarak da bilinen seçme prensipleri teorisi üzerine bir derleme yapmak ve topolojik oyunlarla olan ilişkilerini incelemektir.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde seçme prensipleri teorisinin tarihi hakkında kısa bilgiler verilmiş ve $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$ ve $\mathcal{U}_{fin}$ klasik seçme yöntemlerinin uyarlanmasından bahsedilmiştir. İkinci bölümde; tez içerisinde kullanılacak olan genel tanımlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde; Γ, Ω, Λ, $\mathcal{O}$ açık örtü sınıfları ve $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$ $\mathcal{U}_{fin}$ klasik seçme yöntemleriyle elde edilen sınıflar arasındaki kapsamalar incelenmiş ve bu kapsamalar şemalarla verilmiştir. Dördüncü bölümde; bir önceki bölümde şemalarda verilen sınıflar arasındaki eşitlikler gösterilmiş, Cantor kümesinin bu sınıflardan hangilerinde olup, olmadığı incelenmiş ve son olarak özelliklerin korunmasına değinilmiştir. Beşinci bölümde; Menger, Rothberger ve Hurewicz özelliklerinden uyarlanan topolojik oyunlar tanıtılmış ve bu oyunlarla sınıflara ait olma koşulları karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Açık örtü, geniş örtü, γ-örtü, ω-örtü, Hurewicz, Menger, Rothberger, Cantor kümesi, topolojik oyunlar.

Danışman: Doç. Dr. Selma ÖZÇAĞ

Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.

SELECTION PRINCIPLE IN TOPOLOGY

ALİ EMRE EYSEN

ABSTRACT

The aim of this thesis is to make a compilation on the theory of selection principles which is also known as the diagonalization processes, and to examine its relations with topological games.

The thesis consists of five sections. In the first part, short information about the history of the theory of selection principles were given and the motivation of $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$ and $\mathcal{U}_{fin}$ classic selection methods were discussed. In the second part, the general definitions used in the thesis were given. In the third part; the inclusions between Γ, Ω, Λ, $\mathcal{O}$ cover classes, and classes obtained by $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$ and $\mathcal{U}_{fin}$ classic selection methods were examined and given in diagrams. In the fourth part, equivalences between classes given in the diagrams in the previous part were shown, in which of the classes there exists or there doesn't exist the Cantor set were examined and finally the preservation of the properties were mentioned. In the fifth part, topological games adapted from Menger, Rothberger and Hurewicz properties were introduced and belonging conditions to classes were characterized with these games.

Keywords: Open cover, large cover, γ-cover, ω-cover, Hurewicz, Menger, Rothberger, Cantor set, topological games.

Supervisor: Assoc.Prof.Dr Selma ÖZÇAĞ

Hacettepe University, Faculty of Science, Department of Mathematics.

TEŞEKKÜR

Yüksek öğrenimim süresince bana hep destek olan, bu çalışmada yol gösteren değerli hocam ve tez danışmanım Doç. Dr. Selma ÖZÇAĞ'a teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca hep yanımda olan ve rahat edebilmem için türlü sıkıntılara katlanıp, büyük fedakarlıklarda bulunan sevgili anne ve babama teşekkür ederim.

Çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen Topoloji Anabilim Dalındaki hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarım Uğur SERT, Berke KALEBOĞAZ ve H. Melis TEKİN AKÇİN'e teşekkür ederim.

İçindekiler

ÖZ **i**

ABSTRACT **ii**

TEŞEKKÜR **iii**

İÇİNDEKİLER DİZİNİ **iv**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ **v**

1 GİRİŞ **1**

2 ÖNBİLGİLER ve TEMEL KAVRAMLAR **4**

3 ÖRTÜ SINIFLARI ve SEÇME YÖNTEMLERİ **6**

3.1 Γ, Ω, Λ, $\mathcal{O}$ Örtü Sınıfları ve Özellikleri 6

3.2 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$, $\mathcal{U}_{fin}$ Seçme Yöntemleri ve Aralarındaki Bağıntılar 8

4 EŞİTLİKLER ve ÖZELLİKLERİN KORUNMASI **17**

4.1 Eşitlikler 17

4.2 Cantor Kümesi 28

4.3 Özelliklerin Korunması 31

5 TOPOLOJİK OYUNLAR **39**

5.1 Genel Yapı 39

5.2 Menger(X) Oyunu 40

5.3 Rothberger(X) Oyunu 46

5.4 Hurewicz(X) Oyunu 49

KAYNAKLAR DİZİNİ **51**

ÖZGEÇMİŞ **53**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

ω	: Doğal sayılar kümesi
$\mathcal{S}_1$	: $\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ Seçme yöntemi
$\mathcal{S}_{fin}$	: $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ Seçme yöntemi
$\mathcal{U}_{fin}$	: $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ Seçme yöntemi
$[X]^{<\omega}$	: X kümesinin sonlu alt kümelerinin ailesi
$G(X)$	: X topolojik uzayı üzerine G oyunu
$\mathrm{I} \uparrow G(X)$	: I.Oyuncu'nun $G(X)$'de kazanma stratejisi vardır
$\mathrm{I} \not\uparrow G(X)$	: I.Oyuncu'nun $G(X)$'de kazanma stratejisi yoktur
${}^{<\omega}\omega$	: ω'nın sonlu dizilerinin ailesi
$\tau \frown \beta$	: τ sonlu dizisine β sonlu dizisinin eklendiğini belirten simge
$\forall_n^\infty$	: Sonlu sayıda n dışında tüm n'ler için
$\mathcal{O}$	: Bir topolojik uzayın sayılabilir açık örtülerinin ailesi
$\blacksquare$	: Kanıtın bittiğini belirten simge

1 GİRİŞ

Köşegenleştirme yöntemi olarak da bilinen Seçme Prensipleri Teorisinin uzun bir tarihi geçmişi vardır. Georg Ferdinand Ludwing Philipp Cantor (1845-1918), 1874 yılında reel sayılar kümesinin sayılamaz olduğunu kanıtladıktan sonra kanıtta kullandığı ünlü köşegenleştirme yöntemi, aşağıda verilen şekilde, matematikte yeni araştırmalar ortaya koymuştur.

> "Bir türe ait matematiksel nesnelerin $(A_n : n \in \omega)$ dizisi için, belirli bir kurala göre her A_n'den bazı elemanlar seçildiğinde, seçilen elemanların aynı veya farklı türde bir matematiksel nesne oluşturması."

Genel olarak, bu yöntemi kullanan matematik dalına *Seçme Prensipleri Teorisi* denir.

Aşağıda verilen üç temel seçme yönteminin tanımları ve notasyonları 1996 yılında Marion Scheepers tarafından [8]'de verilmiştir.

Bir X topolojik uzayının sayılabilir açık örtülerinin ailesi $\mathcal{O}$ ile gösterilsin. $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$'nun boştan farklı iki alt kümesi olmak üzere;

a) $\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

$\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçerek, $\mathcal{B}$'de bir $\{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ elemanı elde etmektir.

b) $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

$\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir sonlu $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ kümesi seçerek, $\mathcal{B}$'de bir $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ elemanı elde etmektir.

c) $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

$\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir sonlu $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ kümesi seçerek, $\mathcal{B}$'de bir $\{\cup\mathcal{V}_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ elemanı elde etmek ya da $\exists n \in \omega$ için $\cup\mathcal{V}_n = X$ olmasıdır.

Şimdi bu seçme yöntemlerinin tarihi geçmişleri ve çıkış noktalarını anlatalım.

$\mathcal{S}_1$ Yöntemi

Félix Edouard Justin Émile Borel (1871-1956), 1919 yılında metrik uzaylar için aşağıdaki tanımı vermiştir.

(X, d) metrik uzayında pozitif reel sayılardan oluşan keyfi $(\epsilon_n : n \in \omega)$ dizisi verildiğinde, $\forall n \in \omega$ için $\text{Çap}_d(U_n) < \epsilon_n$ olacak şekilde X'in bir $\{U_n : n \in \omega\}$ açık örtüsü varsa, X'e *kuvvetli ölçümü sıfır* denir.

Fritz Rothberger (1902-2000), 1938 yılında Rothberger özelliği olarak bilinen yeni bir örtü özelliği tanımladı.

X topolojik uzayının açık örtülerinden oluşan keyfi $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verildiğinde $\forall n \in \omega$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçerek X'in bir $\{U_n : n \in \omega\}$ açık örtüsünün elde edilmesi.[1] (Scheepers'ın notasyonuyla $\mathcal{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$)

Rothberger [1]'de bir metrik uzay Rothberger özelliğine sahipse kuvvetli ölçümü sıfır olduğunu göstermiştir.

$\mathcal{S}_{fin}$ Yöntemi

Karl Menger (1902-1985), 1924 yılında metrik uzaylar için yeni bir kavram olan *Menger taban özelliğini* şu şekilde vermiştir.

(X, d) metrik uzayının her $\mathcal{B}$ tabanı için, $\mathcal{B}$'de bir $(B_n : n \in \omega)$ dizisi vardır ki $\{B_n : n \in \omega\}$, X'in bir açık örtüsü olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \text{Çap}_d(B_n) = 0$'dır.

Witold Hurewicz (1904-1956), 1925 yılında aşağıdaki teoremi kanıtladı.

(X, d) metrik uzayı Menger taban özelliğine sahiptir $\Leftrightarrow$ X'in açık örtülerinin keyfi $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir sonlu $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ kümesi seçerek X'in $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$ şeklinde bir açık örtüsü elde edilebilir.

Böylece, bu teoreme göre "Menger taban özelliği" ile *Menger özelliği* olarak bilinen $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ birbirine denktir.

$\mathcal{U}_{fin}$ Yöntemi

Hurewicz kendi adı ile bilinen *Hurewicz özelliğini* şu şekilde vermiştir.

X topolojik uzayının açık örtülerinin her $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisine karşılık

1. $\forall n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$

2. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m \geq n} (\cup \mathcal{V}_m)$

koşullarını sağlayan bir $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ dizisi vardır. Tanımdan kolayca görüldüğü gibi **2** koşulu "$(\forall x \in X), (\forall_n^\infty, x \in \cup\mathcal{V}_n)$" ifadesiyle aynıdır.

Hurewicz özelliği Scheepers'ın notasyonuyla $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O}, \Gamma)$'nın başka bir formuna denktir.

2 ÖNBİLGİLER ve TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ilerleyen bölümlerde kullanılacak olan, genel topolojide sık sık rastladığımız tanımlara yer verilecektir. Kaynak olarak [2], [5], [13], ve [14] kullanılmıştır.

Anlaşma: Bu çalışmada örtü dendiğinde, aşikar olmayan sayılabilir bir açık örtü ifade edilir.

Tanım 2.0.1 X bir küme ve $A \subset X$ olsun. Eğer bir $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ ailesi için

$$A \subset \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$$

sağlanıyorsa, bu $\mathcal{U}$ ailesine A alt kümesinin bir *örtüsü* denir.

Tanım 2.0.2 $\mathcal{U}, X$'in bir örtüsü olsun. Eğer

$$(\forall U \in \mathcal{U}), U \subsetneq X$$

sağlanıyorsa, $\mathcal{U}$'ya X'in *aşikar olmayan örtüsü* denir.

Tanım 2.0.3 $\mathcal{U}$, X kümesinin bir örtüsü olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $\mathcal{U} \backslash \{U\}$ ailesi X için bir örtü olmuyorsa, $\mathcal{U}$'ya X'in bir *indirgenemez örtüsü* denir.

Tanım 2.0.4 X bir topolojik uzay ve $\mathcal{U}, X$'in bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$'nun tüm elemanları bu uzayda açık ise $\mathcal{U}$'ya X uzayının bir *açık örtüsü* denir ve X'in açık örtülerinin ailesi $\mathcal{O}$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.5 $\mathcal{U}$, X topolojik uzayının bir açık örtüsü olsun. X'in k-elemanlı her alt kümesi için bu kümeyi kapsayan bir $U \in \mathcal{U}$ varsa, $\mathcal{U}$'ya X'in bir *k-örtüsü* denir.

Tanım 2.0.6 Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün sayılabilir bir alt örtüsü varsa, bu uzaya *Lindelöf uzay* denir.

Tanım 2.0.7 Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün bir sonlu alt örtüsü varsa, bu uzaya *kompakt uzay* denir.

Tanım 2.0.8 $\mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}$, X kümesinin iki örtüsü olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}$ için $U \subset V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ varsa, $\mathcal{U}$ örtüsüne $\mathcal{V}$'nin bir *incesi* denir ve $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ ile gösterilir.

Tanım 2.0.9 $\mathcal{U}$, X topolojik uzayının alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer X'in her noktasının $\mathcal{U}$'nun en çok sonlu sayıda elemanını kesen bir komşuluğu varsa, $\mathcal{U}$'ya *yerel sonlu aile* denir.

Tanım 2.0.10 Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün açık ve yerel sonlu bir incesi varsa, bu uzaya *parakompakt uzay* denir.

Tanım 2.0.11 $\mathcal{U}$, X topolojik uzayının alt kümelerinden oluşan bir aile olsun. Eğer X'in her noktası $\mathcal{U}$'da en çok sonlu sayıda küme içinde kalıyorsa, $\mathcal{U}$'ya *nokta sonlu aile* denir.

Tanım 2.0.12 Bir topolojik uzayın her açık örtüsünün açık ve nokta sonlu bir incesi varsa, bu uzaya *metakompakt uzay* denir.

Tanım 2.0.13 Bir topolojik uzay kompakt alt kümelerinin sayılabilir birleşimi şeklinde ifade edilebiliyorsa, bu uzaya *σ-kompakt uzay* denir. X σ-kompakt uzay, $\{K_i : i \in \omega\}$ ise X'in kompakt alt kümelerden oluşan bir örtüsü olsun. Kompakt kümelerin sonlu birleşimi de bir kompakt küme olduğundan her n için $\widetilde{K}_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i$'de kompaktır. O halde $\{\widetilde{K}_n : n \in \omega\}$, X σ-kompakt uzayının iç içe geçmiş kompakt alt kümelerden oluşan bir örtüsüdür. Ayrıca her kompakt uzay σ-kompaktır.

Tanım 2.0.14 X bir topolojik uzay, $A \subset X$ olsun. Eğer her $x \in A$ noktasının $A \cap N(x) = \{x\}$ olacak şekilde bir $N(x)$ komşuluğu varsa, A'ya bir *ayrık küme* denir.

Tanım 2.0.15 (X, τ) topolojik uzayında $N(x)$, $x \in X$'in bir açık komşuluğunu belirtmek üzere, her $\{N(x) : x \in X\}$ ailesi için $\bigcup\limits_{x \in D} N(x) = X$ olacak şekilde X'in kapalı ve ayrık bir D alt kümesi varsa, X'e bir *D-uzayı* denir.

Tanım 2.0.16 (Zorn Lemma) $\mathcal{S}$ boştan farklı bir kısmi sıralı küme olmak üzere, $\mathcal{S}$'in tam sıralı tüm alt kümelerinin bir üst sınırı varsa, $\mathcal{S}$'in bir büyükçe elemanı vardır.

3 ÖRTÜ SINIFLARI ve SEÇME YÖNTEMLERİ

Bu bölümde; Γ, Ω, Λ, $\mathcal{O}$ açık örtü sınıflarının özellikleri, aralarındaki ilişkiler verilecektir. Ayrıca $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$ $\mathcal{U}_{fin}$ klasik seçme yöntemleriyle elde edilen sınıflar arasındaki kapsamalar incelenecek ve bu kapsamalar şemalarla verilecektir. Tanım ve teoremler için [8], [9], [10] ve [17] nolu kaynaklar kullanılmıştır.

3.1 Γ, Ω, Λ, $\mathcal{O}$ Örtü Sınıfları ve Özellikleri

Tanım 3.1.1 X bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$'da X'in bir açık örtüsü olsun.

a) $\forall x \in X$ için $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ kümesi sonsuz oluyorsa, $\mathcal{U}$'ya X'in bir *geniş örtüsü* denir ve X'in geniş örtülerinin ailesi Λ ile gösterilir.

b) X'in sonlu her alt kümesi için bu kümeyi kapsayacak şekilde $\mathcal{U}$'nun en az bir elemanı varsa, $\mathcal{U}$'ya X'in bir *ω-örtüsü* denir ve X'in ω-örtülerinin ailesi Ω ile gösterilir.

c) $\mathcal{U}$ sonsuz elemanlı olmak üzere $\forall x \in X$ için $\{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ kümesi sonlu oluyorsa, $\mathcal{U}$'ya X'in bir *γ-örtüsü* denir ve X'in γ-örtülerinin ailesi Γ ile gösterilir.

Teorem 3.1.2 Bir X topolojik uzayının Γ, Ω, Λ ve $\mathcal{O}$ örtü aileleri arasında

$$\Gamma \subset \Omega \subset \Lambda \subset \mathcal{O}$$

kapsamaları vardır.

Kanıt: $\mathbf{\Gamma \subset \Omega}$:

$\mathcal{U}$, X'in bir γ-örtüsü olsun. Kabul edelim ki $\mathcal{U}$, X'in bir ω-örtüsü olmasın. Bu durumda $\forall U \in \mathcal{U}$ için $S \nsubseteq U$ olacak şekilde X'in bir S sonlu alt kümesi vardır. Diğer bir deyişle $\forall U \in \mathcal{U}$ için $\exists x \in S$ vardır ki $x \notin U$'dur. Burada $\mathcal{U}$'nun bir sonsuz küme S'in ise bir sonlu küme olduğu dikkate alınırsa, $\exists x \in S$ için $\{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ kümesinin sonsuz olduğu elde edilir. Bu ise $\mathcal{U}$'nun bir γ-örtü olmasıyla çeliştiğinden $\mathcal{U}$, X'in bir ω-örtüsüdür.

$\mathbf{\Omega \subset \Lambda}$:

$\mathcal{U}$, X'in bir ω-örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U}$, X için bir geniş örtü değilse $\exists x \in X$ için $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ kümesi sonludur. Öyleyse $\mathcal{U}_x = \{U_i : i = 1, 2, 3, \ldots, n\}$ şeklinde ifade edilebilir. Diğer taraftan çalıştığımız örtüler aşikar olmadığından $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ için $\exists x_i \in X$ vardır ki $x_i \notin U_i$'dir. Bu durumda X'in

$$S = \{x_i : i = 1, 2, 3, \ldots, n\} \cup \{x\}$$

sonlu alt kümesi için $S \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ olmadığından $\mathcal{U}$'nun X için bir ω-örtü olmasıyla çelişiriz. O halde $\mathcal{U}, X$'in bir geniş örtüsüdür.

$\mathbf{\Lambda \subset \mathcal{O}}$ **:**

tanımdan açıktır. ■

Önerme 3.1.3 $\mathcal{U}, X$ topolojik uzayının bir ω-örtüsü ise, $\mathcal{U}$'nun sonlu sayıda sınıftan oluşan her parçalanışında, en az bir sınıf yine X için bir ω-örtüdür.

Kanıt: $\mathcal{U}$'nun sonlu sayıda sınıftan oluşan bir parçalanışı $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ olsun. Bu sınıflardan en az birinin X için bir ω-örtü olduğunu görelim. Eğer $\mathcal{U}_i$'lerden hiçbiri X için bir ω-örtü değilse, $i = 1, 2, \ldots, n$ için $\exists S_i \subset X$ sonlu alt kümesi vardır ki $\forall U \in \mathcal{U}_i, S_i \nsubseteq U$'dur. Bu durumda X'in $S = \bigcup_{i=1}^{n} S_i$ sonlu alt kümesi için $\forall U \in \mathcal{U}, S \nsubseteq U$, olacağından $\mathcal{U}$'nun X için bir ω-örtü olmasıyla çelişki elde ederiz. O halde $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_n$ sınıflarından en az biri X'in bir ω-örtüsüdür. ■

Önerme 3.1.4 $\mathcal{U}, X$ topolojik uzayının bir γ-örtüsü ise, $\mathcal{U}$'nun her sonsuz alt kümesi de X için bir γ-örtüdür.

Kanıt: $\mathcal{V}$, $\mathcal{U}$'nun sonsuz bir alt kümesi olsun. Eğer $x \in X$ için $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \notin V\}$ kümesinin sonlu olduğunu gösterirsek $\mathcal{V}, X$ için bir γ-örtü olur. $\mathcal{U}, X$'in bir γ-örtüsü olduğundan $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ kümesi sonludur. Diğer taraftan $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ olduğundan $\mathcal{V}_x \subset \mathcal{U}_x$'dir. O halde $\mathcal{V}_x$ kümesi sonlu olup $\mathcal{V}, X$ için bir γ-örtüdür. ■

Önerme 3.1.5 X topolojik uzayının bir ω-örtüsünden sonlu sayıda eleman çıkarmakla elde edeceğimiz aile, X'in yine bir ω-örtüsüdür.

Kanıt: $\mathcal{U} = \{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}, X$'in bir ω-örtüsü olsun. Bu durumda $i = 1, 2, \ldots, k$ için $n_i \in \omega$ olmak üzere

$$\mathcal{V} = \{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\} \backslash \{U_{n_i} : i = 1, 2, \ldots, k\}$$

ailesinin de X'in bir ω-örtüsü olduğunu görelim. Aksine $\mathcal{V}, X$ için bir ω-örtü değilse, $\forall V \in \mathcal{V}$ için $S \nsubseteq V$ olacak şekilde X'in sonlu bir S alt kümesi vardır. Diğer taraftan $i = 1, 2, \ldots, k$ için $U_{n_i} \subsetneq X$ olduğundan $\exists x_i \in X \backslash U_{n_i}$ vardır. Böylece X'in

$$S_x = S \cup \{x_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$$

sonlu alt kümesi için $S_x \nsubseteq U_n, (\forall n \in \omega)$ olacağından $\mathcal{U}$'nun X için bir ω-örtü olmasıyla çelişki elde edilir. O halde $\mathcal{V}$ de X'in bir ω-örtüsüdür. ■

3.2 $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$, $\mathcal{U}_{fin}$ Seçme Yöntemleri ve Aralarındaki Bağıntılar

Tanım 3.2.1 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$'nun boştan farklı iki alt kümesi ve Π'de $\mathcal{A}$'daki örtülerin $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden $\mathcal{B}$'de bir örtü elde etmeye yönelik bir kural olsun. Eğer X topolojik uzayının, $\mathcal{A}$'daki örtülerinin her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden Π yöntemine göre $\mathcal{B}$'de bir örtü elde edilebiliyorsa, X uzayı $\Pi(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sınıfına aittir denir.

Π yöntemi için birçok örnek verilebilir, ama biz sadece aşağıdaki üç yöntem üzerinde duracağız.

a) $\mathcal{S}_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

> $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçerek, $\mathcal{B}$'de bir $\{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ elemanı elde etmektir.

b) $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

> $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir sonlu $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ kümesi seçerek, $\mathcal{B}$'de bir $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n$ elemanı elde etmektir.

c) $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ yöntemi:

> $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir sonlu $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ kümesi seçerek, $\mathcal{B}$'de bir $\{\cup \mathcal{V}_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ elemanı elde etmek ya da $\exists n \in \omega$ için $\cup \mathcal{V}_n = X$ olmasıdır.

Π yöntemi ikinci değişkene göre monoton iken, birinci değişkene göre anti-monotondur. Yani $\mathcal{O}$'nun boştan farklı $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ve $\mathcal{C}$ alt kümeleri arasında $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ kapsaması varsa Π yöntemine göre belirlenen sınıflar arasında da

$$\Pi(\mathcal{C}, \mathcal{A}) \subset \Pi(\mathcal{C}, \mathcal{B})$$

ve

$$\Pi(\mathcal{B},\mathcal{C}) \subset \Pi(\mathcal{A},\mathcal{C})$$

kapsamaları vardır. Çünkü, ilk kapsama için bir uzayın $\mathcal{C}$'deki örtülerinin her sayılabilir sonsuz dizisinden Π yöntemine göre A'da bir örtü elde edilmişse, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ kapsamasına göre, $\mathcal{B}$'de de bir örtü elde edilmiştir. Diğer kapsama için ise, $\mathcal{B}$'deki örtülerin her sayılabilir sonsuz dizisinden Π yöntemine göre $\mathcal{C}$'de bir örtü elde edilmişse, $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ kapsamasından, $\mathcal{A}$'daki örtülerin her sayılabilir sonsuz dizisi de ele alınmıştır.

İlerleyen bölümlerde bu kapsamalar özellikle şemalar üzerinde oklarla aşağıdaki gibi gösterilecektir.

$$\Pi(\mathcal{C},\mathcal{A}) \longrightarrow \Pi(\mathcal{C},\mathcal{B})$$

ve

$$\Pi(\mathcal{B},\mathcal{C}) \longrightarrow \Pi(\mathcal{A},\mathcal{C})$$

O halde $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ise, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ kümelerinden Π yöntemine göre elde edilen sınıflar arasında aşağıdaki şemada belirtilen bağıntılar vardır.

$$\begin{tikzcd}
\Pi(\mathcal{A},\mathcal{A}) \arrow[r] & \Pi(\mathcal{A},\mathcal{B}) \\
\Pi(\mathcal{B},\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[u] & \Pi(\mathcal{B},\mathcal{B}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Tanım 3.2.2 Γ, Ω, Λ ve $\mathcal{O}$ örtü sınıflarından oluşan ikililere, $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_{fin}$ ve $\mathcal{U}_{fin}$ yöntemleri uygulanarak elde edilen özelliklere *klasik seçme prensipleri* denir.

Örtü aileleri arasındaki $\Gamma \subset \Omega \subset \Lambda \subset \mathcal{O}$ kapsamalarına göre, $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_{fin}$ yöntemlerinden elde edilen sınıflar arasında aşağıdaki şemalarda belirtilen ilişkiler vardır.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_1(\Gamma,\Gamma) \arrow[r] & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Omega) \arrow[r] & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Lambda) \arrow[r] & \mathcal{S}_1(\Gamma,\mathcal{O}) \\
\mathcal{S}_1(\Omega,\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\Omega,\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\Omega,\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[u] \\
\mathcal{S}_1(\Lambda,\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\Lambda,\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[u] \\
\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Şema 1 : $\mathcal{S}_1$ yönteminin temel şeması

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[r] & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[r] & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[r] & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \\
\mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[u] \\
\mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[u] \\
\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Şema 2 : $\mathcal{S}_{fin}$ yönteminin temel şeması

Teorem 3.2.3 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$, $\mathcal{O}$'nun boştan farklı alt kümeleri olmak üzere $\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ ve $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ sınıfları arasında

$$\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$$

kapsaması vardır.

Kanıt: X topolojik uzayı $\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ sınıfına ait olsun. O halde $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisinden, $\forall n \in \omega$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ seçerek, $\mathcal{B}$'de bir $\{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ elemanı elde edilebilir. Öyleyse $\forall n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ sonlu alt kümesini $\mathcal{V}_n = \{U_n\}$ olarak seçtiğimizde $\mathcal{B}$'de bir

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{V}_n = \{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$$

elemanı elde edileceğinden, X uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ sınıfına ait olur.■

$\mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Omega)$ ve $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\Lambda)$ sınıflarına ait aşikar olmayan uzaylar olmadığından Şema 2'den

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Gamma) \arrow[r] & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Omega) & \\
\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\Lambda)
\end{tikzcd}$$

alt şemasını ihmal edebiliriz. Diğer taraftan Teorem 3.2.3'e göre $\mathcal{S}_1(\Lambda,\Omega)$ ve $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\Lambda)$ sınıflarına da ait aşikar olmayan uzaylar yoktur. Öyleyse Şema 1'den de

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_1(\Lambda,\Gamma) \arrow[r] & \mathcal{S}_1(\Lambda,\Omega) & \\
\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\Lambda)
\end{tikzcd}
$$

alt şemasını ihmal edebiliriz. Elde ettiğimiz şemaları Önerme 3.2.3'de dikkate aldığımızda aşağıdaki şemayı elde ederiz.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[rr] & & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[rr] & & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[rr] & & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \\
\mathcal{S}_1(\Gamma,\Gamma) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Omega) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Lambda) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\mathcal{O}) \arrow[ur] & \\
 & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Gamma) \arrow[rr] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Omega) \arrow[rr] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Lambda) \arrow[rr] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[uu] \\
\mathcal{S}_1(\Omega,\Gamma) \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_1(\Omega,\Omega) \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_1(\Omega,\Lambda) \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_1(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[ur] \arrow[uu] & \\
 & & & & & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Lambda) \arrow[rr] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[uu] \\
 & & & & \mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda) \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_1(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[ur] \arrow[uu] & \\
 & & & & & & & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O}) \arrow[uu] \\
 & & & & & & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O}) \arrow[ur] \arrow[uu] &
\end{tikzcd}
$$

Şema 3: $\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_{fin}$ yöntemlerinden elde edilen sınıflar

Şimdi ise $\mathcal{S}_{fin}$ ve $\mathcal{U}_{fin}$ yöntemleri arasındaki ilişkiyi görelim.

Teorem 3.2.4 $\mathcal{A} \in \{\Gamma, \Omega, \Lambda, \mathcal{O}\}$ olmak üzere, $\mathcal{S}_{fin}$ ile $\mathcal{U}_{fin}$ yöntemleri arasında

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{A})$$

ilişkisi vardır.

Kanıt:

a)

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \longrightarrow \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$$

kapsamasını görelim.

X topolojik uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$ sınıfına ait olsun ve X'in γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n = 1,2,3,\ldots)$ dizisi verilsin. Eğer $\mathcal{U}_n$, γ-örtülerinden en az birinin sonlu bir alt örtüsü varsa, bu γ-örtüden seçeceğimiz sonlu alt kümeyi bahsi geçen alt örtü olarak seçtiğimizde X uzayı $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$ sınıfına ait olur. Öyleyse $\mathcal{U}_n$, γ-örtülerinin sonlu alt örtüleri olmasın. X, $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$ sınıfına ait olduğundan $\forall n \in \omega$ için bir $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ sonlu alt kümesi vardır ki $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$, X için bir γ-örtüdür. Fakat $\{\cup\mathcal{V}_n : n = 1,2,3,\ldots\}$ ailesinin X için bir γ-örtü olduğu söylenemez.(Çünkü bu aile sonlu olabilir, bu durumda bir γ-örtü olmaz.)

Şimdi $\mathcal{U}_n$ 'lerin $\mathcal{W}_n$ sonlu alt kümelerini şu şekilde seçelim.

$$(\forall n \in \omega)\mathcal{V}_n \subset \mathcal{W}_n, (\forall m < n) \cup \mathcal{W}_m \neq \cup\mathcal{W}_n$$

Böyle bir seçim yapılabilir. Çünkü $\mathcal{U}_m$'lerin sonlu alt örtüleri olmadığından $m < n$ için $\cup\mathcal{W}_m \neq X$'dir. O halde $\forall m < n$ için bir $x_m \in X \setminus \cup \mathcal{W}_m$ vardır. Diğer taraftan $x_m \in \cup\,\mathcal{U}_n = X$ olduğundan $\forall m < n$ için $x_m \in U_{(n,m)}$ olacak şekilde bir $U_{(n,m)} \in \mathcal{U}_n$ vardır. Öyleyse

$$\mathcal{W}_n = \cup\{U_{(n,m)} : m < n\} \cup \mathcal{V}_n$$

seçimi istenilen sonucu verir.

Bu durumda

$$\mathcal{W} = \{\cup\mathcal{W}_n : n = 1,2,3,\ldots\}$$

ailesinin X için bir γ-örtü olduğunu gösterirsek $X, \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$ sınıfına ait olur. $\mathcal{W}_n$'lerin seçiminden $\cup\mathcal{W}_n$'ler birbirinden farklı olduğundan $\mathcal{W}$ sonsuzdur. $\mathcal{W}$'nin elemanlarının X'in has açık kümeleri olduğu aşikardır. Diğer taraftan $\mathcal{V}$ bir γ-örtü olduğundan, $\forall x \in X$ için $\mathcal{V}_x = \{n \in \omega : x \notin \cup\mathcal{V}_n\}$ kümesi sonludur. Bu durumda $\mathcal{W}_x = \{n \in \omega : x \notin \cup\mathcal{W}_n\}$ kümesi için $\mathcal{W}_x \subset \mathcal{V}_x$ olduğundan $\mathcal{W}_x$ kümesi sonludur. Öte yandan $\{\cup\mathcal{W}_n : x \notin \cup\mathcal{W}_n\}$ kümesi ile $\mathcal{W}_x$'in eleman sayıları aynı olduğundan $\mathcal{W}$, X'in bir γ-örtüsüdür.

b)

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega) \longrightarrow \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Omega)$$

olduğunu görelim.

X topolojik uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega)$ sınıfına ait olsun ve X'in γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n = 1,2,3,\ldots)$ dizisi verilsin. Bu örtülerden en az birinin sonlu bir alt örtüsü varsa ispat yukarıdaki gibi açıktır. Öyleyse $\mathcal{U}_n$, γ-örtülerinin sonlu alt örtüleri olmasın. $X, \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega)$

sınıfına ait olduğundan $\forall n \in \omega$ için bir $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ sonlu alt kümesi vardır ki $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$, X'in bir ω-örtüsüdür.

Bu durumda $\mathcal{V} = \{\cup\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$'nin de X için bir ω-örtü olduğunu görelim. Öyleyse $S \subset X$ bir sonlu küme olsun. $\mathcal{U}, X$ için bir ω-örtü olduğundan en az bir $U \in \mathcal{U}$ için $S \subset U$'dur. Diğer taraftan $\exists n \in \omega$ için $U \in \mathcal{V}_n$ olduğundan $S \subset U \subset \cup\mathcal{V}_n$'dir. Böylece $\cup\mathcal{V}_n \in \mathcal{V}$ için $S \subset \cup\mathcal{V}_n$ elde edildiğinden $\mathcal{V}, X$'in bir ω-örtüsüdür, dolayısıyla da X, $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Omega)$ sınıfına aittir.

c)

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Lambda)$$

olduğunu görelim.

X topolojik uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda)$ sınıfına ait olsun. X'in γ-örtülerinden oluşan bir $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \dots)$ dizisi verilsin ve bu örtülerin sonlu alt örtüleri olmasın. $X, \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda)$ sınıfına ait olduğundan $\forall n \in \omega$ için bir $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ sonlu alt kümesi vardır ki $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$, X'in bir geniş örtüsüdür. $\{\cup\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ sonlu olabileceği için bir geniş örtü olmayabilir.

Kanıt a)'da ki gibi $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{U}_n$ sonlu alt kümelerini

$$(\forall n \in \omega)\mathcal{V}_n \subset \mathcal{W}_n, (\forall m < n) \cup \mathcal{W}_m \neq \cup\mathcal{W}_n$$

şeklinde seçelim.

Şimdi ise

$$\mathcal{V} = \{\cup\mathcal{W}_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$$

ailesinin X için bir geniş örtü olduğunu görelim. $\mathcal{V}$, elemanları X 'in has açık alt kümeleri olan, sonsuz bir kümedir. $\mathcal{U}$ bir geniş örtü ve $\mathcal{V}_n$ kümeleri sonlu olduğundan $\{n \in \omega : x \in \cup\mathcal{V}_n\}$ kümesi sonsuzdur. Diğer taraftan her $n \in \omega$ için $\cup\mathcal{V}_n \subset \cup\mathcal{W}_n$ olduğundan $\{n \in \omega : x \in \cup\mathcal{W}_n\}$'de sonsuzdur. Son olarak $\cup\mathcal{W}_n$'lerin birbirinden farklı olduğunu göz önüne alırsak $\{\cup\mathcal{W}_n \in \mathcal{V} : x \in \cup\mathcal{W}_n\}$'in sonsuz olduğunu elde ederiz. Böylece $\mathcal{V}$, X için bir geniş örtü olup $X, \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Lambda)$ sınıfındadır.

d)

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$$

olduğunu görelim.

X topolojik uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$ sınıfına ait olsun. X'in γ-örtülerinden oluşan bir $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \dots)$ dizisi verilsin, genelliği bozmadan $\mathcal{U}_n$, γ-örtülerinin sonlu alt örtüleri olmadığını kabul edelim. $X, \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$ sınıfına ait olduğundan $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$, X'in bir açık örtüsü olacak şekilde $\forall n \in \omega$ için bir $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ sonlu kümesi vardır. Bu durumda $\{\cup\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$ kümesi de X'in bir açık örtüsü olacağından $X, \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$ sınıfındandır. ■

Böylece Teorem 3.2.4'e göre,

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[r] & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[r] & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[r] & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \\
\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Şema 4: Teorem 3.2.4'e ait şema

yukarıdaki şemayı elde ederiz. Şema 4'ün ikinci satırı ile Şema 3'ün ilk satırı aynı olduğundan bu iki şemayı birleştirdiğimizde aşağıdaki şemayı elde ederiz.

$$
\begin{tikzcd}
& & & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[rrr] & & & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[rrr] & & & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[rr] & & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \\
& \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[rrr] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[rrr] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[rrr] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \arrow[ur] & \\
\mathcal{S}_1(\Gamma,\Gamma) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Omega) \arrow[rrr] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Lambda) \arrow[rrr] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\mathcal{O}) \arrow[urr] & & & \\
& \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Gamma) \arrow[rrr] \arrow[uu] & & & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Omega) \arrow[rrr] \arrow[uu] & & & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Lambda) \arrow[rrr] \arrow[uu] & & & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[uu] & \\
\mathcal{S}_1(\Omega,\Gamma) \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathcal{S}_1(\Omega,\Omega) \arrow[rrr] \arrow[uu] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_1(\Omega,\Lambda) \arrow[rrr] \arrow[uu] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_1(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[uu] \arrow[urr] & & & \\
& & & & & & & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Lambda) \arrow[rrr] \arrow[uu] & & & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[uu] & \\
& & & & & \mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda) \arrow[rrr] \arrow[uu] \arrow[urr] & & & \mathcal{S}_1(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[uu] \arrow[urr] & & & \\
& & & & & & & & & & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O}) \arrow[uu] & \\
& & & & & & & & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O}) \arrow[uu] \arrow[urr] & & &
\end{tikzcd}
$$

Şema 5: Eşitlikleri olmayan temel şema

Teorem 3.2.5 $\mathcal{A}$, $\mathcal{O}$'nun boştan farklı bir alt kümesi olmak üzere

$$\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{A}) = \mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{A})$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt: $\mathcal{U}_{fin}$ yöntemi ilk değişkene göre anti-monoton olduğundan ve $\Gamma \subset \mathcal{O}$ kapsamasından, açıkça

$$\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{A}) \subset \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{A})$$

elde edilir.

Ters kapsamayı göstermek için X topolojik uzayı $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{A})$ sınıfında olsun ve X'in açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisi verilsin. Çalıştığımız örtüler sayılabilir olduğundan her $\mathcal{U}_n$ açık örtüsü $\{\mathcal{U}^n_m : m \in \omega\}$ şeklinde ifade edilsin. Eğer bu dizideki örtülerden en az birinin sonlu bir alt örtüsü varsa X'in $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{A})$ sınıfına ait olduğu açıktır. Öyleyse $\mathcal{U}_n$, açık örtülerinin sonlu alt örtüleri olmasın.

Her $n, k \in \omega$ için V^n_k açık kümelerini $\bigcup\limits_{m=1}^{k} U^n_m$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\forall n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \{V^n_k : k \in \omega\}$ kümelerinin X için bir γ-örtü olduğunu görelim.

$\mathcal{V}_n$ kümeleri sonsuzdur. Çünkü bir $\mathcal{V}_n$ kümesi sonlu ise, $\mathcal{V}_n = \{V^n_{k_1}, V^n_{k_2}, \ldots, V^n_{k_p}\}$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $k_{maks} = maks\{k_1, k_2, \ldots, k_p\}$ seçimi için $\cup\mathcal{V}_n = V^n_{k_{maks}}$ elde edilir. Diğer taraftan $\cup\mathcal{V}_n = \cup\,\mathcal{U}_n$ olduğundan ve $\mathcal{U}_n$, X'i örttüğünden $V^n_{k_{maks}} = X$ olur. Bu ise $\mathcal{U}_n$'in sonlu bir alt örtüye sahip olmaması ile çelişir. O halde $\mathcal{V}_n$, X'in sonsuz bir açık örtüsüdür.

Son olarakta $x \in X$ için $\{V^n_k \in \mathcal{V}_n : x \notin V^n_k\}$ kümesinin sonlu olduğunu görelim. $\mathcal{U}_n$, X'i örttüğünden $x \in U^n_{m_x}$ olacak şekilde bir $m_x \in \omega$ vardır. Öyleyse $\forall k \geq m_x$ için $x \in U^n_{m_x} \subset V^n_k$ olur. Dolayısıyla $\mathcal{V}_n$'de ancak sonlu sayıda eleman x'i içermez.

Böylece X'in γ-örtülerinin $(\mathcal{V}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisini elde ederiz. $\mathcal{U}_n$ açık örtülerinin sonlu alt örtüleri olmadığından $\mathcal{V}_n$, γ-örtülerinin de sonlu alt örtüleri yoktur. Öyleyse X'in $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{A})$ sınıfına ait olduğunu bu dizide göz önüne alırsak, $\mathcal{V} = \{\cup\mathcal{W}_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesi X'in $\mathcal{A}$ sınıfından bir örtüsü olacak şekilde $\forall n \in \omega$ için bir $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$ sonlu kümesi vardır. $f : \omega \to \omega$ bir fonksiyon olmak üzere $\mathcal{W}_n$ kümeleri $\{V^n_{k_{n_1}}, V^n_{k_{n_2}}, \ldots, V^n_{k_{n_{f(n)}}}\}$ şeklinde ifade edilsin. Öyleyse $\forall n \in \omega$ için $k_{n_{maks}} = maks$ $\{k_{n_1}, k_{n_2}, \ldots, k_{n_{f(n)}}\}$ olmak üzere $\cup\mathcal{W}_n = V^n_{k_{n_{maks}}}$ şeklindedir. O halde her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$'in $\mathcal{S}_n$ sonlu alt kümesini $\{U^n_1, U^n_2, \ldots, U^n_{k_{n_{maks}}}\}$ olarak seçtiğimizde $\cup\mathcal{S}_n = \cup\mathcal{W}_n$

elde edilir. Böylece $\{\cup\mathcal{S}_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailesi $\mathcal{V}$'ye eşit olacağından, yani X'in $\mathcal{A}$ sınıfından bir örtüsü olacağından X, $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{A})$ sınıfına aittir. ∎

Teorem 3.2.5'e göre, $\mathcal{U}_{fin}$ yöntemi ile ede edilen sınıflar için aşağıdaki şemayı elde ederiz. Bu şemada sütunlardaki sınıflar birbirine eşittir. Yani şemadaki satırlar birbirlerine denktir.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{U}_{fin}(\Omega,\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Omega,\Omega) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Omega,\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{U}_{fin}(\Lambda,\Gamma) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Lambda,\Omega) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Lambda,\Lambda) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O},\Gamma) \arrow[r] & \mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O},\Omega) \arrow[r] & \mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O},\Lambda) \arrow[r] & \mathcal{U}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})
\end{tikzcd}$$

Şema 6 : $\mathcal{U}_{fin}$ yönteminin temel şeması

Böylece Şema 6'nın herhangi bir satırı tümünü ifade eder. Diğer taraftan dikkat edecek olursak Şema 5'in ilk satırı ile Şema 6'nın ilk satırı aynıdır. Sonuç olarak klasik seçme prensiplerinde kullanılan üç temel yöntemle elde edilen tüm sınıfları ve bu sınıflar arasındaki bağıntıları Şema 5 ile ifade etmiş olduk. Bir sonraki bölümde Şema 5'de yer alan sınıflar arasındaki eşitlikler incelenecektir.

4 EŞİTLİKLER ve ÖZELLİKLERİN KORUNMASI

4.1 Eşitlikler

Bu bölümde Şema 5'de yer alan sınıflar arasındaki eşitlikler incelenecektir. Kaynak olarak [8] ve [9] kullanılmıştır.

İkili Bağıntılar

Not:$\mathcal{O}$'dan farklı olarak $\mathcal{O}_T$ sembolü bir topolojik uzayın keyfi açık örtülerinin ailesini belirtir.

$\mathbf{R}$, $\mathcal{O}_T$ üzerinde bir ikili bağıntı, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}_T$'nun boştan farklı iki alt kümesi olsun. Bu durumda $\mathbf{R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sembolü ile $\mathcal{A}$'nın her A elemanı için $(B, A) \in \mathbf{R}$ olacak şekilde en az bir $B \in \mathcal{B}$ olduğunu belirtelim. Bu gösterimle topolojik uzayların özelliklerini belirtebiliriz.

Örneğin;

- **alt**, $\mathcal{O}_T$ üzerinde kapsama bağıntısı olsun. Yani,

  $$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}_T \text{ için } (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in \mathbf{alt} \Leftrightarrow \mathcal{U} \subset \mathcal{V}\text{'dir.}$$

  Bir uzayın sayılabilir açık örtülerinin ailesi $\mathcal{K}$ ile gösterildiğinde, X'in $\mathbf{alt}(\mathcal{O}_T, \mathcal{K})$ sınıfına ait olması ile X'in bir Lindelöf uzay olması denktir. Benzer şekilde bir uzayın sonlu açık örtülerinin ailesi Φ ile gösterilirse, X'in $\mathbf{alt}(\mathcal{O}_T, \Phi)$ sınıfına ait olması ile X'in bir kompakt uzay olması denktir.

- **inc**, $\mathcal{O}_T$ üzerinde incesi bağıntısı olsun. Yani,

  $$\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{O}_T \text{ için } (\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in \mathbf{inc} \Leftrightarrow \mathcal{U}, \mathcal{V}\text{'nin bir incesidir.}$$

  $yrl\Phi$ sembolü ise bir uzayın yerel sonlu açık örtülerinin ailesini belirtsin. Bu durumda X'in $\mathbf{inc}(\mathcal{O}_T, yrl\Phi)$'ye ait olması ile X'in bir parakompakt uzay olması denktir. Benzer şekilde $nok\Phi$ sembolü bir uzayın nokta sonlu açık örtülerinin ailesini belirtirse, X'in $\mathbf{inc}(\mathcal{O}_T, nok\Phi)$'ye ait olması ile X'in bir metakompakt uzay olması denktir.

Farklı Temsiller

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ ve $\mathbf{R}$, $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili bağıntı olsun. Eğer $\mathcal{A}$'nın elemanlarından oluşan her $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisi için, $\mathcal{B}$'nin elemanlarından oluşan bir $(\mathcal{V}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisi var ve

1. $\forall n$ için $(\mathcal{V}_n, \mathcal{U}_n) \in \mathbf{R}$

2. $n \neq m$ için $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$

koşulları sağlanıyorsa, $\mathcal{A}$ ailesi $\mathcal{B}$ tarafından *sayılabilir farklıca temsil edilebilir* denir. Bu tanım $\mathcal{O}$'nun alt kümelerinden oluşan aile üzerinde bir ikili bağıntı tanımlar ve bu bağıntı $\mathbf{SFT_R}$ ile gösterilir. $\mathbf{SFT_R}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sembolü $\mathcal{A}$'nın, $\mathcal{B}$ tarafından $\mathbf{R}$ bağıntısına göre sayılabilir farklıca temsil edilebileceği anlamına gelir.

Önerme 4.1.1 $\mathcal{U}$, X topolojik uzayının nokta sonlu bir örtüsü ise, $\mathcal{U}$'nun indirgenemez bir alt örtüsü vardır.

Kanıt: İspatı Zorn Lemma'yı kullanarak yapacağız.

$$\mathcal{F} = \{\mathcal{V} \subset \mathcal{U} : \mathcal{U} \backslash \mathcal{V},\ X \text{ için bir örtüdür}\}$$

kümesini tanımlayalım. Eğer $\mathcal{F} = \{\emptyset\}$ ise $\mathcal{U}$'nun indirgenemez olduğu açıktır. Öyleyse $\mathcal{F} \neq \{\emptyset\}$ olsun. $\mathcal{F}$'i üzerindeki kapsama bağıntısı ile birlikte bir kısmi sıralı küme olarak düşünelim. Zorn Lemma'yı kullanarak bu kümenin bir büyükçe öğesi olduğunu gösterelim.

Öyleyse $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{F}$'de bir zincir olsun. $\mathcal{W} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{V}_i \in \mathcal{F}$ olduğunu görelim. Aksine $\mathcal{W} \notin \mathcal{F}$ ise $\mathcal{U} \backslash \mathcal{W}$, X için bir örtü olmadığından $\exists x \in X$ vardır ki $x \notin \cup(\mathcal{U} \backslash \mathcal{W})$'dir. $\mathcal{U}$, X için nokta sonlu bir örtü olduğundan $\mathcal{U}$'da x'i içeren elemanlar sonlu sayıdadır. Bunlara $U_1, U_2, \ldots, U_n$ dersek $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ için $U_j \in \mathcal{W} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i$ olur. O halde $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ için $\exists i_j \in I$ vardır ki $U_j \in \mathcal{V}_{i_j}$'dir. Diğer taraftan $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$, $\mathcal{F}$'de bir zincir olduğundan $\exists i_0 \in I$ vardır ki $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ için $\mathcal{V}_{i_j} \subseteq \mathcal{V}_{i_0}$'dır. Bu durumda $\forall j = 1, 2, \ldots, n$ için $U_i \in \mathcal{V}_{i_0}$ olacağından $x \notin \cup(\mathcal{U} \backslash \mathcal{V}_{i_0})$ olur. Bu ise $\mathcal{V}_{i_0} \in \mathcal{F}$ olmasıyla çelişir. O halde $\mathcal{W} \in \mathcal{F}$'dir.

Böylece $\mathcal{W}$, $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ zincirinin bir üst sınırı olur. $\mathcal{F}$'de her zincirin bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemma'ya göre $\mathcal{F}$'nin bir büyükçe öğesi $\widetilde{\mathcal{V}}$ vardır. Bu durumda $\mathcal{U} \backslash \widetilde{\mathcal{V}}$, $\mathcal{U}$'nun indirgenemez bir alt örtüsüdür. ■

Teorem 4.1.2 Herhangi bir X topolojik uzayı $\mathbf{SFT_{alt}}(\Gamma, \Gamma)$ sınıfının bir elemanıdır.

Kanıt: İspatı Tümevarım Yöntemini kullanarak yapacağız.

X uzayının γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ sonlu ise $\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_1 \backslash \mathcal{U}$ ve $\mathcal{V}_2 = \mathcal{U}_2 \backslash \mathcal{U}$ için $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{U}_i$'nin sonsuz bir alt kümesidir. O halde Lemma 3.1.4'e göre $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{U}_i$'nin bir γ-alt örtüsüdür ve $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$'dir. Eğer $\mathcal{U}$ sonsuz ise $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ şeklinde ifade edildiğinde $\mathcal{V}_1 = \{U_{2n-1} : n \in \omega\}$ ve $\mathcal{V}_2 = \{U_{2n} : n \in \omega\}$ seçimi için, yine $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ ve $\mathcal{V}_i$, $\mathcal{U}_i$'in bir γ-alt örtüsüdür.

Kabul edelim ki her $n = 1, 2, \ldots, k$ için

1. $\mathcal{V}_n$, $\mathcal{U}_n$'in bir γ-alt örtüsü, ve

2. $n, m \in \{1, 2, \ldots, k\}$ ve $n \neq m$ için $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$

olsun.

Eğer her $n = 1, 2, \ldots, k$ için $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{U}_{k+1}$ sonlu ise $\mathcal{W} = \bigcup_{n=1}^{k} (\mathcal{V}_n \cap \mathcal{U}_{k+1})$ sonlu birleşimi de sonlu olur. O halde $\mathcal{V}_{k+1} = \mathcal{U}_{k+1} \backslash \mathcal{W}$ seçimi için $\mathcal{V}_{k+1}$, $\mathcal{U}_{k+1}$'in sonsuz bir alt kümesi olduğu için $\mathcal{V}_{k+1}$ de X'in bir γ-örtüsüdür. Üstelik her $n = 1, 2, \ldots, k$ için $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_{k+1} = \emptyset$'dir. Eğer $\exists n \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için $\mathcal{C} = \mathcal{V}_n \cap \mathcal{U}_{k+1}$ kümesi sonsuz ise $\mathcal{C}$, $\mathcal{V}_n$ ve $\mathcal{U}_{k+1}$, γ-örtülerinin sonsuz alt kümesi olduğundan, aynı zamanda $\mathcal{V}_n$ ve $\mathcal{U}_{k+1}$'in γ-alt örtüsüdür. $\mathcal{C} = \{\mathcal{C}_n : n \in \omega\}$ şeklinde ifade edildiğinde $\mathcal{C}_1 = \{\mathcal{C}_{2n-1} : n \in \omega\}$ ve $\mathcal{C}_2 = \{\mathcal{C}_{2n} : n \in \omega\}$ olsun. Açıkça $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{V}_n$'in ve $\mathcal{C}_2$'de $\mathcal{U}_{k+1}$'in γ-alt örtüsüdür. Üstelik $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \subset \mathcal{V}_n$ olduğundan $m \in \{1, 2, \ldots, k\} \backslash \{n\}$ için $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$ ve $\mathcal{C}_2 \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$'dir. Şimdi $i \in \{1, 2, \ldots, k\} \backslash \{n\}$ için $\widetilde{\mathcal{V}}_i = \mathcal{V}_i$ ve $\widetilde{\mathcal{V}}_n = \mathcal{C}_1$ ve $\widetilde{\mathcal{V}}_{k+1} = \mathcal{C}_2$ olarak seçilirse $\forall n, m = 1, 2, \ldots, k+1$ için $\widetilde{\mathcal{V}}_n$, $\mathcal{U}_n$'in bir γ-alt örtüsü ve $n \neq m$ için $\widetilde{\mathcal{V}}_n \cap \widetilde{\mathcal{V}}_m = \emptyset$ elde edilir. Böylece tümevarım yöntemiyle $\mathbf{SFT_{alt}}(\Gamma, \Gamma)$ sınıfının koşullarını sağlayacak X uzayının γ-örtülerinin $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ dizisi elde edilir. ∎

Sonuç 4.1.3 $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda) = \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$

Kanıt:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Lambda) & \longrightarrow & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda) & \longrightarrow & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O}) \end{array}$$

Şema 5'in yukarıdaki alt şemasına göre

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$$

gerektirmesi(kapsaması) açıktır. O halde

$$\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda)$$

olduğunu görelim. X topolojik uzayı $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$ sınıfından olsun. X'in γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Çalıştığımız uzaylar $\mathbf{SFT_{alt}}(\Gamma, \Gamma)$ sınıfından olduğundan, X'in γ-örtülerinin bir diğer $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ dizisi vardır ki;

1. $\forall n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, ve
2. $m \neq n$ için $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$'dir

$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ kümelerinin her biri sonsuz olmak üzere $\{Y_n : n \in \omega\}$ pozitif tam sayılar kümesinin bir parçalanışı olsun. Bu durumda $\forall n \in \omega$ için $(\mathcal{V}_m : m \in Y_n)$'de X'in γ-örtülerinin bir dizisi olur. Bu dizi için X'in $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \mathcal{O})$ sınıfına ait olduğunu dikkate alırsak

- ya $\exists m_0 \in Y_n$ için $\mathcal{F}_{m_0} \subset \mathcal{V}_{m_0}$ sonlu alt kümesi vardır ki $\cup\mathcal{F}_{m_0} = X$'dir.
- ya da $\forall m \in Y_n$ için bir $\mathcal{F}_m \in [\mathcal{V}_m]^{<\omega}$ vardır ki $\{\cup\mathcal{F}_m : m \in Y_n\}$ X'in bir açık örtüsüdür.

İlk durumda $m \in Y_n \backslash \{m_0\}$ için $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{V}_m$ herhangi sonlu bir küme seçildiğinde (boş kümede olabilir) $\{\cup\mathcal{F}_m : m \in Y_n\}$ bir açık örtü olur. O halde her iki durum için de $\{\cup\mathcal{F}_m : m \in Y_n\}$, X'in bir açık örtüsüdür. Öyleyse $X = \bigcup_{m \in Y_n} (\cup\mathcal{F}_m) = \cup(\bigcup_{m \in Y_n} \mathcal{F}_m)$ olacağından $\mathcal{W}_n = \bigcup_{m \in Y_n} \mathcal{F}_m$ olarak seçilirse $\mathcal{W}_n$, X'in bir açık örtüsüdür.

Bu yöntemle her $n \in \omega$ için $\mathcal{F}_n$ ve $\mathcal{W}_n$ kümelerini seçelim. $\mathcal{V}_n$, γ-örtüleri ikişer ayrık olduklarından onların sonlu alt kümeleri olan $\mathcal{F}_n$'ler de ikişer ayrıktır. Böylece $\mathcal{W}_n$ açık örtüleri de ikişer ayrıktır. İkişer ayrık açık örtülerin sonsuz birleşimi bir geniş örtü olacağından, $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{W}_n$, X'in bir geniş örtüsüdür. Diğer taraftan $\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \omega} \mathcal{F}_n$ ve her $n \in \omega$ için $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ olduğundan X, $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda)$ sınıfındandır. Sonuç olarak ispatta verilen şemadaki oklar çift yönlü olup bu dört sınıf birbirine eşittir. $\blacksquare$

Sonuç 4.1.4 $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Lambda) = \mathcal{S}_1(\Gamma, \mathcal{O})$

Kanıt:

$$\mathcal{S}_1(\Gamma, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{S}_1(\Gamma, \mathcal{O})$$

açıktır. Biz

$$\mathcal{S}_1(\Gamma, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{S}_1(\Gamma, \Lambda)$$

kapsamasını gösterelim. X'in γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Çalıştığımız uzaylar $\mathbf{SFT_{alt}}(\Gamma, \Gamma)$ sınıfından olduğundan, X'in γ-örtülerinden oluşan bir $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ dizisi vardır ki;

1. $\forall n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$, ve
2. $m \neq n$ için $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$'dir.

$Y_1, Y_2, Y_3, \ldots$ sonsuz kümeleri pozitif tam sayılar kümesinin bir parçalanışı olsun. O halde her $n \in \omega$ için $(\mathcal{V}_m : m \in Y_n)$, X'in γ-örtülerinin bir dizisidir. X, $\mathcal{S}_1(\Gamma, \mathcal{O})$ sınıfından olduğundan her $m \in Y_n$ için bir $U_m \in \mathcal{V}_m$ vardır ki $\mathcal{W}_n = \{U_m : m \in Y_n\}$, X'in bir açık örtüsüdür. Üstelik $\mathcal{V}_n$'ler ikişer ayrık olduklarından bu örtüler de ikişer ayrıktır. Öyleyse $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{W}_n = \{U_n : n \in \omega\}$ bir geniş örtü olacağından X, $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Lambda)$ sınıfındandır. ■

Teorem 4.1.5 $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma) = \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$

Kanıt: Teorem 3.2.3'e göre

$$\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$$

olduğunu biliyoruz. O halde ters kapsamayı, yani

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Gamma) \longrightarrow \mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$$

olduğunu görelim. $\mathcal{S}_{fin}$ yönteminin kuralına göre, her açık örtüden sonlu bir alt küme seçerken bazı örtülerden de hiç bir eleman seçilmeyebilir. Diğer taraftan $\mathcal{S}_1$ yönteminin kuralına göre her açık örtüden mutlaka bir eleman seçilmelidir. Ortaya çıkan bu zorluğu gidermek için aşağıdaki yöntemi uygulayacağız.

X toplojik uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$ sınıfına ait olsun ve X'in γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Bu dizideki her $\mathcal{U}_n$, γ-örtüsünü $\{U_m^n : m \in \omega\}$ şeklinde ifade edelim. Her $n, k \in \omega$ için

$$V_k^n = U_k^1 \cap U_k^2 \cap \ldots \cap U_k^n \text{ ve } \mathcal{V}_n = \{V_k^n : k \in \omega\}$$

olsun. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n$'in X için bir γ-örtü olduğunu görelim. $\mathcal{V}_n$'in elemanları açık kümelerinin sonlu arakesitleri olduğundan açıktır. Her $n \in \omega$ için $\mathcal{U}_n$, X'in bir γ-örtüsü olduğundan her $x \in X$ için $\{U_m^n \in \mathcal{U}_n : x \notin U_m^n\}$ kümesi sonludur. Öyleyse $m_n = maks\{m \in \omega : U_m^n \in \mathcal{U}_n, x \notin U_m^n\}$ dersek her $i = 1, 2, \ldots, n$ ve her $k > maks\{m_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$ için $x \in U_k^i$ olacağından $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_k^i = V_k^n$ olur. Böylece $x \in X$ belirli bir indisten sonra $\mathcal{V}_n$'in tüm elamanlarında vardır. $\ldots(\star)$ Diğer taraftan $\mathcal{V}_n$'ler sonlu olamaz. Eğer bir $\mathcal{V}_n$ ailesi sonlu ise $k_1 < k_2 < \ldots < k_l$ olmak üzere $\mathcal{V}_n = \{V_{k_1}^n, V_{k_2}^n, \ldots, V_{k_l}^n\}$ şeklinde gösterilebilir. Bu durumda $(\star)$'a göre $X = V_{k_l}^n = \bigcap_{i=1}^{n} U_{k_l}^i$ olacağından $\mathcal{U}_n$, γ-örtülerinin aşikar olmaması ile çelişiriz. Dolayısıyla $\mathcal{V}_n$ aileleri sonsuz olduğundan birer γ-örtüdür.

X'in γ-örtülerinin $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ dizisi için X'in $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$ sınıfında olduğunu göz önüne alırsak her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$ sonlu kümesi vardır ki $\mathcal{W} = \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{W}_n$, X'in bir γ-örtüsüdür. $\mathcal{W}_n$ kümeleri sonlu ve $\mathcal{W}$, γ-örtüsü sonsuz olduğundan $n_1 < n_2 < \ldots < n_j < \ldots$ olmak üzere $\mathcal{W}_{n_j} \setminus \bigcup_{i<j} \mathcal{W}_{n_i} \neq \emptyset$ olacak şekilde $\mathcal{W}_{n_1}, \mathcal{W}_{n_2}, \ldots, \mathcal{W}_{n_j}, \ldots$ sonlu kümeleri vardır. Bu durumda her $j \in \omega$ için bir $V_{k_j}^{n_j} \in \mathcal{W}_{n_j} \setminus \bigcup_{i<j} \mathcal{W}_{n_i}$ elemanı seçersek $V_{k_j}^{n_j}$ kümeleri birbirinden farklı olur. Böylece $\{V_{k_j}^{n_j} : j \in \omega\}$ ailesi $\mathcal{W}$, γ-örtüsünün sonsuz bir alt ailesi olacağından Lemma 3.1.4'e göre kendisi de X'in bir γ-örtüsüdür.

Şimdi $n_0 = 0$ olmak üzere $j = 0, 1, 2, \ldots$ ve $n \in (n_j, n_{j+1}]$ için $U_n = U_{k_{j+1}}^n$ olsun. Açıkça her n için $U_n \in \mathcal{U}_n$'dir. X'in $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ sınıfında olduğunu görmek için son alarak $\{U_n : n \in \omega\}$ ailesinin X için bir γ-örtü olduğunu görelim. $\{V_{k_j}^{n_j} : j \in \omega\}$ X'in bir γ-örtüsü olduğundan her $x \in X$ için $\exists j_x \in \omega$ vardır ki her $j \geq j_x$ için $x \in V_{k_j}^{n_j}$'dir. Bu durumda $n > n_{j_x}$ için $x \in U_n$ olacağını görelim. $n > n_{j_x}$ için $n \in (n_{j_0}, n_{j_0+1}]$ olacak şekilde bir $j_0 \geq j_x$ vardır. $j_0 + 1 > j_0 \geq j_x$ olduğundan $x \in V_{k_{j_0+1}}^{n_{j_0+1}}$'dir. Diğer taraftan $n \in (n_{j_0}, n_{j_0+1}]$ iken $U_n = U_{k_{j_0+1}}^n$ ve $V_{k_{j_0+1}}^{n_{j_0+1}} \subset U_{k_{j_0+1}}^n$ olduğundan $x \in U_n$'dir. Ayrıca $\{U_n : n \in \omega\}$ ailesi sonlu olamaz. Eğer sonlu olursa bu ailenin en az bir elemanı X'e eşit olacağından bir çelişki elde edilir. Öyleyse $\{U_n : n \in \omega\}$, X'in bir γ-örtüsüdür ve dolayısıyla da X, $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ sınıfındandır. ■

Teorem 4.1.6 $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda) = \mathcal{S}_{fin}(\Lambda, \Lambda)$

Kanıt: $\mathcal{S}_{fin}$ yöntemi ilk değişkene göre anti monoton ve $\Gamma \subset \Lambda$ olduğundan

$$\mathcal{S}_{fin}(\Lambda, \Lambda) \longrightarrow \mathcal{S}_{fin}(\Gamma, \Lambda)$$

olduğu açıktır. O halde

$$\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \longrightarrow \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Lambda)$$

kapsamasını görelim.

X topolojik uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda)$ sınıfında olsun ve X'in geniş örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Genelliği bozmadan her sonlu $S \subset \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{U}_n$ kümesi için sonlu sayıda k dışında tüm k'lar için $S \cap \mathcal{U}_k = \emptyset$ kabul edebiliriz.(Bu durum her $\mathcal{U}_n$'den sonlu sayıda eleman atılarak elde edilebilir ve bu işlem sonucunda yine bir geniş örtü elde edilir.) $\mathcal{U}_n$ geniş örtüleri $\{U_k^n : k \in \omega\}$ şeklinde olsun. Her $n, m \in \omega$ için

$$V_m^n = \bigcup_{k=1}^{m} U_k^n \text{ olmak üzere } \mathcal{V}_n = \{V_m^n : m \in \omega\}$$

olsun. Açıkça $\mathcal{V}_n$ elemanları azalmayan bir açık örtüdür. Dahası $\mathcal{V}_n$ bir γ-örtüdür ya da $\exists m_n \in \omega$ için $V_{m_n}^n = X$'dir. $\mathcal{U}_n$ geniş örtüsünün eğer sonlu bir alt örtüsü varsa $\exists m_n \in \omega$ için $V_{m_n}^n = X$ olacağı açıktır. Öyleyse $\mathcal{U}_n$'in bir sonlu alt örtüsü olmasın. $\mathcal{U}_n$ bir örtü olduğundan $x \in X$ için $x \in U_{k_x}^n$ olacak şekilde $\exists k_x \in \omega$ vardır. Öyleyse her $m \geq k_x$ için $U_{k_x}^n \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_k^n = V_m^n$ olacağından $x \in V_m^n$'dir. Diğer taraftan $\mathcal{V}_n$ sonlu olamaz. Eğer sonlu olsaydı $\mathcal{U}_n$'in bir sonlu alt örtüsü olurdu. O halde $\mathcal{V}_n$ bir γ-örtüdür.

Bu durumda sonsuz bir A indis kümesi vardır ki her $n \in A$ için yukarıda bahsedilen durumlardan biri söz konusudur. Birinci durumda her $n \in A$ için $\mathcal{V}_n$, X'in bir γ-örtüsü olsun. Böylece $(\mathcal{V}_n : n \in A)$, X'in γ-örtülerinin bir dizisi olur. X uzayı da $\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda)$ sınıfına ait olduğundan her $n \in A$ için sonlu bir $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$ vardır ki $\bigcup_{n\in A} \mathcal{W}_n$, X'in bir geniş örtüsüdür. Öyleyse her $n \in A$ için $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{U}_n$ sonlu alt kümesini, $\mathcal{W}_n$'in her elemanını $\mathcal{P}_n$'in elemanlarının birleşimiyle elde edilecek şekilde seçtiğimizde $\bigcup_{n\in A} \mathcal{P}_n$, X'in bir geniş örtüsü olur. Çünkü kabule göre $\mathcal{P}_n$'lerin sonlu sayıda olanları dışında hepsi ikişer ayrıktır ve $\bigcup_{n\in A} \mathcal{W}_n$ bir γ-örtüdür. İkinci durumda her $n \in A$ için $V_{m_n}^n = X$ olacak şekilde bir $m_n \in \omega$ olsun. Bu durumda $\mathcal{U}_n$'in, $\mathcal{P}_n$ sonlu alt kümesini $\{U_1^n, U_2^n, \ldots, U_{m_n}^n\}$ olarak seçtiğimizde $\bigcup_{n\in A} \mathcal{P}_n$ bir geniş örtü olur. Çünkü $\mathcal{P}_n$'lerin hemen hemen hepsi ikişer ayrık ve her $n \in A$ için $\cup\mathcal{P}_n = X$'dir.Her iki durumda da bir geniş örtü elde edildiğinden X, $\mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Lambda)$ sınıfındandır. ■

Teorem 4.1.7 $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O}) = \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O})$

Kanıt: Şema 5'de

$$\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O})$$

kapsaması kolayca görülür. O halde diğer kapsamayı,yani

$$\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$$

olduğunu görelim.

X topolojik uzayı $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O})$ sınıfından olsun ve X'in açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Her $\mathcal{U}_n$ açık örtüsü $\{U_k^n : k \in \omega\}$ şeklinde ifade edilsin. $n, m \in \omega$ için $V_m^n = \bigcup\limits_{k=1}^{m} U_k^n$ olmak üzere $\mathcal{V}_n = \{V_m^n : m \in \omega\}$ olsun. Öyleyse Teorem 4.1.6'nın ispatında geçen durumlar söz konusudur, yani $\mathcal{V}_n$ bir γ-örtüdür ya da $V_{m_n}^n = X$ olacak şekilde $\exists m_n \in \omega$ vardır.

Eğer bir $n \in \omega$ için $V_{m_n}^n = X$ olacak şekilde bir $m_n \in \omega$ varsa $\mathcal{P}_n = \{U_k^n : k = 1, 2, \ldots, m_n\}$ seçimine göre $\mathcal{P}_n$, $\mathcal{U}_n$'in sonlu bir alt kümesi olmak üzere $\cup\mathcal{P}_n = V_{m_n}^n = X$ olacağından $\mathcal{P}_n$, X'in bir açık örtüsüdür. O halde bu durum için X, $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfındadır. Öyleyse her $n, m \in \omega$ için $V_m^n \neq X$ olsun. Bu durumda $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ X'in γ-örtülerinin bir dizisi olur. X de $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O})$ sınıfından olduğundan her $n \in \omega$ için $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{V}_n$ sonlu olmak üzere bir $(\mathcal{W}_n : n \in \omega)$ dizisi vardır ki $\{\cup\mathcal{W}_n : n \in \omega\}$ bir açık örtüdür. Diğer taraftan $\mathcal{W}_n$'in elemanları $\mathcal{U}_n$'in sonlu bir $\mathcal{P}_n$ alt kümesindeki elemanların birleşimiyle elde edilebilir. Bu durumda $\bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{P}_n$, X'in bir açık örtüsü olacağından, X uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfındadır. ■

Sonuç 4.1.3, Teorem 4.1.6 ve Teorem 4.1.7'ye göre aşağıdaki şemada verilen dokuz sınıf birbirine eşittir. $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfından olan uzaylara Menger özelliğine sahip denildiğinden bu sınıflardaki uzaylar Menger özelliğindedir.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[r, equal] \arrow[dl, equal] & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \arrow[dl, equal] \\
\mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Lambda) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Lambda) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] & \\
\mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\Lambda) \arrow[r, equal] & \mathcal{S}_{fin}(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] & \\
 & \mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O}) &
\end{tikzcd}$$

Önerme 4.1.8 X topolojik uzayı $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfından olmak üzere $\mathcal{U}_1$ ve $\mathcal{U}_2$, X'in iki geniş örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}_2$ ve $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ olacak şekilde X'in $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2$ geniş örtüleri vardır.

Kanıt: $\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \ldots, \mathcal{W}_k, \ldots$ açık örtüleri her $k \in \omega$ için

$\mathcal{W}_{2k-1} = \{A_1 \cap \ldots \cap A_{2k-1} : A_1, \ldots, A_{2k-1} \in \mathcal{U}_1, |\{A_1, \ldots, A_{2k-1}\}| = 2k-1\}$, ve

$\mathcal{W}_{2k} = \{A_1 \cap \ldots \cap A_{2k} : A_1, \ldots, A_{2k} \in \mathcal{U}_2, |\{A_1, \ldots, A_{2k}\}| = 2k\}$

şeklinde tanımlansın. Öyleyse $(\mathcal{W}_{2k-1} : k \in \omega)$ ve $(\mathcal{W}_{2k} : k \in \omega)$, X'in açık örtülerinin dizileridir, X'de $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfından olduğundan her $k \in \omega$ için bir $W_k \in \mathcal{W}_k$ vardır ki her $x \in X$ ve sonsuz sayıda k, l için $x \in W_{2k-1}$ ve $x \in W_{2l}$'dir.

Her $k \in \omega$ için $W_k = A_1^k \cap \ldots \cap A_k^k$ şeklinde olsun. (Burada $A_1^k, \ldots, A_k^k$ kümeleri birbirinden farklıdır.) $S_1, \ldots, S_k, \ldots$ ve $T_1, \ldots, T_k, \ldots$ kümelerini şu şekilde seçelim.

$S_1 = A_1^1$

$T_1 \in \{A_1^2, A_2^2\} \backslash \{S_1\}$

$S_k \in \{A_1^{2k-1}, \ldots, A_{2k-1}^{2k-1}\} \backslash \{S_1, \ldots, S_{k-1}, T_1, \ldots, T_{k-1}\}$

$T_k \in \{A_1^{2k}, \ldots, A_{2k}^{2k}\} \backslash \{S_1, \ldots, S_k, T_1, \ldots, T_{k-1}\}$

Bu durumda $\mathcal{V}_1 = \{S_n : n \in \omega\}$ ve $\mathcal{V}_2 = \{T_n : n \in \omega\}$ ise S_n ve T_n kümelerinin seçimine göre $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_1$, $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}_2$ ve $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$ olduğu açıktır. Yine S_n ve T_n kümelerinin seçiminden bu kümeler kendi içlerinde ikişer ayrıktır. Diğer taraftan her n için $W_{2n-1} \subset S_n$ ve $W_{2n} \subset T_n$ olduğundan $\mathcal{V}_1$ ve $\mathcal{V}_2$, X'in iki geniş örtüsüdür. ■

Önerme 4.1.9 $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfındaki topolojik uzaylar $\mathbf{SFT_{alt}}(\Lambda,\Lambda)$ özelliğindedir.

Kanıt: X uzayı $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfından olsun ve X'in geniş örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(\mathcal{V}_m^n : n, m \in \omega)$ matrisi vardır.

1. Her n için $(\mathcal{V}_1^n, \mathcal{V}_2^n, \ldots)$, X'in geniş örtülerinin azalan dizisidir,
2. Her n ve birbirlerinden farklı $i, j \leq n$ için $\mathcal{V}_n^i \cap \mathcal{V}_n^j = \emptyset$'dir.

Önerme 4.1.8 tekrar tekrar uygulanarak bu matris şu şekilde elde edilebilir.
m=1 durumunda her n için $\mathcal{V}_1^n = \mathcal{U}_n$ olsun.
m=2 için $\mathcal{V}_1^1$ ve $\mathcal{V}_1^2$, X'in iki geniş örtüsü olduğundan Teorem 4.1.8'e göre X'in $\mathcal{V}_2^1$ ve $\mathcal{V}_2^2$ geniş örtüleri vardır ki $\mathcal{V}_2^1 \subset \mathcal{V}_1^1$, $\mathcal{V}_2^2 \subset \mathcal{V}_1^2$ ve $\mathcal{V}_2^1 \cap \mathcal{V}_2^2 = \emptyset$'dir.
m=3 için Önerme 4.1.8'i $\mathcal{V}_2^1$ ve $\mathcal{V}_1^3$ geniş örtülerine uygularsak X'in $\mathcal{V}_3^1$ ve $\mathcal{V}_2^3$ geniş örtüleri elde edilir ki $\mathcal{V}_3^1 \subset \mathcal{V}_2^1$, $\mathcal{V}_2^3 \subset \mathcal{V}_1^3$ ve $\mathcal{V}_3^1 \cap \mathcal{V}_2^3 = \emptyset$'dir. Benzer şekilde Önerme 4.1.8, $\mathcal{V}_2^2$ ve $\mathcal{V}_2^3$ geniş örtülerinde dikkate alınırsa, $\mathcal{V}_3^2$ ve $\mathcal{V}_3^3$ geniş örtüleri elde edilir ki $\mathcal{V}_3^2 \subset \mathcal{V}_2^2$, $\mathcal{V}_3^3 \subset \mathcal{V}_2^3$ ve $\mathcal{V}_3^2 \cap \mathcal{V}_3^3 = \emptyset$'dir. Son olarakta $\mathcal{V}_3^1$, $\mathcal{V}_3^2$ ve $\mathcal{V}_3^3$ geniş örtülerinin ikişer ayrık olduklarını görmeliyiz. $\mathcal{V}_3^2 \cap \mathcal{V}_3^3 = \emptyset$ olduğunu biliyoruz,$\mathcal{V}_3^1 \cap \mathcal{V}_2^3 = \emptyset$ ve $\mathcal{V}_3^3 \subset \mathcal{V}_2^3$ olduğundan $\mathcal{V}_3^1 \cap \mathcal{V}_3^3 = \emptyset$'dir, diğer taraftan $\mathcal{V}_2^1 \cap \mathcal{V}_2^2 = \emptyset$, $\mathcal{V}_3^1 \subset \mathcal{V}_2^1$ ve $\mathcal{V}_3^2 \subset \mathcal{V}_2^2$ olduğundan $\mathcal{V}_3^1 \cap \mathcal{V}_3^2 = \emptyset$'dir. Bu yöntem devam ettirildiğinde istenilen matris elde edilir.

Her n için $(\mathcal{V}_m^n : m \in \omega)$ dizisinde X'in $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfında olduğu dikkate alınırsa, her m için bir $V_m^n \in \mathcal{V}_m^n$ vardır ki, $\mathcal{V}_n^\star = \{V_m^n : m \in \omega\}$ bir geniş örtüdür. Diğer taraftan $k \neq l$ için $|\mathcal{V}_k^\star \cap \mathcal{V}_l^\star| \leq maks\{k, l\}$ olduğundan her n için $\mathcal{V}_n = \mathcal{V}_n^\star \backslash \{\mathcal{V}_1^\star \cup \mathcal{V}_2^\star \cup \ldots \mathcal{V}_{n-1}^\star\}$ de bir geniş örtüdür. Çünkü bir geniş örtüden sonlu sayıda eleman atmakla yine bir geniş örtü elde edilir. Böylece X'in geniş örtülerinin $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ dizisi elde edilir ki $n \neq m$ için $\mathcal{V}_n \cap \mathcal{V}_m = \emptyset$ ve her n için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$'dir. O halde X, $\mathbf{SFT_{alt}}(\Lambda,\Lambda)$ özelliğindedir. ■

Teorem 4.1.10 Bir X topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.

1. X, $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfındadır.
2. X, $\mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda)$ sınıfındadır.
3. X, $\mathcal{S}_1(\Omega,\mathcal{O})$ sınıfındadır.

Kanıt: $1 \Rightarrow 2$: X'in geniş örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. X, $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfında olduğundan Önerme 4.1.9'dan $\mathbf{SFT_{alt}}(\Lambda,\Lambda)$ özelliğindedir. O halde her n için

$\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ ve $m \neq n$ için $\mathcal{V}_m \cap \mathcal{V}_n = \emptyset$ olacak şekilde X'in geniş örtülerinin bir diğer $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$ dizisi vardır.

Şimdi her $m \in \omega$ için Y_m sonsuz bir küme olmak üzere $\{Y_m : m \in \omega\}$ pozitif tam sayılar kümesinin bir parçalanışı olsun. Bu durumda her m için $(\mathcal{V}_n : n \in Y_m)$ X'in açık örtülerinin bir dizisi olur, bu diziler için X'in $\mathcal{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ sınıfında olduğu dikkate alınırsa her m için $\mathcal{W}_m = \{U_n : U_n \in \mathcal{V}_n, n \in Y_m\}$ açık örtüleri elde edilir. Üstelik $\mathcal{V}_n$ geniş örtüleri ikişer ayrık olduklarından $\mathcal{W}_m$ açık örtüleri de ikişer ayrıktır. Böylece $\mathcal{U} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{W}_m = \{U_n : U_n \in \mathcal{U}_n, n \in \omega\}$ bir geniş örtü olacağından X, $\mathcal{S}_1(\Lambda, \Lambda)$ sınıfındadır.

$2 \Rightarrow 3$: Şema 5'den açıktır.

$3 \Rightarrow 1$: X'in açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. $\{Y_m : m \in \omega\}$ ise her Y_m bir sonsuz küme olmak üzere pozitif tam sayılar kümesinin bir parçalanışı olsun. Şimdi her m için $\mathcal{W}_m$ kümesini, elemanları $U_{n_1} \cup U_{n_2} \cup \ldots \cup U_{n_k}$ biçiminde olacak şekilde tanımlayalım. Burada $j = 1, 2, \ldots, k$ için $n_j \in Y_m$, $U_{n_j} \in \mathcal{U}_{n_j}$ ve $k \in \omega$'dır. Açıkça her m için $\mathcal{W}_m$ bir ω-örtüdür. Öyleyse $(\mathcal{W}_n : n \in \omega)$, X'in ω-örtülerinin bir dizisi, X'de $\mathcal{S}_1(\Omega, \mathcal{O})$ sınıfında olduğundan $\{W_n : n \in \omega\}$ bir açık örtü olacak şekilde her n için bir $W_n \in \mathcal{W}_n$ seçimi vardır. Her n için W_n kümesi $U_{i_1^n} \cup U_{i_2^n} \cup \ldots \cup U_{i_{k_n}^n}$ şeklinde olsun. Burada $j = 1, 2, \ldots, k_n$ için $i_j^n \in Y_n$ ve $U_{i_j^n} \in \mathcal{U}_{i_j^n}$'dir. O halde $\{U_{i_1^1}, U_{i_2^1}, \ldots, U_{i_{k_1}^1}, U_{i_1^2}, U_{i_2^2}, \ldots, U_{i_{k_2}^2}, \ldots\}$, X'in bir açık örtüsü olup bu örtü her $\mathcal{U}_n$ açık örtüsünden bir eleman içerecek şekilde genişletilebilir. Bu durumda da X uzayının $\mathcal{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ sınıfında olduğu elde edilir. ■

Teorem 4.1.10'e göre aşağı şemadaki beş sınıf birbirine eşittir.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_1(\Omega,\Lambda) \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \mathcal{S}_1(\Omega,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] \\
\mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda) \arrow[r, equal] & \mathcal{S}_1(\Lambda,\mathcal{O}) \arrow[d, equal] \\
& \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})
\end{tikzcd}$$

Şema 5'de birbirine eşit olan sınıfları her eşitlikteki bir sınıf ile belirttiğimizde aşağıdaki şemayı elde ederiz.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma) \arrow[rr] & & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[rr] & & \mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\mathcal{O}) \\
 & & & \mathcal{S}_{fin}(\Gamma,\Omega) \arrow[u] & & \\
\mathcal{S}_1(\Gamma,\Gamma) \arrow[rr] \arrow[uur] & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Omega) \arrow[rr] \arrow[ur] & & \mathcal{S}_1(\Gamma,\Lambda) \arrow[uur] & \\
 & & & \mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Omega) \arrow[uu] & & \\
\mathcal{S}_1(\Omega,\Gamma) \arrow[rr] \arrow[uu] & & \mathcal{S}_1(\Omega,\Omega) \arrow[rr] \arrow[uu] \arrow[ur] & & \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O}) \arrow[uu] &
\end{tikzcd}$$

Şema 7: Eşit sınıflar çıkarılmış şema

4.2 Cantor Kümesi

Bu bölümde reel eksenin özel bir alt kümesi olan C, Cantor kümesinin Şema 7'de yer alan sınıflardan hangilerinde olup olmadığı incelenecektir. Kaynak olarak [9] ve [18]'den yararlanılmıştır.

Tanım 4.2.1 Reel sayıların $[0,1]$ kapalı aralığını C_0 ile gösterelim. C_0'dan tam ortasındaki üçte birlik kısım olan $(1/3,2/3)$ açık aralığını çıkartalım. Geriye kalan $[0,1/3] \cup [2/3,1]$ kapalı kümesine C_1 diyelim. Benzer şekilde $[0,1/3]$ ve $[2/3,1]$ kapalı aralıklarının ortasındaki üçte birlik kısımlar olan $(1/9,2/9)$ ve $(7/9,8/9)$ açık aralıklarını C_1'den çıkartalım. Geriye kalan $[0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$ kapalı kümesine de C_2 diyelim. Bu yöntemi sonsuza kadar devam ettirdiğimizde elde ettiğimiz C_n kümelerinin arakesiti olan C kümesine *Cantor kümesi* adı verilir. Cantor kümesine homeomorf olan bir uzaya da *Cantor uzayı* denir.

C, Cantor kümesi kompaktır: Reel sayıların kapalı ve sınırlı C_0 alt kümesi Heine-Borel teoreminden kompaktır. C'de kompakt C_0 kümesinin bir kapalı alt kümesi olduğundan kompaktır.

$2 = \{0,1\}$ kümesini belirtsin ve bu küme üzerinde ayrık topoloji bulunsun. Bu durumda 2^{ω} bir Cantor uzayıdır: C'nin her elemanı 3'lük tabanda 1 rakamını hiç kullanmadan yani sadece 0 ve 2 rakamlarını kullanarak $0,\ldots$ şeklinde tek türlü yazılabilir. O halde Cantor kümesinin her elemanı, 0 ve 2'lerden oluşmuş bir (a_n) dizisi için

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda $(a_n) \in 2^\omega$ için $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2a_n}{3^n}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm 2^ω'dan C, Cantor kümesine bir homeomorfizmadır.

Önerme 4.2.2 X kompakt bir topolojik uzay, $\mathcal{U}$ ise X'in bir ω-örtüsü olsun. Bu durumda her $k \in \omega$ için $\mathcal{U}$'nun sonlu bir $\mathcal{V}$ alt kümesi vardır ki $\mathcal{V}$, X'in bir k-örtüsüdür.

Kanıt: $U \in \mathcal{U}$ için U^k, U'nun k. kuvvetini belirtmek üzere $\mathcal{U}^k = \{U^k : U \in \mathcal{U}\}$ ailesi X^k'nın bir açık örtüsüdür: U^k'nın X^k'da açık bir küme olduğu aşikardır, diğer taraftan $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^k$ için $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, X'in sonlu bir alt kümesidir. $\mathcal{U}$'da, X'in bir ω-örtüsü olduğundan $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda $U^k \in \mathcal{U}^k$ için $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in U^k$ olduğundan $\mathcal{U}^k$, X^k'nın bir açık örtüsüdür.

X topolojik uzayı kompakt olduğundan X^k'da kompaktır. O halde $\mathcal{U}^k$ açık örtüsünün $\{U_1^k, U_2^k, \ldots, U_n^k\}$ şeklinde sonlu bir alt örtüsü vardır. Bu durumda $\mathcal{V} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ ailesinin X'in bir k-örtüsü olduğunu görelim. $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, X'in k-elemanlı bir alt kümesi olsun. Öyleyse $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^k$ için $(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in U_i^k$ olacak şekilde bir $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vardır. Böylece $U_i \in \mathcal{V}$ için $S \subset U_i$ olduğundan $\mathcal{V}$, X'in bir k-örtüsüdür. ■

Teorem 4.2.3 Her σ-kompakt topolojik uzay, özel olarak C, Cantor kümesi $\mathcal{S}_{fin}(\Omega, \Omega)$ ve $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma, \Gamma)$ sınıfındandır.

Kanıt: X σ-kompakt bir topolojik uzay, $(K_n : n \in \omega)$ ise X'in iç içe geçmiş kompakt alt kümelerinden oluşan bir örtüsü olsun.

X 'in $\mathcal{S}_{fin}(\Omega, \Omega)$ sınıfında olduğunu göstermek için ω-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Her n için $\mathcal{U}_n$, K_n kompakt uzayının bir ω-örtüsü olduğundan Önerme 4.2.2'ye göre $\mathcal{U}_n$'in sonlu bir $\mathcal{V}_n$ alt kümesi vardır ki $\mathcal{V}_n$, K_n'in bir n-örtüsüdür. O halde $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n \in \omega} \mathcal{V}_n$, X'in bir ω-örtüsü ise X uzayı $\mathcal{S}_{fin}(\Omega, \Omega)$ sınıfındandır. $\mathcal{V}$'nin bir ω-örtü olduğunu göstermek için, $S \subset X$ ve $|S| = k$ olsun. $(K_n : n \in \omega)$, X'in bir örtüsü olduğundan $S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{k} K_{n_i}$ olacak şekilde $\exists n_1, n_2, \ldots, n_k \in \omega$ vardır. Diğer taraftan K_n kümeleri azalmadığından $m = maks\{n_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$ için $S \subset K_m$'dir. Bu durumda $k \leq m$ ise $\mathcal{V}_m$, K_m'in bir m-örtüsü olduğundan $S \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{V}_m$ vardır, eğer $k > m$ ise $S \subset K_m \subset K_k$ ve $\mathcal{V}_k$, K_k'nın bir k-örtüsü olduğundan $S \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{V}_k$ vardır. Sonuç olarak her iki durum için de $S \subset U$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{V}$ olduğundan $\mathcal{V}$, X'in bir ω-örtüsüdür.

X'in $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$ sınıfında olduğunu göstermek için γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisini ele alalım. $\mathbf{SFT_{alt}}(\Gamma,\Gamma)$ özelliğinden $\mathcal{U}_n$'leri ikişer ayrık kabul edebiliriz. Diğer taraftan her n için $\mathcal{U}_n$, K_n kompakt uzayının bir açık örtüsü olduğundan $K_n \subset \cup\mathcal{V}_n$ olacak şekilde sonlu bir $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ vardır. Bu durumda ya en az bir n için $\cup\mathcal{V}_n = X$ ya da $\{\cup\mathcal{V}_n : n \in \omega\}$, X'in bir γ-örtüsü olacağından X, $\mathcal{U}_{fin}(\Gamma,\Gamma)$ sınıfındadır. ■

Teorem 4.2.4 2^ω, Cantor uzayı $\mathcal{S}_1(\Gamma,\mathcal{O})$ sınıfında değildir.

Kanıt: $2^{\omega\times\omega}$ ile 2^ω homeomorf olduğundan ve Teorem 4.3.5'e göre homeomorf uzaylar aynı sınıfta bulunduğundan, $2^{\omega\times\omega}$'ın $\mathcal{S}_1(\Gamma,\mathcal{O})$ sınıfında olmadığını gösterelim.

$m \in \omega$ için $\Pi_m : 2^{\omega\times\omega} \to 2^\omega$ fonksiyonu, $\Pi_m(y)(n) = y(m,n)$ $(\forall n \in \omega)$ şeklinde tanımlansın. (Π_m fonksiyonları izdüşüm fonksiyonları olduğundan süreklidir.)

$(x_n : n \in \omega)$ dizisi, 2^ω'nın birbirinden farklı elemanlarından oluşmak üzere her $n, m \in \omega$ için

$$A_n^m = \{y \in 2^{\omega\times\omega} : \Pi_m(y) = x_n\}$$

kümelerini tanımlayalım ve A_n^m kümelerinin aşağıdaki özellikleri sahip olduğunu görelim.

İddia:

(1) A_n^m kümeleri kapalıdır.

(2) $m \in \omega$ ve birbirinden farklı $k, l \in \omega$ içim $A_k^m \cap A_l^m = \emptyset$

(3) $m_1 < m_2 < \ldots < m_p$ ve keyfi $n_1, n_2, \ldots, n_p$ için $A_{n_1}^{m_1} \cap A_{n_2}^{m_2} \cap \ldots \cap A_{n_p}^{m_p} \neq \emptyset$'dir.

İddianın Kanıtı:

(1) $\{x_n\} \subset 2^\omega$ kapalı bir alt küme, Π_m izdüşüm fonksiyonları sürekli ve $A_n^m = \Pi_m^{-1}[\{x_n\}]$ olduğundan A_n^m kümeleri kapalıdır.

(2) $k \neq l$ için $y \in A_k^m \cap A_l^m$ ise $\Pi_m(y) = x_k$ ve $\Pi_m(y) = x_l$ olacağından $x_k = x_l$ elde ederiz. Diğer taraftan $(x_n : n \in \omega)$ dizisinin elemanları birbirinden farklı olduğundan $x_k \neq x_l$'dir. O halde $A_k^m \cap A_l^m = \emptyset$'dir.

(3) $y \in 2^{\omega\times\omega}$ için $\Pi_{m_i}(y) = x_{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$ olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots, p$ için $y \in A_{n_i}^{m_i}$ olacağından $A_{n_1}^{m_1} \cap A_{n_2}^{m_2} \cap \ldots \cap A_{n_p}^{m_p} \neq \emptyset$'dir.

Şimdi $m \in \omega$ için

$$\mathcal{U}_m = \{2^{\omega\times\omega}\backslash A^m_n : n \in \omega\}$$

ailelerinin $2^{\omega\times\omega}$ için birer γ-örtü olduğunu görelim.

(1)'den $\mathcal{U}_m$'in elemanları açıktır.

(2)'den $k \neq l$ için $A^m_k \cap A^m_l = \emptyset$ olduğundan $\mathcal{U}_m$'in elemanları birbirinden farklıdır. O halde $\mathcal{U}_m$ sonsuz bir kümedir.

$y \in 2^{\omega\times\omega}$ olsun. Eğer $y \in A^m_{n_y}$ olacak şekilde bir $n_y \in \omega$ varsa (2)'den her $n \neq n_y$ için $y \notin A^m_n$ olacağından, $n \neq n_y$ için $y \in 2^{\omega\times\omega}\backslash A^m_n$'dir. Eğer her $n \in \omega$ için $y \notin A^m_n$ ise, her n için $y \in 2^{\omega\times\omega}\backslash A^m_n$'dir. Böylece $\mathcal{U}_m$, $2^{\omega\times\omega}$ için bir γ-örtüdür.

Her $m \in \omega$ için bir $U_m = 2^{\omega\times\omega}\backslash A^m_{n_m} \in \mathcal{U}_m$ seçelim. (1) ve (3)'den $\{A^m_{n_m} : m \in \omega\}$ kümesi, $2^{\omega\times\omega}$ kompakt uzayının kapalı alt kümelerinin sonlu arakesit özelliğine sahip ailesidir. O halde $\bigcap_{m\in\omega} A^m_{n_m} \neq \emptyset$'dir. Öyleyse $\bigcup_{m\in\omega} U_m = X\backslash \bigcap_{m\in\omega} A^m_{n_m} \neq X$ olacağından $\{U_m : m \in \omega\}$, $2^{\omega\times\omega}$'nın bir açık örtüsü değildir. Sonuç olarak yukarıda tanımlanan γ-örtülerin $(\mathcal{U}_m : m \in \omega)$ dizisindeki her $\mathcal{U}_m$'den bir eleman seçmekle bir açık örtü elde edilemez. Öyleyse 2^ω, $\mathcal{S}_1(\Gamma, \mathcal{O})$ sınıfında değildir. ■

4.3 Özelliklerin Korunması

Sınıflara ait olma özelliklerinin kapalı alt uzaylar için kalıtsal olduğunu ve sürekli fonksiyonlar altında korunduğunu göreceğiz. Teoremler için kaynak [9]'dur.

Önerme 4.3.1 X bir topolojik uzay, C ise X'in bir kapalı alt kümesi olsun. Eğer $\mathcal{U}$, C alt uzayının $\{\mathcal{O}, \Omega, \Gamma, \Lambda\}$ sınıflarından herhangi birine ait örtüsü ise $\mathcal{V} = \{U \cup (X\backslash C) : U \in \mathcal{U}\}$'da X'in $\mathcal{U}$ ile aynı sınıftan olan bir örtüsüdür.

Kanıt: $\mathcal{V}$'nin elemanları X uzayının has açık alt kümeleridir. Çünkü $U \cup (X\backslash C) \in \mathcal{V}$ ise U, C'nin bir has açık alt kümesi olduğundan $U = T \cap C$ olacak şekilde X'de açık bir T kümesi vardır. Bu durumda $U \cup (X\backslash C) = T \cup (X\backslash C)$ eşitliğinden $\mathcal{V}$'nin elemanları X uzayında açıktır. Diğer taraftan $U \subsetneq C$ olduğundan $U \cup (X\backslash C) \subsetneq X$'dir.

$\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ olsun. Öyleyse $C = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$ olduğundan, $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} (U \cup (X\backslash C)) = X$ elde edilir. O halde $\mathcal{V}$, X'in bir açık örtüsüdür.

$\mathcal{U} \in \Lambda$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in C$ ise $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ kümesi sonsuzdur. Diğer taraftan $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ kümesi ile $\mathcal{U}_x$ eş güçlü olduğundan $\mathcal{V}_x$'de sonsuzdur. Eğer $x \notin C$ ise her $V \in \mathcal{V}$ için $x \in V$ olacağından $\mathcal{V}_x$ yine sonsuzdur. O halde $\mathcal{V}$, X için bir geniş örtüdür.

$\mathcal{U} \in \Omega$ ve $S \in [X]^{<\omega}$ olsun. Bu durumda $S \cap C \in [C]^{<\omega}$ olacağından $S \cap C \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Öyleyse $U \cup (X \backslash C) \in \mathcal{V}$ için $S = (S \cap C) \cup (S \cap (X \backslash C)) \subset U \cup (X \backslash C)$ kapsamasından $\mathcal{V}$, X'in bir ω-örtüsüdür.

$\mathcal{U} \in \Gamma$ ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in C$ ise $\mathcal{U}_x = \{U \in \mathcal{U} : x \notin U\}$ kümesi sonludur. Öyleyse $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \notin V\}$ kümesi ile $\mathcal{U}_x$'in eleman sayısı aynı olduğundan $\mathcal{V}_x$'de sonludur. Eğer $x \notin C$ ise her $V \in \mathcal{V}$ için $x \in V$'dir. Diğer taraftan $\mathcal{V}$ ile $\mathcal{U}$ eş güçlü olduğundan, $\mathcal{V}$ sonsuz bir kümedir. O halde $\mathcal{V}$, X'in bir γ-örtüsüdür. ■

Önerme 4.3.2 X bir topolojik uzay, $C \subset X$ olsun. Eğer her $n \in \omega$ için U_n, C alt uzayının bir has açık alt kümesi olmak üzere $\mathcal{V} = \{U_n \cup (X \backslash C) : n \in \omega\}$, X uzayının $\{\mathcal{O}, \Lambda, \Omega, \Gamma\}$ sınıflarından herhangi birine ait örtüsü ise, $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$'da C alt uzayının $\mathcal{V}$ ile aynı sınıftan olan bir örtüsüdür.

Kanıt: $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ olsun. Öyleyse $X = \bigcup_{n \in \omega} (U_n \cup (X \backslash C)) = (\bigcup_{n \in \omega} U_n) \cup (X \backslash C)$ eşitliğinden $C = \bigcup_{n \in \omega} U_n = \cup \mathcal{U}$ elde edileceğinden $\mathcal{U}$, C alt uzayının bir açık örtüsüdür.

$\mathcal{V} \in \Lambda$ ve $x \in C$ olsun. O halde $\mathcal{V}_x = \{U_n \cup (X \backslash C) \in \mathcal{V} : x \in U_n \cup (X \backslash C)\}$ kümesi sonsuzdur. Diğer taraftan $\mathcal{U}_x = \{U_n \in \mathcal{U} : x \in \mathcal{U}_n\}$ kümesi ile $\mathcal{V}_x$ eş güçlü olduğundan $\mathcal{U}_x$'de sonsuzdur. Öyleyse $\mathcal{U}$, C alt uzayının bir geniş örtüsüdür.

$\mathcal{V} \in \Omega$ ve $S \in [C]^{<\omega}$ olsun. Öyleyse $S \in [X]^{<\omega}$ için $S \subset U_n \cup (X \backslash C)$ olacak şekilde bir $U_n \cup (X \backslash C) \in \mathcal{V}$ vardır. Bu durumda, $U_n \in \mathcal{U}$ için $S \subset U_n$ kapsamasından $\mathcal{U}$, C alt uzayının bir ω-örtüsüdür.

$\mathcal{V} \in \Gamma$ ve $x \in C$ olsun. Öyleyse $\mathcal{V}_x = \{U_n \cup (X \backslash C) \in \mathcal{V} : x \notin U_n \cup (X \backslash C)\}$ kümesi sonludur. Diğer taraftan $\mathcal{U}_x = \{U_n \in \mathcal{U} : x \notin U_n\}$ kümesi ile $\mathcal{V}_x$ aynı sayıda elemana sahip olduğundan, $\mathcal{U}_x$'de sonludur. Ayrıca $\mathcal{V}$ ile $\mathcal{U}$ eş güçlü olduğundan $\mathcal{U}$ sonsuzdur. Böylece $\mathcal{U}$, C alt uzayının bir γ-örtüsüdür. ■

Teorem 4.3.3 G, $\{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{fin}, \mathcal{U}_{fin}\}$ yöntemlerinden, $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ ise $\{\mathcal{O}, \Lambda, \Omega, \Gamma\}$ sınıflarından herhangi biri olsun. C, X topolojik uzayının bir kapalı alt kümesi olmak üzere, X uzayı $G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ özelliğinde ise C alt uzayı da $G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ özelliğindedir.

Kanıt: C alt uzayının $\mathcal{A}$ sınıfından olan örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Bu durumda her $n \in \omega$ için $\mathcal{V}_n = \{U \cup (X \backslash C) : U \in \mathcal{U}_n\}$ şeklindeyse, Önerme 4.3.1'e göre $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$, X uzayının $\mathcal{A}$ sınıfından olan örtülerinin bir dizisidir.

$G = \mathcal{S}_1$ ise; X, $\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğinde olduğundan her $n \in \omega$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ vardır ki $\mathcal{V} = \{U_n \cup (X \backslash C) : n \in \omega\}$, X'in $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsüdür. Bu durumda Önerme 4.3.2'ye göre $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$, C'nin $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü olacağından C alt uzayı da $\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir.

$G = \mathcal{S}_{fin}$ ise; X, $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğinde olduğundan her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{W}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ vardır ki $\widetilde{\mathcal{W}_n} = \{U \cup (X \backslash C) : U \in \mathcal{W}_n\} \in [\mathcal{V}_n]^{<\omega}$ için $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \widetilde{\mathcal{W}_n}$, X'in $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsüdür. Bu durumda Önerme 4.3.2'ye göre $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{W}_n$, C'nin $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü olacağından C alt uzayı da $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir.

$G = \mathcal{U}_{fin}$ ise; X, $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğinde olduğundan her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{W}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ vardır ki $\widetilde{\mathcal{W}_n} = \{U \cup (X \backslash C) : U \in \mathcal{W}_n\} \in [\mathcal{V}_n]^{<\omega}$ olmak üzere ya en az bir $n \in \omega$ için $\cup\widetilde{\mathcal{W}_n} = X$ ya da $\mathcal{V} = \{\cup\widetilde{\mathcal{W}_n} : n \in \omega\}$, X'in $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsüdür. Eğer bir $n \in \omega$ için $\cup\widetilde{\mathcal{W}_n} = X$ ise $\cup\mathcal{W}_n = C$ olacağından C alt uzayı $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir. Eğer $\mathcal{V}$, X'in $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü ise Önerme 4.3.2'ye göre $\mathcal{U} = \{\cup\mathcal{W}_n : n \in \omega\}$, C'nin $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü olacağından C alt uzayı $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir. ■

Önerme 4.3.4 $f : X \longrightarrow Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon $\mathcal{U}$, Y topolojik uzayının has açık alt kümelerinden oluşan bir aile ve $\mathcal{A}$'da $\mathcal{O}, \Lambda, \Gamma, \Omega$ sınıflarından biri olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$, Y için $\mathcal{A}$ sınıfından bir örtüdür ancak ve ancak $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}\}$, X için $\mathcal{A}$ sınıfından bir örtüdür.

Kanıt: $(\Rightarrow)$ $\mathcal{U}$, Y topolojik uzayının $\mathcal{A}$ sınıfından bir örtüsü olsun. $U \in \mathcal{U}$, Y uzayının bir açık alt kümesi ve f fonksiyonu sürekli olduğundan $f^{-1}(U)$'da X uzayının bir açık alt kümesidir. Diğer taraftan $U \subsetneq Y$ ve f örten olduğundan $f^{-1}(U) \subsetneq X$'dir. O halde her $U \in \mathcal{U}$ için $f^{-1}(U)$, X'in bir has açık alt kümesidir.

$\mathcal{A} = \mathcal{O}$ olsun. $\cup\mathcal{V} = \bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup\limits_{U\in\mathcal{U}} U) = f^{-1}(Y) = X$ eşitliğinden $\mathcal{V}$, X'in bir açık örtüsüdür.

$\mathcal{A} = \Lambda$ olsun. $x \in X$ için $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ kümesinin sonsuz olduğunu görelim. $\mathcal{U}$, Y uzayının bir geniş örtüsü olduğundan $y = f(x) \in Y$ için $\mathcal{U}_y = \{U \in \mathcal{U} : y \in U\}$ kümesi sonsuzdur. $U \in \mathcal{U}_y$ için $x \in f^{-1}(U) \in \mathcal{V}$ olduğundan $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_x$'dir. Diğer taraftan $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_y$ için $U_1 \neq U_2$ ise f örten olduğundan $f^{-1}(U_1) \neq f^{-1}(U_2)$'dir. O halde $F : \mathcal{U}_y \longrightarrow \mathcal{V}_x$, $F(U) = f^{-1}(U)$ fonksiyonu bire-birdir. Öyleyse $\mathcal{U}_y$, $\mathcal{V}_x$'e gömüldüğünden $\mathcal{V}_x$'de sonsuzdur. Böylece $\mathcal{V}$, X'in bir geniş örtüsüdür.

$\mathcal{A} = \Omega$ ve $S \in [X]^{<\omega}$ olsun. $|f(S)| \leq |S|$ olduğundan $f(S) \subset Y$'de sonludur. Diğer taraftan $\mathcal{U}$, Y'nin bir ω-örtüsü olduğundan $f(S) \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda $S \subset f^{-1}(f(S)) \subset f^{-1}(U) \in \mathcal{V}$ elde edileceğinden $\mathcal{V}$, X'in bir ω-örtüsüdür.

$\mathcal{A} = \Gamma$ olsun. $\mathcal{U}$, Y uzayının bir γ-örtüsü(yani sonsuz) ve f fonksiyonu örten olduğundan $\mathcal{V}$'de sonsuzdur. $x \in X$ için $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \notin V\}$ ailesinin sonlu olduğunu gösterelim. Tersine $\mathcal{V}_x$ sonlu olmasın. Bu durumda $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_x$ ise $y = f(x)$ için $y \notin U$'dur. O halde $\mathcal{U}_y = \{U \in \mathcal{U} : y \notin U\}$ kümesi için $U \in \mathcal{U}_y$ olacağından $\mathcal{U}_y$'de sonsuzdur. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $\mathcal{V}_x$ sonlu olduğundan $\mathcal{V}$, X'in bir γ-örtüsüdür.

($\Leftarrow$) $\mathcal{U}$'nun elemanları Y uzayının has açık alt kümeleridir.

$\mathcal{A} = \mathcal{O}$ olsun. $X = \cup\mathcal{V} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} f^{-1}(U) = f^{-1}(\cup\,\mathcal{U})$ ve f örten olduğundan $Y = f(X) = f(f^{-1}(\cup\,\mathcal{U})) = \cup\,\mathcal{U}$ eşitliğine göre $\mathcal{U}$, Y uzayının bir açık örtüsüdür.

$\mathcal{A} = \Lambda$ ve $y \in Y$ olsun. $\mathcal{U}_y = \{U \in \mathcal{U} : y \in U\}$ kümesinin sonsuz olduğunu görelim. f örten olduğundan $f(x) = y$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır. $\mathcal{V}$, X için bir geniş örtü olduğundan $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \in V\}$ kümesi sonsuzdur. Diğer taraftan $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_x$ ise $y \in U$ olduğundan $U \in \mathcal{U}_y$'dir. Ayrıca $f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2) \in \mathcal{V}_x$ için $f^{-1}(U_1) \neq f^{-1}(U_2)$ ise $U_1 \neq U_2$'dir. O halde $\mathcal{V}_x$, $\mathcal{U}_y$'nin bir alt kümesine eş güçlü olacağından $\mathcal{U}_y$ kümesi de sonsuzdur. Böylece $\mathcal{U}$, Y uzayının bir geniş örtüsüdür.

$\mathcal{A} = \Omega$ ve $S \in [Y]^{<\omega}$ olsun. f örten olduğundan en az bir $\acute{S} \in [X]^{<\omega}$ vardır ki $f(\acute{S}) = S$'dir. Öyleyse $\acute{S} \subset f^{-1}(U)$ olacak şekilde bir $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}$ vardır. Bu durumda $S = f(\acute{S}) \subset f(f^{-1}(U)) = U \in \mathcal{U}$ olduğundan $\mathcal{U}$, Y uzayının bir ω-örtüsüdür.

$\mathcal{A} = \Gamma$ ve $y \in Y$ olsun. $\mathcal{U}_y = \{U \in \mathcal{U} : y \notin U\}$ kümesinin sonlu olduğunu görelim. f örten olduğundan $f(x) = y$ olacak şekilde bir $x \in X$ vardır. $\mathcal{V}$, X'in bir γ-örtüsü olduğundan $\mathcal{V}_x = \{V \in \mathcal{V} : x \notin V\}$ kümesi sonludur. Bu durumda $U \in \mathcal{U}_y$ ise $x \notin f^{-1}(U)$ olacağından $f^{-1}(U) \in \mathcal{V}_x$'dir. Diğer taraftan $U_1, U_2 \in \mathcal{U}_y$ için $U_1 \neq U_2$ ise f örten olduğundan $f^{-1}(U_1) \neq f^{-1}(U_2)$'dir. O halde $\mathcal{U}_y$ kümesi sonsuz olsaydı $\mathcal{V}_x$'de sonsuz olacağından bir çelişki elde edilirdi. Öyleyse $\mathcal{U}_y$ kümesi sonludur. Diğer taraftan $\mathcal{V}$ sonsuz olduğundan $\mathcal{U}$'da sonsuzdur. Sonuç olarak $\mathcal{U}$, Y uzayının bir γ-örtüsüdür. ■

Teorem 4.3.5 $f : X \longrightarrow Y$ sürekli ve örten bir fonksiyon olsun. Bu durumda X topolojik uzayı $G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ özelliğindeyse, Y topolojik uzayı da $G(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ özelliğindedir. (Burada $G \in \{\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_{fin}, \mathcal{U}_{fin}\}$ ve $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \{\mathcal{O}, \Lambda, \Omega, \Gamma\}$'dır)

Kanıt: Y uzayının $\mathcal{A}$ sınıfından olan örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Her n için $\mathcal{V}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{U}_n\}$ ise Önerme 4.3.4'e göre $(\mathcal{V}_n : n \in \omega)$'da, X uzayının $\mathcal{A}$ sınıfından olan örtülerinin bir dizisidir.

$G = \mathcal{S}_1$ olsun. X, $\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğinde olduğundan her $n \in \omega$ için bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ vardır ki $\mathcal{V} = \{f^{-1}(U_n) : n \in \omega\}$, X uzayının $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsüdür. Bu durumda Önerme 4.3.4'e göre $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$'da, Y uzayının $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü olacağından Y'de $\mathcal{S}_1(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir.

$G = \mathcal{S}_{fin}$ olsun. X, $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğinde olduğundan her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{W}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ vardır ki $\widetilde{\mathcal{W}_n} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{W}_n\}$ olmak üzere $\mathcal{V} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \widetilde{\mathcal{W}_n}$, X'in $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsüdür. Bu durumda Önerme 4.3.4'e göre $\mathcal{U} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathcal{W}_n$'de, Y uzayının $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü olacağından Y'de $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir.

$G = \mathcal{U}_{fin}$ olsun. X, $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğinde olduğundan her $n \in \omega$ için bir $\mathcal{W}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ vardır ki $\widetilde{\mathcal{W}_n} = \{f^{-1}(U) : U \in \mathcal{W}_n\}$ olmak üzere ya en az bir n için $\cup\widetilde{\mathcal{W}_n} = X$'dir ya da $\mathcal{V} = \{\cup\widetilde{\mathcal{W}_n} : n \in \omega\}$, X uzayının $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsüdür. Eğer bir $n \in \omega$ için $\cup\widetilde{\mathcal{W}_n} = X$ ise f örten olduğundan $\cup\mathcal{W}_n = Y$ olacağından Y, $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir. Eğer $\mathcal{V} = \{\cup\widetilde{\mathcal{W}_n} : n \in \omega\}$, X'in $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü ise Önerme 4.3.4'e göre $\mathcal{U} = \{\cup\mathcal{W}_n : n \in \omega\}$'da, Y'nin $\mathcal{B}$ sınıfından bir örtüsü olacağından Y'de, $\mathcal{U}_{fin}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ özelliğindedir. ■

Sonlu Kuvvetler

Burada $\mathcal{S}_1(\Omega,\Omega)$, $\mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Omega)$ ve $\mathcal{S}_1(\Omega,\Gamma)$ sınıflarının sonlu kuvvet altında kapalı olduğunu göreceğiz.

Önerme 4.3.6 X bir topolojik uzay, n ise bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$, X uzayının bir ω-örtüsü ise $\mathcal{U}^n = \{U^n : U \in \mathcal{U}\}$'de X^n uzayının bir ω-örtüsüdür.

Kanıt: X^n'in bir S sonlu alt kümesi $\{x_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$ şeklinde olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \ldots, m$ için $\{x_i\} \subset G_i^n$ olacak şekilde en az bir $G_i \in [X]^{<\omega}$ vardır. ($x_i \in S, x_i = (x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i)$ şeklinde ise $G_i = \{x_1^i, x_2^i, \ldots, x_n^i\}$ olarak seçilebilir.) $G = \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_i$ dersek $G \in [X]^{<\omega}$ ve $\mathcal{U}$, X'in bir ω-örtüsü olduğundan $G \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Öyleyse $U^n \in \mathcal{U}^n$ için $S \subset G^n \subset U^n$ elde edilir. Diğer taraftan $\mathcal{U}$'nun elemanları X'in has açık alt kümeleri olduğundan $\mathcal{U}^n$'in elamanları da X^n'in has açık alt kümeleridir. O halde $\mathcal{U}^n$, X^n'in bir ω-örtüsüdür. ■

Önerme 4.3.7 X bir topolojik uzay, n bir pozitif tam sayı ve $\mathcal{U}$, X^n uzayının bir ω-örtüsü olsun. Bu durumda $\mathcal{V}^n = \{V^n : V \in \mathcal{V}\}$, $\mathcal{U}$'nun incesi olacak şekilde X uzayının bir $\mathcal{V}$, ω-örtüsü vardır.

Kanıt: $S \in [X]^{<\omega}$ olsun. Öyleyse $S^n \in [X^n]^{<\omega}$ için $S^n \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda her $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^n$ sıralı n-lisi, U açık kümesinin bir elemanı olacağından, her $i = 1, 2, \ldots, n$ için X'in bir $U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ açık alt kümesi vardır ki $x_i \in U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ve $\prod_{i=1}^{n} U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset U$ olur. Şimdi $x \in S$ için U_x ile x'i içeren tüm $U_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ açık kümelerinin arakesitini belirtelim. Bu durumda $V_S = \bigcup_{x \in S} U_x$ olmak üzere $\mathcal{V} = \{V_S : S \in [X]^{<\omega}\}$ ailesinin aradığımız özelliklere sahip olduğunu görelim.

$\mathcal{V}$'nin elemanları X uzayının has açık alt kümeleri ve $S \in [X]^{<\omega}$ için $S \subset V_S$ olduğundan $\mathcal{V}$, X'in bir ω-örtüsüdür. O halde Önerme 4.3.6'ya göre $\mathcal{V}^n$'de X^n'in bir ω-örtüsü olacağından $\mathcal{V}^n$, X^n'i örter. Son olarak $V_S^n \in \mathcal{V}^n$ için $V_S^n \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ olduğunu görelim. $V_S^n \in \mathcal{V}^n$ ise $S^n \in [X^n]^{<\omega}$ için $S^n \subset U$ olacak şekilde bir $U \in \mathcal{U}$ vardır. Bu $U \in \mathcal{U}$ için $V_S^n \subset U$ olduğunu görelim. $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V_S^n$ ise her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $y_j \in V_S$ olacağından $y_j \in U_{x_j}$ olacak şekilde bir $x_j \in S$ vardır. Diğer taraftan $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in S^n \subset U$ olduğundan her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{j=1}^{n} U_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset U$ olacak şekilde X'in $U_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ açık kümeleri vardır. Burada U_{x_j} kümelerinin tanımı dikkate alındığında her $j = 1, 2, \ldots, n$ için $U_{x_j} \subset U_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ olduğu görülür. O halde $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \prod_{j=1}^{n} U_{x_j} \subset \prod_{j=1}^{n} U_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \subset U$ elde edileceğinden, $V_S^n \subset U$ olur. ■

Teorem 4.3.8 X bir topolojik uzay, n ise bir pozitif tam sayı olsun. Eğer X, $\mathcal{S}_1(\Omega, \Omega)$ özelliğindeyse, X^n uzayı da $\mathcal{S}_1(\Omega, \Omega)$ özelliğindedir.

Kanıt: X^n'in ω-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_m : m \in \omega)$ dizisi verilsin. Önerme 4.3.7'ye göre her $m \in \omega$ için $\mathcal{V}_m^n = \{V^n : V \in \mathcal{V}_m\}$, $\mathcal{U}_m$'in incesi olacak şekilde X'in bir $\mathcal{V}_m$, ω-örtüsü vardır. $(\mathcal{V}_m : m \in \omega)$, X'in ω-örtülerinin bir dizisi, X'de $\mathcal{S}_1(\Omega, \Omega)$ özelliğinde olduğundan her $m \in \omega$ için bir $V_m \in \mathcal{V}_m$ vardır ki $\{V_m : m \in \omega\}$, X'in bir ω-örtüsüdür. Bu durumda Önerme 4.3.6'ya göre $\{V_m^n : m \in \omega\}$'da X^n'in bir ω-örtüsüdür. Diğer taraftan $\mathcal{V}_m^n$, $\mathcal{U}_m$'in bir incesi ve $V_m^n \in \mathcal{V}_m^n$ olduğundan her $m \in \omega$ için $V_m^n \subset U_m$ olacak şekilde bir $U_m \in \mathcal{U}_m$ vardır. Bu durumda açıkca $\{U_m : m \in \omega\}$'da X^n'in bir ω-örtüsü olacağından X^n de $\mathcal{S}_1(\Omega, \Omega)$ özelliğindedir. ■

Teorem 4.3.9 X bir topolojik uzay, n ise bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda X, $\mathcal{S}_{fin}(\Omega, \Omega)$ özelliğindeyse, X^n uzayı da $\mathcal{S}_{fin}(\Omega, \Omega)$ özelliğindedir.

Kanıt: Teorem 4.3.8'in kanıtına benzer olarak yapılabilir. ■

Önerme 4.3.10 X bir topolojik uzay, n ise bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda $\mathcal{U}$, X'in bir γ-örtüsü ise, $\mathcal{U}^n = \{U^n : U \in \mathcal{U}\}$'da X^n'in bir γ-örtüsüdür.

Kanıt: $\mathcal{U}^n$'in elemanlarının X^n'in has açık alt kümeleri olduğu aşikardır. Diğer taraftan $\mathcal{U}^n$ sonsuzdur. Çünkü $U, V \in \mathcal{U}$ için $U \neq V$ ise $U^n \neq V^n$ olduğundan $\mathcal{U}^n$ ile $\mathcal{U}$ eş güçlüdür ve $\mathcal{U}$, X'in bir γ-örtüsü olduğundan $\mathcal{U}$ sonsuzdur. Şimdi $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$ için $\mathcal{U}^n_x = \{U^n \in \mathcal{U}^n : x \notin U^n\}$ kümesinin sonlu olduğunu görelim. Aksine $\mathcal{U}^n_x$ sonsuz olsun. Bu durumda $U^n \in \mathcal{U}^n_x$ ise $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \notin U^n$ olduğundan en az bir $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için $x_i \notin U$'dur. Öyleyse $\mathcal{U}_{x_i} = \{U \in \mathcal{U} : x_i \notin U\}$ kümesi için $U \in \mathcal{U}_{x_i}$'dir. Diğer taraftan $\mathcal{U}^n_x$ sonsuz olduğundan en az bir $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ için U_{x_j} kümesi sonsuz olmalıdır. Bu ise $\mathcal{U}$'nun X için bir γ-örtü olmasıyla çelişir. Öyleyse $\mathcal{U}^n_x$ sonsuz olamayacağından $\mathcal{U}^n$, X^n'in bir γ-örtüsüdür. ■

Teorem 4.3.11 X bir topolojik uzay, n ise bir pozitif tam sayı olsun. Bu durumda X, $\mathcal{S}_1(\Omega, \Gamma)$ özelliğindeyse, X^n uzayı da $\mathcal{S}_1(\Omega, \Gamma)$ özelliğindedir.

Kanıt: X^n'in ω-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_m : m \in \omega)$ dizisi verilsin. Öyleyse Önerme 4.3.7'ye göre X'in ω-örtülerinin bir $(\mathcal{V}_m : m \in \omega)$ dizisi vardır ki her $m \in \omega$ için $\mathcal{V}^n_m$, $\mathcal{U}_m$'in bir incesidir. $(\mathcal{V}_m : m \in \omega)$, X'in ω-örtülerinin bir dizisi ve X'de $\mathcal{S}_1(\Omega, \Gamma)$ özelliğinde olduğundan her m için bir $V_m \in \mathcal{V}_m$ vardır ki $\mathcal{V} = \{V_m : m \in \omega\}$, X'in bir γ-örtüsüdür. Öyleyse Önerme 4.3.10'a göre $\mathcal{V}^n = \{V^n_m : m \in \omega\}$'da X^n'in bir γ-örtüsüdür. Diğer taraftan her m için $\mathcal{V}^n_m$, $\mathcal{U}_m$'in bir incesi ve $V^n_m \in \mathcal{V}^n_m$ olduğundan $V^n_m \subset U_m$ olacak şekilde bir $U_m \in \mathcal{U}_m$ vardır. O halde $\mathcal{U} = \{U_m \in \mathcal{U}_m : V^n_m \subset U_m, m \in \omega\}$'nın X^n için bir γ-örtü olduğunu gösterirsek X^n'de $\mathcal{S}_1(\Omega, \Gamma)$ özelliğindedir.

$\mathcal{U}$, X^n'in bir γ-örtüsüdür: $\mathcal{U}$'nun elemanlarının X^n'in has açık alt kümeleri olduğu aşikardır. Diğer taraftan $\mathcal{U}$ sonsuzdur. Eğer $\mathcal{U}$ sonlu ise $\mathcal{U} = \{U_{m_1}, U_{m_2}, \ldots, U_{m_k}\}$ şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda en az bir $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ için, $\mathcal{V}^n_i = \{V^n_m \in \mathcal{V}^n : V^n_m \subset U_{m_i}\}$ ailesi sonsuz olur. Üstelik $\mathcal{V}^n_i$, $\mathcal{V}^n$ γ-örtüsünün bir sonsuz alt kümesi olduğundan $\mathcal{V}^n_i$'de X^n'in bir γ-örtüsüdür. Öyleyse $\cup\mathcal{V}^n_i = U_{m_i} = X$ olacağından bir çelişki elde edilir. O halde $\mathcal{U}$ sonsuzdur. Son olarak $x \in X^n$ için $\mathcal{U}_x = \{U_m \in \mathcal{U} : x \notin U_m\}$ kümesinin sonlu olduğunu görelim. $\mathcal{V}^n$, X^n'in bir γ-örtüsü olduğundan $\mathcal{V}^n_x = \{V^n_m \in \mathcal{V}^n : x \notin V^n_m\}$ kümesi sonludur. Diğer taraftan her m için $V^n_m \subset U_m$ olduğundan $\mathcal{U}_x$'de sonludur. Böylece $\mathcal{U}$, X^n'in bir γ-örtüsüdür. ■

Bir sonraki teorem $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$'daki hangi uzayların $\mathcal{S}_1(\Omega,\Omega)$'dan olduğunu belirtmektedir.

Teorem 4.3.12 X topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.

1. X, $\mathcal{S}_1(\Omega,\Omega)$ sınıfındadır.

2. X'in her sonlu kuvveti $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfındadır.

Kanıt:$(1 \Rightarrow 2)$ X, $\mathcal{S}_1(\Omega,\Omega)$ sınıfında olsun. Öyleyse Teorem 4.3.8'e göre X'in her sonlu kuvveti de $\mathcal{S}_1(\Omega,\Omega)$ sınıfındadır. Diğer taraftan $\mathcal{S}_1(\Omega,\Omega) \subset \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ kapsaması da göz önüne alındığında, X'in her sonlu kuvvetinin $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$'da olduğu görülür.
$(2 \Rightarrow 1)$ X uzayının ω-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n \in \omega)$ dizisi verilsin. Y_m'ler sonsuz olmak üzere $(Y_m : m \in \omega)$'da pozitif tam sayılar kümesinin bir parçalanışı olsun. Öyleyse Önerme 4.3.6'ya göre $k \in Y_m$ için $\mathcal{U}_k^m = \{U_k^m : U_k \in \mathcal{U}_k\}$'da X^m uzayının bir ω-örtüsüdür. (2)'ye göre X^m, $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfında olduğundan X^m'in ω-(açık) örtülerinin $(\mathcal{U}_k^m : k \in Y_m)$ dizisine karşılık bir $(U_k^m : k \in Y_m)$ dizisi vardır ki her $k \in Y_m$ için $U_k \in \mathcal{U}_k$ olmak üzere $\{U_k^m : k \in Y_m\}$, X^m'in bir açık örtüsüdür. O halde $\{U_k : k \in \omega\}$ ailesinin X için bir ω-örtü olduğu gösterilirse ispat biter.

$S \in [X]^{<\omega}$ kümesi $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$ şeklinde olsun. Öyleyse $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in X^p$ ve $\{U_k^p : k \in Y_p\}$, X^p'nin bir açık örtüsü olduğundan $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in U_k^p$ olacak şekilde bir $k \in Y_p$ vardır. Bu durumda $S \subset U_k$ olacağından X, $\mathcal{S}_1(\Omega,\Omega)$ sınıfındadır. ■

Teorem 4.3.13 X topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir.

1. X, $\mathcal{S}_{fin}(\Omega,\Omega)$ sınıfındadır.

2. X'in her sonlu kuvveti $\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O},\mathcal{O})$ sınıfındadır.

Kanıt: Teorem 4.3.12'nin kanıtına benzer olarak yapılabilir. ■

5 TOPOLOJİK OYUNLAR

Bu bölümde kaynak olarak [4], [5], [6], [7] ve [8] kullanılmıştır.

5.1 Genel Yapı

Oyunları I.Oyuncu ve II.Oyuncu diye adlandıracağımız iki oyuncu oynamaktadır. Karşılaşmalarda n. rauntta I.Oyuncu bir I_n kümesi, II.Oyuncu ise bir J_n kümesi seçmekle yükümlüdür.(I_n ve J_n kümeleri oyunun kuralına göre belirli küme ailelerinden seçilmelidir.)

$$\begin{array}{ll} \text{I.Oyuncu:} & I_1 \quad I_2 \ldots I_n \ldots \\ \text{II.Oyuncu:} & J_1 \quad J_2 \ldots J_n \ldots \end{array}$$

Karşılaşmalarda her $n \in \omega$ için I.Oyuncu ve II.Oyuncu bir rauntta karşı karşıya gelir. Oyundaki bir karşılaşma, I ve II'nin seçtiği kümelerle $I_1,\ J_1,\ I_2,\ J_2, \ldots$ şeklinde ifade edilir. Bir $I_1,\ J_1,\ I_2,\ J_2, \ldots$ karşılaşması için (oyunun kuralına göre) belirli bir koşul sağlanıyorsa (örneğin $\bigcap\limits_{n\in\omega} J_n = \emptyset$ ise) I.Oyuncu karşılaşmayı kazanırken, bu koşul sağlanmıyorsa II.Oyuncu kazanır.

Bir topolojik uzay için I_n ve J_n kümeleri topoloji ile ilgili olacaktır. Örneğin bir X uzayının noktaları, kapalı veya açık kümeleri, açık örtüleri, bir noktanın komşulukları v.s.

Tanım 5.1.1 Herhangi bir oyunda I.Oyuncu için bir *strateji*, tamamlanmamış sonlu $I_1,\ J_1, \ldots, I_n,\ J_n$ karşılaşmalarından I'in seçebileceği kümelerin ailesine bir σ fonksiyonudur. $I_1,\ J_1, \ldots, I_n,\ J_n$ sonlu karşılaşmaları II.Oyuncu'nun son hamlesi (J_n) ile bitmelidir.

Tanım 5.1.2 σ bir oyunda I.Oyuncu için bir strateji olsun. Her $n \in \omega$ için $I_n = \sigma(I_1, J_1, \ldots, I_{n-1}, J_{n-1})$ olmak üzere, I.Oyuncu oyundaki tüm $I_1,\ J_1,\ I_2,\ J_2, \ldots$ karşılaşmalarını kazanıyorsa, σ'ya bu oyunda I.Oyuncu için bir *kazanma stratejisi denir.* Diğer bir deyişle, I oyunu σ stratejisine göre oynadığında tüm karşılaşmaları kazanıyorsa σ bu oyunda I.Oyuncu için bir kazanma stratejisidir.

Genelliği bozmadan, I.Oyuncu için bir σ stratejisinin tanım kümesini II'nin seçebileceği kümelerin $J_1, J_2, \ldots, J_n$ sonlu dizileri olarak kabul edebiliriz. Çünkü $I_1, I_2, \ldots$ kümeleri $I_1 = \sigma(\emptyset)$, $I_2 = \sigma(I_1, J_1), \ldots$ şeklinde elde edilebilir.

II.Oyuncu için de bir strateji ve kazanma stratejisi benzer şekilde tanımlanır. Bir oyunda hem I'in hem de II'nin kazanma stratejisi olmayacağı gibi, her ikisininde kazanma stratejisi olmayabilir. Eğer bir oyunda oyunculardan birinin bir kazanma stratejisi varsa bu oyuna *saptanmış* oyun denir. Eğer her ikisininde bir kazanma stratejisi yoksa bu oyuna *saptanmamış* oyun denir.

$G(X)$, X üzerinde bir oyun ise, I'in $G(X)$ oyununda bir kazanma stratejisinin olduğu I $\uparrow G(X)$ ile belirtilir. Benzer şekilde I $\not\uparrow G(X)$ de, I'in $G(X)$ oyununda bir kazanma stratejisinin olmadığını söyler.

5.2 Menger(X) Oyunu

Tanım 5.2.1 (Menger(X) Oyunu) Oyun şu şekildedir: n. rauntta I.Oyuncu, X topolojik uzayının bir $\mathcal{U}_n$ açık örtüsünü, II.Oyuncu ise $\mathcal{U}_n$'in sonlu bir $\mathcal{V}_n$ alt kümesini seçmelidir. Oyunun

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \ldots$$

karşılaşması için II.Oyuncu'nun seçtiği kümelerin birleşimi, yani $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$, X uzayını örterse II.Oyuncu karşılaşmayı kazanırken, aksi halde I.Oyuncu kazanır.

Hurewicz, Menger özelliğine sahip topolojik uzayları aşağıdaki gibi karakterize etmiştir.

Teorem 5.2.2 (Hurewicz) *X topolojik uzayının Menger ($\mathcal{S}_{fin}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşul I.Oyuncu'nun Menger(X) oyununda bir kazanma stratejisinin olmamasıdır. (XMenger $\Leftrightarrow$ I $\not\uparrow$ Menger(X))*

Kanıt: ($\Leftarrow$) I.Oyuncu'nun Menger(X) oyununda bir kazanma stratejisi olmasın. X uzayının Menger özelliğinde olduğunu görelim. X uzayının açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisi verilsin. Her n için $\mathcal{U}_n$'i I.Oyuncu'nun n. rauntta seçeceği açık örtü olarak aldığımızda I.Oyuncu için bir strateji belirleriz. Diğer taraftan I'in Menger(X) oyununda bir kazanma stratejisi olmadığından bu strateji altındaki bir

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \ldots$$

karşılaşmasını II.Oyuncu kazanır. O halde her n için $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ olmak üzere $\bigcup_{n\in\omega} \mathcal{V}_n$, Xiçin bir açık örtü olacağından X Menger özelliğindedir.

($\Rightarrow$) X uzayı Menger özelliğinde olsun. Menger(X) oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisinin olmadığını görelim.

Anlaşmalar

1. Her rauntta, II rakibinin seçtiği açık örtünün bir sonlu alt kümesini seçtiğinden ve II'nin seçtiği bu kümelerin birleşimi oyunu belirlediğinden, I'in seçeceği açık örtüleri artan açık örtüler olarak sınırlayabiliriz.

2. İlk anlaşma altında, II rakibinin seçtiği açık örtülerden bir eleman seçerse genellik bozulmaz.

3. Karşılaşmanın herhangi bir anında II.Oyuncu, U_n açık kümesini seçtiyse I'in seçeceği $\mathcal{U}_{n+1}$ artan açık örtüsünün elemanlarının U_n'i kapsadığını kabul edebiliriz.

Bu anlaşmalar altında Menger(X) oyununa yeniden baktığımızda: Her rauntta I.Oyuncu bir artan açık örtü seçiyor ve bu örtünün elemanları rakibin en son seçtiği açık kümeyi kapsıyor. II ise rakibin seçtiği örtülerden birer eleman seçiyor.

I, Menger(X) oyununu bir σ strejisine göre oynasın. σ'nın I.Oyuncu için bir kazanma stratejisi olmadığını, yani II'nin σ'yı başarısız kılabileceğini görelim.

I'in σ'ya göre ilk hamlesi $\sigma(\emptyset) = \{U_{(n)} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. II, $U_{(n)}$ açık kümesini seçtiğinde, I'in σ'ya göre karşılığı $\{U_{(n,m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$ şeklinde olsun. Bu yöntemi genelleyecek olursak $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \omega$ için II'nin k. raunttaki hamlesi $U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}$ ise I'in σ stratejisine göre karşılığı $\{U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k,m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$ şeklindedir.

Şimdi her $n, k \in \omega$ için U_k^n kümelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$U_k^n = \begin{cases} U_{(k)} & ; \quad n = 1 \\ U_k^{n-1} \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega^{n-1}} U_{\tau \frown (k)} \big) & ; \quad n \neq 1 \end{cases}$$

Bu durumda her n için $\mathcal{U}_n = \{U_k^n : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailelerinin X'in birer artan açık örtüsü olduğunu görelim.

- $\mathcal{U}_n$ ailesi artandır, yani her $k \in \omega$ için $U_k^n \subset U_{k+1}^n$'dir.
  $n = 1$ için; $U_k^1 = U_{(k)} \subset U_{(k+1)} = U_{k+1}^1$'dir.
  $n = 2$ için; $U_k^2 = U_k^1 \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega} U_{\tau \frown (k)} \big)$ ve $U_{k+1}^2 = U_{k+1}^1 \cap \big(\bigcap\limits_{\tau \in \omega} U_{\tau \frown (k+1)} \big)$ şeklindedir.
  Her $k \in \omega$ ve her $i \geq k$ için
  $U_k^1 = U_{(k)} \subset U_{(i)} \subset U_{(i,k)}$ ve $U_k^1 = U_{(k)} \subset U_{(k,k+1)}$ olduğundan

$U_k^2 = U_k^1 \cap U_{(1,k)} \cap \ldots \cap U_{(k-1,k)} \cap U_{(k,k+1)}$

$U_{k+1}^2 = U_{k+1}^1 \cap U_{(1,k+1)} \cap \ldots \cap U_{(k-1,k+1)} \cap U_{(k,k+1)}$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitliklerden de $U_k^2 \subset U_{k+1}^2$ olduğu kolayca görülür.

$n = m$ için; $U_k^m \subset U_{k+1}^m$ olsun.

$n = m+1$ için; $U_k^{m+1} \subset U_{k+1}^{m+1}$ olduğunu görelim.

$U_k^{m+1} = U_k^m \cap (\bigcap_{\tau \in \omega^m} U_{\tau \frown (k)})$ ve $U_{k+1}^{m+1} = U_{k+1}^m \cap (\bigcap_{\tau \in \omega^m} U_{\tau \frown (k+1)})$ şeklindedir.

$(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \omega^m$ ve $k \in \omega$ için $n_j = \text{maks}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} \geq k$ ise

$$U_{(n_1,n_2,\ldots,n_j,\ldots,n_m,k)} \supset U_{(n_1,n_2,\ldots,n_j)} \supset U_{n_j}^j \supset U_{n_j}^m \supset U_k^m$$

olacağından

$$A_k^m = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \omega^m : \text{maks}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} < k\}$$
$$B_k^m = \{(n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \omega^m : \text{maks}\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} = k\}$$

sonlu kümeleri için

$U_k^{m+1} = U_k^m \cap (\bigcap_{\tau \in A_k^m} U_{\tau \frown (k)}) \cap (\bigcap_{\tau \in B_k^m} U_{\tau \frown (k+1)})$

$(\tau \in B_k^m$ için $U_k^m \subset U_{\tau \frown (k)} \subset U_{\tau \frown (k+1)})$

$U_{k+1}^{m+1} = U_{k+1}^m \cap (\bigcap_{\tau \in A_k^m} U_{\tau \frown (k+1)}) \cap (\bigcap_{\tau \in B_k^m} U_{\tau \frown (k+1)})$

eşitliklerinden $U_k^{m+1} \subset U_{k+1}^{m+1}$ olduğu görülür.

- Her $n, k \in \omega$ için U_k^n kümeleri açıktır.

  $n = 1$ için; $U_k^1 = U_{(k)}$ kümesi açıktır.

  $n = 2$ için; $U_k^2 = U_k^1 \cap (\bigcap_{\tau \in \omega} U_{\tau \frown (k)}) = U_k^1 \cap (\bigcap_{\tau \in A_k^1} U_{\tau \frown (k)})$ açık kümelerin sonlu arakesiti şeklinde olduğundan açıktır.

  $n = m$ için; U_k^m kümesi açık olsun.

  $n = m+1$ için; U_k^{m+1} kümesinin açık olduğunu görelim.

  $U_k^{m+1} = U_k^m \cap (\bigcap_{\tau \in A_k^m} U_{\tau \frown (k)})$ yani açık kümelerin sonlu arakesiti şeklinde olduğundan açıktır.

- Her n için $\mathcal{U}_n = \{U_k^n : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailesi X'i örter.

  $n = 1$ için; $\mathcal{U}_1 = \{U_k^1 : k = 1, 2, 3, \ldots\} = \{U_{(k)} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$, X'in bir örtüsüdür.

  $n = 2$ için; $\mathcal{U}_2 = \{U_k^2 : k = 1, 2, 3, \ldots\}$'nin X'i örttüğünü görelim. $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}_1$ bir örtü olduğundan $x \in U_{k_x}^1$ olacak şekilde bir $k_x \in \omega$ vardır. Diğer taraftan her $i = 1, 2, \ldots, k_x - 1$ için $\{U_{(i,l)} : l = 1, 2, 3, \ldots\}$, X için bir örtü olduğundan $x \in U_{(i,l_i)}$ olacak şekilde bir $l_i \in \omega$ vardır. Şimdi $k \geq$ maks$(\{l_i : i = 1, 2, \ldots, k_x - 1\} \cup \{k_x\})$ için $x \in U_k^2$ olduğunu görelim.

$U_k^2 = U_k^1 \cap\ U_{(1,k)} \cap \ldots \cap U_{(k_x-1,k)} \cap U_{(k_x,k)} \cap U_{(k_x+1,k)} \cap \ldots$ şeklindedir.

$x \in U_{k_x}^1$ ve $U_{k_x}^1 \subset U_k^1$ olduğundan $x \in U_k^1$'dır.

$i < k_x$ için $x \in U_{(i,l_i)} \subset U_{(i,k)}$ ve $i \geq k_x$ için $x \in U_{k_x}^1 = U_{(k_x)} \subset U_{(i)} \subset U_{(i,k)}$ olduğundan $x \in U_k^2$'dır.

$n = m$ için; $\mathcal{U}_m$, X'in bir örtüsü olsun.

$n = m+1$ için; $\mathcal{U}_{m+1}$'in X'i örttüğünü görelim. $x \in X$ olsun. $\mathcal{U}_m$, X'i örttüğünden $x \in U_{k_x}^m$olacak şekilde bir $k_x \in \omega$ vardır. Diğer taraftan her $\tau \in A_{k_x}^m$ için $\{U_{\tau\frown(l):l=1,2,3,\ldots}\}$, X'in bir örtüsü olduğundan $x \in U_{\tau\frown(l_\tau)}$ olacak şekilde $l_\tau \in \omega$ vardır. Bu durumda $k \geq$ maks$(\{l_\tau : \tau \in A_{k_x}^m\} \cup \{k_x\})$ için $x \in U_k^{m+1}$ olduğunu görelim.

$U_k^{m+1} = U_k^m \cap (\bigcap\limits_{\tau \in A_{k_x}^m} U_{\tau\frown(k)}) \cap (\bigcap\limits_{\tau \in A_k^m \setminus A_{k_x}^m} U_{\tau\frown(k)})$ şeklindedir.

$k \geq k_x$ olduğundan $x \in U_{k_x}^m \subset U_k^m$'dır.

$\tau \in A_{k_x}^m$ için $x \in U_{\tau\frown(l_\tau)} \subset U_{\tau\frown(k)}$'dır.$(k \geq l_\tau)$

$\tau = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in A_k^m \setminus A_{k_x}^m$ için maks$\{n_1, n_2, \ldots, n_m\} \geq k_x$ ve dolayısıyla $x \in U_{k_x}^m \subset U_{\tau\frown(k_x)} \subset U_{\tau\frown(k)}$'dır. Böylece $x \in U_k^{m+1}$ olduğundan $\mathcal{U}_{m+1}$, X için bir örtüdür.

Şimdi X uzayının artan açık örtülerinin $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisine Menger özelliğini uyguladığımızda, pozitif tam sayılar kümesinden pozitif tam sayılar kümesine öyle bir f fonksiyonu vardır ki $\{U_{f(n)}^n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, X'in bir açık örtüsüdür. (Burada $\mathcal{U}_n$ artan açık örtülerinin sonlu alt kümelerini birleştirip örtünün bir elemanı gibi düşünüyoruz.) Ayrıca her n için $U_{f(n)}^n \subset U_{(f(1),f(2),\ldots,f(n))}$ olduğundan $\{U_{(f(1))}, U_{(f(1),f(2))}, \ldots, U_{(f(1),f(2),\ldots,f(n))}, \ldots\}$ kümesi de X'in bir açık örtüsüdür. Böylece II'nin yukarıdaki hamleleri I'in σ stratejisini başarısız kılar. ■

Teorem 5.2.3 Her Menger uzayı bir D-uzayıdır.

Kanıt: (X, τ) Menger uzayında bir $\{N(x) : x \in X\}$ ailesi verilsin. Menger(X) oyununda I.Oyuncu için aşağıdaki gibi bir strateji belirleyelim.

I.Oyuncu'nun ilk hamlesi $\{N(x) : x \in X\}$ olsun. II.Oyuncu $\{N(x) : x \in F_1\}$, $F_1 \in [X]^{<\omega}$ karşılığını verdiğinde, $V_1 = \bigcup\limits_{x \in F_1} N(x)$ olmak üzere, I.Oyuncu'nun ikinci hamlesi $\{V_1 \cup N(x) : x \in X \backslash V_1\}$ olsun. Benzer olarak II.Oyuncu $\{V_1 \cup N(x) : x \in F_2\}$, $F_2 \in [X \backslash V_1]^{<\omega}$ karşılığını verdiğinde I.Oyuncu'nun bir sonraki hamlesi $\{V_2 \cup N(x) : x \in X \backslash V_2\}$, $V_2 = \cup\{N(x) : x \in F_2\} \cup V_1$ olsun ve I bu yöntemle devam etsin.

Oyun bu şekilde devam ettiğinde I.Oyuncu için bir strateji belirlenir. Fakat, X uzayı Menger olduğundan bu strateji bir kazanma stratejisi değildir. O halde I.Oyuncu bu strateji altında en az bir karşılaşmayı kaybeder. Öyleyse bu karşılaşmayı II'nin seçtiği kümelerle $F_1, F_2, \ldots$ şeklinde ifade ettiğimizde $X = \bigcup_{n\in\omega} V_n = \cup\{N(x) : x \in \bigcup_{n\in\omega} F_n\}$ eşitliğini elde ederiz. Üstelik her n için $F_n \subset V_n$ ve $F_{n+1} \cap V_n = \emptyset$ olduğundan $D = \bigcup_{n\in\omega} F_n$, X'in kapalı ve ayrık bir alt kümesidir. Sonuç olarak D-uzayının tüm koşulları sağlandığından X bir D-uzayıdır. ■

Tanım 5.2.4 ($\Gamma_1(X)$ Oyunu) Oyun şu şekildedir. I ve II.Oyuncu her n pozitif tam sayısı için bir rauntta karşı karşıya gelir. n. rauntta I.Oyuncu X topolojik uzayının bir $\mathcal{U}_n$ γ-örtüsünü, II.Oyuncu ise bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ açık kümesini seçer. Oyunun

$$\mathcal{U}_1, U_1, \ldots, \mathcal{U}_n, U_n, \ldots$$

karşılaşmasında II'nin seçtiği açık kümelerin $\{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailesi X için bir γ-örtü oluyorsa II.Oyuncu karşılaşmayı kazanır, aksi halde I.Oyuncu kazanır.

Teorem 5.2.5 X topolojik uzayının $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ özelliğinde olması için gerek ve yeter koşul $\Gamma_1(X)$ oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisinin olmamasıdır.
$(X \in \mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma) \Leftrightarrow I \not\uparrow \Gamma_1(X))$

Kanıt: ($\Leftarrow$) $\Gamma_1(X)$ oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisi olmasın. X uzayının $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ özelliğinde olduğunu görelim. X'in γ-örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisi verilsin. Her n için $\mathcal{U}_n$'i I.Oyuncu'nun n.rauntta seçeceği γ-örtü olarak aldığımızda I.Oyuncu için bir strateji belirleriz. Diğer taraftan $\Gamma_1(X)$ oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisi olmadığından bu strateji altında bir

$$\mathcal{U}_1, U_1, \ldots, \mathcal{U}_n, U_n, \ldots$$

karşılaşmasını II kazanır. Bu durumda her $n \in \omega$ için $U_n \in \mathcal{U}_n$ olmak üzere $\{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, X'in bir γ-örtüsü olacağından X, $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ özelliğindedir.
($\Rightarrow$) X, $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ özelliğinde olsun. $\Gamma_1(X)$ oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisinin olmadığını görelim. σ, $\Gamma_1(X)$ oyununda I.Oyuncu için bir strateji olsun. $\tau \in {}^{<\omega}\omega$ için U_τ açık kümelerini σ'ya göre aşağıdaki gibi tanımlayalım.

I.Oyuncu'nun σ'ya göre ilk hamlesi olan $\sigma(\emptyset)$'yi, $\{U_{(n)} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ kümesiyle işaret edelim. Şimdi her $n \in \omega$ için $\sigma(U_{(n)}) \backslash \{U_{(n)}\} = \{U_{(n,m)} : m = 1, 2, 3 \ldots\}$ şeklinde olsun. Kabul edelim ki $\tau = (n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \omega^k$ için U_τ kümesi yukarıdaki gibi tanımlanmış olsun. Öyleyse $\{U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k,m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailesi de
$\sigma(U_{(n_1)}, U_{(n_1,n_2)}, \ldots, U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}) \backslash \{U_{(n_1)}, U_{(n_1,n_2)}, \ldots, U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}\}$ şeklindedir.

Bu durumda her $k \in \omega$ ve her $(n_1, n_2, \ldots, n_k) \in \omega^k$ için

$$\{U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k,m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$$

X'in bir γ-örtüsüdür. Çünkü σ stratejisine göre

$$\mathcal{U} = \sigma(U_{(n_1)}, U_{(n_1,n_2)}, \ldots, U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)})$$

X'in bir γ-örtüsüdür. O halde $\mathcal{U}$'dan

$$\{U_{(n_1)}, U_{(n_1,n_2)}, \ldots, U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)}\}$$

sonlu ailesini çıkardığımızda elde edeceğimiz

$$\{U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k,m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$$

ailesi de Önerme 3.1.4'e göre X'in bir γ-örtüsüdür.

Öyleyse $\tau \in {}^{<\omega}\omega$ için $\mathcal{U}_\tau = \{U_{\tau \frown (m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$ şeklindeyse $\{\mathcal{U}_\tau : \tau \in {}^{<\omega}\omega\}$ X'in γ-örtülerinin bir dizisidir. Bu diziye $\mathcal{S}_1(\Gamma, \Gamma)$ özelliğini uyguladığımızda

$$\mathcal{V} = \{U_{\tau \frown (n_\tau)} : \tau \in {}^{<\omega}\omega\}$$

X'in bir γ-örtüsü olacak şekilde her $\tau \in {}^{<\omega}\omega$ için en az bir $n_\tau \in \omega$ vardır.

Şimdi $n_1, n_2, \ldots, n_{k+1}, \ldots \in \omega$ özyineli olarak

$$n_1 = n_\emptyset, n_2 = n_{(n_1)}, \ldots, n_{k+1} = n_{(n_1,\ldots,n_k)}, \ldots$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda II.Oyuncu'nun

$$U_{(n_1)}, U_{(n_1,n_2)}, \ldots, U_{(n_1,n_2,\ldots,n_{k+1})}, \ldots$$

hamleleriyle karşılaşmayı kazanacağını görelim.

Her $k \in \omega$ için $U_{(n_1,n_2,\ldots,n_{k+1})} = U_{(n_1,n_2,\ldots,n_k,n_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)})}$ şeklinde olduğundan

$$\mathcal{W} = \{U_{(n_1)}, U_{(n_1,n_2)}, \ldots, U_{(n_1,n_2,\ldots,n_{k+1})}, \ldots\}$$

kümesi $\mathcal{V}$'nin bir alt kümesidir. Diğer taraftan U_τ kümelerinin kuruluşundan, $\mathcal{W}$ 'nin elemanları birbirinden farklıdır. O halde Önerme 3.1.4'e göre $\mathcal{W}$, X'in bir γ-örtüsüdür. Sonuç olarak I.Oyuncu σ stratejisi altında bir karşılaşmayı kaybettiğinden I.Oyuncu'nun $\Gamma_1(X)$ oyununda bir kazanma stratejisi yoktur. ■

Tanım 5.2.6 (Gamma(X) Oyunu) Bu oyunda da I ve II.Oyuncu her n pozitif tam sayısı için bir rauntta karşı karşıya gelir. n. rauntta I.Oyuncu X topolojik uzayının bir $\mathcal{U}_n$ ω-örtüsünü, II.Oyuncu ise bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ açık kümesini seçer. Oyunun

$$\mathcal{U}_1, U_1, \ldots, \mathcal{U}_n, U_n, \ldots$$

karşılaşmasında II'nin seçtiği açık kümelerin $\{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailesi X için bir γ-örtü oluyorsa II.Oyuncu karşılaşmayı kazanır, aksi halde I.Oyuncu kazanır.

Teorem 5.2.7 X topolojik uzayının $\mathcal{S}_1(\Omega, \Gamma)$ özelliğinde olması için gerek ve yeter koşul Gamma(X) oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisinin olmamasıdır.
$(X \in \mathcal{S}_1(\Omega, \Gamma) \Leftrightarrow \mathrm{I} \not\uparrow \mathrm{Gamma}(X))$

Kanıt: ($\Leftarrow$) Teorem 5.2.2 ve 5.2.5'in ispatlarının ilgili bölümündeki gibidir.
($\Rightarrow$) Teorem 5.2.5'in ispatından farklı olarak $\tau \in {}^{<\omega}\omega$ için, Önerme 3.1.5'e göre

$$\mathcal{U}_\tau = \{U_{\tau\frown(m)} : m = 1, 2, 3, \ldots\}$$

X uzayının bir ω örtüsüdür. ■

5.3 Rothberger(X) Oyunu

Tanım 5.3.1 (Rothberger(X) Oyunu) Bu oyunda da I ve II.Oyuncu her n pozitif tam sayısı için bir rauntta karşı karşıya gelir. n. rauntta I.Oyuncu X topolojik uzayının bir $\mathcal{U}_n$ açık örtüsünü, II.Oyuncu ise bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ açık kümesini seçer. Oyunun

$$\mathcal{U}_1, U_1, \ldots, \mathcal{U}_n, U_n, \ldots$$

karşılaşmasında II'nin seçtiği açık kümelerin $\{U_n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ailesi X'i örtüyorsa II.Oyuncu karşılaşmayı kazanır, aksi halde I.Oyuncu kazanır.

Rothberger(X) Oyunu ile $\mathcal{S}_1(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ özelliği arasında aşağıdaki teoremde verilen ilişki Pawlikowski tarafından [6]'da kanıtlamıştır.

Teorem 5.3.2 (Pawlikowski) X topolojik uzayının $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğinde olması için gerek ve yeter koşul Rothberger(X) oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisinin olmamasıdır. ($X \in \mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O}) \Leftrightarrow \mathrm{I} \not\uparrow$ Rothberger(X)) ■

Tanım 5.3.3 (Rothberger$_\Lambda(X)$ Oyunu) Bu oyunda Rothberger(X) oyunundan farklı olarak, n. rauntta I.Oyuncu X topolojik uzayının bir $\mathcal{U}_n$ geniş örtüsünü, II.Oyuncu ise bir $U_n \in \mathcal{U}_n$ açık kümesini seçer. Oyunun

$$\mathcal{U}_1, U_1, \ldots, \mathcal{U}_n, U_n, \ldots$$

karşılaşmasında II'nin seçtiği açık kümelerin $\{U_n : n = 1,2,3,\ldots\}$ ailesi X için bir geniş örtü oluyorsa II.Oyuncu karşılaşmayı kazanır, aksi halde I.Oyuncu kazanır.

Teorem 5.3.4 X topolojik uzayının $\mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda)$ özelliğinde olması için gerek ve yeter koşul
Rothberger$_\Lambda(X)$ oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisinin olmamasıdır. ($X \in \mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda) \Leftrightarrow \mathrm{I} \not\uparrow$ Rothberger$_\Lambda(X)$)

Kanıt: ($\Leftarrow$) Açıktır.
($\Rightarrow$) X uzayı $\mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda)$ özelliğinde olsun. I.Oyuncu'nun Rothberger$_\Lambda(X)$ oyununda bir kazanma stratejisinin olmadığını görelim. F, bu oyunda I.Oyuncu için bir strateji olsun. Bu strateji altında I'in seçeceği $\mathcal{U}$ geniş örtüleri $\{\phi_n(\mathcal{U}) : n = 1,2,3,\ldots\}$ şeklinde belirtelim.

X uzayının topolojisi τ ile gösterilsin. Bu durumda her $n \in \omega$ için $\tau_n = \{U \times \{n\} : U \in \tau\}$'da $X_n = X \times \{n\}$ üzerinde bir topolojidir. Diğer taraftan $\bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$ ailesi, $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$ üzerinde bir $\sum\limits_{n\in\omega} \tau_n$ topolojinin tabanıdır. $(\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n, \sum\limits_{n\in\omega} \tau_n)$ topolojik uzayı $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ ile gösterilsin.

İddia1: $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayının her açık örtüsünün, elemanları $\bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$ kümesinden olan bir incesi vardır.

Kanıt1: $\mathcal{V}$, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayının bir açık örtüsü olsun. O halde her $(x,n) \in \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$ için $(x,n) \in V$ olacak şekilde bir $V \in \mathcal{V}$ vardır. Diğer taraftan $\bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayının bir tabanı olduğundan $(x,n) \in T \subset V$ olacak şekilde bir $T \in \bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$ kümesi vardır. Böylece her $(x,n) \in \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n$ için yukarıdaki gibi bir $T \in \bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$ seçmekle elde edeceğimiz aile, $\mathcal{V}$ açık örtüsünün, elemanları $\bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$'den olan bir incesidir.

O halde, genelliği bozmadan $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayının açık örtülerinin elemanlarının $\bigcup\limits_{n\in\omega} \tau_n$ kümesinden geldiğini kabul edebiliriz.

X, $\mathcal{S}_1(\Lambda,\Lambda)$ özelliğinde olduğundan Teorem 4.1.10'a göre $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğine de sahiptir. Dolayısıyla her $n \in \omega$ için (X_n, τ_n) de $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğindedir. Bu durumda $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayının $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğinde olduğunu görelim.

İddia2: Her $n \in \omega$ için (X_n, τ_n) uzayı $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğinde ise, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayı da $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğindedir.

Kanıt2: $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$'in açık örtülerinin bir $(\mathcal{U}_n : n = 1,2,3,\ldots)$ dizisi verilsin. Her $m \in \omega$ için S_m sonsuz bir küme olmak üzere $(S_m : m = 1,2,3\ldots)$ pozitif tam sayılar kümesinin bir parçalanışı olsun. Bu durumda her m için $(\mathcal{U}_n : n \in S_m)$, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayının açık örtülerinin bir dizisidir. Her $n \in S_m$ için $X_m \subset \bigcup\limits_{n\in\omega} X_n = \cup\mathcal{U}_n$ olduğundan ve $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$'in açık örtülerinin üzerine yaptığımız kabulden $X_m = \cup\mathcal{V}_n$ olacak şekilde bir $\mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ vardır. Böylece her $m \in \omega$ için $(\mathcal{V}_n : n \in S_m)$, X_m'in açık örtülerinin bir dizisidir. Diğer taraftan X_m uzayı $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğinde olduğundan her $n \in S_m$ için bir $V_n \in \mathcal{V}_n$ vardır ki $\{V_n : n \in S_m\}$, X_m'in bir açık örtüsüdür. O halde her $n \in \omega$ için $V_n \in \mathcal{V}_n \subset \mathcal{U}_n$ olmak üzere $\{V_n : n = 1,2,3,\ldots\}$ ailesi $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$'in bir açık örtüsü olacağından, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayı da $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğindedir.

Rothberger$(\sum\limits_{n\in\omega} X_n)$ oyununda I için bir G stratejisini şu şekilde tanımlayalım. I.Oyuncu'nun G'ye göre ilk hamlesi $G(\sum\limits_{n\in\omega} X_n) = \{\phi_m(F(X)) \times \{n\} : m \geq n \geq 1\}$ olsun.($F(X)$, X'in bir geniş örtüsü olduğundan $G(\sum\limits_{n\in\omega} X_n)$'de, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$'in bir açık örtüsüdür.) $G(\sum\limits_{n\in\omega} X_n)$'in bir $\underline{T}_1$ elemanını $\phi_{m_1}(F(X)) \times \{n_1\}$ ile belirtelim. Bu durumda $F(X)$'in T_1 elemanı da $\phi_{m_1}(F(X))$ olsun. $G(\underline{T}_1)$ ise $\{\phi_m(F(T_1)) \times \{n\} : m \geq n \geq 1, \phi_m(F(T_1)) \neq T_1\}$ şeklinde tanımlansın. Benzer şekilde $G(\underline{T}_1)$'in bir $\underline{T}_2$ elemanı $\phi_{m_2}(F(T_1)) \times \{n_2\}$ şeklindeyse $T_2 = \phi_{m_2}(F(T_1))$ olsun. $G(\underline{T}_1, \underline{T}_2) = \{\phi_m(F(T_1,T_2)) \times \{n\} : m \geq n \geq 1, \phi_m(F(T_1,T_2)) \notin \{T_1,T_2\}\}$ olmak üzere G stratejisi bu şekilde tanımlansın. Fakat, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$ uzayı $\mathcal{S}_1(\mathcal{O},\mathcal{O})$ özelliğinde olduğundan Pawlikowski teoremine göre, G bu oyunda I.Oyuncu için bir kazanma stratejisi değildir. O halde oyunun öyle bir

$$G(\sum_{n\in\omega} X_n), \underline{T}_1, G(\underline{T}_1), \underline{T}_2, \ldots, G(\underline{T}_1, \ldots, \underline{T}_{n-1}), \underline{T}_n, \ldots$$

karşılaşması vardır ki $\underline{\mathcal{W}} = \{\underline{T}_n : n = 1,2,3,\ldots\}$, $\sum\limits_{n\in\omega} X_n$'in bir açık örtüsüdür. Bu durumda $\mathcal{W} = \{T_n : n = 1,2,3,\ldots\}$ ailesi de X'in bir geniş örtüsü olacağından Rothberger$_\Lambda(X)$ oyununda II.Oyuncu'nun $\mathcal{W} = \{T_n : n = 1,2,3,\ldots\}$ hamleleri I'in

F stratejisini başarısız kılar. ■

5.4 Hurewicz(X) Oyunu

Tanım 5.4.1 (Hurewicz Özelliği) X topolojik uzayının açık örtülerinin herhangi bir $(\mathcal{U}_n : 1, 2, 3, \ldots)$ dizisi için;

1. $\forall n \in \omega$, $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$

2. $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{m=n}^{\infty} (\cup \mathcal{V}_m)$

koşullarını sağlayan bir $(\mathcal{V}_n : n = 1, 2, 3, \ldots)$ dizisi varsa X, *Hurewicz özelliğindedir* denir.

Tanım 5.4.2 (Hurewicz(X) Oyunu) I ve II.Oyuncu her n pozitif tam sayısı için bir rauntta karşı karşıya gelir. n. rauntta I.Oyuncu X uzayının bir $\mathcal{U}_n$ açık örtüsünü, II.Oyuncu ise bir $\mathcal{V}_n \in [\mathcal{U}_n]^{<\omega}$ kümesini seçer. Oyunun

$$\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{U}_n, \mathcal{V}_n, \ldots$$

karşılaşması için, $(\forall x \in X)(\forall_n^\infty, x \in \cup \mathcal{V}_n)$ koşulu sağlanıyorsa II.Oyuncu karşılaşmayı kazanır, aksi halde I.Oyuncu kazanır.

Teorem 5.4.3 X topolojik uzayının Hurewicz özelliğinde olması için gerek ve yeter koşul Hurewicz(X) oyununda I.Oyuncu'nun bir kazanma stratejisinin olmamasıdır.
(X Hurewicz $\Leftrightarrow$ I $\uparrow\!\!\!\!/$ Hurewicz(X))

Kanıt: $(\Leftarrow)$ Açıktır.
$(\Rightarrow)$ σ, Hurewicz(X) oyununda I.Oyuncu için bir strateji olsun. I.Oyuncu'nun σ'ya göre ilk hamlesi olan $\sigma(\emptyset), \{U_{(n)} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ ile ifade edilsin. $\tau \in {}^{<\omega}\omega$ için U_τ açık kümeleri şu şekilde tanımlayalım. $\sigma(\{U_{(n)} : n \leq n_1\}) = \{U_{(n_1,k)} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ olsun. Kabul edelim ki $\tau = (n_1, \ldots, n_m) \in {}^{<\omega}\omega$ için U_τ kümesi tanımlanmış olsun. Bu durumda
$\sigma(\{U_{(n)} : n \leq n_1\}, \ldots, \{U_{(n_1,\ldots,n_{m-1},n)} : n \leq n_m\}) = \{U_{(n_1,\ldots,n_m,k)} : k = 1, 2, 3, \ldots\}$ şeklindedir. O halde her $\tau \in {}^{<\omega}\omega$ için $\{U_{\tau\frown(n)} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$, X uzayının bir açık örtüsüdür. Öyleyse Hurewicz özelliğinden her $\tau \in {}^{<\omega}\omega$ için bir $n_\tau \in \omega$ vardır ki $\mathcal{V}_\tau = \{U_{\tau\frown(n)} : n \leq n_\tau\}$ için $(\forall x \in X), (\forall_\tau^\infty, x \in \cup \mathcal{V}_\tau)$ sağlanır.

Şimdi $n_1, \ldots, n_k, \ldots$ pozitif tam sayıları aşağıdaki gibi tanımlandığında

$$n_{k+1} = \begin{cases} n_{\emptyset} & ; \quad k = 0 \\ n_{(n_1,\ldots,n_k)} & ; \quad k \neq 0 \end{cases}$$

II.Oyuncu'nun $\mathcal{V}_{\emptyset}, \mathcal{V}_{(n_1)}, \ldots, \mathcal{V}_{(n_1,\ldots,n_k)}, \ldots$ hamleleri I.Oyuncu'nun σ stratejisini başarısız kılar. $\blacksquare$

Kaynaklar

[1] F. Rothberger, Eine Verschärfung der Eigenschaft C, Fundamenta Mathematicae 30 (1938), 50-55.

[2] A. Bülbül, Genel Topoloji, Hacettepe Üniversitesi Yayınları (2004)

[3] M. Sakai, Property C and Function Spaces, Proceedings of the American Mathematical Society 104 (1988), 917-919

[4] G. Gruenhage, Topological Games, Auburn University May 31, 2010

[5] L. Aurichi, D-Spaces, Topological Games, and Selection Principles, Topology Proc. 36 (2010), 107-122.

[6] J. Pawlikowski, Undetermined Sets of Point-Open Games, Fundamenta Mathematicae 144 (1994), 279-285

[7] M. Scheepers, Open Covers and Partition Relations, Proceedings of the AMS 127 (199), 577-581

[8] M. Scheepers, Combinatorics of Open Covers I: Ramsey Theory, Topology and its Applications 69 (1996), 31-62

[9] W. Just, A. W. Miller, M. Scheepers, and P. J. Szeptycki, The combinatorics of open covers II, Topology and its Applications 73 (1996), 241-266.

[10] M. Scheepers, Selection principles in Topology: New directions, Filomat 15 (2001), 111-126.

[11] M. Scheepers, Selection principles and covering properties in topology, Note di Matematica 22:2 (2003),

[12] D.H. Fremlin and A.W.Miller, On some properties of Hurewicz, Menger, and Rothberger, Fundamenta Mathematicae 129 (1988), 17-33

[13] R.Engelking, General Topology, PWN, 1977.

[14] S.Willard, General Topology, Addison-Wesley, 1970

[15] B.Tsaban, Selection principles and the minimal tower problem, Note di Matematica 22 (2003), 53-81.

[16] B.Tsaban, Some new directions in infinite-combinatorial topology, Set Theory J. Bagaria and S. Todorcevic, Trends in Mathematics, Birkhauser, 2006, 225-255.

[17] B.Tsaban, Selection principles in mathematics: A milestone of open problems, Note di Matematica 22 (2003), 179-208.

[18] Matematik Dünyası 2010-1, 21-26

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Ali Emre EYSEN

Doğum Yeri : Ankara

Doğum Tarihi : 30.07.1986

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise : 2000-2003 Elmadağ Lisesi

Lisans : 2004-2005 Hacettepe Üniversitesi,
Yabancı Diller Yüksek Okulu, İngilizce Hazırlık
2005-2009 Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Yabancı Dil : İngilizce

İş Tecrübesi :

2010- Araştırma görevlisi, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü