KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMLARIN BELİRLİ ALT SINIFLARI İLE İNCELENMESİ

DOKTORA TEZİ

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

NİSAN 2017
TRABZON

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMLARIN BELİRLİ ALT SINIFLARI İLE İNCELENMESİ

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 24 / 03 /2017
Tezin Savunma Tarihi : 24 / 04 /2017

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Tülay KESEMEN
İkinci Danışman : Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU (KHANİYEV)

Trabzon 2017

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalında
Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK Tarafından Hazırlanan

(s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMLARIN BELİRLİ ALT SINIFLARI İLE İNCELENMESİ

başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 04 /04/2017 gün ve 1696 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan	:	**Prof. Dr. Cemil YAPAR**	....
Üye	:	**Prof. Dr. Hülya BAYRAK**	....
Üye	:	**Prof. Dr. Funda KARAÇAL**	....
Üye	:	**Doç. Dr. Tülay KESEMEN**	....
Üye	:	**Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK**	....

Prof. Dr. Sadettin KORKMAZ
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmanın hazırlanma süreci boyunca fikirlerini, teşviklerini ve yönlendirmelerini benden bir an olsun esirgemeyen, tez konusunun belirlenmesinden sonuç aşamasına kadar her konuda bana rehberlik eden danışman hocalarım Doç. Dr. Tülay KESEMEN'e ve Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU (KHANİYEV)' na teşekkür eder, en içten saygı ve minnetlerimi sunarım. Onların emekleri ve sürekli destekleri olmadan bu çalışma mümkün olamazdı.

Doktora eğitimim boyunca bana yol gösteren değerli görüş ve tavsiyeleri ile katkıda bulunan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. İhsan ÜNVER'e ayrıca KTÜ İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü'nün değerli öğretim üyeleri Doç. Dr. Zafer KÜÇÜK ve Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ' a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışma boyunca bana her konuda destek ve yardımcı olan tez izleme jüri üyesi hocam saygıdeğer Prof. Dr. Funda KARAÇAL' a teşekkürlerimi sunarım.

115F221 nolu araştırma projesi kapsamında bu çalışmayı finansal olarak destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)' a teşekkür ederim.

Eğitim hayatımın her aşamasında maddi ve manevi desteklerini arkamda hissettiğim aileme, arkadaşlarıma, RTEÜ Matematik Bölümündeki mesai arkadaşlarıma ve doktora eğitimimin bütün aşamalarında yanımda olan, her daim sevgisini ve desteğini hissettiğim sevgili eşim Berkay'a sonsuz teşekkür ederim.

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

Trabzon 2017

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum "(s,S) Tipli Envanter Modellerin Ağır Kuyruklu Dağılımların Belirli Alt Sınıfları ile İncelenmesi" başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanlarım Doç. Dr. Tülay Kesemen ve Prof. Dr. Tahir Khaniyev 'ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 24/04/2017

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

Doktora Tezi

ÖZET

(s,S) TİPLİ ENVANTER MODELLERİN AĞIR KUYRUKLU DAĞILIMLARIN BELİRLİ ALT SINIFLARI İLE İNCELENMESİ

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Tülay KESEMEN,
İkinci Danışman: Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU (KHANİYEV)
2017, 106 Sayfa

Bu çalışmanın amacı, literatürdeki önemli stok kontrol modellerinden biri olan (s,S) tipli stok kontrol modellerini ağır kuyruklu dağılıma sahip talep miktarları ile incelemek ve ağır kuyruklu talep miktarlarının (s,S) tipli stok kontrol modelleri üzerindeki etkisini araştırmaktır. Talep miktarı ağır kuyruklu dağılıma sahip stok kontrol modellerini teorik olarak incelemek, taleplerde meydana gelebilecek beklenmedik dalgalanmaların bu modeller üzerindeki etkilerini tahmin edebilmek açısından önemlidir.

Bu çalışmada öncelikle ağır kuyruklu dağılımlar ve tüm altsınıfları ile ilgili genel bilgiler verilecektir. (s,S) tipli stok kontrol modeli "Ödüllü Yenileme Süreci" olarak adlandırılan yarı-Markov bir model ile temsil edilecek ve bu modeli ifade eden stokastik süreç matematiksel olarak inşa edilecektir. Ağır kuyruklu dağılımların kuyruk davranışının modeli ifade eden süreç üzerindeki etkisi incelenecektir. Bu hedefe ulaşmak için öncelikle sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun n. mertebeden sonlu momentleri için asimptotik açılımlar elde edilecektir. Daha sonra sürecin ergodik dağılımı için zayıf yakınsama teoremi ispat edilecektir. Ayrıca elde edilen asimptotik açılımların yardımı ile hesaplanan moment değerlerinin kesin değerlere yakınlığı Monte-Carlo simülasyon yöntemi ile test edilecektir.

Anahtar Kelimeler: (s,S) tipli stok kontrol modelleri, Ödüllü yenileme süreçleri, Ergodik dağılım fonksiyonu, Ergodik dağılımın momentleri, Ağır kuyruklu dağılımlar, Yenileme fonksiyonu, Zayıf yakınsama.

PhD. Thesis

SUMMARY

INVESTIGATION OF INVENTORY MODEL OF TYPE (s,S) WITH CERTAIN SUBCLASSES OF HEAVY TAILED DISTRIBUTIONS

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Assoc. Prof. Tülay KESEMEN,
Second Supervisor: Prof. Dr. Tahir HANALİOĞLU (KHANİYEV).
2017, 106 Pages

The aim of this study is to investigate an inventory model of type (s,S) with heavy tailed demands and to observe the impact of heavy tailed distributions on this model. It is important to investigate stock control models with heavy tailed demand quantities in order to analyze the effects of unexpected fluctuations of demands on these models.

As a first step all subclasses of heavy-tailed distributions and their properties will be discussed. Then an inventory model of type (s,S) will be represented with a semi-Markovian model called a renewal- reward process. A stochastic process which expresses this model will be constructed mathematically. Our goal is to observe the impacts of the different tail structure of heavy tailed distributions on inventory model of type (s,S). To achieve this goal an asymptotic expansion for ergodic distribution function and n^{th} order moments of the ergodic distribution function will be obtained by using asymptotic methods. Then weak convergence theorem will be proved for the ergodic distribution function. Moreover by using Monte-Carlo simulation method, the accuracy between the moments obtained by using asymptotic formulas and exact formulas will be tested.

Key Words: Inventory model of type (s,S), Renewal reward process, Ergodic distribution function, Moments of ergodic distribution, Heavy tailed distributions, Renewal function, Weak convergence.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa No

SEMBOLLER DİZİNİ

$a(x) \sim b(x)$	: $a(x)$'in $b(x)$'e asimptotik denkliği
$E(X)$	: X rasgele değişkeninin beklenen değeri.
$E(\|X\|)$	: X rasgele değişkeninin mutlak momenti.
$E(\|X\|^n)$	: X rasgele değişkeninin n. dereceden mutlak momenti.
$E\left(e^{\theta X}\right)$	: X rasgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu.
$F_1(x) * F_2(x)$	: F_1 ve F_2 fonksiyonlarının konvülüsyon çarpımı.
$\bar{F}(x)$	: F dağılım fonksiyonunun kuyruğu.
$F_I(x)$	: F dağılım fonksiyonunun integrallenmiş kuyruk fonksiyonu.
$\Gamma(x)$	: Gamma fonksiyonu.
$log\big(F(x)\big)$	: $F(x)$ fonksiyonunun logaritması.
$\limsup_{x\to\infty} F(x)$	: $F(x)$ fonksiyonunun üst limiti.
$\liminf_{x\to\infty} F(x)$	: $F(x)$ fonksiyonunun alt limiti.
$P\,\{A\}$	: A olayının meydana gelme olasılığı.
$var(X)$	: X rasgele değişkeninin varyansı.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Stokastik süreçler, rasgele değişken dizileri arasındaki ilişkileri inceleyen olasılığın önemli çalışma alanlarından biridir. Rasgelelik çevremizde meydana gelen pek çok olayın ayrılmaz bir parçası olduğundan, doğa ve mühendislik bilimlerindeki problemlerin modellenmesinde stokastik süreçler önemli bir rol oynamaktadır. Özellikle yenileme, ödüllü yenileme, Markov süreçleri ve rasgele yürüyüş süreçleri uygulama alanları bakımından stokastik süreçlerin en önemli sınıflarını oluştururlar.

Poisson süreçlerinin bir genellemesi olarak ortaya çıkan yenileme süreçleri, teorik yapısı nedeniyle pek çok gerçek hayat probleminin modellenmesinde kullanılmaktadır. Günümüzde hisse senedi fiyatlarından internet trafiğine, stokastik finanstan güvenilirlik teorisine kadar zamana bağlı ve rastlantısal olarak değişen pek çok problem yenileme süreçleri yardımı ile modellenmekte ve incelenmektedir.

Yenileme süreçleri, envanter modeller ile ilgili problemlerin modellenmesinde ve çözümünde de önemli bir rol oynamaktadır. Literatürde en çok kullanılan envanter modellerden biri (s,S) tipli envanter modellerdir. Bu çalışmada (s,S) tipli bir envanter model, ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan kesikli müdahaleli yarı Markov bir stokastik süreç yardımı ile modellenecek ve modeli ifade eden süreç matematiksel olarak kurulacaktır. Daha sonra talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler ağır kuyruklu dağılımların alt üstel dağılımlar ve düzenli değişen dağılımlar alt sınıflarına sahipken, (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin belirli bazı karakteristikleri incelenecektir.

(s,S) tipli envanter modeller ile ilgili literatürde pek çok önemli çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda (s,S) tipli envanter modeli temsil eden süreç müdahaleyi ifade eden kesikli şans karışımları için farklı dağılımlar kullanılarak ele alınmış, sürecin sınır fonksiyonelleri ve kendi karakteristikleri incelenmiştir. (s,S) tipli envanter modeller ile ilgili mevcut literatürün büyük bir kısmı talep miktarlarının hafif kuyruklu ve sonlu varyanslı dağılıma sahip olması varsayımına dayanmaktadır.

Hafif kuyruklu dağılımlar, son yıllara kadar doğa bilimleri ve sosyal bilimler de dahil olmak üzere pek çok problemin modellenmesinde yaygın olarak kullanılmışlardır. Bu durumun nedeni hafif kuyruklu dağılımların merkezi limit teoremini sağlamalarıdır.

Merkezi limit teoremi, rasgele değişkenlerin orijinal dağılımı ne olursa olsun, örneklem büyüklüğü “n” arttıkça örneklem ortalamasının dağılımının normal dağılıma zayıf anlamda yakınsadığını söyler. Bu durum hafif kuyruklu dağılımların şeklinin deneysel verilere, özellikle ortalama bir değer etrafında kümelenen verilere gayet uyumlu olmaları anlamına gelmektedir. Otoyoldaki otomobillerin hızı, hava basıncı, yaz mevsiminde öğle saatlerinde Ankara’da ölçülen sıcaklık değerleri gibi günlük hayatta karşılaşılan pek çok veri, ortalama bir değer etrafında kümelenen veri tanımlamasına uymaktadır. Bu verilerin içinde son derece nadir olarak rastlanan büyük sapmalar bile her iki yönde de ortalamanın en fazla iki katı kadar bir değer alır. Örneğin Türkiye'deki yetişkin kadınların boy ortalamaları 1.60 cm dir. Her bir bireyin boyu nadir olarak bu değerden çok fazla sapma gösterir dolayısı ile bu tip verilerin dağılımını beklenen değer ve varyans iyi bir şekilde karakterize eder. Kısacası, temelde bu örneklerin hepsini üreten süreçler merkezi limit teoremini sağlayan genel bir sınıfa dahildirler.

Bununla birlikte günümüzde normal dağılım varsayımından sapma gösteren pek çok olayın olduğu bilinmektedir. Bazı durumlarda sapma bir kusur ya da sorun değil, üretim sürecinde ilginç bir karmaşıklığın olduğunun göstergesidir. Özellikle son 15 yılda sosyal, biyolojik ve teknolojik sistemlerin modellenmesinde normal dağılım varsayımına uymayan ve içerisinde uç değerler bulunduran sayısız veri ile karşılaşıldığı gözlemlenmiştir. Böyle verileri temsil eden dağılımların bazı durumlarda varyansları veya birinci momentleri sonsuz olabilmekte, dolayısı ile bu verileri karakterize etmek için beklenen değer ve varyans yeterli olmamaktadır. Ayrıca bu verilerin dağılımları merkezi limit teoremini sağlamamaktadırlar. Bütün bu nedenlerden dolayı içerisinde böyle uç değerler bulunduran verilerin, özel dağılımlar ile modellenmeleri gerekmektedir. Normallik varsayımının dışına çıkan bu dağılımlar literatürde ağır kuyruklu dağılımlar olarak isimlendirilmişlerdir [46].

Ağır kuyruklu dağılımlar için dağılımların kullanıldığı modele göre, literatürde farklı tanımlamalar mevcuttur. Genel olarak kuyruk kısımları üstel dağılıma göre daha yavaş sıfıra giden dağılımları ya da sonlu moment çıkaran fonksiyonu olmayan dağılımları nitelendirmek için ağır kuyrukludur ifadesi kullanılır ([34], [73]). Uygulamada ise ağır kuyruklu dağılımlar, sıra dışı olayları, yani gerçekleşme olasılığı düşük fakat gerçekleştiğinde olumsuz etkileri büyük olabilecek olaylara ait verileri modellemek için kullanılırlar. Bu tür sıra dışı olaylarla tıp biliminden inşaat mühendisliği uygulamalarına, meteorolojiden finansal risk yönetimine ve stoklama problemlerine kadar hayatın birçok alanında karşılaşıldığı için, ağır kuyruklu dağılımların ele alınan model üzerindeki etkilerinin araştırılması son yıllarda çok önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir.

Ağır kuyruklu dağılıma uyan verilerin gözlemlendiği önemli uygulama alanlarından biri de envanter modeller ile ilgili problemlerdir. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenlerin kuyruk yapılarının bazı koşullar altında envanter sistemler üzerinde önemli etkilerinin olduğu bilinmektedir. Örneğin üretilen herhangi bir aşı için talep normal koşullar altında istikrarlıdır, fakat önemli bir salgın karşısında aniden 10-20 kat artabilir. Ayrıca bir ürüne olan talebi ifade eden rasgele değişkenlerin ağır kuyruklu bir dağılıma sahip olması için mutlaka sıra dışı bir olay ile karşılaşılması gerekmez. Son yıllarda özellikle moda sektörü ürünleri, teknoloji ürünleri ve kitap, DVD gibi yaratıcı ürünler kategorisinde yer alan ürünlerin internet üzerinden yapılan satışları ile ilgili pek çok araştırma, talep miktarlarının ağır kuyruklu dağılım gösterdiğine dair somut örnekler sunmaktadır ([14], [22], [35]). Ayrıca belli başlı ürünler için müşterilerin satın alma eğilimlerini belirlemek üzere yapılan başka bir çalışmanın sonucunda müşterilerin mağazalardan satın aldıkları ürünlerin hafif kuyruklu dağılım yapısı gösterdiği, internet üzerinden satın aldıkları ürünlerin ise genellikle ağır kuyruklu dağılım yapısına sahip olduğu gözlemlenmiştir [8]. Dolayısı ile özellikle internetten satış yapan perakendecilerin envanter politikalarını oluştururken taleplerin kuyruk davranışlarını göz önünde bulundurmaları oldukça önemlidir.

(s,S) tipli envanter modeller literatürde pek çok farklı hafif kuyruklu dağılım ile incelenmiştir. Fakat ağır kuyruklu talep miktarlarının (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin karakteristiklerine etkisi bugüne kadar incelenmemiştir. Bu çalışmanın amacı ağır kuyruklu talep miktarlarının (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin karakteristikleri üzerindeki etkisini araştırmaktır. Bu maksatla sırası ile yapılmış olan çalışmalar şu şekildedir. Öncelikle ağır kuyruklu dağılıma sahip rasgele değişkenler hakkında genel bilgiler ve bu rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarına ilişkin ayrıntılı bir literatür araştırması verilecektir. Talep miktarları farklı alt sınıflardan ağır kuyruklu dağılımlara sahipken (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlara ulaşılacak ve bu asimptotik açılımlar için zayıf yakınsama teoremi ispat edilecektir. Ayrıca sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun n. dereceden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılacaktır. Son olarak elde edilen yaklaşık sonuçların kesin formüller ile uyumluluğu Monte Carlo simülasyon yöntemi ile test edilecektir.

1.2. Temel Tanım ve Teoremler

1.2.1. Sonsuz Küçük, Sonsuz Büyük Fonksiyonlar ve Asimptotik Denklik

Bu kısımda çalışmanın ilerleyen bölümlerinde kullanılacak olan sonsuz küçük ve sonsuz büyük fonksiyonlar olarak bilinen bazı önemli fonksiyonlar ile asimptotik denklik kavramı kısaca ele alınacaktır. Ayrıca bu kavramlar ile ilgili belli başlı özelliklere değinilecektir.

Tanım 1.2.1.1 [43] $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayıların yeterince büyük bir aralığında tanımlı iki fonksiyon olsunlar. $x \geq x_0$ olmak üzere

$$|f(x)| \leq c|g(x)|$$

olacak şekilde x_0 ve c sabitleri mevcut ise $f(x) = O\big(g(x)\big)$ biçiminde yazılır ve $f(x)$, $O\big(g(x)\big)$ sınıfındandır denir. Burada c sayısına O sabiti, $x \geq x_0$ aralığına da geçerlilik aralığı denir.

Örnek 1.2.1.1 [43] $x = O(e^x)$ tir. Bunu ispatlamak için her $x \geq x_0$ için $x \leq c\, e^x$ olacak şekilde x_0 ve c sabitinin bulunduğunu göstermek gerekir. Yani öyle bir x_0 sayısı bulunmalıdır ki $q(x) = x/e^x$ fonksiyonu $[x_0, \infty)$ aralığında sonlu olsun. Dikkat edilir ise, $q(x)$ fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında negatif olmayan sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca $x \to \infty$ için $q(x) \to 0$ dır. Dolayısı ile, bu fonksiyon $[0, \infty)$ aralığında sonludur. Yani $x_0 = 0$ ve c'nin herhangi bir değeri için $x = O(e^x)$ asimptotik ifadesi doğrudur.

Tanım 1.2.1.2 [43] $f(x)$ ve $g(x)$ reel sayıların yeterince büyük bir aralığında tanımlı iki fonksiyon ve $g(x) \neq 0$ olsun. Eğer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

şartı sağlanıyor ise $f(x) = o\big(g(x)\big)$ biçiminde yazılır ve $f(x)$, $o\big(g(x)\big)$ sınıfından bir fonksiyondur denir.

Not 1.2.1.1 [43] $f(x) = o\big(g(x)\big)$, $(x \to \infty)$ özelliğinin sağlanması $f(x)$'in $g(x)$' ten daha küçük dereceden olduğunu gösterir. Dolayısı ile $f(x) = o\big(g(x)\big)$ ise aynı zamanda $f(x) = O\big(g(x)\big)$ tir. Bu durumun tersi doğru değildir, yani "o" asimptotik ilişkisi "O" asimptotik ilişkisinden daha güçlüdür.

Tanım 1.2.1.3 [43] $g(x) \neq 0$ olmak üzere reel sayılarda tanımlı $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları için eğer,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

şartı sağlanıyor ise $x \to \infty$ için $f(x)$, $g(x)$'e asimptotik denktir denir ve $f(x) \sim g(x)$ biçiminde yazılır. Asimptotik denklik çok küçük ve çok büyük fonksiyonlar ile yakından ilgilidir. Bu durum aşağıdaki özellik ile açıklanabilir:

Özellik 1.2.1.1 [43] $f(x) \sim g(x)$ olduğunda $f(x) = g(x) + o\big(g(x)\big)$ tir.

Not 1.2.1.2 [43] o fonksiyonu her zaman O fonksiyonundan daha güçlüdür fakat, O fonksiyonu yakınsama hızı hakkında o fonksiyonundan daha fazla bilgi içerir. Ayrıca aşağıda verilen özelliklerinden dolayı O fonksiyonu ile işlem yapmak her zaman o fonksiyonu ile işlem yapmaktan daha kolaydır.

Özellik 1.2.1.2 (O Fonksiyonu ile İlgili Temel Özellikler) [29]

(i) C pozitif sabit bir sayı ise, $f(x) = O\big(C\, g(x)\big)$ olması ile $f(x) = O(g(x))$ olması birbirine denktir. Özel olarak $f(x) = O(C)$ ise $f(x) = O(1)$ dir.

(ii) $f(x) = O(g(x))$ ve $g(x) = O(h(x))$ olduğunda $f(x) = O(h(x))$ dir.

(iii) $f_i(x) = O\big(g_i(x)\big)$, $i = 1,2$ olsun. Bu durumda $f_1(x)f_2(x) = O\big(g_1(x)g_2(x)\big)$ dir.

(iv) $f(x) = O\big(g(x)h(x)\big)$ olduğunda $f(x) = g(x)O\big(h(x)\big)$ dir.

(v) $f(h) = p(h) + O(h^n)$, $g(h) = q(h) + O(h^m)$ ve $r = min\{m, n\}$ olmak üzere $f(h) + g(h) = p(h) + q(h) + O(h^r)$ ve $f(h)\, g(h) = p(h)q(h) + O(h^r)$ dir.

(vi) $f(x)$ ve $g(x)$ sonlu aralıklarda integrallenebilir iki fonksiyon ve $f(x) = O\big(g(x)\big)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{x_0}^{x} f(y)\, dy = O\left(\int_{x_0}^{x} |g(y)| dy \right), \quad (x \geq x_0)$$

dir.

Özellik 1.2.1.3 (Asimptotik Denklik ($\sim$) ile İlgili Temel Özellikler) [25]

(i) $f(x) \sim g(x)$ olsun. r herhangi bir sabit olmak üzere; $f(x)^r \sim g(x)^r$ ve $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ ise $\log\big(f(x)\big) \sim \log\big(g(x)\big)$ dir.

(ii) $f(x) \sim g(x)$ ve $h(x) \sim k(x)$ olsun. Bu durumda $f(x)h(x) \sim g(x)k(x)$ ve $f(x)/h(x) \sim g(x)/k(x)$ dir.

Teorem 1.2.1.1 $f(x)$ ve $g(x)$, $[a,\infty)$ aralığında sürekli pozitif fonksiyonlar olmak üzere $f(x) \sim g(x)$ olsun. Bu durumda

$$\int_a^\infty f(t)\ dt$$

yakınsaktır ancak ve ancak

$$\int_a^\infty g(t)\ dt$$

yakınsaktır.

Teorem 1.2.1.2 $f(x) \sim g(x)$ olsun. Eğer $\int_a^\infty g(t)dt = \infty$ ise;

$$\int_a^x f(t)dt \sim \int_a^x g(t)dt$$

dir.

1.2.2. Rasgele Değişken Dizileri için Yakınsaklık Çeşitleri

Tanım 1.2.2.1 [75, 80] $\{X_n\}$, $n \geq 1$ Ω örnek uzayında tanımlı rasgele değişkenlerin bir dizisi ve X aynı Ω örnek uzayında tanımlı bir rasgele değişken olsun.

(i) $\{X_n\}$ rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine noktasal yakınsaktır ancak ve ancak $\forall\, w \in \Omega$ için $\{X_n(w)\}$, $X(w)$'ya yakınsaktır. Noktasal yakınsaklık rasgele değişkenler arası mesafeyi tanımlamak için kullanılan bir yakınsaklık çeşididir.

(ii) $\forall\ \varepsilon > 0$ için $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ sağlanıyor ise $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine olasılık anlamında yakınsaktır denir. Bu şartı sağlayan X rasgele değişkenine $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisinin olasılığa göre limiti denir ve $X_n \xrightarrow{P} X$ şeklinde gösterilir.

(iii) $F_n(x)$ ve $F(x)$ sırası ile $\{X_n\}$ dizisinin ve X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonları olsunlar. $\{X_n\}$ rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine dağılıma göre yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $F(x)$'in sürekli olduğu her x $\in \mathbb{R}$ için $F_n(x)$, $F(x)$'e yakınsaktır. Dağılıma göre yakınsaklık literatürde zayıf yakınsaklık olarak da bilinmektedir ve $X_n(w) \xrightarrow{d} X(w)$ biçiminde gösterilir.

(iv) $\{X_n(w)\}$ dizisi, $X(w)$ noktasına hemen hemen her yerde yakınsaktır ancak ve ancak $\{w \in \Omega: \{X_n(w)\} \nrightarrow X(w)\} \subseteq E$ olacak şekilde ölçüsü sıfır olan bir E kümesi mevcuttur. Bu yakınsama 1 olasılığı ile yakınsama olarak da adlandırılır.

(v) $E(|X_n(w)|^r) < \infty$ olsun. $\lim_{n\to\infty} E[|X_n(w) - X(w)|^r] = 0$ olacak şekilde r. mertebeden integrallenebilen bir X rasgele değişkeni mevcut ise $\{X_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi $X(w)$ rasgele değişkenine n. mertebeden ortalama yakınsaktır denir. Özel olarak $\lim_{n\to\infty} E[|X_n(w) - X(w)|^2] = 0$ olacak şekilde karesel integrallenebilen bir X rasgele değişkeni mevcut ise bu yakınsaklığa ortalama karesel yakınsaklık denir ve $l.i.m. X_n(w) = X(w)$ biçiminde gösterilir.

Not 1.2.2.1 [80] Noktasal yakınsaklık her $w \in \Omega$ şartını gerektirdiğinden sağlanması zor bir koşuldur. Burada "her $w \in \Omega$ yerine", "Ω' nın yeterince büyük bir altkümesi" ifadesi kullanıldığında koşul zayıflatılmış olur ve hemen hemen her yerde yakınsaklık kavramı elde edilir. Hemen hemen her yerde yakınsaklık literatürde 1 olasılığı ile yakınsaklık olarak ifade edilmektedir. 1 olasılığı ile yakınsaklık $X_n(w) \xrightarrow{1} X(w)$ biçiminde gösterilir.

Not 1.2.2.2 [80] Yakınsaklık çeşitleri arasında aşağıdaki bağlantılar mevcuttur:

(i) $\{X_n\}$, rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine hemen hemen her yerde yakınsak ise aynı zamanda olasılığa göre de yakınsaktır.

(ii) $\{X_n\}$, rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine olasılığa göre yakınsak ise aynı zamanda dağılıma göre de yakınsaktır.

(iii) $\{X_n\}$, rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine hemen hemen her yerde yakınsak ise aynı zamanda dağılıma göre de yakınsaktır.

(iv) $\{X_n\}$, rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine ortalama karesel yakınsak ise aynı zamanda olasılığa göre de yakınsaktır.

(v) $\{X_n\}$, rasgele değişkenler dizisi X rasgele değişkenine ortalama karesel yakınsak ise aynı zamanda dağılıma göre de yakınsaktır.

1.3. Ağır Kuyruklu ve Hafif Kuyruklu Dağılımlar

1.3.1. Ağır Kuyruklu Dağılımlar

Ağır kuyruklu dağılımlar ilk defa pamuk fiyatlarındaki değişimin modellenmesi için Mandelbrot [60] tarafından kullanılmıştır. Günümüzde ağır kuyruklu dağılımlar kavramı kayıt değerleri sıra dışı davranış gösteren gerçek hayat problemlerinde verileri modellemek için sıklıkla kullanılmaktadır. Sıra dışı olaylar meydana gelme olasılığı çok düşük olmasına rağmen gerçekleştiğinde kişi veya kurumlar için kayıp değeri yüksek olaylardır. Aynı zamanda bu olaylar meydana gelme zamanı ve meydana geldiği takdirde olası etkileri hakkında belirsizlik taşıyan olaylardır. Ağır kuyruklu dağılımlar bu belirsizliğin belli bir düzeyde tahmin edilebilmesi amacı ile kullanılırlar.

Literatürde ağır kuyruklu dağılımlar teriminin kullanımı ile ilgili bazı farklılıklar söz konusudur. Bazı kaynaklarda her dereceden momenti sonlu olmayan dağılımlar ağır kuyruklu olarak nitelendirilirken, bazı kaynaklarda varyansı sonlu olmayan bütün dağılımlar ağır kuyruklu olarak nitelendirilmektedir [73]. Aslında bu tanımlamaların çoğu ağır kuyruklu dağılımların farklı alt sınıflarına işaret etmektedir. Çalışmanın bu kısmında uygulamalı olasılığın pek çok alanında büyük öneme sahip bu dağılımlar ile ilgili alternatif tanımlara ve hafif kuyruklu dağılımlar ile aralarındaki temel farklara değinilecektir. Ayrıca ağır kuyruklu dağılımların bu çalışmada kullanılacak olan önemli iki alt sınıfı hakkında temel teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 1.3.1.1 [23] X, F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. $[0,\infty)$ aralığında tanımlı F dağılım fonksiyonu her $\theta > 0$ için

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\theta x} \mathrm{dF(x)} = \infty \tag{1}$$

şartını sağlıyor ise X rasgele değişkenine sağdan ağır kuyruklu dağılıma sahiptir denir. Bazı kaynaklarda $\mathrm{E}\left(\mathrm{e}^{\theta X}\right)$ ifadesi için üstel moment terimi kullanılmaktadır [23].

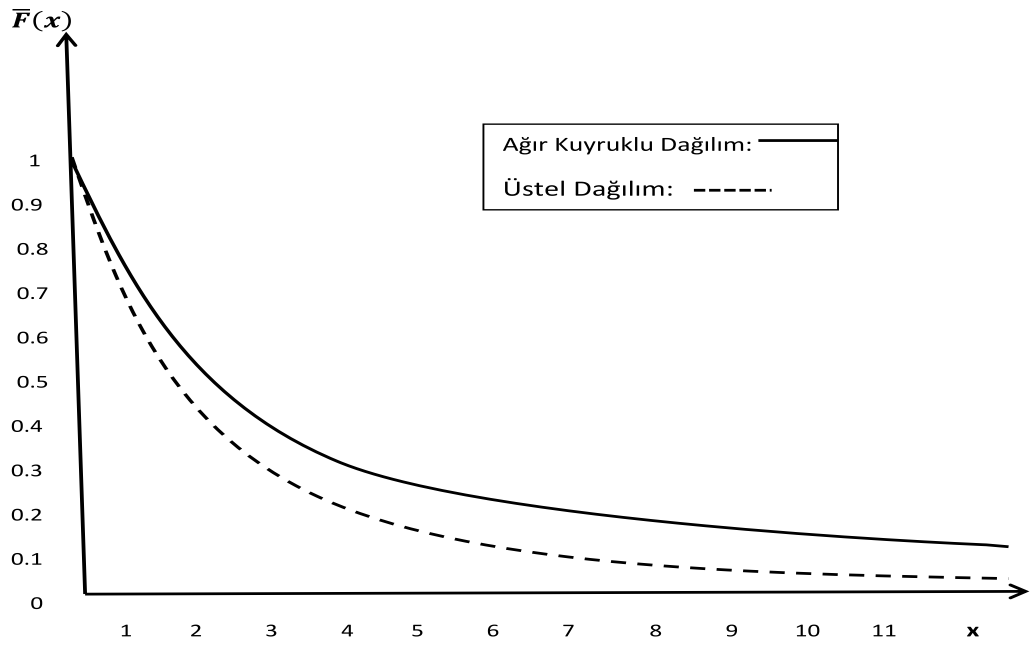
Tanım 1.3.1.2 [23] X, $[0,\infty)$ aralığında tanımlı F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer $0 < t < t_0$ için

$$g(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{tx} \mathrm{dF(x)} < \infty$$

olacak şekilde bir $t_0 > 0$ mevcut ise, X rasgele değişkeni hafif kuyruklu dağılıma sahiptir denir. Burada "$g(t)$" moment çıkaran fonksiyon olarak adlandırılmıştır.

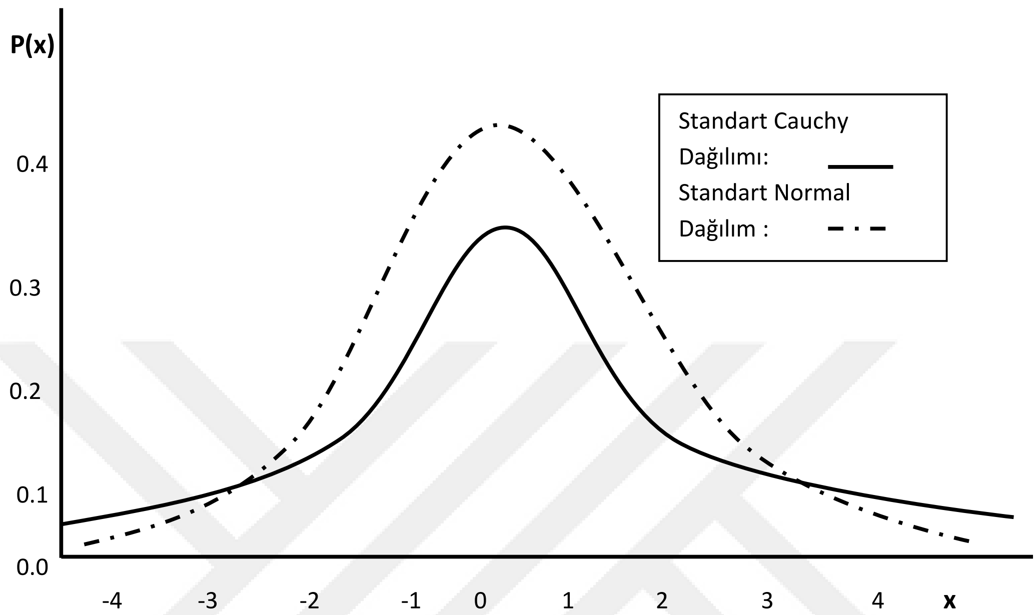
Ağır kuyruklu dağılımlar ile hafif kuyruklu dağılımları ayıran temel fark hafif kuyruklu dağılımların sonlu üstel momente sahip olmasıdır. Ayrıca hafif kuyruklu dağılımların her dereceden momentleri mevcutken, ağır kuyruklu dağılımların belli derecelerden momentleri mevcut olmayabilir. Mesela ağır kuyruklu dağılımların en geniş alt sınıflarının çoğu zaman yalnızca birinci ya da ikinci dereceden sonlu momentleri mevcuttur. Bu ifadenin tersi genelde doğru değildir. Yani her dereceden momenti mevcut olan bütün dağılımlar hafif kuyruklu olmayabilir. Örneğin lognormal rasgele değişkenin her dereceden momenti mevcuttur fakat sonlu üstel momente sahip olmadığı için ağır kuyruklu dağılımlar içinde sınıflandırılır. Bu kısımda ağır kuyruklu dağılımların alternatif tanımlarına yer verilecektir:

Tanım 1.3.1.3 [2] Herhangi bir dağılımın kuyruk kısmı üstel dağılıma göre daha yavaş sıfıra gidiyor ise bu dağılıma ağır kuyruklu dağılım denir. Dolayısı ile kendisi de bir hafif kuyruklu bir dağılım olan üstel dağılım, ağır kuyruklu dağılımlar ile hafif kuyruklu dağılımları ayıran sınır niteliğindedir.



Şekil 1. Üstel dağılım ile ağır kuyruklu dağılımın kuyruk kısmının karşılaştırılması

Bilindiği gibi gerçekleşme olasılığı düşük olan olaylara ilişkin olasılıklar, dağılımın kuyruk kısmında yer almaktadırlar. Dağılımın ağır kuyruklu olması durumunda ise, kuyruklardaki verilerle modellenen olayların meydana gelme olasılığı normal dağılımın kuyruk kısmındaki olaylara göre daha büyüktür. Bu durum Şekil 2' deki grafikte görülmektedir.



Şekil 1. Üstel dağılım ile ağır kuyruklu dağılımın kuyruk kısmının karşılaştırılması

Tanım 1.3.1.4 [63] X, F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer aşağıdaki iki koşul sağlanıyor ise F dağılımına (ya da X rasgele değişkenine) ağır kuyrukludur denir:

(i) $\forall\, x \geq 0,\ \bar{F}(x) > 0$

(ii) $\forall\, y \geq 0,\quad \lim_{x\to\infty} P\,\{X > x + y |\, X > x\} = \lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = 1.$

Ağır kuyruklu dağılımların alternatif tanımları bozulma oranı fonksiyonu ve ağır kuyruklu fonksiyon adı verilen özel fonksiyonlar kullanılarak verilir. Bu fonksiyonlar sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.3.1.5 (Bozulma Oranı Fonksiyonu) [63]

$$\Lambda(\mathrm{x}) = -\log\big(\bar{F}(x)\big) \tag{2}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona bozulma fonksiyonu denir.

$\bar{F}(x)$ türevlenebilir olsun, bu durumda

$$\lambda(x) = \Lambda'(x) \tag{3}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona bozulma oranı fonksiyonu denir. Bozulma oranı fonksiyonları sağ kalım analizinden güvenilirlik teorisine kadar pek çok alanda kullanılmaktadır.

Tanım 1.3.1.6 (Ağır Kuyruklu Fonksiyon) [63] f negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu her $\theta > 0$ için

$$limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{-\theta x}} = \infty \tag{4}$$

şartını sağlıyor ise, f fonksiyonuna ağır kuyruklu fonksiyon denir.

Teorem 1.3.1.1 ile ağır kuyruklu dağılımların alternatif bazı tanımları verilmiştir.

Teorem 1.3.1.1 [63] F bir dağılım fonksiyonu ve

$$E(e^{\theta X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\theta x} F(dx) = \infty \tag{5}$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) F ağır kuyruklu dağılımdır.

(ii) $\bar{F}$ ağır kuyruklu fonksiyondur.

(iii) $lim\ inf_{x\to\infty} \Lambda(x)x^{-1} = 0.$

Tanım 1.3.1.7 [45] $X,\ F$ dağılım fonksiyonunu sahip bir rasgele değişken ve $n \geq 1$ için $E(X^n) = \mu_n$ olsun. Eğer

$$\Delta = \frac{\mu_4}{\mu_3} > 3$$

koşulu sağlanıyor ise, F dağılım fonksiyonuna ağır kuyrukludur denir.

Ağır kuyruklu dağılımları için bazı özel örnekler aşağıdaki gibi verilebilir:

Örnek 1.3.1.1 (Pareto Dağılımı) [45] Pareto dağılımı, ölçek parametresi $b > 0$ ve şekil parametresi $\alpha > 0$ diye isimlendirilen iki parametre yardımı ile tanımlanır. Pareto dağılımının dağılım fonksiyonunun kuyruk kısmı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\bar{F}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < b \\ \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha}, & x \ge b \end{cases} \tag{6}$$

Pareto dağılımı ismini bu dağılımı ilk defa gelir dağılımını modellemek için ortaya atan, Vilfredo Pareto isimli İtalyan ekonomistten almıştır. Pareto dağılımı günümüzde şehirlerdeki popülasyonların ölçümünden bir dilde kullanılan kelimelerin sıklığının ölçülmesine kadar pek çok farklı alanda kullanılmaktadır.

Örnek 1.3.1.2 (Weibull Dağılımı) [45] Ağır kuyruklu Weibull dağılımı, ölçek parametresi $\lambda > 0$ ve şekil parametresi $\alpha \in (0,1)$ olmak üzere iki parametre yardımı ile tanımlanır. Ağır kuyruklu Weibull dağılımının dağılım fonksiyonunun kuyruk kısmı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x^{\alpha}) \tag{7}$$

Weibull dağılımı, ismini İsviçreli fizikçi Waloddi Weibull'dan almıştır. Weibull dağılımı özellikle güvenilirlik teorisi ve hata analizi alanlarında yoğun olarak kullanılmaktadır.

Örnek 1.3.1.3 (Lognormal Dağılım) [45] Lognormal dağılım konum parametresi $\mu \in \mathbb{R}$ ve şekil parametresi $\sigma > 0$ ile tanımlanır. Lognormal dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\,\pi}} \exp\left\{-\frac{[\log(x)-\mu]^2}{2\,\sigma^2}\right\}. \tag{8}$$

Bir X rasgele değişkeni lognormal dağılıma sahip ise $\log(X)$, μ ortalaması ve σ^2 varyansı ile normal dağılıma sahiptir. Lognormal dağılım ismini bu özelliğinden almıştır.

1.3.2. Ağır Kuyruklu Dağılımların Bazı Özel Altsınıfları

Şimdiye kadar verilmiş olan tanımlar ağır kuyruklu dağılımları tespit etmek ve kuyruk ağırlığını belirlemek için çok genel tanımlardır. Bu tanımlar uygulamada modelleme ve analiz için her zaman yeterli olmayabilir. Örneğin Tanım 1.3.1.7 ile verilen tanım yalnızca 4. dereceye kadar olan momentlerin hepsi mevcut ve sonlu olduğu durumda kullanılabilir. Uygulamadaki bu zorluğu aşmak için, ağır kuyruklu dağılımlar genel sınıfına bazı koşullar eklenerek bu dağılımların alt sınıfları oluşturulmuştur. Bu kısımda ağır kuyruklu dağılımların önemli alt sınıfları ve bu alt sınıfların birbiri ile bağlantılarından bahsedilecektir. Ayrıca bu tez çalışmasının bundan sonraki kısımlarında kullanılacak olan iki önemli alt sınıf (alt üstel dağılım ve düzenli değişen kuyruklu dağılım) ayrıntılı olarak ele alınacak ve bu alt sınıflar ile ilgili önemli bazı teoremler ispatsız olarak verilecektir.

1.3.2.1. Alt Üstel Dağılımlar

Alt üstel dağılımlar sınıfı ilk defa Chsityakov [23] tarafından tanımlanmıştır. Alt üstel dağılımlar risk ölçümü, sigorta ve finans modellerinde sıklıkla kullanılan özel bir alt sınıftır. Alt üstel dağılımlar, bu ismi dağılımın sağ kuyruğunun üstel dağılıma göre daha yavaş sıfıra gitmesinden dolayı almışlardır. Bu durum bir örneklemde çok büyük değerlerin göz ardı edilemeyecek bir olasılıkla gözlemlenebileceği anlamına gelir. Bu yüzden alt üstel dağılımlar bir örneklemde verilerin ortalama büyüklüğüne göre çok büyük değerler gözlemlendiği zaman kullanılmaya uygun dağılımlardır. Alt üstel dağılıma sahip rasgele değişkenler dağılım fonksiyonlarının kuyruk kısmının konvülüsyon çarpımları yardımı ile tanımlanırlar.

Tanım 1.3.2.1.1 [34] X ve Y bağımsız ve sırası ile F_X ile F_Y dağılım fonksiyonlarına sahip rasgele değişkenler olsunlar. $Z = X + Y$ rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$P\,(X + Y \leq x) = F_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(x - y)dF_Y(y) \tag{9}$$

biçiminde tanımlanır. (9) ifadesine F_X ve F_Y dağılım fonksiyonlarının konvülüsyon çarpımı denir ve $F_X * F_Y$ biçiminde gösterilir. Burada $F_X * F_Y = F_Y * F_X$ dir.

$X_1, X_2, \ldots X_n$ bağımsız aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olmak üzere,

$$F^{*n}(x) = P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} F^{*(n-1)}(x - y)dF(y) \tag{10}$$

biçiminde tanımlanan $F^{*n}(x)$ ifadesine F' in n. konvulüsyon çarpımı denir. $\bar{F}^{*n}(x)$, F' in n. konvulüsyon çarpımının kuyruk kısmını ifade eder ve aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\bar{F}^{*n}(x) = 1 - F^{*n}(x) = P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x\}\,.$$

Tanım 1.3.2.1.2 [34] X, F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer $\bar{F}(x) > 0$ ve her $x \geq 0$ için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} = n, \;\; n \geq 2 \tag{11}$$

şartı sağlanıyor ise F dağılımına alt üstel dağılım ve X rasgele değişkenine de alt üstel dağılıma sahip rasgele değişkendir denir. Burada "*" konvulüsyon çarpımını ifade etmektedir.

Alt üstel dağılımlar sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir. Alt üstel dağılımlar ve alt üstel dağılıma sahip rasgele değişkenler sırası ile, $F \in \mathcal{S}$ ve $X \in \mathcal{S}$ biçiminde ifade edilirler.

Tanım 1.3.2.1.3, (11) ifadesinin bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır ve alt üstel dağılımların alternatif bir tanımıdır.

Tanım 1.3.2.1.3 [61] $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız ve aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler olsunlar. $\bar{F}(x) > 0$ ve her $x \geq 0$ için

$$P[\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > x] \sim P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n > x\}, \;\; n \geq 2 \tag{12}$$

şartı sağlanıyor ise $F \in \mathcal{S}$ dir.

Bir dağılımın alt üstel dağılım olup olmadığına tanım kullanarak karar vermek oldukça zordur. Bu nedenle uygulamada farklı yöntemler kullanılmaktadır.

Bu yöntemlerden bir tanesi de bozulma ve bozulma oranı fonksiyonları ile yakından ilgilidir. Daha önce Tanım 1.3.1.5'te $\lambda(x) = f/\bar{F}$ fonksiyonu bozulma oranı fonksiyonu ve

$$\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(y)dy = -\log \bar{F}(x)$$

bozulma fonksiyonu olarak tanımlanmışlardır. Aşağıda ifadesi verilen Teorem 1.3.2.1.1, bozulma ve bozulma oranı fonksiyonları kullanılarak bir dağılımın alt üstel olup olmadığına karar vermek için kullanılır.

Teorem 1.3.2.1.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı İçin Karakterizasyon Teoremi) [61] F mutlak yakınsak bir dağılım fonksiyonu olmak üzere, X rasgele değişkeni F dağılım fonksiyonuna ve f

olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Ayrıca F' in bozulma oranı fonksiyonu $\lambda(x)$ için, $\lambda(x) \to 0,\ x \to \infty$ olsun. Bu durumda;

(i) $F \in \mathcal{S}$ ancak ve ancak

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \exp\big(y\,\lambda(x)\big)\, f(y)dy = 1$$

dir.

(ii) Eğer " $\exp\{x\,\lambda(x)\}\ f(x)$" fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında integrallenebilir ise, $F \in \mathcal{S}$ dir.

Teorem 1.3.2.1.2 [61]

(i) $F \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda her $y \in (0,\infty)$ için

$$P\left[\lim_{x\to\infty} \frac{\bar{F}\,(x-y)}{\bar{F}(x)}\right] = 1. \tag{13}$$

(ii) (13) şartı sağlansın. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $e^{\varepsilon x}\,\bar{F}(x) \to \infty,\ x \to \infty$ dır.

(iii) $F \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $n \geq 2$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\frac{\bar{F}^{\,*n}(x)}{\bar{F}(x)} \leq c(1+\varepsilon)^n,\ \ x \geq 0.$$

Tablo 1' de alt üstel dağılımlar sınıfına ait önemli bazı örnekler verilmiştir.

Tablo 1. Alt üstel dağılımlar

Dağılım	$\bar{F}(x)$ veya $f(x)$	Parametreler
Weibull	$\bar{F}(x) = \exp(-\lambda x^{\alpha})$	$\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$
Lognormal	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}\exp\left(-\dfrac{(\log x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}\right)$	$\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$
Benktander 2. Tip	$\bar{F}(x) = \exp\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)\ x^{-(1-\beta)}\exp\left(-\alpha\dfrac{x^{\beta}}{\beta}\right)$	$\alpha > 0$, $0 < \beta < 1$

Alt üstel dağılımlar sınıfı ağır kuyruklu dağılımların en geniş alt sınıflarından biridir ve bugüne kadar her yönü ile araştırılmıştır. Alt üstel dağılımların uygulamaları ile ilgili teorik bilgi [9], [30], [70] kaynaklarında ayrıntılı bir biçimde bulunabilir. $\mathcal{S}$ sınıfı, ağır kuyruklu dağılımların pek çok alt sınıfı ile doğrudan ilişkilidir. Bu alt sınıflardan biri her $a \in \mathbb{R}$ için $\bar{F}\,(x+a) \sim \bar{F}(x),\ x \to \infty$ şartını sağlayan ve uzun kuyruklu dağılımlar $(\mathcal{L})$ altsınıfı olarak bilinen sınıftır. Diğer bir sınıf ise, baskın değişen kuyruklu dağılımlar $(\mathcal{D})$ olarak adlandırılan ve her $a > 0$ için $\limsup_{x\to\infty} \bar{F}(ax)/\bar{F}\,(x) < \infty$ şartını sağlayan dağılımlardır. $\mathcal{S}$ sınıfı ile bu sınıflar arasında $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ ve $\mathcal{L} \cap \mathcal{D} \subset \mathcal{S}$ ilişkisinin olduğu bilinmektedir [34]. $\mathcal{S}$ sınıfının üzerinde durulması gerekli olan önemli alt sınıflarından biri de güçlü alt üstel dağılımlar olarak adlandırılan sınıftır.

Tanım 1.3.2.1.4 [9] X rasgele değişkeni F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken ve $\mu = E(X) < \infty$ olsun. F dağılım fonksiyonu

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{\bar{F}(x-y)}{\bar{F}(x)}\,\bar{F}(y)\,dy = 2\mu$$

şartını sağlıyor ise X güçlü alt üstel dağılıma sahip rasgele değişkendir denir. Güçlü alt üstel dağılımlar $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir.

$\mathcal{S}^*$ sınıfı ile ilgili daha ayrıntılı bilgi [9], [34], [56] kaynaklarında bulunabilir. $\mathcal{S}^*$ sınıfı Tablo 1' deki bütün dağılımları kapsayan önemli bir alt sınıftır. Alt üstel dağılımların pek çoğunun ortak özelliği bu dağılımların ortak dağılım fonksiyonu F için $\bar{F}/\bar{F}_I$ ifadesinin O düzenli değişen fonksiyonlar diye adlandırılan özel bir fonksiyon olmasıdır.

Tanım 1.3.2.1.5 [39] f pozitif ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{f(tx)}{f(t)} < \infty,\ \ x > 0$$

şartını sağlıyor ise, f fonksiyonuna O düzenli değişen fonksiyon denir ve $f \in \mathcal{RO}$ biçiminde gösterilir. Klüppelberg [56] $F \in \mathcal{S}^* \Rightarrow F \in \mathcal{S}$ ve $F_I \in \mathcal{S}$ olduğunu ispatlamıştır. $\mathcal{S}, \mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{L}$ sınıfları arasındaki ilişki Teorem 1.3.2.1.3 ile verilmiştir.

Teorem 1.3.2.1.3 [39] X, F dağılım fonksiyonuna sahip pozitif bir rasgele değişken ve $\mu = E(X) < \infty$ olsun. Ayrıca $\bar{F}/\bar{F}_I \in \mathcal{RO}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $F_I \in \mathcal{S}$ ve $F \in \mathcal{L}$.

(ii) $F \in \mathcal{S}^*$.

Sonuç 1.3.2.1.1 F_I' nın bozulma oranı fonksiyonu $\mathcal{RO}$ sınıfından olduğunda

$$F \cap F_I \in \mathcal{S} \Rightarrow F \in \mathcal{S}^*$$

dir. Burada

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}(y)\ dy$$

biçiminde tanımlanır ve integrallenmiş kuyruk fonksiyonu olarak adlandırılır.

1.3.2.2. Düzenli Değişen Dağılımlar

Düzenli değişen dağılımlar ağır kuyruklu dağılımların en önemli alt sınıflarından biridir. Düzenli değişen dağılımlar matematikte "düzenli değişen fonksiyonlar" olarak isimlendirilen fonksiyonlar aracılığı ile tanımlanırlar. Düzenli değişen fonksiyonlar, üzerinde ayrıntılı araştırmalar yapılmış ve birçok özelliği bilinen fonksiyonlardır. Bu fonksiyonların bilinen bütün özellikleri, genel durumda düzenli değişen dağılımlar ile çalışmayı ağır kuyruklu dağılımların diğer alt sınıfları ile çalışmaktan daha kolay hale getirmiştir. Bu kısmında düzenli değişen dağılımlar ve bu dağılımlar ile ilgili çalışmanın geri kalan kısmında kullanılacak olan belli başlı özellikler verilecektir.

Tanım 1.3.2.2.1 (Düzenli Değişen Fonksiyonlar) [61] f pozitif ve ölçülebilir bir fonksiyon, ayrıca f fonksiyonu herhangi bir $A > 0$ için $[A, \infty)$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(tx)}{f(x)} = t^\alpha \qquad (14)$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ mevcut ise, f fonksiyonuna sonsuzda $\alpha \in \mathbb{R}$ indeksi ile düzenli değişen fonksiyondur denir ve $RV(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.2.2.2 (Yavaş Değişen Fonksiyonlar) [61] L pozitif ve ölçülebilir bir fonksiyon, ayrıca L fonksiyonu herhangi bir $A > 0$ için $[A, \infty)$ aralığında tanımlanmış olsun. Eğer her $t > 0$ için

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1$$

şartı sağlanıyor ise, L fonksiyonuna sonsuzda yavaş değişen fonksiyondur denir. Yavaş değişen fonksiyonlar sınıfı S ile ifade edilir.

Örnek 1.3.2.2.1 [61] Yavaş değişen fonksiyonların tipik örnekleri pozitif sabitler, sonsuzda pozitif bir sayıya yakınsayan fonksiyonlar ve logaritma fonksiyonudur. Yavaş değişen fonksiyonlar tanımından da görüleceği üzere "0" indeksi ile düzenli değişen fonksiyonlardır.

Düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili pek çok önemli çalışma literatürde mevcuttur ([15], [30], [32], [44], [61], [68] ve [74]). Bu kısımda düzenli değişen fonksiyonların temel özellikleri ile ilgili ispatsız olarak verilen teoremler, çalışmanın ilerleyen aşamalarında kullanılacaktır.

Teorem 1.3.2.2.1 [61] $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olsun**.** f düzenli değişen bir fonksiyondur ancak ve ancak f aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$f(x) = x^{\alpha} L(x), \;\; 0 < \alpha < \infty. \tag{15}$$

Teorem 1.3.2.2.2 (Gösterim Teoremi) [61] $[x_0, \infty)$ aralığında pozitif ölçülebilir bir L fonksiyonu yavaş değişen fonksiyondur ancak ve ancak, L fonksiyonu (16) gösterimine sahiptir:

$$L(x) = c(x) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy \right\}. \tag{16}$$

Burada, $c(.)$ fonksiyonu, $\lim_{x\to\infty} c(x) = c_0 \in (0, \infty)$ olacak biçimde ölçülebilir, negatif olmayan bir fonksiyondur. Ayrıca $\varepsilon(x) \;\to 0,\; x \;\to \infty$ dır.

Sonuç 1.3.2.2.1 [61] $\varepsilon(x)$ ve $c(x)$ Teorem 1.3.2.2.1' de belirtilen şartları sağlasın. Bu durumda her düzenli değişen fonksiyon

$$f(x) = x^{\alpha} c(x) \exp\left\{ \int_{x_0}^{x} \frac{\varepsilon(y)}{y}\, dy \right\} \tag{17}$$

biçiminde bir gösterime sahiptir.

Sonuç 1.3.2.2.2 [61] Düzenli değişen fonksiyonların tanımından f, α indeksi ile düzenli değişen bir fonksiyon olmak üzere, $x \to \infty$ iken

$$f(x) \to \begin{cases} \infty, & \alpha > 0 \\ 0, & \alpha < 0 \end{cases}$$

sonucu elde edilir.

Ayrıca eğer L yavaş değişen fonksiyon ise; her $\epsilon > 0$ için $x \to \infty$ iken, $x^{-\epsilon}L(x) \to 0$ ve $x^{\epsilon}L(x) \to \infty$ dir.

Teorem 1.3.2.2.3 [15] L, L_1 ve L_2 yavaş değişen fonksiyonlar olsunlar. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $(L(x))^{\alpha}$ yavaş değişen fonksiyondur.

(ii) $L_1(x).L_2(x)$ ve $L_1(x) + L_2(x)$ yavaş değişen fonksiyondur. Ayrıca eğer $\lim_{x\to\infty} L_2(x) = \infty$ ise bu durumda $L_1(L_2(x))$ yavaş değişen fonksiyondur.

(iii) Her $\alpha > 0$ için $x^{\alpha}L(x) \to \infty$ ve $x^{-\alpha}L(x) \to 0$ dır.

Teorem 1.3.2.2.4 [15]

(i) Eğer $f(x) \in RV(\alpha)$ ise $f(x)^p \in RV(\alpha p)$ dır.

(ii) $f_i \in RV(\alpha_i)$, $(i = 1,2)$ ve $f_2(x) \to \infty$, $(x \to \infty)$ ise $f_1\big(f_2(x)\big) \in RV(\alpha_1.\alpha_2)$ dır.

Düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili en önemli teoremlerden biri de aşağıda ifadesi verilen Karamata Teoremi'dir. Karamata Teoremi düzenli değişen fonksiyon içeren integrallerin çözülebilmesi için çok önemli bir teoremdir. Karamata Teoremi'ne göre düzenli değişen fonksiyonların integralleri de düzenli değişen fonksiyonlardır.

Daha açık bir ifade ile düzenli değişen fonksiyonları integrallerken düzenli değişen fonksiyonun yavaş değişen kısmı integral dışına çıkarılabilir. Burada önemli noktalardan biri, yavaş değişen fonksiyonların reel sayıların bütün sonlu alt aralıklarında sonlu olduklarıdır. Bu özellikten dolayı kolayca görülebilir ki düzenli değişen fonksiyonlar da reel sayıların sonlu her alt aralığında sonludur.

Teorem 1.3.2.2.5 (Karamata Teoremi) [61] $x_0 \geq 0$ olmak üzere $L(x)$, $[x_0, \infty)$ aralığında tanımlı herhangi bir yavaş değişen bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur:

(i) $\alpha > -1$ için

$$\lim_{x\to\infty} \int_{x_0}^{x} t^{\alpha}L(t)dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(x)$$

dir.

(ii) $\alpha < -1$ için

$$\lim_{x\to\infty} \int_{x}^{\infty} t^{\alpha}L(t)dt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} L(x)$$

dir.

Teorem 1.3.2.2.6 [21] $\alpha > -1$ olmak üzere $R(t)$, α indeksi ile düzenli değişen herhangi bir fonksiyon olsun. Her $t \geq A$ için

$$\int_A^\infty R(t)\, dt = \infty$$

sağlanır.

Teorem 1.3.2.2.7 [74] $L(x)$, $(0, \infty)$ aralığında tanımlı yavaş değişen ve $(0, \infty)$ aralığının her alt aralığında sonlu bir fonksiyon olsun. Ayrıca verilen reel değerli herhangi bir f fonksiyonu ve $n \geq 0$ için

$$\int_0^\beta t^{-n} f(t) dt$$

integrali mevcut olsun. Bu durumda; $x \to \infty$ için

$$\int_0^\beta f(t) L(xt)\, dt \sim L(x) \int_0^\beta f(t)\, dt$$

asimptotik ilişkisi doğrudur.

Düzenli değişen fonksiyonlar, uygulamalı olasılığın risk teorisi, uç değerler teorisi, yenileme teorisi gibi pek çok alanında doğal bir şekilde ortaya çıkar. Bütün bu alanlarda düzenli değişen kuyruklu rasgele değişkenlerin pek çok uygulama alanı vardır.

Düzenli değişen kuyruklu rasgele değişkenlerin tanımı, düzenli değişen fonksiyonlar ile yakından ilgilidir. Dolayısı ile düzenli değişen fonksiyonlar ile ilgili teoremler ve özellikler de düzenli değişen kuyruklu rasgele değişkenler ile ilgili yapılacak olan bütün işlemlerde kullanılmaktadır.

Tanım 1.3.2.2.3 (Düzenli Değişen Rasgele Değişkenler ve Dağılımlar) [74] X negatif olmayan bir rasgele değişken ve $F(x)$, X rasgele değişkenine ait dağılım fonksiyonu olsun. Eğer $F(x)$'in kuyruk kısmı $\bar{F}(x)$, $-\alpha$ indeksi ile düzenli değişen bir fonksiyon ise, yani $\bar{F}(x) \in RV(-\alpha)$ ise, X rasgele değişkenine düzenli değişen rasgele değişken, $F(x)$ dağılımına da $\alpha \geq 0$ indeksi ile düzenli değişen dağılım denir.

Tanım 1.3.2.2.1 göz önünde bulundurulduğunda eğer $F(x)$ dağılım fonksiyonu düzenli değişen bir dağılım fonksiyonu ise, her $t > 0$ için

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\bar{F}(tx)}{\bar{F}(x)} = t^{-\alpha}$$

olacak şekilde bir $\alpha > 0$ vardır. Ayrıca, $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere her düzenli değişen $F(x)$ dağılım fonksiyonunun kuyruk kısmı $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ biçiminde yazılabilir. Düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değişkenlerin her dereceden momentleri mevcut değildir. Düzenli değişen bir rasgele değişkenin sonlu momentlerinin varlığı kuyruk indeksi α' nın derecesine bağlıdır. Kuyruk indeksi ile sonlu moment dereceleri arasındaki ilişki Teorem 1.3.2.2.8 ile verilmiştir.

Teorem 1.3.2.2.8 [61] X düzenli değişen bir rasgele değişken ve $\bar{F}_X(x) \in RV(-\alpha)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ilişkiler doğrudur:

$$E(X^k) < \infty, \quad k < \alpha,$$
$$E(X^k) = \infty, \quad k > \alpha.$$

Tablo 2. Düzenli değişen dağılımlar

Dağılım	$\bar{F}(x)$ veya $f(x)$	Düzenli değişim kuyruk indeksi
Pareto	$\bar{F}(x) = \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha}$	$-\alpha$
Lognormal	$\bar{F}(x) = \left(\frac{b}{x^{\tau} + b}\right)^{\alpha}$	$-\tau\alpha$
Benktander 1. Tip	$f(x) = \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)} [\ln(x)]^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$	$-\alpha$

Düzenli değişen dağılımların her mertebeden sonlu momentlere sahip olmamalarının önemli bazı sonuçları mevcuttur. Bu sonuçlardan biri de olasılığın önemli teorilerinden olan ve merkezi limit teoremi olarak bilinen teorem ile ilgilidir.

Teorem 1.3.2.2.9 (Merkezi Limit Teoremi) [38] $\{X_i\}$, $i \geq 1$ bağımsız aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi, $\mu = E(X) < \infty$ ve $Var(X) = \sigma^2 < \infty$ olsun. Ayrıca $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ olarak tanımlansın. $\phi(z)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonu olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - n\,\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq z\right) = \phi(z)$$

dir.

Merkezi limit teoremi $\{X_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenlerinin kendi dağılımları hangi dağılım olursa olsun, örneklem büyüklüğü "n" arttıkça örneklem ortalamasının dağılımının ortalaması μ ve varyansı σ^2/n olan normal dağılıma zayıf anlamda yakınsadığını söyler.

Düzenli değişen rasgele değişkenlerin kuyruk indeksleri göz önünde bulundurulduğunda $\alpha < 1$ için bu rasgele değişkenlerin birinci momentleri $\alpha < 2$ için ikinci momentleri sonlu değildir. Bu durumda bağımsız ve kuyruk indeksi $\alpha < 2$ ile aynı düzenli değişen kuyruklu dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin merkezi limit teoreminin koşullarını sağlamadığı görülür.

Bağımsız ve sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değişkenlerin toplamları merkezi limit teoremini sağlamasalar da farklı limit teoremlerini sağlarlar. Bu limit teoremleri aracılığı ile düzenli değişen rasgele değişkenler ve farklı alt sınıflardan ağır kuyruklu dağılımlar için kararlılık çekim alanları tanımlanmıştır. Bu kısımda düzenli değişen rasgele değişkenler ile yakından ilgili olan kararlı dağılımlar ve kararlılık çekim alanlarından kısaca bahsedilecektir.

Tanım 1.3.2.2.4 (Kararlı Dağılımlar) [33] $X,\ X_1$ ve X_2 rasgele değişkenleri bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsunlar. Eğer her a, b pozitif sabiti için

$$aX_1 + bX_2 = cX + d \tag{18}$$

eşitliğini sağlayacak biçimde bir c pozitif sabiti ve $d \in \mathbb{R}$ mevcut ise X rasgele değişkenine kararlı rasgele değişken denir. Burada eşitlik dağılım anlamında eşitliği gösterir. Kararlı dağılımların Tanım 1.3.2.2.4' e denk alternatif bir tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.3.2.2.5 [33] $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı dağılıma sahip bağımsız rasgele değişkenler olsunlar. Eğer her $n > 1$ için

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n = c_n X + d_n \tag{19}$$

olacak biçimde $c_n > 0$ ve $d_n \in \mathbb{R}$ sabitleri mevcut ise X rasgele değişkeni kararlıdır denir.

Kararlı dağılımlar toplam altında yapısını (şeklini) koruyan dağılımlardır ve kararlı dağılım ismini bu özelliklerinden dolayı almışlardır.

Tanım 1.3.2.2.6 [65] $0 < \alpha \leq 2,\ -1 \leq \beta \leq 1,\ \alpha \neq 1$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere Z rasgele değişkeni

$$E(\exp\{iuZ\}) = \begin{cases} \exp\left(-|u|^{\alpha}\left[1 - i\beta \tan\dfrac{\pi\alpha}{2}\ (sign\, u)\right]\right), & \alpha \neq 1 \\ \exp\left(-|u|\ \left[1 + i\beta\dfrac{2}{\pi}\ (sign\, u)\log|u|\right]\right), & \alpha = 1 \end{cases}$$

karakteristik fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. Eğer X rasgele değişkeni $X = aZ + b$ biçiminde ifade edilebiliyor ise, X rasgele değişkeni kararlıdır denir.

Kararlı bir rasgele değişken 4 parametre ile karakterize edilir: Bunlar sırası ile kararlılık indeksi $\alpha \in (0,2]$, çarpıklık parametresi $\beta \in [-1,1]$, ölçek parametresi γ ve yer parametresi δ dır. Kararlı dağılımları karakterize eden en önemli özellik α parametresi olduğu için kararlı dağılımlar aynı zamanda α kararlı dağılımlar olarak da adlandırılır.

Not 1.3.2.2.1 [65] Kararlı dağılımların çok az bir kısmının kapalı formda yazılabilmeleri mümkündür. Kapalı formda yazılabilen kararlı dağılımlardan bir kaç tanesi örneklerle verilmiştir.

Örnek 1.3.2.2.2 [65] X rasgele değişkeni Cauchy dağılımına sahip bir rasgele değişken, ayrıca $E(X) = \mu$ ve $Var(X) = \sigma^2$ olsun.

Bu durumda $X \sim Cauchy\ (\sigma, \mu)$ biçiminde gösterilir. X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu sırası ile aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma\left[1 + \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]},$$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\ arctan\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Bu durumda $X \sim Cauchy\ (\sigma, \mu)$ rasgele değişkeni $\alpha = 1$ kararlılık indeksi ve $\beta = 0$ çarpıklık parametresi ile kararlı bir rasgele değişkendir.

Örnek 1.3.2.2.3 X rasgele değişkeni Levy dağılımına sahip bir rasgele değişken olsun. Ayrıca $E(X) = \mu$ ve $Var(X) = \sigma^2$ olsun. Bu durumda $X \sim Levy\ (\sigma, \mu)$ biçiminde gösterilir. X rasgele değişkeninin sırası ile olasılık yoğunluk fonksiyonu ve birikimli dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$f(x) = \left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} \exp\left[-\frac{\sigma}{2(x-\mu)}\right],$$

$$F(x) = P(X \leq x) = 2\left[1 - \phi\left(\frac{\sigma}{x-\mu}\right)\right].$$

Bu durumda $X \sim Levy\ (\sigma, \mu)$ rasgele değişkeni $\alpha = 1/2$ kararlılık indeksi ve $\beta = 1$ çarpıklık parametresi ile kararlı bir rasgele değişkendir.

Teorem 1.3.2.2.8, α kararlı dağılımlara sahip rasgele değişkenlerin aynı zamanda sonsuz varyanslı rasgele değişkenlerin sağladığı farklı bir limit teoreminin de ifadesidir. Bu teorem aracılığı ile kararlılık çekim alanları tanımlanmıştır.

Teorem 1.3.2.2.10 [38] $\{X_i\},\ i \geq 1$ bağımsız aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a_n(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - b_n \to Z \tag{20}$$

olacak şekilde $a_n > 0$ ve $b_n \in \mathbb{R}$ dizileri mevcuttur ancak ve ancak Z rasgele değişkeni $0 < \alpha \leq 2$ kararlılık indeksi ile α kararlı rasgele değişkendir.

Tanım 1.3.2.2.7 (Kararlılık Çekim Alanı) [38] $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler olsunlar. Ayrıca Z, α kararlı rasgele değişken olsun. Eğer

$$a_n(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) - b_n \to Z$$

olacak şekilde $a_n > 0$ ve $b_n \in \mathbb{R}$ dizileri mevcut ise, Z α kararlı bir rasgele değişkendir. Ayrıca X rasgele değişkeni, Z rasgele değişkeninin kararlılık çekim alanındandır denir.

Teorem 1.3.2.2.11 [38] $X_1, X_2, \ldots$ bağımsız aynı F dağılımına sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun ayrıca Z rasgele değişkeni, G_α dağılım fonksiyonuna sahip bir α Kararlı rasgele değişken ve $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olsun. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ olmak üzere eğer

$$\frac{S_n - b_n}{n^{1/\alpha}\, L(n)} \xrightarrow{d} Z$$

şartını sağlayacak şekilde $b_n \in \mathbb{R}$ mevcut ise X rasgele değişkeni ve F dağılım fonksiyonu α kararlı dağılımın çekim alanındadır denir ve $F \in D(G_\alpha)$ ile gösterilir. Buradaki yakınsama dağılıma göre yakınsamadır. Eğer $\alpha = 1$ ve F simetrik bir dağılım fonksiyonu ise $b_n = 0$ dır. Ayrıca

$$b_n = \begin{cases} \mu, & 1 < \alpha \leq 2 \\ 0, & 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

biçimindedir. Burada α parametresine kararlı dağılımın indeksi denir. Özel olarak $\alpha = 2$ ise F dağılım fonksiyonu normal dağılımın çekim alanındadır denir. Sonsuz varyanslı ağır kuyruklu dağılımlar ile kararlı dağılımların çekim alanları arasındaki ilişki aşağıdaki teoremler ile verilmektedir.

Teorem 1.3.2.2.12 [66] $0 < \alpha < 2$ ve $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon, ayrıca G_α, α kararlı bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu olsun. $A \geq 0$ ve $B \geq 0$, $A + B > 0$ özelliğini sağlayan reel sabitler olmak üzere;

$$F \in D(G_\alpha) \Leftrightarrow F(-x) \sim A\, x^{-\alpha} L(x)$$

ve

$$\bar{F}(x) \sim B\, x^{-\alpha} L(x)$$

dir.

Teorem 1.3.2.2.13 [61] $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri bağımsız, $1 < \alpha < 2$ indeksi ile düzenli değişen F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler ve $E(X_i) = \mu$ olsun. $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ ve G_α, α kararlı bir dağılım olmak üzere

$$\frac{\left(\frac{S_n}{n} - \mu\right)}{n^{1-\frac{1}{\alpha}}} \xrightarrow{d} G_\alpha$$

şartı sağlanır.

Sonuç 1.3.2.2.3 [61] $1 < \alpha < 2$ indeksi ile düzenli değişen bütün dağılımlar α kararlı bir dağılımın çekim alanındadır.

Sonuç 1.3.2.2.4 [61] X, F dağılım fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. G_α, α kararlı bir rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu ve $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere $X \in D(G_\alpha) \Leftrightarrow P(|X| > x) = x^{-\alpha}\, L(x)$ dir.

Sonuç 1.3.2.2.4 [61] $X \in D(G_\alpha)$ olduğunda $\delta < \alpha$ için $E\left(|X|^\delta\right) < \infty$, $\delta > \alpha$ ve $\alpha < 2$ için $E\left(|X|^\delta\right) = \infty$ dır. Ayrıca $\alpha < 2$ için $var(X) = \infty$ dır.

1.3.3. Ağır Kuyruklu Dağılımlar ve Katastrofi Prensibi

Ağır kuyruklu dağılımların en önemli özelliklerinden biri katastrofi prensibi olarak adlandırılan özelliği sağlamalarıdır. Katastrofi prensibi genel olarak ağır kuyruklu dağılımların sıra dışı değerler üretme eğiliminde dağılımlar olmaları durumunu açıklayan prensiptir.

Tanım 1.3.3.1 (Katastrofi Prensibi (Catastrophe Principle)) [45] Katastrofi prensibinin arkasındaki fikir şöyle açıklanır: Sıradışı olaylar büyük olasılıkla bu olayın meydana gelmesine katkıda bulunan az sayıda faktör nedeniyle oluşurlar. Örneğin bir olayın meydana gelmesine katkıda bulunan farklı etkenleri temsil eden rasgele değişkenler ele alınsın. Bu rasgele değişkenlerin toplamı beklenenden çok büyük bir değer almış ise, bu durum muhtemelen beklenmedik şekilde büyük bir olayın yani toplamın içinde az sayıda ama anormal derecede büyük değerlere sahip rasgele değişkenlerin bulunmasının bir sonucudur. Hatta bir örneklemin içerisinde anormal derecede büyük değerlerin ortaya çıkma olasılığı çok düşük olduğundan, eğer toplam beklenenden çok büyük ise bu örneklem içerisinde bulunan birkaç tane çok büyük örnekten kaynaklanmıyordur tersine yalnızca bir tane çok büyük örnekten kaynaklanıyordur (bu durum bazen tek büyük sıçrama prensibi olarak da adlandırılır). Bu durumda rasgele değişkenlerin toplamının kuyruk kısmı, toplamdaki maksimum değeri alan rasgele değişkenin kuyruk kısmı gibi davranış gösterir.

Katastrofi prensibi ve ağır kuyruklu dağılımların ilişkisini açıklayan önemli iki teorem aşağıda verilmiştir:

Teorem 1.3.3.1 [45] $\{X_i\},\ i \geq 1$ bağımsız aynı alt üstel dağılıma sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her $n \geq 2$ için aşağıdaki ilişki doğrudur:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P\left(\left\{\max\limits_{1 \leq i \leq n} X_i\right\} > x\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > x\right)} = 1. \tag{21}$$

Teorem 1.3.3.2 [45] $\{X_i\},\ i \geq 1$ bağımsız α indeksi ile aynı düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her $y > 0$ için

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i > (\mu + y)n\right) \sim P\left(\max_{1 \leq i \leq n} X_i > yn\right). \tag{22}$$

Toplamın büyük olmasına birçok farklı sebep yol açabiliyorken, katastrofi prensibi büyük toplama yol açan şeyin yalnızca toplam içindeki beklenenden çok çok büyük değere sahip tek bir olay olduğu durumlarda geçerlidir. Literatürde en çok kullanılan ağır kuyruklu dağılımlar katastrofi prensibini sağladığından, katastrofi prensibi ağır kuyruklu dağılımlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Örneğin Pareto dağılımı, Weibull dağılımı ($\alpha < 1$) ve lognormal dağılım katastrofi özelliğini sağlayan dağılımlardan bazılarıdır. Ayrıca katastrofi özelliğini önemli yapan hususlardan biri de ağır kuyruklu dağılımların en önemli sınıfı olan alt üstel dağılımların bu özellik etrafında tanımlanmış olmasıdır.

1.3.4. Hafif Kuyruklu Dağılımlar ve Uyum Prensibi

Tanım 1.3.4.1 (Uyum (Conspiracy) Prensibi) [45] Katastrofi prensibinin aksine uyum prensibi sıra dışı olayların büyük olasılıkla bu olayın meydana gelmesine katkıda bulunan pek çok faktörün bir araya gelmesi nedeniyle oluştuğunu söyler. Yani rasgele değişkenlerin toplamının kuyruk kısmının davranışını toplam içindeki tek bir rasgele değişkenin kuyruk kısmının davranışı belirlemez. Uyum prensibi aşağıdaki tanım ile matematiksel olarak ifade edilebilir:

Tanım 1.3.4.2 [45] $X_1, X_2, \dots, X_n$ aynı F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenlerin bir dizisi olsun. Her $n \geq 2$ için $X_1, X_2, \dots, X_n$ rasgele değişkenleri

$$P\{\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\} > t\} = o(P\{X_1 + X_2 + \cdots + X_n > t\})$$

şartını sağlıyor ise, bu rasgele değişkenler ve F dağılım fonksiyonu konspiransi prensibini sağlıyordur denir.

Tanım 1.3.4.3 [45] X negatif olmayan bir rasgele değişken olsun. Eğer yeterince büyük x'ler için $P(X > x) \leq \exp(-\theta x)$ şartını sağlayacak biçimde $\theta > 0$ mevcut ise, X rasgele değişkeni hafif kuyruklu dağılıma sahiptir denir. Başka bir ifade ile, X rasgele değişkeni hafif kuyruklu ise $E(e^{sX}) < \infty$ olacak biçimde $s > 0$ mevcuttur.

Hafif kuyruklu dağılımların kuyruk kısımları ya üstel olarak ya da üstel dağılıma göre daha hızlı bir biçimde sıfıra yaklaşırlar. Hafif kuyruklu dağılımlar, ağır kuyruklu dağılımların aksine uyum özelliği gösterme eğilimdedirler. Hafif kuyruklu dağılımlar Erlang dağılımı, hiper üstel dağılımlar ve $\alpha \geq 1$ parametresine sahip Weibull dağılımı gibi pek çok önemli dağılımı içermektedir.

1.4. Stokastik Süreçler

Stokastik süreçler, hisse senedi fiyatları, internet trafiği ve biyolojik popülasyonların çeşitli özellikleri gibi zaman içinde rastlantısal olarak değişen durumların matematiksel olarak modellenmesine yardımcı olan araçlardır. Gelecekteki olayların öngörülemez doğası bu olaylar modellenirken her bir t anındaki gözlemi, bir $X(t)$ rasgele değişkeninin realizasyonu olarak kabul etmeyi zorunlu kılmıştır. Stokastik süreçlerin tanımlanabilmesi için için öncelikle σ-cebir ve olasılık ölçüsü gibi yapıların tanımlanması gerekmektedir.

Tanım 1.4.1 [3] $\Omega \neq \emptyset$ kümesinin alt kümelerinden oluşan bir $\mathfrak{I}$ sınıfı

(i) $\Omega \in \mathfrak{I}$

(ii) $\forall$ A $\in \mathfrak{I}$ için $\bar{A} \in \mathfrak{I}$

(iii) $\{A_n\}, n \geq 1$ $\mathfrak{I}$'in ikişer ikişer ayrık kümelerinin oluşturduğu bir dizi olmak üzrere $\forall \{A_n\} \in \mathfrak{I}$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{I}$

şartlarını sağlıyor ise, $\mathfrak{I}$ sınıfına Ω kümesinde tanımlı bir sigma (σ) cebirdir denir.

Tanım 1.4.2 [3] $\mathbb{R}$ kümesindeki açık aralıkların sınıfını kapsayan en küçük σ-cebirine Borel cebiri denir.

Tanım 1.4.3 [3] $\mathfrak{I}$, $\Omega \neq \emptyset$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir olmak üzere, bir $P: \mathfrak{I} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu Kolmogorov aksiyomları olarak bilinen

(i) $\forall$ A $\in \mathfrak{I}$ için $P(A) \geq 0$

(ii) $P(\Omega) = 1$

(iii) İkişer ikişer ayrık kümelerin oluşturduğu $\forall \{A_n\} \in \mathfrak{I}$ dizisi için

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

özelliklerini sağlıyor ise, P fonksiyonuna $\mathfrak{I}$ üzerinde bir olasılık ölçüsü, $P(A)$ değerine ise, A kümesinin olasılığı denir.

Tanım 1.4.4 [3] $\Omega \neq \emptyset$ bir küme, $\mathfrak{I}$ sınıfı Ω kümesi üzerinde tanımlanmış bir σ-cebir ve P, $\mathfrak{I}$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsü olmak üzere, $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ üçlüsüne bir olasılık uzayı denir.

Tanım 1.4.5 [3] $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ bir olasılık uzayı ve $X: \Omega \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\forall\, x \in \mathbb{R}$ için $\{\omega: X(\omega) \leq x\} \in\ \mathfrak{I}$ ise, X bir rasgele değişkendir.

Tanım 1.4.6 [3] $(\Omega, \mathfrak{I}, \mathrm{P})$ bir olasılık uzayı ve $\emptyset \neq T \subseteq \mathbb{R}$ bir küme olsun. Ayrıca B_t ve B_R, T kümesinin alt kümeleri üzerinde inşa edilmiş Borel σ- cebirleri olsunlar.

$X(\omega, t): \Omega\ \times\ T \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $B\, \in B_R$ için

$$\{(\omega, t): X(\omega, t) \in B\} \in \sigma(\mathfrak{I} \times B_T)$$

şartını sağlıyor ise, $X(\omega, t)$ fonksiyona bir rasgele fonksiyon denir. $t \in T$ parametresi zamanı temsil ediyor ise, $X(\omega, t)$ fonksiyonuna bir stokastik süreç denir.

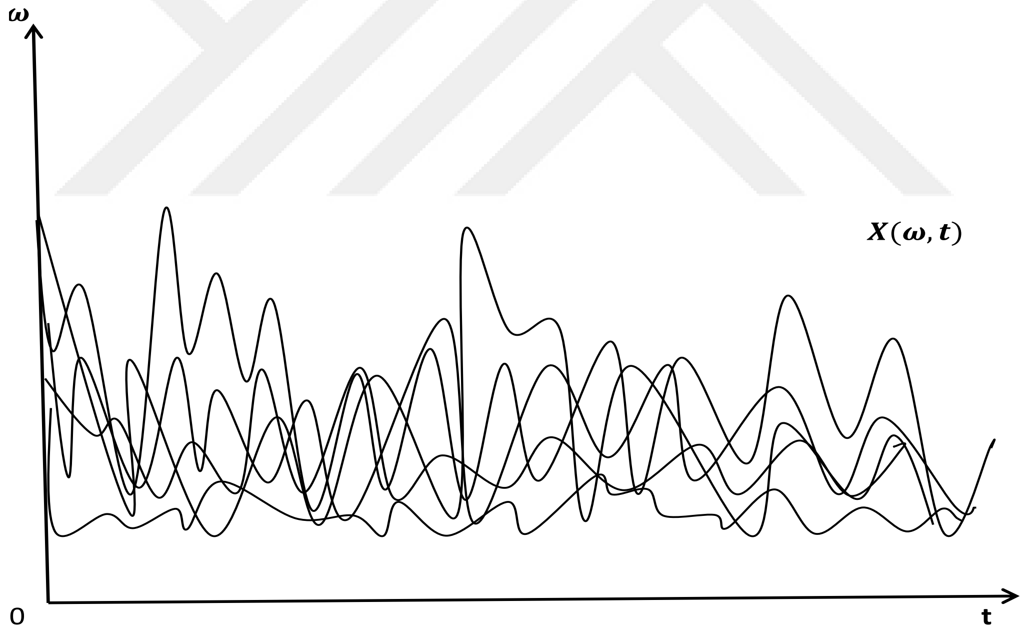
Tanım 1.4.7 [67] (Stokastik Sürecin Realizasyonları) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ olasılık uzayında tanımlı bir $X(\omega, t)$ stokastik süreci göz önüne alınsın. Her bir $t \in T$ için $X(\omega, t)$ bir rasgele değişkendir ve her bir $\omega \in \Omega$ için sürecin t anındaki değerini gösterir. Bu durumda stokastik sürecin realizasyonları iki farklı şekilde elde edilir.

(i) Her bir sabit $\omega \in \Omega$ değeri için $X(\omega, t): T \to \mathbb{R}$ bir fonksiyondur. Bu durumda $\{X(\omega, t),\ \omega \in \Omega\}$ zamana bağlı rasgele olmayan fonksiyonlarının bir topluluğudur.

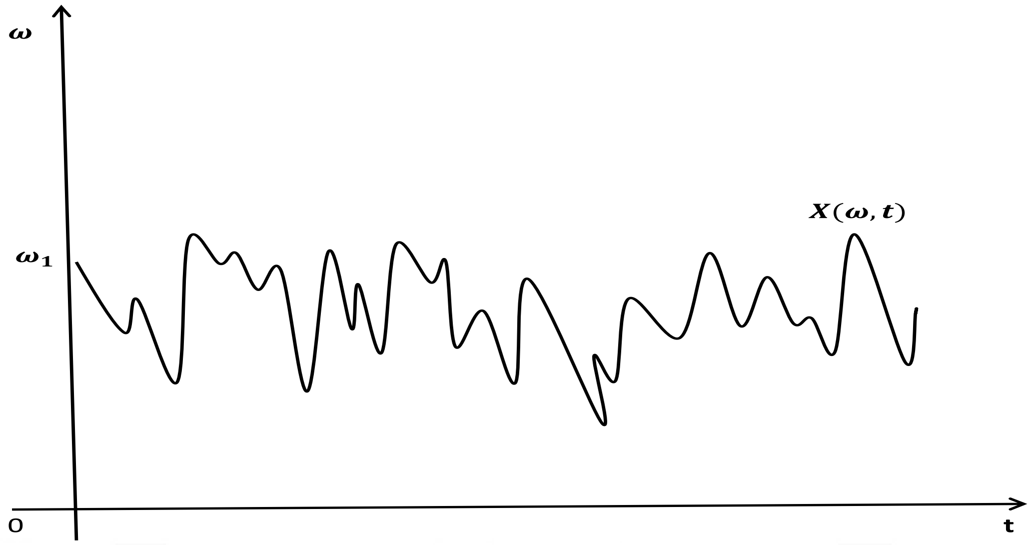
(ii) Sabit bir $t \in [0, \infty)$ için $X(\omega, t)$: $\Omega \to$ S yalnız ω' ya bağlı bir fonksiyon, yani bir rasgele değişkendir. Bu durumda $\{X(\omega, t),\ 0 \leq t < \infty\}$, t değişkeni ile indislenmiş rasgele değişkenlerinin bir ailesidir.

Tanım 1.4.8 [67] (Durum Uzayı ve İndis Kümesi) Tanım 1.4.7' de T kümesine stokastik sürecin indis kümesi, S kümesine ise stokastik sürecin durum uzayı denir. T sayılabilir küme ise, stokastik sürece kesikli zamanlıdır, T sayılamayan küme ise sürekli zamanlıdır denir. Durum uzayı S, stokastik süreci oluşturan $X(t)$ rasgele değişkenlerinin aldığı değerlerden oluşur. $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecine S sayılabilir bir küme ise, kesikli durum uzaylı stokastik süreç, S sayılamayan bir küme ise sürekli durum uzaylı stokastik süreç denir.

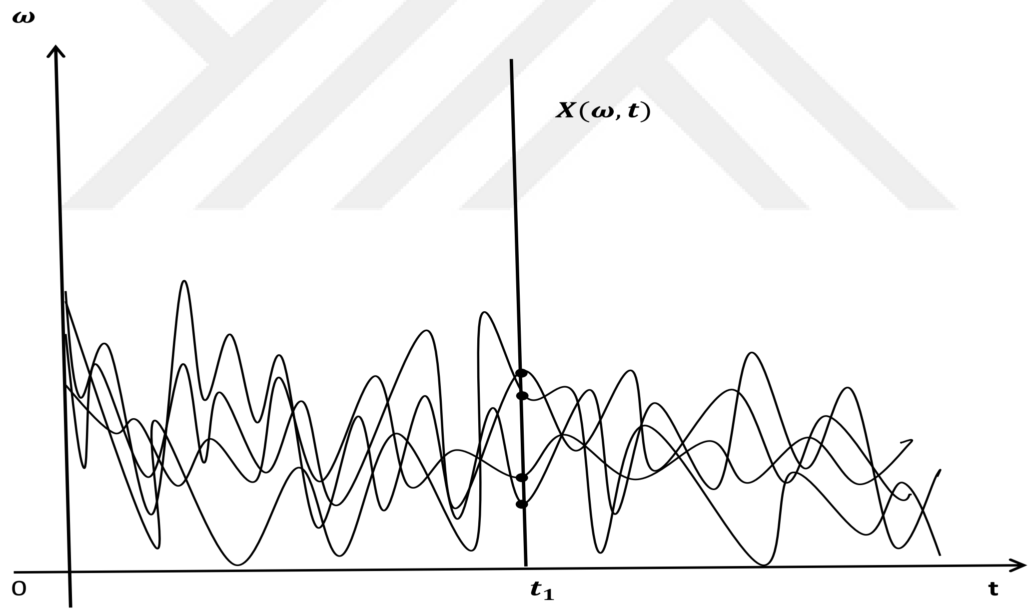
Stokastik süreçler kısaca $X(t)$, $Y(t)$, $\eta(t)$, $\xi(t)$ gibi sembollerle gösterilir. Bir rasgele değişken ile ilgili temel öğe o rasgele değişkenin dağılımıdır. Stokastik süreçler, rasgele değişkenlerin bir ailesi olduğundan, stokastik süreçler ile ilgili en önemli bilgi her $t \in [0, \infty)$ için $\{X(t), 0 \leq t < \infty\}$ rasgele değişkenlerinin olasılık dağılımlarından elde edilir. Stokastik sürecin belirli realizasyonlarına sürecin bir örneklem eğrisi denir.



Şekil 3. Bir stokastik sürecin realizasyonları



Şekil 4. Sabitlenmiş ω parametresi için stokastik sürecin bir realizasyonu



Şekil 5. Sabitlenmiş t=1,2,3,4 değerleri için stokastik sürecin bir realizasyonu

Tanım 1.4.9 [3] (Stokastik Sürecin Sonlu Boyutlu Dağılımları) X herhangi bir rasgele değişken olmak üzere, X rasgele değişkeni dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P(X \leq x),\ x \in \mathbb{R}$ biçiminde karakterize edilebilmektedir. $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ rasgele değişkenlerin bir vektörü olmak üzere $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektörü birleşik dağılım fonksiyonu cinsinden

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 \leq x_1,\ X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n),\ \ x_i \in \mathbb{R},\ \ i \geq 1,$$

biçiminde ifade edilebilir.

Stokastik süreçler, rasgele değişkenlerin bir ailesidir dolayısı ile dağılım fonksiyonları rasgele değişkenlerin vektörlerine benzer biçimde birleşik dağılım fonksiyonu yardımı ile ifade edilebilir. Burada en önemli faktör indis seti T nin sonlu ya da sayılabilir olup olmamasıdır.

Bir stokastik sürecin indis kümesi T sonlu ise, $\{X(t),\ t \in T\}$ stokastik süreci bileşik dağılım fonksiyonu aracılığı ile tam olarak ifade edilebilir. Stokastik sürecin indis kümesi T sonsuz elemanlı fakat sayılabilir ise, bu durumda stokastik süreç sonlu boyutlu dağılımları aracılığı ile ifade edilir. $\{X(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ bir stokastik süreç olmak üzere $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ rasgele değişkenlerinin ortak dağılım fonksiyonuna $\{X(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ sürecinin n boyutlu dağılım fonksiyonu denir.

$\{X(t), t \in \mathbb{N}_0\}$ stokastik sürecinin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ için

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

biçiminde ifade edilir. Stokastik sürecin durum uzayı S kesikli ya da sürekli olabilir.

Tanım 1.4.10 $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecinin durum uzayı S kesikli olsun. Bu durumda her $t_n \in T,\ n = 1,2, \dots, n$ için sürecin sonlu boyutlu dağılımları

$$p_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) = x_1, X(t_2) = x_2, \dots, X(t_n) = x_n\}$$

biçimindedir.

Tanım 1.4.11 $\{X(t), t \in T\}$ stokastik sürecinin durum uzayı S sürekli olsun. Bu durumda sürecin sonlu boyutlu dağılım fonksiyonu

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p_{t_1,t_2,\dots,t_n}(u_1, u_2, \dots, u_n)\, du_1 \dots du_n$$

biçiminde tanımlanır.

Aşağıda ifadesi verilen Kolmogorov teoremi, herhangi bir n değişkenli bir fonksiyonlar ailesinin hangi durumda bir stokastik süreç için sonlu boyutlu bir dağılım fonksiyonu tanımladığını anlayabilmemizi sağlar.

Teorem 1.4.1 $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ için $\left\{F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots x_n)\right\},\ t_i \in T,$ Tanım 1.4.9' da özellikleri verilmiş olan sonlu boyutlu dağılım fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Bu durumda

$$P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n\} = F_{t_1,t_2,\dots,t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $(\Omega, \mathfrak{I}, P\ )$ olasılık uzayı ve $X(t)$ stokastik süreci mevcuttur.

Teorem 1.4.1 bir stokastik süreç ile, o stokastik sürecin sonlu boyutlu dağılımlarının birbirlerini bire bir tanımlamaları durumuna işaret eder.

Tanım 1.4.12 [67] $F_t(x)$, $X(t)$ stokastik sürecinin bir boyutlu dağılım fonksiyonu ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \, dF_t(x) < +\infty$$

olsun. Bu durumda $X(t)$ stokastik sürecinin beklenen değeri

$$\mu(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, dF_t(x) \,, \;\; t \in T$$

dir.

Stokastik süreçlerin diğer önemli karakteristikleri varyans, otokovaryans, otokorelasyon fonksiyonlarıdır ve sırası ile aşağıdaki biçimde tanımlanırlar:

$$\sigma^2(t) = V[X(t)] = E[X(t) - \mu(t)]^2, \;\; t \in T,$$

$$\gamma(t_1, t_2) = Cov\left(X(t_1), X(t_2)\right), \;\; t_1, t_2 \in T,$$

$$\rho(t_1, t_2) = Corr\big(X(t_1), X(t_2)\big) = \frac{\gamma(t_1, t_2)}{\sqrt{\sigma^2(t_1) \, X \, \sigma^2(t_2)}}, \;\; t_1, t_2 \in T.$$

Stokastik süreçler, uygulamada kolaylık olması açısından belirli özelliklerine göre sınıflandırılmışlardır. Bu sınıflandırmada olasılık yapısı, özel süreçler, metotlar, problemler ve uygulamalar gibi temel kriterler baz alınır. Bu kriterlerin her biri için indis kümesi T ve durum uzayı S nin kesikli ve sürekli olması durumlarına göre tekrar sınıflandırma yapılır. Stokastik süreçlerin önemli bazı sınıfları Gauss süreçleri, değerleri bağımsız süreçler, bağımsız artışlı süreçler, durağan ve durağan olmayan süreçler, Markov ve yarı Markov süreçlerdir.

1.5. Sayma Süreçleri

Bazı problemlerde zaman içinde meydana gelen belli başlı olayların sayılması gerekli olabilir. Sayma süreçleri bu tür problemleri modellemek için kullanılan, negatif olmayan, değerleri artan ve tamsayı değerli özel stokastik süreçlerdir. Örneğin, $t = 0$ zamanından başlayarak t anına kadar süpermarkete gelen müşterilerin sayısı sayma süreçleri kullanılarak modellenir.

Tanım 1.5.1 [71] (Sayma Süreci) $N(t)$, $t = 0$ zamanından başlayarak t anına kadar (t anı dahil olmak üzere) meydana gelen olayların sayısını göstersin. $\{N(t), t \geq 1\}$ stokastik sürecine bir sayma süreci denir. Sayma süreci aşağıdaki şartları sağlar

(i) $N(0) = 0$,

(ii) $\forall\, t \in [0, \infty)$; $N(t) \in \{0,1,2, \dots\}$,

(iii) $s < t$ ise, $N(t) \leq N(s)$ dir,

(iv) $0 \leq s < t$ için $N(t) - N(s)$, $(s, t]$ aralığında meydana gelen olayların sayısıdır.

Sayma süreçlerinde meydana gelen her bir olay "varış" olarak adlandırılır. Örneğin $\{N(t), t \geq 1\}$ bir şehirde t zamanına kadar meydana gelen kazaları saysın. Meydana gelen her bir kaza "varış" olarak adlandırılır.

Tanım 1.5.2 [71] (Varışlar Arası Geçen Zaman) X_1, birinci varışa kadar geçen zaman ve X_i, $(i-1)$. ve i. varış arasında geçen zaman olmak üzere $X = \{X_1, X_2, \dots\}$ dizisine varışlar arası geçen zamanlar dizisi denir.

$S_0 = 0$ olmak üzere $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ olsun. S_n, n. varışın gerçekleştiği andır. Burada S_n bir rasgele değişken ve $\{S_n \leq t\}$, n. varışın gerçekleşme olayıdır.

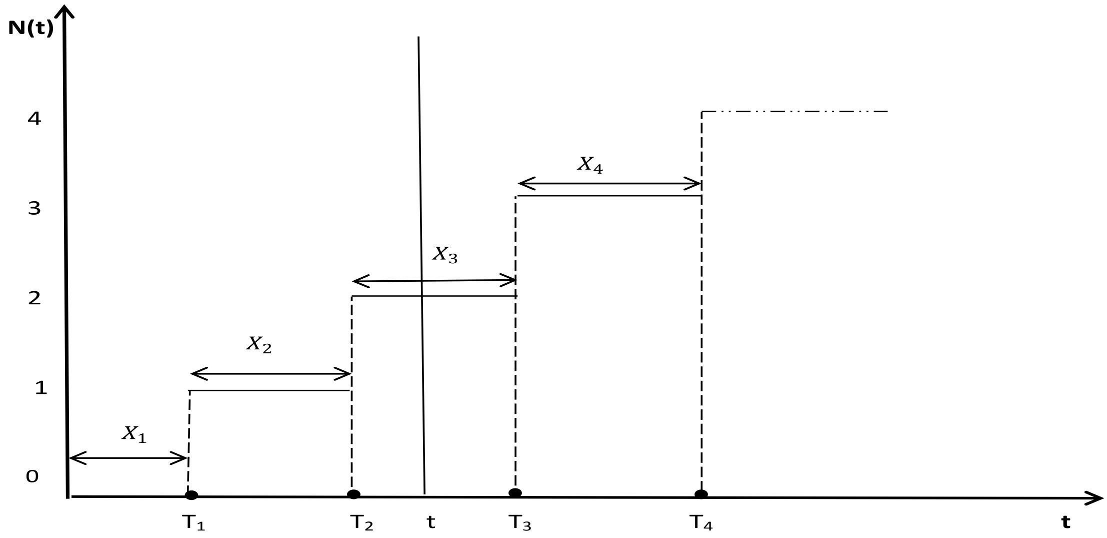
Bu durumda $N(t)$, "0" anından "t" anına kadar ("t" anı dahil olmak üzere) meydana gelen olayların sayısıdır. $N(t)$, indigatör fonksiyonu I_A kullanılarak matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{\{S_k \leq 1\}}. \tag{23}$$

(23) ifadesinde A olayına ait I_A indigator fonksiyonu A olayı gerçekleştiğinde 1, diğer durumlarda 0 değerini alan özel bir fonksiyondur. Burada her bir $N(t)$ bir rasgele değişken ve $\{N(t),\ t \geq 1\}$ bir stokastik süreçtir. (23) matematiksel ifadesinden de görüleceği üzere, n. varışın zamanını gösteren S_n ile varışları sayan rasgele değişken $N(t)$ arasında

$\{S_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$

ilişkisi vardır. Bu ilişki şu şekilde açıklanabilir: $\{S_n \leq t\}$ olayı "t" zamanına kadar "n" tane varışın gerçekleşme olayıdır, bu "t" anına kadar gerçekleşen varışları sayan $N(t)$' nin en az "n" olması demektir. Benzer şekilde, $\{N(t) \geq n\}$ olması da $\{S_n \leq t\}$ olmasını gerekli kılmaktadır. Bu durumda $P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t)$ sonucuna ulaşılır.



Şekil 5. Sayma sürecinin bir realizasyonu

Şekil 5'te $N(t)$, $[0, t]$ aralığındaki olayların sayısını gösteren bir sayma sürecidir. Süreç şekilde görüldüğü gibi t çizgisi ile kesildiğinde $t \in [T_2, T_3)$ için $N(t) = 2$ dir.

Tanım 1.5.3 [3] $\{X(t),\ t \in [0, \infty)\}$ sürekli zamanlı rasgele bir süreç olsun. Bu durumda eğer her $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$ için

$$X(t_2) - X(t_1), X(t_3) - X(t_2), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$$

rasgele değişkenleri bağımsız ise $X(t)$' lere bağımsız artışlar denir.

Sayma süreçlerinde $N(t_i) - N(t_{i-1})$, $(t_{i-1}, t_i]$ aralığında gerçekleşen varışların sayısıdır. Her ayrık $(t_1, t_2], (t_2, t_3], \ldots, (t_{n-1}, t_n]$ zaman aralığında gerçekleşen varışların sayısını gösteren $N(t_i) - N(t_{i-1})$ ler birbirinden bağımsız ise, $N(t)$ sayma sürecinin artışları bağımsızdır denir.

Tanım 1.5.4 [3] Her $n \in \mathbb{N}$, her $0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_n$ ve her $h \geq 0$ için

$$(N(s_1 + h), N(s_2 + h) - N(s_1 + h), \ldots, N(s_n + h) - N(s_{n-1} + h))$$

rasgele değişkenlerinin dağılımları "h" ye bağlı değil ise, $N(t)$, $t \geq 1$ sürecinin artışları durağandır (stasyonerdir) denir.

1.6. Yenileme ve Ödüllü Yenileme Süreçleri

Yenileme süreçleri ilk olarak bozulan objelerin yerine konulması ile ilgili problemleri araştırmak amacı ile kullanılmıştır. Günümüzde yenileme süreçleri zaman içinde rasgele gelişen yenileme ya da ortaya çıkma ismi verilen durumları modellemek ve rasgele değişkenler cinsinden ifade etmek için kullanılan en ideal stokastik süreçlerdir. Literatürde yenileme süreçleri kullanılarak modellenen pek çok gerçek hayat problemi vardır. Bu modelin gerçek hayat problemlerine ilk defa uygulanması ile ilgili örnekler şöyle sıralanabilir: Güvenilirlik teorisinde bozulan makinelerin yenilenme sayılarının modellenmesi Cox [27], risk teorisinde ardışık olarak meydana gelen risklerin modellenmesi Embrechts [29], envanter modellerde ardışık talep miktarları arasındaki zamanın modellenmesi Ross [71] insan kaynakları planlamasında bir işyerindeki belirli bir zaman aralığında ard arda gelen istifaların modellenmesi Bartholomew [10], garanti analizinde garanti süresinin bitimini takip eden yeni satın almaların modellenmesi Blischke ve Scheuer [17]. Uygulama alanlarının genişliği nedeniyle yenileme süreçleri ve bu süreçlerin olasılık ve sayısal karakteristiklerinin incelenmesi günümüzde hala çok önemli bir çalışma alanıdır.

Yenileme süreçleri ile ilgili tipik bazı uygulamalar şu şekilde örneklendirilebilir: Yenilemeler, belli bir zaman aralığında bir mağazaya gelen müşteriler ya da bir web dağıtıcısına gelen dosyalar olabilir. Bir sistemde çalışır durumdaki herhangi bir aygıt, örneğin bir ampul ele alınsın. Bu aygıt her bozulduğunda yerine aynı özelliklere sahip bir yenisi yerleştirilsin ve bu süreç böyle devam etsin. Burada yerleştirilen her yeni aygıt bir yenilemedir. Belirlenmiş coğrafi bir bölgede art arda gelen doğa olayları arasında geçen zaman (örneğin iki kasırga ya da iki deprem arasında geçen zaman) bir yenilemedir.

Tanım 1.6.1 Yenileme Süreci [71]: $\{N(t)\},\ t \geq 0$ sayma süreci ele alınsın. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecinde varışlar arası geçen zamanı gösteren $\{X_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olsunlar. Genelliği bozmadan $F(0) = P\{X_n = 0\} < 1$ olsun. $X_n,\ \ (n-1).$ ve $n.$ olaylar arasında geçen zaman olsun. Sayma süreçlerine benzer şekilde

$$S_0 = 0,\ \ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,,\ \ n \geq 1$$

olarak tanımlanırsa $S_n,\ n.$ olayın gerçekleştiği zamanı verir. $N(t),\ t$ anına kadar meydana gelen olayların sayısı olmak üzere,

$$N(t) = \sup\{n \mid S_n \leq t\} \tag{24}$$

tanımlansın. Bu durumda (24) ile tanımlanan $N(t)$, $[0,t]$ aralığındaki yenilemelerin sayısını veren bir rasgele değişkendir. $N(t)$ rasgele değişkenine yenileme rasgele değişkeni ve $\{N(t),\ t \geq 0\}$ sayma sürecine yenileme süreci denir.

Yenileme süreçlerinde, sayma süreçlerinde kullanılan ve varış olarak adlandırılan olayların her biri bir yenilemedir. Ardışık iki yenileme arasında geçen zamanı veren rasgele değişkenler bağımsız aynı dağılımlı olduklarından, her yenilemede bu süreç olasılıksal olarak yeniden başlar.

Tanım 1.6.2 [71] Ardışık varışlar arasında geçen zamanın beklenen değeri aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\mu = E(X_n) = \int_0^\infty x\, dF(x).$$

Burada $X_n \geq 0$ ve $F(0) < 1$ olduğundan $0 < \mu \leq \infty$ olduğu kolayca görülebilir.

Not 1.6.1 [71] Güçlü büyük sayılar kanunundan 1 olasılıkla aşağıdaki yakınsama doğrudur.

$$\frac{S_n}{n} \to \mu, \quad n \to \infty.$$

$\mu > 0$ olduğu bilindiğinden $n \to \infty$ için $S_n \to \infty$ olmak zorundadır. Bu durumda n'in en çok sonlu sayıda değeri için $S_n \leq t$ olabilir. Bu da $N(t)$ nin sonlu olması demektir. Yani:

$$N(t) = \max\{n \mid S_n \leq t\} \tag{25}$$

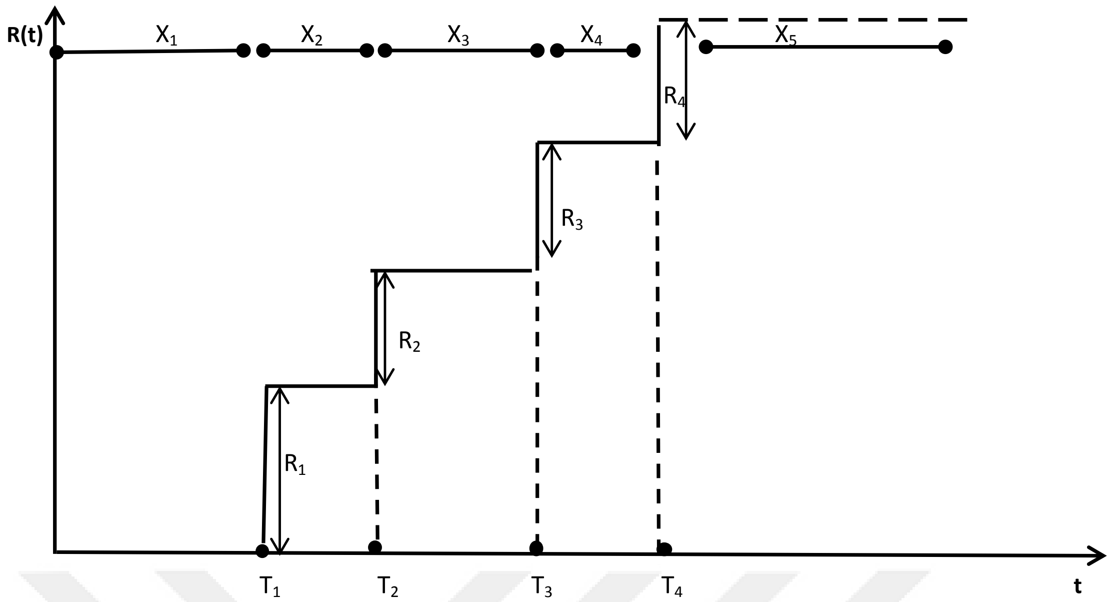
dır.

Tanım 1.6.3 Ödüllü Yenileme Süreci [71]: $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci X_n, $(n-1)$. ve n. yenilemeler arasında geçen zamanı gösteren rasgele değişken olsun. Her bir yenilemenin ardından sisteme ödül verildiği varsayılsın.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere R_n, n. yenileme sırasında kazanılan ödül olsun. $\{X_n\}$, $n \geq 1$ ve $\{R_n\}$, $n \geq 1$ bağımsız ve kendi aralarında aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin dizileri olmak üzere

$$R(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

t anına kadar sisteme verilen toplam ödüllerin sayısıdır. Bu koşullar altında $\{R(t),\ t \geq 0\}$ biçiminde tanımlanan sürece ödüllü yenileme süreci denir.



Şekil 6. Ödüllü yenileme sürecinin bir realizasyonu

1.6.1. Yenileme Süreci N(t)’ nin Dağılımları

Tanım 1.6.1.1 [71] Sayma süreçleri kısmında $(N(t) \geq n)$ olayı ile $(S_n \leq t)$ olayının birbirine denk olaylar olduğu gösterilmişti. $P(S_n \leq t) = F * F * \ldots * F = F^{*n}$ olduğu göz önünde bulundurularak $N(t)$ yenileme sürecinin dağılımına aşağıdaki gibi kolayca ulaşılabilir.

$$P\{N(t) = n\} = P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} = P\{S_n \leq n\} - P\{S_{n+1} \leq n+1\}$$
$$= F^{*n}(t) - F^{*n+1}(t).$$

$N(t)$ nin, en çok araştırılan sayısal karakteristiği ortalama değeridir.

Tanım 1.6.1.2 [7] (Yenileme Fonksiyonu) $N(t)$ yenileme sürecinin ortalama değerini veren fonksiyona yenileme fonksiyonu ismi verilir ve $E\big(N(t)\big) = U(t)$ biçiminde gösterilir. $U(t)$, $(0, t]$ aralığında gerçekleşen yenilemelerin beklenen değeridir.

$U(t)$ yenileme fonksiyonu, yenileme teorisi yardımı ile ifade edilen pek çok problemde rol oynadığından, yenileme fonksiyonunun özelliklerinin belirlenmesi yenileme teorisinin önemli problemlerinden biridir.

Özellik 1.6.1.1 [7] $\{X_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olsunlar. $\{X_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(t)$ ile F arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$U(t) = E\big(N(t)\big) = \sum_{n=0}^{\infty} n \ P\{N(t) = n\} = \sum_{n=0}^{\infty} n \left(F^{*n}(t) - F^{*n+1}(t)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t). \qquad (26)$$

Teorem 1.6.1.1 [7] (Yenileme Tipli İntegral Denklem): Yenileme fonksiyonu $U(t)$ için integral denklem aşağıdaki gibi elde edilir:

$$U(t) = F(t) + \int_0^t U(t-x)\, dF(x).$$

İspat: Öncelikle birinci yenileme gerçekleşinceye kadar geçen süre X_1 ‘in bilindiği varsayılsın. Bu durumda

$$U(t) = E\big(N(t)\big) = \int_0^{\infty} E\{N(t) |\, X_1 = x\}\, dF(x)$$

olacaktır.

$X_1 = x > t$ verilmiş olsun. Bu durumda; $[0, t]$ aralığında hiç yenileme olmayacağından, $E[N(t) |\, X_1 = x] = 0$ olur. $0 \leq x \leq t$ olsun ve birinci yenileme $x \leq t$ de başlamış olsun, bu durumda süreç periyoduna x’te başlayacağı için geriye kalan $(t - x)$ uzunluğundaki aralıkta meydana gelecek olan yenilemelerin beklenen değeri $E[N(t-x)]$ tir. Dolayısı ile:

$$E[N(t) |\, X_1] = 1 + E[N(t-x)] = 1 + U(t-x)$$

elde edilir. Bu durumda

$$U(t) = \int_0^t \{1 + U(t-x)\} dF(x) = F(t) + \int_0^t U(t-x)\, dF(x)$$
$$= F(t) + F(t) * U(t) \qquad (27)$$

dır. (27) ile verilen denkleme yenileme teorisinin integral denklemi ya da yenileme denklemi denir.

Yenileme fonksiyonu, yenileme süreçlerini karakterize eden en önemli faktörlerden biridir. Yenileme fonksiyonu $U(t)$, en iyi şekilde (27) ile verilmiş olan yenileme denkleminin çözümü cinsinden ifade edilebilir. Yenileme denkleminden ayrı olarak, yenileme tipli denklemler uygulamalı olasılığın pek çok farklı alanındaki problemlerde karşılaşılmaktadır. Feller [32] yenileme tipli denklemleri sağlayan pek çok farklı probleme örnek vermiştir. Ayrıca yenileme tipli denklemlerin demografi, sosyal süreçler, işgücü modelleri ve envanter modeller ile ilgili çalışmalarda kullanıldığı pek çok örnek literatürde mevcuttur ([10], [11], [12], [50], [72]).

Yenileme denklemleri ve yenileme tipli denklemler uygulamada çok önemli olsalar da, pratikte kullanımları zordur. Bunun en önemli nedeni yenileme denklemlerinin yenileme fonksiyonu $U(t)$'yi içermesi ve yenileme fonksiyonunun da bir kaç özel durum dışında açık ifadelerinin elde edilememesidir. Bu nedenle günümüzde $U(t)$ için basit ve kullanılabilir formüller elde etme problemi yenileme teorisinin önemli çalışma alanlarından biridir. Bunun için yaklaşım yöntemleri ve asimptotik yöntemler kullanılmaktadır. Klasik yenileme teorisinde $t \to \infty$ durumunda yenileme fonksiyonu $U(t)$, yenileme süreci $N(t)$, $\delta(t) = t - S_{N(t)}$ olarak gösterilen şimdiki ömür süreci ve $\gamma(t) = S_{N(t)+1} - t$ ile ifade edilen kalan ömür süreci için pek çok asimptotik açılım önerilmiştir. Bu konu ile ilgili ayrıntılı bilgi Feller [33] ve Smith [78] kaynaklarında bulunabilir.

Bu kısımda öncelikle aritmetik rasgele değişken tanımı daha sonra da yenileme süreci ile ilgili önemli teoremler ve yenileme fonksiyonu ile ilgili temel limit teoremleri ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 1.6.1.3 [33] (Aritmetik Rasgele Değişken) $\alpha, \beta > 0$ olmak üzere, bir X rasgele değişkeni 1 olasılık ile, $\{\alpha k + \beta, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ kümesinden değerler alıyor ise, X rasgele değişkenine aritmetik rasgele değişken ve X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonuna, aritmetik dağılım fonksiyonu denir.

Teorem 1.6.1.2 [7], [33] $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. Bu durumda bu sürecin yenileme fonksiyonu heryerde sonludur. Yani her $0 \leq t < \infty$ için $U(t) < \infty$ dir.

Teorem 1.6.1.3 [71] $\{N(t), t \geq 0\}$ yenileme sürecinin her mertebeden sonlu momentleri mevcuttur. Yani, $\forall\, t \geq 0$ ve $r \geq 0$ için, $E[N^r(t)] < \infty$ dir.

Yenileme süreçleri ile ilgili önemli problemlerden biri de uzun süre çalışmakta olan bir yenileme sürecinde birim zaman zarfında meydana gelen yenilemelerin yaklaşık değerine ulaşmaktır.

Teorem 1.6.1.4 [33], [71] $\{N(t), t \geq 1\}$ yenileme süreci ve yenilemeler arası geçen zamanın beklenen değeri $0 < \mu \leq \infty$ olsun. Bu durumda $t \to \infty$ için 1 olasılıkla

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}.$$

Benzer bir sonuç yenilemeler arası geçen zaman süreleri aritmetik olmayan bir dağılım fonksiyonuna sahip iken, $U(t)/t$ için de geçerlidir. Bu sonucu veren teorem elementer yenileme teoremi ile verilir. Elementer yenileme teoremi ve diğer limit teoremler yenilemeler arası geçen zaman aritmetik olmayan rasgele değişken olduğu durumda verilmiştir. Rasgele değişkenlerin aritmetik olduğu durum için de benzer sonuçların varlığı bilinmektedir.

Teorem 1.6.1.5 [33], [47] (Elementer Yenileme Teoremi) $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun ve yenilemeler arası geçen zaman sürelerini veren $\{X_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri aritmetik olmayan $F(t)$ dağılım fonksiyonuna sahip olsunlar. Ayrıca;
$0 < \mu = E(X_1) < \infty$ olsun. Bu durumda:

$$\frac{U(t)}{t} \to \frac{1}{\mu},\quad t \to \infty$$

dir.

Teorem 1.6.1.6 (Anahtar Yenileme Teoremi) [33], [78] $\{X_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olsunlar. $\{X_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(t)$ ve $E(X_1) = \mu$ olsun. Ayrıca Q, $(0, \infty)$ aralığında sonlu, artmayan ve integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t Q(t-x)dU(x) = \lim_{t\to\infty}(Q * U)(t) = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty Q(u)\, du$$

dir.

Teorem 1.6.1.7 [16] (Birinci Yenileme Teoremi) $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun ve yenilemeler arası geçen zaman sürelerini veren $\{X_i\}, i \geq 1$ rasgele değişkenleri aritmetik olmayan $F(t)$ dağılım fonksiyonuna sahip olsunlar. Ayrıca $0 < \mu = E(X_1) < \infty$ olsun. Bu durumda $\forall\ y > 0$,

$$\lim_{t\to\infty}[U(t+y) - U(t)] = \frac{y}{\mu}$$

dir.

Sonuç 1.6.1.1 Uzun süredir çalışan bir yenileme sürecinde, y uzunluğundaki bir aralıkta yapılan yenilemelerin beklenen sayısının y/μ dir.

Birinci yenileme teoremi literatürde Blackwell'in yenileme teoremi olarak da bilinmektedir.

Teorem 1.6.1.8 [33] $\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreci olsun. Ardışık yenilemeler arası geçen zaman sürelerini temsil eden $\{X_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri, aritmetik olmayan bir

$F(t)$ dağılım fonksiyonuna, sonlu μ_1 ortalamasına ve sonlu σ^2 varyansına sahip olsun. Bu durumda $t \to \infty$ için aşağıdaki yakınsama doğrudur:

$$0 \leq \left(U(t) - \frac{t}{\mu_1} \right) \to \frac{\mu_1^2 + \sigma^2}{2\mu_1^2}.$$

Teorem 1.6.1.8 nin en önemli sonuçlarından biri aşağıdaki gibi verilir:

Sonuç 1.6.1.2 $\mu_2 = E(X_1^2) < \infty$ ve $\mu_1 = E(X_1) < \infty$ olsun. Bu durumda $U(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + o(1), \quad t \to \infty. \tag{28}$$

Çalışmanın bu kısmında ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları ile ilgili literatür araştırmasına yer verilecektir.

1.6.2. Literatür Araştırması

Yenileme süreçleri günlük karşılaşılan pek çok durumu modellemek için kullanılan önemli matematiksel araçlardandır. Ödüllü yenileme süreçleri, ertelemeli yenileme süreçleri, rasgele yürüyüş süreçleri, Poisson süreçleri gibi pek çok önemli stokastik süreç yenileme süreçleri üzerine inşa edilmiştir.

Bu çalışmada (s,S) tipli bir envanter sistem, ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan kesikli müdahaleli bir stokastik süreç kullanılarak matematiksel olarak modellenecektir. Kesikli müdahaleli stokastik süreçler ilk kez A.N. Kolmogorov [57] tarafından ele alınmıştır.

Bu konuda literatürde önemli çalışmalar mevcuttur [18], [33], [40]. Skorohod “Random Processes with Independent Increments” [77] adlı çalışmasında bu sınıf için genel ergodiklik teoremini ispat etmiştir. Bu yıllarda yapılan çalışmalar çok önemli olmakla birlikte elde edilen formüllerin karmaşık matematiksel yapılarından dolayı uygulamada kullanılabilmeleri mümkün olmamıştır. Bu zorluğun ortadan kaldırılabilmesi için günümüzde bu süreçler ile ilgili çalışmalarda asimptotik yöntemler kullanılması önemli bir yaklaşım haline gelmiştir. Bunun nedeni asimptotik yöntemler kullanılarak yapılan çalışmalarda, matematiksel yapıları sade, uygulamada kullanılabilirlikleri olan ayrıca kesin ifadelere çok yakın sonuçlar elde edilebilmesidir. Literatürde bu süreçler ile ilgili çok önemli yaklaşım formülleri mevcuttur ([4], [5], [6], [28], [48], [49], [51-55], [58], [59]).

Kesikli müdahaleli stokastik süreçler ile karşılaşılan önemli problemlerden biri de (s,S) tipli envanter modellerdir. (s,S) tipli envanter modellerin kesikli müdahaleli yarı Markov süreçler kullanılarak modellenmesi ve karakteristiklerinin incelenmesi üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. Örneğin Türksen v.d. [82] ve Khaniyev v.d. [55] (s,S) tipli Fuzzy envanter modellerini sırası ile Nakagami dağılımlı talep miktarları ve Gamma dağılımlı talep miktarları ile incelemişlerdir. Daha sonra (s,S) tipli envanter modelleri ifade eden süreç için kesikli şans karışımları genelleştirilmiş Beta dağılımına ve üçgensel dağılıma sahipken asimptotik dağılım elde edilmiştir [52], [53]. Kesikli şans karışımları üçgensel dağılıma sahipken süreci ifade eden sürecin ergodik dağılımının momentleri için asimptotik açılım elde edilmiştir [54]. Ayrıca bu süreç müdahaleyi ifade eden kesikli şans karışımı genel bir dağılıma sahipken de ele alınmış ve bu durum için ergodik dağılımın ve ergodik dağılımın n. momentlerinin asimptotik açılımlarına ulaşılmıştır [5].

Aliyev bu süreçleri sonlu momente sahip alt üstel dağılımlı müdahale ile ele almış ve sürecin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n. momentleri için asimptotik açılımlara ulaşmıştır [6].

(s,S) tipli stok kontrol modelleri de dahil olmak üzere yenileme süreçleri ile ifade edilen modellerin karakteristiklerini incelerken yenileme fonksiyonunun asimptotik ifadesini bilmek gerekir. Yapılan çalışmaların çoğunluğunda talep miktarlarının hafif kuyruklu dağılıma sahip olduğu varsayılmış ve sürecin karakteristikleri incelenirken, Feller [33] tarafından önerilen (28) de verilen asimptotik açılım kullanılmıştır. Bu çalışmada ise talep miktarları ağır kuyruklu dağılıma sahip olduğundan ağır kuyruklu dağılımların kuyruk davranışı da göz önünde bulundurularak elde edilmiş asimptotik açılımlara ihtiyaç vardır.

Yenileme süreci ile ilgili problemlerde genellikle F dağılım fonksiyonu bilinse dahi, yenileme fonksiyonun yani $U(t)$ nin asimptotik davranışını bilmek, yenileme süreçleri kullanılarak modellenen pek çok problemin çözülebilmesine olanak sağlamaktadır. Teorem 1.6.1.2-1.6.1.8 ile verilen temel yenileme teoremleri yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenler ağır kuyruklu olduklarında, yani $\mu^2 = \infty$ ve $\mu = \infty$ özel durumlarında yakınsama hızını belirlemede yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle son yıllarda yenileme fonksiyonunun farklı durumlarda asimptotik davranışını ve sonsuzda yakınsama hızını belirleyen pek çok çalışma yapılmaktadır. Ağır kuyruklu dağılımlar için yenileme teorisi olasılığın en güncel çalışma alanlarından biridir. Bu kısımda ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının asimptotik davranışı ile ilgili yapılmış çalışmalar üzerine kısa bir literatür taraması verilecektir.

Bu konu ile ilgili ilk çalışmalardan biri yine Feller [32] tarafından yapılmıştır Teorem 1.6.2.1 ile verilmiş olan teorem literatürde zayıf yenileme teoremi olarak bilinmektedir:

Teorem 1.6.2.1 [32] $L(.)$ yavaş değişen bir fonksiyon ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Bu durumda $t \to \infty$ için

$$\bar{F}(x) \sim x^{-\alpha} L(x) \;\Leftrightarrow U(t) \sim \big(\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)\big)^{-1} t^{\alpha} \big(L(t)\big)^{-1}$$

dir.

Ayrıca

$$m(t) \equiv \int_{0}^{t} \big(1 - F(u)\big) du \sim L(t) \;\Leftrightarrow U(t) \sim t\,\big(L(t)\big)^{-1}$$

dır.

Burada $m(t) \equiv \int_0^t \big(1 - F(u)\big)\, du$ ile tanımlı fonksiyon tepesi kesik moment fonksiyonu olarak adlandırılır [32]. Teorem 1.6.2.1 daha sonra, Smith [79] tarafından $\alpha = 0$ ve $\alpha = 1$ durumları için de ispatlanmıştır. Teorem 1.6.2.1'in daha kullanışlı alternatif bir formu Erickson [31] tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir:

Teorem 1.6.2.2 [31] $0 \leq \alpha \leq 1$ olduğunda $m(t)$ fonksiyonu $1 - \alpha$ indeksi ile düzenli değişendir ancak ve ancak $U(t)$, α indeksi ile düzenli değişendir. Ayrıca her iki durumda da $t \;\to \infty$ için;

$$U(t) \sim \big(\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(2-\alpha)\big)^{-1}$$

dır.

Rogozin [69], tepesi kesik moment fonksiyonu olarak adlandırılan $m(t)$ fonksiyonunun yavaş değişen pozitif değerli fonksiyonlar sınıfının kısmi kararlı fonksiyonlar sınıfı olarak tanımladığı bir sınıfına ait olduğunu göstermiştir. Rogozin [69] bu sınıfın sonlu momente sahip dağılımlar sınıfından daha geniş bir sınıf olduğunu ispatlamıştır. Sonsuz birinci momente sahip düzenli değişen dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(t)$ olsun. $U(t)$ yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenlerin aritmetik olmadığı durum için $U(t+y) - U(t)$ ifadesinin yakınsama hızı Garsia ve Lamberti [31], aritmetik olduğu durum için ise Erickson [36] tarafından ispatlanmıştır. Benzer şekilde $(U * Q)(t)$ ifadesi için yakınsama hızı teoremleri de dahil olmak üzere, $Q(.)$ fonksiyonu ile ilgili pek çok özellik Erickson [31] ve Teugels [81] tarafından verilmiştir.

Teorem 1.6.2.3 [81] F, α indeksi ile düzenli değişen bir dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(t)$ olmak üzere, $t \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik ilişkiler doğrudur:

$$U(t) \sim \left(L(t)\right)^{-1}, \qquad \alpha = 0$$
$$U(t) \sim \left(\frac{t^{\alpha}}{L(t)}\right)(\sin \alpha\pi / \alpha\pi) \qquad 0 < \alpha < 1$$
$$U(t) \sim L^{*}(t) \qquad \alpha = 1.$$

Burada $L^{*}(t) = \int_0^t [1 - F(x)]dx$ biçiminde tanımlanmıştır. Teorem 1.6.2.3 ile verilen Teoremde Teugels [81] tarafından elde edilen sonuçlar daha doğru hipotezler altında Anderson ve Athreya [8] tarafından elde edilmiş ayrıca bu sonuçların daha güçlü bir versiyonu $\mu = \infty$ durumu için de ispatlanmıştır. Anderson ve Athreya [8] tarafından yapılan bu çalışmanın sonuçları Teorem 1.6.2.4 ile verilmiştir.

Teorem 1.6.2.4 [8] $F(.)$, $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ indisi ile düzenli değişen bir dağılım fonksiyonu olsun. Ayrıca $Q(.): \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}^{+}$, $Q(0) < \infty$ olacak şekilde artmayan bir fonksiyon olsun ve $L_{\beta}(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere

$$Q(x) = x^{-\beta} L_{\beta}(x), \;\; 0 \leq \beta < 1$$

şartı sağlansın. Bu durumda; $\left(C(\alpha,\beta)\right)^{-1} = (2-\beta)B(\alpha - \beta + 1, 2 - \alpha)$ olmak üzere aşağıdaki asimptotik denklik sağlanır:

$$(U * Q)(t) \sim C(\alpha,\beta)\left(\int_0^t Q(u)du\right)\left(\int_0^t (1 - F(u))du\right).$$

Bu çalışmaların tamamı daha sonra ağır kuyruklu dağılımların farklı altsınıfları tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için (28) ifadesindeki gibi kapalı formda ve yakınsama hızı hakkında bilgi veren asimptotik açılımların elde edilebilmesine olanak sağlamıştır. Kapalı formda elde edilmiş önemli açılımlardan biri Embrechts ve Omey [29] tarafından elde edilmiştir. Embrechts ve Omey [29] çalışmasında uzun kuyruklu $\mathcal{L}$ ve baskın değişen kuyruklu $\mathcal{D}$ dağılımlar ile tanımlanan özel iki altsınıfın kesişimindeki dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımını aşağıdaki gibi elde etmişlerdir:

Teorem 1.6.2.5 [29] $F \in \mathcal{L} \cap \mathcal{D}$ ve $\mu_2 < \infty$ olsun. Ayrıca F singüler olmayan bir dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda F dağılım fonksiyonuna sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$U(x) - \frac{x}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^x \overline{F_I}(z) dz = o(x\, \overline{F_I}(x)), \;\; x \to \infty.$$

Burada $F_I(x)$ fonksiyonuna integrallenmiş kuyruk fonksiyonu denir ve aşağıdaki biçimde hesaplanır:

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^x \bar{F}(y)\; dy.$$

Ağır kuyruklu dağılımların uygulamada en çok karşılaşılan altsınıfları sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılımlar ve alt üstel dağılımlar altsınıflarıdır. Bu çalışmanın amacı talep miktarları bu iki özel altsınıftan dağılıma sahipken (s,S) tipli yarı Markov bir stok kontrol problemini incelemektir.

Bu çalışmada talep miktarları alt üstel dağılımlar ve sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılımlar alt sınıflarından dağılımlara sahip (s,S) tipli envanter modeller ele alınmıştır ve bu alt sınıflardan rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için özel asimptotik açılımların kullanılması gerekmektedir. Sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılımlar ve alt üstel dağılımlar altsınıfından rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımının kapalı ifadesi sırası ile, Geluk [37] ve Geluk ve Frenk [39] tarafından önerilmiştir. Geluk [37] ve Geluk ve Frenk [39] çalışmaları bu tezin en önemli çıkış noktasını oluşturmaktadır.

Teorem 1.6.2.6 [37] $\{X_i\},\ i \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olsunlar. Ayrıca $1 < \alpha < 2$ olmak üzere $\bar{F}(x)$, $-\alpha$ indeksi ile düzenli değişen dağılıma sahip olsun. Bu durumda $\{X_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(t),\ t \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu^2} \int_0^t \int_s^\infty \bar{F}\,(v)\, dv\, ds = O\left(t^4 \left(\bar{F}(t)\right)^2 \bar{F}\left(t^2\, \bar{F}(t)\right)\right) \tag{29}$$

Teorem 1.6.2.7 [39] $\{X_i\},\ i \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenlerin bir dizisi ve $\{X_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı F dağılımına sahip olsunlar. F dağılım fonksiyonu singüler olmayan bir dağılım fonksiyonu, $E(X_1^2) = \mu_2 < \infty$ ve ayrıca $F_I \in S^*$

olsun. Bu durumda, $\{X_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(t)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$U(t) - \frac{t}{\mu_1} - \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} = -\frac{1}{\mu_1}\int_t^\infty \bar{F}_I(s)ds + O\left(\bar{F}_I(t)\right),\ \ t \to \infty. \quad (30)$$

Burada $\mu_k = E\left(X_1^k\right)$ dır.

Not 1.6.2.1 [9] $\mu_2 < \infty$ şartını sağlayan $F_I \in \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ sınıfından bütün singüler olmayan dağılımlar için (30) açılımı geçerlidir. Daha önce [56] çalışmasında Klüppelberg tarafından ilk defa tanımlanan $\mathcal{S}^*$ sınıfı ile ilgili bazı temel bilgilerden bahsedilmişti. $\mathcal{S}^*$ sınıfı sonlu momente sahip hemen hemen bütün alt üstel dağılımları kapsayan geniş bir sınıftır. Burada belirtmek gerekir ki, $F \notin \mathcal{S}$ iken $F_I \in \mathcal{S}$ olan örnek dağılımlar olduğu gibi, $F \in \mathcal{S}$ olduğu halde $F_I \notin \mathcal{S}$ olan istisna dağılımlar da literatürde mevcuttur. Fakat alt üstel dağılımlar sınıfı içinde en iyi bilinen ve en çok kullanılan sonlu varyanslı dağılımlar hem $F \in \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ hem de $F_I \in \mathcal{S}^*$ şartlarını sağlar. Bu dağılımlara örnek olarak $\bar{F}(x) = \exp(-x^\alpha),\ \alpha < 1$ kuyruk dağılımına sahip Lognormal dağılım, Weibull dağılımı ve genelleştirilmiş Pareto dağılımı verilebilir. Dolayısı ile bu dağılımlar için aynı zamanda $F_I \in \mathcal{S}$ dir. $\mathcal{S}^*$ sınıfının $\mathcal{S}$ sınıfına göre daha kullanışlı yapan pek çok özelliği vardır çünkü $\mathcal{S}^*$ sınıfının özellikle başka önemli altsınıflarla yakından ilgili olduğu bilinmektedir [9].

1.7. (s,S) Tipli Envanter (Stok Kontrol) Modeller

Firmaların gelecekte kullanmak üzere ellerinde bulundurduğu her türlü varlığa stok denilmektedir. Stoğu elde tutmaya yönelik harcamalar (kira, elektrik, ısıtma, soğutma, sigorta, vergi) firmalar açısından büyük bir maliyet oluşturabilir.

Diğer taraftan, stok bulundurmama (stoksuzluk) durumunda ise firmalar gelen talebi zamanında karşılayamaz. Müşteri malı bekler ya da malı başka yerden alır. Bu durum firma için para ve fırsat kaybı demektir. Ayrıca üretim zamanı ve taleplerdeki dalgalanmalardan etkilenmemek, gelen talepleri zamanında karşılayabilmek ve üretimin çeşitli aşamalarında karşılaşılabilecek beklenmedik durumları yönetebilmek gibi farklı birçok nedenden ötürü firmalar stok bulundurmak zorundadırlar. Stok kontrolünün amacı firmaların hem stok maliyetlerinin minimum düzeyde tutmalarını hem de müşteriyi bekletmeden talebi karşılayacak kadar stok bulundurmalarını sağlayacak optimum bir sistem kurup işletmektir. Bu amaç doğrultusunda firmaların karşı karşıya bulunduğu farklı ihtiyaçlara cevap verebilecek farklı stok kontrol modelleri geliştirilmiştir. Literatürde en çok kullanılan envanter modellerden biri de bu çalışmanın ana konusu olan (s,S) tipli envanter modellerdir.

Bu çalışmada incelenen problem daha iyi anlaşılabilmesi için (s,S) tipli envanter modellerin genel çalışma prensibi bir örnek ile şu şekilde açıklanabilir: İnternet üzerinden satış yapan sitelere kitap sağlayan büyük bir basımevi ani gelebilecek yüksek talep miktarlarını da göz önünde bulundurarak kendine en uygun stoklama politikasını oluşturmak istemektedir. Bu basımevinin (s,S) tipli envanter model ile çalıştığını varsayalım. Buna göre sistemi oluşturan elemanlar aşağıdaki gibidir:

$\mathrm{X(t)}$: t anında bir depodaki stok seviyesi,

η_n: Talep miktarlarını temsil eden rasgele değişkenler,

ξ_n: Talepler arasında geçen süreyi, temsil eden rasgele değişkenler,

τ_1: Stok seviyesinin s seviyesinin altına düştüğü ilk an,

ζ_n: Kesikli müdahaleyi ifade eden rasgele değişken,

N_1: Stok seviyesinin s seviyesinin altına düştüğü ana kadar gerekli talep sayısı,

s: Stok kontrol seviyesi,

S: Maksimum stok seviyesi,

Depoda başlangıç t=0 anındaki stok seviyesi $X(0) \equiv X_0 \equiv z \in [s, S)$ olsun. Depodaki stok seviyesinin önceden belirlenmiş bir s seviyesinin altına düştüğü ana kadar her bir rasgele (T_n) anında sisteme rasgele (η_n) miktarında talepler gelmektedir. Bu durumda

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

biçiminde olacaktır. Depodaki stok seviyesi değişimi aşağıdaki gibi olur:

$$X(T_1) \equiv X_1 = z - \eta_1$$

$$X(T_2) \equiv X_2 = z - (\eta_1 + \eta_2)$$

$$\vdots$$

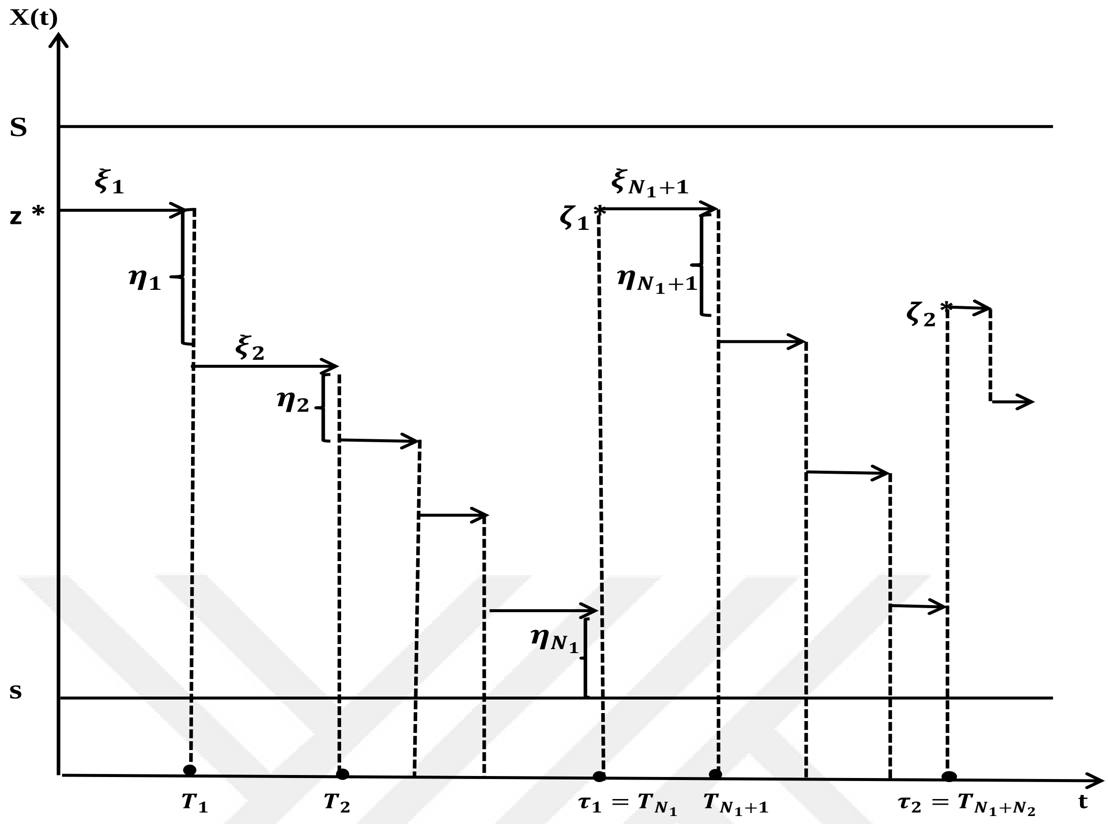
$$X(T_n) \equiv X_n = z - \sum_{i}^{n} \eta_i.$$

Görüldüğü gibi depodaki stok miktarının değişimi $\{\eta_i\}$, $i \geq 1$ doğrultusundadır ve bu değişim depodaki stok miktarı ‘‘s’’ stok kontrol seviyesinin altına ilk düştüğü ana (τ_1)

kadar devam eder. Depodaki stok seviyesi önceden belirlenmiş bir s seviyesinin altına düştüğü anda ζ_1 seviyesine kadar stokla doldurulur. Böylece ilk periyot tamamlanmış olur. İkinci periyot başlangıç seviyesi olarak ζ_1 seviyesinden başlar ve ilk periyoda benzer şekilde devam eder. Bu çalışmada ele alınan (s, S) tipli envanter model belirli koşulları sağlamaktadır. Buna göre sistemde iki ardışık talep miktarı arasında geçen süreleri ifade eden $\{\xi_i\}$, $i \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsız aynı dağılıma sahip, talep miktarlarını ifade eden $\{\eta_i\}$, $i \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsız aynı dağılımlı ve müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_i\}$, $i \geq 1$ rasgele değişkenleri de bağımsız aynı dağılımlıdır. Bunlara ek olarak ξ_i, η_i ve ζ_i rasgele değişkenleri de birbirinden bağımsızdır. Bu model standarttır ve ihtiyaca göre değiştirilebilir. Örneğin stok miktarı s seviyesinin altına indiğinde s ile S arasında bir miktarla doldurmak yerine maksimum miktar olan S seviyesine kadar doldurulabilir veya stok miktarı s seviyesinin altına indiği anda sistem durdurulup belli bir süre bekledikten sonra stokla doldurulabilir. Bu sistemlerin her biri farklı tipte bir (s, S) tipli envanter modele karşılık gelmektedir.

Bugüne kadar ζ_i rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları farklı durumlar için değiştirilerek özel bariyerli (s, S) tipli envanter modeller elde edilmiştir. Bu çalışmada müdehaleyi ifade eden ζ_i rasgele değişkenlerinin düzgün dağılıma sahip oldukları varsayılacaktır.

Bu çalışmayı literatürdeki çalışmalardan ayıran en önemli faktör (s, S) tipli envanter modelde talep miktarlarını ifade eden η_i rasgele değişkenlerinin farklı sınıflardan ağır kuyruklu dağılımlara sahip olduğu varsayımıdır. Bu nedenle çalışmada ele alınan model, ağır kuyruklu talep miktarına sahip (s, S) tipli envanter model olarak isimlendirilmiştir. Çalışmada ele alınan tipte bir sürecin realizasyonu Şekil 7. deki gibi gösterilebilir:



Şekil 7. X(t) ödüllü yenileme sürecinin realizasyonu

1.7.1. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n\}$, $n \geq 1$ aynı $(\Omega, \mathfrak{J}, P)$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri pozitif değerler alırken ζ_n rasgele değişkenleri $[s, S)$ aralığında değerler alır. ξ_n, η_n ve ζ_n rasgele değişkenleri kendi aralarında da bağımsız rasgele değişkenlerdir ve dağılım fonksiyonları sırası ile aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\Phi(t) = P\{\xi_1 \leq t\}; \ F(x) = P\{\eta_1 \leq x\}; \ \pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}; \ \pi(0) = 0.$$

ξ_n, η_n ve ζ_n başlangıç rasgele değişkenleri aracılığı ile T_n ve S_n yenileme dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \ S_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i, \quad n \geq 1, \ \ T_0 = S_0 = 0.$$

$\{N_n\}$ tam değerli rasgele değişken dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_0 = 0; \ N_1 = N(z - s) = inf\{k \geq 1 : z - \ S_k \leq s\},$$

Bu durumda

$$N_{n+1} \equiv N_{n+1}(\zeta_n) = inf\{k \geq \ N_n + 1 : \ \zeta_n - (S_k - S_{N_n}) < s\}, \ n \geq 1$$

elde edilir. Burada $\inf(\emptyset) = +\infty$ olduğu öngörülmüştür. N_1, $\{S_n\}$ tarafından "s" seviyesini ilk geçiş zamanı olan τ_1 anına kadar gerekli talep sayısıdır. Ayrıca

$$\tau_0 = 0, \ \tau_1(z) = T_{N_1} = \sum_{i=1}^{N_1} \xi_i \ ; \ \tau_n = T_{N_n} = \sum_{i=1}^{N_n} \xi_i \ ; \ n \geq 2$$

olmak üzere $\nu(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}, \ t > 0$ tanımlansın. Bu durumda, depodaki stok miktarının değişimini gösteren $X(t)$ süreci

$$X(t) = \zeta_n - (S_{\nu(t)} - S_{N_n}), \ \ \tau_n \leq t \leq \tau_{n+1}; \quad n = 0,1,2,... \tag{31}$$

biçiminde elde edilir. Burada $\zeta_0 = z \in [s, S)$ ve $S_{\nu(\tau_n)} = S_{N_n}$ dir. Daha önce de belirtildiği gibi bu tez çalışmasında talep miktarını ifade eden $\{\eta_n\}, \ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin farklı altsınıflardan ağır kuyruklu dağılımlara sahip olduğu varsayılacaktır. Ayrıca, kesikli müdehaleyi ifade eden ve ergodik Markov zincirini oluşturan $\{\zeta_n\}, \ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s, S)$ aralığında düzgün dağılımlı olduğu varsayılmıştır.

Süreç uzun süre çalıştığında yani $t \to \infty$ iken sürecin karakteristiklerini (dağılımını ve dağılımının momentlerini) bulabilmek için sürecin ergodik olup olmadığının bilinmesi gerekmektedir. Sürecin ergodikliği ve ergodik dağılımının kesin şekli belirli koşullar altında Khaniyev v.d. tarafından [52] çalışmasında aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 1.7.1.1 [52] $\{\xi_n\}$, $\{\eta_n\}$ ve $\{\zeta_n\}$, $n = 1,2, ...$ başlangıç rasgele değişkenleri aşağıdaki koşulları sağlasın:

(i) $0 < E(\xi_1) < \infty$,

(ii) $E(\eta_1) > 0$,

(iii) $\{\eta_i\}, \ i \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenlerdir,

(iv) Markov zincirini oluşturan $\{\zeta_n\}, \ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu $\pi(z)$, $[s, S)$ aralığında düzgün dağılıma sahiptir.

Yukarda belirtilen koşullar altında $X(t)$ süreci ergodiktir.

İspat: Bu çalışmada ele alınan ve (31) ile matematiksel ifadesi verilen süreç literatürde kesikli müdahaleli yarı Markov süreçler olarak bilinen bir sınıfa dahildir. Bu sınıf için genel ergodik teorem Smith'in anahtar yenileme teoremi ile verilmiştir [78].

$X(t)$ sürecinin ergodik olduğunu ispatlamak için Smith'in anahtar yenileme teoremi gereğince Teorem 1.7.1.1'in şartları altında aşağıdaki koşulların sağlanması gerekmektedir.

1. $\{\tau_n\},\ n = 1,2,3,\ldots$ monoton artan bir dizi olmak üzere, $X(\tau_n)$'in ergodik bir Markov zinciri oluşturduğunun başka bir ifade ile, $X(t)$ sürecinin içinde gömülü bir ergodik Markov zincirinin mevcut olduğunun gösterilmesi gerekmektedir.

2. Ardışık durma zamanları olan $\{\tau_n\},\ n \geq 1$ ler arası geçen zamanın beklenen değeri sonlu olmalıdır. Yani her $n \geq 2$ için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olmalıdır.

Şimdi bu iki şartın sağlandığı gösterilsin:

1. Koşulun İspatı: Birinci koşuldaki Markov zincirini belirlemek için monoton artan rasgele değişkenler dizisi tanımlamak gerekir. $\{\tau_n\},\ n = 1,2,3,\ldots$ dizisi ele alınsın. Bu dizinin tanımından dolayı $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \tau_{n+1} < \cdots$ dır. Ayrıca her bir τ_n, $X(t)$ sürecinin ardışık olarak s seviyesinin altına geçme anları arasında geçen zamandır. $X(t)$ sürecinin matematiksel kuruluşuna göre her bir τ_n anında $X(t)$ sürecinin aldığı değer $X(\tau_n + 0) = \zeta_n$ dir. $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılımlıdırlar, ayrıca bu rasgele değişkenler $[s, S)$ aralığında sürekli olduklarından $\{X(\tau_n)\},\ n \geq 1$ dizisi gömülü bir Markov zinciri oluşturur. Ayrıca $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisi bağımsız ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerden oluştuğundan, $\{X(\tau_n)\},\ n \geq 1$ Markov zinciri $\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\}$ dağılımına sahip ergodik bir Markov zinciridir. Böylece birinci koşul ispatlanmış olur.

2. Koşulun İspatı: İkinci koşulu ispatlamak için $E(\tau_n - \tau_{n-1}) < \infty$ olduğunu göstermek gerekir. $\tau_n - \tau_{n-1},\ n = 2,3,\ldots$ rasgele değişkenleri bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğundan

$$E(\tau_1) < \infty,\ \ E\big(\tau_1(\zeta)\big) \equiv \int_s^S E\big(\tau_1(z)\big)\, d\pi(z) < \infty$$

olduğunu göstermek yeterlidir. $X(t)$ sürecinin matematiksel kurulumu gereği, $\{\xi_n\},\ n \geq 1$ bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin bir dizisidir. Wald Özdeşliği kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$E\big(\tau_1(z)\big) = E\left(\sum_{i=1}^{N(z)} \xi_i\right) = E(\xi_1)\, E\big(N(z)\big).$$

Teorem 1.7.1.1'in (i) şartından $E(\xi_1) < \infty$ olduğu bilinmektedir. Diğer taraftan

$$E\big(N(z)\big) = U(z - s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}\,(z - s)$$

dır.

Burada $U(x)$, $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur ve sonlu her x için $U(x)$ yenileme fonksiyonu sonludur. Böylece $E(\xi_1) < \infty$ ve $E\big(N(z)\big) = U(z-s) < \infty$ olduğundan, $E\big(\tau_1(z)\big) < \infty$ olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi

$$E\big(\tau_1(\zeta)\big) \equiv \int_s^S E\big(\tau_1(z)\big)\, d\pi(z) < \infty$$

olduğu gösterilmelidir.

$U(x)$, $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur ve bilindiği gibi her sonlu x için artmayan ve sonlu bir fonksiyondur. Dolayısı ile her $z \in [s,S)$ için, $U(z-s) < U(S-s)$ dir. Buradan:

$$\begin{aligned} E\big(\tau_1(\zeta)\big) &\equiv \int_s^S E\big(\tau_1(z)\big) d\pi(z) = \int_s^S E(\xi_1) E\big(N(z)\big)\, d\pi(z) \\ &= E(\xi_1) \int_s^S E\big(N(z)\big)\, d\pi(z) = E(\xi_1) \int_s^S U(z-s)\, d\pi(z) \\ &\leq E(\xi_1)\, U(S-s) \end{aligned}$$

elde edilir. $E(\xi_1) < \infty$ ve $U(S-s) < \infty$ olduğundan istenen sonuca ulaşılır.

Sonuç 1.7.1.1 [52] Ölçülebilir sonlu $f(x)$, $(f: (s,S) \to \mathbb{R})$ fonksiyonu için aşağıdaki ilişki 1 olasılığı ile doğrudur:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f\big(X(u)\big)\, du = \frac{\int_s^S \int_s^S f(x)\, [U(z-s) - U(z-x)] d\pi(z) dx}{\int_s^S U(z-s)\, d\pi(z)}.$$

Burada

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x)$$

$\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur, ayrıca $F^{*n}(x)$, $F(x)$ dağılım fonksiyonunun n. konvülüsyon çarpımıdır.

Teorem 1.7.1.2 [52] $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu $Q_X(x)$ ile gösterilsin. Yani $Q_X(t) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\}$, $x \in [s,S)$ olsun. Teorem 1.7.1.1'in şartları altında $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının kesin şekli aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq x\} = 1 - \frac{\int_x^S U(z-x)\ d\pi(z)}{\int_s^S U(z-s)\ d\pi(z)},\ \ x \in [s, S) \tag{32}$$

(32) ifadesinde de görüldüğü üzere, bu modellerin karakteristiklerini elde edebilmek için talep miktarını ifade eden $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkeni tarafından üretilen yenileme fonksiyonunu bulabilmek gerekir. Talep miktarını belirten $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(x)$'in kesin formunu $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri uygun basit bir dağılıma sahip olduğunda (örneğin üstel dağılım Erlang dağılımı gibi) bulmak mümkündür. Fakat pek çok dağılım için $U(x)$ fonksiyonunun kesin ve kapalı formüllerini elde etmek mümkün değildir. Ayrıca kapalı ve kesin formüllerin bulunabildiği istisnai durumlarda bile elde edilen formüllerin yapısının çok karmaşık olduğu bilinmektedir. Bu nedenle yenileme fonksiyonu $U(x)$ için asimptotik açılımlar kullanılarak sürecin durağan karakteristikleri için asimptotik açılımlar elde etmek daha uygun olmaktadır. Ayrıca elde edilen asimptotik açılımların hem uygulamada kullanılabilirliği yüksektir hem de kesin formüllere yakın sonuçlar elde edilebilmektedir.

Literatürde mevcut olan çalışmaların büyük çoğunluğu, talep miktarlarının hafif kuyruklu olması veya sonlu varyanslı olması varsayımına dayanmaktadır. Bu çalışmanın literatürdeki çalışmalardan temel farkı (s, S) tipli envanter modellerin ağır kuyruklu talep miktarları ile incelenmiş olmasıdır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Talep Miktarları Ağır Kuyruklu Weibull Dağılımına Sahip Olduğunda Sürecin Asimptotik Olarak İncelenmesi

2.1.1. Sürecin Ergodik Dağılımı İçin Asimptotik Açılımlar

Bu bölümde Kısım 1.7' de çalışma prensibi ve matematiksel kurulumu verilen (s,S) tipli envanter modelin ergodik dağılımı için asimptotik sonuçlara ulaşılacaktır. Teorem 1.7.1.1 ile verilen şartlara ek olarak talep miktarını ifade eden $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\bar{F}(x) = \exp(-x^{\alpha}),\ 0 < \alpha < 1$ kuyruk dağılımlı alt üstel Weibull dağılımına ve müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s,S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır.

Öncelikle $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olan $Y(t)$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

$$Y(t) = \frac{X(t) - s}{\beta},\ \ \beta \equiv \frac{S - s}{2}.$$

Dolayısı ile $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_Y(v)$

$$Q_Y(v) = \lim_{t\to\infty} P\{Y(t) \leq v\},\ \ v \in [0,2)$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda

$$Q_Y(v) = \lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{X(t) - s}{\beta} \leq v\right\} = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq s + \beta v\}$$

ve

$$Q_Y(v) = Q_X(s + \beta v) = 1 - \frac{\int_{s+\beta v}^{s+2\beta} U(z - s - \beta v)\, d\pi(z)}{\int_{s}^{s+2\beta} U(z - s)\, d\pi(z)};\ \ v \in [0,2) \tag{33}$$

olacaktır. Burada ζ_n rasgele değişkenlerinin $[s,S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılmıştı. Dolayısı ile, $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkenleri $[0,2\beta)$ aralığıda düzgün dağılımlı olacaktır. $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonuna $\tilde{p}(x)$ denir ve (33) ifadesi buna göre düzenlenirse $Q_Y(v)$ ergodik dağılım fonksiyonu için (34) kesin formülüne ulaşılır:

$$Q_Y(v) = 1 - \frac{\int_{\beta v}^{2\beta} U(x - \beta v)\ \tilde{p}(x) dx}{\int_0^{2\beta} U(x)\, \tilde{p}(x) dx};\ v \in [0,2). \tag{34}$$

Burada $U(x)$ alt üstel Weibull dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur.

Daha önce de belirtildiği gibi $\bar{F}(x) = \exp(-x^{\alpha}),\ 0 < \alpha < 1$ dağılım fonksiyonlu Weibull dağılımı hem $F \in \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ hem de $F_I \in \mathcal{S}^*$ sınıfındandır. Dolayısı ile $U(x)$ yenileme fonksiyonu Geluk ve Frenk [39] tarafından elde edilen (30) asimptotik açılımını sağlar. Çalışmanın bu kısmında $Q_Y(v)$ için asimptotik açılıma, Geluk ve Frenk [39] çalışmasında önerilen asimptotik açılım kullanılarak ulaşılacaktır. Yardımcı Teorem 2.1.1.1 ile Weibull dağılımının integrallenmiş kuyruk fonksiyonu için asimptotik açılıma ulaşılmıştır.

Yardımcı Teorem 2.1.1.1 Teorem 1.7.1.1'deki şartlara ek olarak $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenleri $F(x) = P\{\eta_1 \leq x\} = 1 - \exp\{-x^{\alpha}\},\ 0 < \alpha < 1$ dağılım fonksiyonuna sahip Weibull dağılımına sahip olsunlar. Bu durumda $x \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\frac{1}{\mu_1} \int_x^{\infty} \bar{F}_I(s) ds = \frac{1}{\mu_1^2\, \alpha^2}\ O(x^{2-2\alpha} \exp(-x^{\alpha})\,). \tag{35}$$

İspat: İntegrallenmiş kuyruk fonksiyonu olarak adlandırılan $\bar{F}_I(s)$ aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\bar{F}_I(s) = 1 - \left(\frac{1}{\mu_1} \int_0^s \bar{F}(y)\ dy \right) = \frac{1}{\mu_1} \int_s^{\infty} \bar{F}(y)\ dy.$$

Bu durumda:

$$\bar{F}_I(s) = \frac{1}{\mu_1} \int_s^{\infty} \bar{F}(y)\ dy = \frac{1}{\mu_1} \int_s^{\infty} \exp(-y^{\alpha})\ dy$$

$$= \frac{1}{\mu_1 \alpha} \int_{s^{\alpha}}^{\infty} \exp(-u)\, u^{\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}\ du = \frac{1}{\mu_1 \alpha}\ \Gamma\left(s^{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right)$$

olacaktır. Burada

$$\frac{1}{\mu_1}\int_x^\infty \overline{F}_I(s)ds = \frac{1}{\mu_1^2\alpha}\int_x^\infty \Gamma\left(s^\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)$$

elde edilir.

$\Gamma(z,\alpha)$ tam olmayan Gamma fonksiyonudur ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\Gamma(z,\alpha) = \int_z^\infty x^{\alpha-1}\exp(-x)\ dx.$$

Tam olmayan Gamma fonksiyonu z'nin büyük değerleri için aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar [1].

$$\Gamma(z,\alpha) = z^{\alpha-1}\exp(-z)\left(1+\frac{\alpha-1}{z}+\frac{(\alpha-1)(\alpha-2)}{z^2}+\cdots\right)$$
$$= z^{\alpha-1}\exp(-z)\left(1+O\left(\frac{1}{z}\right)\right)$$

Ayrıca, $\alpha > 1, B > 1$ ve $x > \frac{B}{B-1}(\alpha-1)$ olacak şekildeki her reel α, B, x için

$$x^{\alpha-1}\exp(-x) < |\Gamma(x,\alpha)| < B\, x^{\alpha-1}\exp(-x) \qquad (36)$$

dir [19].

Bu durumda; $\frac{1}{\alpha} > 1$ olduğundan, $B_1 > 1$ ve $s^\alpha > \frac{B_1}{B_1-1}\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)$ olacak şekildeki her reel α, B_1 ve s için $\left|\Gamma\left(s^\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)\right| < \mathrm{B}_1\, \mathrm{s}^{(1-\alpha)}\exp(-s^\alpha)$ dir. Buradan

$$\Gamma\left(s^\alpha,\frac{1}{\alpha}\right) = O\left(\mathrm{s}^{(1-\alpha)}\exp(-s^\alpha)\right)$$

ilişkisi elde edilir. Dolayısı ile:

$$\left|\frac{1}{\mu_1^2\alpha}\int_x^\infty \Gamma\left(s^\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)ds\right| \le \frac{1}{\mu_1^2\alpha}\int_x^\infty \left|\Gamma\left(s^\alpha,\frac{1}{\alpha}\right)\right| ds < \frac{B_1}{\mu_1^2\alpha}\int_x^\infty \mathrm{s}^{(1-\alpha)}\exp(-s^\alpha)\ ds$$
$$= \frac{B_1}{\mu_1^2\alpha^2}\int_{x^\alpha}^\infty k^{\left(\frac{2}{\alpha}-2\right)}\exp(-k)\,dk = \frac{B_1}{\mu_1^2\alpha^2}\Gamma\left(x^\alpha,\frac{2}{\alpha}-1\right)$$

dir.

(36) eşitsizliği kullanılarak x' in büyük değerleri için:

$$\Gamma\left(x^\alpha,\frac{2}{\alpha}-1\right) = O(x^{2-2\alpha}\exp(-x^\alpha))$$

olduğu kolayca görülür. Bu durumda

$$\frac{1}{\mu_1}\int_x^{\infty}\overline{F}_I(s)ds=\frac{1}{\mu_1^2\,\alpha^2}\,O(\,x^{2-2\alpha}\exp(-x^{\alpha}))$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 2.1.1.1 Teorem 1.7.1.1'deki şartlara ek olarak $\{\eta_n\}$, $n\geq 1$ rasgele değişkenleri $F(x)=P\{\eta_1\leq x\}=1-\exp(-x^{\alpha})$, $0<\alpha<1$ dağılım fonksiyonuna sahip Weibull dağılımına sahip olsunlar. Bu durumda $x\to\infty$ için $\{\eta_n\}$, $n\geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(x)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$U(x)=\frac{x}{\mu_1}+\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}+O(x^{2-2\alpha}\exp(-x^{\alpha})). \tag{37}$$

Burada $\mu_k=E(\eta^k)$ ve $0<\alpha<1$ dir.

İspat: Yardımcı Teorem 2.1.1.1 kullanılarak $x\to\infty$ durumunda

$$U(x)=\frac{x}{\mu_1}+\frac{\mu_2}{2\mu_1^2}+O(x^{2-2\alpha}\exp(-x^{\alpha}))+O\big(\overline{F}_I(x)\big)$$

açılımı elde edilir.

Ayrıca $O\big(\overline{F}_I(x)\big)=O(x^{1-\alpha}\exp(-x^{\alpha}))$ olduğu biliniyor. (37) sonucuna sondaki iki asimptotik terimin karşılaştırılması ile ulaşılır.

Yardımcı Teorem 2.1.1.2 Her sonlu ölçülebilir $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $\beta\to\infty$ durumunda aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}\exp(-t^{\alpha})\;t^{2-2\alpha}h(t)dt=O(1).$$

İspat $h(x)$ sonlu bir fonksiyon olarak verildiği için $\sup_{x\geq 0}|h(x)|\equiv K$ olacak şekilde $K>0$ mevcuttur. Bu durumda $0<\alpha<1$ ve $\upsilon\in[0,2)$ için

$$\begin{aligned}\left|\int_0^{2\beta-\beta\upsilon}e^{-t^{\alpha}}t^{2(1-\alpha)}h(t)dt\right| &= \left|\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}}\,t^{2(1-\alpha)}h(t)dt-\int_{2\beta-\beta\upsilon}^{\infty}e^{-t^{\alpha}}\,t^{2(1-\alpha)}h(t)dt\right|\\ &\leq\left|\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}}\,t^{2(1-\alpha)}h(t)dt\right|+\left|\int_{2\beta-\beta\upsilon}^{\infty}e^{-t^{\alpha}}\,t^{2-2\alpha}h(t)dt\right|\\ &\leq\int_0^{\infty}e^{-t^{\alpha}}\,t^{2(1-\alpha)}\,|h(t)|\,dt+\int_{2\beta-\beta\upsilon}^{\infty}e^{-t^{\alpha}}\,t^{2(1-\alpha)}\,|h(t)|\,dt\end{aligned}$$

$$\leq K \int_{0}^{\infty} e^{-t^{\alpha}}\, t^{2(1-\alpha)}\, dt + \int_{2\beta-\beta\upsilon}^{\infty} e^{-t^{\alpha}}\, t^{2(1-\alpha)}\, dt$$

$$= \frac{K}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}-2\right) + \Gamma\left((2\beta-\beta\upsilon)^{\alpha}, \frac{3}{\alpha}-2\right)\right] \qquad (38)$$

olur.

Diğer taraftan (36) eşitsizliği kullanılarak $0 < \alpha < 1$ ve $\upsilon \in [0,2)$ için

$$\Gamma\left((2\beta-\beta\upsilon)^{\alpha}, \frac{3}{\alpha}-2\right) = O\left((2\beta-\beta\upsilon)^{3-3\alpha}\, e^{-(2\beta-\beta\upsilon)^{\alpha}}\right)$$

dır. Ayrıca $\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}-2\right)$ sonlu ve pozitif değerli bir sabit olduğu için $\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}-2\right) = O(1)$ olduğu açıktır.

İki asimptotik terimin karşılaştırılması ile

$$\int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} \exp(-t^{\alpha})\, t^{2(1-\alpha)} h(t) dt = O(1)$$

sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Teorem 2.1.1.3 $J(\upsilon)$ fonksiyonu;

$$J(\upsilon) \equiv \frac{1}{2\beta}\int_{\beta\upsilon}^{2\beta} U(x-\beta\upsilon)\, dx$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sonlu ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $\upsilon \in [0,2)$ için $\beta \to \infty$ durumunda aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur.

$$J(\upsilon) = \frac{1}{\mu_1}\frac{(2-\upsilon)^2}{4}\beta + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\frac{(2-\upsilon)}{2} + O\left(\frac{1}{\beta}\right). \qquad (39)$$

İspat $J(\upsilon)$'ın tanımı kullanılarak:

$$J(\upsilon) \equiv \frac{1}{2\beta}\int_{\beta\upsilon}^{2\beta} U(x-\beta\upsilon)\, dx = \frac{1}{2\beta}\int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} U(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\beta}\int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} \left\{\frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + \exp(-t^{\alpha})\, t^{2-2\alpha} h(t)\right\} dt$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{(2\beta-\beta\upsilon)^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}(2\beta-\beta\upsilon) + O(1)\right\}$$

$$= \frac{1}{\mu_1}\frac{(2-\upsilon)^2}{4}\beta + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\frac{(2-\upsilon)}{2} + O\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 2.1.1.2 Yardımcı Teorem 2.1.1.3 kullanılarak $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ durumunda aşağıdaki asimptotik sonuca ulaşılır:

$$J(0) \equiv \frac{1}{2\beta}\int_0^{2\beta} U(x)dx = \frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + O\left(\frac{1}{\beta}\right). \tag{40}$$

Teorem 2.1.1.1 Teorem 1.7.1.1'in şartlarına ek olarak Yardımcı Teorem 2.1.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $\upsilon \in [0,2)$ için, $\beta \equiv \frac{(S-s)}{2} \to \infty$ durumunda $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_Y(\upsilon)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$Q_Y(\upsilon) = F(\upsilon) + \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}G(\upsilon)\right)\frac{1}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right). \tag{41}$$

Burada

$$F(\upsilon) = \frac{4\upsilon - \upsilon^2}{4}, \quad G(\upsilon) = \frac{\upsilon^2 - 2\upsilon - 2}{4}, \quad \upsilon \in [0,2), \quad E(\eta_i^n) = \mu_n$$

dir.

İspat: $Q_Y(\upsilon)$ için kesin formüllere (34) eşitliği ile ulaşılmıştır. Ayrıca Yardımcı Teorem 2.1.1.3 ve Sonuç 2.1.1.2 de sırası ile $J(\upsilon)$ ve $J(0)$ tanımlanmıştır. Buradan

$$Q_Y(\upsilon) = 1 - \frac{\int_{\beta\upsilon}^{2\beta} U(x-\beta\upsilon)\ \tilde{p}(x)dx}{\int_0^{2\beta} U(x)\,\tilde{p}(x)dx} = 1 - \frac{J(\upsilon)}{J(0)}$$

elde edilmiş olur. Yardımcı Teorem 2.1.1.3 ve Sonuç 2.1.1.2 kullanılarak:

$$Q_Y(\upsilon) = 1 - \frac{J(\upsilon)}{J(0)}$$

$$= \left[\left(\frac{4\upsilon - \upsilon^2}{4\,\mu_1}\right)\beta + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\left(\frac{\upsilon - 1}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right] \cdot \left[\frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[\frac{(4\upsilon - \upsilon^2)}{4} + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\frac{(\upsilon - 1)}{2}\frac{1}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\right] \cdot \left[1 - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)\frac{1}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)\right]$$

$$= \frac{(4\upsilon - \upsilon^2)}{4} + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\left[\left(\frac{\upsilon - 1}{2}\right) - \left(\frac{4\upsilon - \upsilon^2}{4}\right)\right]\frac{1}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right)$$

$$= F(\upsilon) + \frac{\mu_2}{2\mu_1}G(\upsilon)\frac{1}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta^2}\right).$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 2.1.1.2 Teorem 2.1.1.11'in şartları sağlansın. Bu durumda $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_Y(\upsilon)$, $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ için

$$F(\upsilon) = \frac{(4\upsilon - \upsilon^2)}{4}$$

ifadesine zayıf anlamda yakınsaktır. Yani

$$Q_Y(\upsilon) \to F(\upsilon)$$

dir.

İspat $\upsilon \in [0,2)$ olduğundan

$$|G(\upsilon)| = \left|\frac{\upsilon^2 - 2\upsilon - 2}{4}\right| \leq 1 < \infty$$

ve

$$\left|\frac{\mu_2}{2\mu_1} G(\upsilon)\right| \leq \frac{\mu_2}{2\mu_1} < \infty$$

elde edilir.

Diğer taraftan talep miktarını ifade eden $\{\eta_i\}$, $i \geq 1$ rasgele değişkenleri $0 < \alpha < 1$ parametresi ile Weibull dağılımına sahiptir. Bu durumda $E(\eta_i^2) < \infty$, ayrıca Teorem 1.7.1.1.1'in şartları gereği $E(\eta_i) > 0$ dır. Bu durumda $\beta \to \infty$ için

$$\frac{\mu_2}{2\mu_1} G(\upsilon) \to 0 \text{ ve } \frac{1}{\beta^2} \to 0$$

dır. Dolayısı ile $\beta \to \infty$ için $Q_Y(\upsilon) \to F(\upsilon)$ sonucuna ulaşılır.

2.1.2. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda notasyon kolaylığı açısından $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden momentleri $E(X^n)$ ile gösterilecektir. Bu durumda $E(X^n) = \lim_{t\to\infty} E\big(X^n(t)\big)$, $n \geq 1$ dir. Ek olarak $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olarak $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ tanımlansın. Bu durumda

$$E(\tilde{X}^n) = \lim_{t\to\infty} E\left(\tilde{X}^n(t)\right); \ \tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s, \ n = 1,2,3, ...$$

elde edilir. Sürecin ergodik dağılımının n. momentlerinin kesin formülleri [54] çalışmasında aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 2.1.2.1 [54] Teorem 1.7.1.1'in şartları sağlansın. $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden momentleri mevcut ve sonlu ise $E\left(\tilde{X}^n\right),\ n = 1,2,3,\dots$ 'in kesin şekline (42) eşitliği ile ulaşılır:

$$E\left(\tilde{X}^n\right) = \frac{n}{E\left(U(\tilde{\zeta})\right)} \int_0^{2\beta} v^{n-1}\, E\left(U(\tilde{\zeta}_1 - v)\right) dv. \tag{42}$$

Burada $\tilde{\zeta} = \zeta - s,\ \ \beta \equiv (S - s)/2$ ve $U(x)$, $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur.

İspat: $v \in [0,2)$ olsun. Bu durumda

$$Q_{\tilde{X}}(v) \equiv \lim_{t\to\infty} P\{\tilde{X}(t) \leq v\} = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) - s \leq v\} = \lim_{t\to\infty} P\{X(t) \leq v + s\}$$

$$= Q_X(s + v) = 1 - \frac{E[U(\zeta_1 - s - v)]}{E[U(\zeta_1 - s)]} = 1 - \frac{E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1 - v\right)\right]}{E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right]},$$

dır. Ayrıca

$$E\left(\tilde{X}^n\right) = \int_0^{2\beta} v^n dQ_{\tilde{X}}(v) = n \int_0^{2\beta} v^{n-1}[1 - Q_{\tilde{X}}(v)]\, dv$$

$$= n \int_0^{2\beta} v^{n-1}\, \frac{E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1 - v\right)\right]}{E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right]}\, dv$$

elde edilir.

Not 2.1.2.1 $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s, S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Bu durumda $\left\{\tilde{\zeta}_n\right\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenleri $[0,2\beta)$ aralığında düzgün dağılıma sahiptir. $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\tilde{p}(x)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1 - v\right)\right] = \int_{s+v}^{S} U(z - s - v)d\pi(z) = \int_{v}^{2\beta} U(x - v)\tilde{p}\,(x)dx,$$

$$E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right] = \int_{s}^{S} U(z - s)\, d\pi(z) = \int_{0}^{2\beta} U(x)\tilde{p}(x)dx\,,\ \ \beta \equiv \frac{S - s}{2} \to \infty$$

biçiminde elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.2.1 Yardımcı Teorem 2.1.1.3 ve Sonuç 2.1.1.2 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$E\left(U\left(\tilde{\zeta}_1 - v\right)\right) = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta - v)^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}(2\beta - v) + O(1)\right],$$

$$E\left(U\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right) = \int_0^{2\beta} U(x)\tilde{p}(x)dx = \frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + O\left(\frac{1}{\beta}\right).$$

İspat: Not 2.1.2.1'in sonuçları kullanılarak kolayca görülür ki;

$$E\left(U\left(\tilde{\zeta}_1 - v\right)\right) = \frac{1}{2\beta}\int_v^{2\beta} U(x - v)\tilde{p}(x)\,dx = \frac{1}{2\beta}\int_0^{2\beta - v} U(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{[2\beta - v]^2}{2\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}[2\beta - v] + O(1)\right\}$$

$$= \frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1 v}{2\mu_1^2} + \left(\frac{\mu_1 v^2 - \mu_2 v}{4\mu_1^2}\right)\frac{1}{\beta} + O\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

dır. Ayrıca $v = 0$ için $E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right]$ kolayca elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.1.2.2 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sonlu ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$O\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}\,h(\beta)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda her $v \in [0,2)$ için $\beta \to \infty$ iken aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\frac{1}{\beta}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\,h(\beta)dv = O(\beta^{n-1}).$$

İspat: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sonlu ölçülebilir bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. Bu özellik kullanılarak;

$$\left|\frac{1}{\beta}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\,h(\beta)dv\right| \leq \frac{1}{\beta}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\,|h(v)|dv \leq \frac{K}{\beta}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\,dv = \frac{K}{n}\,2^n\,\beta^{n-1}$$

sonucuna ulaşılır.

Yardımcı Teorem 2.1.2.3

$$J_n(\beta) = \int_0^{2\beta} v^{n-1} E\left[U\left(\tilde{\zeta}_1 - v\right)\right]dv$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\upsilon \in [0,2)$ için $\beta \to \infty$ durumunda aşağıdaki asimptotik açılım elde edilir:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}\right]\beta^{n+1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\beta^n + O(\beta^{n-1}).$$

İspat: $J_n(\beta)$' nin tanımı, Yardımcı Teorem 2.1.2.1 ve Yardımcı Teorem 2.1.2.2 kullanılarak; $\beta \to \infty$ için

$$J_n(\beta) = \int_0^{2\beta} \upsilon^{n-1}\left[\frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1\upsilon}{2\mu_1^2} + \left(\frac{\mu_1\upsilon^2 - \mu_2\upsilon}{4\mu_1^2}\right)\frac{1}{\beta}\right] d\upsilon \; + O(\beta^{n-1})$$

$$= \left(\frac{\upsilon^n\beta}{n\mu_1} + \frac{\mu_2\upsilon^n}{n2\mu_1^2} - \frac{2\mu_1\upsilon^{n+1}}{2\mu_1^2(n+1)} + \frac{\mu_1\upsilon^{n+2}}{4\mu_1^2(n+2)}\frac{1}{\beta} - \frac{\mu_2\upsilon^{n+1}}{4\mu_1^2(n+1)}\frac{1}{\beta}\right)\Bigg|_0^{2\beta}$$

$$+O(\beta^{n-1})$$

$$= \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}\right]\beta^{n+1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\left[\frac{2^n}{n(n+1)}\right]\beta^n + O(\beta^{n-1})$$

elde edilir.

Teorem 2.1.2.2 Teorem 1.7.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda, $\beta \to \infty$ için $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. dereceden momentleri mevcut ve sonlu ise $E(\tilde{X}^n),\ n \geq 1$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$E(\tilde{X}^n) = \left[\frac{2^{n+1}(2n-1)}{(n+1)(n+2)}\right]\beta^n + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\left[\frac{2^n n}{(n+1)(n+2)}\right]\beta^{n-1} + O(\beta^{n-2}) \tag{43}$$

İspat: $J_n(0) = E\left(U(\tilde{\zeta}_1)\right)$ tanımlansın. Bu durumda

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n\,J_n(\beta)}{J_n(0)} = \left\{\frac{1}{\mu_1}\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right]\beta^{n+1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}\left[\frac{2^n}{(n+1)}\right]\beta^n + O(\beta^{n-1})\right\}$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{\mu_1}\beta + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} + O\left(\frac{1}{\beta}\right)\right\}^{-1}$$

$$= \left\{\left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right]\beta^n + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\left[\frac{2^n}{(n+1)}\right]\beta^{n-1} + O(\beta^{n-2})\right\}$$

$$\cdot\left\{1 + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\beta^{-1} + O(\beta^{-2})\right\}^{-1}$$

$$= \left[\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right]\beta^n + \left\{\left[\frac{2^n\,n}{(n+1)(n+2)}\right]\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right\}\beta^{n-1} + O(\beta^{n-2})$$

elde edilir.

Not 2.1.2.2 Teorem 2.1.2.2' de elde edilen asimptotik sonuçlar kullanılarak, sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun ilk dört momenti için asimptotik açılımlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(\tilde{X}) = \frac{2}{3}\beta + \frac{\mu_2}{6\mu_1} + O(\beta^{-1}),\ \ E(\tilde{X}^2) = \frac{1}{6}\beta^2 + \frac{\mu_2}{3\mu_1}\beta + O(1),$$

$$E(\tilde{X}^3) = \frac{4}{5}\beta^3 + \frac{3\mu_2}{5\mu_1}\beta^2 + O(\beta),\ \ E(\tilde{X}^4) = \frac{16}{15}\beta^4 + \frac{\mu_2}{6\mu_1}\beta^3 + O(\beta^2).$$

2.1.3. Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda Teorem 2.1.2.2 ile $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının 1. ve 2. momentleri için elde edilmiş olan asimptotik açılımların ilk iki terimi kullanılmıştır. Bu şekilde elde edilen değerler asimptotik değerler olarak adlandırılacak ve bu değerler $\tilde{E}(X^n)$ ile gösterilecektir. Ayrıca Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilen değerler simülasyon değerleri olarak adlandırılacak ve $\hat{E}(X^n)$ ile gösterilecektir. Simülasyon değerleri MATLAB programı kullanılarak ve her bir değer için sürecin 10^7 sayıda realizasyonu üretilerek elde edilmişlerdir. Bunun dışında
Mutlak Hata: $\Delta_n = \left|\tilde{E}(X^n) - \hat{E}(X^n)\right|$, Nispi Hata: $\delta_n = (\Delta_n/\hat{E}(X^n))\ 100\%$
Doğruluk Yüzdesi: $AP_n = 100\% - \delta_n,\ n = 1, 2$ dir.

Tablo 3. Talepler Weibull dağılımına sahipken $E(X)$ için simülasyon tabloları

			$\beta = 50$		
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
0.5	35,3333	34,8871	0,4462	1,2791	98,7209
0.6	34,3591	34,2525	0,1066	0,3113	99,6887
0.7	33,9955	33,9483	0,0472	0,1390	99,8610
0.8	33,8222	33,8098	0,0124	0,0638	99,9632
0.9	33,7260	33,7236	0,0024	0,0070	99,9930
			$\beta = 45$		
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
0.5	32,0000	31,5255	0,4745	1,5051	98,4949
0.6	31,0258	30,9108	0,1150	0,3720	99,6280
0.7	30,6622	30,6120	0,0502	0,1640	99,8360
0.8	30,4889	30,4639	0,0250	0,0821	99,9179
0.9	30,3926	30,3788	0,0138	0,0454	99,9546

Tablo 3'ün devamı

$\beta = 35$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
0.5	25,3334	24,7702	0,5632	2,2736	97,7264
0.6	24,3591	24,2236	0,1355	0,5596	99,4404
0.7	23,9955	23,9454	0,0501	0,2093	99,7907
0.8	23,8222	23,8001	0,0221	0,0928	99,9072
0.9	23,7260	23,7118	0,0142	0,0598	99,9402
$\beta = 25$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
0.5	18,6667	17,9668	0,6999	3,8956	96,1044
0.6	17,6925	17,5053	0,1872	1,0691	98,9309
0.7	17,3288	17,2572	0,0716	0,4152	99,5848
0.8	17,1555	17,1178	0,0377	0,2205	99,7795
0.9	17,0592	17,0359	0,0233	0,1370	99,8630
$\beta = 15$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
0.5	12,0000	11,0717	0,9283	8,3841	91,6159
0.6	11,0259	10,7465	0,2794	2,5995	97,4005
0.7	10,6622	10,5536	0,1086	1,0290	98,9710
0.8	10,4888	10,4330	0,0558	0,5351	99,4649
0.9	10,3926	10,3593	0,0333	0,3216	99,6784

Tablo 4 Talepler Weibull dağılımına sahipken $E(X^2)$ için simülasyon tabloları

$\beta = 50$					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
0.5	18208045,89	18208000,00	45,8917	2,5204	97,4796
0.6	17584010,87	17584000,00	10,8722	0,6183	99,3817
0.7	17293003,60	17293000,00	3,5987	0,2081	99,7919
0.8	17141001,45	17141000,00	1,4453	0,0843	99,9157
0.9	17046001,32	17046000,00	1,3209	0,0775	99,9225
$\beta = 45$					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
0.5	14843045,66	14843000,00	45,6609	3,0762	96,9238
0.6	14320010,33	14320000,00	10,3259	0,7211	99,2789
0.7	14059003,67	14059000,00	3,6671	0,2608	99,7392
0.8	13924001,59	13924000,00	1,5867	0,1140	99,8860
0.9	13850000,30	13850000,00	0,2987	0,0216	99,9784

Tablo 4'ün devamı

$\beta = 35$					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
0.5	956,6667	915,1423	41,5244	4,5375	95,4625
0.6	888,4740	877,9297	10,5443	1,2010	98,7990
0.7	863,0186	858,9952	4,0234	0,4684	99,5316
0.8	850,8876	849,1853	1,7023	0,2005	99,7995
0.9	844,1495	842,7491	1,4004	0,1662	99,8338
$\beta = 25$					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
0.5	720,0000	680,7809	39,2191	5,7609	94,2391
0.6	661,5492	650,8719	10,6773	1,6405	98,3595
0.7	639,7302	635,9515	3,7787	0,5942	99,4058
0.8	629,3322	627,6895	1,6427	0,2617	99,7383
0.9	623,5567	622,6017	0,9550	0,1534	99,8466
$\beta = 15$					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_2	$\delta_2(\%)$	$AP_2(\%)$
0.5	210,0000	181,3154	28,6846	15,8203	84,1797
0.6	180,7746	172,0806	8,6940	5,0523	94,9477
0.7	169,8652	166,3547	3,5105	2,1102	97,8898
0.8	164,6661	163,0291	1,6370	1,0041	98,9959
0.9	161,7783	160,8969	0,8814	0,5478	99,4522

Simülasyon tablolarında görüleceği gibi α'nın ve S nin çok farklı değerleri için sonuçlar elde edilmiştir. α parametresinin kuyruk ağırlığını belirlediğini ve α küçüldükçe dağılımın daha ağır kuyruklu olduğu bilinmektedir. Simülasyon tablolarından α parametresi küçüldükçe simülasyon sonuçlarının doğruluk oranlarının azaldığı görülmektedir. α parametresi 1' e yaklaştıkça dağılım daha hafif kuyruklu olma eğilimi göstermektedir. Bu durumda S'nin küçük değerleri için bile asimptotik değerler ile simülasyon değerleri arasındaki uyumluluk %99'un üzerindedir. α parametresi küçüldükçe asimptotik değerler ile simülasyon değerleri arasındaki uyumluluk oranı azalsa bile elde edilen değerler ağır kuyruklu (aykırı değerler üretme eğilimde olan) bir dağılım için yeterince iyidir. Bu durum ise S'nin çok büyük olmayan değerleri için bile elde edilen asimptotik açılımların uygulamada güvenilir bir şekilde kullanılabileceğini göstermektedir.

2.2. Talep Miktarı Düzenli Değişen Sonsuz Varyanslı Pareto Dağılımına Sahip Olduğunda Sürecin Asimptotik Olarak İncelenmesi

2.2.1. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Asimptotik Açılımlar

Bu bölümde Kısım 2.1 de talep miktarı ağır kuyruklu Weibull dağılımına sahipken incelenmiş olan (s,S) tipli envanter model farklı altsınıftan bir ağır kuyruklu dağılım ile incelenecektir. Burada Teorem 1.7.1.1 ile verilen şartlara ek olarak talep miktarını ifade eden $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\bar{F}(x) = P\{\eta_1 \geq x\} = b\,x^{-\alpha},\ x \geq b,\ b > 0$ ve $1 < \alpha < 2$ kuyruk dağılımlı düzenli değişen Pareto dağılımına ayrıca müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s, S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Öncelikle yine $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olan $Y(t)$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$Y(t) = \frac{X(t) - s}{\beta},\ \ \beta \equiv \frac{S - s}{2}.$$

ζ_n rasgele değişkenlerinin $[s, S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğundan $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkenleri $[0,2\beta)$ aralığında düzgün dağılımlıdır. $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\tilde{p}(x)$ olarak gösterilmiş ve $Q_Y(v)$ ergodik dağılım fonksiyonuna ulaşmak için aşağıdaki formül kullanılmıştır:

$$Q_Y(v) = 1 - \frac{\int_{\beta v}^{2\beta} U(x - \beta v)\ \tilde{p}(x)dx}{\int_0^{2\beta} U(x)\,\tilde{p}(x)dx};\ v \in [0,2).$$

Burada $U(x),\ 1 < \alpha < 2$ kuyruk indeksi ile düzenli değişen Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur. $1 < \alpha < 2$ kuyruk indeksli Pareto dağılımı için $E(\eta_1) < \infty$ ve $E(\eta_1^2) = \infty$ dir. Dolayısı ile $U(x)$ yenileme fonksiyonu Geluk (1992) tarafından elde edilen (29) asimptotik açılımının şartlarını sağlar. Bu kısımda hem ergodik dağılımın hem de ergodik dağılımın n. mertebeden momentlerinin asimptotik açılımlarına ulaşırken (29) asimptotik açılımı kullanılacaktır. Bölüm 1.6 ‘da $1 < \alpha < 2$ kuyruk indeksi ile düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun sağladığı asimptotik açılım

$$U(t) - \frac{t}{\mu} - \frac{1}{\mu^2}\int_0^t\int_s^\infty \bar{F}\,(v)\,dv\,ds = O\left(t^4\left(\bar{F}(t)\right)^2 \bar{F}\left(t^2\,\bar{F}(t)\right)\right),\ \ 1 < \alpha < 2$$

biçiminde verilmiştir. Şimdi bu açılım kullanılarak belirlenen özel şartlar altında (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlara ulaşılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.2.1.1 Teorem 1.7.1.1 'in şartlarına ek olarak $\{\eta_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri $\bar{F}(x) = P\{\eta_1 \geq x\} = b^{\alpha}\, x^{-\alpha},\quad x \geq b,\ b > 0$ parametreleri, $1 < \alpha < 2$ kuyruk indeksi ile Pareto dağılımına sahip olsunlar. Bu durumda $\{\eta_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu $U(t),\ t \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}\frac{b^{\alpha}t^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)} + O\left(t^{(2-\alpha)^2}\right). \tag{44}$$

İspat: $1 < \alpha < 2$, $\bar{F}(x) = b^{\alpha}\, x^{-\alpha}$ için:

$$\int_0^t \int_s^{\infty} \bar{F}(v)dvds = b^{\alpha} \int_0^t \frac{s^{1-\alpha}}{(\alpha-1)}\, ds = \frac{b^{\alpha}t^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)}$$

dır. Diğer taraftan

$$O\left(t^4 \bar{F}(t)^2\, \bar{F}\left(t^2\, \bar{F}(t)\right)\right) = O\left(t^{(2-\alpha)^2}\right)$$

olduğundan elde edilen sonuçlar $U(t)$'nin asimptotik açılımında yerine yazılırsa (44) açılımı elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.1.2 $v \in [0,2)$ için

$$J(v) \equiv \int_{\beta v}^{2\beta} U(x-\beta v)\, \tilde{p}(x)dx$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\beta \to \infty$ için $J(v)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar

$$J(v) = \frac{(2\beta-\beta v)^2}{2\mu_1} + \frac{c}{\mu_1^2}\,(2\beta-\beta v)^{3-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2+1}\right)$$

burada sırası ile μ_k ve c aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$\mu_k = E\left(\eta_1^k\right),\ \ k = 1,2,\dots,\ \ c = \frac{b^{\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha\,)}.$$

İspat: h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir ve sonlu bir fonksiyon olmak üzere; $O\left(t^{(2-\alpha)^2}\right) = t^{(2-\alpha)^2}\ h(t)$ biçiminde yazılabilir. Bu durumda $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ için

$$J(v) \equiv \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta-\beta v} U(t)\ dt$$

$$= \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta-\beta v} \left[\frac{t}{\mu_1} + \frac{b^\alpha}{\mu_1^2} + \frac{t^{2-\alpha}}{(\alpha-1)(2-\alpha)} + t^{(2-\alpha)^2} h(t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta-\beta v)^2}{2\mu_1} + \frac{c}{\mu_1^2}(2\beta-\beta v)^{3-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2+1}\right)\right]$$

elde edilir.

Sonuç 2.2.1.2 Yardımcı Teorem 2.2.1.2'nin sonucu olarak $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılıma ulaşılır:

$$J(0) \equiv \int_0^{2\beta} U(x)\, \tilde{p}(x) dx = \frac{1}{2\beta}\int_0^{2\beta} U(t)\ dt$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta)^2}{2\mu_1} + \frac{c}{\mu_1^2}(2\beta)^{3-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2+1}\right)\right].$$

Burada;

$$\mu_k = E\left(\eta_1^k\right),\ \ k = 1,2,\dots,\ \ c = \frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha\,)}$$

dir.

Teorem 2.2.1.1 Teorem 1.7.1.1'in şartlarına ek olarak Yardımcı Teorem 2.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $v \in [0,2)$ ve $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ için $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_Y(v)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$Q_Y(v) = H(v) + \frac{G(v)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right). \tag{45}$$

Burada sırası ile $H(v)$ ve $G(v)$ terimleri aşağıdaki gibi elde edilir:

$$H(v) = \frac{4v - v^2}{4},\ \ G(v) = \frac{\left(2^{1-\alpha}(2-v)^2 - (2-v)^{3-\alpha}\right)b^\alpha}{2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}.$$

Ayrıca

$\mu_1 = E(\eta_1),\ b > 0,\ 1 < \alpha < 2$ dır.

İspat: Yardımcı Teorem 2.2.1.2 ve Sonuç 2.2.1.2 kullanılarak

$$
\begin{aligned}
Q_Y(v) &= 1 - \frac{J(v)}{J(0)} \\
&= 1 - \left\{ \frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta-\beta v)^2}{2\mu_1} + \frac{c}{\mu_1^2}(2\beta-\beta v)^{3-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2+1}\right)\right] \right. \\
&\qquad \left. \cdot \frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta)^2}{2\mu_1} + \frac{c}{\mu_1^2}(2\beta)^{3-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2+1}\right)\right]^{-1} \right\} \\
&= 1 - \left\{ \left[\frac{(2-v)^2}{4} + \frac{c(2-v)^{3-\alpha}}{2\mu_1}\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right)\right] \right. \\
&\qquad \left. \cdot \left[1 + \frac{2^{(2-\alpha)}c}{\mu_1}\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right)\right]^{-1} \right\} \\
&= H(v) + \frac{G(v)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 2.2.1.2 (Zayıf Yakınsaklık Teoremi) Teorem 2.2.1.1'in şartları sağlansın. $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_Y(v)$, $\beta \to \infty$ için $H(v) = \frac{4v-v^2}{4}$ fonksiyonuna zayıf anlamda yakınsaktır.

İspat: Öncelikle Teorem 2.2.1.1 ile elde edilen asimptotik açılımındaki $G(v)$ teriminin sonlu olduğu gösterilecektir.

$$
\begin{aligned}
|G(v)| &= \left|\frac{(2^{1-\alpha}(2-v)^2 - (2-v)^{3-\alpha})b^\alpha}{2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}\right| = \frac{(2-v)^2 b^\alpha |2^{1-\alpha} - (2-v)^{1-\alpha}|}{2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)} \\
&\le \frac{(2-v)^2 b^\alpha}{2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}\ [|2^{1-\alpha}| + |(2-v)^{1-\alpha}|] \\
&< \frac{4b^\alpha}{2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}\ [|2^{1-\alpha}| + |(2-v)^{1-\alpha}|] \\
&< \frac{2b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}\ [|2^{1-\alpha}| + |(2-v)^{1-\alpha}|] \\
&= \frac{4b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}[|(2-v)^{1-\alpha}|]
\end{aligned}
$$

olur. $v \in [0,2)$ ve $1 < \alpha < 2$ olduğu için kolayca görülebilir ki;

$$
\frac{4b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}|(2-v)^{1-\alpha}| < \infty
$$

dır.

Diğer taraftan 1.7.1.1'in şartları gereği $\mu_1 = E(\eta_1) < \infty$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda

$$\frac{G(v)}{\mu_1}\frac{1}{\beta^{\alpha-1}} \to 0, \;\; \beta \to \infty$$

elde edilir. Ayrıca $1 < \alpha < 2$ için $1 - (2-\alpha)^2 > 0$ olacağından kolayca görülebilir ki;

$$\frac{1}{\beta^{1-(2-\alpha)^2}} \to 0, \;\; \beta \to \infty$$

dır. Buradan

$$Q_Y(v) - \frac{4v - v^2}{4} = \frac{G(v)}{\mu_1}\frac{1}{\beta^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{\beta^{1-(2-\alpha)^2}}\right) \to 0, \;\; \beta \to \infty$$

sonucuna ulaşılır.

2.2.2. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonunun Asimptotik Açılımı İçin Yakınsama Hızının İncelenmesi

Teorem 2.2.1.1' de elde edilmiş olan (45) alçılımı ile, (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ durumunda ergodik dağılım fonksiyonunun asmptotik davranışı incelenmiştir. Limit teoremleri ile ilgili en önemli konulardan biri bu teoremleri günlük hayat problemlerinde kullanırken teoremlerin tutarlılıklarının belirlenmesine yardımcı olan yakınsama hızı teoremleridir.

Teorem 2.2.2.1 Teorem 2.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda β'nın yeterince büyük değerleri için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|Q_Y(v) - H(v)| \leq \frac{1}{\beta^{\alpha-1}}\left|\frac{(2-v)^2(2^{1-\alpha} - (2-v)^{1-\alpha})b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)\mu_1}\right|. \tag{46}$$

İspat: Teorem 2.2.1.1'in sonucunda;

$$Q_Y(v) = H(v) + \frac{G(v)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right)$$

$$H(v) = \frac{4v - v^2}{4}, \;\; G(v) = \frac{(2^{1-\alpha}(2-v)^2 - (2-v)^{3-\alpha})b^\alpha}{2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}, \quad \mu_1 = E(\eta_1), \;\; b > 0$$

elde edilmiştir. $Q_Y(v)$ açılımı aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$Q_Y(v) = H(v) + \frac{G(v)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha} + h(\beta, v)$$

Burada $O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right) = h(\beta, v)$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$$h(\beta, v) \leq k \left|\frac{1}{\beta^{1-(2-\alpha)^2}}\right|$$

eşitsizliğini sağlayan sonlu bir k sabiti ve $\beta \geq \beta_0$ olacak şekilde bir β_0 sabiti mevcuttur. $1 < \alpha < 2$ olduğu için $(2-\alpha)^2 - 1 < 1 - \alpha$ dır. Dolayısı ile β'nın yeterince büyük değerleri için

$$\left|O\left(\frac{1}{\beta^{1-(2-\alpha)^2}}\right)\right| = |h(\beta, v)| \leq k \left|\frac{1}{\beta^{1-(2-\alpha)^2}}\right| \leq \left|\frac{G(v)}{\mu_1}\frac{1}{\beta^{\alpha-1}}\right|$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$|Q_Y(v) - H(v)| = \left|\frac{G(v)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right)\right|$$

$$\leq \left|\frac{G(v)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha}\right| + \left|O\left(\beta^{(2-\alpha)^2-1}\right)\right| \leq 2\left|\frac{G(v)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha}\right|$$

dır. Böylece

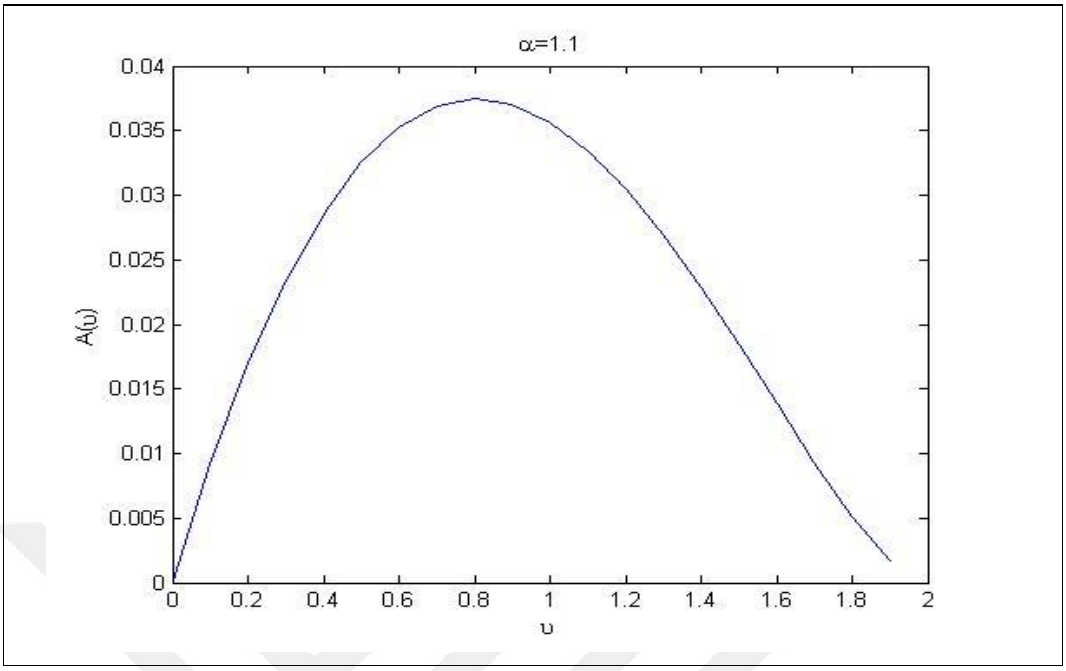
$$|Q_Y(v) - H(v)| \leq 2\, A(v)\, \beta^{1-\alpha}, \;\; G(v) = \frac{(2^{1-\alpha}(2-v)^2 - (2-v)^{3-\alpha})b^{\alpha}}{2(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}$$

elde edilir. Burada

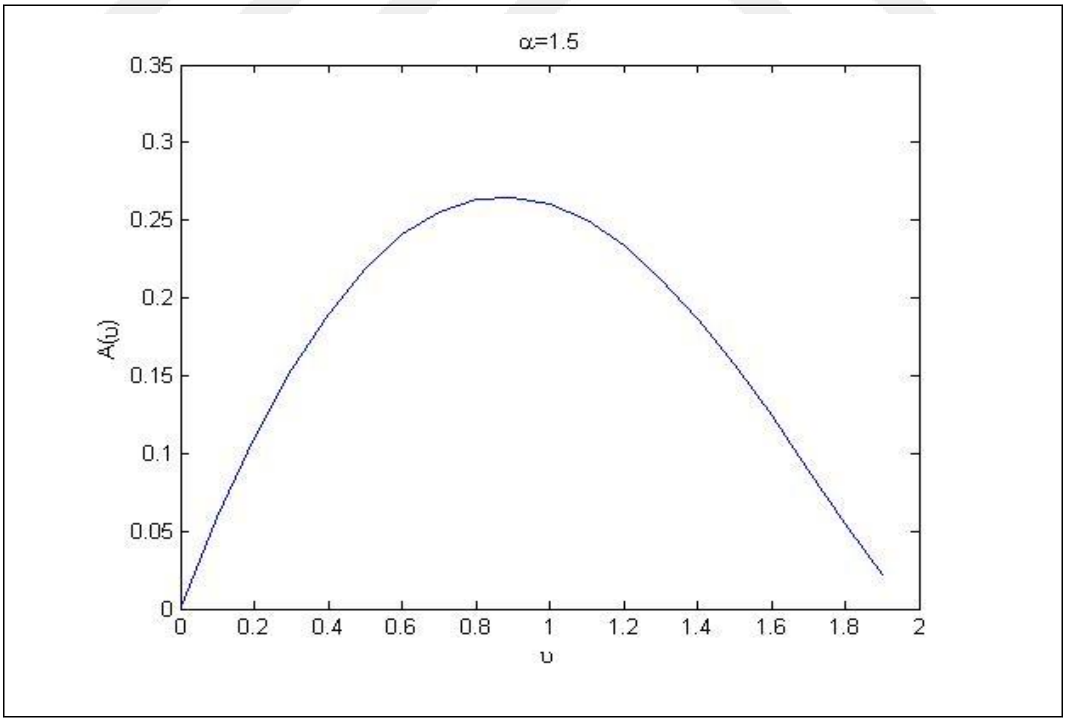
$$A(v) = \left|\frac{G(v)}{\mu_1}\right|, \;\; v \in [0,2), \;\; 1 < \alpha < 2$$

dır.

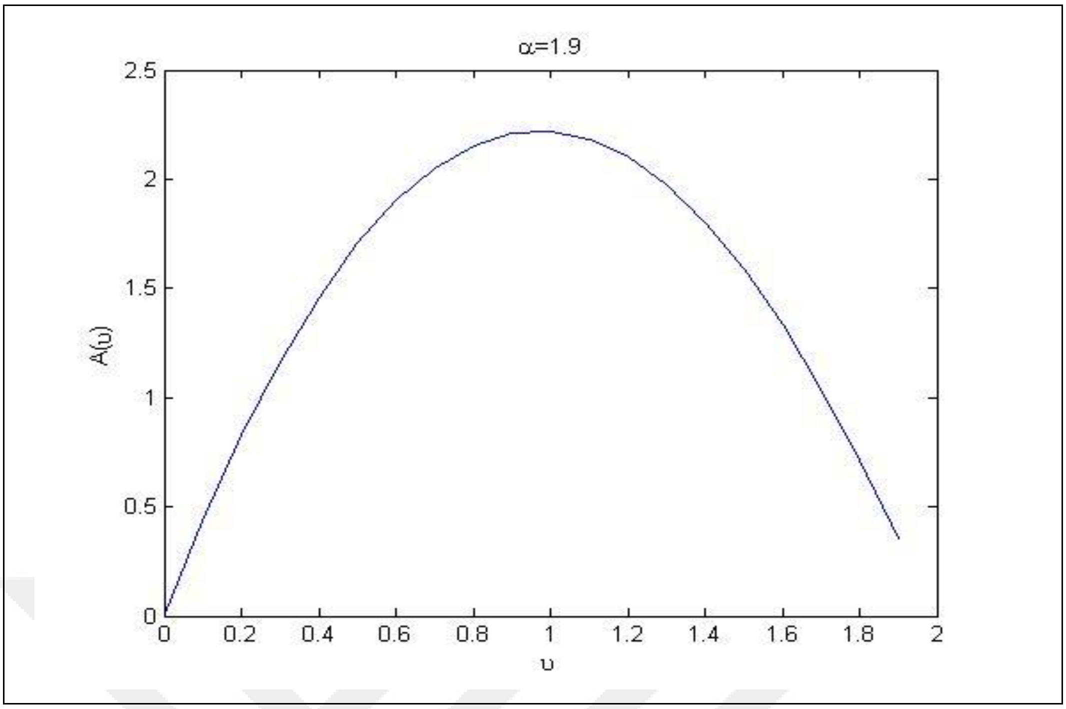
Teorem 2.2.2.1 ile asimptotik yakınsama hızı elde edilmiştir. Sağ taraftaki $2A(v)$ terimi için μ_1 hesaplanıp yerine yazıldığında $1 < \alpha < 2$ aralığındaki farklı α değerleri için bu terimin sonlu olduğu görülmüştür. Bu durum Matlab programı ile elde edilen Şekil-8, Şekil-9 ve Şekil-10' da görülmektedir. Dolayısı ile $Q_Y(v)$ ile limit dağılımı olan $H(v)$'nin farkının mutlak değerinin β ile ters orantılı olduğu görülür.



Şekil 8. $\alpha = 1.1$ ve $\upsilon \in [0,2)$ için $A(\upsilon)$'ın grafiği



Şekil 9. $\alpha = 1.5$ ve $\upsilon \in [0,2)$ için $A(\upsilon)$'ın grafiği



Şekil 10. $\alpha = 1.9$ ve $\upsilon \in [0,2)$ için $A(\upsilon)$'ın grafiği

2.2.3. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\bar{F}(x) = P\{\eta_1 \geq x\} = b\, x^{-\alpha}$, $x \geq b$, $b > 0$ ve $1 < \alpha < 2$ kuyruk dağılımı ile düzenli değişen Pareto dağılımına ayrıca müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s, S]$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Kısım 2.1.2'de elde edilen formüller kullanılarak sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun n. mertebeden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılacaktır.

Not 2.2.3.1 Burada $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olarak $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ tanımlanmıştır. Ayrıca $\tilde{p}(x)$, $[0,2\beta)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olan $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Bu durumda; $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının $n.$ $(n \geq 1)$ mertebeden momentleri

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n}{E\left(U(\tilde{\zeta}_1)\right)} \int_0^{2\beta} \upsilon^{n-1} \left[\int_{\upsilon}^{2\beta} U(x-\upsilon)\tilde{p}\,(x)dx \right] d\upsilon$$

biçiminde elde edilmiştir. Yardımcı Teorem 2.2.1.2 ve Sonuç 2.2.1.1 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$E\left(U\left(\tilde{\zeta}_1-\upsilon\right)\right)=\frac{1}{2\beta}\int_{\upsilon}^{2\beta}U(x-\upsilon)\tilde{p}(x)\,dx=\frac{1}{2\beta}\int_{0}^{2\beta-\upsilon}U(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta-\upsilon)^2}{2\mu_1}+\frac{c}{\mu_1^2}(2\beta-\upsilon)^{3-\alpha}+O\left(\beta^{(2-\alpha)^2+1}\right)\right].$$

$$E\left(U\left(\tilde{\zeta}_1\right)\right)=\int_0^{2\beta}U(x)\tilde{p}(x)dx=\frac{1}{2\beta}\int_0^{2\beta}U(t)dt$$

$$=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta)^2}{2\mu_1}+\frac{c}{\mu_1^2}(2\beta)^{3-\alpha}+O\left(\beta^{(2-\alpha)^2+1}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2\beta}\left[\frac{(2\beta)^2}{2\mu_1}+\frac{c}{\mu_1^2}(2\beta)^{3-\alpha}\right]+O\left(\beta^{(2-\alpha)^2}\right),$$

burada

$c=\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}$ ve $\mu_1=E(\eta_1)$ dir.

Yardımcı Teorem 2.2.3.1 $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sonlu ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere $O\left(\beta^{(2-\alpha)^2}\right)=\beta^{(2-\alpha)^2}\,h(\beta)$ olsun. Bu durumda $\upsilon\in[0,2)$ ve $\beta\to\infty$ için aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\beta^{(2-\alpha)^2}\int_0^{2\beta}\upsilon^{n-1}\,h(\beta)d\upsilon=O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2}\right).$$

İspat: $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sonlu ve ölçülebilir olarak tanımlanmıştır. Buradan

$$\left|\beta^{(2-\alpha)^2}\int_0^{2\beta}\upsilon^{n-1}\,h(\beta)d\upsilon\right|\le\beta^{(2-\alpha)^2}\int_0^{2\beta}\upsilon^{n-1}\,|h(\upsilon)|d\upsilon$$

$$\le K\beta^{(2-\alpha)^2}\int_0^{2\beta}\upsilon^{n-1}\,d\upsilon=\frac{K}{n}\,2^n\,\beta^{n+(\alpha-2)^2}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.2.3.2

$$J_n(\beta)=\int_0^{2\beta}\upsilon^{n-1}E\left(U\left(\tilde{\zeta}_1-\upsilon\right)\right)\,d\upsilon$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\upsilon\in[0,2)$ ve $\beta\to\infty$ için aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}\right)\beta^{n+1} + \left(\frac{c_1\,B(n,4-\alpha)}{\mu_1^2}\right)\beta^{n+2-\alpha} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2}\right).$$

Burada $B(x,y)$ Beta fonksiyonudur ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,;\;\; Re(x) > 0,\;\; Re(y) > 0.$$

Ayrıca $c = \frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha\,)}$, $c_1 = c\;2^{n+2-\alpha}$ ve $\mu_1 = E(\eta_1)$ dir.

İspat: $J_n(\beta)$'nın tanımı kullanılarak

$$J_n(\beta) = \int_0^{2\beta} v^{n-1}E\left(U\left(\widetilde{\zeta_1}-v\right)\right)\,dv$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left\{\int_0^{2\beta} v^{n-1}\left(\frac{(2\beta-v)^2}{2\mu_1} + \frac{c}{\mu_1^2}(2\beta-v)^{3-\alpha}\right)dv\right\} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2}\right)$$

elde edilmiştir.

$$\frac{1}{2\beta}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\,\frac{(2\beta-v)^2}{2\mu_1}\,dv = \frac{\beta v^n}{n\mu_1} - \frac{v^{n+1}}{(n+1)\mu_1} + \frac{v^{n+2}}{(n+2)4\beta\,\mu_1}\Bigg|_0^{2\beta}$$

$$= \frac{2^n}{n\mu_1}\beta^{n+1} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)\mu_1}\beta^{n+1} + \frac{2^n}{(n+2)\mu_1}\,\beta^{n+1} \tag{47}$$

dır.

Diğer taraftan; $1 < \alpha < 2$ için

$$\frac{c}{\mu_1^2}\,\frac{1}{2\beta}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\,(2\beta-v)^{3-\alpha}\,dv = \frac{c}{\mu_1^2}\,\frac{1}{2\beta}\int_0^1 (2\beta t)^{n-1}\,(2\beta-2\beta t)^{3-\alpha}\,2\beta\,dt$$

$$= \frac{c}{\mu_1^2}\,(2\beta)^{n+2-\alpha}\int_0^1 t^{n-1}\,(1-t)^{3-\alpha}\,dt$$

$$= \frac{c}{\mu_1^2}\,(2\beta)^{n+2-\alpha}\,B(n,4-\alpha),\quad n \geq 1 \tag{48}$$

elde edilir. Böylece (47) ve (48) kullanılarak

$$J_n(\beta) = \left[\frac{2^n}{n\mu_1} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)\mu_1} + \frac{2^n}{(n+2)\mu_1}\right]\beta^{n+1} + \left[\frac{c}{\mu_1^2}\ \ B(n,4-\alpha)\right](2\beta)^{n+2-\alpha}$$
$$+\, O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2}\right)$$
$$= \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{2^{n+1}}{n(n+1)(n+2)}\right)\beta^{n+1} + \left(\frac{c_1\, B(n,4-\alpha)}{\mu_1^2}\right)\beta^{n+2-\alpha} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2}\right)$$

elde edilir.

Teorem 2.2.3.1 Teorem 2.2.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n. mertebeden momentleri $\beta \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$E(\tilde{X}^n) = k_{n1}\beta^n + \frac{k_{n2}}{\mu_1}\ \beta^{n+1-\alpha} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2-1}\right)$$

burada

$$k_{n1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)};\ \ k_{n2} = \frac{c_1[(n^3+3n^2+2n)B(n,4-\alpha)-2]}{(n+1)(n+2)}$$

ve

$$c = \frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)},\ \ c_1 = c\ 2^{n+2-\alpha},\ \ \mu_1 = E(\eta_1)$$

dir.

İspat: $\tilde{X}(t)$ sürecini ergodik dağılım fonksiyonunun n. dereceden moementlerinin kesin formülleri

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n}{E\left(U(\tilde{\zeta}_1)\right)}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\left(\int_v^{2\beta} U(x-v)\tilde{p}\,(x)dx\right)dv$$

biçiminde elde edilmiştir. Ayrıca Yardımcı Teorem 2.2.3.2 ile

$$J_n(\beta) = \int_0^{2\beta} v^{n-1}\left(\int_v^{2\beta} U(x-v)\tilde{p}\,(x)dx\right)dv$$

ifadesinin asimptotik açılımı elde edilmiştir. $J_n(\beta)$ ve $E\left(U(\tilde{\zeta}_1)\right)$ sonuçları $E(\tilde{X}^n)$ ifadesinde yerine yazılır ise:

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{nJ_n(\beta)}{E\left(U(\tilde{\zeta}_1)\right)}$$
$$= \left\{\left[\frac{2^{n+1}}{\mu_1(n+1)(n+2)}\right]\beta^{n+1} + \left[\frac{c_1 nB(n,4-\alpha)}{\mu_1^2}\right]\beta^{n+2-\alpha} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2}\right)\right\}$$
$$\cdot\left\{\frac{1}{\mu_1}\beta + \frac{1}{\mu_1^2}(c\ 2^{2-\alpha})\beta^{2-\alpha} + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2}\right)\right\}^{-1}$$

$$=\left\{\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\beta^n+\frac{1}{\mu_1}[c_1 nB(n,4-\alpha)]\beta^{n+1-\alpha}+O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2-1}\right)\right\}$$

$$\cdot\left\{1+\frac{1}{\mu_1}[c\,2^{2-\alpha}]\beta^{1-\alpha}+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2-1}\right)\right\}^{-1}$$

$$=\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\beta^n+\frac{1}{\mu_1}\left[c_1\left(nB(n,4-\alpha)-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\right]\beta^{n+1-\alpha}$$

$$+O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2-1}\right)$$

$$=k_{n1}\beta^n+\frac{k_{n2}}{\mu_1}\beta^{n+1-\alpha}+O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2-1}\right)$$

elde edilir. Burada

$$k_{n1}=\frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)};\quad k_{n2}=\frac{c[2^{n+2-\alpha}][(n^3+3n^2+2n)B(n,4-\alpha)-2]}{(n+1)(n+2)}$$

ve

$$c=\frac{b^\alpha}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)},\quad \mu_1=E(\eta_1),\quad c_1=c\,2^{n+2-\alpha}$$

dır.

Teorem 2.2.3.1'de elde edilen sonuçlar kullanılarak, sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun ilk dört momenti için asimptotik açılımlar aşağıdaki gibi elde edilir:

$$E(\tilde{X}^1)=\frac{2}{3}\beta+\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{c2^{3-\alpha}}{3}[3\,B(1,4-\alpha)-1]\right\}\beta^{2-\alpha}+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2}\right).$$

$$E(\tilde{X}^2)=\frac{2}{3}\beta^2+\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{c2^{2-\alpha}}{3}[24\,B(2,4-\alpha)-2]\right\}\beta^{3-\alpha}+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1}\right).$$

$$E(\tilde{X}^3)=\frac{4}{5}\beta^3+\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{c2^{4-\alpha}}{5}[30\,B(3,4-\alpha)-1]\right\}\beta^{4-\alpha}+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+2}\right).$$

$$E(\tilde{X}^4)=\frac{16}{15}\beta^4+\frac{1}{\mu_1}\left\{\frac{c2^{5-\alpha}}{15}[120\,B(4,4-\alpha)-2]\right\}\beta^{5-\alpha}+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+3}\right).$$

2.2.4. Simülasyon Sonuçları

Bu kısımda Teorem 2.2.3.1 ile $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının birinci ve ikinci momentleri için elde edilmiş olan asimptotik açılımların ilk iki terimi kullanılmıştır. İlk iki terim kullanılarak elde edilen değerler asimptotik değerler olarak adlandırılacak ve bu değerler $\tilde{E}(X^n)$ ile gösterilecektir. Ayrıca Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak elde edilen değerler simülasyon değerleri olarak adlandırılacak ve $\hat{E}(X^n)$ ile gösterilecektir. Simülasyon değerleri MATLAB programı kullanılarak ve her bir değer için sürecin 10^7 sayıda realizasyonu üretilerek elde edilmişlerdir. Bunun dışında simülasyon tablolarını oluşturmak için kullanılacak olan değerler sırası ile aşağıdaki gibidir:

Mutlak Hata: $\Delta_n = \left|\tilde{E}(X^n) - \hat{E}(X^n)\right|$, Nispi Hata: $\delta_n = (\Delta_n/\hat{E}(X^n))\ 100\%$

Doğruluk Yüzdesi: $AP_n = 100\% - \delta_n,\ n = 1{,}2.$

Tablo 5. Talepler Pareto dağılımına sahipken $E(X)$ için simülasyon tabloları

$\beta = 100$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	71.3483	70.2102	1.1381	1.6209	98.3791
1.4	70.2246	69.6551	0.5695	0.8175	99.1825
1.5	69.3369	69.1870	0.1499	0.2167	99.7833
1.6	69.0140	68.8365	0.1775	0.2578	99.7422
$\beta = 80$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	57.4866	56.4388	1.0478	1.8565	98.1435
1.4	56.5409	55.9950	0.5459	0.9749	99.0251
1.5	55.7852	55.6193	0.1659	0.2982	99.7018
1.6	55.4802	55.3198	0.1604	0.2899	99.7101
$\beta = 70$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	50.5715	49.5561	1.0154	2.0490	97.9510
1.4	49.6686	49.1441	0.5245	1.0673	98.9327
1.5	49.0004	48.8251	0.1753	0.3589	99.6411
1.6	48.7019	48.5537	0.1482	0.3052	99.6948
$\beta = 50$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	36.6215	35.7178	0.9037	2.5302	97.4698
1.4	35.9090	35.4191	0.4899	1.3832	98.6168
1.5	35.3751	35.1923	0.1828	0.5195	99.4805
1.6	35.1123	34.9637	0.1486	0.4249	99.5751
$\beta = 40$					
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	29.6255	28.7794	0.8461	2.9400	97.0600
1.4	29.0204	28.5415	0.4789	1.6779	98.3221
1.5	28.4742	28.3200	0.1542	0.5444	99.4556
1.6	28.2937	28.1580	0.1357	0.4819	99.5181

Tablo 5'in devamı

		$\beta = 30$			
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	22.5688	21.8022	0.7666	3.5164	96.4836
1.4	22.0646	21.6196	0.4450	2.0582	97.9418
1.5	21.6229	21.4606	0.1623	0.7561	99.2439
1.6	21.4502	21.3273	0.1229	0.5761	99.4239
		$\beta = 15$			
α	$\tilde{E}(X)$	$\hat{E}(X)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	19.0272	18.3027	0.7245	3.9583	96.0417
1.4	18.5750	18.1473	0.4277	2.3569	97.6431
1.5	18.1847	18.0183	0.1664	0.9237	99.0763
1.6	18.0148	17.9074	0.1074	0.5998	99.4002

Tablo 6. Talepler Pareto dağılımına sahipken $E(X^2)$ için simülasyon tabloları

		$\beta = 100$			
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	7566.146	7334.2	231.9458	3.1625	96.8375
1.4	7350.040	7230.1	119.9403	1.6589	98.3411
1.5	7193.533	7150.2	43.3333	0.6060	99.3940
1.6	7108.464	7079.2	29.2640	0.4134	99.5866
				$\beta = 80$	
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	4906.820	4735.8	171.0202	3.6112	96.3888
1.4	4761.011	4669.0	92.0107	1.9707	98.0293
1.5	4645.779	4613.7	32.0786	0.6953	99.3047
1.6	4590.002	4569.6	20.4019	0.4465	99.5535
		$\beta = 70$			
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	3788.580	3646.4	142.1799	3.8992	96.1008
1.4	3672.301	3594.8	77.5005	2.1559	97.8441
1.5	3578.753	3551.6	27.1529	0.7645	99.2355
1.6	3534.833	3518.6	16.2334	0.4614	99.5386
		β=50			
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	1985.087	1892.9	92.1871	4.8701	95.1299
1.4	1917.001	1865.0	52.0013	2.7883	97.2117
1.5	1843.294	1822.3	20.9941	1.1389	98.8611
1.6	1834.104	1823.4	10.7039	0.5870	99.4130

Tablo 6. ‘nın devamı

β=40					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	1294.431	1226.4	68.0309	5.3275	94.4530
1.4	1249.956	1209.5	40.4561	3.3449	96.6551
1.5	1211.761	1194.9	16.8608	1.4111	98.5889
1.6	1189.138	1181.7	7.4376	0.6294	99.3706
$\beta = 30$					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	1005.0820	947.4307	57.6510	6.0850	93.9150
1.4	969.8279	934.5850	35.2429	3.7710	96.2290
1.5	937.4267	922.6224	14.8043	1.6046	98.3954
1.6	918.2838	912.1582	6.1256	0.6716	99.3284
$\beta = 15$					
α	$\tilde{E}(X^2)$	$\hat{E}(X^2)$	Δ_1	$\delta_1(\%)$	$AP_1(\%)$
1.3	750.7923	703.5252	47.2671	6.7186	93.2814
1.4	722.0901	693.3472	28.7429	4.1455	95.8545
1.5	697.1245	684.7293	12.3952	1.8102	98.1898
1.6	681.8920	677.3417	4.5503	0.6718	99.3282

Simülasyon tablolarında görüleceği gibi α’nın ve S nin çok farklı değerleri için sonuçlar elde edilmiştir. α parametresinin kuyruk ağırlığını belirlediği bilinmektedir. Simülasyon tablolarından α parametresi $1 < \alpha < 2$ için sınır değerlerine yani 1’e ve 2’ ye yaklaştıkça simülasyon sonuçlarının doğruluk oranlarının azaldığı görülmektedir. Bunun nedeni $1 < \alpha < 2$ kuyruk indeksi ile Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun sınır değerlerine yaklaştıkça sonsuza yaklaşmasıdır. α parametresi $(0,1)$ aralığının orta noktalarında iken, S’nin küçük değerleri için bile asimptotik değerler ile simülasyon değerleri arasındaki uyumluluk %99’un üzerindedir. Sonuç olarak elde edilen değerler ağır kuyruklu (aykırı değerler üretme eğilimde olan) bir dağılım için yeterince iyidir. Bu durum ise S’nin çok büyük olmayan değerleri için bile elde edilen asimptotik açılımların uygulamada güvenilir bir şekilde kullanılabileceğini göstermektedir.

Çalışmaların buraya kadar olan kısmında literatürde hafif kuyruklu dağılımlar kullanılarak incelenen (s,S) tipli stok kontrol modelleri farklı altsınıflardan ağır kuyruklu dağılımlar ile ele alınarak incelenmiştir. Her bir altsınıftan ağır kuyruklu dağılım için farklı bir asimptotik açılım kullanılmıştır. Bu altsınıflardan temsilci birer dağılım seçilmiş ve talep miktarını ifade eden rastgele değişkenler bu temsilci dağılıma sahipken ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Çalışmanın bundan sonraki kısmında düzenli değişen dağılımlar altsınıfından Pareto dağılımı kullanılarak elde edilen asimptotik açılımlara benzer açılımlar talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler genel durumda sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahipken elde edilecektir. Bu kısımda X(t) sürecinin ergodik dağılımı için sonsuz varyanslı düzenli değişen kuyruklu dağılımların tamamını içine alacak biçimde çatı formüller elde etmek amaçlanmaktadır.

2.3. Talep Miktarı Genel Durumda Sonsuz Varyanslı Düzenli Değişen Dağılıma Sahip Olduğunda Sürecin Asimptotik Olarak İncelenmesi

2.3.1. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda Teorem 1.7.1.1 ile verilen şartlara ek olarak talep miktarını ifade eden $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin genel durumda düzenli değişen sonsuz varyanslı rasgele değişkenler olduğu varsayılmıştır. $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere her $\alpha \geq 0$ için α indeksi ile düzenli değişen dağılıma sahip η_1 rasgele değişkeninin kuyruk kısmı

$$\bar{F}(x) = P\{\eta_1 \geq x\} = L(x)\, x^{-\alpha}$$

biçiminde ifade edilebilmektedir. Burada dağılımın sonsuz varyanslı olduğu varsayıldığı için $1 < \alpha < 2$ dır. Ayrıca müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s, S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır.

(s,S) tipli envanter modeli ifade eden $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olan $Y(t)$ süreci aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$Y(t) = \frac{X(t) - s}{\beta}, \ \ \beta \equiv \frac{S - s}{2}$$

ve (34) ile verilmiş olan ergodik dağılım fonksiyonunun kesin formülü sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu

$$U(t) - \frac{t}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_1^2} \int_0^t \int_s^\infty \bar{F}\,(v)\, dv\, ds = O\left(t^4 \left(\,\bar{F}(t)\right)^2 \bar{F}\left(t^2\, \bar{F}(t)\right)\right),\ \ 1 < \alpha < 2$$

ile birlikte kullanılarak ergodik dağılımın asimptotik açılımına ulaşılmıştır. Önceki bölümlere benzer şekilde $\tilde{p}(x)$, $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkenlerinin olasılık yoğunluk fonksiyonudur ve $[0,2\beta)$ aralığında düzgün dağılıma sahiptir. Bu kısımda elde edilen sonuçlara ulaşmak için Kısım 1.3.2.2'de ispatsız olarak verilen teoremler sıklıkla kullanılacaktır. Öncelikle genel durumda $1 < \alpha < 2$ indeksi ile düzenli değişen herhangi bir rasgele değişken tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımına ulaşılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.3.1.1 Teorem 1.7.1.1'deki şartlara ek olarak $\{\eta_i\}, i \geq 1$ rasgele değişkenleri $1 < \alpha < 2$ indeksi ile düzenli değişen herhangi bir dağılıma sahip olsunlar, yani $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere; $\bar{F}(x) = P\{\eta_1 > x\} = x^{-\alpha}L(x)$ olsun. Bu durumda $\{\eta_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}\frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\ t^{2-\alpha}L(t) + O\left(t^{(\alpha-2)^2}L_1(t)\right).$$

Burada $L_1(t) = \big(L(t)\big)^2 L\big(t^{2-\alpha}L(t)\big)$ biçiminde tanımlı yavaş değişen bir fonksiyondur.

İspat Teorem 1.6.2.6'dan

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}\int_0^t\int_s^\infty \bar{F}\,(v)\,dv\,ds + O\left(t^4\big(\,\bar{F}(t)\big)^2\,\bar{F}\big(t^2\,\bar{F}(t)\big)\right),\ \ 1 < \alpha < 2$$

dir. Öncelikle $-\alpha < -1$ olduğundan; Teorem 1.3.2.2.5 'in şartları sağlanmaktadır. Dolayısı ile Teorem 1.3.2.2.5 kullanılarak aşağıdaki asimptotik sonuca ulaşılır:

$$\int_s^\infty v^{-\alpha}L(v)\,dv\,ds \sim -\frac{1}{1-\alpha}\ s^{1-\alpha}L(s).$$

Diğer taraftan $1-\alpha > -1$ olduğundan Teorem 1.3.2.2.6'dan, her $s \geq A$ için

$$-\frac{1}{1-\alpha}\int_A^\infty s^{1-\alpha}L(s)\ ds = \infty$$

dır. Dolayısı ile Teorem 1.2.1.2 ve Teorem 1.2.1.1 kullanılarak;

$$\int_0^t\int_s^\infty \bar{F}\,(v)\,dv\,ds = \int_0^t\int_s^\infty v^{-\alpha}L(v)\,dv\,ds \sim -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^t s^{1-\alpha}L(s)\,ds$$

elde edilir.

Ayrıca $1-\alpha > -1$ olduğundan, Teorem 1.3.2.2.5 kullanılarak;

$$-\frac{1}{1-\alpha}\int_0^t s^{1-\alpha}L(s)\,ds\ \sim -\frac{1}{(1-\alpha)}\frac{1}{(2-\alpha)}\ t^{2-\alpha}L(t)$$

sonucuna ulaşılır. Yani;

$$\int_0^t \int_s^\infty \bar{F}(v)\, dv\, ds \sim \frac{1}{(\alpha-1)} \frac{1}{(2-\alpha)}\ t^{2-\alpha} L(t)$$

dır. Buradan

$$\int_0^t \int_s^\infty \bar{F}(v)\, dv\, ds \sim \frac{1}{(\alpha-1)} \frac{1}{(2-\alpha)}\ t^{2-\alpha} L(t)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-1)} \frac{1}{(2-\alpha)}\ t^{2-\alpha} L(t) + O\left(t^{2-\alpha} L(t)\right)$$

sonucu elde edilir.

“O” sonsuz büyük fonksiyonunun içindeki terimler

$$t^4\left(\bar{F}(t)\right)^2 \bar{F}\left(t^2\, \bar{F}(t)\right) = t^4 t^{-2\alpha}\left(L(t)\right)^2 \bar{F}\left(t^2 t^{-\alpha} L(t)\right)$$

$$= t^{(\alpha-2)^2}\left(L(t)\right)^2 L\left(t^{2-\alpha} L(t)\right)$$

biçiminde değerlendirilir.

$L_1(t) = \left(L(t)\right)^2 L\left(t^{2-\alpha} L(t)\right)$ olsun; Teorem 1.3.2.2.3 (ii)’den $L(t)$ yavaş değişen bir fonksiyon ise; $\left(L(t)\right)^2$de yavaş değişen bir fonksiyondur. Diğer taraftan $t^{2-\alpha} L(t)$ fonksiyonunun $2-\alpha$ indeksi ile düzenli değişen bir fonksiyon olduğu açıktır. Burada $2-\alpha > 0$ olduğundan Teorem 1.3.2.2.3 (v)’ den

$$\lim_{t\to\infty} t^{2-\alpha} L(t) = \infty$$

elde edilir.

Bu durumda Teorem 1.3.2.2.4 (ii)’ den $L\left(t^{2-\alpha} L(t)\right)$ fonksiyonunun 0 indeksi ile düzenli değişen yani yavaş değişen bir fonksiyon olduğu görülür. Dolayısı ile Teorem 1.3.2.2.3 (iii)’den $L_1(t) = \left(L(t)\right)^2 L\left(t^{2-\alpha} L(t)\right)$ yavaş değişen bir fonksiyondur. Buradan $t^{(\alpha-2)^2} L_1(t)$ fonksiyonunun $(\alpha-2)^2$ indeksi ile düzenli değişen fonksiyon olduğu görülür. Bu iki sonuç kullanılarak;

$$U(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2} \frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)}\ t^{2-\alpha} L(t) + O\left(t^{2-\alpha} L(t)\right) + O\left(t^{(\alpha-2)^2} L_1(t)\right)$$

elde edilir.

Düzenli değişen fonksiyonların sıfıra gitme hızını kuyruk indeksi tayin eder ve $t \to \infty$ durumunda yavaş değişen fonksiyon $L(t)$ her zaman sabit gibi davranır. Ayrıca $\min\{(2-\alpha), (\alpha-2)^2\} = (\alpha-2)^2$ olduğundan istenilen sonuç elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.3.1.2 $\bar{F}(x) = P\{\eta_1 > t\} = t^{-\alpha}L(t)$ ve $L_1(t) = \big(L(t)\big)^2\, L\big(t^{2-\alpha}L(t)\big)$ olsun. Her $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sınırlı fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\int_0^{2\beta-\beta\upsilon} t^{(\alpha-2)^2} L_1(t)\; g(t)\, dt = O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1} L_1(\beta)\right).$$

İspat: $g(t)$ sınırlı bir fonksiyon olarak verildiğine göre,

$$O\left(t^{(\alpha-2)^2} L_1(t)\right) = t^{(\alpha-2)^2} L_1(t)\; g(t)$$

olarak yazılabilir. Diğer taraftan $(\alpha-2)^2 > -1$ olduğundan Teorem 1.3.2.2.5 (i) kullanılarak

$$\int_0^{2\beta-\beta\upsilon} x^{(\alpha-2)^2} L_1(x)\, dx \sim \frac{(2\beta-\beta\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1}}{(\alpha-2)^2+1}\, L_1(2\beta-\beta\upsilon)$$

elde edilir. O halde;

$$\left|\int_0^{2\beta-\beta\upsilon} x^{(\alpha-2)^2} L_1(x)\; g(x)\, dx\right| \le \int_0^{2\beta-\beta\upsilon} \left|x^{(\alpha-2)^2} L_1(x)\; g(x)\right| dx$$

$$\le K \int_0^{2\beta-\beta\upsilon} x^{(\alpha-2)^2} L_1(x)\, dx$$

$$\sim K\frac{(2\beta-\beta\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1}}{(\alpha-2)^2+1}\, L_1(2\beta-\beta\upsilon),\;\; \upsilon \in [0,2)$$

dir. Buradan istenilen sonuç elde edilir.

Sonuç 2.3.1.1 Teorem 1.7.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.3.1.1'in koşulları sağlansın. Ayrıca

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2\beta}\int_{\beta\upsilon}^{2\beta} U(x-\beta\upsilon)\; dx, \qquad \upsilon \in [0,2)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda altında $\beta \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{(2\beta-\beta\upsilon)^2}{2} + \frac{c_2 L(2\beta-\beta\upsilon)}{\mu_1^2}(2\beta-\beta\upsilon)^{3-\alpha} + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1} L_1(\beta)\right)\right].$$

Burada

$$L_1(\beta) = \big(L(\beta)\big)^2\, L\big(\beta^{2-\alpha}L(\beta)\big),\;\; c_2 = \frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}$$

dır.

İspat: $J(\upsilon)$'nin tanımı kullanılarak $\beta \to \infty$ için

$$J(\upsilon) = \frac{1}{2\beta} \int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} U(t) \ \mathrm{dt}$$

$$= \frac{1}{2\beta}\left\{ \int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} \left[\frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}\frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)} \ t^{2-\alpha}L(t)\right] dt + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1}L_1(\beta)\right)\right\}$$

olarak elde edilmiştir.

$$\int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} \frac{t}{\mu_1} dt = \frac{1}{2\mu_1} \ (2\beta-\beta\upsilon)^2$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan $2-\alpha > -1$ olduğundan $\beta \to \infty$ için Teorem 1.3.2.2.5 kullanılarak;

$$\int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} t^{2-\alpha}L(t) \ dt \sim \frac{1}{(3-\alpha)} \ (2\beta-\beta\upsilon)^{3-\alpha} \ L(2\beta-\beta\upsilon)$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} t^{2-\alpha}L(t) \ dt = \frac{L\big((2-\upsilon)\beta\big)(2-\upsilon)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\beta^{3-\alpha} + O(\beta^{3-\alpha} \ L(2-\upsilon)\beta)$$

dir.

Böylece

$$\int_{0}^{2\beta-\beta\upsilon} \left[\frac{t}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}\frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)} \ t^{2-\alpha}L(t)\right] dt$$

$$= \frac{1}{2\mu_1} \ (2\beta-\beta\upsilon)^2 + \frac{L\big((2-\upsilon)\beta\big)(2-\upsilon)^{3-\alpha}}{(3-\alpha)}\beta^{3-\alpha} + O\big(\beta^{3-\alpha} \ (L(2-\upsilon)\beta)\big)$$

elde edilir.

Diğer taraftan $1 < \alpha < 2$ için $\min\{(3-\alpha),((\alpha-2)^2+1)\} = (\alpha-2)^2+1$ olduğundan istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.3.1.2 Teorem 1.7.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.3.1.1'in koşulları altında $\upsilon \to 0$

$$J(0) = \frac{1}{2\beta} \int_{0}^{2\beta} U(t) \ dt$$

tanımlansın.

Bu durumda $\beta \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılım doğrudur:

$$J(0) = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{(2\beta)^2}{2} + \frac{1}{\mu_1^2}c_2\,(2\beta)^{3-\alpha}L(2\beta) + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1}L_1(\beta)\right)\right].$$

Teorem 2.3.1.1 Teorem 1.7.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.3.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \to \infty$ için $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılımı $Q_Y(v)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$Q_Y(v) = \frac{4v - v^2}{4} + \left\{\frac{c_2(2-v)^2}{2\mu_1}\,\left[2^{1-\alpha}\,L(2\beta) - (2-v)^{1-\alpha}\,L(2\beta - \beta v)\right]\right\}\beta^{1-\alpha}$$
$$+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2-1}L_1(\beta)\right),$$

burada

$$L_1(\beta) = \left(L(\beta)\right)^2 L\left(\beta^{2-\alpha}L(\beta)\right),\;\; v \in (0,2),\;\; c_2 = \frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)}$$

dir.

İspat: $J(v)$ ve $J(0)$'nın tanımı kullanılarak;

$$Q_Y(v) = 1 - \frac{J(v)}{J(0)}$$
$$= 1 - \left\{\left[\frac{(2\beta-\beta v)^2}{2\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}c_2\,L(2\beta-\beta v) + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1}L_1(\beta)\right)\right]\right.$$
$$\left.\cdot\left[\frac{(2\beta)^2}{2\mu_1} + \frac{1}{\mu_1^2}(2\beta)^{3-\alpha}\,c_2L(2\beta) + +O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1}L_1(\beta)\right)\right]^{-1}\right\}$$
$$= 1 - \left\{\left[\frac{(2-v)^2}{4} + c_2\frac{(2-v)^{3-\alpha}}{2\,\mu_1}L(2\beta-\beta v)\,\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2-1}L_1(\beta)\right)\right]\right.$$
$$\left.\cdot\left[1 + c_2L(2\beta)\,\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2-1}L_1(\beta)\right)\right]^{-1}\right\}$$
$$= 1 - \left[\frac{(2-v)^2}{4} + \frac{c_2(2-v)^{3-\alpha}}{2\,\mu_1}L(2\beta-\beta v)\,\beta^{1-\alpha} - c_2L(2\beta)\,\beta^{1-\alpha}\right.$$
$$\left.+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2-1}L_1(\beta)\right)\right]$$
$$= \frac{4v-v^2}{4} + \left\{\frac{c_2(2-v)^2}{2\mu_1}\,\left[2^{1-\alpha}\,L(2\beta) - (2-v)^{1-\alpha}\,L(2\beta-\beta v)\right]\right\}\beta^{1-\alpha}$$
$$+O\left(\beta^{(\alpha-2)^2-1}L_1(\beta)\right)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.3.1.2 Teorem 1.7.1.1 ve Teorem 2.3.1.1'in şartları sağlansın. Bu durumda $Y(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu $Q_Y(v),\ \beta \to \infty$ durumunda

$$R(v) = \frac{4v - v^2}{4}$$

fonksiyonuna zayıf anlamda yakınsaktır. Burada $v \in [0,2)$ dir.

İspat: $L(x)$ fonksiyonunun $\{\eta_i\},\ i \geq 1$ rasgele değişkenleri ile bağlantılı olan yavaş değişen fonksiyon olduğu bilinmektedir $v \in [0,2)$ için $g(\beta) = 2\beta$ ve $h(\beta) = (2 - v)\,\beta$ olarak tanımlanırsa, $lim_{\beta\to\infty}\, g(\beta) = \infty$ ve $lim_{\beta\to\infty}\, h(\beta) = \infty$ olduğu aşikardır. Dolayısı ile Teorem 1.3.2.2.4 (iii) kullanılarak $L\big(g(\beta)\big) = L(2\beta)$ ve $L\big(h(\beta)\big) = L(2\beta - \beta v)$ fonksiyonlarının sıfır indeksi ile düzenli değişen yani, yavaş değişen fonksiyonlar olduğu sonucuna ulaşılır. Ayrıca $1 < \alpha < 2$ için $1 - \alpha < 0$ olduğundan Teorem 1.3.2.2.3 (iv) kullanılarak

$$\lim_{\beta\to\infty} L(2\beta)\,\beta^{1-\alpha} = 0,\ \ \lim_{\beta\to\infty} L(2\beta - \beta v)\,\beta^{1-\alpha} = 0$$

elde edilir.

Dolayısı ile;

$$\left\{\frac{c_2(2-v)^2}{2\mu_1}\ \left[2^{1-\alpha}\, L(2\beta) - (2-v)^{1-\alpha}\, L(2\beta - \beta v)\right]\right\}\beta^{1-\alpha} \to 0,\ \ \beta \to \infty$$

dır.

Diğer taraftan, Yardımcı Teorem 2.3.1.1'de $L_1(t) = \big(L(t)\big)^2 L\big(t^{2-\alpha}L(t)\big)$ fonksiyonunun yavaş değişen fonksiyon olduğunu gösterilmiştir. Ayrıca $1 < \alpha < 2$ $(\alpha - 2)^2 - 1 < 0$ olduğundan, Teorem 1.3.2.2.3 (iv) kullanılarak $\beta^{(\alpha-2)^2-1}L_1(\beta) \to 0$ olacağından istenen sonuç elde edilir.

2.3.2. Sürecin Ergodik Dağılımının n. Mertebeden Momentleri İçin Asimptotik Açılımlar

Bu kısımda $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere $\{\eta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin genel durumda $\bar{F}(x) = P\{\eta_1 \geq x\} = x^{-\alpha}\, L(x),\ \ 1 < \alpha < 2$ kuyruk dağılımlı düzenli değişen dağılıma sahip olduğu varsayılacaktır. Ayrıca müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\},\ n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $[s, S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olduğu varsayılacaktır. Kısım 2.1.2'de verilmiş olan (42) formülü kullanılarak sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun n. mertebeden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılacaktır.

$\tilde{X}(t) = X(t) - s$, ayrıca $\tilde{p}(x)$, $[0,2\beta)$ aralığında düzgün dağılıma sahip olan $\tilde{\zeta}_n = \zeta_n - s$ rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere;

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n}{E\left(U(\tilde{\zeta}_1)\right)} \int_0^{2\beta} v^{n-1} \left[\int_v^{2\beta} U(x-v)\tilde{p}\,(x)dx\right] dv$$

$$= \left\{ n \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta} v^{n-1} \left[\int_0^{2\beta - v} U(t)\, dt\right] dv \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta} U(t) dt \right\}^{-1}$$

kullanılarak genel durum için asimptotik sonuçlara ulaşılacaktır.

Yardımcı Teorem 2.3.2.1 Teorem 1.7.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.3.1. ve Sonuç 2.3.1.1'in şartları sağlansın.

$$J_1(v) = \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta - v} U(t)\ dt$$

biçiminde tanımlanırsa $\beta \to \infty$ durumunda $J_1(v)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$J_1(v) = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{(2\beta - v)^2}{2} + \frac{1}{\mu_1^2} c_2\,(2\beta - v)^{3-\alpha} L(2\beta - v)\right]$$
$$+ \frac{1}{2\beta} O\left((2\beta - v)^{(\alpha-2)^2+1} L_1(2\beta - v)\right).$$

İspat: Öncelikle Sonuç 2.3.1.1'den $\beta \to \infty$ için,

$$J(v) \equiv \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta - \beta v} U(t)\ dt$$
$$= \frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{(2\beta - \beta v)^2}{2} + \frac{1}{\mu_1^2}(2 - v)^{3-\alpha} c_2\, \beta^{3-\alpha} L(2\beta - \beta v)\right]$$
$$+ O\left(\beta^{(\alpha-2)^2} L_1(\beta)\right)$$

dir.

Buradan

$$J_1(v) \equiv \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta - v} U(t)\ dt$$
$$= \frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{(2\beta - v)^2}{2} + \frac{1}{\mu_1^2} c_2\,(2\beta - v)^{3-\alpha} L(2\beta - v)\right]$$
$$+ \frac{1}{2\beta} O\left((2\beta - v)^{(\alpha-2)^2+1} L_1(2\beta - v)\right).$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.2.1 $J_1(\upsilon)$, Teorem 2.3.2.1'deki gibi tanımlansın. Bu durumda $\upsilon \to 0$ için

$$J_1(0) = \frac{1}{2\beta} \int_0^{2\beta} U(t)\ dt$$

tanımlanırsa, $J_1(0)$ aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$J_1(0) = \frac{1}{2\beta}\left[\frac{1}{\mu_1}\frac{(2\beta)^2}{2} + \frac{1}{\mu_1^2} c_2\,(2\beta)^{3-\alpha} L(2\beta)\right] + O\left((2\beta)^{(\alpha-2)^2} L_1(2\beta)\right) \tag{49}$$

Yardımcı Teorem 2.3.2.2 $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir sonlu bir fonksiyon olsun.

$$O\left((2\beta-\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1} L_1(2\beta-\upsilon)\right) = h(\beta)\,(2\beta-\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1} L_1(2\beta-\upsilon)$$

yazılabilir. Bu durumda $\beta \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik ilişki doğrudur:

$$\int_0^{2\beta} \upsilon^{n-1}(2\beta-\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1} h(\beta)\, L_1(2\beta-\upsilon)\, d\upsilon = O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2+1}\, L_1(\beta)\right).$$

İspat: $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ölçülebilir sonlu bir fonksiyon olarak tanımlandığından

$$\left|\int_0^{2\beta} \upsilon^{n-1}(2\beta-\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1} h(\beta)\, L_1(2\beta-\upsilon)\, d\upsilon\right|$$

$$\leq \int_0^{2\beta} \upsilon^{n-1}(2\beta-\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1} |h(\beta)|\, L_1(2\beta-\upsilon)\, d\upsilon$$

$$\leq K \int_0^{2\beta} \upsilon^{n-1}(2\beta-\upsilon)^{(\alpha-2)^2+1}\, L_1(2\beta-\upsilon)\, d\upsilon$$

$$= K \int_0^1 t^{n-1}(2\beta)^n\, (2\beta-2\beta t)^{(\alpha-2)^2+1} L_1(2\beta-2\beta t)\, dt$$

$$= K \int_0^1 t^{n-1}\, (2\beta)^{n+(\alpha-2)^2+1} (1-t)^{(\alpha-2)^2+1} L_1(2\beta-2\beta t)\, dt$$

$$\sim K\, (2\beta)^{n+(\alpha-2)^2+1}\, L_1(2\beta-2\beta t) \int_0^1 t^{n-1}\, (1-t)^{(\alpha-2)^2+1}\, dt$$

$$= K\, (2\beta)^{n+(\alpha-2)^2+1}\, L_1(2\beta-2\beta t)\, B(n, (\alpha-2)^2+2)$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 2.3.2.3 Teorem 1.7.1.1 ve Yardımcı Teorem 2.3.1.1'in şartları sağlansın. Ayrıca

$$J_n(\beta) \equiv \frac{1}{2\beta}\int_0^{2\beta} v^{n-1}\left[\int_0^{2\beta-v} U(t)\,dt\right]dv \tag{50}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (50) ile tanımlı $J_n(\beta)$, $\beta \to \infty$ için aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{n\,(n+1)(n+2)}\,(2\beta)^{n+2} + \frac{1}{\mu_1^2}L(2\beta)B(n,4-\alpha)\,c_2\,(2\beta)^{n+3-\alpha}\right.$$
$$\left. + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2+1}\,L_1(\beta)\right)\right\}.$$

Burada

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\,;\ Re(x) > 0,\ Re(y) > 0,\ v \in [0,2),$$
$$L_1(\beta) = \big(L(\beta)\big)^2\,L\big(\beta^{2-\alpha}L(\beta)\big),\ c_2 = \frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)},\ \beta \equiv \frac{S-s}{2}$$

dir.

İspat: Öncelikle:

$$\int_0^{2\beta}\frac{1}{\mu_1}v^{n-1}(2\beta-v)^2\,dv = \frac{1}{2\mu_1}\int_0^{2\beta}(4v^{n-1}\beta^2 - 4v^n\beta + v^{n+1})\,dv$$
$$= \frac{1}{\mu_1}\left[\frac{1}{n\,(n+1)(n+2)}\,(2\beta)^{n+2}\right]$$

elde edilir. Diğer taraftan:

$$\frac{1}{\mu_1^2}c_2\int_0^{2\beta} v^{n-1}\,(2\beta-v)^{3-\alpha}\,L(2\beta-v)\,dv$$

$$= \frac{1}{\mu_1^2}c_2(2\beta)^{n+3-\alpha}\int_0^1 t^{n-1}\,(1-t)^{3-\alpha}L(2\beta-2\beta t)\,dt$$

$$\sim \frac{1}{\mu_1^2}c_2\,(2\beta)^{n+3-\alpha}\,L(2\beta)\int_0^1 (1-u)^{n-1}\,u^{3-\alpha}\,du$$

$$= \frac{1}{\mu_1^2}c_2\,(2\beta)^{n+3-\alpha}\,L(2\beta)\,B(n,4-\alpha).$$

biçimindedir. Dolayısıyla:

$$\frac{1}{\mu_1^2} c_2 \int_0^{2\beta} v^{n-1} (2\beta - v)^{3-\alpha} L(2\beta - v)\, dv$$

$$= \frac{1}{\mu_1^2} c_2 (2\beta)^{n+3-\alpha} L(2\beta)\, B(n, 4-\alpha) + O\big((2\beta)^{n+3-\alpha} L(2\beta)\big)$$

olur. Bu durumda Yardımcı Teorem 2.3.2.1 kullanılarak

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{n\,(n+1)(n+2)}\,(2\beta)^{n+2} + \frac{1}{\mu_1^2} L(2\beta) B(n,4-\alpha)\, c_2\,(2\beta)^{n+3-\alpha}\right.$$
$$\left. + O\big(\beta^{n+3-\alpha} L(\beta)\big) + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2+1} L_1(\beta)\right)\right\}$$

elde edilir.

$1 < \alpha < 2$ için sonsuz büyük "O" terimlerinin içindeki değerler

$$\min\{(n+3-\alpha), (n+(\alpha-2)^2+1)\} = (n+(\alpha-2)^2+1)$$

biçiminde değerlendirilir. Buradan

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\beta}\left\{\frac{1}{\mu_1}\frac{1}{n\,(n+1)(n+2)}\,(2\beta)^{n+2} + \frac{1}{\mu_1^2} L(2\beta) B(n,4-\alpha)\, c_2\,(2\beta)^{n+3-\alpha}\right.$$
$$\left. + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2+1} L_1(\beta)\right)\right\}$$

elde edilmiş olur.

Not: Burada

$$\int_0^1 u^{3-\alpha} (1-u)^{n-1} u^{-\eta}\, du = B(n, 4-\alpha-\eta)$$

olduğundan

$$\int_0^1 u^{3-\alpha} (1-u)^{n-1} u^{-\eta}\, du$$

İntegralinin sonlu olduğu görülür. Bu durumda; Teorem 1.3.2.2.7 şartları sağlanmaktadır.

$$\int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{3-\alpha} L(2\beta u)\, du \sim L(2\beta) \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^{3-\alpha}\, du$$

sonucuna Teorem 1.3.2.2.7 kullanılarak ulaşılmıştır.

Teorem 2.3.2.1 Teorem 1.7.1.1 ve Teorem 2.3.1.1 'in şartları sağlansın. Bu durumda $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının $n \geq 1$ olmak üzere $n.$ dereceden momentlerinin $\beta \equiv \frac{S-s}{2} \to \infty$ için iki terimli asimptotik açılımı aşağıdaki gibidir:

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\beta^n + \left\{\frac{c_3}{\mu_1}\left[\frac{\big(n\,(n+1)(n+2)B(n,4-\alpha)\big)-2}{(n+1)(n+2)}\right]L(2\beta)\right\}\beta^{n+1-\alpha} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2-1}\,L_1(\beta)\right).$$

Burada;

$$n \geq 1,\ \ 1 < \alpha < 2,\ \ c_2 = \frac{1}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)},$$

$$c_3 = 2^{n+1-\alpha}c_2,\ \ \mu_1 = E(\eta_1),\ \ L_1(x) = \big(L(x)\big)^2\,L\big(x^{2-\alpha}L(x)\big)$$

dır.

İspat: $B(x,y)$ beta fonksiyonu olmak üzere;

$$c_4 = \frac{B(n,4-\alpha)}{(\alpha-1)(2-\alpha)(3-\alpha)},\ \ c_5 = c_4\,2^{n+1-\alpha}$$

olarak tanımlansın.

Bu durumda $\beta \to \infty$ için;

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}^n) &= \frac{n\,J_n(v)}{J_1(0)} \\ &= \left[\frac{(2\beta)^{n+2}}{(n+1)(n+2)\mu_1} + \frac{n\,c_4\,L(2\beta)\,(2\beta)^{n+3-\alpha}}{\mu_1^2} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2+1}L_1(\beta)\right)\right] \\ &\quad\cdot\left[\frac{(2\beta)^{n+2}}{2\mu_1} + \frac{c_2 L(2\beta)\,(2\beta)^{3-\alpha}}{\mu_1^2} + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2+1}L_1(\beta)\right)\right]^{-1} \\ &= \left[\frac{(2)^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\beta^n + \frac{n\,c_5\,L(2\beta)}{\mu_1}\beta^{n+1-\alpha} + O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2+1}L_1(\beta)\right)\right] \\ &\quad\cdot\left[1 + \frac{2^{2-\alpha}c_2\,L(2\beta)}{\mu_1}\beta^{1-\alpha} + O\left(\beta^{(\alpha-2)^2-1}L_1(\beta)\right)\right]^{-1} \\ &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\beta^n \\ &\quad+ \left\{\frac{c_3}{\mu_1}\left[\frac{\big(n\,(n+1)(n+2)B(n,4-\alpha)\big)-2}{(n+1)(n+2)}\right]L(2\beta)\right\}\beta^{n+1-\alpha} \\ &\quad+ O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2-1}\,L_1(\beta)\right). \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{2^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\beta^n$$
$$+\left\{\frac{c_3}{\mu_1}\left[\frac{\left(n\,(n+1)(n+2)B(n,4-\alpha)\right)-2}{(n+1)(n+2)}\right]L(2\beta)\right\}\beta^{n+1-\alpha}$$
$$+O\left(\beta^{n+(\alpha-2)^2-1}\,L_1(\beta)\right).$$

sonucu bu kısımda elde edilmiş en önemli sonuçtur. Elde edilen bu açılım, talep miktarları sonsuz varyanslı düzenli değişen herhangi bir dağılıma sahip (s,S) tipli envanter modelin ergodik dağılımının n. mertebeden momentlerine ait asimptotik açılımdır.

3. BULGULAR

Bu çalışmada daha önce pek çok farklı dağılım ile ele alınmış ve karakteristikleri incelenmiş olan (s,S) tipli stok kontrol modelleri talep miktarları ağır kuyruklu bir dağılıma sahipken incelenmiş, böylece ağır kuyruklu talep miktarlarının (s,S) tipli envanter modeller üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu kapsamda, talep miktarlarını ifade eden rasgele değişkenler ağır kuyruklu dağılımların önemli iki altsınıfı olan alt üstel ve düzenli değişen kuyruklu dağılımlara sahipken sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Burada ele alınan envanter model, ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan yarı Markov bir süreç kullanılarak modellenmiştir. Daha önce bu konuda yapılmış çalışmalarda ([5], [6], [13], [52], [53], [54]) (s,S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin ergodikliği ispat edilmiş, ayrıca ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için formüller talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aracılığı ile verilmiştir. Bu çalışmada ise literatürdeki mevcut çalışmalara ek olarak aşağıdaki bulgulara erişilmiştir:

Literatürde ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının asimptotik ifadesi için standart bir formül mevcut değildir. Bu açılımların kuyruk ağırlığı göz önünde bulundurularak ayrı ayrı incelenmesi gerekmektedir. Bu bağlamda öncelikle çalışmada ele alınan alt sınıflardan ağır kuyruklu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için asimptotik formüller için ayrıntılı bir literatür çalışması yapılmıştır.

Öncelikle alt üstel dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımı tespit edilmiş, bu açılım kullanılarak alt üstel Weibull dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımına ulaşılmıştır. Talep miktarını gösteren rasgele değişkenler $0 < \alpha < 1$ için $F(x) = P\{\eta_1 \leq x\} = 1 - \exp\{-x^{\alpha}\}$ dağılım fonksiyonu ile alt üstel Weibull dağılımına ve müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenler $[s, S)$ aralığında düzgün dağılıma sahip iken (s, S) tipli envanter modeller incelenmiştir. Bu şartlar altında modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için iki terimli asimptotik açılımlara ulaşılmış zayıf yakınsaklık teoremi ispat edilerek ergodik dağılım fonksiyonunun limit dağılımına ulaşılmıştır. Ayrıca ergodik dağılım fonksiyonunun $n.$ mertebeden momentleri için iki terimli asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Son olarak ergodik dağılım fonksiyonunun ilk iki momenti için asimptotik açılımlar Monte Carlo simülasyon yöntemi ile test edilmiştir. Elde edilen asimptotik sonuçların $0 < \alpha < 1$ aralığında α'nın farklı değerleri için simülasyon sonuçlarına yeterince yakın olduğu tespit edilmiştir.

İkinci olarak sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımı tespit edilmiş, bu açılım kullanılarak düzenli değişen Pareto dağılımına sahip rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımına ulaşılmıştır. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler $F(x) = P\{\eta_1 \leq x\} = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^{\alpha}$, $1 < \alpha < 2$ dağılım fonksiyonu ile düzenli değişen Pareto dağılımına ve müdehaleyi ifade eden rasgele değişkenler $[s, S]$ aralığında düzgün dağılıma sahip iken (s, S) tipli envanter modeller incelenmiştir. Bu modeli ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun $n.$ dereceden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Ergodik dağılım fonksiyonu için elde edilen asimptotik açılım yardımı ile zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ayrıca bu durum için yakınsama hızı teoremi verilmiştir. Ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için elde edilen asimptotik sonuçlar Monte Carlo simülasyon yöntemi ile test edilmiştir. Elde edilen asimptotik sonuçların $1 < \alpha < 2$ aralığında α'nın farklı değerleri için simülasyon sonuçlarına yeterince yakın olduğu tespit edilmiştir.

Bu çalışmanın önemli sonuçlarından biri özel olarak düzenli değişen Pareto dağılımı ile incelenmiş olan sürecin daha sonra genel durumda sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılıma sahip talep miktarları ile incelenebilmiş olmasıdır. Bu kapsamda; (s,S) tipli envanter modeli ifade eden süreç $L(x)$ yavaş değişen bir fonksiyon olmak üzere talep miktarını ifade eden rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonlarının kuyruk kısmı genel durumda $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, $1 < \alpha < 2$ ile düzenli değişen dağılıma sahipken ele alınmıştır. Bu özel durum için düzenli değişen fonksiyonların çeşitli asimptotik özellikleri ve uç değer teorisi kullanılarak ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır.

4. İRDELEME

Günümüzde sıra dışı olarak adlandırılan veriler ile, tıptan inşaat mühendisliğine, meteorolojiden finansal risk yönetimine kadar pek çok alanda karşılaşıldığı bilinmektedir. Bu tür sıra dışı veriler, ağır kuyruklu dağılımlar olarak adlandırılan dağılımlar ile modellenmektedirler. Aykırı değerler üretme eğiliminde olan ağır kuyruklu dağılımların ve bu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının teorik olarak araştırılması literatürde önemli bir çalışma alanı haline gelmiştir. Fakat bu dağılımların özellikle yenileme teorisinin önemli bir uygulama alanı olan envanter modellere uygulanması ile ilgili çok az çalışma mevcuttur. Bu tez çalışmasının amacı ağır kuyruklu dağılımların literatürde çok kullanılan stok kontrol modellerinden biri olan (s, S) tipli stok kontrol modelleri üzerindeki etkisini araştırmaktır.

Bu tezin çalışma konusu olan (s, S) tipli yarı Markov modeller, daha önce farklı türde hafif kuyruklu dağılımlar kullanılarak incelenmiş olsa da bu süreçlerin ağır kuyruklu dağılımlar kullanılarak incelenmesi yönünde literatürde önemli bir boşluk mevcuttur. Çalışmanın amacı literatürdeki bu boşluğu doldurmaktır. Bu kapsamda öncelikle ağır kuyruklu dağılımlar ve altsınıfları bağlı oldukları koşullar ile birlikte ele alınmıştır. Daha önceki çalışmalarda ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan yarı Markov bir süreç ile modellenmiş olan (s, S) tipli stok kontrol modeli asimptotik yöntemlerle incelenmiştir. Özel olarak talep miktarları için ağır kuyruklu dağılımların uygulama alanı en geniş alt sınıflarından, alt üstel dağılımlar ve sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılımlar kullanılmıştır. Ağır kuyruklu dağılımların belirtilen alt sınıflarından temsilci dağılımlar seçilip talep miktarını ifade eden rasgele değişkenlerin bu dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır. Sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Elde edilen asimptotik formüller, zayıf yakınsama, yakınsama hızı teoremleri ve ergodik momentler için yapılan simülasyon çalışmaları ile kuyruk ağırlığının bu modeller üzerindeki etkisi araştırılmıştır.

Bu çalışmada ele alınan sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için kullanılan formüller talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu aracılığı ile verilmiştir. Bu konuda şimdiye kadar yapılan bütün çalışmalarda Feller [33] tarafından önerilen asimptotik açılım kullanılmıştır. Feller [33] tarafından önerilen açılım hafif kuyruklu dağılımlar söz konusu olduğunda kullanışlı ve standart bir açılımdır. Fakat ağır kuyruklu dağılımlar için bu durum farklıdır. Ağır kuyruklu dağılımlar kuyruk özelliği başta olmak üzere belirli özelliklerine göre farklı alt gruplara ayrılmaktadır, her birinin kuyruk davranışları farklıdır ve farklı mertebeden sonlu momentleri mevcuttur. Yani genel olarak ağır kuyruklu dağılıma sahip bir rastgele değişken tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için standart bir açılım mevcut değildir. Dolayısı ile burada önemli sorulardan biri her bir alt sınıfa ait rasgele değişken tarafından üretilen yenileme fonksiyonu için farklı bir asimptotik açılım tespit edilebilir mi ve bu çalışmada ele alınan probleme uygulanabilir mi sorusudur. Çalışmada öncelikle bu soru için ayrıntılı bir literatür araştırması yapılmıştır. Ağır kuyruklu dağılımların farklı alt sınıfları tarafından üretilen yenileme fonksiyonları için farklı asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Bu çalışmayı literatürdeki diğer çalışmalardan ayıran önemli özelliklerden biri kullanılan her bir altsınıftan dağılım için farklı bir asimptotik açılım kullanılmış olmasıdır. Bu modellerin ağır kuyruklu dağılımlar kullanılarak araştırılmasının yanı sıra çalışmanın diğer bir önemli boyutu, (s, S) tipli envanter modellerin ilk defa talep miktarı için sonsuz varyanslı bir dağılım kullanılarak incelenmiş olmasıdır.

Bu çalışma, envanter modellerin ve özel olarak yarı Markov ödüllü yenileme süreçlerinin ağır kuyruklu talep miktarları ile incelenmesi konusunda bir başlangıç sayılabilir. İleriki çalışmalarda benzer yaklaşımlar kullanılarak, burada ele alınan süreç ve benzer süreçler farklı alt sınıflardan ağır kuyruklu dağılımlar ile incelenebilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada yarı Markov bir ödüllü yenileme süreci ağır kuyruklu dağılımların iki önemli alt sınıfı olan alt üstel dağılımlar ve sonsuz varyanslı düzenli değişen dağılımlar ile incelenmiştir. Çalışmalar sonucunda aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Ağır kuyruklu dağılımlar, alt üstel dağılımlar ve düzenli değişen dağılımlar ile ilgili ayrıntılı bir literatür çalışması verilmiş, bu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonlarının asimptotik açılımları elde edilmiştir.
2. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler, sonlu varyanslı alt üstel Weibull dağılımına sahipken (s, S) tipli stok kontrol modelini ifade eden sürecin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılıma ulaşılmıştır. Ergodik dağılım fonksiyonu için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve limit dağılımına ulaşılmıştır.
3. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler, sonlu varyanslı alt üstel Weibull dağılımına sahipken sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun n. dereceden momentleri için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Elde edilen asimptotik açılımlar Monte Carlo simülasyon yöntemi kullanılarak test edilmiştir.
4. Talep miktarları sonsuz varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahipken sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Elde edilen asimptotik açılımlar için zayıf yakınsama teoremi ispat edilmiş ve yakınsama hızı elde edilmiştir.
5. Talep miktarları sonsuz varyanslı düzenli değişen Pareto dağılımına sahipken sürecin ergodik dağılım fonksiyonunun n. dereceden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Elde edilen asimptotik açılımlar Monte Carlo simülasyon yöntemi ile test edilmişitr.
6. Talep miktarları genel durumda sonsuz varyanslı düzenli değişen herhangi bir dağılıma sahipken sürecin ergodik dağılım fonksiyonunu ve ergodik dağılım fonksiyonunun n. dereceden momentleri için asimptotik açılımlara ulaşılmıştır. Asimptotik açılımlar ile simülasyon sonuçlarının tutarlılığı Monte Carlo simülasyon yöntemi ile test edilmiştir.

6. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının (s,S) tipli envanter modellerin ağır kuyruklu dağılımlar ile incelenmesi konusunda literatürdeki bir eksikliği doldurabileceği umulmaktadır. Ayrıca yapılmış olan bu çalışma aşağıdaki yönlerden geliştirilebilir:

1. Müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenin üçgensel ya da simetrik üçgensel dağılıma sahip olması durumunda benzeri problemin ağır kuyruklu talep miktarları ile incelenmesi.
2. Burada ele alınan süreç, talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler düzenli değişen sonsuz varyanslı ve alt üstel dağılıma sahipken incelenmiştir. Benzeri süreçlerin ağır kuyruklu dağılımların farklı altsınıflarından talep miktarları ile incelenmesi.
3. Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenler ağır kuyruklu iken bu çalışmada ele alınan sürecin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılım fonksiyonunun momentleri için analitik çözümlerin bulunması.
4. Bu çalışmadaki asimptotik açılımlar kullanılarak rasgele yürüyüş süreçlerinin asimptotik yöntemlerle incelenmesi.

7. KAYNAKLAR

1. Abramowitz, M. ve Stagun, I., Handbook of Special Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, Washington D.C, 1964.

2. Adler, R., J., Feldman, R., E. ve Taqqu, M., S., A Practical Guide to Heavy Tails, Birkhauser, Boston, 1998.

3. Aliyev, R., Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon, 2010.

4. Aliyev, R. ve Khaniyev, T., On the Moments of a Semi-Markovian Random Walk with Gaussian Distribution of Summands, Communications in Statistics: Theory and Methods, 43, 1 (2014) 90 – 104.

5. Aliyev, R., Ardıç, Ö. ve Khaniyev, T., Asymptotic Approach for a Renewal-Reward Process with a General Interference of Chance, Communication in Statistics: Theory and Methods, 45, 14 (2016) 4237-4248.

6. Aliyev, R., On a Stochastic Process with a Heavy-Tailed Distributed Component Describing Inventory Model Type of (s,S), Communications in Statistics: Theory and Methods, 46, 5 (2016) 2571-2579.

7. Alsmayer, G., Renewal, Recurrence and Regeneration, Springer, New York, 2010.

8. Anderson, K., K. ve Athreya, K., B., A Renewal Theorem in the Infinite Mean Case, Ann. Prob., 88, 15 (1987) 388-393.

9. Asmussen, S., Ruin Probabilities, Advanced Series on Statistical Science and Applied Probability, World Scientific Publishing, Singapore, 2000.

10. Bartholomew, D., J., Stochastic Models for Social Processes, Second Edition, Wiley, Chichester, 1973.

11. Bartholomew, D., J., Renewal Theory Models in Manpower Planning, Symp. Proc. Ser., 8 (1976) 57-73.

12. Bartholomew, D., J., ve Forbes, A., F., Statistical Techniques for Man-Power Planning, Wiley, Chichester, UK, 1979.

13. Bekar, N., O., Aliyev, R. ve Khaniyev, T., Asymptotic Expansions for a Renewal-Reward Process with Weibull Distributed Interference of Chance, Contemporary Analysis and Applied Mathematics, 2, 1 (2013) 200-211.

14. Bimpikis, K. ve Markasis, M., G., Inventory Pooling under Heavy Tailed Demand, Forthcoming in Management Science, 62, 6 (2015) 1800-1813.

15. Bingham, N., H., Goldie, C., M. ve Teugels, J., L., Encyclopedia of Mathematics and its Applications-Regular Variation, Cambridge University Press, New-York, 1987.

16. Blackwell, D., A., Renewal Theorem, Duke Math. J., 15 (1948) 145-150.

17. Blischke, W., R. ve Scheuer, E., M., Applications of Renewal Theory in Analysis of the Free-Replacement Warranty, Naval Research Logistics Quarterly, 28, 2 (1981) 193–205.

18. Borovkov, A., A., Stochastic Processes in Queuing Theory, Springer, New York, 1976.

19. Borwein, J., M., Chan, O., Y., Uniform Bounds for the Complementary Incomplete Gamma Function, Mathematical Inequalities and Applications 12, 1 (2009) 115-121.

20. Brown, M. ve Solomon, H., A Second-Order Approximation for the Variance of a Renewal-Reward Process, Stochastic Processes and Applications, 3 (1975) 301- 314.

21. Buldygin, V., V., Pavlenkov, V., V., A Generalization of Karamata's Theorem on the Asymptotic Behavior of Integrals. Theory of Probability and Mathematical Statistics, 81 (2010) 15-26.

22. Chevalier, J. ve Austan, G., Measuring Prices and Price Competition Online: amazon. com and barnesandnoble. com., Quantitative Marketing and Economics 2, 1 (2003) 203-222.

23. Chistyakov, V., P., A Theorem on Sums of Independent Positive Random Variables and its Applications to Branching Random Processes, Theory Probab. Appl., 9 (1964) 640-648.

24. Chun, S., U., Zhishui, H., U., Yu, C. ve Hanying, L., A Wide Class of Heavy Tailed Distributions and its Applications, Front Math China, 2, 2 (2007) 257-286.

25. Conrad, K., Asymptotic Growth. www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/analysis/asymp.pdf 24 Ocak 2017.

26. Cooke, R., M. ve Nieboer, D., Heavy Tailed Distributions: Data Diagnostic and New Developments, Resources for the Future Discussion Paper, 11-19 (2011).

27. Cox, D., R., Renewal Theory, Methuen, London, UK, 1962.

28. Csenki, A., Asymptotic for Renewal-Reward Processes with Retrospective Reward Structure, Oper. Res. Lett, 26 (2000) 201–209.

29. Embrechts, P. ve Omey, E., A Property of Longtailed Distributions, Journal of Applied Probability, 21 (1984) 80-87.

30. Embrechts, P., Klüppelberg, C. ve Mikosch, T., Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Applications of Mathematics Stochastic Modelling and Applied Probability 33 , Springer, New York, 2001.

31. Erickson, K., B., Strong Renewal Theorems with Infinite Mean, Trans. Am. Math, Soc., 151 (1970) 263-291.

32. Feller, W., Fluctiation Theory of Recurrent Events, Trans. Am. Math. Soc., 67 (1949) 98-119.

33. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and Its Applications II, Second Edition, Wiley, New York, 1971.

34. Foss, S., Korshunov, D. ve Zachary, S., An Introduction to Heavy Tailed and Subexponential Distributions, Springer Series in Operaions Research and Financial Engineering, New York, 2011

35. Gaffeo, E., Antonello, E., S. ve Laura, V., Demand Distribution Dynamics in Creative Industries: The Market for Books in Italy, Information Economics and Policy, 20, 3 (2008) 257-268.

36. Garsia, A. ve Lamperti, J., A Discrete Renewal Theorem with Infinite Mean, Comment. Math. Helv., 37 (1962) 221-234.

37. Geluk, J., L., A Renewal Theorem in the Finite-Mean Case, Proceedings of the American Mathematical Society, 125, 11 (1992) 3407-3413.

38. Geluk, J., L. ve Haan, L., D., Stable Probability Distributions and Their Domains of Attraction: a Direct Approach. Probability and Mtahematical Statistics, 20, 1 (2000) 169-188.

39. Geluk, J., L. ve Frenk, J., B., G., Renewal Theory for Random Variables with a Heavy Tailed Distribution and Finite Variance, Statistics and Probability Letters, 81 (2011) 77-82.

40. Gikhman, I., I. ve Skorohod, A., V., Theory of Stochastic Processes II, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1975.

41. Goldie, C., M. ve Klüppelberg, C., Subexponential Distributions, A Practical Guide to Heavy Tails: Statistical Techniques and Applications, (1998) 435-460.

42. Greene, D., H. ve Knuth, D., E., Mathematics for the Analysis of Algorithms, Third Edition, Modern Birkhauser Classics, Berlin, 1990.

43. Hildebrand, A., J., Asymptotic Analysis Lecture Notes. www.math.illinois.edu/~ajh/595ama/ama-ch1.pdf 12 Kasım 2016.

44. Ibragımov, I., A. ve Linnik, Y., V., Independent and Stationary Sequences of Random Variables, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1971.

45. Jayakrishnan, U., N., Scheduling for Heavy-Tailed and Light Tailed Workloads in Queueing Systems, Ph.D., California Institute of Technology, Pasadena California, 2012.

46. Jıa, M., Heavy Tailed Phenomena and Tail Index Inference, Ph.D., University of Trento, Trento, 2014.

47. Karlin, S. ve Taylor, H., M., A First Course in Stochastic Processes, Academic Press, New York, 1975.

48. Kesemen, T., On the Semi-Markovian Random Walk with Delay and Weibull Distributed Interference of Chance, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 42, 3 (2013) 299-3007.

49. Kesemen, T., Aliyev, R. ve Khaniyev, T., Limit Distribution for Semi-Markovian Random Walk with Weibull Distributed Interference of Chance, Journal of Inequalities and Applications, 1 (2013) 134.

50. Keyfitz, N. An Introduction to Mathematic for Population, Addison-Wesley, Reading, M.A., 1968.

51. Khaniyev, T., A., Mammadova, Z., On the Stationary Characteritics of the Extended Model of Type (s,S) with Gaussian Distribution of Summands, Journal of Statistical Computation and Simulation, 76, 10 (2006) 861-874.

52. Khaniyev, T., A. ve Atalay, K., D., On the Weak Convergence of the Ergodic Distribution for an Inventory Model of Type (s,S), Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 9, 4 (2010) 599-611.

53. Khaniyev, T. ve Aksop, C., Asymptotic Results for an Inventory Model of Type (s,S) with a Generalized Beta Interference of Chance, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 2, 1 (2011) 223 – 236.

54. Khaniyev, T., A., Kokangul, A. ve Aliyev, R., T., An Asymptotic Approach for a Semi-Markovian Inventory Model of Type (s,S), Applied Stochastic Models in Business and Industry, 29, 5 (2013) 439 – 453.

55. Khaniyev, T., Türksen, B., Gökpınar, F. ve Gever, B., Ergodic Distribution for a Fuzzy Inventory Model of Type (s,S) with Gamma Distributed Demands, Expert Systems with Applications, 40, 3 (2013) 958-963.

56. Klüppelberg, C., Subexponential Distributions and Integrated Tails, Journal of Applied Probability, 25, 1 (1988) 132-141.

57. Kolmogoroff, A., Über die Analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeit, Mathematische Annalen, 104, 1 (1931) 415- 458.

58. Levy, J., B. ve Taqqu, M., S., Renewal Reward Processes with Heavy-Tailed Interrenewal Times and Heavy-Tailed Rewards, Bernoulli, 6, 1 (2001) 23–44.

59. Lotov, V., I., On Some Boundary Crossing Problems for Gaussian Random Walks, The Annals of Probability, 24, 4 (1996) 2154-2171.

60. Mandelbrot, B., The Variation of Certain Speculative Prices, The Journal of Business, 36, 4 (1963) 394-419.

61. Mikosh, T., Regular Variation, Subexponentiality and Their Applications in Probability Theory, EURANDOM European Institute for Statistics, Probability, Operations Research and their Applications Report, 99, 17 (1999) 1-57.

62. Mohan, N., R., Teugels Renewal Theorem and Stable Laws, Annals of Probability, 54, 4 (1976) 863-868.

63. Nandayapa, L., R., A Review of Conditional Rare Event Simulation for Tail Probabilities of Heavy Tailed Random Variables, Bol. Soc. Mat. Mexicana, 19, 3 (2013) 159-181.

64. Nieboer, D., Heuristics of Heavy Tailed Distributions and the Obesity Index, Master of Science, Delft University of Technology, Delft, Netherlands, 2011.

65. Nolan, J., P., Stable Distributions: Models for Heavy Tailed Data, Birkhauser, Boston M.A., 2003.

66. Otiniano, C., E., G ve Gonçalves, C., R., Domain of Attraction of α-Stable Distributions Under Finit Mixture Models, Tend. Mat. Apl. Comput. TEMA, 11, 1 (2010) 69-76.

67. Önalan, Ö., Stokastik Süreçler, Avcıol Basım Yayın, İstanbul, 2010.

68. Resnick, S., I., Heavy-Tail Phenomena: Probabilistic and Statistical Madeling, Springer Series in Operations Research and Financial Engineering, New York, 2006.

69. Rogozin, B., A., The Distribution of the First Ladder Moment and Height and Fluctuation of a Random Walk, Theory Prob. Appl., 15 (1971) 575-595.

70. Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. ve Teugels, J., Stochastic Process for Insurance and Finance, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley&Sons, Chichester, 1999.

71. Ross, S., M., Stochastic Processes, John Wiley&Sons, New York, 1996.

72. Sahin, I., Regenerative Inventory Systems, Springer, New York, 1990.

73. Samorodnitsky, G., Long Range Dependence, Heavy Tails and Rare Events, www.maphysto.dk/publications/MPS-LN/2002/12.pdf 22 Mart 2014.

74. Seneta, E., Functions of Regular Variation, Lecture Notes in Mathematics 506, Springer, New York, 1976.

75. Shiryaev, A., Probability, Statistics, Random Processes I-II, Moscow State University Press, Moscow, 1973.

76. Sigman, K., Appendix: A Primer on Heavy-Tailed Distributions, Queueing Systems, 33, 1 (1999) 261–275.

77. Skohorod, A., V., Random Processes with Independent Increments, Nauka, Moskow, 1967.

78. Smith, W., L., Asymptotic Renewal Theorems, Proc. Roy. Soc. Sec. A: Mathematics, 64, 1 (1954) 9-48.

79. Smith, W., L., A Note on the Renewal Function when the Mean Renewal Lifetime is Infinite, J. Roy. Statist. Soc., Series B, 23 (1962) 230-237.

80. Taboga, M., StatLect: Lectures on Probability Theory and Mathematical Statistics, Create Space Independent Publishing Platform, 2012.

81. Teugels, J., L., Renewal Theorems when the First or the Second Moment is Infinite., Ann. Math. Stat 39, 37 (1968) 1210-1219.

82. Türksen, I., B., Khaniyev, T. ve Gökpınar, F., Investigation of Fuzzy Inventory Model of Type (s,S) with Nakagami Distributed Demands, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 29, 2 (2015) 531-538.

ÖZGEÇMİŞ

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK, 1982 yılında Ankara ilinde doğdu. İlk öğrenimini Ankara Güven İlkokulu'nda orta ve lise öğrenimini Ankara Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2002-2006 yılları arasında Kırıkkale Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimi yaptı ve lisans öğrenimini bölüm ikinciliği ile tamamladı.

2006-2007 yılları arasında dershanelerde matematik öğretmenliği yaptı ve Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalı'nda tezsiz yüksek lisans programına devam etti. 2007 yılında 1416 sayılı kanun kapsamında Milli Eğitim Bakanlığı tarafından Amerika Birleşik Devletleri'nde dil eğitimi ve yüksek lisans eğitimi almak üzere burs kazandı. 2007-2008 yılları arasında Boston University Center for English Language Orientation Programs' da dil eğitimini tamamladı. 2010 yılında University of Pittsburgh Matematik Bölümü'nde yüksek lisans öğrenimini tamamladı. 2011 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim dalına araştırma görevlisi olarak atandı ve aynı yıl KTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim dalında doktora programına başladı. Halen Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim dalındaki görevine araştırma görevlisi olarak devam etmektedir.

Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK evlidir. İyi düzeyde İngilizce ve Almanca bilmektedir.

Bektaş Kamışlık A., Kesemen, T., Khaniyev, T. "Inventory Model of Type (s,S) Under Heavy Tailed Demand with Infinite Variance" Brazilian Journal of Probability and Statistics (Revizyon Aşamasında).

Bektaş Kamışlık A., Kesemen, T., Khaniyev, T. "On the Moments for Ergodic Distribution of an Inventory Model of Type (s,S) with Regularly Varying Demands Having Infinite Variance", TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, (Kabul Edildi Basım Aşamasında).

Kesemen, T., **Bektaş Kamışlık, A.,** Küçük, Z., Şenol, E., "Inventory Model of Type (s,S) with Subexponential Weibull Distributed Demand", Journal of the Turkish Statistical Association, vol 9, no.3, pp.81-92, (2016).

Kesemen, T., Küçük, Z., Khaniyev, T., Yetim, F., **Bektaş Kamışlık, A**., “On the Application of Random Walk with Delay and Pareto Distributed Interference of Chance to an Insurance Model” Gazi University Journal of Science , vol 29, no.3, pp. 615-626, (2016).

Kesemen, T., Küçük, Z., Demir, Ş., **Bektaş Kamışlık, A.,** “Asymptotic Results for Boundary Functionals of Renewal Reward Process with Delay and Pareto Distributed Interference of Chance” Journal of Selçuk University Natural and Applied Science, vol.3, no.3, pp1-10, (2014).