BAĞIMLI YAŞAM SÜRELERİNİN MODELLENMESİ

MODELLING THE DEPENDENT LIFETIMES

EMİNE SELİN SARIDAŞ

Hacettepe Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim – Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin

AKTÜERYA BİLİMLERİ Anabilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

olarak hazırlanmıştır.

2012

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma jürimiz tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI 'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan	:….......................................
	Yrd. Doç. Dr. Şeref HOŞGÖR
Üye (Danışman)	:….......................................
	Doç. Dr. Meral SUCU
Üye	:…....................................
	Öğr. Gör. Dr. Erengül ÖZKÖK

ONAY

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca yukarıdaki jüri üyeleri tarafından ...../...../........ tarihinde uygun görülmüş ve Enstitü Yönetim Kurulunca ...../...../......... tarihinde kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Fatma SEVİN DÜZ

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

BAĞIMLI YAŞAM SÜRELERİNİN MODELLENMESİ

EMİNE SELİN SARIDAŞ

ÖZ

Bu çalışmada gelecek yaşam sürelerinin bağımlı olması durumu incelenmiştir. Çoklu hayat ürünlerinde genellikle, kişilerin gelecek yaşam sürelerinin karşılıklı bağımsız olduğu kabul edilmektedir. Bu yaklaşım işlem kolaylığı sağlaması nedeniyle tercih edilmektedir.

Çalışmada öncelikle gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılık çeşitleri ve bağımlılığının modellenmesinde kullanılabilecek modeller olan kopula modelleri, ortak etki modelleri ve Markov modelleri tanıtılmıştır. Literatürde yaşam sürelerinin bağımlılığının incelenmesinde geniş yer tutan kopula modelleri temel alınmış, birleşik ve marjinal yaşam olasılıkları kopula fonksiyonları ile ifade edilmiştir.

Bağımlı yaşamları içeren bir portföye ait parametre değerleri kullanılarak çeşitli hayat annüitelerine ilişkin net tek primler hesaplanmıştır. Ayrıca Fréchet sınırları kullanılarak gelecek yaşam süreleri arasında maksimum pozitif bağımlılık ve maksimum negatif bağımlılık olduğu kabul edildiği durumda, net tek primlerin değişebileceği alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Fréchet sınırları yardımıyla TRHA 2011 tablo değerleri kullanılarak, son yaşayan ve birleşik yaşam durumu hayat annüitelerinin net primlerinin değişebileceği aralık bulunmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bağımlılık, Fréchet sınırları, kopula fonksiyonları, Markov modeli, ortak etki modeli.

Danışman: Doç.Dr. Meral SUCU, Hacettepe Üniversitesi, Aktüerya Bilimleri Bölümü, Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı

MODELLING THE DEPENDENT LIFETIMES

EMİNE SELİN SARIDAŞ

ABSTRACT

In this thesis dependency of the future lifetimes is analysed. Generally, it is accepted that the future lifetimes of lives are mutually independent in multiple life insurance products. This assumption is preferred for the sake of convenience.

In this study, primarily, types of dependence between lives are discussed and the models which are available for modelling the dependency between lives such as copula models, common shock models and Markov models are introduced. Copula models which are broadly accepted for modelling dependent lifetimes in the actuarial literature are taken as fundamental models and marginal and joint survival probabilities are defined in terms of these copula functions.

Parameter values of a portfolio consisting of dependent lives are used to calculate the net single premiums of various types of multiple life annuities. Also in the cases of maximum positive dependecy or negative dependecy between the future lifetimes, lower and upper bounds of net single premiums are calculated. Using Fréchet boundaries and table values of TRHA 2011, lower and upper bounds of net single premiums of last survivor and joint life annuities are calculated.

Keywords: Dependency, Fréchet bounds, copula functions, Markov model, common shock model.

Advisor: Doç.Dr. Meral SUCU, Hacettepe University, Department of Actuarial Sciences, Actuarial Sciences Section

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında değerli katkı ve eleştirileri ile çalışmaya yön veren ve karşılaşılan güçlüklerin aşılmasında yol gösterici olan danışmanım Sayın Doç. Dr. Meral SUCU'ya,

Katkılarından dolayı Henk WOLTHUIS, Jaap SPREEUW, Ragnar NORBERG'e,

Çalışma süresince bana destek olan Marmara Üniversitesi Bankacılık ve Sigortacılık Yüksekokulu hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma,

Teşvik ve desteğini hiç esirgemeyen arkadaşım Refiye TEKİNER'e,

Her zaman yanımda olup bana güç veren sevgili aileme, en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

CU Fréchet Üst Sınır Kopulası

CI Bağımsız Kopula

CL Fréchet Alt Sınır Kopulası

NTP Net Tek Prim

PQD Pozitif Kadran Bağımlılık

1.GİRİŞ VE ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1.1. Giriş

Bir hayat sigortası ürünü iki veya daha fazla kişinin yaşam durumuna bağlı ise çoklu yaşam sigortası ürünü olarak adlandırılmaktadır. Sigorta endüstrisinde çoklu hayat sigortaları önemli bir yer tutmaktadır. Çoklu hayat sigortalarında prim, teminat ve rezerv hesaplamaları birden fazla yaşayanın hayatta kalma ve ölme olasılıklarına bağlı olarak planlandığından, tek bir yaşayanın yaşam durumuna bağlı olarak planlanan tekli yaşam ürünlerine göre daha karmaşıktır.

Çoklu yaşam kuramında geleneksel yaklaşım, kişilerin gelecek yaşam sürelerinin karşılıklı bağımsız (mutually independent) olduğudur. Birçok ampirik çalışma bu yaklaşımın gerçeklikten çok hesaplamaya uygunluğundan kaynaklandığını göstermektedir.

Çoklu hayat ürünlerini talep eden bireyler genellikle evli çiftler olmakla birlikte, kardeş ya da ailenin farklı bireyleri de olabilmektedir. Evli çiftlerin benzer sosyal çevrelerde yetişmiş olmaları ve paylaştıkları hayatta benzer risklere maruz kalmaları ya da ikizlerin genetik yapılarının benzerlikleri bu bireylerin gelecek yaşam süreleri arasında bağımlılığa neden olabilecek sebeplerdir.

Bu tür ürünlerde sigorta konusu olan yaşamların gelecek yaşam sürelerinin ve anlık ölüm oranlarının birbirinden bağımsız olduğunu kabul etmek gerçekçi bir yaklaşım olmamaktadır.

Gelecek yaşam sürelerinin bağımsız olduğu kabul edilerek yapılan hesaplama ve değerlemeler hem sigortacı hem de sigortalı açısından kayıplara neden olabilmektedir.

Bu hesaplamaları doğru bir şekilde yapabilmek için, sigortanın konusu olan bireylerin yaşam olasılıkları doğru tahmin edilebilmeli ve kişilerin gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı da dikkate alınmalıdır.

Bireylere yaşam süreleri boyunca periyodik gelir ödemeleri sağlamayı garanti eden annüiteler standart sigorta endüstrisi tarafından değerlendirilirken, teminatın birden fazla yaşam üzerine düzenlendiği durumda, yaşamların bağımsız olduğu kabul edilmektedir. Oysa bu tür bir annüiteyi değerlendirirken bağımlı ölümlülük modellerinin kullanılması gerekmektedir.

Bu çalışmada gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılık yapısı kabul edilerek bağımlılık türleri tanıtılacaktır. Bağımlılığın modellenmesinde kullanılabilecek yöntemler ele alınacak ve evli çiftler için düzenlenen çoklu hayat ürünleri için bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı altında hesaplanan net tek prim (NTP) ve rezerv değerleri karşılaştırılacaktır.

Çalışmanın birinci bölümünde gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılık konusunda yapılan diğer çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılık türleri ele alınmıştır. Üçüncü bölümde rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılık kavramı ve bağımlılığın ölçülmesinde kullanılabilecek ölçütler verilmiştir. Dördüncü bölümde marjinal ve birleşik yaşam fonksiyonları tanımlanmıştır. Beşinci bölümde bağımlılığın modellenmesinde kullanılabilecek modellerden ilki olan kopula modelleri ayrıntılı olarak tanıtılmıştır. Altıncı bölümde ortak etki modelleri ve Markov modelleri tanıtılmıştır. Yedinci bölümde ise gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında çoklu hayat ürünlerinde prim hesabı kopula fonksiyonları kullanılarak açıklanmıştır. Bağımlılık varsayımının annüite NTP ve rezerv değerlerine etkisi sayısal örnekler verilerek açıklanmıştır.

1.2. Önceki Çalışmalar

Evli çiftlerin üzerinde ölümlülük bağımlılığını desteklemek için çok sayıda çalışma yapılmıştır. Örneğin, evli çiftlerin ölümlülük yapılarının istatistiksel analizleri "kırık kalp sendromu"nu (broken heart syndrome) test etmek için sıklıkla yapılmaktadır. 55 yaşındaki 4,486 tane dul bireyden oluşan veri kümesini kullanarak, Parkes ve arkadaşları (1969) eşlerinin ölümünden sonraki ilk aylarda dul bireyler arasında ölüm oranının %40 arttığını göstermiştir. Sezgisel olarak, çift bireylerin ölümlülüklerinin bağımlılık gösterdiğini, bunun nedeninin ortak risk faktörlerinin paylaşılması olduğunu ifade etmiştir. Bu faktörler, ikiz olunması durumunda tümüyle genetik veya evli çiflerde olduğu gibi, çevresel olabilmektedir (Frees et al., 1996).

Geleneksel olarak, bir çiftin birleşik yaşam olasılıklarının tahmini, yaşamlarının bağımsız olduğu kabul edilerek yapılmaktadır. Bu varsayım altında, birleşik yaşam olasılığı her birinin yaşama olasılığının çarpımıdır. Bu varsayım, birleşik yaşam durumundaki tahmini tekli yaşam tahminine indirgemektedir (Frees et al., 1996).

Son yıllarda Aktüerya literatüründe çoklu hayat sigorta ürünlerinde bağımsızlık varsayımının yerine bireylerin gelecek yaşam süreleri arasında bağımlılığın olduğu varsayılmakta ve bu varsayımın ürün fiyatlandırmasında neden olduğu değişiklikleri de içeren çalışmalar yapılmaktadır.

Frees et al. (1996) ve Carriere (2000) çiftlerin ölüm zamanlarındaki bağımlılığın modellenmesinde alternatif modeller sunmuşlar ve bir veri kümesine bu modelleri uygulamışlardır. Her iki makalede de yaşam süreleri arasında önemli derecede pozitif korelasyon gözlenmiştir. Bu durum özellikle son yaşayan durumundaki annüitelerin yüksek fiyatlandırılmasına neden olurken, birleşik yaşam durumundaki annüitelerin düşük olarak fiyatlandırılmasına neden olmuştur. Carriere ve Chan (1986) tarafından Fréchet sınırları annüite net tek primlerine ilk kez uygulanmış ve son yaşayan durumundaki annüitelerin NTP'leri için sınırlar sunulmuştur. Yukarıda sözü edilen üç makalede son zamanlarda popüler bir yaklaşım olan, kopulalara dayanan bir yöntem benimsenmiştir. Dheane et al. (2000) ve Denuit et al. (2001) da NTP'lerin sınırlarının belirlenmesi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Hürlimann (2007) tarafından, çoklu yaşam sigortalarında aktüeryal hesaplamalar ele alınmış ve sigorta ürünlerinin bağımsızlık varsayımı altındaki NTP'nin birleşik yaşam durumunda yüksek, son yaşayan durumunda ise daha düşük olarak bulunduğu belirtilmiştir.

Tüm bu çalışmalarda iki bireyin gelecek yaşam süresinin bağımlılığının hayat sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasındaki etkisi araştırılmıştır. Bağımlılık sadece sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasını etkilememektedir. Poliçeler için hesaplanan rezervler de ölümlülük kurallarına dayanmaktadır. Eğer bir çiftin gelecek yaşam süreleri poliçe başlangıcında bağımlıysa, iki yaşayandan herhangi birinin yaşam olasılığı eşinin yaşam durumuna (yaşaması ya da ölmesi) da bağlıdır. Ayrıca, her iki eşin de kesin bir tarihe kadar hayatta olduğu verildiğinde gelecek yaşam sürelerinin birleşik dağılımı da değişmektedir. Margus (2002), hayat sigortalarının değerlemesinde kullanacak formülü yeniden düzenlemek için kopula modellerini kullanarak, kişinin; eşinin hayatta olma durumundaki mortalite oranlarının, eşinin değerleme tarihinden önce öldüğü durumundaki mortalite oranlarından farklı olduğunu ortaya koymuştur. Shemyakin ve Youn (2002) yaşam süreleri arasında bağımlılık olduğu durumda, çoklu yaşam sigortalarında NTP ve olasılıklar arasındaki bilinen birçok ilişkinin geçerli olmadığını göstermişlerdir.

Frees et al. (1996) ve Carriere (2000) çiftlerin ölüm zamanlarındaki bağımlılığın modellenmesinde bağımlılığın başladığı tarihi farklı olarak almaktadırlar. Frees et al. (1996) çiftler arasındaki bağımlılığa doğumdan itibaren bakarken, Carriere (2000) çift olunduktan sonra bağımlılığın olabileceğini söylemektedir. Carriere (2000), kopulaların yaşamları doğum tarihinden çok evlilik tarihinden itibaren etkilemesi gerektiğini belirten ifadeler kullanmıştır.

Kopula yaklaşımı, gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığının modellenmesinde kullanılan en çok bilinen yöntem olmuştur. Kanada'daki bir sigorta şirketinin sigortalılarından alınan çiftlerin ölümlülüklerine ilişkin veri kümesi üzerinde çalışan, Frees et al. (1996) ile Carriere (2000)'in her ikisi de marjinal dağılım fonksiyonlarının veya yaşam fonksiyonlarının Gompertz tipi olduğunu varsayarak, en çok olabilirlik yöntemiyle parametre tahminlerini yapmıştır. Frees et al. (1996) tek parametreli Frank kopulasını kullanırken, Carriere (2000), parametresi birden daha fazla olan bazı kopulaları (Frank, Clayton, Normal, Linear Mixing, Correlated Frailty) incelemiştir. Aynı veri kümesini kullanarak farklı bağımlılık türleri konusunda çalışmak için, Shemyakin ve Youn (1999, 2001), Frees et al. (1996) tarafından kullanılan yöntemi, her çiftin kadın ve erkek üyeleri arasındaki yaş farkına göre sınıflandırarak geliştirmiştir. Shemyakin ve Youn (2001) alternatif olarak Bayesci yaklaşımı kullanmışlardır. Bu üç makalede Gumbel-Hougaard kopulasını kullanmışlardır.

Her ne kadar kopulalar bağımlılık türüne göre, Spreeuw (2006)'ın çalışmasında gösterildiği gibi, farklı özellikleri gösterse de, uygun kopulanın seçimi önemlidir. İdeal olarak kişi tüm olası kopulalar arasından en iyi kopulayı kullanmalıdır. Pratikte kopulanın seçim sürecinin kopulaların sınırlı bir sayısı ile kısıtlanması gerekmektedir. Genest ve Rivest (1993), sansürlenmemiş veriler için, Arşimedyan kopulalarda kopula seçimi için bir yöntem geliştirmiştir. Eğer veri kümesi sağdan sansürlenmiş (right-cencored) ise Genest ve Rivest yöntemi kullanılmamaktadır. Bu durum Frees et al. (1996), Carriere (2000), Shemyakin ve Youn (1999, 2001)'un çalışmasında kullanılan veri kümesi için geçerlidir. Wang ve Wells (2000), Genest ve Rivest yöntemini iki değişkenli sağdan sansürlenmiş veri kümesi için genişletmiştir (Spreeuw, 2006).

Aktüerya literatüründe bağımlı yaşamların modellenmesinde kopula modellerinin yanı sıra Markov modelleri de kullanılmıştır. Norberg (1989) ve Wolthuis (2003) tarafından evli çiftlerin medeni durumlarına bağlı olarak ölüm olasılıklarını modelleyebilmek için dört durumlu Markov modeli tanımlanmıştır. Bu model daha sonra Denuit ve Cornet (1999), Denuit et. al. (2001) tarafından dul bireylerin emekli maaşlarının değerlendirilmesi için kullanılmıştır. Spreeuw ve Wang (2008) ve Ji et al. (2011) tarafından dört durumlu Markov modeli geliştirilerek birleşik yaşam durumundaki annüitelerin fiyatlandırılmasında kullanılmıştır.

2. GELECEK YAŞAM SÜRELERİNDE BAĞIMLILIK TÜRLERİ

Gelecek yaşam süreleri arasında bağımlılık olduğunun dikkate alınması yanında hangi tür bağımlılığın kullanılacağının da belirlenmesi önemlidir. Hougaard (2000) bağımlılığın zamana bağlı olarak üç temel gruba ayrılabileceğini belirtmiştir.

2.1. Anlık Bağımlılık

Aynı anda her iki yaşayanı da etkileyen, ortak bir olayın sebep olduğu bağımlılıktır.

Anlık bağımlılık (instantaneous dependence) ile anlatılmak istenen tam olarak aynı anda gerçekleşen “ortak olaylar” (common events) olarak tanımlanan olaylardır. Bir çiftin her iki üyesinin de kaza gibi bir ortak olaydan etkilendikleri gerçeğini ifade etmektedir.

2.2. Uzun Dönem Bağımlılık

Yaşayan eşi geri kalan yaşam süresi boyunca etkileyen, ortak bir risk ortamının sebep olduğu bağımlılıktır.

Uzun dönem bağımlılığın (long term dependence) bir örneği, çiftlerin eşleşme mekaniğidir (“benzeşenler buluşurlar”). Örneğin, genellikle iki eş onların ortak risklerini belirleyen aynı çevreden gelmektedirler. Uzun dönem bağımlılığın görüldüğü bir diğer durum ise, ortak genetik yapılarından dolayı ikizlerin bağımlılığıdır.

Yaşayan kişinin anlık ölüm oranı bir sabit ya da eşinin ölüm zamanının artan bir fonksiyonu ise bu bağımlılık uzun dönem bağımlık olarak kabul edilmektedir.

2.3. Kısa Dönem Bağımlılık

Kısa dönem bağımlılıkta, bir yaşayanın ölümü diğer yaşayanın ölümlülüğünü doğrudan doğruya değiştirir, fakat bu etki zamanla azalacaktır.

Bazı durumlarda bir olayın gerçekleşme riski, özellikle bir önceki olaydan sonraki kısa dönem içerisinde yüksek olup, bu riskteki artış zamanla azalmaktadır. Böyle bir durumda iki risk arasında kısa dönem bağımlılık (short term dependence) olduğu söylenebilmektedir.

Diğer bir deyişle, t yaşında ikiz bireyler ele alınsın. İkizlerden birinin ölümü yakın bir zaman içerisinde gerçekleşmişse bu diğer bireyin ölüm riskinin önemli derecede artışına sebep olur, eğer ikizlerden birinin ölümü uzun zaman önce gerçekleşmişse ve ölüm riskindeki bu artış azalıyorsa bağımlılık kısa dönem olarak tanımlanmaktadır. Diğer bir tarafta yakın bir zaman içerisinde gerçekleşen bir ölüm daha küçük bir artışa sebep oluyorsa bağımlılık türü, uzun dönem bağımlılıktır.

Anlık ölüm oranı eşinin ölüm zamanının azalan bir fonksiyonu ise bu bağımlılık kısa dönem bağımlılığı olarak kabul edilmektedir.

Parkes ve arkadaşlarının 1969'da, Jagger ve Sutton'un 1991'de çalıştığı "Kırık Kalp Sendromu" kısa dönem bağımlılığın bilinen en iyi örneğidir.

Evli çiftlerde bağımlılığın üç özel durumu da görülebilir. Evli bir çift, sahip oldukları genetik yapının farklı olmasından dolayı ortak risklere sahip değildir. Fakat eş seçiminden dolayı ortak risklere sahip olabilirler. Örneğin, sigara içmeyen kişi çiftlerdeki uyum nedeniyle sigara içmeyen kişiyi seçecektir. Diğer bir durumda ise, sigara içmeyen biri sigara içen birini tercih etmesine rağmen, biri aktif biri pasif içici olacağından aynı riske maruz kalacaklardır. Her iki durumda da paylaşılan risk ve yaşam tarzı ortak olacaktır. Bu riskler ve ortak yaşam tarzı çiftler arasında uzun dönem bağımlılık olacağının göstergesidir. Eğer bir dul birey, eşinin ölümünden sonraki birkaç yıl içinde hayatta kalıyorsa ölüm riski normale yaklaşacaktır. Eşin ölümünden sonraki birkaç yıl içinde ise kısa dönem bağımlılık gözlemlenebilir. Aynı zamanda evli çiftler fiziksel olarak beraber oldukları ve kazalarda eş zamanlı ölebilecekleri için ortak olayların bir riski vardır. Bu ortak olaylar ise eşler arasında anlık bağımlılığa sebep olmaktadır.

İkizler evli çiftlerle karşılaştırıldığında, ortak olaylar yetişkin ikizler için yaygın değildir. Çünkü yetişkin ikizler, evli çiftlerle aynı derecede fiziksel olarak beraber değildirler. Ortak genetik yapılarından dolayı ortak risklere sahiptirler ve yalnızca çocukluk döneminde ortak çevreyi paylaşırlar. Bu ikizler için en önemli bağımlılık yapısıdır. İkizlerden birinin ölümünden sonra hayatta kalan ikizin intihar etmesi uç bir kısa dönem bağımlılık örneğidir.

Çoklu hayat sigortalarında modelleme yapabilmek için hangi tür bağımlılığın hakim olduğu bir sorundur. Hougaard (2000), evli çiftlerde kısa dönem bağımlılığın yaygın olduğunu belirtmiştir. Bu iddia Parkes ve arkadaşlarının 1969'da ve Jagger ve Sutton'un 1991'de yaptığı ampirik çalışmanın ana sonuçlarından biri tarafından da desteklenmektedir. Her iki çalışma da eşinin ölümünden sonraki altı ay içinde dul erkeklerin ölüm oranının evli erkekler ile karşılaştırılabileceğini göstermektedir. Dul erkeklere ait ölüm oranlarının, evli erkeklere ait olan ölüm oranlarından daha yüksek olduğu görülmüştür.

3. BAĞIMLILIK KAVRAMI

X ve Y rastlantı değişkenleri;

$$\Pr(X \le x \text{ ve } Y \le y) = \Pr(X \le x)\Pr(Y \le y)$$

veya

$$\Pr(X \le x \mid Y) = \Pr(X \le x)$$

ise bağımsızdır. Diğer bir deyişle rastlantı değişkenlerinden birinin hakkındaki bilginin, diğeri hakkında herhangi bir anlam içermediği rastlantı değişkenleri bağımsızdır. Eğer rastlantı değişkenleri bağımsız değilse, bağımlı olacaktır (Karadağ, 2003).

3.1. Pozitif ve Negatif Bağımlılık

X ve Y rastlantı değişkenleri için, Y'nin büyük değerleri X'in büyük değerleri ve Y'nin küçük değerleri X'in küçük değerleri ile ilişkili olma eğiliminde ise pozitif bağımlılığa sahip olduğu söylenmektedir. Negatif bağımlılık ise değişkenlerden birinin büyük değerleri için diğerinin küçük değerleri ile ilişkili olma eğiliminde olmasıdır (Lehmann, 1966).

3.1.2. Pozitif kadran bağımlılığı

Pozitif kadran bağımlılığı (positively quadrant dependence, PQD), X ve Y rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılığın özel bir durumudur.

$$\Pr\left[(X,Y) > (x,y)\right] \ge \Pr\left[(X > x)\right]\Pr\left[(Y > y)\right]$$

veya

$$\Pr\left[(X,Y) \le (x,y)\right] \ge \Pr\left[(X \le x)\right]\Pr\left[(Y \le y)\right]$$

eşitsizliği X' in küçük değerlerinin Y' nin küçük değerleri ile ve X' in büyük değerlerinin Y' nin büyük değerleri ile ilişkili olduğu anlamına gelmektedir (Spreeuw and Wang, 2008).

$\left(T_x, T_y\right)$ rastlantı vektörü ancak ve ancak,

$$\Pr[T_x \leq t_1,\ T_y \leq t_2] \geq \Pr[T_x \leq t_1] \times \Pr[T_y \leq t_2] \quad \forall t_1, t_2 \in R^+,$$

ya da, ancak ve ancak,

$$\Pr[T_x > t_1,\ T_y > t_2] \geq \Pr[T_x > t_1] \times \Pr[T_y > t_2] \quad \forall t_1, t_2 \in R^+$$

eşitsizliği sağlandığında pozitif kadran bağımlıdır (Denuit and Cornet, 1999).

3.2. Bağımlılığın Ölçülmesi

Rastlantı değişkenleri arasında bağımlılığı veya ilişkiyi tanımlamak için çeşitli yöntemler bulunmaktadır. Örneğin bağımlılığın klasik ölçüsü korelasyon katsayısıdır. Korelasyon katsayısı rastlantı değişkenleri arasındaki doğrusallığın ölçüsüdür. X ve Y rastlantı değişkenleri arasında mükemmel bir doğrusal ilişki varsa, korelasyon katsayısı +1 veya -1 olacaktır. Y = ax + b basit doğrusal regresyon modelinde eğer a pozitifse korelasyon katsayısı +1, eğer a negatifse korelasyon katsayısı -1 olacaktır (Klugman et al., 2008).

3.2.1. Doğrusal korelasyon katsayısı

Doğrusal bağımlılık, Pearson'ın moment üreten katsayısı (Pearson's product-moment coefficient) olarak da adlandırılan doğrusal korelasyon katsayısı (linear correlation coefficient) ile ölçülmektedir. X ve Y rastlantı değişkenleri verildiğinde, Var(X) ve Var(Y) var olduğu sürece doğrusal korelasyon katsayısı,

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

olacaktır.

Doğrusal korelasyon katsayısı ρ'nun özellikleri şu şekilde özetlenebilmektedir:

- ρ değeri -1 ile +1 arasında değişmektedir.
- Değişkenlerin yapısında monotonik afin değişikliği olduğunda doğrusal korelasyon katsayısı,

$$\left.\begin{array}{l} X' = aX + b \\ Y' = cY + d \end{array}\right\} \Rightarrow \rho(X', Y') = sign(ac)\rho(X, Y)$$

şeklinde yazılmaktadır.

Doğrusal korelasyon katsayısı çok değişkenli normal dağılımlar, ve daha genel olarak küresel ve eliptik dağılımlar için bağımlılığın ölçülmesinin temel bir yöntemidir (Karadağ, 2003).

Doğrusal korelasyon katsayısı, gelecek yaşam süreleri rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılığın ölçülmesinde yetersiz kalmaktadır. Gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılığın ölçülmesinde rank korelasyon ölçütlerinden olan Kendall'ın tau ve Speraman'ın rho korelasyon katsayıları kullanılmaktadır.

3.2.2. Rank korelasyon katsayısı

X ve Y rastlantı değişkenlerinin aynı anda küçük ya da büyük değer almaları konkordans (concordance), biri küçük (büyük) değer alırken diğerinin büyük (küçük) değer alma olasılığı ise diskonkordans (disconcordance) olarak adlandırılmaktadır. Rank korelasyon katsayısı, rastlantı değişkenleri arasındaki konkordansı ölçmek için kullanılmaktadır. En çok kullanılan rank korelasyon ölçütleri olan Kendall'ın tau ve Speraman'ın rho korelasyon katsayılarıdır.

Kendall'ın tau korelasyon katsayısı

Bir (X,Y) sürekli rastlantı vektöründeki n gözlemden bir rastgele örneklem alındığında, $\binom{n}{2}$ tane bağımsız çift olacaktır. (X_i, Y_i) ve (X_j, Y_j) çiftleri ya konkordans ya da diskonkordanstır. Burada Kendall'ın korelasyon katsayısı,

$$\tau = \Pr\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\right] - \Pr\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\right]$$

ile verilmektedir. Eşitliğin sol tarafı konkordans olasılığını verirken, sağ tarafı diskonkordans olasılığını vermektedir. Sürekli rastgele değişkenler için Kendall'ın tau katsayısı,

$$\tau = 2\Pr\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\right] - 1$$

olarak yazılmaktadır. Eşitlikten Kendall'ın tau değerinin -1 ile +1 arasında değiştiği görülmektedir. Eğer (X,Y) rastlantı değişkenleri countermonotonic ise τ değeri alt sınıra ulaşacak ve -1 değerini alacak, (X,Y) rastlantı değişkenleri comotonic ise τ değeri üst sınıra ulaşacak ve +1 değerini alacaktır (Karadağ, 2003).

Spearman'ın rho korelasyon katsayısı

Spearman'ın rho korelasyon katsayısı doğrusal korelasyon katsayısı ile ilişkilidir. F_x ve F_y marjinal dağılımları ile X ve Y rastlantı değişkenleri için Spearman'ın rho korelasyon katsayısı,

$$\rho_s = \rho(F_X(X), F_Y(Y)) = \frac{Cov(F_X(X), F_Y(Y))}{\sqrt{Var(F_X(X))Var(F_Y(Y))}}$$

eşitliği ile tanımlanmaktadır.

Sürekli rastlantı değişkenleri için Spearman'ın rho katsayısı,

$$\rho_s(X_1, X_2) = 3\left[\Pr(X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) > 0\right] - \left[\Pr(X_1 - X_1^{\perp})(X_2 - X_2^{\perp}) < 0\right]$$

olarak yazılmaktadır. Burada $(X_1^{\perp}, X_2^{\perp})$ bağımsız bileşenlerden oluşan (X_1, X_2) ile bağımsız olan rastgele vektördür (Denuit et al., 2005).

Rank korelasyon ölçütleri olan Kendall'ın tau ve Spearman'ın rho katsayıları kopula fonksiyonları yardımıyla da hesaplanabilmektedir. Yaşam süreleri arasındaki bağımlılığı modellemek için kullanılan Arşimedyan kopulalar için Kendall'ın tau ve Spearman'ın rho katsayılarının nasıl hesaplandığı Bölüm 5'te belirtilecektir.

Rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılığı ölçen diğer kavramlar Kendall'ın tau ve Spearman'ın rho katsayıları mükemmel pozitif bağımlılık durumda +1, mükemmel negatif bağımlılık durumda -1, değerini almaktadır (Klugman et al., 2008).

4. MARJİNAL VE BİRLEŞİK YAŞAM FONKSİYONLARI

Yaşam modeli, temel olarak özel bir tür rastlantı değişkeninin olasılık dağılımıdır. Bu nedenle, genel olarak olasılık teorisinin özelliklerini taşımaktadır. Bununla birlikte, yaşam modeli rastgele değişkeninin gösterimleri aktüeryal bağlamda geliştirilmiştir.

4.1.Başarısızlık Yaşı ve Başarısızlık Zamanı Rastlantı Değişkeni

Yaşam modelini içeren herhangi bir durumda, yaşam konusu ile ilişkilendirilmiş ve tanımlanmış bir varlık bulunmaktadır. Varlıkların ve onlarla ilişkilendirilmiş rastlantı değişkenlerinin bazı örnekleri aşağıdadır:

(i) Bir elektrik ampülünün çalışma süresi. Yanmaya devam ettiği sürece ampülün yaşadığı, söndüğü an ise başarısızlığa uğradığı söylenebilir.

(ii) Yeni doğan bir kişinin yaşam süresi. İnsan, varlığının başarısızlık durumu olan ölüm gerçekleşene kadar hayatta kalır.

T, 0 yaşından başarısızlık gerçekleşene kadar geçen sürenin uzunluğunu ifade eden sürekli rastlantı değişkeni olarak ifade edilmektedir. Eğer başarısızlık x yaşında gerçekleşirse X = x ve T = x olacaktır. Başarısızlık anındaki yaş (age at failure) için X ve başarısızlığa kadar geçen süre (time to failure) için T değişkenleri kullanılabilmektedir. Aralarındaki ilişki X = x + T ile ifade edilebilmektedir.

Burada rastlantı değişkeni T_x olarak tanımlanacaktır ve x yaşında hayatta olduğu bilinen varlık için başarısızlığa kadar geçen zaman rastlantı değişkenini göstermektedir. Başarısızlık anındaki yaş, x yaşından T_x kadar fazla olacağından $X = x + T_x$ ifadesi iki temel rastlantı değişkeni arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu durumda T_x'in yaşam fonksiyonu,

$$ {}_t p_x = \Pr(T_x > t) = \Pr(X > x + t \mid X > x) $$

İle tanımlanacaktır. Temel olasılık teorisinde koşullu olasılık,

$\Pr(E \mid F) = \Pr(E \cap F) / \Pr(F)$ ile tanımlandığından

$$
\begin{aligned}
{}_t p_x = S_{T_x}(t) &= \Pr(T_x > t) \\
&= \Pr(X > x + t \mid X > x) \\
&= \frac{\Pr(X > x + t)}{\Pr(X > x)} \\
&= \frac{S_X(x + t)}{S_X(x)}
\end{aligned}
$$

olarak bulunmaktadır (Cunningham et al., 2008).

4.2. Marjinal Yaşam Fonksiyonu

X rastgele değişkeni için yaşam fonksiyonu,

$$S_X(x) = 1 - F_X(x) = \Pr(X > x), \quad X \geq 0$$

eşitliği ile gösterilmektedir.

$$\lim_{x \to \infty} S_X(x) = 0$$

$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ iken

$F_X(0) = 0$ için $S_X(0) = 1$ olmaktadır.

Aktüeryal gösterimde $S_X(x)$ ile gösterilen olasılık, ${}_x p_0$'e karşılık gelmektedir:

${}_x p_0 = S_X(x) = \Pr(X > x)$ (Bowers et al., 1997).

4.3. Birleşik Yaşam Fonksiyonları

Birleşik yaşam durumunda; x ve y yaşlarındaki iki kişi için T_{xy} gelecek yaşam süresini gösteren rastlantı değişkenini ifade etmektedir. Burada T_{xy} , T_x ve T_y ile gösterilen bireysel gelecek yaşam sürelerinden küçük olan olacaktır ve $T_{xy} = \min(T_x, T_y)$ olmak üzere, T_{xy} rastlantı değişkeni için yaşam fonksiyonu,

$S_{T_{xy}}(t) = \Pr(T_{xy} > t) = 1 - F_{T_{xy}}(t)$ ile ifade edilmektedir.

Son yaşayan durumunda; x ve y yaşlarındaki iki kişi için $T_{\overline{xy}}$ gelecek yaşam süresini gösteren rastlantı değişkenini ifade etmektedir. Burada ise $T_{\overline{xy}}$, T_x ve T_y ile gösterilen bireysel gelecek yaşam sürelerinden büyük olan olacaktır. $T_{\overline{xy}} = \max(T_x, T_y)$ olmak üzere, $T_{\overline{xy}}$ rastlantı değişkeni için yaşam fonksiyonu,

$S_{T_{\overline{xy}}}(t) = \Pr(T_{\overline{xy}} > t) = 1 - F_{T_{\overline{xy}}}(t)$ ile ifade edilmektedir (Cunningham et al., 2008).

4.4. Koşullu Marjinal ve Birleşik Yaşam Fonksiyonu

x ve y yaşlarında iki birey için bir sigorta sözleşmesi düzenlensin. Bu iki bireyin gelecek yaşam süreleri sırasıyla T_x ve T_y ve marjinal yaşam fonksiyonları $S_1(s_1)$ ve $S_2(s_2)$ olarak ifade edilir ve T_x ve T_y 'nin sırasıyla $w_x - x$ ve $w_y - y$ üst sınırlarıyla sürekli dağılıma sahip olduğu kabul edilir. w_x ve w_y **;** x ve y'nin son yaşlarını ifade eder. Birleşik yaşam fonksiyonu ise $S(s_1, s_2)$ ile gösterilir.

İlk olarak x'in hayatta olduğu ve y'nin t_y ve $t_y + dt$ arasında öldüğü kabul edilsin. $\{t_y \in [0,t]\}$ y'nin t_y anında öldüğü verildiğinde; x'in gelecek yaşam süresinin yaşam fonksiyonu şöyle yazılabilir;

$$S_{1;t}(s \mid T_y = t_y) = \Pr\left[T_x > t + s \mid T_x > t,\ T_y = t_y\right]$$

$$= \frac{\dfrac{-d}{dt_y}\Pr\left[T_x > t + s,\ \mathrm{T}_y > t_y\right]}{-\dfrac{d}{dt_y}\Pr\left[T_x > t,\ \mathrm{T}_y > t_y\right]} = \frac{\dfrac{d}{dt_y}S(t+s,\ t_y)}{\dfrac{d}{dt_y}S(t, t_y)} \tag{4.1}$$

$t \geq 0$ sürecinde, t anında y'nin yaşadığı verildiğine göre, x'in gelecek yaşam süresinin yaşam fonksiyonu,

$$S_{1;t}(s \mid T_y > t) = \Pr\left[T_x > t + s \mid T_x > t, T_y > t\right] = \frac{\Pr\left[T_x > t + s, T_y > t\right]}{\Pr\left[T_x > t, T_y > t\right]} = \frac{S(t+s,t)}{S(t,t)} \tag{4.2}$$

olarak yazılabilir. Benzer ifadeler $S_{2:t}(s|T_x > t)$ ve $S_{2:t}(s|T_x = t_x)$ için de yazılabilir.

Birleşik yaşam fonksiyonu ise,

$$S_t(s_1, s_2) = \Pr\left[T_x > t + s_1, T_y > t + s_2 \middle| T_x > t, T_y > t\right] = \frac{S(t + s_1, t + s_2)}{S(t,t)} \tag{4.3}$$

olacaktır (Spreeuw, 2006).

5. KOPULA MODELLERİ

Aktüerya literatüründe yaşam süreleri arasındaki bağımlılığın modellenmesinde genel olarak Kopula Modelleri kullanılmaktadır. Bu modellerin yanı sıra bazı durumlarda Markov Modelleri ve Ortak Etki Modelleri de kullanılmaktadır. Bu modellerin ayrıntılarına altıncı bölümde yer verilecektir.

Kopula yaklaşımının temeli, rastlantı değişkenlerinin birleşik dağılım fonksiyonlarının marjinal dağılımların bir fonksiyonu olarak ifade edilmesine dayanmaktadır.

Çok değişkenli model için kopulanın temel alınması marjinal dağılımların kullanımı açısından esneklik sağlamaktadır. Çünkü kopula fonksiyonlarında marjinal dağılımlar üzerinde bir kısıtlama yoktur. Sklar teoreminde önerilen kopula yapısı ile, her bir değişken için farklı marjinal dağılımlar seçilebilmektedir. Böylece kopula yapısı marjinal dağılımların seçimini kısıtlamamaktadır.

Kopulalar sürekli rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılığın modellenmesinde özellikle kullanışlı olmasına karşın, kesikli dağılımlara uygulanması daha kullanışsızdır. Bunun temel nedeni de kesikli dağılımlarda olasılık integrali dönüşümü (probability integral transformation) yapısına benzer bir dönüşümün olmamasıdır.

Aktüeryal anlamda kopulaların veri modellenmesindeki uygulamaları Carriere (1994, 2000), Frees et al. (1996), Frees ve Valdez (1998), Klugman ve Parsa (1999), Spreeuw (2006) ve Luciano et al. (2008) tarafından çalışılmıştır.

5.1. Kopula Fonksiyonları

Bir kopula fonksiyonu bağımlı tek değişkenli marjinalleri çok değişkenli dağılımlarına bağlayan bir fonksiyondur. Kopulalar olasılıklı metrik uzaylar kapsamında 1959 yılında ele alınmıştır (Frees and Valdez, 1998).

Son yıllarda kopula fonksiyonlarının finans, istatistik ve aktüerya alanlarında çok değişkenli sonuçlar arasındaki ilişkileri anlamak için sıklıkla kullanıldığı görülmektedir.

Burada, C fonksiyonu, *kopula fonksiyonu* olarak adlandırılmaktadır. Rastlantısal marjinal dağılım fonksiyonları $F_1(x_1)$, $\mathrm{F}_2(x_2)$, ..., $\mathrm{F}_p(x_p)$ olarak seçilmektedir. Böylece,

$$C\left[F_1(x_1),\ F_2(x_2),\ ...,\ F_p(x_p)\right] = F(x_1, x_2, ..., x_p) \tag{5.1}$$

F_1 , F_2 ,…, F_p marjinal dağılımları ile x_1 , x_2 , …, x_p rastgele değişkenleri için tanımlanan, çok değişkenli dağılım fonksiyonudur.

Eşitlik (5.1)'deki kopula yapısı için farklı marjinaller seçilmektedir. Örneğin, birleşik yaşam annüite ürünü için erkek ve kadın yaşam sürelerinin modellendiği varsayılsın. Bu durumda marjinal dağılımlar Gompertz dağılımı veya Weibull dağılımı olarak seçebilmektedir.

Eşitlik (5.1)'de verilen biçimdeki F'nin çok değişkenli dağılım fonksiyonu olduğu görülebilmektedir. Sklar (1959), herhangi bir çok değişkenli dağılım fonksiyonu F 'nin marjinal dağılım fonksiyonları yardımıyla yazılabileceğini göstermiştir. Sklar ayrıca marjinal dağılımlar sürekli ise, o zaman tek bir kopula olduğunu göstermiştir (Frees and Valdez, 1998).

Sklar Teoremi kopula teorisinde önemlidir ve çoğu uygulama için temel oluşturmaktadır. Teorem, çok değişkenli dağılım fonksiyonları ile tek değişkenli marjinal dağılımları arasındaki ilişkideki kopulaların rolünü açıklamaktadır.

Teorem 5.1. Sklar Teoremi

$F_x \in R_2(F_1, F_2)$ fonksiyonu F_1, F_2 sürekli marjinal dağılımlara sahiptir. Tüm $x \in R_2$ için burada tek bir C kopulası vardır:

$$F_x(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2))$$

Tersine, eğer C bir kopulaysa ve F_1 ile F_2 yoğunluk fonksiyonları ise yukarıda tanımlanan F_x fonksiyonu**,** F_1 ile F_2 marjinal dağılımları ile olasılık fonksiyonudur. (Denuit et al., 2005).

Her ne kadar kopulalar bağımlılık türüne ve yaş özelliklerine göre farklı karakteristikleri gerektirse de, uygun kopulanın seçimi önemlidir. İdeal olan tüm olası kopulalar arasından en iyi kopulanın kullanılmasıdır. Pratikte kopulanın seçim süreci kopulaların sınırlı bir sayısı ile kısıtlanmalıdır (Luciano et al., 2008).

5.1.2. İki değişkenli kopula

Eğer bir kopula modeli uygulanmak istenirse birleşik dağılım fonksiyonu marjinal dağılımlarıyla tanımlanır ve iki değişkenli kopula fonksiyonu C[.,.] ile ifade edilir. $0 \le u_1 \le 1$ ve $0 \le u_2 \le 1$ olmak üzere, bu fonksiyon aşağıda verilen üç özelliğe sahip olmalıdır.

1) $C[0,u_2] = C[u_1,0] = 0$;
2) $C[1,u_2] = u_2$ ve $C[u_1,1] = u_1$;
3) $C[.,.]$ her durumda azalmayan bir fonksiyondur.

Genel olarak marjinal dağılımlardan birleşik dağılım elde etmek için kullanılan kopula fonksiyonları şöyle yazılabilir:

$$C\left[F_1(x_1),F_2(x_2),...,F_p(x_p)\right] = F(x_1,x_2,...,x_p)$$

$F_1,F_2,...,F_p$ sırasıyla $x_1,x_2,...,x_p$ 'nin marjinal dağılım fonksiyonlarıdır.

İki değişkenli kopula fonksiyonları çeşitli yapılarda yazılabilmektedir. Bir kopula fonksiyonu her bir orjinal tek değişkenli dağılımın değerini kullanarak (x ve y) veya kümülatif olasılıkları kullanılarak yazılabilir:

- Değişkenlerin bir fonksiyonu olarak, $C(x,y)$.
- Kümülatif dağılımların bir fonksiyonu olarak, $C(x,y) = C[F_1(x),F_2(y)]$.
- Yüzdelik değerlerinin bir fonksiyonu, $u_1 = F_1^{-1}(x)$ ve $u_2 = F_2^{-1}(y)$ ile, $C(x,y) = C(u_1,u_2)$.
- $F_1(x)$ ve $F_2(y)$ 'nin ters olasılık fonksiyonları ile, $C(x,y) = C\left[F_1^{-1}(x),F_2^{-1}(y)\right]$.

  Yukarıda verilen dört biçim de birbirine eşittir.

$$C(x,y) = C[F_1(x),F_2(y)] = C(u_1,u_2) = C\left[F_1^{-1}(x),F_2^{-1}(y)\right]$$

Tekdüze standart değişkenler kullanıldığında, x ve y tek değişkenli dağılımın rastgele değişkenleri iken u ve v genellikle 0 ile 1 arasındaki olasılıkları ifade eder (Bessis, 2002).

5.2. Yaşam Kopulaları

y yaşındaki kişinin yaşam fonksiyonu $\bar{F}(x)$ ile gösterilmektedir. y yaşındaki kişinin x yıl daha hayatta kalma olasılığı, ${}_x p_y$, X'in kümülatif dağılım fonksiyonu $F(x)$ olduğuna göre,

$$\bar{F}(x) = {}_x p_y = 1 - F(x)$$

olmaktadır. Bileşik dağılım fonksiyonu H olan, bir çift (X,Y) rastlantı değişkeni için, $\bar{H}(X,Y)$ yaşam fonksiyonu,

$$\bar{H}(x,y) = P\left[X > x, Y > y\right]$$

olarak yazılabilmektedir. Bu olasılık X'in x yıl hayatta kalması ve Y'nin y yıl hayatta kalması olasılığını vermektedir. $\bar{H}(x,y)$'nin marjinal dağılımları tek değişkenli yaşam fonksiyonları $\bar{F}(x) = \bar{H}(x,-)$ ve $\bar{G}(y) = \bar{H}(-,y)$'dir.

x ve y yaşındaki bireylerin en az birinin t yıl boyunca hayatta kalma olasılığını gösteren ${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy}$, kullanılarak yaşam fonksiyonu,

$$\begin{aligned}
\bar{H}(x,y) &= (1-(F(x)) + (1-G(y)) - (1-H(x,y)) \\
&= 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) \\
&= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x),G(y)) \\
&= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1-\bar{F}(x), 1-\bar{G}(y))
\end{aligned} \tag{5.2}$$

olarak elde edilmektedir.

Böylece yaşam kopulası (survival copula),

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$$

biçiminde tanımlanır ve yaşam fonksiyonu,

$$\bar{H}(x,y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))$$

eşitliği ile elde edilmektedir (Elliot, 2008).

5.3. Fréchet Sınırları

(i) Fréchet üst sınır kopulası CU ile gösterilir ve

$$CU(u_1,u_2)=\min(u_1,u_2) \quad (u_1,u_2) \in [0,1]x[0,1]$$

eşitliği ile tanımlanır.

(ii) Fréchet alt sınır kopulası CL ile gösterilir ve

$$CL(u_1,u_2)=\max(0,u_1+u_2-1) \quad (u_1,u_2) \in [0,1]x[0,1]$$

eşitliği ile tanımlanır.

(iii) Bağımsız kopula CI ile gösterilir ve

$$CI(u_1,u_2)=u_1u_2 \quad (u_1,u_2) \in [0,1]x[0,1]$$

eşitliği ile tanımlanır. Tüm C kopulaları için,

$$CL(u_1,u_2)\leq CI(u_1,u_2)\leq CU(u_1,u_2)$$

eşitsizliği yazılabilir (Denuit et al., 2005).

5.4. Koşullu Dağılım Fonksiyonlarının Kopula Fonksiyonları İle Bulunması

(U_1,U_2), birleşik dağılım fonksiyonu C olan rastgele bir çifttir. $U_1=u_1$ olduğunda U_2 'nin koşullu dağılım fonksiyonu,

$$\Pr[U_2\leq u_2 | U_1=u_1]=\lim_{\Delta_{U_1}\to 0}\frac{\Pr[u_1\leq U_1\leq u_1+\Delta_{u_1},U_2\leq u_2]}{\Pr[u_1\leq U_1\leq u_1+\Delta_{u_1}]}$$

$$\lim_{\Delta_{U_1}\to 0}\frac{C(u_1+\Delta_{u_1},u_2)-C(u_1,u_2)}{\Delta_{u_1}}$$

$$=C_{2|1}(u_2|u_1)$$

olarak yazılmaktadır.

Dağılım fonksiyonu $F_x(x_1,x_2)=C(F_1(x_1),F_2(x_2))$ olan (x_1,x_2) rastgele çifti için;

$X_1=x_1$ için X_2'nin koşullu dağılım fonksiyonu, u_1 yerine $F_i(x_i)$, i=1,2, yerleştirilerek aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Pr[X_2 \le x_2 \mid X_1 = x_1] = C_{2|1}(F_2(x_2) \mid F_1(x_1))$$

Benzer şekilde $X_2=x_2$ ise, X_1'nin koşullu dağılım fonksiyonu, u_2 yerine $F_i(x_i)$,i=1,2, yerleştirildiğinde,

$$\Pr[X_1 \le x_1 \mid X_2 = x_2] = C_{1|2}(F_1(x_1) \mid F_2(x_2))$$

olacaktır $(x \in R^2)$.

$C_{2|1}$ ve $C_{1|2}$ fonksiyonları ise kopula fonksiyonunun kısmi türevleri alınarak,

$$C_{2|1}(u_2 \mid u_1) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1,u_2)$$

$$C_{1|2}(u_1 \mid u_2) = \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1,u_2)$$

olarak elde edilmektedir (Denuit et al., 2005).

5.5. Olasılık Yoğunluk Fonksiyonlarının Kopula Fonksiyonları İle Bulunması

Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu marjinal ve kopula olasılık yoğunluk fonksiyonları yardımıyla yazılabilmektedir. Kopula yoğunluk fonksiyonu, X_i rastlantı değişkenleri arasındaki bağımlılığa ait tüm bilgiyi saklamaktadır. Bu nedenle kopula yoğunluk fonksiyonuna bağımlılık fonksiyonu da denilmektedir. $u \in [0,1]^2$ olmak üzere kopula yoğunluk fonksiyonu,

$$c(u_1,u_2) = \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C(u_1,u_2)$$

ile bulunmaktadır. Birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$f_X(x) = f_1(x_1) f_2(x_2)\ c(F_1(x_1) F_2(x_2))$

olacaktır. Eşitlikteki $f_1(x_1)\ f_2(x_2)$ ifadesi bağımsızlık durumuna karşılık gelen birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonudur (Denuit et al., 2005).

5.6. Kopula Aileleri

Kopula fonksiyonları genellikle Eliptik ve Arşimedyan kopula aileleri olmak üzere ikiye ayrılmaktadır.

Eliptik kopulalar çok değişkenli eliptik dağılımlardan elde edilen kopulalardır. Ailenin başlıca örnekleri Normal (Gaussian) kopula ve Student (t) kopuladır. Normal kopula çok değişkenli normal dağılım, Student kopula ise çok değişkenli t dağılımı ile yapılandırılmaktadır.

Yaşam sürelerinin modellenmesinde matematiksel işlenebilirliğindeki kolaylık nedeniyle genellikle Arşimedyan kopula aileleri kullanılmaktadır. Bu ailenin en çok kullanılan üyeleri Frank, Clayton (Cook-Johnson) ve Gumbel-Hougard kopulalarıdır.

Yaşam süreleri arasındaki bağımlılığı inceleyen çoğu aktüeryal çalışma Arşimedyan kopula türleri üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu çalışmalardan başlıcaları Frees et al. (1996), Carriere (2000), Spreeuw (2006), Luciano et al. (2008)'dir.

5.6.1. Arşimedyan kopula

Genest ve MacKay (1986a, b) kopulaların "Arşimedyan" olarak adlandırılan önemli bir alt sınıfını tanımlamıştır.

Arşimedyan kopula $\phi(\ .)$ ile gösterilen bir üreteç fonksiyonu ile tanımlanmaktadır.

$\phi(\ .) : [0,1] \rightarrow R^+$, $\phi'(\tau)$ve $\phi''(\tau)$,sırasıyla birinci ve ikinci türevleri göstermek üzere, tüm $\tau \in (0,1)$ için,

$$\phi(1) = 0,\ \phi'(\tau) < 0 \ \text{ve}\ \phi''(\tau) > 0,\ 0 \leq \tau \leq 1.$$

$\phi(\ .)$ üreteç fonksiyonu ile yapılandırılan bir Arşimedyan kopula fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilmektedir:

$$C[u,v] = \phi^{[-1]}\left(\phi(u) + \phi(v)\right),\ 0 \le \mathrm{u,v} \le 1$$.

(5.3)

$\phi^{[-1]}(\ .),\ \phi(\ .)$ fonksiyonunun pseudo – inverse (yalancı ters) fonksiyonudur:

$$\phi^{[-1]}(\tau) = \begin{cases} \phi^{-1}(\tau) & 0 \le \tau \le \phi(\tau) \\ 0 & \phi(0) \le \tau \le \infty \end{cases}$$

Yukarıdaki eşitlikte $\phi^{-1}(\ .)$, $\phi(\ .)$ fonksiyonunun pseudo – inverse (yalancı ters) fonksiyonudur. Yalancı ters ve ters fonksiyon eğer $\lim_{\tau \to 0} \phi(\ .) = \infty$ ise özdeş olacaktır. Eğer bu özellik sağlanırsa üreteç tam (strict) olacaktır. Bu durumda kopula fonksiyonu,

$$C[u,v] = \phi^{-1}\left(\phi(u) + \phi(v)\right),\ 0 \le \mathrm{u,v} \le 1$$

olarak yazılabilmektedir (Spreeuw, 2006).

Arşimedyan kopulaların yaşam süreleri arasındaki bağımlılığı modellemede en çok kullanılan üyeleri Frank, Clayton ve Gumbel-Hougard kopulalarıdır. Bu kopula türlerine ait olan üreteç fonksiyonu, birleşik dağılım fonksiyonları ayrıntılarıyla verilecektir.

5.6.1.1. Frank kopula

Frank kopula, ilk kez Frank (1979) tarafından bir fonksiyonel eşitlik problemine çözüm olarak bulunmuştur. Daha sonra Genest (1987) tarafından da çalışılmıştır.

$\phi(t)$ üreteç fonksiyonu,

$$\phi(t) = -\ln\left(\frac{\exp(-\alpha t) - 1}{\exp(-\alpha) - 1}\right)$$

İle oluşturulan Frank kopulasının dağılım fonksiyonu, α bağımlılık parametresini göstermek üzere,

$$C_\alpha(u_1, u_2) = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(\exp(-\alpha u_1) - 1)\ (\exp(-\alpha u_2) - 1)}{\exp(-\alpha) - 1}\right), \quad \alpha \ne 0$$

şeklinde yazılmaktadır (Denuit et al., 2005).

5.6.1.2. Clayton kopula

İlk olarak Kimeldorf ve Sampson (1975) tarafından bulunmasına karşın, genellikle Clayton (1978)'a atfedilmiştir. Bu dağılımlara ilişkin ilk sistematik çalışma ise Cook ve Johnson (1981) tarafından yapıldığı için bu isimlerle de anılmaktadır.

$\phi(t)$ üreteç fonksiyonu,

$$\phi(t) = \left(\frac{t^{-\alpha} - 1}{\alpha} \right)$$

ile oluşturulan Clayton kopulasının dağılım fonksiyonu, α bağımlılık parametresini göstermek üzere,

$$C_\alpha(u_1,u_2) = \left((u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$$

şeklinde yazılmaktadır (Denuit et al., 2005).

5.6.1.3. Gumbel - Hougaard kopula

$\phi(t)$ üreteç fonksiyonu,

$$\phi(t) = (-\ln t)^{-\alpha}$$

ile oluşturulan Gumbel-Hougaard kopulasının dağılım fonksiyonu, α bağımlılık parametresini göstermek üzere,

$$C_\alpha(u_1,u_2) = \exp\left\{ -[(-\log u_1)^\alpha + (-\log u_2)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}} \right\}, \quad \alpha \geq 1$$

şeklinde yazılmaktadır.

Arşimedyan kopulalar, marjinal dağılımları Gompertz, Weibull olan iki değişkenli yaşam fonksiyonlarınının modellenmesinde kullanılabilmektedir. Marjinaller arasındaki bağımlılığı içeren tüm bilgi ilişki parametresindedir (Shemyakin and Youn, 2006).

5.6.2. Arşimedyan kopulalar için rank korelasyon katsayıları

(T_1,T_2) sürekli rastlantı değişkenleri için, $\rho(T_x,T_y)$ ile gösterilen **Spearman rank korelasyon katsayısı** kopula fonksiyonu yardımıyla,

$$\rho(T_x,T_y)=12\int_0^1\int_0^1 (C(u_1,u_2)-u_1u_2)du_1du_2$$

formülü ile hesaplanmaktadır (Denuit et al., 2005).

(T_1,T_2) sürekli rastlantı değişkenleri için, $\tau(T_x,T_y)$ ile gösterilen **Kendall rank korelasyon katsayısı** kopula fonksiyonu yardımıyla,

$$\tau(T_x,T_y)=4\int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1} C[u,v]dC[u,v]+1$$

eşitliğinden bulunmaktadır. Arşimedyan kopulalarda $\tau(T_x,T_y)$ katsayısı,

$$\tau(X_1,X_2)=4\int_{u=0}^{1}\frac{\phi(v)}{\phi'(v)}dv+1$$

üreteç fonksiyonu ile hesaplanabilmektedir.

Kendall'ın tau değeri ne kadar büyükse, rastlantı değişkenleri arasındaki ilişki de o kadar güçlü olacaktır. En büyük değer +1'dir ve Fréchet üst sınırına karşılık gelmektedir. Çoğu Arşimedyan kopulalar için kopula parametresinin değeri arttıkça, Kendall'ın tau değeri de artmaktadır. Frank kopulasında ise parametresi değeri arttıkça, Kendall'ın tau değeri azalmaktadır. Bu yüzden Frank kopulasında bağımlılığın parametre değeriyle ters orantılı olduğu söylenebilir (Spreeuw, 2006).

Tek parametreli Arşimedyan kopula fonksiyonlarında τ ile α parametresi arasında bir ilişki gözlemlenmektedir. Başka bir deyişle τ katsayısı, α parametresi cinsinden yazılabilmektedir. Örneğin, Clayton kopulası için,

$\phi(t)=\dfrac{t^{-\alpha}-1}{\alpha}$ ve $\phi'(t)=-t^{-\alpha-1}$ olduğunda $\alpha>0$ için τ değeri;

$$\tau = -4\int_0^1 \frac{t - t^{\alpha+1}}{\alpha} dt + 1 = \frac{\alpha}{\alpha+2}$$ olacaktır (Denuit et al., 2005).

Clayton, Frank, Gumbel - Hougaard, Arşimedyan kopula fonksiyonlarına ait üreteç fonksiyonu, iki değişkenli fonksiyon yapısı, kopula parametresi α ve Kendall rank korelasyon katsayısı τ arasındaki ilişki Çizelge 5.1'de gösterilmektedir (Frees and Valdez, 1998; Denuit et al., 2005).

Çizelge 5.1. Başlıca Arşimedyan kopula aileleri için fonksiyon yapıları

Kopula Ailesi	Üreteç Fonksiyon	İki Değişkenli Kopula Fonksiyonu	Kendall τ katsayısı
Frank	$\phi(t) = -\ln\left(\frac{\exp(-\alpha t)-1}{\exp(-\alpha)-1}\right)$	$-\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(\exp(-\alpha u_1)-1)\ (\exp(-\alpha u_2)-1)}{\exp(-\alpha)-1}\right), \quad \alpha \neq 0$	$1-\frac{4}{\alpha}\{D_1(-\alpha)-1\}$
Clayton	$\phi(t) = \left(\frac{t^{-\alpha}-1}{\alpha}\right)$	$C_\alpha(u_1,u_2) = \left((u_1^{-\alpha}+u_2^{-\alpha}-1\right)^{-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0$	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$
Gumbel, Hougaard	$\phi(t) = (-\ln t)^{-\alpha}$	$\exp\left\{-[(-\log u_1)^\alpha + (-\log u_2)^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}\right\}, \quad \alpha \geq 1$	$1-\alpha^{-1}$

Frank kopulası için bağımlılık parametresi ve τ arasındaki ilişki Deybe fonksiyonu ile yazılmıştır (Frees and Valdez, 1998):

$$D_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x \frac{t^x}{e^t - 1} dt$$

Bir diğer bağımlılık ölçütü Clayton (1978) tarafından tanıtılan **çapraz-oran fonksiyonu** (cross-ratio function) $CR(S(t,t))$ ile gösterilmektedir ve

$$CR(S(t_1,t_2)) = \frac{S(t_1,t_2)\frac{d}{dt_1}\frac{d}{dt_2}S(t_1,t_2)}{\frac{d}{dt_1}S(t_1,t_2)\frac{d}{dt_2}S(t_1,t_2)}$$

eşitliği ile bulunmaktadır. Kendall rank korelasyon katsayısı ve çapraz oran fonksiyonu arasındaki ilişki,

$$\bar{\tau}_t(T_x,T_y) = \frac{CR(S(t_1,t_2))-1}{CR(S(t_1,t_2))+1}$$

eşitliği ile verilmiştir. Çapraz oran fonksiyonu koşullu anlık ölüm oranı fonksiyonları cinsinden,

$$CR(S(t_1,t_2)) = \frac{\mu_1(x+t_1|T_y=t_2)}{\mu_1(x+t_1|T_y>t_2)}$$

olarak yazılabilmektedir. Çapraz oran fonksiyonu Arşimedyan kopulalarda ise,

$$CR(S(t,t)) = \left(\frac{\phi^{-1}(v)(\phi^{-1})''(v)}{((\phi^{-1})'(v))^2}\right)_{v=\phi(S(t,t))}$$

üreteç fonksiyonu yardımıyla bulunabilmektedir (Spreeuw, 2006).

5.7. Marjinal ve Birleşik Yaşam Fonksiyonlarının Kopula Fonksiyonları ile Tanımlanması

5.7.1. Her iki bireyin hayatta olması durumu

Her iki bireyin hayatta olması durumunda yaşam fonksiyonu,

$$S_{1;t}(s|T_y>t) = \Pr\left[T_x>t+s|T_x>t,T_y>t\right]$$

$$= \frac{\Pr\left[T_x>t+s,T_y>t\right]}{\Pr\left[T_x>t,T_y>t\right]} = \frac{C(S_1(t+s),S_2(t))}{C(S_1(t),S_2(t))} \tag{5.4}$$

olacaktır.

Benzer fonksiyon y için,

$$S_{2;t}(s|T_x>t)=\Pr\left[T_y>t+s|T_x>t,T_y>t\right]$$

$$=\frac{\Pr\left[T_x>t,T_y>t+s\right]}{\Pr\left[T_x>t,T_y>t\right]}=\frac{C(S_1(t),S_2(t+s))}{C(S_1(t),S_2(t))}$$

olarak yazılmaktadır. Eğer mümkünse ölümlülüğün yaşam fonksiyonları yerine anlık ölüm oranları cinsinden ifade edilmesi de tercih edilebilir.

Yaşam fonksiyonuna karşılık gelen anlık ölüm oranı,

$$\mu_1(x+t+s|T_y>t)=-\frac{d}{ds}\ln\left[C(S_1(t+s),S_2(t))\right]$$

$$=\mu_1(x+t+s)\frac{S_1(t+s)(C_1[u,v])_{u=S_1(t+s);v=S_2(t)}}{C(S_1(t+s),S_2(t))}$$

olarak verilmektedir. Eşlerinin her ikisinin de hayatta olması durumunda birleşik yaşam fonksiyonu ise,

$$S_t(s_1,s_2)=C_t\left[S_{1;t}(s_1|T_y>t),S_{2;t}(s_2|T_x>t)\right]=\frac{C\left[S_1(t+s_1),S_2(t+s_2)\right]}{S(t,t)} \quad (5.5)$$

olarak yazılır.

$S_{2;t}(s|T_x>t)$ marjinal yaşam fonksiyonları ile C_t kopulası tanımlanmıştır. Bu kopula t anındaki iki bireyin gelecek yaşam süresi arasındaki bağımlılığı belirtmektedir (Spreeuw, 2006).

5.7.2. Bireylerden birinin ölmesi durumu

Bireylerden birinin ölmesi durumunda yaşam fonksiyonu,

$$S_{1;t}(s|T_y=t_y)=P\left[T_x>t+s|T_x>t,T_y=t_y\right]=\frac{(C_2\left[S_1(t+s),v\right])_{v=S_2(t_y)}}{(C_2\left[S_1(t),v\right])_{v=S_2(t_y)}} \quad (5.6)$$

olur. Burada $C_2[.,.], C[.,.]$'nin ikinci değişkene göre kısmi türevini ifade etmektedir. Bu tanımlama $C_2[S_1(t),v] \neq 0$ ve $v = S_2(t_y)$ koşuluyla yapılabilmektedir.

$(C_2[S_1(t+s),v])_{v=S_2(t_y)} \neq 0$ ve $\mu_1(x+t+s)$; $(x+t+s)$ yaşındaki kişinin anlık ölüm oranını ifade etmek üzere koşullu anlık ölüm oranı,

$$\mu_1(x+t+s \mid T_y = t_y) = -\frac{d}{ds}\ln\left[(C_2[S_1(t+s),v])_{v=S_2(t_y)}\right]$$

$$= \mu_1(x+t+s)\frac{S_1(t+s)(C_{21}[u,v])_{u=S_1(t+s);v=S_2(t_y)}}{(C_2[S_1(t+s),v])_{v=S_2(t_y)}}$$

olarak yazılmaktadır. Bu eşitlikte yer alan $C_{21}[,.,]$ sırasıyla ikinci ve birinci değişkenine göre kısmi türevidir (Spreeuw, 2006).

Hougaard (2000), koşullu anlık ölüm oranı fonksiyonunda, eşin ölüm anı olan t_y 'nin davranışının analiz edilmesi ile yaşamlar arasında uzun dönem veya kısa dönem bağımlılık olup olmadığına karar verilebileceğini belirtmiştir.

Tanım 5.1. T_x ve T_y gelecek yaşam süreleri, eğer $\mu_1(x+t+s \mid T_y = t_y)$ $t_y \in [0,t]$ 'nin artan bir fonksiyonu ise kısa dönem bağımlılık gösterir (ya da $\mu_2(y+t+s \mid T_x = t_x)$ $t_x \in [0,t]$'in artan bir fonksiyonu ise).

Eğer $\mu_1(x+t+s \mid T_y = t_y)$ $t_y \in [0,t]$'nin sabit veya azalan bir fonksiyonu ise, T_x ve T_y arasında uzun dönem bağımlılık vardır (ya da $\mu_2(y+t+s \mid T_x = t_x)$ $t_x \in [0,t]$'in sabit veya azalan bir fonksiyonu ise).

Eğer iki yaşam süresi bağımsız ise bir yaşayanın anlık ölüm oranı diğerinin ölüm anına bağlı olmayacaktır.

5.8. Arşimedyan Kopulalarda Bağımlılık Yapısının İncelenmesi

Spreeuw (2006) tarafından, sık kullanılan Arşimedyan kopula aileleri için eşlerden birinin öldüğü bilindiğinde anlık ölüm oranı fonksiyonları yazılmıştır. Böylece gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılık türü Hougaard (2000)'ın tanımlamasına uygun olarak gösterilmiştir.

Eş.(5.3)'de verilen Arşimedyan kopula genel fonksiyonu,

$$\mu_1(x+t+s|T_y=t_y)=-\frac{d}{ds}\ln\left[(C_2\left[S_1(t+s),v\right])_{v=S_2(t_y)}\right]$$

eşitliğinde yerine koyulduğunda;

$$\mu_1(x+t+s|T_y=t_y)=\mu_1(x+t+s)S_1(t+s)(-\phi^{'}(S_1(t+s)))\left(-\frac{(\phi^{-1})^{''}(v)}{(\phi^{-1})^{'}(v)}\right)_{(v=\phi(S(t+s,t_y)))}$$

koşullu anlık ölüm oranı fonksiyonu elde edilmiştir. Burada,

$$-\left(\frac{(\phi^{-1})^{''}(v)}{(\phi^{-1})^{'}(v)}\right)_{(v=\phi(S(t+s,t_y)))}=-d\frac{\ln\left[-((\phi^{-1})^{'}(v))_{(v=\phi(S(t+s,t_y)))}\right]}{dv}$$

ifadesi t_y'ye bağımlı bir fonksiyon olmaktadır. Eğer bu fonksiyon t_y'nin azalan (artan) bir fonksiyonu ise bağımlılık uzun dönem (kısa dönem) bağımlılığı olacaktır.

Clayton Kopula

Clayton kopula üretecinin tersi $\phi^{-1}(\tau)=(\tau+1)^{-\frac{1}{\theta}}$, parametreleri $\alpha=\theta^{-1}$ ve $\beta=1$ olan Gamma (α,β) dağılımının Laplace dönüşümüdür. Gelecek yaşam süreleri Clayton kopulasıyla modellendiğinde eşlerden birinin t_y anında öldüğü bilindiğinde koşullu anlık ölüm oranı fonksiyonu,

$$\mu_1(x+t+s|T_y=t_y)=\mu_1(x+t+s)(\theta+1)\frac{(S_1(t+s))^{-\theta}}{(S_1(t+s))^{-\theta}+(S_2(t_y))^{-\theta}-1}$$

olarak yazılabilir.

Fonksiyon t_y 'nin azalan bir fonksiyonu olduğu için bağımlılık türü uzun dönem olmaktadır. $t_y = 0$ olduğunda koşullu anlık ölüm oranı fonksiyonu aşağıdaki gibidir: $\mu_1(x+t+s|T_y = t_y) = (\theta+1)\mu_1(x+t+s)$.

Eğer y sözleşmenin düzenlenmesinden hemen sonra ölürse, x'in anlık ölüm oranı marjinal anlık ölüm oranının $\theta+1$ katı olur (Spreeuw, 2006).

Gumbel-Hougaard Kopula

Gumbel-Hougaard kopula üretecinin tersi $\phi^{-1}(\tau) = \exp(-\tau^{\frac{1}{\theta}})$, pozitif durağan dağılımı Laplace dönüşümüdür (Frees and Valdez, 1998). Gelecek yaşam süreleri Gumbel-Hougaard kopulasıyla modellendiğinde eşlerden birinin t_y anında öldüğü bilindiğinde koşullu anlık ölüm oranı fonksiyonu,

$$\mu_1(x+t+s|T_y = t_y) = \mu_1(x+t+s)\left(\frac{(-\ln S_1(t+s))^{\theta}}{(-\ln S_1(t+s))^{\theta} + (-\ln S_2(t_y))^{\theta}}\right)^{1-\frac{1}{\theta}}$$
$$\times \ (1+(\theta-1)((-\ln S_1(t+s))^{\theta} + (-\ln S_2(t_y))^{\theta})^{-\frac{1}{\theta}})$$

olur. Fonksiyon t_y 'nin azalan bir fonksiyonu olduğu için bağımlılık türü yine uzun dönem olacaktır (Spreeuw, 2006).

Frank Kopula

Frank kopula üretecinin tersi $\phi^{-1}(\tau) = \ln\left[1+(e^{\theta}-1)e^{-\tau}\right]/\theta$, pozitif tam sayılar üzerine logaritmik seriler dağılımının Laplace dönüşümüdür (Frees and Valdez, 1998). Gelecek yaşam süreleri Frank kopulasıyla modellendiğinde eşlerden birinin t_y anında öldüğü bilindiğinde koşullu anlık ölüm oranı fonksiyonu,

$$\mu_1(x+t+s|T_y = t_y)$$
$$= \mu_1(x+t+s)S_1(t+s)(-\theta)\frac{e^{\theta S_1(t+s)}}{1-e^{\theta S_1(t+s)}}\left(\frac{1-e^{\theta}}{(1-e^{\theta})-(1-e^{\theta S_1(t+s)})(1-e^{\theta S_2(t_y)})}\right)$$

biçiminde yazılabilir. Fonksiyon t_y 'nin azalan bir fonksiyonu olduğu için bağımlılık türü burada yine uzun dönem olacaktır (Spreeuw, 2006).

5.9. Kopula modelleri ile ifade edilen bağımlılığın özel durumları

Bağımlı değişkenler arasındaki ilişkiyi tanımlamada ortaya çıkan üç özel durum: *bağımsızlık*, *comonotonicity* (*Fréchet üst sınırı*) ve *countermonotonicity* (*Fréchet alt sınırı*) durumları kopula modelleri ile ifade edilerek incelenecektir. Fréchet üst sınırı maksimum pozitif bağımlılığı, Fréchet alt sınırı maksimum negatif bağımlılığı göstermektedir.

Genelde, iki yaşam süresinin pozitif bağımlılığa sahip olduğu varsayılmaktadır. Bir başka deyişle, iki yaşam süresinin pozitif kadran bağımlı (PQD) olduğu kabul edilmektedir. Lehmann (1966)'a göre bu durumda,

$$\Pr\left[T_x > s_1, T_y > s_2\right] \geq \Pr\left[T_x > s_1\right]\Pr\left[T_y > s_2\right] \;, \forall\ s_1, s_2 \in R$$

olacaktır.

Burada bireylerden birinin ölmesi ve her iki bireyin hayatta olması durumlarında Fréchet üst sınır, Fréchet alt sınır ve bağımsızlık durumu olmak üzere üç özel durum incelenmektedir.

5.9.1. Bağımsızlık durumunda kopula modelleri

Yaşam süreleri rastlantı değişkenlerinin bağımsız olduğu varsayımı altında koşullu yaşam fonksiyonları tanımlanacaktır.

Bireylerden birinin ölmesi durumu

Bağımsızlık durumunda kopula fonksiyonunun C[u,v] = uv ve y'nin öldüğü bilindiğinde x'in marjinal yaşam fonksiyonu,

$$S_{1:t}(s \mid T_y = t_y) = \frac{S_1(t+s)}{S_1(t)}$$

olacaktır. x'in anlık ölüm oranı ise;

$$\mu_1(x+t+s|T_y=t_y)=\mu_1(x+t+s)\frac{S_1(t+s)}{S_1(t+s)}=\mu_1(x+t+s)$$

olarak ifade edilmektedir. Beklenildiği gibi x'in anlık ölüm oranı y'nin ölüm anına bağlı değildir (Spreeuw, 2006).

Her iki bireyin hayatta olması durumu

$C[u,v]=uv$ için,

$\mu_1(x+t+s|T_y>t)=\mu_1(x+t+s)$ olmaktadır.

Beklenildiği gibi bağımsızlık durumunda, bireyin ölümlülüğü diğer bireyin yaşamına bağlı değildir.

Ayrıca birleşik yaşam fonksiyonu,

$$S_t(s_1,s_2)=\frac{S_1(t+s)S_2(t+s)}{S(t,t)}=S_{1;t}(s|T_y>t)S_{2;t}(s|T_x>t)$$

olacaktır. $C_t(u,v)=uv$ olduğu için, her iki bireyin hayatta olması durumunda gelecek yaşam sürelerinim birleşik dağılımı bağımsız kopuladır (Spreeuw, 2006).

5.9.2. Güçlü pozitif bağımlılık durumunda kopula modelleri

Yaşam süreleri rastlantı değişkenleri arasında pozitif güçlü bağımlılık olduğu varsayımı altında koşullu yaşam fonksiyonları tanımlanacaktır.

Bireylerden birinin ölmüş olması durumu

$C[u,v]=\min[uv]$ ile maksimum pozitif bağımlılık gösterdiği ve y'nin öldüğü bilindiğine göre x'in marjinal yaşam fonksiyonu;

$$S_{1;t}(s|T_y=t_y)=\begin{cases}1 \text{ için } s < S_1^{[-1]}(S_2(t_y))-t \\ 0 \text{ için } s > S_1^{[-1]}(S_2(t_y))-t\end{cases}$$

olacaktır. $S_{1;t}(s|T_y = t_y)$ yalnızca $S_2(t_y)$ < $S_1(t)$ olduğu sürece var olmaktadır. $S_1^{[-1]}(K)$ ise;

$$S_1^{[-1]}(K) = \begin{cases} S_1^{-1}(K) \text{ için } 0<K \leq 1 \\ \omega_\gamma \text{ için } K=0 \end{cases}$$

eşitliği ile yazılmaktadır.

Sözel olarak ifade etmek gerekirse, y'nin t_y anında öldüğü verildiğinde x, $x + S_1^{[-1]}(S_2(t_y))$ yaşında kesinlikle ölecektir. Anlık mortalite oranı belirtilememesine rağmen, bu durum uzun dönem bağımlılığın bir örneği olarak kabul edilebilmektedir. $S_1^{[-1]}(S_2(t_y))$, t_y ile artacaktır. y ne kadar erken ölürse x de o kadar erken ölecektir. y, 0 anında öldüğünde, x de 0 anında ölecektir (Spreeuw, 2006).

Her iki bireyin hayatta olması durumu

$C[u,v] = \min[uv]$ için, y'nin yaşadığı bilindiğine göre x'in marjinal yaşam fonksiyonu;

$$S_{1;t}(s|T_y > t) = \frac{\min[S_1(t+s), S_2(t)]}{\min[S_1(t), S_2(t)]}$$

olacaktır. Benzer ifade $S_{2;t}(s|T_x > t)$ fonksiyonu için de yazılabilmektedir. Bu durumda birleşik yaşam fonksiyonu,

$$C_t\left[S_{1;t}(s|T_y > t), S_{2;t}(s|T_x > t)\right] = \frac{\min[S_1(t+s), S_2(t+s)]}{S(t,t)}$$

$$= \min\left[S_{1;t}(s|T_y > t), S_{2;t}(s|T_x > t)\right]$$

olarak ifade edilmektedir.

Sözel olarak ifade etmek gerekirse, birleşik dağılım başlangıçtaki kopula için Fréchet üst sınırına sahipse, gelecekte yine sahip olacaktır (Spreeuw, 2006).

5.9.3. Güçlü negatif bağımlılık durumunda kopula modelleri

Yaşam süreleri rastlantı değişkenleri arasında negatif güçlü bağımlılık olduğu varsayımı altında koşullu yaşam fonksiyonları tanımlanacaktır.

Bireylerden birinin ölmesi durumu

$C[u,v] = \max[u+v-1,0]$ ile maksimum negatif bağımlılık gösterdiği ve y'nin öldüğü bilindiğine göre x'in marjinal yaşam fonksiyonu;

$$S_{1;t}(s|T_y = t_y) = \begin{cases} 1 \text{ için s} < S_1^{[-1]}(1-S_2(t_y))-t \\ 0 \text{ için s} > S_1^{[-1]}(1-S_2(t_y))-t \end{cases}$$

olacaktır. $S_{1;t}(s|T_y = t_y)$ yalnızca $S_2(t_y) > 1-S_1(t)$ olduğu sürece var olmaktadır. Diğer bir deyişle y'nin t_y anında öldüğü verildiğinde x, $x+S_1^{-1}(1-S_2(t_y))$ yaşında kesinlikle ölecektir. y ne kadar erken ölürse x de o kadar geç ölecektir. $t_y = 0$ için, $S_{1;t}(s|T_y = t_y) = \omega_x$ olacaktır. Bu durum, y'nin 0 anındaki ölümünü, x'in ölümünün son yaşa ulaşmadan olmayacağını göstermektedir (Spreeuw, 2006). Margus (2002)'un çalışmasında yer aldığı gibi, bireylerden birinin ölümü diğerinin ölümünü engellemektedir.

Her iki bireyin hayatta olması durumu

$C[u,v] = \max[u+v-1,0]$ için, y'nin yaşadığı bilindiğine göre x'in marjinal yaşam fonksiyonu,

$$S_{1;t}(s|T_y > t) = \frac{\max[S_1(t+s)+S_2(t)-1,0]}{S(t,t)}$$

olacaktır. Benzer ifade $S_{2;t}(s|T_x > t)$ fonksiyonu için de yazılabilmektedir. Bu durumda birleşik yaşam fonksiyonu,

$$C_t\left[S_{1;t}(s|T_y>t),S_{2;t}(s|T_x>t)\right]=\frac{\max\left[S_1(t+s)+S_2(t+s)-1,0\right]}{S(t,t)}$$

$$=\max\left[S_{1;t}(s|T_y>t)+S_{2;t}(s|T_x>t)-1,0\right]$$

olarak ifade edilmektedir.

Sözel olarak ifade etmek gerekirse, birleşik dağılım fonksiyonu başlangıçtaki kopula için Fréchet alt sınırına sahipse, gelecekte yine sahip olacaktır (Spreeuw, 2006).

6. DİĞER BAĞIMLILIK MODELLERİ

6.1. Markov Modelleri

18. Uluslararası Aktüerler Kongresi'nde Amsler (1968) tarafından verilen seminerde ve Hoem (1969)'in makalesinden sonra Markov süreç modeli hayat sigortaları fonksiyonlarının hesaplanmasında tercih edilen bir araç olmuştur (Denuit and Cornet, 1999). Markov süreçleri aktüerya literatüründe kapsamlı olarak incelenmiştir: Waters (1984), Norberg (1989), Denuit and Cornet (1999), Denuit et al., (2001), Wolthuis (2003).

Evli çiftler için düzenlenmiş sigorta sözleşmelerini fiyatlandırmak için Norberg (1989) ve Wolthuis (2003) bireylerin medeni hallerine bağlı anlık ölüm oranlarının kullanıldığı Markov süreç modelini önermişlerdir. (x,y) evli çiftleri için aşağıdaki durumlar tanımlanmıştır:

Durum 0: Her iki birey de yaşıyor

Durum 1: erkek birey (x) ölmüş, kadın birey (y) yaşıyor

Durum 2: erkek birey (x) hayatta, kadın birey (y) ölmüş

Durum 3: Her iki birey de ölmüş

Evli çiftlerin gelecekteki medeni hal değişimleri (boşanmalar göz ardı edilerek) Şekil 6.1'deki gibi gösterilen bir Markov süreci olarak kabul edilebilmektedir.

$i, j = 0,1,2,3$ için $p_{ij}(t_1, t_2)$ Markov sürecinin geçiş olasılıklarını göstermektedir.

$p_{ij}(t_1,t_2) = \Pr[(x,y)'nin$ t_2 anında j durumunda olması $|(x,y)'nin$ t_1 anında i durumunda olması]

Herhangi bir $0 \le t_1 \le t_2$ için, tüm i ve j' ler için 0 ≤ $p_{ij}(t_1,t_2)$ ≤ 1 ve eğer i = j ise $p_{ij}(t_1,t_1)$ = 1 olduğu, değilse $\sum_j p_{ij}(t_1,t_2)$ = 1 olduğu görülmektedir. j = 0,1,2,3 için $\mu_{ij}(t)$ t anında i' den j' ye anlık geçiş oranlarını göstermektedir. Anlık geçiş oranları geçiş olasılıkları ile ilişkilendirildiğinde,

$$p_{ij}(t,t+\Delta t)=\begin{cases}\mu_{ij}(t)\Delta t+o(\Delta t) & \text{i} \neq \text{j} \\ 1-\sum_{r=0}^{3}\mu_{ir(t)}\Delta t+o(\Delta t) & \text{i = j}\end{cases}$$

ile gösterilmektedir. o(.), $\lim_{h\to 0} o(h)/h=0$'ı sağlayan bir fonksiyondur. $0\le t_1\le t_2$ için geçiş olasılıkları aşağıdadır (Denuit and Cornet, 1999):

$$p_{00}(t_1,t_2)=\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2}\left(\mu_{01}(\tau)+\mu_{02}(\tau)\right)d\tau\right]$$

$$p_{11}(t_1,t_2)=\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2}\mu_{13}(\tau)d\tau\right]$$

$$p_{22}(t_1,t_2)=\exp\left[-\int_{t_1}^{t_2}\mu_{23}(\tau)d\tau\right]$$

$$p_{ij}(t_1,t_2)=1$$

0 durumunda j durumuna geçiş olasılığı ise,

$$p_{0j}(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}p_{00}(t_1,\tau)\mu_{0j}(\tau)p_{jj}(\tau,t_2)d\tau$$

olarak yazılmaktadır.

(T_x,T_y) için birleşik yaşam fonksiyonu,

$$Pr[T_x>t_1,T_y>t_2]$$

$$=p_{00}(0,t_2)+p_{00}(0,t_1)p_{01}(t_1,t_2)\quad,\ 0\le t_1\le t_2$$

$$=p_{00}(0,t_1)+p_{00}(0,t_2)p_{02}(t_2,t_1)\quad,\ 0\le t_2\le t_1$$

marjinal yaşam fonksiyonları ise,

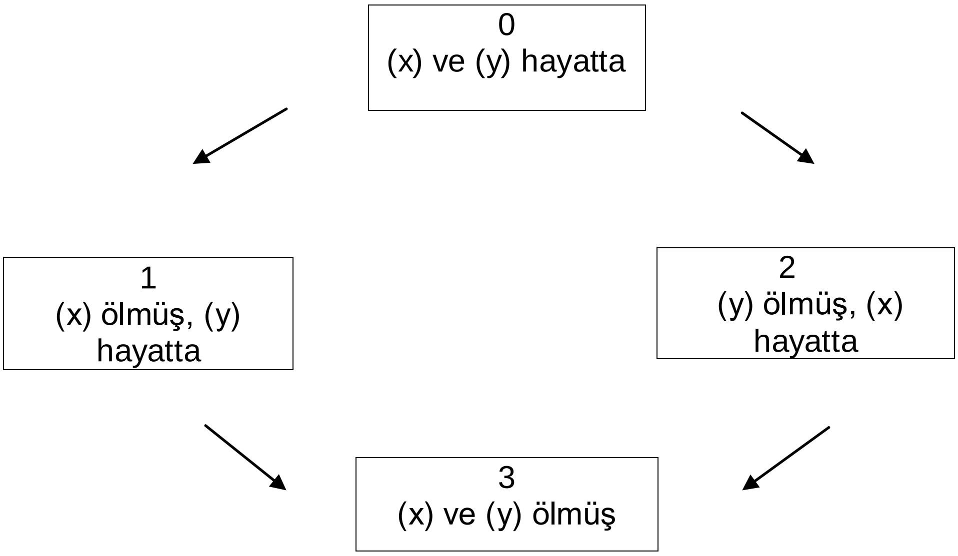
$$Pr[T_x>t_1]=\Pr[T_x>t_1,T_y>0]=p_{00}(0,t_1)+p_{02}(0,t_1)$$

$$Pr[T_y>t_2]=\Pr[T_x>0,T_y>t_2]=p_{00}(0,t_2)+p_{02}(0,t_2)$$

$$t_1,t_2\ge 0$$

olarak yazılmaktadır (Denuit et al., 2001).

Norberg (1989) ve Wolthuis (2003) çiftlerin ölümlülükleri için sürekli zamanlı bir Markov zinciri (time-continuous Markov chain) oluşturmuştur.



Şekil 6.1. Yaşam Durumuna Bağlı Dört Durumlu Markov Modeli

Bu modelde,

$\mu_{01}(.)$; eşi hayatta olan bir erkek bireyin anlık ölüm oranını,

$\mu_{23}(.)$; eşi ölmüş olan bir erkek bireyin anlık ölüm oranını,

$\mu_{02}(.)$; eşi hayatta olan bir kadın bireyin anlık ölüm oranını,

$\mu_{13}(.)$ eşi ölmüş olan bir kadın bireyin anlık ölüm oranını göstermektedir.

Norberg (1989)'de gösterildiği gibi, iki gelecek yaşam süresi arasındaki bağımlılık $\mu_{01}(.)$ ve $\mu_{23}(.)$ ile $\mu_{02}(.)$ ve $\mu_{13}(.)$ anlık ölüm oranları arasındaki eşitsizlikten anlaşılmaktadır (Spreeuw and Wang, 2008).

Wolthuis (2003) bağımlılık için yalnızca tek bir parametre kullanmıştır.

Dört durumlu bir Markov modeli için anlık ölüm oranları şöyle tanımlanmaktadır:

$$\mu_{01}(t) = (1-\alpha)\mu_{x+t}$$

$$\mu_{02}(t) = (1-\alpha)\mu_{y+t}$$

$$\mu_{23}(t) = (1+\alpha)\mu_{x+t}$$

$$\mu_{13}(t) = (1+\alpha)\mu_{y+t}$$

$$\alpha \in (0,1)$$

Wolthuis (2003) dört durumlu Markov modelini Hollanda nüfusu için uygulamıştır. Böylece eşlerin her ikisi hayatta olduğu sürece ölümlülük yoğunlukları genel Danimarka nüfusunun ölümlülük yoğunluklarından düşük, eşlerden birinin hayatta olmadığı durumda ise genel nüfusa göre daha yüksek olduğu kabul edilmiştir.

Denuit ve Cornet (1999) ve Denuit et al. (2001), Wolthuis'in yaklaşımını her bir geçiş yoğunluğu için tek parametre olacak şekilde dört parametre kullanarak genelleştirmiştir:

$$\mu_{01}(t) = (1-\alpha_{01})\mu_{x+t}$$

$$\mu_{23}(t) = (1+\alpha_{23})\mu_{x+t}$$

$$\mu_{02}(t) = (1-\alpha_{02})\mu_{y+t}$$

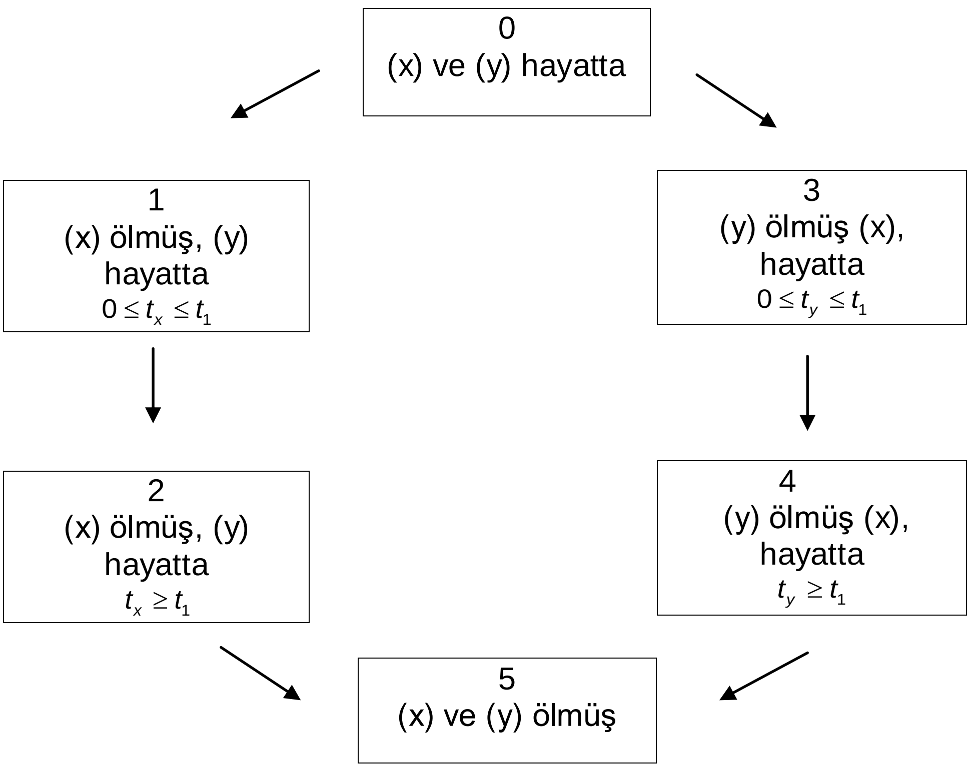
$$\mu_{13}(t) = (1+\alpha_{13})\mu_{y+t}$$

α_{ij} negatif değildir ve α_{ij} 0 ile 1 arasındadır.

Denuit ve Cornet (1999) ve Denuit et al. (2001) bu yaklaşımı Belçika veri kümesine uygulayarak genel Belçika nüfusu ile karşılaştırılmış, evli erkek ve kadınların ölümlülüklerinde önemli bir azalma, dul erkek ve kadınların ölümlülüklerinde ise önemli bir artış olduğu görülmüştür.

Denuit ve Cornet (1999) ve Denuit et al. (2001) çalışmalarında yer alan Markov modeli uzun dönem bağımlılığın özel bir durumudur, çünkü gelecek yaşamın ölümlülüğü ölen çiftin ölüm zamanından bağımsızdır. Kısa dönem bağımlılık incelenmek istendiğinde genellikle eşlerden birinin kaybından sonraki ilk altı ay ya da ölümden sonraki ilk yıllar yaşayan birey gözlem altına alınmaktadır.

Spreeuw ve Wang (2008) çalışmasında modelin hem kısa hem de uzun dönem bağımlılığı ifade edebilmesi için Norberg (1989) ve Wolthuis (2003)'in dört durumlu Markov modeli 6 durumlu Markov modeline dönüştürülmüştür. Eşlerden birinin hayatta olduğu 2 ve 4 durumlarına ilaveten "eşlerden birinin hayatta olduğu fakat diğer eşin ölümünün üzerinden henüz az bir zaman geçtiği durumlar" 1. ve 3. Durum olarak modele eklenmiştir.



Şekil 6.2. Yaşam Durumuna Bağlı Altı Durumlu Markov Modeli

Spreeuw ve Wang (2008) tarafından oluşturulan altı durumlu Markov Modeli'nde geçiş yoğunlukları,

$$\mu_{01}(t) = \mu_1(x+t \mid T_y > t) = (1-\alpha_{01})\mu_1(x+t)$$

$$\mu_{03}(t) = \mu_2(y+t \mid T_x > t) = (1-\alpha_{03})\mu_2(y+t)$$

$$\mu_{15}(t) = \mu_2(y+t \mid 0 \le t - T_x < t_1) = (1+\alpha_{15})\mu_2(y+t)$$

$$\mu_{25}(t) = \mu_2(y+t \mid t - T_x \ge t_1) = (1+\alpha_{25})\mu_2(y+t)$$

$$\mu_{35}(t) = \mu_1(x+t \mid 0 \le t - T_y < t_2) = (1+\alpha_{35})\mu_1(x+t)$$

$$\mu_{45}(t) = \mu_1(x+t \mid t - T_y \ge t_2) = (1+\alpha_{45})\mu_1(x+t)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada $\alpha_{01}, \alpha_{03}, \alpha_{15}, \alpha_{25}, \alpha_{35,} \alpha_{45} \ge 0$ olacaktır.

Genişletilmiş olan altı durumlu Markov bu modeli,

$\alpha_{15} = \alpha_{25} = \alpha_{13}^{*}$ ve $\alpha_{35} = \alpha_{45} = \alpha_{23}^{*}$ eşitlikleri sağlandığında,

dört durumlu Markov modeline dönüşmektedir

α_{13}^{*} ve α_{23}^{*} dört durumlu markov modelindeki geçiş parametrelerini göstermektedir

(Spreeuw and Wang, 2008).

α_{ij} parametreleri geçiş fonksiyonlarından elde edilmektedir (Wolthuis, 2003).

Markov modelleri son yıllarda gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılığın modellenmesinde kullanılan bir yöntemdir. Markov modelleri ile hem kısa dönem hem de uzun dönem bağımlılık yapısı incelenebilmektedir. Kopula modelleri ile karşılaştırıldığında ise tahmin edilmesi gereken parametre sayısının daha fazla olduğu görülmektedir.

6.2. Ortak Etki Modelleri

Ortak etki modelleri (common shock models), olası eş zamanlı ölümler nedeniyle bağımlılığın olduğu birbiriyle ilişkili yaşam süreleri için kullanılmaktadır.

Ortak Etki Modeli, eş zamanlı ölümlerden veya çiftin her ikisinin de kısa zaman içerisinde ölümünün gerçekleştiği durumlardan kaynaklanan bağımlılığın son yaşayan durumundaki annüitelerin primlerine olan etkisini çalışan Panjer (1994) tarafından kullanılmıştır (Spreeuw, 2006).

Ortak etki modeli bireylerin katastrofik bir olay nedeniyle karşılaşacağı risk nedeniyle yaşamlar arasında bağımlılık kurmaktadır. Bu katastrofik olay örneğin; bir uçak kazası, kasırga ya da deprem olabilir. Bu yaşamlar belirli bir zamanda ortak olarak bulundukları yerden dolayı bağımlıdırlar ve risk bu alanda karşılaştıkları ortak felakettir. Örneğin iş ortakları birleşik yaşam sigorta poliçesi almak isteyebilirler ve beraber uçak seyahati yaptıkları durum dışında bağımsız yaşamlara sahiptirler. Bu durumda yaşamlar arasındaki bağımlılık ortak etki modeliyle modellenmelidir. Benzer şekilde evli çiftler paylaştıkları ortak yaşam ve alışkanlıklar dolayısıyla ortak katastrofik olaylara maruz kalabilirler. Her iki çiftin de yaşamını etkileyecek olan felaket ya da şok olarak ifade edilen olaylar ortak etki modelleri ile modellenmektedir.

x ve y yaşlarındaki evli bir çift için, gelecek yaşam süreleri, sırasıyla erkek ve kadın birey için; sürekli dağılımlara sahip olan T_x ve T_y olarak verilmektedir. $G_{T_x:T_y}$ gelecek yaşam sürelerinin birleşik dağılımını, G_{T_i} ise gelecek yaşam süresi rastlantı değişkeni T_i 'nin marjinal dağılım fonksiyonunu ifade etmektedir. Bağımsızlık varsayımı kullanıldığında birleşik dağılım fonksiyonu,

$$G_{T_x:T_y}(s,t) = G_{T_x}(s)\, G_{T_y}(t)$$

olmaktadır.

Ortak etki modelinde ortak etki rastlantı değişkeni (common shock random variable), Z olarak tanımlanmaktadır. Z rastlantı değişkeni, x ve y bireyleri için tanımlanan T_x *ve* T_y 'nin birleşik dağılım fonksiyonunu etkileyecektir. Bu rastlantı değişkeni gelecek yaşam sürelerinden bağımsızdır ve ortak şokun zamanı ile ilişkilidir. Rastlantı değişkeni Z,

$$G_z(z) = e^{-\lambda z}.$$

ile üstel dağılıma sahiptir. $z > 0$ ve $\lambda \geq 0$ için λ ortak etki parametresi olarak tanımlanmaktadır. $T_x = \min\{T_x, Z\}$ ve $T_y = \min\{T_y, Z\}$ olmak üzere birleşik yaşam fonksiyonu,

$$G_{T_x:T_y}(s,t) = P(\min\{T_x, Z\} > s \cap \min\{T_y, Z\} > t)$$

$$= P([T_x > s \cap Z > s] \cap [T_y > t \cap Z > t])$$

$$= P(T_x > s \cap T_y > t \cap Z > \max\{s,t\})$$

olarak yazılmaktadır (Bowers et al., 1997).

T_x, T_y, Z rastlantı değişkenleri bağımsız olduğu bilindiğine göre,

$$G_{T_x:T_y}(s,t) = G_{T_x}(s)\ G_{T_y}(t)\ \mathrm{e}^{-\lambda \max\{s,t\}}$$

olacaktır. Marjinal yaşam dağılım fonksiyonları ise,

$$G_{T_x}(s) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_x > s \cap \mathrm{T}_y > 0)$$

$$= G_{T_x}(s)\ \mathrm{e}^{-\lambda s}$$

$$G_{T_y}(s) = \mathrm{P}(\mathrm{T}_x > 0 \cap \mathrm{T}_y > t)$$

$$= G_{T_y}(t)\ \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

olarak bulunmaktadır. Çoklu yaşam durumlarından birleşik yaşam ve son yaşayan durumları için yaşam olasılıklarının ortak etki modeli kullanılarak yazılabilmesi için öncelikle gelecek yaşam süresi rastlantı değişkenleri tanımlanmalıdır.

Birleşik yaşam durumu için gelecek yaşam süresi rastlantı değişkeni, $T_{x:y} = \min\{T_x, T_y\}$

ile ifade edilmektedir. Bu durumda birleşik yaşam fonksiyonu,

$$G_{T_x:T_y}(s) = G_{T_x}(s)\ G_{T_y}(s)\ \mathrm{e}^{-\lambda s},\ s>0$$

olacaktır.

Son yaşayan durumu için gelecek yaşam süresi rastlantı değişkeni,

$$T_{\overline{x:y}} = \max\{T_x, T_y\}$$

ile ifade edilmektedir. Bu durumda birleşik yaşam fonksiyonu,

$$G_{T_{\overline{x:y}}}(s) = [G_{T_x}(s) + G_{T_y}(s) - G_{T_x:T_y}(s,s)]\ \mathrm{e}^{-\lambda s},\ s>0$$

olacaktır (Bowers et al., 1997).

λ ortak etki parametresi değiştikçe yaşamlar arasındaki bağımlılığın etkisi de değişmektedir. $\lambda = 0$ olduğunda $e^{-\lambda z} = 1$ olacaktır ve böylece birleşik yaşam ve son yaşayan durumları için yazılan birleşik yaşam fonksiyonu formülleri bağımsızlık durumunda kullanılan formüllere indirgenmektedir. $\lambda > 0$ olduğunda ise $e^{-\lambda z} < 1$ olacaktır ve bu durumdaki yaşam olasılıkları, bağımsızlık varsayımının kullanıldığı duruma göre daha küçük olmaktadır.

Ortak etki rastgele değişkeni λ parametresi ile üstel bir değişkendir. Bu değişken, şokun gerçekleşme zamanı ile ilişkilidir, bu nedenle şokun t anından önce gerçekleşme olasılığı,

$$P(Z \le t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

ile tanımlanacaktır.

X ve Y bireylerin ölüm anındaki yaşlarını göstermek üzere; x ve y yaşlarındaki evli bir çift için, gelecek yaşam süreleri, sırasıyla erkek ve kadın birey için; sürekli dağılımlara sahip olan T_x ve T_y olarak verilmektedir. X ve Y rastlantı değişkeni olarak tanımlanmak istenirse,

$$X^* = T_x + x = \min\{X, Z + x\}$$

$$Y^* = T_y + y = \min\{Y, Z + y\}$$

olacaktır. İki değişkenli dağılım fonksiyonu,

$$H(x+a, y+b) = P(X^* \le x+a, Y^* \le y+b)$$

$$= 1 - e^{-\lambda a}(1 - F_1(x+a)) - e^{-\lambda b}(1 - F_2(y+b))$$

$$+ e^{-\lambda \max\{a,b\}}(1 - F_1(x+a))(1 - F_2(y+b))$$

olarak yazılacaktır.

Burada marjinal dağılımların Gompertz dağılımı değil, λ 'nın bir fonksiyonu olduğu görülmektedir:

$$H(x+a, \infty) = 1 - e^{-\lambda a}(1 - F_1(x+a))$$

$$H(\infty, y+b) = 1 - e^{-\lambda b}(1 - F_2(y+b))$$

Böylece x yaşındaki kişinin k yıl yaşama olasılığı,

$${}_k p_x = \frac{1 - H(x+k, \infty)}{1 - H(x, \infty)}$$

$$= e^{-\lambda k}\frac{1 - F_1(x+k)}{1 - F_1(x)}$$

eşitliği ile bulunacaktır.

Böylece son yaşayan durumu için yaşam olasılığı,

$${}_k p_{\overline{x:y}} = {}_k p_x + {}_k p_y - e^{-\lambda k}\, {}_k p_x\, {}_k p_y$$

ile bulunacaktır.

$\lambda = 0$ olduğunda yaşam olasılığı formülleri bağımsızlık varsayımı için kullanılan formüle indirgenmektedir:

$$ {}_{k}p_{x} = \frac{1 - F_1(x+k)}{1 - F_1(x)} $$

$$ {}_{k}p_{\overline{x:y}} = {}_{k}p_{x} + {}_{k}p_{y} - {}_{k}p_{x}\,{}_{k}p_{y} $$ (Elliot, 2008).

Ortak etki modeli katastrofik bir olay nedeniyle karşılaşacağı risk nedeniyle yaşamlar arasında bağımlılık kurmaktadır. Yaşayanlar arasındaki bağımlılığın diğer nedenlerini göz önüne almamaktadır. Bu nedenle çoklu yaşam sözleşmelerinde bağımlılık varsayımı dikkate alınarak yapılan hesaplamalarda yetersiz kalmakta ve sınırlı olarak kullanılabilmektedir.

Kopula ve Markov modelleri ile karşılaştırıldığında ise hesaplamalarda matematiksel olarak daha fazla kolaylık sağlamaktadır.

7. GELECEK YAŞAM SÜRELERİNİN BAĞIMLILIĞI VARSAYIMI ALTINDA ÇOKLU HAYAT ÜRÜNLERİNDE PRİM HESABI

Bu bölümde gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında, çoklu hayat ürünleri için NTP değerlerinin kopula fonksiyonları yardımıyla nasıl bulunacağı ele alınacaktır. Kopula fonksiyonları içerisinde yaşam fonksiyonları veya dağılım fonksiyonları kullanılabilmektedir. Her iki durum için de NTP değerlerinin hesaplanması ele alınacak, sayısal çalışmalarda ise yaşam fonksiyonlarının kullanılması tercih edilecektir.

Gelecek yaşam sürelerinin bağımsız olarak kabul edilmesinin birleşik yaşam ve son yaşayan durumları için düzenlenen sigorta ürünlerinde eksik ya da fazla değerlendirmeye neden olduğu sayısal örneklerle açıklanacaktır. Bu nedenle evli çiftler için birleşik yaşam ve son yaşayan durumları için düzenlenen annüitelerde NTP değerleri, Frank kopula fonksiyonu yardımıyla hesaplanacak ve bağımsızlık varsayımı altında bulunan değerlerle karşılaştırılacaktır. Ayrıca annüite NTP'leri için Fréchet alt ve üst sınır kopula fonksiyonları yardımıyla alt ve üst sınır değerleri bulunacaktır. Böylece maksimum pozitif bağımlılık (Fréchet üst sınırı) ve maksimum negatif bağımlılık (Fréchet alt sınırı) altında NTP'ler için değer aralığı bulunmuş olacaktır. Son olarak gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımının annüite rezerv değerlerine olan etkisini inceleyebilmek için, NTP değerleri bulunan annüiteler için rezerv değerleri hesaplanacaktır.

Net tek prim hesaplamalarını yaparken Frees et al. (1996) tarafından çalışılan ve literatürde sık kullanılan veri setine ait parametre değerleri kullanılacaktır.

Frees et al. (1996) bir Kanada sigorta şirketinden alınan 14,947 tane birleşik ve son yaşayan annüite sözleşmesinden oluşan veri setinde yaşam sürelerinin bağımlı olması durumunu çalışmıştır. Evli çiftler arasında pozitif bağımlılığın daha yaygın olduğu kabul edildiğinden bağımlılığın modellenmesinde öncelikle Frank, Gumbel-Hougaard ve Clayton kopulaları tercih edilmiştir. Yaşam sürelerinin marjinal dağılımını belirlerken ise Gompertz ve Weibull dağılımları kullanılmış ve sonuçları karşılaştırılmıştır. Yaşam sürelerinin marjinal dağılımının Gompertz dağılımına uyduğunu belirlemiş ve birleşik yaşam fonksiyonunu modellemek için de Frank kopulasının uygun olduğunu belirtmiştir. Frees et al. (1996), en çok olabilirlik yöntemi sonucunda Frank kopulası için bağımlılık parametresini, α : -3,367; Gompertz dağılımının parametrelerini ise kadın ve erkek birey için sırasıyla: $m_x = 85.82, \sigma_x = 9.98$ ve $m_y = 89.4, \sigma_y = 8.12$ olarak bulmuştur. Frank kopulası için bağımlılık parametresinin değer aralığı $-\infty,+\infty)$ 'dur. Bağımlılık parametresinin negatif değer alması yaşam süreleri arasında pozitif bağımlılık olduğunun göstergesidir.

7.1. Fréchet Sınırları İle Annüitelerde Prim Hesabı

İki değişkenli dağılımlar için Fréchet sınırları kullanılarak rastlantı değişkenleri arasındaki olası bağımlılığın azami etkisi ölçülmektedir. Fréchet sınırlarının annüite net tek primlerine uygulanması ile prim değerlerinin değişeceği alt ve üst sınırlar bulunmuş olacaktır.

Fréchet sınırları, Carierre ve Chan (1984) tarafından ilk kez annüite net tek primlerine uygulanmıştır.

x ve y yaşlarındaki bireylerin t yıl birlikte yaşama olasılığı (birleşik yaşam durumu) için Fréchet sınırları;

$$\max\left\{0, {}_tp_x + {}_tp_y - 1\right\} \le {}_tp_{xy} \le \min\left\{{}_tp_x, {}_tp_y\right\}$$

İle ifade edilirken x ve y yaşlarındaki bireylerin en az birinin t yıl birlikte yaşama olasılığı için (Son yaşayan durumu) için Fréchet sınırları,

$$1 - \min\left\{{}_tq_x, {}_tq_y\right\} \le {}_tp_{\overline{xy}} \le 1 - \max\left\{{}_tq_x + {}_tq_y - 1, 0\right\}$$

olmaktadır.

Yaşam olasılıkları annüite NTP formüllerine yerleştirildiğinde;

$$a^{\min}_{\overline{xy};\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \left\{1 - \min\left\{{}_tq_x, {}_tq_y\right\}\right\}$$

$$a^{\max}_{\overline{xy};\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \left\{1 - \max\left\{{}_tq_x, {}_tq_y - 1, 0\right\}\right\}$$

$$a^{\min}_{xy;\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \max\left\{0, {}_t p_x + {}_t p_y - 1\right\}$$

$$a^{\max}_{xy;\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k \min\left\{{}_t p_x, {}_t p_y\right\}$$

eşitlikleri elde edilmektedir.

$a_{\overline{xy};\overline{n}|}$ ve $a_{xy;\overline{n}|}$ sırasıyla son yaşayan ve birleşik yaşam durumları için yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanan annüite NTP'lerini göstermek üzere,

$$a^{\min}_{\overline{xy};\overline{n}|} \le a_{\overline{xy};\overline{n}|} \le a^{\max}_{\overline{xy};\overline{n}|} \text{ ve } a^{\min}_{xy;\overline{n}|} \le a_{xy;\overline{n}|} \le a^{\max}_{xy;\overline{n}|}$$

olacaktır.

$a_{x|y}$, x yaşındaki kişiye yapılacak ödemelerin y yaşındaki kişinin ölümünden sonra başlayan koşullu annüite için Fréchet sınırları,

$$a^{\min}_{x|y} = \sum_{k=1}^{W_y} v^k \, {}_k p_y - \sum_{k=1}^{\min(W_x, W_y)} v^k \min\left\{{}_k p_x, {}_k p_y\right\}$$

$$a^{\max}_{x|y} = \sum_{k=1}^{W_y} v^k \, {}_k p_y - \sum_{k=1}^{\min(W_x, W_y)} v^k \max\left\{0, {}_k p_x + {}_k p_y - 1\right\}$$

olarak elde edilmektedir.

$a_{x|y}$ yaşam sürelerinin bağımsızlığı varsayımı altında hesaplanan annüite NTP'ini göstermek üzere,

$$a^{\min}_{x|y} \le a_{x|y} \le a^{\max}_{x|y}$$

eşitsizliği sağlanacaktır (Denuit et al., 2001).

Bölüm 7.2'de son yaşayan, birleşik yaşam ve koşullu hayat annüiteri için yapılan NTP hesaplamalarında Fréchet alt ve üst sınırları da belirlenmiştir. Ayrıca TRHA 2011 tablo değerleri kullanılarak son yaşayan ve birleşik yaşam annüite NTP değerlerinin değişebileceği alt ve üst sınır değerleri bulunmuş, sonuçlar Ek 1, 2, 3 ve 4'de verilmiştir.

7.2. Yaşam Fonksiyonları İle Annüitelerde Prim Hesabı

Birleşik yaşam fonksiyonunun marjinal yaşam fonksiyonları ve kopula fonksiyonu yardımıyla elde edilebileceği beşinci bölümde gösterilmişti. Annüite NTP'lerini belirlemek için kullanılacak olan yaşam olasılıkları da birleşik yaşam fonksiyonlarından elde edilirken yaşam kopula fonksiyonları kullanılacaktır. Bu bölümde yaşam kopula fonksiyonları C^S ile ifade edilecektir.

x ve y yaşlarındaki evli bir çift için; T_x, x yaşındaki erkek bireyin ve T_y, y yaşındaki kadın bireyin gelecek yaşam süresini göstermektedir. T_x ve T_y sürekli dağılımlara sahiptir. Marjinal yaşam fonksiyonları S_x ve S_y,

$$S_x(t) = \Pr[T_x > t], \quad \forall t \geq 0$$

$$S_y(t) = \Pr[T_y > t], \quad \forall t \geq 0$$

ile tanımlanmaktadır. (x,y) çifti için birleşik yaşam fonksiyonu ise,

$S_{xy}(s,t) = \Pr[T_x > s, T_y > t], \quad \forall s,t \geq 0$ olacaktır.

Eş.(5.1)'de verilen Sklar teoremi yardımıyla, $C^S{}_{xy} : [0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ yaşam kopula fonksiyonu ve S_x, S_y marjinal yaşam fonksiyonları olmak üzere birleşik yaşam fonksiyonu $S_{xy}(s,t)$,

$$S_{xy}(s,t) = C^S{}_{xy}(S_x(s), S_y(t)), \quad (s,t) \in [0,\infty]\times[0,\infty]$$

ile bulunabilmektedir. Eş. (5.2)'de verilen yaşam kopula fonksiyonu ile kopula fonksiyonu arasındaki ilişki yardımıyla (x,y) çifti için birleşik yaşam fonksiyonu,

$$S_{xy}(s,t) = S_x(s) + S_y(t) - 1 + C_{xy}(1 - S_x(s), 1 - S_y(t))$$

olarak elde edilmektedir.

7.2.1.Son yaşayan durumu

Son yaşayan annüitesi çiftlerden en az biri hayatta olduğu sürece ödemelerin yapıldığı bir hayat annüitesidir. Burada n yıl boyunca her bir yılın sonunda yapılacak olan ödemelerin bir birim olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda *v*, iskonto faktörünü göstermek üzere; NTP,

$$a_{\overline{xy};\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_t p_{\overline{xy}}$$

formülü ile bulunmaktadır (Cunningham et al., 2008). (x,y) çiftinden en az birinin t yıl yaşama olasılığı bağımsızlık varsayımı altında yaşam fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$${}_t p_{\overline{xy}} = {}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy} = S_x(t) + S_y(t) - S_{xy}(t,t).$$

Bağımsızlık varsayımı altında annüite NTP'i de aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$a_{\overline{xy};\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t [S_x(t) + S_y(t) - (S_x(t) S_y(t))]$$

Yaşam sürelerinin bağımlı olduğu varsayıldığında ise en az birinin t yıl yaşama olasılığı,

$${}_t p_{\overline{xy}} = 1 - C_{xy}((1 - S_x(t), 1 - S_y(t))$$

olarak elde edilmektedir. Bu durumda yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında annüitenin NTP'i,

$$a_{\overline{xy};\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t [1 - C_{xy}(1 - S_x(s), 1 - S_y(t))]$$

olmaktadır.

Örnek 7.1. Erkek bireyin 55 ve kadın bireyin 50 yaşında olduğu evli bir çift için son yaşayan annüitesi düzenlenmek istenmektedir. Annüite süresi 5,10,..,30 yıl olacak şekilde yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında hesaplanan NTP değerleri Çizelge 7.1'de verilmektedir.

Çizelge 7.1. Son Yaşayan Annüitesi İçin NTP Değerleri

n	Alt Sınır	Frank	Üst Sınır	Bağımsız
5	4,563348	4,578574	4,579707	4,579366
10	8,461772	8,519658	8,530203	8,526814
15	11,764830	11,892844	11,937935	11,922003
20	14,521136	14,740805	14,877475	14,822591
25	16,757381	17,077679	17,413148	17,255136
30	18,479981	18,894933	19,600441	19,203329

Bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP değerleri, Frank kopula ile hesaplanan değerlerden daha yüksek bulunmuştur. Bağımsızlık varsayımını kullanan sigorta endüstrisi son yaşayan durumunda olması gerekenden yüksek fiyatlandırma yapmaktadır.

Gelecek yaşam süreleri arasında pozitif bir bağımlılık olduğu durumda, bireylerden birinin ölümü hayatta kalan bireyin beklenen ömrünü kısaltacağından son yaşayan durumundaki yaşam olasılığı, bağımsızlık varsayımı altında bulunan yaşam olasılığından daha küçük olacaktır. Bu nedenle NTP değerinin de daha küçük çıkması beklenen bir sonuçtur.

Fréchet alt ve üst sınır kopula fonksiyonları yardımıyla hesaplanan değerler sözleşmenin NTP'i için minimum ve maksimimum değerleri vermektedir. Frank kopulası ile elde edilen NTP'ler de minimum ve maksimum değerleri arasında yer almaktadır.

Bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP'leri efektif olarak karşılaştırabilmek için annüite oranları bulunmuştur:

$$\text{Annüite oranı} = \frac{\text{bağımlılık varsayımı ile hesaplanan NTP}}{\text{bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP}}$$

n=20 için:

$$\text{Annüite oranı} = \frac{14,740805}{14,822591} = 0,994482.$$

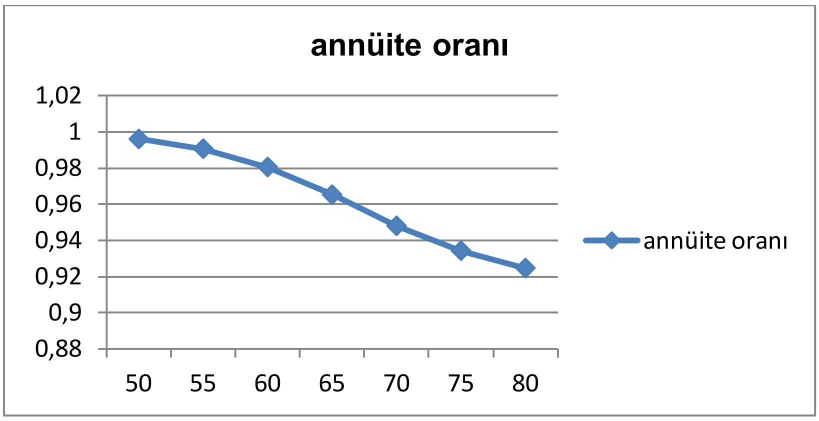
Annüite oranının 1’den küçük olması bağımsızlık varsayımının daha yüksek değerlendirmeye sebep olduğunun göstergesidir. n = 5,10,..,30 yıl için hesaplanan annüite oranları Çizelge 7.2’de verilmiştir.

Çizelge 7.2. Son Yaşayan Annüitesi İçin Annüite Oranları

n	Annüite Oranı
5	0,999827
10	0,999161
15	0,997554
20	0,994482
25	0,989716
30	0,983940

Son yaşayan annüitesi için farklı annüitant yaşları için elde edilen annüite oranları Şekil 7.1’de gösterilmiştir (kadın ve erkek bireyin yaşı aynı olduğu durumda; x = y = 50, 55,…80, ve n=20 için):

Şekil 7.1. Son Yaşayan Annüitesi İçin Annüite Oranları



Annüitant yaşları arttıkça annüite oranlarının giderek azaldığı görülmektedir. Başka bir deyişle, annüitant yaşları arttıkça bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP değerleri arasındaki fark artmaktadır. Bu durum annüitant yaşı arttıkça her iki varsayım için de NTP değeri azalırken, bağımlılık varsayımı ile hesaplanan NTP değerinin daha büyük bir oranda azalmasından kaynaklanmaktadır.

7.2.2. Birleşik yaşam durumu

Birleşik yaşam annüitesi çiftlerden her ikisi birden hayatta olduğu sürece ödemelerin yapıldığı bir hayat annüitesidir. Burada n yıl boyunca her bir yılın sonunda yapılacak olan ödemelerin bir birim olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda *v*, iskonto faktörünü göstermek üzere, NTP,

$$a_{xy;\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t \, {}_t p_{xy}$$

formülü ile bulunmaktadır (Cunningham et al., 2008).

(x, y) çiftinden her ikisinin birlikte t yıl yaşama olasılığı bağımsızlık varsayımı altında yaşam fonksiyonları yardımıyla aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$${}_t p_{xy} = S_x(t)S_y(t)$$

Bağımsızlık varsayımı altında annüite NTP'i de aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır:

$$a_{xy;\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t [S_x(s)S_y(t)]$$

Yaşam sürelerinin bağımlı olması durumunda çiftlerin birlikte yaşama olasılığı için,

$${}_t p_{xy} = S_x(t) + S_y(t) - 1 + C_{xy}((1 - S_x(t), 1 - S_y(t))$$

formülü elde edilmektedir. Bu durumda yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında annüite NTP'i,

$$a_{xy;\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t [S_x(t) + S_y(t) - 1 + C_{xy}((1 - S_x(t), 1 - S_y(t))]$$

olmaktadır.

Örnek 7.2. Erkek bireyin 55 ve kadın bireyin 50 yaşında olduğu evli bir çift için birleşik yaşam annüitesi düzenlenmek istenmektedir. Annüite süresi 5,10,..,30 yıl olacak şekilde yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında hesaplanan NTP değerleri Çizelge 7.3'de verilmektedir.

Çizelge 7.3. Birleşik Yaşam Annüitesi İçin NTP Değerleri

n	Alt Sınır	Frank	Üst Sınır	Bağımsız
5	4,489752	4,490885	4,506111	4,490093
10	8,171747	8,182291	8,240178	8,175136
15	11,081846	11,126937	11,254951	11,09778
20	13,230557	13,367226	13,586895	13,28544
25	14,612304	14,947773	15,268070	14,77032
30	15,227662	15,933171	16,348122	15,62477

Bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP değerleri, Frank kopula ile hesaplanan değerlerden daha düşük bulunmuştur. Gelecek yaşam süreleri arasında pozitif bir bağımlılık olduğu durumda bireylerin birlikte yaşama olasılığının, ayrı ayrı yaşama olasılıklarından daha yüksek olması beklendiğinden NTP değerinin de daha büyük çıkması beklenen bir sonuçtur.

Fréchet alt ve üst sınır kopula fonksiyonları yardımıyla hesaplanan değerler sözleşmenin NTP'i için minimum ve maksimum değerleri vermektedir. Frank kopulası ile elde edilen NTP'ler de minimum ve maksimum değerleri arasında yer almaktadır.

Bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP'leri efektif olarak karşılaştırabilmek için annüite oranları bulunmuştur:

$$\text{Annüite oranı} = \frac{\text{bağımlılık varsayımı ile hesaplanan NTP}}{\text{bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP}}$$

n=20 için:

$$\text{Annüite oranı} = \frac{13{,}367226}{13{,}28544} = 1{,}006156\,.$$

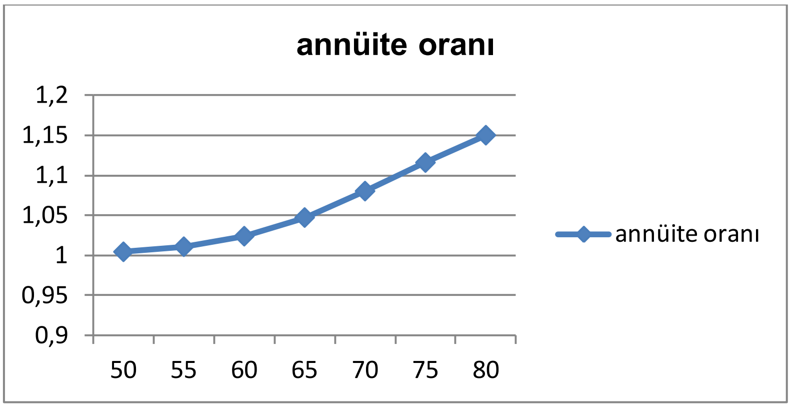
Annüite oranının 1’den büyük olması bağımsızlık varsayımının daha düşük değerlendirmeye neden olduğunu göstermektedir. n = 5,10,..,30 yıl için hesaplanan annüite oranları Çizelge 7.4’de verilmiştir.

Çizelge 7.4. Birleşik Yaşam Annüitesi İçin Annüite Oranları

n	Annüite Oranı
5	1,000176
10	1,000875
15	1,002627
20	1,006156
25	1,012014
30	1,019738

Birleşik yaşam annüitesi için farklı annüitant yaşları için elde edilen annüite oranları Şekil 7.2’de gösterilmiştir (kadın ve erkek bireyin yaşı aynı olduğu durumda; x = y = 50, 55,…80, ve n=20 için):

Şekil 7.2. Birleşik Yaşam Annüitesi İçin Annüite Oranları



Annüitant yaşları arttıkça annüite oranlarının giderek arttığı görülmektedir. Annüitant yaşları arttıkça bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP değerleri arasındaki fark artmaktadır. Çünkü annüitant yaşı arttıkça her iki varsayım için de NTP değeri artarken, bağımlılık varsayımı ile hesaplanan NTP değeri ise daha büyük bir oranda artmaktadır.

7.2.3. Koşullu yaşam durumu

Koşullu annüite, x yaşındaki kişiye yapılacak ödemelerin y yaşındaki kişinin ölümünden sonra başlayarak yapıldığı bir hayat annüitesidir. Burada n yıl boyunca her bir yılın sonunda yapılacak olan ödemelerin bir birim olduğu kabul edilmiştir. Bu durumda *v*, iskonto faktörünü göstermek üzere NTP,

$$a_{x|y:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^t \,{}_t p_y - \sum_{t=1}^{n} v^t \,{}_t p_{xy}$$

formülü ile bulunmaktadır (Cunningham et al., 2008). Yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında annüite NTP'i,

$$a_{x|y:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^t S_y(t) - \sum_{t=1}^{n} v^t [S_x(t) + S_y(t) - 1 + C_{xy}((1 - S_x(t), 1 - S_y(t))]$$

formülü ile elde edilecektir.

Örnek 7.3. Erkek bireyin 55 ve kadın bireyin 50 yaşında olduğu evli bir çift için koşullu yaşam annüitesi düzenlenmek istenmektedir. Annüite süresi 5,10,..,30 yıl olacak şekilde yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında hesaplanan NTP değerleri aşağıdaki Çizelge7.5'de verilmektedir.

Çizelge 7.5. Koşullu Yaşam Annüitesi İçin NTP Değerleri

n	Alt Sınır	Frank	Üst Sınır	Bağımsız
5	0,057237	0,072463	0,073596	0,073255
10	0,221594	0,279481	0,290025	0,286636
15	0,509880	0,637894	0,682984	0,667052
20	0,934242	1,153911	1,290580	1,235696
25	1,489311	1,809608	2,145077	1,987065
30	2,131859	2,546811	3,252319	2,855207

Bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP değerleri, Frank kopula ile hesaplanan değerlerden daha yüksek bulunmuştur. Bağımsızlık varsayımını kullanan sigorta endüstrisi koşullu yaşam annüitelerini değerlendirirken olması gerekenden yüksek fiyatlandırma yapmaktadır.

Gelecek yaşam süreleri arasında pozitif bir bağımlılık olduğu durumda, bireylerden birinin ölümü hayatta kalan bireyin beklenen ömrünü kısaltacağından koşullu yaşam annüitesi için yaşam olasılığı, bağımsızlık varsayımı altında bulunan yaşam olasılığından daha küçük olacaktır. Bu nedenle NTP değerinin de daha küçük çıkması beklenen bir sonuçtur.

Bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP'leri efektif olarak karşılaştırabilmek için annüite oranları bulunmuştur:

$$\text{Annüite oranı} = \frac{\text{bağımlılık varsayımı ile hesaplanan NTP}}{\text{bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP}}$$

n=20 için:

$$\text{Annüite oranı} = \frac{0{,}072463}{0{,}073255} = 0{,}989182.$$

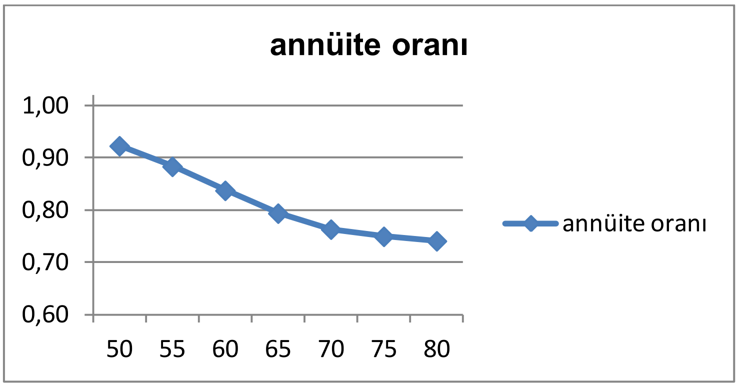
Annüite oranının 1'den küçük olması bağımsızlık varsayımının daha yüksek değerlendirmeye sebep olduğunun göstergesidir. n = 5,10,..,30 yıl için hesaplanan annüite oranları Çizelge 7.6.'da verilmiştir:

Çizelge 7.6. Son Yaşayan Annüitesi İçin Annüite Oranları

n	Annüite Oranı
5	0,999827
10	0,975037
15	0,956288
20	0,933815
25	0,910694
30	0,891988

Koşullu yaşam annüitesi için farklı annüitant yaşları için elde edilen annüite oranları Şekil 7.3'de gösterilmiştir (kadın ve erkek bireyin yaşı aynı olduğu durumda; x = y = 50, 55,…80, ve n=20 için):

Şekil 7.3. Koşullu Yaşam Annüitesi İçin Annüite Oranları



Annüitant yaşları arttıkça annüite oranlarının giderek azaldığı görülmektedir. Başka bir deyişle, koşullu annüite için annüitant yaşları arttıkça bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan NTP değerleri arasındaki fark artmaktadır. Bu durum annüitant yaşı arttıkça her iki varsayım için de NTP değeri azalırken, bağımlılık varsayımı ile hesaplanan NTP değerinin daha büyük bir oranda azalmasından kaynaklanmaktadır.

Son olarak gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığının annüite rezerv değerlerine etkisini gösterebilmek için Örnek 7.1. ve 7.2'de verilen annüiteler için rezerv değerleri hesaplanmıştır. Hesaplamalar eşlerden her ikisinin hayatta olduğu ve eşlerden birinin hayatta olduğu durumlar için Eş.(5.5) ve Eş.(5.6) yardımıyla ileriye doğru rezerv hesaplama yöntemi ile yapılmıştır.

Örnek 7.4. Örnek 7.1'de düzenlenen birleşik yaşam annüitesinde annüite süresi 20 yıl olmak üzere 10.yıl sonuç rezervi hesaplanmak istendiğinde yaşam sürelerinin bağımlı ve bağımsız olduğu varsayımı altında hesaplanan rezerv değerleri bağımlılık durumunda 7,619656524; bağımsızlık durumunda 7,57138987 olarak bulunmuştur.

NTP değerlerinde olduğu gibi rezerv değerleri de bağımsızlık varsayımının rezerv değerlerinin hesaplanmasında eksik değerlendirmeye neden olduğunu göstermektedir.

Örnek 7.5. Örnek 7.2'de düzenlenen son yaşayan annüitesinde, annüite süresi 20 yıl olmak üzere 10.yıl sonuç rezervi hesaplanmak istendiğinde iki ayrı durum göz önüne alınmalıdır.

İlk olarak **eşlerden her ikisinin de hayatta olduğu durumda** bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı altında 10.yıl sonuç rezervi hesaplanmıştır.

Diğer bir durum ise **y'nin hayatta olmadığı durumda** bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı altında 10.yıl sonuç rezervi hesaplanmıştır (y'nin poliçe düzenlendikten sonraki 5.yıl sonunda öldüğü kabul edilmiştir).

Çizelge 7.7. Son Yaşayan Annüitesi İçin Rezerv Değerleri

10.Yıl Sonuç Rezervi	Y'nin Öldüğü Bilindiğinde	Y'nin Hayatta Olduğu Bilindiğinde
Bağımlı	6,503077	8,452366
Bağımsız	8,240178	8,500632

Her iki durum için de gelecek yaşam sürelerinin bağımlı olduğu kabul edilerek hesaplanan rezerv değeri, bağımsızlık varsayımının kabul edildiği durumda hesaplanan rezerv değerinden düşük bulunmuştur. y'nin öldüğü durumda ise bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan rezerv değerleri arasındaki fark artmıştır.

7.3. Dağılım Fonksiyonları İle Annüitelerde Prim Hesabı

Birleşik dağılım fonksiyonunun marjinal dağılım fonksiyonları ve kopula fonksiyonu yardımıyla elde edilebileceği gösterilmiştir.

$F_1(x)$ = erkek birey için x yaşından önce ölme olasılığını

$F_2(y)$ = kadın birey için y yaşından önce ölme olasılığını göstermek üzere,

kadın ve erkek bireye ait gelecek yaşam süreleri, X ve Y'nin birleşik dağılım fonksiyonu,

$H(x,y) = \Pr(X \le x, Y \le y)$ olacaktır ve Sklar teoremi'nden aşağıdaki eşitlik yardımıyla elde edilmektedir:

$$H(x,y) = C(F_1(x), F_2(y))$$

Evli çiftler için son yaşayan ve birleşik yaşam annüite NTP'lerini hesaplarken bireylerin sözleşme başlangıcındaki yaşları x ve y olarak alınacaktır. Böylece bireylerin x ve y yaşlarına ulaştığı bilindiğinde gelecek yaşam süreleri: $T_x = X - x$ ve $T_y = Y - y$ olmaktadır. Bu durumda $H_T(a,b)$, T_x ve T_y 'nin koşullu dağılım fonksiyonu olacaktır ve

$$H_T(a,b) = \Pr(T_x \le a, T_y \le b \mid T_1, T_2 > 0)$$

$$= \frac{\Pr(0 \le T_x \le a, 0 \le T_y \le b)}{\Pr(T_x > 0, T_y > 0)}$$

$$H_T(a,b) = \frac{H(x+a, y+b) - H(x, y+b) - H(x+a, y) + H(x,y)}{1 - H(x,\infty) - H(\infty, y) + H(x,y)}$$

ile bulunacaktır.

$H(x,\infty)$ ve $H(\infty,y)$, sırasıyla erkek ve kadın bireylere ait marjinal dağılım fonksiyonları olup

$$F_1(x) = H(x,\infty) = {}_x q_0$$

$$F_2(y) = H(\infty,y) = {}_y q_0$$

eşitlikleri ile yazılmaktadır (Elliot, 2008).

7.3.1.Son yaşayan durumu

Son yaşayan annüitesi NTP'ini hesaplayabilmek için öncelikle x ve y yaşındaki bireylerden en az birinin k yıl boyunca hayatta kalma olasılığı ${}_k p_{\overline{xy}}$ bulunmalıdır:

$${}_k p_{\overline{xy}} = 1 - {}_k q_{\overline{xy}} = 1 - H_T(k,k).$$

a=b=k, olmak üzere,

$$H_T(k,k)=\frac{H(x+k,y+k)-H(x,y+k)-H(x+k,y)+H(x,y)}{1-F_1(x)-F_2(y)+H(x,y)}$$

olacaktır (Elliot, 2008). Bu durumda yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında annüite NTP'i,

$$a_{\overline{xy};\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}v^t[1-H_T(k,k)]$$

$$a_{\overline{xy};\overline{n}|}=\sum_{t=1}^{n}v^t\left[1-\left(\frac{H(x+k,y+k)-H(x,y+k)-H(x+k,y)+H(x,y)}{1-F_1(x)-F_2(y)+H(x,y)}\right)\right]$$

olarak elde edilmektedir.

7.3.2. Birleşik yaşam durumu

Birleşik yaşam annüitesi NTP'ini hesaplayabilmek için öncelikle x ve y yaşındaki bireylerden her ikisinin birden k yıl boyunca hayatta kalma olasılığı ${}_kp_{xy}$ bulunmalıdır:

$${}_kp_{xy}={}_kp_x+{}_kp_y-{}_kp_{\overline{xy}}$$

$$=1-H_T(k,\infty)-H_T(\infty,k)+H_T(k,k).$$

$H_T(k,\infty)$ ve $H_T(\infty,k)$ fonksiyonları,

$$H_T(k,\infty)=\frac{F_1(x+k)-F_1(x)-H(x+k,y)+H(x,y)}{1-F_1(x)-F_2(y)+H(x,y)}$$

$$H_T(\infty,k)=\frac{F_2(y+k)-F_2(y)-H(x,y+k)+H(x,y)}{1-F_1(x)-F_2(y)+H(x,y)}$$

eşitlikleri ile elde edilmektedir (Elliot, 2008).

Bu durumda yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında annüitenin NTP'i,

$$a_{xy;\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} v^t [1 - H_T(k,\infty) - H_T(\infty,k) + H_T(k,k)]$$

olarak elde edilmektedir.

7.3.3. Koşullu yaşam durumu

Koşullu annüite için yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı altında annüitenin NTP değeri,

$$a_{x|y:\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^t (1 - H_T(\infty,k)) - \sum_{t=1}^{n} v^t [1 - H_T(k,\infty) - H_T(\infty,k) + H_T(k,k)]$$

formülü ile elde edilecektir.

8. SONUÇ

Bu çalışmada çoklu hayat ürünlerinde gelecek yaşam süreleri arasındaki bağımlılığın göz önüne alınması gerektiği belirtilmiş, gözlemlenen bağımlılık çeşitleri ve bağımlılığının modellenmesinde kullanılabilecek modeller tanıtılmıştır.

Gelecek yaşam sürelerinin bağımlılığının modellenmesinde kullanılabilecek modellerden başlıcaları Kopula modelleri, Ortak Etki modelleri ve Markov modelleridir. Ortak etki modelleri gelecek yaşam süreleri arasındaki anlık bağımlılığın modellenmesinde daha uygun olup, ortak yaşam tarzı, genetik faktörler gibi bağımlılığa neden olabilecek diğer durumları göz önüne almadığı için yetersiz kalabilmektedir. Markov modelleri ise uzun dönem ve kısa dönem bağımlılığın modellenmesinde kullanılmakta fakat modeldeki parametre sayısı fazla olması hesaplamalarda işlem yoğunluğunu artırmaktadır.

Bu tez çalışmasında; literatürde yaşam sürelerinin bağımlılığı konusunda yaygın olarak yer alan kopula modelleri temel alınmış, birleşik ve marjinal yaşam olasılıkları kopula fonksiyonları ile ifade edilerek çeşitli hayat annüitelerine ilişkin net tek primleri hesaplanmıştır.

Evli çiftlerde gelecek yaşam sürelerinin bağımsız olarak kabul edilmesinin son yaşayan durumundaki annüiteler ve koşullu yaşam annüiteleri için yüksek, birleşik yaşam annüitesi için düşük fiyatlandırmaya neden olduğu görülmüştür. Annüitant yaşları ilerledikçe bağımlılık ve bağımsızlık varsayımı ile hesaplanan net tek primler arasındaki farkın giderek arttığı görülmektedir. Bu durum evli çiftler arasındaki bağımlılığın ileri yaşlarda arttığını göstermektedir.

Fréchet sınırlarının annüite net tek primlerine uygulanması ile prim değerlerinin değişeceği alt ve üst sınırlar bulunmuştur. Frank kopula fonksiyonu yardımıyla bağımlılık varsayımı ile hesaplanan net tek primlerinin Fréchet sınır değerleri arasında kaldığı görülmüştür. Ayrıca TRHA 2011 tablo değerleri kullanılarak gelecek yaşam süreleri arasında maksimum pozitif bağımlılık ve maksimum negatif bağımlılık olduğu kabul edildiği durumda, son yaşayan ve birleşik yaşam annüiteleri için, net tek primleri bulunmuştur. Böylece yaşam süreleri arasında bağımlılık olması durumunda net tek primler için bir aralık belirlenebilmiştir.

Çoklu hayat ürünlerinin değerlemesinin doğru yapılabilmesi için yaşam sürelerinin bağımlılığı varsayımı göz önüne alınmalıdır. Böylece sigortalı ve sigortacı açısından oluşabilecek kayıplar engellenebilecektir.

Sigorta şirketleri, çoklu hayat ürünleri satın alan müşteri portföyü yeterli büyüklüğe ulaşınca, bünyesindeki portföy için bağımlılık yapısını inceleyerek ürün değerlemesini bağımlılık modellerini kullanarak yapabilir. Böylece bağımsızlık varsayımının fazla fiyatlandırma yaptığı ürünler için sigortalıya daha az fiyat verilmiş olacak ve sigorta şirketinin rekabet gücü artacaktır. Diğer taraftan ise bağımsızlık varsayımının düşük fiyatlandırmaya neden olduğu ürünlerde risk gerçekleştiğinde sigortacı ortaya çıkacak olan kaybını engelleyebilecektir.

KAYNAKLAR

Amsler, M.H., 1968, Les chaînes de markov des assurances vie, Invalidité et Maladie, Transactions of the 18th International Congress of Actuaries, Munich, Germany, 731–746.

Bowers, N.L., Gerber, H.U., Hickman, J.C., Jones, D.A., and Nesbitt, C.J., 1997, Actuarial Mathematics, The Society of Actuaries, Itasca, Illinois, 753 p.

Bessis, J., 2002, Risk management in banking, 2nd edition, Wiley, England, 792p.

Carriere, J.F. and Chan, L.K., 1986, The Bounds of bivariate distributions that limit the value of last survivor annuities, Transactions of the Society of Actuaries, Volume 38, 51-74.

Carriere, J.F., 1994, Dependent decrement theory, Transactions of the Society of Actuaries, Volume 46, 51-74.

Carriere, J.F., 2000, Bivariate survival models for coupled lives, Scandinavian Actuarial Journal, 1, 17 - 32.

Clayton, D.G., 1978, A model for association in bivariate life tables and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence, Biometrika, Volume 65, Issue 1, 141-151.

Cook , R. D., and Johnson, M.E., 1981, A Family of distributions for modelling non-elliptically symmetric multivariate data, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Methodological), Volume 43, No. 2, 210-218.

Cunningham, R., Herzog, T., London, R., 2008, Model for Quantifying Risk, Actex Academies Series,Third Edition, Winsted, 678p.

Denuit, M., and Cornet, A., 1999, Premium calculation with dependent time-until-death random variables: the widow's pension, Journal of Actuarial Practice 7, 147-180.

Denuit, M., Dhaene, J., Le Bailly de Tilleghem, C., Teghem, S., 2001, Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths, Belgian Actuarial Bulletin, Volume 1, No. 1.

Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., Kaas, R., 2005, Actuarial theory for dependent risks, Wiley, 440p.

Dheane, J., Vanneste M. Wolthuis, H., 2000, A note on dependencies in multiple life statuses, Mitteilungen der Schweizerischer Aktuarvereinigung, 1, 19-34.

Elliot, C., 2008, Multiple-life theory, http://www.scribd.com/doc/48882333/000453534r

Frank, M. J., 1979, On the simultaneous associativity of F(x,y) and x+y- F(x,y), Aequationes Mathematicae, Volume 19, No. 1,194-226.

Frees, E.W., Carriere, J. F. and Valdez E., 1996, Annuity valuation with dependent mortality, The Journal of Risk and Insurance, Volume 63, No. 2, 229-261.

Frees, E.W. and Valdez, E., 1998, Understanding relationship using copulas, North American Actuarial Journal, Volume 2, Number 1, 1-25.

Genest, C. and MacKay, R. J., 1986a, Copules archime´diennes et familles de lois bidimensionelles dont les margessont donne´es. Canad. J. Statist. 14 (2), 145-159.

Genest, C. and MacKay, R. J., 1986 b, The joy of copulas: bivariate distributions with uniform marginals, Amer. Statist., 40 (4), 280-283.

Genest, C. , 1987, Frank's family of bivariate distributions, Biometrika 74, 549-555.

Genest, C., Rivest, L. P., 1993, Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas, Journal of the American Statistical Association 88, Issue 423, 1034–1043.

Hoem, J.M., 1969, Markov chain models in life insurance, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, Volume 9, 91–107.

Hougaard, P., 2000, Analysis of Multivariate Survival Data, Springer, 542 p.

Hürlimann, W., 2007, Actuarial analysis of the multiple life endowment insurance contract,http://www.actuaries.org/Munich2009/papers/LIFE/Mon_12.00_LIFE_Huerlimann_Products_Paper.pdf

Jagger, C. and Sutton, C.J., 1991, Death after marital bereavement-is the risk increased?, Statistics in Medicine, Volume 10, Issue 3, 395-404.

Ji, M., Hardy, M., Siu, J., Li, H., 2011, Markovian approaches to joint-life mortality, North American Actuarial Journal, Volume 15, No 3, 357-376.

Karadağ, D.K., 2003, Portfolio Risk Calculation And Stochastic Portfolio Optimization by a Copula Based Approach, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, 190 s.

Kimeldorf, G., and Sampson, A.R., 1975, Uniform representation of bivariate distributions, Communications in Statistics 4, 617-627.

Klugman, S.A. and Parsa, R., 1999, Fitting bivariate loss distributions with copulas, Volume 24, No 1, 139-148.

Klugman, S.A., Panjer, H.H., Wilmot, G.E., 2008, Loss Models: from data to decisions, 3rd edition, Wiley, 726p.

Lehmann, E. L., 1966, Some concepts of dependence, Annals of Mathematical Statistics, 37, 1137–1153.

Luciano, E., Spreeuw, J. and Vigna, E., 2008, Modelling stochastic mortality for dependent lives, Mathematics and Economics 43, 234-244.

Margus, P., 2002, Generalized Frasier claim rates under survivorship life insurance policies, N. Am. Actuar. J. 6, 76 -94.

Norberg, R., 1989, Actuarial analysis of dependent lives, Bulletin of the Swiss Association of Actuaries 89, 243-254.

Panjer, H., 1994, Second-to-die with possibility of simultaneous death, Product development news, 36 (Schaumburg, Ill.: Society of Actuaries).

Parkes, C. M., Benjamin B., and Fitzgerald R. G., 1969, Broken Heart: A Statistical study of increased mortality among widowers, British Medical Journal, 740-743.

Shek, W.S., 2003, Dependency of risks in annuity valuation, M. S. Thesis, City University, 72p.

Shemyakin, E. A. and Youn, H., 1999, Statistical aspects of joint life insurance pricing, Proceedings of Amer. Stat. Assoc., 34-38.

Shemyakin, E. A. and Youn, H., 2001, Pricing practices for joint last survivor insurance, Actuarial Research Clearing House,1.

Shemyakin, E. A. and Youn, H., 2002, A Re-examination of the joint mortality functions, North American Actuarial Journal Volume 6, Number 1, 166-170.

Shemyakin, E. A. and Youn, H., 2006, Copula models of joint last survivor analysis, Appl. Stochastic Models Bus. Ind., 22, 211–224.

Spreeuw, J., 2006, Types of dependence and time-dependent association between two lifetimes in single parameter copula models, Scandinavian Actuarial Journal, Volume 5, 286 – 309.

Spreeuw, J. and Wang, X., 2008, Modelling the short-term dependence between two remaining lifetimes, http://www.actuaries.org.uk.

Wang, W. and Wells, M.T., 2000, Model selection and semiparametric inference for bivariate failure-time data, Journal of the American Statistical Association 95, 62–72.

Waters, H.R.,1984, An approach to study of multiple state models, Journal of the Institute of Actuaries, Volume 111, No. 2, 363-374.

Wolthuis, H., 2003, Life Insurance Mathematics – The Markovian Model, CAIRE Education Series 2, Brussels, 288 p.

Ek 1. Birleşik yaşam annüitesi NTP değerleri için alt ve üst sınır hesaplamaları (TRHA 2011)

x=y=50

t	yaş	lx	ly	tpx(x=50)	tpy(y=50)	v (i=0,03)	p(xy)=min(tpx ,tpy)	p(xy) v	p(xy)=max(0,tpx+tpy-1)	p(xy) v
1	50	942238,8	981146,4	0,99656	0,999174	0,970874	0,99656	0,967534	0,995734	0,966732
2	51	938997,5	980336	0,9927691	0,9982268	0,942596	0,992769086	0,9357801	0,99099587	0,9341087
3	52	935425,6	979406,6	0,9885925	0,9971337	0,915142	0,988592506	0,9047022	0,98572623	0,9020791
4	53	931490,2	978334,1	0,9839995	0,9958733	0,888487	0,983999505	0,8742708	0,97987285	0,8706043
5	54	927162,5	977097,5	0,9789545	0,9944184	0,862609	0,97895454	0,8444548	0,97337292	0,83964
6	55	922409	975670	0,9734264	0,9927458	0,837484	0,973426384	0,8152293	0,96617215	0,809154
7	56	917200,1	974028,9	0,9673571	0,9908179	0,813092	0,96735707	0,7865498	0,95817492	0,7790839
8	57	911481,4	972137,3	0,9606929	0,9885905	0,789409	0,960692947	0,7583799	0,94928344	0,7493731
9	58	905202,2	969952	0,9533763	0,9860024	0,766417	0,95337631	0,7306836	0,93937867	0,7199555
10	59	898308,2	967412,7	0,9453679	0,983002	0,744094	0,945367949	0,7034425	0,92836991	0,6907944
11	60	890762,4	964468,8	0,936612	0,9795143	0,722421	0,936611951	0,6766284	0,91612622	0,6618291
12	61	882512,1	961046,9	0,927036	0,9756462	0,70138	0,92703603	0,6502044	0,9026822	0,6331231
13	62	873489,3	957251,7	0,9165346	0,9713241	0,680951	0,916534566	0,6241154	0,88785862	0,6045885
14	63	863594,4	953011,1	0,9050247	0,9664907	0,661118	0,905024725	0,598328	0,87151547	0,5761744
15	64	852749,4	948268,9	0,8924648	0,9610871	0,641862	0,892464792	0,5728392	0,85355189	0,5478625
16	65	840915	942967,1	0,8788253	0,9550582	0,623167	0,878825253	0,5476548	0,83388345	0,5196486
17	66	828063,3	937051,9	0,8640742	0,9483317	0,605016	0,864074171	0,5227791	0,81240589	0,4915189
18	67	814164,2	930452,2	0,848113	0,9407982	0,587395	0,848112993	0,498177	0,78891117	0,4634022
19	68	799125	923060,7	0,8308632	0,9323423	0,570286	0,830863222	0,4738297	0,7632055	0,4352454
20	69	782871,6	914764,3	0,8122602	0,9228548	0,553676	0,812260195	0,4497288	0,73511496	0,4070153
21	70	765343,1	905455,6	0,7922575	0,9122124	0,537549	0,792257475	0,4258774	0,70446988	0,3786873
22	71	746495,7	895013,9	0,7707992	0,9002807	0,521893	0,770799182	0,4022743	0,67107985	0,3502315
23	72	726276,9	883307,1	0,7477762	0,8868638	0,506692	0,747776181	0,378892	0,63463996	0,3215668
24	73	704583,7	870143,2	0,7231646	0,8718199	0,491934	0,723164623	0,3557491	0,59498454	0,292693
25	74	681393,8	855383	0,696947	0,8549981	0,477606	0,696947013	0,3328658	0,55194516	0,2636121
26	75	656690,5	838878,3	0,6691967	0,8363164	0,463695	0,669196674	0,310303	0,50551311	0,2344038
27	76	630543,1	820548,8	0,6399287	0,8156385	0,450189	0,639928688	0,2880889	0,4555672	0,2050914
28	77	602965,7	800260,8	0,6092051	0,7928496	0,437077	0,609205072	0,2662694	0,40205465	0,1757287
29	78	574016,7	777901,5	0,5770567	0,7677717	0,424346	0,577056711	0,2448719	0,34482845	0,1463267
30	79	543725,2	753296,5	0,5436613	0,7403362	0,411987	0,543661285	0,2239813	0,28399747	0,1170032

n	Alt Sınır (NTP)	Üst Sınır (NTP)
5	4,5131642	4,52674185
10	8,2615251	8,32102692
15	11,2851027	11,4431423
20	13,6019331	13,9353117
25	15,2087238	15,8309703
30	16,0872776	17,1644847

Ek 2. Birleşik yaşam annüitesi NTP değerleri için alt ve üst sınır hesaplamaları (TRHA 2011)

x=y=60

t	yaş	lx	ly	tpx(x=50)	tpy(y=60)	v (i=0,03)	p(xy)=min(tpx,tpy)	p(xy) v	p(xy)=max(0,tpx+tpy-1)	p(xy) v
1	50	942238,8	981146,4	0,99656	0,99917	0,97087	0,99656	0,967534	0,995734	0,966732
2	51	938997,5	980336	0,992769	0,99823	0,9426	0,992769086	0,93578	0,99099587	0,9341087
3	52	935425,6	979406,6	0,988593	0,99713	0,91514	0,988592506	0,904702	0,98572623	0,9020791
4	53	931490,2	978334,1	0,984	0,99587	0,88849	0,983999505	0,874271	0,97987285	0,8706043
5	54	927162,5	977097,5	0,978955	0,99442	0,86261	0,97895454	0,844455	0,97337292	0,83964
6	55	922409	975670	0,973426	0,99275	0,83748	0,973426384	0,815229	0,96617215	0,809154
7	56	917200,1	974028,9	0,967357	0,99082	0,81309	0,96735707	0,78655	0,95817492	0,7790839
8	57	911481,4	972137,3	0,960693	0,98859	0,78941	0,960692947	0,75838	0,94928344	0,7493731
9	58	905202,2	969952	0,953376	0,986	0,76642	0,95337631	0,730684	0,93937867	0,7199555
10	59	898308,2	967412,7	0,945368	0,983	0,74409	0,945367949	0,703443	0,92836991	0,6907944
11	60	890762,4	964468,8	0,936612	0,97951	0,72242	0,936611951	0,676628	0,91612622	0,6618291
12	61	882512,1	961046,9	0,927036	0,97565	0,70138	0,92703603	0,650204	0,9026822	0,6331231
13	62	873489,3	957251,7	0,916535	0,97132	0,68095	0,916534566	0,624115	0,88785862	0,6045885
14	63	863594,4	953011,1	0,905025	0,96649	0,66112	0,905024725	0,598328	0,87151547	0,5761744
15	64	852749,4	948268,9	0,892465	0,96109	0,64186	0,892464792	0,572839	0,85355189	0,5478625
16	65	840915	942967,1	0,878825	0,95506	0,62317	0,878825253	0,547655	0,83388345	0,5196486
17	66	828063,3	937051,9	0,864074	0,94833	0,60502	0,864074171	0,522779	0,81240589	0,4915189
18	67	814164,2	930452,2	0,848113	0,9408	0,58739	0,848112993	0,498177	0,78891117	0,4634022
19	68	799125	923060,7	0,830863	0,93234	0,57029	0,830863222	0,47383	0,7632055	0,4352454
20	69	782871,6	914764,3	0,81226	0,92285	0,55368	0,812260195	0,449729	0,73511496	0,4070153
21	70	765343,1	905455,6	0,792257	0,91221	0,53755	0,792257475	0,425877	0,70446988	0,3786873
22	71	746495,7	895013,9	0,770799	0,90028	0,52189	0,770799182	0,402274	0,67107985	0,3502315
23	72	726276,9	883307,1	0,747776	0,88686	0,50669	0,747776181	0,378892	0,63463996	0,3215668
24	73	704583,7	870143,2	0,723165	0,87182	0,49193	0,723164623	0,355749	0,59498454	0,292693
25	74	681393,8	855383	0,696947	0,855	0,47761	0,696947013	0,332866	0,55194516	0,2636121
26	75	656690,5	838878,3	0,669197	0,83632	0,46369	0,669196674	0,310303	0,50551311	0,2344038
27	76	630543,1	820548,8	0,639929	0,81564	0,45019	0,639928688	0,288089	0,4555672	0,2050914
28	77	602965,7	800260,8	0,609205	0,79285	0,43708	0,609205072	0,266269	0,40205465	0,1757287
29	78	574016,7	777901,5	0,577057	0,76777	0,42435	0,577056711	0,244872	0,34482845	0,1463267
30	79	543725,2	753296,5	0,543661	0,74034	0,41199	0,543661285	0,223981	0,28399747	0,1170032

n	Alt Sınır (NTP)	Üst Sınır (NTP)
5	4,38281318	4,43833752
10	7,75422818	7,98115624
15	10,1130581	10,675987
20	11,4375843	12,5716847
25	11,7552336	13,7477918
30	11,7552336	14,3392483

Ek 3. Son yaşayan annüitesi NTP değerleri için alt ve üst sınır hesaplamaları (TRHA 2011)

x=y=50

t	yaş	lx	ly	tpx(x=50)	tpy(y=50)	p(xy)=1-max((1-tpx)+(1-tpy)-1,0)	v (i=0,03)	p(xy) v	p(xy)=1-min(1-tpx,1-tpy)	p(xy) v
1	50	942238,8	981146,4	0,99656	0,999174	1	0,970874	0,970874	0,999174	0,970072
2	51	938997,5	980336	0,992769	0,998227	1	0,942596	0,942596	0,998226783	0,940924
3	52	935425,6	979406,6	0,988593	0,997134	1	0,915142	0,915142	0,997133725	0,912519
4	53	931490,2	978334,1	0,984	0,995873	1	0,888487	0,888487	0,995873348	0,884821
5	54	927162,5	977097,5	0,978955	0,994418	1	0,862609	0,862609	0,994418377	0,857794
6	55	922409	975670	0,973426	0,992746	1	0,837484	0,837484	0,992745765	0,831409
7	56	917200,1	974028,9	0,967357	0,990818	1	0,813092	0,813092	0,990817853	0,805626
8	57	911481,4	972137,3	0,960693	0,98859	1	0,789409	0,789409	0,988590494	0,780402
9	58	905202,2	969952	0,953376	0,986002	1	0,766417	0,766417	0,986002364	0,755689
10	59	898308,2	967412,7	0,945368	0,983002	1	0,744094	0,744094	0,983001959	0,731446
11	60	890762,4	964468,8	0,936612	0,979514	1	0,722421	0,722421	0,979514268	0,707622
12	61	882512,1	961046,9	0,927036	0,975646	1	0,70138	0,70138	0,975646166	0,684299
13	62	873489,3	957251,7	0,916535	0,971324	1	0,680951	0,680951	0,971324054	0,661424
14	63	863594,4	953011,1	0,905025	0,966491	1	0,661118	0,661118	0,966490745	0,638964
15	64	852749,4	948268,9	0,892465	0,961087	1	0,641862	0,641862	0,961087096	0,616885
16	65	840915	942967,1	0,878825	0,955058	1	0,623167	0,623167	0,955058196	0,595161
17	66	828063,3	937051,9	0,864074	0,948332	1	0,605016	0,605016	0,948331721	0,573756
18	67	814164,2	930452,2	0,848113	0,940798	1	0,587395	0,587395	0,940798174	0,55262
19	68	799125	923060,7	0,830863	0,932342	1	0,570286	0,570286	0,93234228	0,531702
20	69	782871,6	914764,3	0,81226	0,922855	1	0,553676	0,553676	0,922854765	0,510962
21	70	765343,1	905455,6	0,792257	0,912212	1	0,537549	0,537549	0,912212404	0,490359
22	71	746495,7	895013,9	0,770799	0,900281	1	0,521893	0,521893	0,900280666	0,46985
23	72	726276,9	883307,1	0,747776	0,886864	1	0,506692	0,506692	0,886863783	0,449367
24	73	704583,7	870143,2	0,723165	0,87182	1	0,491934	0,491934	0,871819913	0,428878
25	74	681393,8	855383	0,696947	0,854998	1	0,477606	0,477606	0,854998147	0,408352
26	75	656690,5	838878,3	0,669197	0,836316	1	0,463695	0,463695	0,836316438	0,387796
27	76	630543,1	820548,8	0,639929	0,815639	1	0,450189	0,450189	0,815638514	0,367192
28	77	602965,7	800260,8	0,609205	0,79285	1	0,437077	0,437077	0,792849574	0,346536
29	78	574016,7	777901,5	0,577057	0,767772	1	0,424346	0,424346	0,767771742	0,325801
30	79	543725,2	753296,5	0,543661	0,740336	1	0,411987	0,411987	0,740336186	0,305009

n	Alt Sınır (NTP)	Üst Sınır (NTP)
5	4,5661295	4,5797072
10	8,470701	8,5302028
15	11,779895	11,937935
20	14,544096	14,877475
25	16,790901	17,413148
30	18,523234	19,600441

Ek 4. Son yaşayan annüitesi NTP değerleri için alt ve üst sınır hesaplamaları (TRHA 2011)

x=y=60

t	yaş	lx	ly	tpx(x=60)	tpy(y=60)	p(xy)=1-max((1-tpx)+(1-tpy)-1,0)	v (i=0,03)	p(xy) v	p(xy)=1-min(1-tpx,1-tpy)	p(xy) v
1	60	890762,4	964468,8	0,990738	0,996452	1	0,970874	0,970874	0,996452	0,967429
2	61	882512,1	961046,9	0,980609	0,992517	1	0,942596	0,942596	0,992517011	0,935542
3	62	873489,3	957251,7	0,9695	0,98812	1	0,915142	0,915142	0,988120161	0,90427
4	63	863594,4	953011,1	0,957325	0,983203	1	0,888487	0,888487	0,983203275	0,873563
5	64	852749,4	948268,9	0,94404	0,977706	1	0,862609	0,862609	0,977706185	0,843378
6	65	840915	942967,1	0,929612	0,971573	1	0,837484	0,837484	0,971573034	0,813677
7	66	828063,3	937051,9	0,914008	0,96473	1	0,813092	0,813092	0,964730245	0,784414
8	67	814164,2	930452,2	0,897125	0,957066	1	0,789409	0,789409	0,957066428	0,755517
9	68	799125	923060,7	0,878878	0,948464	1	0,766417	0,766417	0,948464315	0,726919
10	69	782871,6	914764,3	0,8592	0,938813	1	0,744094	0,744094	0,938812742	0,698565
11	70	765343,1	905455,6	0,838041	0,927986	1	0,722421	0,722421	0,927986354	0,670397
12	71	746495,7	895013,9	0,815343	0,915848	1	0,70138	0,70138	0,915848292	0,642358
13	72	726276,9	883307,1	0,79099	0,902199	1	0,680951	0,680951	0,902199405	0,614354
14	73	704583,7	870143,2	0,764956	0,886895	1	0,661118	0,661118	0,886895397	0,586342
15	74	681393,8	855383	0,737223	0,869783	1	0,641862	0,641862	0,86978275	0,55828
16	75	656690,5	838878,3	0,707869	0,850778	1	0,623167	0,623167	0,850777997	0,530177
17	76	630543,1	820548,8	0,67691	0,829743	1	0,605016	0,605016	0,829742511	0,502008
18	77	602965,7	800260,8	0,644411	0,80656	1	0,587395	0,587395	0,806559505	0,473769
19	78	574016,7	777901,5	0,610404	0,781048	1	0,570286	0,570286	0,781048028	0,445421
20	79	543725,2	753296,5	0,575079	0,753138	1	0,553676	0,553676	0,753138058	0,416994
21	80	512258,8	726378,2	0,538562	0,722694	1	0,537549	0,537549	0,722693958	0,388484
22	81	479730,8	697015,8	0,500979	0,689652	1	0,521893	0,521893	0,68965239	0,359924
23	82	446253,3	665148,2	0,462317	0,653868	1	0,506692	0,506692	0,653868397	0,33131
24	83	411814,6	630635,7	0,422823	0,615499	1	0,491934	0,491934	0,615499399	0,302785
25	84	376634,5	593630	0,382938	0,574826	0,957763765	0,477606	0,457433	0,574825968	0,27454
26	85	341106,6	554401,7	0,343306	0,532296	0,87560216	0,463695	0,406012	0,532295744	0,246823
27	86	305804,4	513382,6	0,30443	0,488291	0,792720909	0,450189	0,356874	0,488290855	0,219823
28	87	271174,8	470941,3	0,266746	0,443228	0,709973832	0,437077	0,310313	0,443227957	0,193725
29	88	237607,2	427479,5	0,230545	0,39761	0,628154598	0,424346	0,266555	0,397609606	0,168724
30	89	205360,8	383482,1	0,196115	0,351947	0,54806124	0,411987	0,225794	0,351946528	0,144997

n	Alt Sınır (NTP)	Üst Sınır (NTP)
5	4,5241828	4,5797072
10	8,3032748	8,5302028
15	11,375006	11,937935
20	13,743374	14,877475
25	15,400417	17,392975
30	16,374509	18,958524

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Emine Selin SARIDAŞ

Doğum Yeri : Balıkesir

Doğum Yılı : 1987

Medeni Hali : Bekar

Eğitim ve Akademik Durumu:

Lise 2001-2005: Etimesgut Anadolu Lisesi

Lisans 2005-2009: Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yabancı Dil: İngilizce

İş Tecrübesi:

Kasım, 2009 - … : Marmara Üniversitesi, Aktüerya Bölümü, Araştırma Görevlisi