HOLOMORFİK POLY-NORDEN MANİFOLDLAR VE BAZI UYGULAMALARI

Zühre TOPUZ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Dr. Öğr. Üyesi Çağrı KARAMAN
2020

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HOLOMORFİK POLY-NORDEN MANİFOLDLAR VE BAZI UYGULAMALARI

Zühre TOPUZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2020

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAY FORMU

HOLOMORFİK POLY-NORDEN MANİFOLDLAR VE BAZI UYGULAMALARI

Dr. Öğr. Üyesi Çağrı KARAMAN danışmanlığında, Zühre TOPUZ tarafından hazırlanan bu çalışma 06/01/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı - Geometri Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak **oybirliği/oy çokluğu (…/…)** ile kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof. Dr. Nejmi CENGİZ	*İmza*	:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Çağrı KARAMAN	*İmza*	:
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi Rabia ÇAKAN AKPINAR	*İmza*	:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 09.01./2020 tarihve .02…/.36….. nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HOLOMORFİK POLY-NORDEN MANİFOLDLAR VE BAZI UYGULAMALARI

Zühre TOPUZ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Çağrı KARAMAN

Bu tezde ilk olarak, holomorfik poly-Norden manifoldu tanıtılmıştır. Bu manifoldun Riemann eğrilik tensörünün belirli özellikleri incelenmiştir ve bu konuyla ilgili bir örnek verilmiştir. Daha sonra bu manifold üzerinde yarı simetrik metrik poly F-konneksiyonu tanımlanmıştır. Bu konneksiyonun eğrilik ve burulma tensör alanlarının bazı özellikleri araştırılmıştır.

2020, 53 sayfa

Anahtar Kelimeler: poly-Norden yapı, yarı simetrik konneksiyon, pür tensörler, Tachibana operatörü.

ABSTRACT

Master Thesis

HOLOMORPHIC POLY-NORDEN MANIFOLDS AND ITS SOME APPLICATIONS

Zühre TOPUZ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Discipline of Geometry

Supervisor: Assistant Prof. Dr. Çağrı KARAMAN

In this thesis, firstly, a holomorphic poly-Norden manifold was introduced. Certain properties of Riemann curvature tensor of this manifold was examined and an example was given. Then, the semi-symmetric metric poly F-connection on this manifold was described and some properties of the curvature tensor field and torsion tensor field was investigated with respect to this connection.

2020, 53 pages

Keywords: poly-Norden structure, semi-symmetric metric connection, pure tensors, Tachibana operator.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden gelenin fazlasını sunan ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Dr. Öğr. Üyesi Çağrı KARAMAN'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

Yine çalışmamda bize ortam hazırlayan ve odasını bize açan Prof. Dr. Aydın GEZER'e teşekkürü borç bilirim. Bu süreçte benden desteğini esirgemeyen tüm aileme teşekkür ederim.

Zühre TOPUZ
Ocak - 2020

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

g	Riemann Metriği
∇	Riemann Konneksiyonu
Γ_{ij}^{k}	Riemann Konneksiyonunun Katsayıları
${}^{g}R$	Riemann Eğrilik Tensörü
G	İkiz (Twin) Riemann Metriği
${}^{G}R$	İkiz (Twin) Riemann Eğrilik Tensörü
${}^{p}\nabla$	Yarı-Simetrik Metrik Poly F-Konneksiyon
${}^{p}R$	Yarı-Simetrik Metrik Poly F-Konneksiyonun Eğrilik Tensörü
F	Poly-Norden Yapı
I	Birim Afinor Alanı
J	Kompleks Yapı
C	Kontraksiyon Operatörü
$\overset{C}{\otimes}$	Pür Çarpım
Φ	Tachibana Operatörü
$\otimes$	Tensör Çarpımı
L_X	X Vektör Alanına Göre Lie Türevi
∇_X	X Vektör Alanına Göre Kovaryant Türev

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Bugün, matematiğin Milet'li Thales'den en az bin yıl önce Babilonya'da başladığını bilinmektedir. Thales'e atfedilen teoremlere yakından bakılacak olursa bunların matematikteki buluşları başlangıç noktası dönemine ait olmaktan çok matematiğin dizgeli ve mantığa dayanan kuruluşunun başlangıç dönemine ait oldukları anlaşılır. Buluşlar dönemini başlangıcında, bu buluşların verdiği heyecanla insan daha çok şu gibi problemlerle ilgilenmiştir. “Bir üçgenin ya da bir dairenin alanı nasıl hesaplanabilir?”, “Bir piramidin hacmi ya da kirişin uzunluğu nasıl bulunabilir?”, “Bir yamuğu tabanına paralel bir doğru parçasıyla nasıl iki eşit parçaya bölebilirim?”. Eski mısır ve Babilonya metinlerinin uğraştıkları problemler bunlardı. Ancak bunlardan şu en önemli soru ortaya çıkmıştır “Tüm bunlar nasıl kanıtlanabilir?”.

Eski matematiğin bazıları doğru bazıları yanlış sonuçları aralarında mantık bağı bulunmadan yabancı bir kavmin genç kuşağının eline geçtiğinde bu sorular büyük bir önem kazanmıştır. Thales'in döneminde eski mısır ve eski babilonya matematiği çoktan ölü bilgi durumuna gelmiştir. Thales'in bu bilgilerin içinde hesap kurallarını sökerek öğrenmesi olasıydı ama bunlara temel oluşturan akıl yürütme dizisi artık tümüyle unutulmuştu.

Thales bu dizgenin başında ters tepe açılarının eşitliği, ikizkenar bir üçgenin taban açılarının eşitliği, bir çapın daireyi iki eşit parçaya ayırması gibi temel şeylerin kanıtlamasını yapmıştır. Nasıl ki Fenikelilerde tecim ve ulaştırma etkinlikleri sonucunda sayılar konusundaki bilgilerimizin başlangıcı doğduysa Mısırda da geometrinin temelleri atıldı. Thales Mısır'dan döndükten sonra bu bilimi Yunanistan'a getirdi ve buna kendisi de pek çok buluşlar ekledi. Başka pek çok buluş içinde kendisinden sonra gelenlere yol gösterdi. Onun yöntemi kısmen genel olup kısmen de sezgiye dayanıyordu. Kendisinden sonra ozan Stesichoros'un kardeşi Mamertios geometriyle uğraşmış olup bunları izleyen Pythagoras bu bilimi ileri bir eğitim dizgisi içine soktu. Bunlardan sonra hilallerin alanını bulan Sakızlı Hippokrates ve Kyrene'li Theodoros Geometri 'nin ünlü temsilcileri oldular. Hippokrates ise tarihte ilk kez temel matematik kitabını yazan kişi olarak tanınmaktadır. Onlardan sonra öteki matematik dalları yanında, özellikle geometrinin en büyük atılımının coşkulu ve gayretli çalışmalarına borçlu olduğumuz Eflatun gelir. O, yapıtlarına açık bir biçimde baştan başa matematiksel akıl yürütmeler yerleştirmiş ve felsefe öğrenenlerde her fırsatta matematiğe karşı beğeni ve tutku uyandırmaya çalışmıştır. Bu sıralarda teoremlerinin sayısını artırmış ve bunları daha benimser bir çerçeveye sokmuştur. Proklos daha sonra Eflatun'un kurduğu Akademi çatısı altındaki çalışmaları, ardı sıra gelen Eudoxos ve Eukleides gibi usta geometricilerin çalışmalarını anlatmayı sürdürmeye devam etmiştir (Ergun 2000).

Geçmişten günümüze kadar matematik ve geometri alanlarında çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan biri olan diferansiyel geometri, modern matematiğin en aktif çalışma alanlarından birisidir. Diferansiyel geometrinin başlangıcı Gauss 'un yüzeylerin eğrilikleri üzerine olan çalışmalarına dayanır. Gauss'un yüzeylerin diferansiyel geometrisi üzerine olan çalışmaları Riemann manifoldu kavramına ön ayak olmuştur.

Öklid geometride iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bir ölçme bağıntısıdır. Riemann manifold kavramını tanımlamak için Öklid uzaydaki uzaklık ölçme bağıntısını genelleştirdi. Öklid düzlemde (x^1, x^2) ve $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$ noktaları arasındaki en kısa uzaklık l,

$$l = \sqrt{(dx^1)^2 + (dx^2)^2}$$

şeklindedir. Pisagor teoremi ile verilen bu l uzunluğu $i, j = 1{,}2$ için,

$$\sum g_{ij} dx^i dx^j$$

dir. Burada $g_{11} = g_{22} = 1$ ve $g_{12} = g_{21} = 0$dır. Riemann son eşitliği $i, j = 1, \dots, n$ için (n, manifoldun boyutu),

$$ds^2 = \sum g_{ij}(x) dx^i dx^j$$

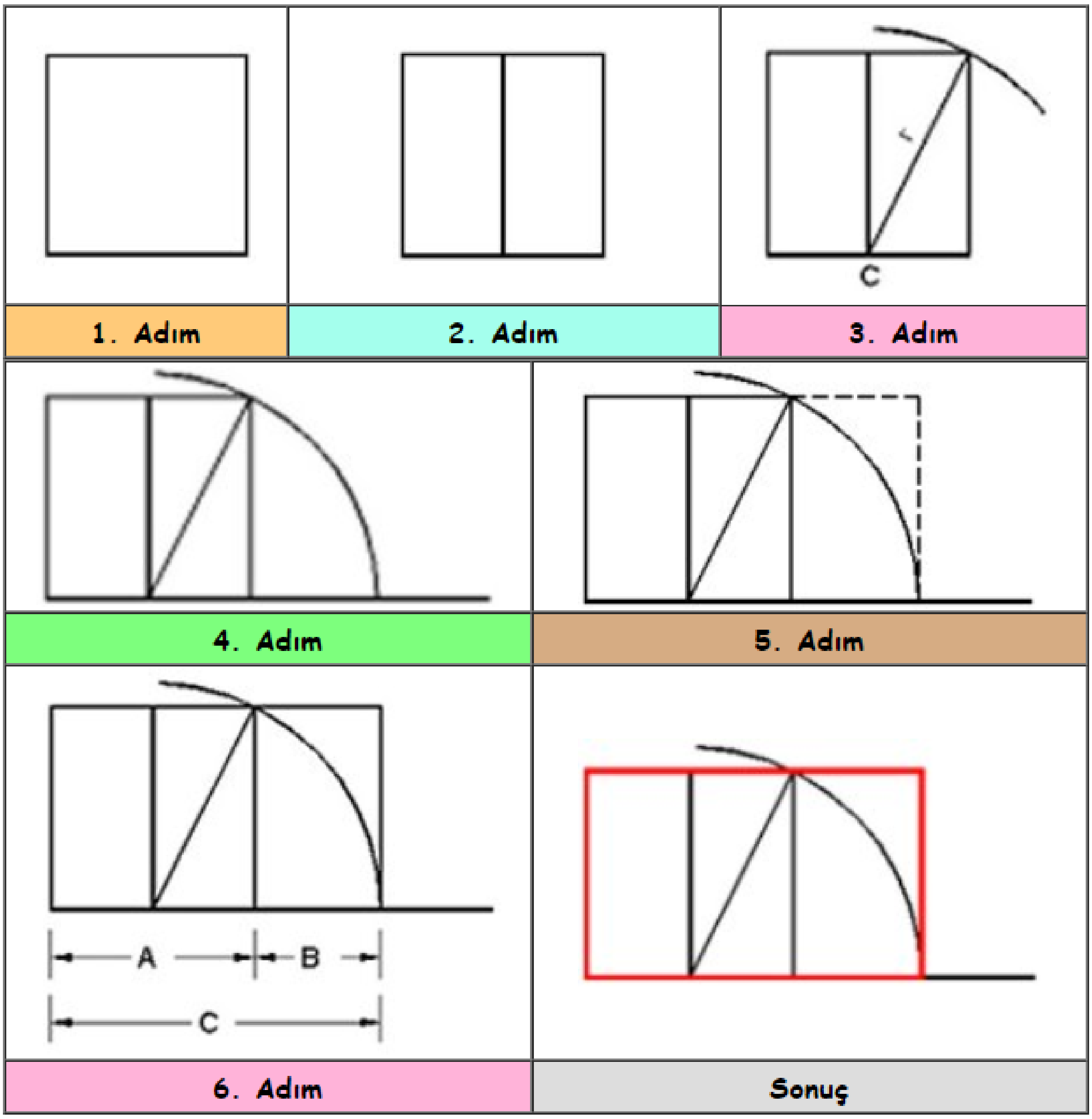
durumuna genelleştirdi. Böylece Riemann, Öklid uzaydaki uzunluk kavramını manifold üzerine metrik bağıntı olarak genişletmiş oldu. Artık metrik bağıntı sadece Öklid uzaydaki uzunluk kavramı olmak zorunda değildi. Öklid uzayda uzaklık kavramının belirlediği açı vb. kavramları manifold üzerinde tanımlamak mümkündü. Önemli olan uzayın geometrisini belirlemek için metrik bağıntıyı belirlemekti.

Riemann, manifold kavramını üzerinde çeşitli işlemlerin yapıldığı, koordinatların değiştirildiği n-boyutlu nokta kümesi olarak tanımladı. Gauss'un bulduğu ölçüye karşılık bugün Riemann eğrilik tensörü adı verilen ölçüyü koydu. Böylece Öklid veya Öklid dışı geometriler bu ölçünün durumuna göre belirleniyordu. Örneğin; sıfır eğrilikli düzlemde üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir. Eğriliği pozitif olan kürede çizilen üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden büyük ve eyer yüzeyi üzerindeki üçgenin iç açıları toplamı 180 dereceden küçüktür. Tüm bunlar manifoldun eğriliğinden kaynaklanır.

Riemann'ın geliştirdiği bu yeni bakış açısı, Einstein'ın geliştirdiği izafiyet teorisinin uzay-zaman kavramına temel oluşturdu. Einstein kütle çekimini tanımlamak için tensörel bir ifade aradığında, sonunda Riemann'ın tanımladığı metrik bağıntı veya bugün Riemann metriği adı verilen kavrama ulaştı.

Manifold kavramına ilk olarak Riemann tarafından giriş yapılmışsa da bu kavramın detaylı açıklaması Weyl tarafından 1923 yılında Riemann yüzeyler teorisi üzerine basılan makalesinde verildi. Manifold kavramının bugünkü forma taşınması ise Whitney (1936) in makalesinde görüldü (Şahin 2013).

Öklid'in çalışmalarından biri olan ve günümüzde, biyoloji, mimarlık, matematiksel olasılık, uzay-zamanı ve atom fiziği gibi birçok alanda uygulaması bulunan Altın Oran teorisi, matematiğin modern dallarından birisidir (El Naschie 1999; Heyrovska 2005). Altın oranı ifade etmenin en iyi yollarından biri kare üzerinde göstermektir.



Şekil 1.1. Altın oranin elde edilme şekli

Yukarıda Altın Orana nasıl ulaşılacağı gösterilmiştir. Manifoldlar üzerindeki diferansiyel yapıların teorisi büyük ilgi ile incelenmiştir. Daha sonra, manifoldlar üzerinde çok ilginç bir yapı tanımlanmıştır. Bu yapının adı altın yapıdır (golden structure). Aslında altın yapı

$$x^2 - x - 1 = 0$$

denklemin pozitif kökü olan

$$\eta = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.61803398874989..$$

sayısıdır. Eğer ki altın oranı veren denklem bir manifold üzerinde tanımlanmak istenirse, (1,1) tipli bir tensör alanı (endomorfizm ya da afinor) olan φ yardımıyla

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

şeklinde ifade edilir.

Bu tez çalışmasında ise en az altın oran kadar önemli çalışma alanları olan Bronz Oran kullanılmıştır. Kalia (2011) çalışmasında yani bir Bronz Orandan bahsetmiştir. Bu oran

$$x^2 - mx + 1 = 0$$

denkleminin pozitif kökü olan

$$B_m = \frac{m+\sqrt{m^2-4}}{2}$$

sayısıdır. Şahin (Sahin 2018) çalışmasında ise bu orandan ilham alarak diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde poly-Norden yapısı olarak adlandırılan bir yapı oluşturmuştur. Bu çalışmasında yazar, poly-Norden manifoldunun bazı geometrik özelliklerini incelemiş ve poly-Norden manifoldları ile farklı yapılara sahip diğer manifoldlar arasındaki bazı dönüşümleri incelemiştir.

Diferensiyellenebilir bir M_n $(n = 2k)$ manifoldu üzerindeki hemen hemen poly-Norden yapı

$$F^2 - mF + I = 0$$

denklemini sağlayan (1,1) tipli F tensör alanıdır. Burada I manifold üzerindeki birim tensör alanıdır. Dolayısıyla (M_n, F) ikilisi hemen hemen poly-Norden manifoldu olarak adlandırılır (Sahin 2018). (M_n, F) hemen hemen poly-Norden manifoldu üzerinde tanımlanan bir g yarı-Riemann metriği herhangi X, Y vektör alanı için

$$g(FX, Y) = g(X, FY)$$

veya buna denk olan

$$g(FX, FY) = mg(FX, Y) - g(X, Y)$$

şartını sağlıyorsa ise yarı-Riemann metriği g, F hemen hemen poly-Norden yapısına göre pürdür (self-adjoint) denir. (M, g, F) üçlüsüne ise hemen hemen poly-Norden yarı-Riemann manifoldu denir (Sahin 2018). Yapılar ve konneksiyonlarla ilgili daha fazla bilgi için Ganchev and Borisov (1986), Ganchev *et al.* (1987), Prvanovic (1977), Yano and Imai (1975), Yano (1970), Crasmareanu and Hretcanu (2008), Hretcanu and Crasmareanu (2013), Gezer *et al.* (2013), Gezer and Karaman (2015, 2017), Karaman (2018) çalışmalarına bakılabilir.

Bu tez çalışmasının Araştırma ve Bulguları kısmında F hemen hemen poly-Norden yapısının farklı bir metodla integrallenebilme şartı verildi. Φ operatörü (veya Tachibana operatörü) olarak adlandırılan bu türev operatörüyle görüldü ki $\Phi_F g = 0$ şartı $\nabla F = 0$ şartına denktir. Tensörlerin holomorfluklarının da araştırıldığı bu operatör yardımıyla (M, g, F) üçlüsünün holomorfluğu incelendi. Konuyla alakalı örnek verildi. Daha sonra oluşturulan bu yeni manifold üzerinde burulmaya sahip yeni bir konneksiyon tanımlandı ve bu konneksiyonun burulma ve eğrilik tensörlerinin özellikleri incelendi.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca ihtiyaç duyulan temel kavramlar konu bütünlüğü göz önüne alınarak sunulmuştur.

2.1. Tensörler

Tanım 2.1.1: V_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^{D}\mathrm{V}_{\mathrm{n}}$ de $V_n$vektör uzayının dual uzayı olsun. Bu durumda,

$$t: \overbrace{V_n \times V_n \dots \times V_n}^{q\ tane} \times \overbrace{{}^{D}\mathrm{V}_{\mathrm{n}} \times {}^{D}\mathrm{V}_{\mathrm{n}} \dots \times {}^{D}\mathrm{V}_{\mathrm{n}}}^{p\ tane} \to \mathbb{R}$$

ile gösterilen ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2, \dots v_q \in V_n$, ${}^{D}V_1$, ${}^{D}V_2, \dots$, ${}^{D}V_p \in {}^{D}V_n$ olmak üzere,

$$t\big(v_1, \dots, \lambda_1 v_k + \lambda_1 v'_k, \dots\big) = \lambda_1 t(v_1, \dots, v_k, \dots) + \lambda_2 t\big(v_1, \dots, v'_k, \dots\big)$$

ile verilen t dönüşümüne p dereceden kontravaryant ve q dereceden kovaryant tensör adı verilir. Burada $v_k, v'_k \in \mathrm{V}_{\mathrm{n}}$ (veya ${}^{D}\mathrm{V}_{\mathrm{n}}$) dir. Bu tensörlerin kümesi $\mathfrak{I}_q^p(V_n)$ ile gösterilir ve $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ve $t_1, t_2 \in \mathfrak{I}_q^p(V_n)$ olmak üzere,

$$(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)\,(v_1, v_2, \dots) = \lambda_1 t_1(v_1, v_2, \dots) + \lambda_2 t_2(v_1, v_2, \dots)$$

olup $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 \in \mathfrak{I}_q^p(V_n)$ olduğundan $\mathfrak{I}_q^p(V_n)$ bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Ayrıca (p, q) ifadesi tensörün tipini ifade eder (Şahin 2013).

Tanım 2.1.2: V_n, n-boyutlu bir vektör uzayı ve ${}^{D}\mathrm{V}_{\mathrm{n}}$ de V_n vektör uzayının dual uzayı olsun. $\mathfrak{I}_q^p(V_n)$, (p, q) tipli tensörlerin kümesi olmak üzere,

$$C_j^i: \mathfrak{I}_q^p(V_n) \to \mathfrak{I}_{q-1}^{p-1}(V_n)$$

$$A \to (C_j^i A)\big(e_1, \dots e_{q-1}, w^1, \dots w^{p-1}\big) = C\{A\big(.\,, e_1, \dots e_{q-1}, .\,, w^1, \dots w^{p-1}\big)\}$$

$$C_j^i A = \sum_m A(e_m, e_1, \dots e_{q-1}\,, w^m, w^1, \dots w^{p-1})$$

ile gösterilen operatöre kontraksiyon (daraltma) operatörü denir (Şahin 2013). Burada $e_m, e_1, \dots e_{q-1}$ler V_n de baz ve $w^m, w^1, \dots w^{p-1}$ ler ise ${}^{D}V_n$ de dual baz (kobaz) vektörlerdir. Böylece bir daralma operatörü (p, q) tipli bir tensörü $(p-1, q-1)$ tipli bir tensöre taşır (Şahin 2013).

$t(v_1, v_2)$, (0,2) tipli bir tensör olsun. Bu tensörle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$$

biçiminde bir $t'(v_1, v_2)$ tensörü tanımlansın. Böylece λ ve μ reel değerleri için sonsuz sayıda tensör elde edilir. Bunlar içerisinden herhangi birisi $\lambda = \mu = \frac{1}{2!}$ biçiminde seçilirse buna karşılık gelen yeni tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün simetrikleşmesi denir ve $Sim(t)$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$Sim\big(t(v_1, v_2)\big) = \frac{1}{2!}(t(v_1, v_2) + t(v_2, v_1))$$

olur. Eğer değişken sayısı 3 tane olursa $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün simetrikleşmesi,

$$Sim\big(t(v_1, v_2, v_3)\big) = \frac{1}{3!}[t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2)$$
$$+ t(v_1, v_3, v_2) + t(v_3, v_2, v_1) + t(v_2, v_1, v_3)]$$

şeklinde olur.

Benzer olarak $t'(v_1, v_2) = \lambda t(v_1, v_2) + \mu t(v_2, v_1)$ tensörlerinden bir diğeri ise $\lambda = -\mu = \frac{1}{2!}$ seçilerek elde edilebilir. O halde yeni elde edilen tensöre $t(v_1, v_2)$ tensörünün antisimetrikleşmesi denir ve $Alt(t)$ biçiminde gösterilir. Yani,

$$Alt\big(t(v_1, v_2)\big) = \frac{1}{2!}\left(t(v_1, v_2) - t(v_2, v_1)\right)$$

olur. Eğer değişken sayısı 3 tane olursa $t(v_1, v_2, v_3)$ tensörünün antisimetrikleşmesi,

$$Alt\big(t(v_1, v_2, v_3)\big) = \frac{1}{3!}[t(v_1, v_2, v_3) + t(v_2, v_3, v_1) + t(v_3, v_1, v_2)$$

$$-t(v_1, v_3, v_2) - t(v_3, v_2, v_1) + t(v_2, v_1, v_3)]$$

biçiminde olur (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.3: Eğer $Sim(t) = t$ $(Alt(t) = t)$ olursa, t tensörüne simetrik (antisimetrik) tensör denir (Salimov ve Mağden 2008).

2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.2.1: $f, \mathbb{R}$ uzayının bir U açık kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonunun k. mertebeden kısmi türevleri var ve, $k \leq r$ olmak üzere, sürekli ise f fonksiyonu r. mertebede diferensiyellenebilirdir denir ve $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 2.2.2: M bir Haussdorf uzay olsun. Eğer $p \in M$ için $\mathbb{R}^n$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U varsa M Haussdorf uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda $boy(\mathbb{R}^n) = n$ olduğundan, manifoldun boyutu da n dir ve M_n ile gösterilir (Şahin 2013).

Tanım 2.2.2 de verilen homeomorfizma $\varphi: U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ ise, (U, φ) ikilisine bir harita denir. M_n manifoldunun bütün noktalarının en az bir haritada yer alması için bu açık kümelerin arakesitinin boştan farklı olması gerekir. φ bir homeomorfizma olduğundan $p \in U$ noktasının koordinatları $x = \varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ noktasının koordinatları olarak tanımlanabilir. Böylece φ homeomorfizması M_n manifoldunun bir p noktasına $x_1(p), \dots, x_n(p))$ n-lisini karşılık getirir. $x_1(p), \dots, x_n(p))$ sayılarına p noktasının φ altındaki yerel koordinatları denir. Bu nedenle manifold, herhangi bir noktasının komşuluğunda n tane bağımsız koordinatla verilen bir küme olarak da düşünülebilir (Şahin 2013).

$U \cap V \neq \phi$ olmak üzere (U, φ) ve (V, ψ) iki harita olsun. $U \cap V$ kümesinde bir noktanın φ altındaki koordinatları $(x_1, \dots, x_n)$ olsun. φ dönüşümünün φ^{-1} tersi olduğundan, $U \cap V$ de bir tek p noktası vardır. Şimdi p noktasının ψ altındaki koordinatları da $(y_1, \dots, y_n)$ olsun. Bu durumda bu koordinatlar arasında,

$$y_i = f^i(x_1, \dots, x_n) = \left(\psi \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n)\right)^i,$$
$$x_i = g^i(y_1, \dots, y_n) = \left(\varphi \circ \psi^{-1}(y_1, \dots, y_n)\right)^i$$

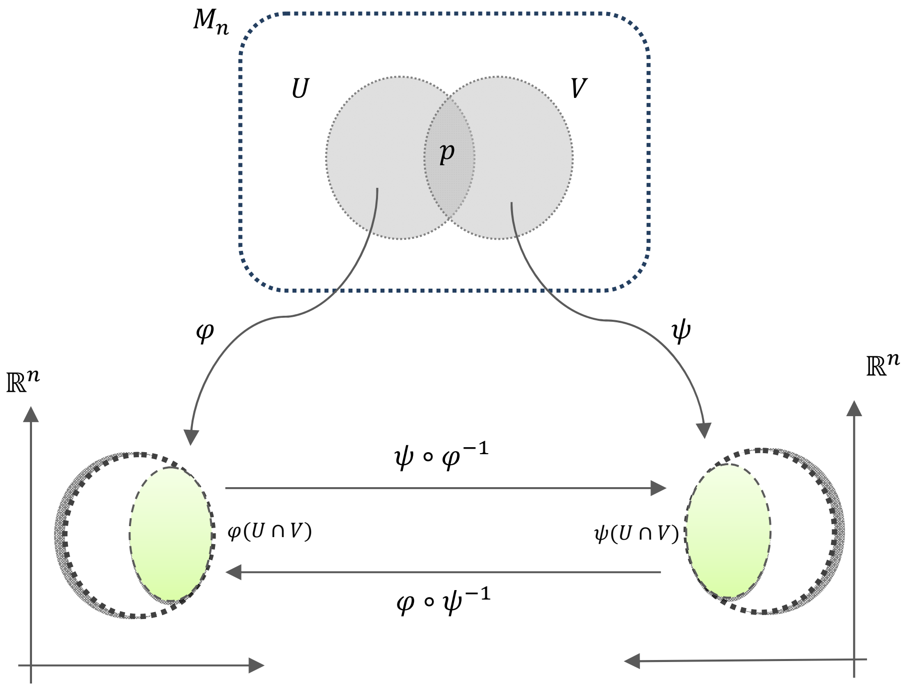
bağıntısı elde edilir, burada $(x_1, \dots, x_n) \in \varphi\,(U \cap V)$, $(y_1, \dots, y_n) \in \psi(U \cap V), i = 1, \dots, n$ şeklindedir. $\psi \circ \varphi^{-1}$ ve $\varphi \circ \psi^{-1}$ homeomorfizmaları birbirinin tersi olduğundan, f^i ve g^i fonksiyonları süreklidir. $U \cap V \neq \phi$ durumunda $f^i(x_1, \dots, x_n)$ ve $g^i(y_1, \dots, y_n)$ fonksiyonları $r.$ mertebeden diferensiyellenebiliyorsa (φ, U) ve (ψ, V) haritaları $r.$ mertebeden uyumludur denir. Eğer $U \cap V \neq \phi$ ise uyumlu kabul edilir (Şahin 2013).

Tanım 2.2.3: M_n n-boyutlu manifold olsun. Eğer M_n üzerindeki haritaların bir ailesi olan $\mathbb{A} = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \xi), \dots\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathbb{A}$kümesine M_n üzerinde $r.$ mertebeden diferensiyellenebilir yapı (veya atlas) denir (Şahin 2013).

1) {U,V,W,…} açık kümeleri M_n manifoldunun bir açık örtüsüdür,

2) $\mathbb{A}$ daki herhangi bir harita r. mertebeden uyumludur.

3) $\mathbb{A}$ maksimaldir, yani eğer bir $(\overline{U}, \overline{\varphi})$ haritası $\mathbb{A}$ daki bütün koordinat haritaları ile uyumlu ise bu durumda $(\overline{U}, \overline{\varphi}) \in \mathbb{A}$dır.



Şekil 2.1. Diferensiyellenebilir atlas

Tanım 2.2.4: M_n n-boyutlu manifold olsun. Eğer M_n manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M_n manifolsuna r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir. Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M_n manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M_n manifolduna C^∞-manifold (veya diferensiyellenebilir manifold) denir.

Bir M_n manifoldu üzerinde diferensiyel yapı, manifold üzerinde tensör, diferensiyel form, Lie türevi, kovaryant türev gibi birçok kavramı tanımlamaya olanak verir.

2.3. Tensör Diferensiyellemesi

Tanım 2.3.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold ve $\Im_q^p(M_n)$ de her $m \in M_n$ noktasındaki (p,q) tipli tensör uzayı olsun. M_n manifoldunun her $m \in M_n$ noktasına $\Im_q^p(M_n)$ tensör uzayından bir $t_q^p(m)$ tensörü karşılık getiren,

$$t_p: M_n \to \Im_q^p(M_n)$$
$$m \to t_q^p(m) \in \Im_q^p(M_n)$$

şeklindeki t fonksiyonuna (p,q) tipli tensör alanı denir (Bishop and Goldberg 1968).

Burada $p = 1$ ve $q = 0$ alınırsa (1,0) tipli tensör alanı (ya da vektör alanı) elde edilir. Bundan dolayıdır ki (1,0) vektör alanlarının kümesi tez boyunca $\Im_0^1(M_n)$ ile işaretlenecektir. Eğer $p = 0$ ve $q = 1$ alınırsa (0,1) tipli tensör alanı (ya da kovektör alanı) elde edilir ve kümesi $\Im_1^0(M_n)$ ile gösterilecektir. Eğer $p = 0$ ve $q = 0$ alınırsa her $m \in M_n$ noktasına bir skaler değer karşılık gelir. Yani (0,0) tipli bir tensör alanı reel değerli bir fonksiyondur ve kümesi $\Im_0^0(M_n)$ ile gösterilecektir.

Yerel koordinatlarla (p,q) tipli t tensör alanı,

$$t = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_1} \otimes \partial_{i_1} \otimes \dots \otimes \partial_{i_p}$$

biçiminde gösterilir. Burada $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}$ lere t tensör alanının U koordinat komşuluğunda yerel koordinat sistemindeki koordinatları denir. Eğer $t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}(x)$ fonksiyonları C^∞-sınıfından iseler t tensör alanına C^∞-sınıfındandır denir (Salimov ve Mağden 2008).

C^∞ -sınıfından bir M_n manifoldu üzerindeki (p,q) tipli tensör alanlarının kümesi $\Im_q^p(M_n)$, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu tensörlerin toplamı,

$$\Im(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p(M_n)$$

biçiminde gösterilirse $\Im(M_n)$ kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebir olur. Burada $\Im(M_n)$ cebiri üzerinde üçüncü işlem olan tensörel çarpım işelmi $\otimes$, noktasal olarak her $x \in M_n$ ve $\underset{1}{t}, \underset{2}{t} \in \Im(M_n)$ için,

$$\underset{1}{t} \otimes \underset{2}{t} = \left(\underset{1}{t}\right)_x \otimes \left(\underset{2}{t}\right)_x$$

şeklindedir.

Tanım 2.3.2: $D: \Im(M_n) \to \Im(M_n)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $t, s \in \Im(M_n)$ için aşağıdaki şartları sağlarsa D dönüşümüne $\Im(M_n)$ cebirinin tensör diferensiyellenmesi denir.

1) $D(at + bs) = aD(t) + bD(s)$ dir. Yani D dönüşümü sabit katsayılara göre lineerdir,
2) $D\left(\Im_q^p(M_n)\right) \subset \Im_q^p(M_n)$. Yani tensörün tipi korunur,
3) Leibniz kuralını sağlar. Yani $D(t \otimes s) = D(t) \otimes s + t \otimes D(s)$ dir,
4) C kontraksiyon operatörü olmak üzere $D(Ct) = C(D(t))$ dir. Yani D dönüşümü kontraksiyon ile yer değiştirebilir.

2.4. Lie Operatörü ve Lie Türevi

Tanım 2.4.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold, M_n manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için,

$$[\,,]: \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

$$[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının Lie operatörü (parantezi) denir. Burada $X(f), f$ fonksiyonunun X vektör alanı yönündeki türevidir.

Tanım 2.4.2: $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ ve $f \in \Im_0^0(M_n)$ olmak üzere $D = L_X$ diferensiyelleme işlemi aşağıdaki şartları sağlarsa L_X e X vektör alanı yönündeki Lie diferensiyellemesi adı verilir.

1) $L_X f = X(f)$,

2) $L_X Y = [X, Y]$.

Burada $[X, Y]$ Lie parantezidir (Salimov ve Mağden 2008).

Keyfi (p, q) tipli t tensörü için Lie türevi $X_1, \dots, X_q \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \Im_0^1(M_n)$ için L_X özelliklerine göre,

$$\begin{aligned}(L_X t)\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right) = {} & X\left(t\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right)\right) \\ & - \sum_{\lambda=1}^{q} \mathrm{t}\left(X_1, \dots, L_X X_\lambda, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots \overset{p}{w}\right) \\ & - \sum_{\mu=1}^{p} \mathrm{t}\left(X_1, \dots, X_q, \overset{1}{w}, \dots, L_x \overset{\mu}{w}, \dots, \overset{p}{w}\right)\end{aligned}$$

biçiminde ve yerel koordinatlarla bu ifade $X = X^k \partial_k, X_\lambda = \partial j_\lambda, \lambda = 1, \dots, q$ ve $\overset{\mu}{w} = dx^{i_\mu}, \mu = 1, \dots, p$ için,

$$(L_X t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = X^k \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\mu=1}^{q} (\partial j_\lambda X^k) t_{j_1 \dots k \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} - \sum_{\mu=1}^{p} \left(\partial_k X^{i_\mu}\right) t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots k \dots i_p}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

2.5. Lineer Konneksiyon ve Kovaryant Türev

Tanım 2.5.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold $X, Y, Z \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\nabla: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \to \mathfrak{I}_0^1(M_n)$$

ile tanımlı

1) $\nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

2) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

3) $\nabla_{fX}Y = f\nabla_X Y$,

4) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$,

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir (Şahin 2013). $\nabla_X Y$ vektör alanında ise Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türev adı verilir. Afin konneksiyonun tanımından görülmektedir ki, bir afin konneksiyon M_n üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan bir dönüşümdür.

M_n manifoldu üzerindeki U koordinat komşuluğundaki x^i yerel koordinatları ve bu komşulukta $\frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_i$ doğal vektör alanı ele alınsın. $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ olmak üzere ∇_i nin ∂_i vektör alanına uygulamasıyla elde edilen vektör alanı,

$$\nabla_i \partial_i = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

şeklinde olur. Burada $\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$, U komşuluğunda tayin edilmiş C^∞-sınıfından fonksiyonlardır (Salimov ve Mağden 2008). Ayrıca bu Γ_{ij}^k ifadesine ∇ konneksiyonnunun katsayıları veya 2. tür Christoffel senbolleri denir.

Keyfi (p,q) tipli t tensörü için kovaryant $x_1,\dots,x_q \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w},\dots,\overset{p}{w} \in \Im_0^1(M_n)$ için ∇_Y özelliklerine göre,

$$\begin{aligned}(\nabla_Y t)\left(X_1,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots,\overset{p}{w}\right) &= Y\left(t\left(X_1,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots,\overset{p}{w}\right)\right)\\ &\quad -\sum_{\lambda=1}^{q} \mathrm{t}\left(X_1,\dots,\nabla_Y X_\lambda,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots\overset{p}{w}\right)\\ &\quad -\sum_{\mu=1}^{p} \mathrm{t}\left(X_1,\dots,X_q,\overset{1}{w},\dots,\nabla_Y\overset{\mu}{w},\dots\overset{p}{w}\right)\end{aligned}$$

Biçiminde ve yerel koordinatlarla bu ifade $Y=\partial_k, X_\lambda=\partial_{j_\lambda}, \lambda=1,\dots,q$ ve $\overset{\mu}{w}=dx^{i_\mu}$, $\mu=1,\dots,p$ için,

$$(\nabla_Y t)^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = \partial_k t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} - \sum_{\lambda=1}^{q} \Gamma^m_{kj\lambda}\ \ t^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots m\dots j_q} - \sum_{\mu=1}^{p} \Gamma^{i\lambda}_{km} t^{i_1\dots m\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$$

şeklindedir (Salimov ve Mağden 2008).

2.6. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

$f\in C^\infty(U,\mathbb{R})$fonksiyonunun tam diferensiyeli $df=\partial_i f dx^i$ şeklinde olup buradaki $\partial_i f=\omega_i$ ifadesi f fonksiyonunun tam diferensiyeli yardımıyla elde edilen 1-form dur. Elde edilen 1-formun kovaryant türevi,

$$\begin{aligned}\nabla_i\omega_j &= \partial_i\omega_j - \Gamma^k_{ij}\omega_k \\ &= \partial_i\partial_j f - \Gamma^k_{ji}(\partial_k f)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Şeklindedir. Analizden bilinen Schwarz teoremine göre sürekli bir fonksiyonda kısmi türevler yer değiştirebilir. Yani $\partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f$ yazılır. O halde,

$$\nabla_j \omega_i = \partial_j \partial_i f - \Gamma_{ji}^k \omega_k \tag{2.2}$$

biçiminde olup (2.1) ve (2.2) den,

$$\nabla_j \omega_i - \nabla_i \omega_j = \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) \omega_k = S_{ij}^k \omega_k$$

elde edilir. Burada ki S_{ij}^k ifadesine ∇ konneksiyonunun burulma tensörü denir. $S_{ij}^k = -S_{ji}^k$ olduğu açıktır. Burulma tensörünün invaryant (genel) formdaki yazılışı ise her $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

şeklindedir. Burada $[X, Y]$, Lie parantezidir. Afin konneksiyonlu uzaylar içerisinde burulması sıfır olan (burulmasız) uzaylar çok önemli bir sınıf teşkil eder. Bu tür uzaylarda konneksiyon katsayıları simetrik olur. Yani,

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0 \Leftrightarrow S_{ij}^k = 0$$

biçimindedir (Salimov ve Mağden 2008). Dolayısıyla burulmasız uzaylarda

$$[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

eşitliği geçerlidir.

Eğrilik tensörü için $V = v^i \partial_i \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı için $\nabla_s v^i$ kovaryant türevinin tekrar kovaryant türevi alınırsa,

$$\nabla_r \nabla_s v^i = \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \partial_r \Gamma_{sk}^i v^k + \Gamma_{sk}^i \partial_r v^k + \Gamma_{rm}^i \partial_s v^m + \Gamma_{rm}^i \Gamma_{sk}^m v^k - \Gamma_{rs}^m \nabla_m v^i$$

olur. Burada r ve s indislerine göre antisimetrikleşme işlemi yapılırsa,

$$2\nabla_{[r} \nabla_{s]} v^i = R_{rsk}{}^i v^k - 2S_{ij}{}^m \nabla_m v^i$$

elde edilir. Bu son eşitliğe v^i vektör alanı için Ricci özdeşliği denir. Ayrıca bu özdeşlik içinde bulunan $R_{rsk}{}^i$ bileşenlerine ise ∇konneksiyonunun eğrilik tensörünün bileşenleri denir. İnvartant halde eğrilik tensörü her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için,

$$R(X, Y, Z) = \nabla_x \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X \mathrm{Z} - \nabla_{[\mathrm{X,Y}]} \mathrm{Z}$$

biçiminde ifade edilir. $x = \partial_k, Y = \partial_i,\ Z = \partial_j$ doğal çatısı için eğrilik tensörünün ifadesi,

$$R_{ijk}{}^l = \partial_i \Gamma_{jk}^l - \partial_j \Gamma_{jk}^l + \Gamma_{im}^l \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ik}^m$$

şeklinde olur. Yukarıdaki son eşitlikten kolayca görülür ki $R_{ijk}{}^l = -R_{ijk}{}^l$ ya da buna denk olarak $R_{(ij)k}^{\ \ l} = 0$ yazılır. Yani eğrilik tensörü ilk iki alt indise göre antisimetriktir.

Yardımcı Teorem 2.6.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold ve ∇ ise bu manifold üzerinde burulmasız afin konneksiyon olsun. R, burulmasız afin konneksiyonun eğrilik tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

1) $R_{ijk}{}^l + R_{kij}{}^l + R_{jki}{}^l = 0,$

2) $\nabla_t R_{ijk}{}^l + \nabla_j R_{tik}{}^l + \nabla_i R_{jtk}{}^l = 0.$

Ayrıca yukarıdaki ifadelere sırasıyla 1. Bianchi ve 2. Bianchi (Bianchi-Padov) özdeşlikleri denir.

2.7. Riemann Manifoldu

Tanım 2.7.1: M_n, C^∞-sınıfından bir manifold ve $\mathfrak{I}_0^1(M_n)$ bu manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi olmak üzere,

$$g: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \times \mathfrak{I}_0^1(M_n) \to C^\infty(M_n, \mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilen g bilineer formu

1) $g(X,Y) = g(Y,X)$, (simetriklik)
2) $g(X,X) \geq 0$ ve herbir X için $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$, (pozitif tanımlılık)

koşulları yerine geliyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. (M_n, g) ikilisine ise Riemann manifoldu denir.

Yukarıda belirtilen pozitif tanımlılık koşulu yerine bu koşuldan daha zayıf olan ve " Her $Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için $g(X,Y) = 0$ olması $X = 0$ olmasını gerekmektedir." şeklinde tanımlanan g bilineer formunun regülerlik (yada non-dejenere) şartı konulursa, bu durumda (M_n, g) ikilisine yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu adı verilir (Kühnel 2005).

Regülerlik şartını koordinatlarla, $X = X^i \partial_i$ ve $Y = Y^j \partial_j$ için,

$$g(X,Y) = g(\partial_i, \partial_j) X^i Y^j = 0$$

biçimindedir. Son eşitlik her Y^j için sağlandığı için $g_{ij}X^i = 0$ olur. Bu denklem sisteminin $X^i = 0$ çözümüne sahip olması için,

$$Det(g_{ij}) \neq 0$$

olması gerekmektedir. Burada (g_{ij}), g_{ij} tensörüne karşılık gelen matristir.

Tanım 2.7.2: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlanmış ∇ afin konneksiyonu $\nabla g = 0$ şartını sağlıyorsa bu konneksiyona metrik konneksiyon adı verilir.

Teorem 2.7.1: (M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı olan burulmasız bir tek metrik konneksiyon vardır.

Yukarıda Teorem 2.7.1 de ifade edilen metrik konneksiyon Levi-Civita veya Riemann konneksiyonu olarak da adlandırılır.

Teorem 2.7.2: (M_n, g) Riemann manifoldu, ∇ ise bu manifoldun Riemann konneksiyonu olmak üzere, her $X, Y, Z \in \Im_0^1(M_n)$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad -g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{2.3}$$

(2.3) eşitliğine Kozsul formülü adı verilmektedir ve $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ ve $Z = \partial_k$ doğal koordinatları için,

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) \tag{2.4}$$

olur. Burada ki Γ_{ij}^h fonksiyonlarına, ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları adı verilir.

(M_n, g) Riemann manifoldunun ∇ Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörü her $X, Y, Z \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için;

$$R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

şeklinde ifade edilir ve bu tensöre Riemann eğrilik tensörü denir. ∇ Levi-Civita konneksiyonu burulmasız olduğu için Yardımcı Teorem 2.6.1 deki denklikler direkt sağlanır. Buna ek olarak Riemann eğrilik tensörünün kontravaryant tensörü indirilip, (0,4) tipli kovaryant tensör elde edilir. Yani,

$$R_{ijk}{}^{m} g_{ml} = R_{ijkl}$$

olur.

Yardımcı Teorem 2.7.1: (M_n, g)Riemann manifoldu ve ∇ ise bu manifoldun Riemann konneksiyonu olmak üzere. Bu manifoldun Riemann eğriliği olan R, aşağıdaki şartları sağlar.

1) $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,
2) $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Tanım 2.7.3: Eğrilik tensörü $R_{ijk}{}^{l}$ aracılığıyla ifade edilen,

$$C_1^1\left(R_{ijk}{}^{l}\right) = R_{ljk}{}^{l} = R_{jk}$$

tensörüne Ricci tensörü adı verilir. Burada C_1^1, kontraksiyon işlemi olup (1,3) tipli tensörü (0,2) tipli tensöre dönüştürür. Ek olarak Ricci tensörü simetriktir. Yani $R_{jk} = R_{kj}$ dir.

Tanım 2.7.4: Ricci tensöründen tam kontraksiyon ile elde edilen tensöre skaler eğrilik denir. Öyle ki τ skaler eğriliği,

$$\tau = g^{jk} R_{jk}$$

şeklinde gösterilir.

2.8. Afinor

Tanım 2.8.1: M_n, C^{∞}-sınıfından bir manifold olmak üzere $\Im_1^1(M_n)$ uzayının her bir elemanına, yani (1,1) tipli tensör alanlarına afinor adı verilir. Ayrıca afinorlara M_n manifoldunun endomorfizmleri de denilebilir. Bundan dolayı herhangi bir $F \in \Im_1^1(M_n)$ için,

$$F: \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$

olur. Buradan her $X \in \Im_0^1(M_n)$ için

$$F: \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$$
$$X \to F(X) \in \Im_0^1(M_n)$$
$$F(X) \to F^2(X) \in \Im_0^1(M_n)$$

yazılır. I birim afinoru için, eğer

1) $F^2(X) = I(X)$ ise F hemen hemen çarpım yapı,

2) $F^2(X) = -I(X)$ ise F hemen hemen kompleks yapı,

3) $F^2(X) = 0(X)$ ise F hemen hemen tanjant (dual) yapı

olarak adlandırılır (Yano and Kon 1984).

2.9. Dış Cebir ve Dış Türev

$\wedge^r(M_n)$ ile M_n manifoldu üzerindeki tüm anti-simetrik kovaryant tensörlerin (formların) kümesi gösterilsin.

$$\wedge(M_n) = \bigoplus_{r=0} \wedge^r(M_n) = \mathbb{R} \oplus \wedge^1(M_n) \oplus \wedge^1(M_n) \oplus \dots$$

şeklinde tanımlanan $\wedge(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde birleşimli cebir meydana getirir. Bu cebire dış cebir veya Grassman cebiri adı verilir (Şahin 2013).

Tanım 2.9.1: (M_n) bir manifold ve $\wedge(M_n)$ dış cebir olmak üzere. Bu durumda,

$$d{:}\wedge(M_n) \rightarrow \wedge(M_n)$$

ile tanımlanmış ve

1) $d{:}\wedge^r \rightarrow \wedge^{r+1}$, yani d operatörü r mertebeli formu $(r+1)$ mertebeli forma götürür,

2) $d^2 = 0$,

3) her $f \in C^\infty(M_n, \mathbb{R})$ için df, f fonksiyonunun diferensiyelidir,

4) $w \in \wedge^r(M_n)$ ve $\overline{w}$ keyfi form için,

$$d(w \wedge \overline{w}) = dw \wedge \overline{w} + (-1)^r w \wedge d\overline{w},$$

şartlarını yerine getiren d dönüşümüne dış türev adı verilir.

Eğer w bir r-form ise $X_0, X_1, \dots, X_r \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olmak üzere,

$$dw(X_0, X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{1+r}\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i \left(w\left(X_0, \dots \hat{X}_i, \dots, X_r\right)\right)$$
$$+ \sum_{0 \le i < j \le r}(-1)^{i+j} w\left(\left[X_i, X_j\right], X_0, \dots \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_r\right)\}$$

elde edilir. Burada $\widehat{\ }$ sembolü çıkarılması gereken bileşeni göstermektedir. Yukarıdaki eşitliklerden faydalanarak$w$, 1-formu ve p, 2-formu için sırasıyla,

$$2dw(X, Y) = Xw(Y) - Yw(X) - w([X, Y])$$

ve

$$3dp(X, Y, Z) = Xp(Y, Z) + Yp(Z, X) + Zp(X, Y)$$
$$-p([X, Y], Z) - p([Y, Z], X) - p([Z, X], Y)$$

yazılır (Şahin 2013).

3. MATERYAL YÖNTEM

Tanım 3.1: $F \in \mathfrak{J}_1^1(M_n)$, M_n üzerinde bir afinor alanı olsun, keyfi $X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ ve $\overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w} \in \mathfrak{J}_1^0(M_n)$ için aşağıdaki şartları sağlayan (p,q) tipli t tensör alanına F ye göre pür tensör alanı denir.

$$
\begin{aligned}
t(FX_1, X_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) &= t(X_1, FX_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \dots, FX_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_q; \ 'F\overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \ 'F\overset{2}{w}, \dots, \overset{p}{w}) \\
&\vdots \\
&= t(X_1, X_2, \dots, X_q; \overset{1}{w}, \overset{2}{w}, \dots, \ 'F\overset{p}{w})
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Burada $'F$, $X \in \mathfrak{J}_0^1(M_n)$ ve $w \in \mathfrak{J}_1^0(M_n)$ için,

$$(\ 'Fw)(X) = w(FX) = (w \circ F)(X)$$

ile tanımlanan F nin eşlenik operatörüdür (Salimov 2013).

3.1. Tachibana Operatörü

Tanım 3.1.1: $\mathfrak{J}(M_n) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \ \mathfrak{J}_q^p(M_n)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri ve $F \ \in \ \mathfrak{J}_1^1(M_n)$ olsun. $\Phi_F \colon \overset{*}{\mathfrak{J}}{}_q^p(M_n) \to \mathfrak{J}_q^p(M_n)$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu Φ_F dönüşümüne Tachibana operatörü veya Φ-operatörü denir.

1) Φ sabit katsayılara göre lineerdir,

2) Her (r,s) için $\Phi_F : \overset{*}{\mathfrak{I}}{}^p_q(M_n) \rightarrow : \mathfrak{I}^p_{q+1}(M_n)$,

3) Her $K, L \in \overset{*}{\mathfrak{I}}(M_n)$ için, $\Phi_F\left(K \overset{C}{\otimes} L\right) = (\Phi_F K) \overset{C}{\otimes} L + K \overset{C}{\otimes} (\Phi_F L)$,

4) Her $X, Y \in \mathfrak{I}^1_0(M_n)$ için $\Phi_{FX} Y = -(L_Y F)X$, (burada L_Y, Y ye göre Lie türevidir.)

5) Her $\omega \in \mathfrak{I}^0_1(M_n)$ ve $X, Y \in \mathfrak{I}^1_0(M_n)$ için,

$$\begin{aligned}\Phi_{\varphi X}(l_Y \omega) &= \big(d(l_Y \omega)\big)(\varphi X) - \big(d\big(l_Y(\omega \circ \varphi)\big)\big)(X) \\ &= (\varphi X)(l_Y \omega) - X(l_{\varphi Y} \omega)\end{aligned}$$

Burada, $l_Y \omega = \omega(Y) = \omega \overset{C}{\otimes} Y$ dir. (Yano and Ako 1968; Salimov 2013).

3.1.1. 1-form'a uygulanan Φ_φ –operatörü

$\omega \in \mathfrak{I}^0_1(M_n)$ olsun. Tanım 3.1.1 i kullanarak, keyfi $X, Y \in \mathfrak{I}^1_0(M_n)$ için,

$$\begin{aligned}(\Phi_\varphi \omega)(X, Y) &= \big(\Phi_{\varphi X} \omega\big) Y \\ &= \Phi_{\varphi X}(\iota_Y \omega) - \omega(\Phi_{\varphi X} Y) \\ &= (\varphi X)(\iota_Y \omega) - X\big(\iota_{\varphi Y} \omega\big) + \omega((L_Y \varphi) X) \\ &= \Big(L_{\varphi X} \omega - L_X(\omega \circ \varphi)\Big) Y\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $\omega \circ \varphi$ 1-formu,

$$(\omega \circ \varphi) Y = \big({}'\varphi \omega\big) Y = (\omega \overset{C}{\otimes} \varphi) Y = \omega(\varphi Y)$$

şeklinde tanımlanır. $(\Phi_\varphi \omega)(X, Y) = \Big(L_{\varphi X} \omega - L_X(\omega \circ \varphi)\Big) Y$ eşitliğinden doğal çatıya göre,

$$(\Phi_\varphi \omega)_{ij} = \varphi^m_i \partial_m \omega_j - \partial_i\big(\omega_m \varphi^m_j\big) + \omega_m \partial_j \varphi^m_i$$

bileşenlerine sahip olduğu görülür (Salimov 2013).

3.1.2. $(0,s)$, $s \geq 2$, tipli tensör alanına uygulanan Φ_φ –operatörü

Teorem 3.1.2.1: $\omega \in \overset{*}{\Im}{}_s^0(M_n)$ olsun. Buradan,

$$\Phi_{\varphi X}\big(\omega(Y_1, \dots, Y_s)\big) = (\varphi X)\big(\omega(Y_1, \dots, Y_s)\big) - X(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s))$$

dir (Salimov 2013).

İspat: $\omega_{Y_2,\dots,Y_s}$, $\omega_{Y_2,\dots,Y_s}(Y_1) = \omega(Y_1, \dots, Y_s)$ ile verilen 1-form olsun. Öyleki Tanım 3.1.1 in (5) eşitliğinden,

$$\begin{aligned}\Phi_{\varphi X}\big(\omega(Y_1, \dots, Y_s)\big) &= \Phi_{\varphi X}(\omega_{Y_2,\dots,Y_s}(Y_1))\\ &= (\varphi X)\big(\iota_{Y_1}\omega_{Y_2,\dots,Y_s}\big) - X(\iota_{\varphi Y_1}\omega_{Y_2,\dots,Y_s})\\ &= (\varphi X)\big(\omega(Y_1, \dots, Y_s)\big) - X\big(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s)\big)\end{aligned}$$

elde edilir.

$\omega \in \overset{*}{\Im}{}_s^0(M_n)$, $s \geq 2$ için Teorem 3.1.2.1 göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi \omega)(X, Y_1, \dots, Y_s) &= \phi_{\varphi X}\big(\omega(Y_1, \dots, Y_s)\big)\\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^{s} (Y_1, \dots, \phi_{\varphi X} Y_\lambda, \dots, Y_s)\\ &= (\varphi X)\big(\omega(Y_1, \dots, Y_s)\big) - X\big(\omega(\varphi Y_1, \dots, Y_s)\big)\end{aligned} \qquad (3.2)$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{s}\varphi(Y_1,\dots,(L_{Y_\lambda}\varphi)X,\dots,Y_s)$$

$$=(L_{\varphi X}\omega-L_X(\omega\circ\varphi))(Y_1,\dots,Y_s)$$

elde edilir.

Burada $\omega\circ\varphi$ tensör alanı

$$\begin{aligned}(\omega\circ\varphi)(Y_1,\dots,Y_s)&=\omega(\varphi Y_1,\dots,Y_s)\\&\vdots\\&=\omega(Y_1,\dots,\varphi Y_s)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 3.1.2.1: $\omega\in\overset{*}{\mathfrak{I}}{}_2^0(M_n)$ ve

$$\omega(\varphi X,Y)=\omega(X,\varphi Y)$$

olsun. Teorem 3.1.2.1, $\omega(\varphi X,Y)=\omega(X,\varphi Y)$ ve $\phi_{\varphi X}Y=-(L_Y\varphi)X$ olarak alındığında,

$$\begin{aligned}(\phi_\varphi\omega)(X,Y,Z)&=\phi_{\varphi X}\big(\omega(Y,Z)\big)-\omega\big(\phi_{\varphi X}Y,Z\big)-\omega\big(Y,\phi_{\varphi X}Z\big)\\&=(\varphi X)\big(\omega(Y,Z)\big)-X\big(\omega(\varphi Y,Z)\big)+\omega\big((L_Y\varphi)X,Z\big)+\omega(Y,(L_Z\varphi)X)\\&=(L_{\varphi X}\omega-L_X(\omega\circ\varphi))(Y,Z)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki $\omega\circ\varphi$ tensör alanı

$$(\omega\circ\varphi)(X,Y)=\omega(\varphi X,Y)$$

şeklindedir (Salimov 2013).

3.2. Hemen Hemen Poly-Norden Manifoldu

Tanım 3.2.1: M_n diferansiyellenebilen bir manifold olsun. Bu manifold üzerinde $(1,1)$ tipli F tensör alanı

$$F^2 = mF - I$$

şartını sağlıyorsa (M, F) ikilisine hemen hemen poly-Norden manifoldu denir. Burada I birim afinor ve m reel sayıdır (Sahin 2018).

g semi-Riemann metriği olmak üzere eğer

$$g\ (FX, Y) = g(X, FY)$$

ya da buna denk olarak

$$g(FX, FY) = mg\ (FX, Y) - \ g(X, Y)$$

şartını sağlarsa (M, g, F) üçlüsüne hemen hemen poly-Norden yarı-Riemann manifoldu denir (Sahin 2018).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Holomorfik Poly-Norden Manifoldlar

Sahin (2018) çalışmasında yazar kompleks ve poly-Norden yapıların birbiri cinsinden yazılabilir olduğunu göstermiştir. F bir poly-Norden ve J bir kompleks yapı olmak üzere, bir poly-Norden yapı kompleks yapı cinsinden

$$F_{\pm} = \frac{m}{2}I \pm \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J \tag{4.1}$$

şeklinde ve bir kompleks yapı ise poly-Norden yapı cinsinden

$$J_{\pm} = \pm\left(\frac{-m}{\sqrt{4-m^2}}I + \frac{2}{\sqrt{4-m^2}}F\right) \tag{4.2}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $-2 < \mathrm{m} < 2$ dir.

K, (p,q) tipli bir tensör alanı olmak üzere, eğer $\Phi_J K = 0$ ve J kompleks yapı ise bu durumda K ya holomorfik tensör alanıdır denir. Buradan (3.3) ve (4.1) denklemlerinden

$$\Phi_F K = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\Phi_J K \tag{4.3}$$

denklemini elde edilir. Son denklemden kolayca söylenebilir ki, $\Phi_F K = 0$ ise K tensör alanı holomorfiktir. Buda (M_n, g, F) hemen hemen poly-Norden yarı-Riemann manifoldunun holomorfluğunun çalışılabileceği anlamına gelir.

Teorem 4.1.1: (M_n, g, F) hemen hemen poly-Norden yarı-Riemann manifoldu olsun. Bu manifold üzerindeki g metriğine Tachibana operatörü uygulandığında görülürki, $\Phi_F g = 0$ şartı $\nabla F = 0$ şartına eşittir. Burada ∇, hemen hemen poly-Norden yarı-Riemann manifoldu üyerindeki g metriğinin Riemann (Levi-Civita) konneksiyonudur.

İspat: $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Z} \in \Im_0^1\,(Mn)$ olmak üzere (M_n, g, F) hemen hemen poly-Norden yarı-Riemann manifoldu üzerindeki g Riemann metriğinin pürlük (self-adjoint) şartı olan $g(F\mathcal{V}, \mathcal{Z}) = g(\mathcal{V}, F\mathcal{Z})$ ifadesinin ∇ Riemann konneksiyonuna göre kovaryant türevi alınırsa

$$g((\nabla_{\mathcal{U}} F)\,\mathcal{V}, \mathcal{Z}) = g(\mathcal{V}, (\nabla_{\mathcal{U}} F)\mathcal{Z})$$

eşitliği elde edilir. g Riemann metriğine Φ operatörü uygulanırsa ve $L_{\mathcal{U}}\mathcal{V} = [\mathcal{U}, \mathcal{V}] = \nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V} - \nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{U}$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}(\Phi_{F\mathcal{U}} g)(\mathcal{V}, \mathcal{Z}) &= (F\mathcal{U})g(\mathcal{V}, \mathcal{Z}) - \mathcal{U}g(F\mathcal{V}, \mathcal{Z}) + g((L_{\mathcal{V}}F)\mathcal{U}, \mathcal{Z}) + g(\mathcal{V}, (L_{\mathcal{Z}}F)\mathcal{U}) \\ &= -g((\nabla_{\mathcal{U}}F)\mathcal{V}, \mathcal{Z}) + g((\nabla_{\mathcal{V}}F)\mathcal{U}, \mathcal{Z}) + g(\mathcal{U}, (\nabla_{\mathcal{Z}}F)\mathcal{V})\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $L_{\mathcal{U}}$, $\mathcal{U}$ vektör alanı yönündeki Lie türevidir. Son eşitliğe denk olarak

$$(\Phi_{F\mathcal{Z}} g)(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = -g((\nabla_{\mathcal{Z}}F)\mathcal{V}, \mathcal{U}) + g((\nabla_{\mathcal{V}}F)\,\mathcal{Z}, \mathcal{U}) + g(\mathcal{Z}, (\nabla_{\mathcal{U}}F)\mathcal{V}) \qquad (4.4)$$

yazılır. Elde edilen son iki denklemin toplamından ise

$$(\Phi_{F\mathcal{U}} g)(\mathcal{V}, \mathcal{Z}) + (\Phi_{F\mathcal{Z}} g)(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = 2g((\nabla_{\mathcal{V}}F)\mathcal{Z}, \mathcal{U}) \qquad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) denkleminde eğer $\nabla F = 0$ ise $\Phi_F g = 0$ ve (4.5) denkleminde $\Phi_F g = 0$ ise $\nabla F = 0$ olduğu aşikardır. Ayrıca (4.3) denkleminden

$$\Phi_F g = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\Phi_J g$$

elde edilir. Dolayısıyla son eşitlikte $\Phi_F g = 0$ (ya da $\nabla F = 0$) ise (M_n, g, F) manifolduna holomorfik poly-Norden yarı-Riemann manifoldu denir.

Bu aşamadan sonra (M_n, g, F) üçlüsü kolaylık açısından ‘’holomorfik poly-Norden manifoldu’’ olarak adlandırılacaktır.

(M_n, g, F) hemen hemen poly-Norden manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde ki g Riemann metriğinin G ikiz (twin) metriği, $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Z} \in \Im_0^1\,(Mn)$ için

$$G(\mathcal{U}, \mathcal{V}) = g(F\mathcal{U}, \mathcal{V}) \tag{4.6}$$

şekilde tanımlanır. Buradan

$$\begin{aligned} G(\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= g(F\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ &= g(\mathcal{V}, F\mathcal{U}) \\ &= g(F\mathcal{V}, \mathcal{U}) = G(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} G(F\mathcal{U}, \mathcal{V}) &= g(F^2\mathcal{U}, \mathcal{V}) \\ &= g(F\mathcal{U}, F\mathcal{V}) = G(\mathcal{U}, F\mathcal{V}) \end{aligned}$$

yazılır. yani G ikiz metriği simetrik ve F poly-Norden yapısına göre pürdür. (4.6) eşitliğinin her iki tarafının ∇ Riemann konneksiyonuna göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_{\mathcal{U}} G)(\mathcal{V}, \mathcal{Z}) &= (\nabla_{\mathcal{U}} g)(\mathcal{V}, \mathcal{Z}) + g((\nabla_{\mathcal{U}} F)\mathcal{V}, \mathcal{Z}) \\ &= g((\nabla_{\mathcal{U}} F)\mathcal{V}, \mathcal{Z}) \end{aligned}$$

olur. Buradan ise aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.1: (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldu olsun. g metriğinin Riemann konneksiyonu ile G ikiz metriğinin Riemann konneksiyonu çakışır. Yani,

$$^{G}\nabla = \nabla$$

eşitliği yazılır.

Sonuç 4.1.2: (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldu olmak üzere ^{g}R ve ^{G}R sırasıyla g ve G ikiz metriğinin Riemann eğrilik tensör alanları olsunlar. Sonuç 4.1.1 e göre $^{G}\nabla = \nabla$ olduğundan bu iki metriğin Riemann eğrilik tensör alanları çakışıyor demektir. Yani,

$$^{g}R = {}^{G}R$$

olur.

$(1,1)$ tipli bir tensör alanı (afinor ya da endomorfizm) olan F poly-Norden yapısı için Ricci özdeşliği, herhangi bir $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonu ve $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Z}, \in \mathfrak{I}_0^1\,(Mn)$ olmak üzere

$$\left(\breve{\nabla}_{\mathcal{U}}\breve{\nabla}_{\mathcal{V}}F - \breve{\nabla}_{\mathcal{V}}\breve{\nabla}_{\mathcal{U}}F\right)(\mathcal{Z}) = -\breve{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, F\mathcal{Z}) + F(\breve{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Z})) - 2(\breve{\nabla}_{\breve{T}(\mathcal{U},\mathcal{V})}F)(\mathcal{Z})$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\breve{T}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ ve $\breve{R}(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Z})$ sırasıyla $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonunun burulma ve eğrilik tensör alanlarıdır. (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldu üzerindeki Ricci özdeşliği ise son eşitlik $\breve{\nabla}F = \nabla F = 0$, $\breve{T} = 0$ ve $\breve{R} = {}^{g}R$ olmak üzere

$$^{g}R(\mathcal{U}, \mathcal{V}, F\mathcal{Z}) - F(^{g}R(\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{Z})) = 0 \tag{4.7}$$

şekline dönüşür. Ayrıca (0,4) tipli eğrilik tensör alanı ^{g}R, g Riemann metriği yardımıyla

$$^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) = g(R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}),\mathcal{W})$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\mathcal{W} \in \mathfrak{J}_0^1\,(Mn)$ dir. (4.7) eşitliği ve son denklemden

$$\begin{aligned} ^{g}R\,(\mathcal{U},\mathcal{V},F\mathcal{Z},\mathcal{W}) &= g\,(^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},F\mathcal{Z}),\mathcal{W}) \\ &= g\,(F,\,(^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}),\mathcal{W}) \\ &= g\,(^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}),F\mathcal{W}) = \,^{g}R\,(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},F\mathcal{W}) \end{aligned}$$

elde edilir. yani ^{g}R eğrilik tensör alanının son iki bileşeni F poly-Norden yapısına göre pürdür. Dahası ^{g}R eğrilik tensör alanının

$$^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) = \,^{g}R\,(\mathcal{Z},\mathcal{W},\mathcal{U},\mathcal{V})$$

özelliğinden

$$^{g}R(F\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) = \,^{g}R\,(\mathcal{U},F\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W})$$

elde edilir. Yani ^{g}R eğrilik tensör alanın ilk iki bileşenide F poly-Norden $\mathcal{V}$apısına göre pürdür. Son olarak $^{g}R = \,^{G}R$ ve $G(\mathcal{U},\mathcal{V}) = g(F\mathcal{U},\mathcal{V})$ eşitliklerinden

$$\begin{aligned} ^{G}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) &= G(^{G}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}),\mathcal{W}) \\ &= g(F(^{G}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z})),\mathcal{W}) \\ &= g(^{G}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}),F\mathcal{W}) = \,^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},F\mathcal{W}) \end{aligned}$$

ve

$$^{G}R(\mathcal{Z},\mathcal{W},\mathcal{U},\mathcal{V}) = \,^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},F\mathcal{W})$$

elde edilir. Yukardaki son iki denklemden ise

$$^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},F\mathcal{W}) = \,^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},F\mathcal{W})$$

olur. Buradan aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.1.3: (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldunun Riemann eğrilik tensör alanı ${}^gR$, F poly-Norden yapısına göre pürdür. Yani

$$\begin{aligned} {}^gR(F\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) &= {}^gR(\mathcal{U},F\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) \\ &= {}^gR(\mathcal{U},\mathcal{V},F\mathcal{Z},\mathcal{W}) = {}^gR(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},F\mathcal{W}) \end{aligned}$$

biçimindedir.

Son olarak ifade edilen sonuçtan aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.1.2: (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldunun eğrilik tensör alanı ${}^gR$ holomorfik tensör alanıdır. Yani $\Phi_F\, {}^gR = 0$ şartı sağlanır.

İspat: (4.7) eşitliğine kovaryant türev uygulandığında

$$(\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^gR)(F\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) = F(\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^gR)(\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) \tag{4.8}$$

olur. ${}^gR$ Rieamann eğrilik tensör alanına Φ operatörü uygulandığında, $\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4 \in \mathfrak{I}_0^1\,(Mn)$ için

$$\begin{aligned} (\Phi_{F\mathcal{U}}\, {}^gR)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) &= (\nabla_{F\mathcal{U}}\, {}^gR)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) \\ &\quad -(\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^gR)(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) \end{aligned} \tag{4.9}$$

eşitliği elde edilir. (4.8) denklemi (4.9) denkleminde yerine yazılır ve 2. Bianchi özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\Phi_{F\mathcal{U}}\, {}^gR)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) &= g((\nabla_{F\mathcal{U}}\, {}^gR)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3) - (\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^gR)(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3),\mathcal{V}_4) \\ &= g((\nabla_{F\mathcal{U}}\, {}^gR)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3) - F(\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^gR)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3),\mathcal{V}_4) \end{aligned}$$

$$= -g((\nabla_{\mathcal{V}_2}\, {}^{g}R)(F\mathcal{U},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_3) + (\nabla_{\mathcal{V}_1}\, {}^{g}R)(\mathcal{V}_2,F\mathcal{U},\mathcal{V}_3)$$
$$+F(\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^{g}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3),\mathcal{V}_4)$$
$$= -g(F((\nabla_{\mathcal{V}_2}\, {}^{g}R)(\mathcal{U},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_3) + (\nabla_{\mathcal{V}_1}\, {}^{g}R)(\mathcal{V}_2,\mathcal{U},\mathcal{V}_3)$$
$$+(\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^{g}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3),\mathcal{V}_4)$$
$$= -g(\underset{(\mathcal{U},\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2)}{\sigma}(\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^{g}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3),F\mathcal{V}_4)$$
$$= 0$$

eşitliğini elde edilir. Buradaki σ sembolü, $\mathcal{U},\mathcal{V}_1$ ve $\mathcal{V}_2$ vektör alanlarına göre döngüsel toplamı göstemektedir. Son olarak (4.3) denkleminden ise

$$\Phi_F\, {}^{g}R = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\Phi_J\, {}^{g}R$$

elde edilir. Yani ${}^{g}R$ eğrilik tensör alanı holomorfik tensör alanıdır.

Örnek 4.1.1: $\mathbb{R}^{2n}$, Öklid uzayında verilen yarı-Riemann veya yarı-Öklid metrik $i,j = 1,\dots n,\bar{j},\ \bar{\imath} = n+1,\dots 2n$ için

$$g = \begin{pmatrix} \delta_i^j & 0 \\ 0 & -\delta_{\bar{\imath}}^{\bar{j}} \end{pmatrix}$$

şeklinde olur.

$\mathbb{C}^n$ kompleks sayılar kümesi olsun. $z \in \mathbb{C}^n$ için $z^k = u^k + v^k.i\,,(u^k,v^k) \in \mathbb{R}^{2n}$ olmak üzere $\mathbb{R}^{2n}$ üzerindeki g ile uyumlu (pür) olan kompleks yapı

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \delta_i^j \\ -\delta_{\bar{\imath}}^{\bar{j}} & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buradan $\nabla g = 0$ ve $\nabla J = 0$ olduğu için $(\mathbb{R}^{2n}, J, g)$ ye holomorfik Norden Öklid manifoldu denir. Ayrıca $F_{\pm} = \frac{m}{2}I \pm \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}J$ olduğundan F poly-Norden yapı

$$F\pm = \begin{pmatrix} \frac{m}{2}\delta_i^j & \pm\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\delta_{\bar{\imath}}^{\bar{J}} \\ \mp\frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\delta_{\bar{\imath}}^{\bar{J}} & \frac{m}{2}\delta_i^j \end{pmatrix}$$

biçimindedir. Dolayısıyla $(\mathbb{R}^{2n}, F, g)$ üçlüsüne holomorfik poly-Norden Öklid manifoldu denir.

4.2. Yarı-Simetrik Metrik Poly F-Konneksiyonlar

Bu bölümde (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldu üyerinde F poly-Norden yapıya sahip yarı-simertrik metrik konneksiyonlar çalışılacaktır. Öncelikle yarı-simetrik burulma hakkında bilgi vermek gerekir.

M_n diferensiyellenebilir bir manifold olmak üzere $\breve{\nabla}$ bu manifold üzerinde keyfi bir burulmalı afin konneksiyon olsun, eğer bu konneksiyonun burulması her $\mathcal{V}, \mathcal{Z} \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ ve $\zeta \in \mathfrak{I}_1^0(M_n)$ için

$$\breve{T}(\mathcal{V}, \mathcal{Z}) = \zeta(\mathcal{Z})\mathcal{V} - \zeta(\mathcal{V})\mathcal{Z}$$

biçinde ise bu $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonuna ‘’yarı-simetrik burulmaya sahip konneksiyon’’ denir. Özel olarak bu manifold üzerinde alınan bir g Riemann metriği için eğer $\breve{\nabla}g = 0$ oluyorsa (metrik olma şartı) bu durumda $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonuna ‘’yarı-simetrik metrik konneksiyon’’ denir (Yano 1970).

Bu tanımı biraz daha özelleştirmek isteyen yazarlar yarı-simetrik burulmaya (1,1)-tipli bir φ yapısı (endomorfizm) dahil ederek hem $\breve{\nabla} g = 0$ hem de $\breve{\nabla}\varphi = 0$ şarını sağlayan konneksiyon elde edip ‘’yarı-simetrik metrik φ-konneskiyon’’ olarak adlandırdıkları bu konneksiyonlar üzerinde çalışmalar yapmışlardır (Yano and Imai 1975, Prvanovic 1977, Karaman 2018).

Bu tez çalışmasında da F poly-Norden yapıyla ifade edilen bir burulmaya sahip metrik konneksiyonlar üzerinde çalışmalar yapılacaktır.

Teorem 4.2.1: ${}^{P}\nabla$, (M_n, g, F) holomorfik polu-Norden manifoldu üzerinde, her $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathfrak{J}_0^1\,(M_n)$ ve $\omega \in \mathfrak{J}_1^0(M_n)$ için

$$ {}^{P}T(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \omega(\mathcal{V})(\mathcal{U}) - \omega(\mathcal{U})(\mathcal{V}) - \omega(F\mathcal{V})(F\mathcal{U}) + \omega(F\mathcal{U})(F\mathcal{V}) \qquad (4.10) $$

şeklinde burulmaya (yarı-simetrik burulma) sahip bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda ${}^{P}\nabla g = 0$ ve ${}^{P}\nabla F = 0$ şartlarını sağlayan konneksiyon

$$ \begin{aligned} {}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V} = \nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V} + \omega(\mathcal{V})(\mathcal{U}) - g(\mathcal{U},\mathcal{V})(U) \\ +\omega(F\mathcal{V})(F\mathcal{U}) + g(F\mathcal{U},\mathcal{V})(F) \end{aligned} \qquad (4.11) $$

biçimindedir. Burada U, $g(U,\mathcal{U}) = \omega(\mathcal{U})$ olacak şekilde bir vektör alanıdır.

İspat: ∇ Riemann (Levi-Civita) konneksiyonu ve D (1,2) tipli bir tensör alanı olmak üzere, ${}^{P}\nabla$ burulmalı bir konneksiyon

$$ {}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V} = \nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V} + D(\mathcal{U},\mathcal{V}) \qquad (4.12) $$

şeklinde tanımlansın. Burulma tensörünün tanımı olan

$$^{P}T(\mathcal{U},\mathcal{V}) = {}^{\mathrm{P}}\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V} - {}^{\mathrm{P}}\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{U} - [\mathcal{U},\mathcal{V}]$$

eşitliğinden ve Hayden'in (Hayden 1932) çalışmasında uyguladığı metod yardımıyla

$$^{P}T(\mathcal{U},\mathcal{V}) = D(\mathcal{U},\mathcal{V}) - D(\mathcal{V},\mathcal{U}) \tag{4.13}$$

ve

$$^{P}\nabla g = 0$$

şartından ise

$$D(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}) + D(\mathcal{U},\mathcal{Z},\mathcal{V}) = 0 \tag{4.14}$$

elde edilir. Burada $D(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}) = g(D(\mathcal{U},\mathcal{V}),\mathcal{Z})$ şeklindedir. (4.13) ve (4.14) denklemlerinden

$$^{P}T(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}) = D(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}) - D(\mathcal{V},\mathcal{U},\mathcal{Z}),$$
$$^{P}T(\mathcal{Z},\mathcal{U},\mathcal{V}) = D(\mathcal{Z},\mathcal{U},\mathcal{V}) - D(\mathcal{U},\mathcal{Z},\mathcal{V}),$$
$$^{P}T(\mathcal{Z},\mathcal{V},\mathcal{U}) = D(\mathcal{Z},\mathcal{V},\mathcal{U}) - D(\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{U}),$$

yazılır. Son üç denklem toplanırsa

$$^{P}T(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}) + {}^{P}T(\mathcal{Z},\mathcal{U},\mathcal{V}) + {}^{P}T(\mathcal{Z},\mathcal{V},\mathcal{U}) = 2D(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z})$$

olur. Burada $^{P}T(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}) = g\,({}^{P}T(\mathcal{U},\mathcal{V}),\mathcal{Z})$ şeklindedir. (4.10) denklemi son denklemde yerine yazılırsa, V, $g(V,\mathcal{V}) = \omega(\mathcal{V})$ olacak şekilde bir vektör alanıdır için

$$D(\mathcal{U},\mathcal{V}) = \omega(\mathcal{V})(\mathcal{U}) - g(\mathcal{U},\mathcal{V})(V)$$
$$-\omega(F\mathcal{V})(F\mathcal{U}) + g(F\mathcal{U},\mathcal{V})(FV)$$

olur ve ispat tamamlanır.

(4.11) denklemi ile verilen konneksiyon ayrıca

$$^{P}\nabla F = 0$$

şartını da sağlar. Bundan dolayı $^{P}\nabla$, yarı-simetrik burulmaya sahip F-konneksiyon olur. Bu tez çalışması boyunca $^{P}\nabla$, yarı-simetrik metrik poly F-konneksiyon olarak adlandırılacaktır.

$^{P}\nabla$ yarı-simetrik metrik poly F-konneksiyonunun burulma tensör alanı

$$^{P}T(F\mathcal{U},\mathcal{V}) = {}^{P}T(\mathcal{U},F\mathcal{V}) = F^{P}T\,(\mathcal{U},\mathcal{V})$$

şartını sağlar. Yani burulma tensör alanı ^{P}T , F poly-Norden yapısına göre pürdür. Bir F-konneksiyonunun pür olması için gerek ve yeter şart bu konneksiyonunun burulma tensör alanının da aynı yapıya göre pür olmasıdır (Salimov 2013). Bundan dolayı

$$^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\mathcal{V} = {}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}(\mathrm{F}\mathcal{V}) = F\,{}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V}$$

eşitliği yazılabilir.

Teorem 4.2.2: (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldu olsun. Eğer (4.10) denkleminde ifade edilen ω kovektör alanı holomorfik ise bu durumda burulma tensör alanı ^{P}T de holomorfiktir. Yani $\Phi_F\omega = 0$ ise $\Phi_F\,{}^{P}T = 0$ olur.

İspat: Φ operatörü, (4.10) denkemi ile verilen ^{P}T burulma tensör alanına uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{F\mathcal{U}}\, {}^{P}T)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) &= ({}^{P}\nabla_{\mathrm{F}\mathcal{U}}\, {}^{P}T)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) - ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\, {}^{P}T\,)(F\mathcal{V},\mathcal{Z}) \\
&= [({}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{Z}) - ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{Z})](\mathcal{V}) \\
&-[(\,{}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V}) - (\,{}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{V})](\mathcal{Z}) \\
&+[(\,{}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{V}) - m(\,{}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{V}) + (\,{}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V})](F\mathcal{Z}) \\
&-[(\,{}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{Z}) - m(\,{}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{Z}) + (\,{}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{Z})](F\mathcal{V})
\end{aligned}
$$

olur. Ayrıca ω kovektör alanı için ise

$$(\Phi_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V}) = (\,{}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\,\omega)(\mathcal{V}) - ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,\omega)(F\mathcal{U}) = 0$$

yazılır. Elde edilen son iki denklemden

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{F\mathcal{U}}\, {}^{P}T)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) &= (\Phi_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{Z})(\mathcal{V}) - (\Phi_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V})(\mathcal{Z}) \\
&+(\Phi_{F\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{Z})(F\mathcal{V}) - (\Phi_{F\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{V})(F\mathcal{Z}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.1: Her kompleks yapı bir poly-Norden yapı şeklinde yazılabildiği gibi her poly-Norden yapı bir kompleks yapı şeklinde yazılabilir (Sahin 2018). Bundan dolayı (4.3) denkleminden

$$\Phi_F\omega = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\Phi_J\omega$$

ve

$$\Phi_F\, {}^{P}T = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\Phi_J\, {}^{P}T$$

yazılabilir.

Sonuç 4.2.2: Eğer $\Phi_F\,{}^PT = 0$ ise

$$(\Phi_{F\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) = ({}^P\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) - ({}^P\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(F\mathcal{V},\mathcal{Z}) = 0$$

eşitliğinden

$$({}^P\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) = ({}^P\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(F\mathcal{V},\mathcal{Z}) = ({}^P\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},F\mathcal{Z}) = F({}^P\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z})$$

yazılır. Yani burulma tensör alanının ${}^P\nabla$ konneksiyonuna göre kovaryant türevleri de poly-Norden yapıya göre pürdür.

Sonuç 4.2.3: Teorem 4.2.2 aynı zamanda ∇ Riemann konneksiyonuna göre de yazılabilir. Yani

$$(\Phi_{F\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) = (\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) - (\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(F\mathcal{V},\mathcal{Z}) = 0$$

ve

$$(\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) = (\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(F\mathcal{V},\mathcal{Z}) = (\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},F\mathcal{Z}) = F(\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^PT)(\mathcal{V},\mathcal{Z})$$

olur.

Bu tez çalışması boyunca

$$({}^P\nabla_{F\mathcal{U}}\,\omega)(\mathcal{V}) - ({}^P\nabla_{\mathcal{U}}\,\omega)(F\mathcal{U}) = 0$$

eşitliği kabul edilecektir. Yani kovektör alanı ω nın ${}^P\nabla$ konneksiyonuna göre kovaryant türevleri poly-Norden yapıya göre pürdür.

4.3. Yarı-Simetrik Metrik Poly *F*-Konneksiyonunun Eğrilik Tensörü

Herhangi bir $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonu için en önemli konulardan biri bu konneksiyonun eğrilik tensör alanının özellikleridir. Bu kısımda ${}^{P}\nabla$ yarı-simetrik metrik poly F-konneksiyonunun eğrilik tensör alanının bazı özellikleri incelenecektir.

Herhangi bir $\breve{\nabla}$ afin konneksiyonunun eğrilik tensör alanı, tüm $\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}$ vektör alanları için

$$\breve{R}(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}) = (\,\breve{\nabla}_{\mathcal{U}}\breve{\nabla}_{\mathcal{V}} - \breve{\nabla}_{\mathcal{V}}\breve{\nabla}\mathcal{U} - \breve{\nabla}_{[\mathcal{U},\mathcal{V}]})\,\mathcal{Z}$$

şeklinde ifade edilir. (4.11) denklemi ile verilen yarı-simetrik metrik poly F-konneksiyonunun (0,4) tipli eğrilik tensör alanı, $\mathcal{W}$ bir vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned}{}^{P}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) = {}&{}^{g}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W})\\ &+\alpha(\mathcal{U},\mathcal{Z})g(\mathcal{V},\mathcal{W}) - \alpha(\mathcal{V},\mathcal{Z})g(\mathcal{U},\mathcal{W})\\ &+\alpha\,(\mathcal{V},\mathcal{W})g(\mathcal{U},\mathcal{Z}) - \alpha(\mathcal{U},\mathcal{W})g(\mathcal{V},\mathcal{Z})\\ &+\alpha\,(\mathcal{V},F\mathcal{Z})g(F\mathcal{U},\mathcal{W}) - \alpha\,(\mathcal{U},F\mathcal{Z})g(F\mathcal{V},\mathcal{W})\\ &+\alpha\,(\mathcal{U},F\mathcal{W})g(F\mathcal{V},\mathcal{Z}) - \alpha\,(\mathcal{V},F\mathcal{W})g(F\mathcal{U},\mathcal{Z})\end{aligned} \tag{4.15}$$

şeklindedir. Burada (0.2) tipli α tensör alanının bileşenleri

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{U},\mathcal{Z}) = (\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{Z}) - \omega(\mathcal{U})\omega(\mathcal{Z}) + \frac{1}{2}\omega(V)g(\mathcal{U},\mathcal{Z})\\ +\omega(F\mathcal{U})\omega(F\mathcal{Z}) - \frac{1}{2}\omega(FV)g(F\mathcal{U},\mathcal{Z})\end{aligned} \tag{4.16}$$

biçiminde olur. Elde edilen ${}^{P}R$ eğrilik tensör alanı ilk iki ve son iki bileşenlere göre anti simetriktir. Yani

$${}^{P}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W},\mathcal{Z}) = -{}^{P}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) = -{}^{P}R(\mathcal{V},\mathcal{U},\mathcal{Z},\mathcal{W})$$

yazılır. Ayrıca

$$\alpha(\mathcal{U},\mathcal{V})-\alpha(\mathcal{V},\mathcal{U}) = (\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V}) - (\nabla_{\mathcal{V}}\omega)(\mathcal{U}) \tag{4.17}$$

olup ω kovektör alanına dış türev uygulanırsa

$$\begin{aligned} 2(d\omega)(\mathcal{U},\mathcal{V}) &= \mathcal{U}\omega(\mathcal{V})-\mathcal{V}\omega(\mathcal{U})-\omega([\mathcal{U},\mathcal{V}]) \\ &= (\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V}) + \omega(\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V}) - (\nabla_{\mathcal{V}}\omega)\mathcal{U} - \omega((\nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{U}) \\ &\quad - \omega([\mathcal{U},\mathcal{V}]) \\ &= (\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V}) - (\nabla_{\mathcal{V}}\omega)(\mathcal{U}) + \omega(\nabla_{\mathcal{U}}\mathcal{V} - \nabla_{\mathcal{V}}\mathcal{U}) - \omega([\mathcal{U},\mathcal{V}]) \\ &= (\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V}) - (\nabla_{\mathcal{V}}\omega)(\mathcal{U}) \end{aligned} \tag{4.18}$$

elde edilir. (4.17) ve (4.18) denklemlerinden ise

$$\begin{aligned} \alpha(\mathcal{U},\mathcal{V})-\alpha(\mathcal{V},\mathcal{U}) &= (\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V}) - (\nabla_{\mathcal{V}}\omega)(\mathcal{U}) \\ &= 2(d\omega)(\mathcal{U},\mathcal{V}) \end{aligned} \tag{4.19}$$

olur. Buradan aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.3.1: Yukarıda elde edilen (4.19) denkleminden,

1- α tensör alanının simetrik olması için gerek ve yeter şart ω kovektör alanının kapalı olmasıdır.

2- ω kovektör alanı gradyent vektör alanı ise yani $\omega = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{U}^i}$ ise bu durumda $d\omega = 0$ olacağından α simetriktir.

α tensör alanı F poly-Norden yapısına göre pürdür. Yani

$$\begin{aligned}\alpha(\mathcal{U},F\mathcal{V})-\alpha(F\mathcal{U},\mathcal{V}) &= [(\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{V})-(\nabla_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V})]\\ &= (\Phi_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{V})\\ &= 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca (4.19) denkleminden ise

$$\begin{aligned}&{}^{P}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W},\mathcal{Z})-{}^{P}R(\mathcal{W},\mathcal{Z},\mathcal{U},\mathcal{V})\\ &=2(d\omega)(\mathcal{U},\mathcal{Z})g(\mathcal{V},\mathcal{W})-2(d\omega)(\mathcal{V},\mathcal{Z})g(\mathcal{U},\mathcal{W})\\ &+2(d\omega)(\mathcal{V},\mathcal{W})g(\mathcal{U},\mathcal{Z})-2(d\omega)(\mathcal{U},\mathcal{W})g(\mathcal{V},\mathcal{Z})\\ &+2(d\omega)(F\mathcal{V},\mathcal{Z})g(F\mathcal{U},\mathcal{W})-2(d\omega)(F\mathcal{U},\mathcal{Z})g(F\mathcal{V},\mathcal{W})\\ &+2(d\omega)(F\mathcal{U},\mathcal{W})g(F\mathcal{V},\mathcal{Z})-2(d\omega)(F\mathcal{V},\mathcal{W})g(F\mathcal{U},\mathcal{Z})\end{aligned}$$

elde edilir. ω kovektör alanı kapalıysa yani $d\omega = 0$ ise bu durumda

$${}^{P}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{W},\mathcal{Z})-{}^{P}R(\mathcal{Z},\mathcal{W},\mathcal{U},\mathcal{V})=0$$

olur.

α tensör alanına Φ operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}(\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) &= ({}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V},\mathcal{Z})-({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\alpha)(F\mathcal{V},\mathcal{Z})\\ &= (\nabla_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V},\mathcal{Z})-((\nabla_{\mathcal{U}}\,\alpha)(F\mathcal{V},\mathcal{Z})\end{aligned} \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.16) denklemi son denklemde yerine yazılırsa

$$(\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V},\mathcal{Z})=(\nabla_{F\mathcal{U}}\,\nabla_{\mathcal{V}}\omega)(\mathcal{Z})-(\nabla_{\mathcal{U}}\,\nabla_{F\mathcal{V}}\omega)(\mathcal{Z}) \tag{4.21}$$

elde edilir. En son denklemde ω kovektör alanı için Ricci özdeşliği uygulanacak olursa

$$(\nabla_{\mathcal{U}}\nabla_{\mathcal{V}}\omega)(\mathcal{Z}) = (\nabla_{\mathcal{V}}\nabla_{\mathcal{V}\mathcal{U}}\ \omega)(\mathcal{Z}) - \frac{1}{2}\omega({}^{g}R(F\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z}))$$

ve

$$\begin{aligned}(\nabla_{\mathcal{U}}\nabla_{\mathrm{F}\mathcal{V}}\ \omega)(\mathcal{Z}) &= (\nabla_{\mathcal{U}}\nabla_{\mathcal{V}}\omega)(F\mathcal{Z}) \\ &= (\nabla_{\mathcal{V}}\nabla_{\mathcal{U}}\omega)(F\mathcal{Z}) - \frac{1}{2}\omega({}^{g}R(\mathcal{U},F\mathcal{V},\mathcal{Z})) \\ &= (\nabla_{\mathcal{V}}\nabla_{F\mathcal{U}}\omega)(\mathcal{Z}) - \frac{1}{2}\omega({}^{g}R(\mathcal{U},F\mathcal{V},\mathcal{Z}))\end{aligned}$$

elde edilir. (4.16) denklemi (4.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}(\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) &= -\frac{1}{2}\omega[{}^{g}R(\mathcal{U},F\mathcal{V},\mathcal{Z}) - {}^{g}R(\mathcal{U},F\mathcal{V},\mathcal{Z})] \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 4.3.1: (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifoldu olsun. (4.16) denlemi ile verilen α tensör alanı holomorfiktir. Yani (4.3) denkleminden

$$\Phi_F\alpha = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\Phi_J\alpha$$

ve (4.20) denkleminden ise

$$({}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V},\mathcal{Z}) = ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\alpha)(F\mathcal{V},\mathcal{Z}) = ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V},F\mathcal{Z}) \tag{4.22}$$

eşitlikleri yazılır.

α tensör alanının pürlüğünden dolayı kolayca söylenebilir ki ${}^{P}R$ eğrilik tensör alanı da F poly-Norden yapısına göre pürdür. Yani

$$
\begin{aligned}
{}^{P}R(F\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) &= {}^{P}R(\mathcal{U},F\mathcal{V},\mathcal{Z},\mathcal{W}) \\
&= {}^{P}R(\mathcal{U},\mathcal{V},F\mathcal{Z},\mathcal{W}) = {}^{P}R(\mathcal{U},\mathcal{V},\mathcal{Z},F\mathcal{W})
\end{aligned}
$$

yazılır. (0,4) tipli ${}^{P}R$ eğrilik tensör alanına Φ operatörü uygulanırsa

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{F\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) &= ({}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^{P}R)\,(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) \\
&\quad -({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4)
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

elde edilir. (4.15) denklemi (4.23) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&(\Phi_{F}\,{}^{P}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) \\
&= ({}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^{g}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) - ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{g}R)(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) \\
&+(\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_3)g(\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_4) - (\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3)g(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_4) \\
&+(\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_4)g(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_3) - (\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_4)g(\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3) \\
&+(\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(F\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3)g(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_4) - (\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_3)g(F\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_4) \\
&+(\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_4)g(F\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3) - (\Phi_{F\mathcal{U}}\alpha)(F\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_4)g(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_3)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Önerme 4.3.1 ve Teorem 4.1.2 den

$$
\begin{aligned}
(\Phi_{F\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) &= ({}^{P}\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^{g}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) - ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{g}R)\,(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) \\
&= (\Phi_{F\mathcal{U}}\,{}^{g}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur ve buradan da aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 4.3.1: (M_n, g, F) holomorfik poly-Norden manifold olsun. ${}^{P}\nabla$ yarı-simetrik metrik poly F-konneksiyonunun eğrilik tensör alanı ${}^{P}R$ holomorfiktir. Dolayısıyla (4.3) denkleminden

$$\Phi_F\,{}^{P}R = \frac{\sqrt{4-m^2}}{2}\,\Phi_J\,{}^{P}R$$

ve (4.23) denkleminden

$$\begin{aligned}(\nabla_{F\mathcal{U}}\,{}^{P}R)\,(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4) &= ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(F\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4)\\ &= ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(\mathcal{V}_1,F\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4)\\ &= ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,F\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4)\\ &= ({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,F\mathcal{V}_4)\\ &= F({}^{P}\nabla_{\mathcal{U}}\,{}^{P}R)(\mathcal{V}_1,\mathcal{V}_2,\mathcal{V}_3,\mathcal{V}_4)\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılır.

5. SONUÇ

Sunulan bu tez çalışması beş bölümden oluşmuştur. İlk bölüm olan Girişte matematiğin ve geometrinin geçmişten günümüze kadar olan tarihi hakkında bilgiler verildi. Bu tez çalışmasının temelini oluşturan Manifold kavramı ile ilgili bilgiler verildi. Daha sonra Altın oranın oluşumu ve geometride kullanımından bahsedildi. Son olarak ise bu tezin adını da aldığı poly-Norden yapılardan bahsedildi.

İkinci olarak Kuramsal Temeller bölümünde hazırlanan bu tez çalışması için gerekli olan tanım ve teoremler verildi. Materyal ve Yöntem olarak adlandırılan üçüncü bölümde elde edilen sonuçların hangi yöntem ve hangi materyallerle yapıldığı açıklandı. Dördüncü bölümde ise tezin Araştırma ve Bulgular kısmı anlatılmıştır. Bu bölümde,

$$F^2 - mF + I = 0$$

biçiminde ifade edilen F hemen hemen poly-Norden yapısı için faklı bir integrallenebilme bulunmuştur. Öyle ki, ∇ Riemann konneksiyonu olmak üzere $\nabla F = 0$ olan integrallenebilme şartına denk olarak $\Phi_F g = 0$ olduğu kanıtlandı. Burada Φ, Tachibana ya da Φ-operatörü olarak adlandırılır. Bu operatör yapının özelliğine göre sonuçlar verir. Örneğin, $\Phi_J g = 0$ ve J kompleks yapıysa bu durumda g ye holomorfiktir tensör alanı denir. Eğer $\Phi_\varphi g = 0$ ve φ çarpım yapıysa bu durumda g ye Ayrıştırılabilir tensör alanı denir.

Bu tezde kullanılan F poly-Norden yapısı kompleks yapı ile bağlantılı olduğu için bu tezde tensör alanlarının holomorfluklarından bahsedildi. F poly-Norden yapısı için $\Phi_F g = 0$ şartını sağlayan (M_n, g, F) üçlüsü holomorfik poly-Norden manifold olarak adlandırıldı ve bundan sonraki tüm çalışmalar bu manifold üzerinden yapıldı. Bu manifoldun eğrilik tensörünün özellikleri incelendi. Son olarak bu oluşturulan manifold üzerinde içinde F poly-Norden yapının da bulunduğu burulmalı bir konneksiyon elde edildi. Bu konneksiyon metrik ve yapıya göre paralel olduğu için yarı-simetrik metrik

F-konneksiyon alarak adlandırıldı ve bu konneksiyonla elde edilen eğrilik tensörünün bazı özellikleri incelendi.

KAYNAKLAR

Crasmareanu, M. and Hretcanu C., 2008. Golden differential geometry. Chaos Solitons Fractals 38(5), 1229-1238.
El Naschie, M.S., 1999. The golden mean in quantum geometry, knot theory and related topics. Chaos, Solitons & Fractals 10(8), 1303-1307.
Ergun, N., 2000. Eski Yunan Uygarlığında Geometri. Sanat Dünyamız 76, 145-152.
Gezer, A., Cengiz N. and Salimov A. A., 2013. On integrability of Golden Riemannian structures. Turkish J. Math. 37(4), 693-703.
Gezer, A. and Karaman C., 2017. On golden semi-symmetric metric F-connecitons. TurkJ Math. 41(4), 869-887.
Gezer, A. and Karaman C., 2015. On Metallic Riemannian Structure, Turk. J. Math., 39, 954-962
Ganchev, G. and Borisov A., 1986. Note on the almost complex manifolds with a Norden metric. Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. 39(5), 31-34.
Ganchev, G., Gribachev K. and Mihova V., 1987 B-connections and their conformal invariants on conformally Kahler manifolds with B-metric. Publ. Inst. Math. 42, 107-121.
Hayden, H. A., 1932. Sub-spaces of a space with torsion. Proc. London Math. Soc, 34(2), 27-50.
Heyrovska, R., 2005 The Golden ratio ionic and atomic radii and bond lengths. Mol Phys. 103(6), 877-882.
Hretcanu, C. E. and Crasmareanu M., 2013. Metallic structures on Riemannian manifolds. Rev Un Mat Argentina 54, 15-27.
Kalia, S., 2011. The generalizations of the Golden ratio: their powers, continued fractions, and convergents. http://math.mit.edu/research/highschool/primes/paper
Karaman, C., 2018. On metallic semi-symmetric metric F-connections. Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 67(2), 242-251.
Kühnel, W., 2005. Differential geometry curves- surfaces- manifolds. Amer. Mat. Soc., New York.
Prvanovic, M., 1977. Locally decomposable Riemannian manifold endowed with some semi- symmetric *F*-connection. Bull. Cl. Sci. Math. Nat. Sci. Math. 22, 45-56.
Sahin, B., 2018. Almost Poly-Norden Manifolds. International Journal of Maps in Mathematics. 1(1), 68-79.
Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi., Nobel yayıncılık, Ankara.
Salimov, A., 2013. Tensor operators and their applications. Mathematics Research Developments Series. Nova Science Publishers, Inc., New York.
Salimov, A. A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometri, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
Tachibana, S., 1960. Analytic tensor and its generalization. Tôhoku Math. J. 12(2), 208-221.
Whitney, H., 1936. Differentiable manifolds. The Annals of Mathematics, Second series 37(3), 645-880.
Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor field. Kodai Math. Sem. Rep. 20, 414-436.

Yano, K. and Imai T., 1975. On semi-symmetric metric F-connection. Tensor N.S. 29, 134-138.

Yano, K., 1970. On Semi-symmetric Metric Connections. Rev.Roumanie Math. Pures Appl., 15, p. 134-138.

Yano, K. and Kon M., 1984. Structures on manifolds. Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore.

ÖZGEÇMİŞ

Zühre TOPUZ 1987 Batman’ın Hasankey ilçesinde dünyaya geldi. İlk ve orta öğrenimini Hasankeyf’te, lise öğrenimini ise Batman’da tamamladı. 2004 yılında girdiği Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü’nden 2008 yılında mezun oldu. 2009 yılında tezsiz yüksek lisansını Erzurum Atatürk Üniversitesinde bitirmiştir. 2018 yılında tezli yüksek lisansa başlayıp halen lisansüstü eğitimine devam etmektedir.