

**HAYAT DIŞI SİGORTALARDA DOĞRUSAL OLMAYAN
BAĞIMLILİĞİN KOPULALAR İLE DİNAMİK FİNANSAL
ANALİZİ**

**IN NONLIFE INSURANCE DYNAMIC FINANCIAL
ANALYSIS OF NONLINEAR DEPENDENCIES WITH
COPULAS**

BETÜL ZEHRA KARAGÜL

Dr. MURAT BÜYÜKYAZICI

Tez Danışmanı

Hacettepe Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Aktüerya Bilimleri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

2013

BETÜL ZEHRA KARAGÜL'ün hazırladığı “**HAYAT DIŞI SİGORTALARDA DOĞRUSAL OLMAYAN BAĞIMLILIĞIN KOPULALAR İLE DİNAMİK FİNANSAL ANALİZİ**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **AKTÜERYA BİLİMLERİ ANABİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan

(Prof. Dr., Cenap Erdemir)

Danışman

(Öğr. Gör. Dr., Murat Büyükyazıcı)

Üye

(Doç. Dr., Meral Sucu)

Bu tez Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Fatma Sevin Düz

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK

Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

//2013

Betül Zehra Karagül

ÖZET

HAYAT DIŞI SİGORTALARDA DOĞRUSAL OLMAYAN BAĞIMLILİĞİN KOPULALAR İLE DİNAMİK FİNANSAL ANALİZİ

BETÜL ZEHRA KARAGÜL

Yüksek Lisans, Aktüerya Bilimleri Bölümü

Tez Danışmanı: Dr. Murat Büyükyazıcı

Haziran 2013, 68 sayfa

Bu çalışmada bir hayat dışı sigorta şirketi için en temel bileşenlerin kullanıldığı ve doğrusal olmayan bağımlılığı da içeren Dinamik Finansal Analiz modeli yaklaşımıyla iki farklı benzetim çalışması yapılmıştır. Model içerisine doğrusal olmayan bağımlılıklar kopula kullanılarak dahil edilmiştir. Yapılan benzetim sonucu bu bağımlılıkların sigortacının risk ve kar profiline ve şirketin yükümlülüğünü yerine getirememe riski ile iflas olasılığına olan etkileri ölçülmüştür.

Yapılan benzetimin temelini oluşturan Dinamik Finansal Analiz, bağımlılık ölçümleri ve kopulalar hakkında temel bilgi verilmiştir. Kullanılan kopula türleri ve DFA model yapısı ayrıntılı biçimde anlatılmıştır. İncelenen şirketin risk, getiri ve performans ölçümü için kullanılacak finansal rasyolara değinilmiştir.

Çalışmalarda aynı DFA modeli içerisinde farklı bağımlılık yapıları yer almaktadır. Birinci benzetim çalışmasında yatırımlar arasında, hasarlar arasında ve yatırımlarla hasarlar arasında bağımlılığın olduğu dört boyutlu bir bağımlılık yapısı vardır. İkinci benzetim çalışmasında ise iki farklı sigorta branşı arasında bağımlılık vardır. Uygulamaların her ikisinde de parametreler Türkiye verisinden elde edilmiştir. Modelin uygulandığı hayat dışı

sigorta şirketinin parametreleri ise Türkiye’de yer alan hayat dışı sigorta şirketlerinin verisi baz alınarak hipotetik olarak oluşturulmuştur. Benzetim çalışmaları MATLAB programlama dili yardımıyla 100.000 yinelemeyle yapılmıştır.

Benzetim sonuçları kullanılan tüm kopulalı modeller ve bağımsız model için tablollaştırılarak birbiriyle karşılaştırılmıştır. Böylece doğrusal olmayan bağımlılık yapısının DFA modeline dahil edilmesinin sigorta şirketi ve denetleyici kurumlar açısından sonuçları incelenmiş ve etkileri yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dinamik Finansal Analiz, doğrusal olmayan bağımlılık, kopulalar, hayat dışı sigorta, benzetim, sigorta branşları arasındaki bağımlılık, bağımlılık ölçümleri.

ABSTRACT

IN NONLIFE INSURANCE DYNAMIC FINANCIAL ANALYSIS OF NONLINEAR DEPENDENCIES WITH COPULAS

BETÜL ZEHRA KARAGÜL

Master of Science, Department of Actuarial Science

Supervisor: Dr. Murat Büyükyazıcı

June 2013, 68 Pages

In this study, with Dynamic Financial Analysis model approach that includes basic components for a non-life insurance company, two different simulation studies have been done. Non linear dependencies have been integrated into the model using the copulas. In line with the simulation study, these dependencies' effects on the insurer's risk and return profile, the default risk and the ruin probability have been evaluated.

Basic Information about Dynamic Financial Analysis, dependence measures and copulas, that are main structure of the simulation studies which we done, have been given. The Copula families and DFA model framework which are used in the simulation study are detailed. The financial ratios, using for evaluating risk, return and performance of company, are mentioned.

In the simulation studies for the same DFA model there are different dependence structures. In the first study there is a four dimensional dependence structure that includes correlation between investments, between claims and between investments and claims. In the second study the dependence structure includes the correlation between two different lines of business in insurance. In both studies the market data have been generated in accordance with Turkey's market data. For the model the non-life insurance company's

data is generated hypothetically by using the real non-life insurance companies in Turkey as base. Simulation was done with MATLAB programming language, 100.000 iterations.

Simulation results were tabulated for the models with copulas and for the model without correlation and these results are compared with each other. Thus the results and the influence of integrating nonlinear dependencies into the DFA model were interpreted from the point of insurance company and regulators.

Keywords: Dynamic Financial Analysis, non-linear dependency, copulas, nonlife insurance, simulation, dependency between lines of business in insurance, dependence measures.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında değerli katkı ve önerileriyle yol gösteren ve karŐılaŐılan güçlüklerin aŐılmasında yardımcı olan danışmanım Sayın Öğr. Gör. Dr. Murat BÜYÜKYAZICI'ya,

değerli katkıları için bölüm başkanımız Sayın Doç. Dr. Meral SUCU'ya,

tez jürimde yer alan ve değerli görüşleri ile tezime katkıda bulunan Sayın Prof. Dr. Cenap ERDEMİR'e,

her zaman yanımda olan, zorlukları aŐmam için yardım eden ve destekleri sayesinde bugünlere gelebildiğim sevgili aileme,

hayatım boyunca desteğini ve sevgisini hissettiğim Ankara'daki ikinci evim Tekin Ailesi'ne,

Çalışma sırasında yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşlarım ArŐ. Gör. Demet ERDÖNMEZ, ArŐ. Gör. Berke KALEBOĞAZ, ArŐ. Gör. Başak BULUT KARAGEYİK ve Tuğba TUNÇ SU'ya,

maddi katkılarından dolayı TÜBİTAK Bilim Adamı Destekleme Daire Başkanlığı'na,

en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. DİNAMİK FİNANSAL ANALİZ.....	6
2.1. Dinamik Finansal Analiz Tanım ve Temel Özellikleri	6
2.2. Dinamik Finansal Analiz Model Yapısı	9
3. BAĞIMLILIK ÖLÇÜMLERİ	12
3.1. Doğrusal Korelasyon Katsayısı	12
3.2. Sıra Korelasyonu Katsayısı	14
3.2.1. Kendall'ın Tau Katsayısı	14
3.2.2. Spearman'ın Rho Katsayısı	15
3.2.3. Kendall'ın Tau Katsayısı ve Spearman'ın Rho Katsayısı Arasındaki İlişki	16
3.3. Kuyruk Bağımlılığı Katsayısı.....	18
4. KOPULALAR	20
4.1. Kopula Tanımı ve Özellikleri.....	21
4.2. Yaşam Kopulası.....	24
4.3. Sklar Teoremi	25
4.4. Değişmezlik Teoremi	27
4.5. Frechét-Hoeffding Sınırları	27
4.6. Bazı Önemli Kopula Aileleri.....	28
4.6.1. Eliptik Kopulalar	28
4.6.1.1. Gaussian Kopula.....	28

4.6.1.2. T-Kopula.....	29
4.6.2. Arşimed Kopulalar	30
4.6.2.1. İki Değişkenli Arşimed Kopulalar.....	30
4.6.2.2. Çok Değişkenli Arşimed Kopulalar	33
4.7. Değiştirilebilirlik ve Değiştirilebilir Kopulalar	34
4.8. Değiştirilemeyen Arşimed Kopulalar	35
4.8.1. 3-Boyutlu Değiştirilemeyen Arşimed Kopulalar.....	36
4.8.2. 4-Boyutlu Değiştirilemeyen Arşimed Kopulalar.....	36
5. KOPULALI DİNAMİK FİNANSAL ANALİZ MODELİ	37
5.1. Modelde Kullanılan Kopula Yapısı.....	37
5.2. Risk, Getiri ve Performansın Ölçümlenmesi.....	40
6. UYGULAMALAR.....	43
6.1. Birinci Uygulama	43
6.1.1. Birinci Uygulamanın Model Varsayımları ve Parametreleri.....	43
6.1.2. Birinci Uygulamanın Sonuçları	49
6.1.3. Bağımlılık Seviyelerindeki Değişimin Sonuçlar Üzerine Etkisi	51
6.1.3.1. Yatırımlar Arasındaki Bağımlılığın Etkisi	51
6.1.3.2. Hasarlar Arasındaki Bağımlılığın Etkisi	54
6.2. İkinci Uygulama	57
6.2.1. İkinci Uygulamanın Model Varsayımları ve Parametreleri	57
6.2.2. İkinci Uygulamanın Sonuçları.....	60
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	62
KAYNAKLAR.....	64
EK.....	67
ÖZGEÇMİŞ.....	68

SİMGELER VE KISALTMALAR

DFA	Dinamik Finansal Analiz
CAS	Hasar Aktüerleri Derneği
WTC	Dünya Ticaret Merkezi
ISO	Insurance Service Office
MBS	Mortgage'a Dayalı Finansal Ürünler
IFRS	Uluslararası Finansal Raporlama Standartları
ERM	Firma Risk Yönetimi
TDC	Kuyruk Bağımlılık Katsayısı
EPD	Beklenen Poliçeli Açığı
RP	İflas Olasılığı
SR	Sharpe Oranı
MCR	Minimum Sermaye Gereksinimi

1. GİRİŞ

Sigorta şirketleri için finansal modelleme yapmak geleceği öngörmek açısından oldukça önemlidir. Sigorta şirketleri bu sayede gelecek dönemler için sahip olacakları risklerini değerlendirir, getirilerini tahmin eder ve bir performans değerlendirmesi yaparlar. Günümüzde etkin ve yaygın olarak kullanılan finansal modellerden bir tanesi Dinamik Finansal Analizdir.

Dinamik Finansal Analiz (DFA), finansal sonuçları muhtemel senaryolar altında inceleyen, içsel ve dışsal koşulların değişimiyle çıktıların nasıl etkilendiğini gösteren, finansal modellemeye getirilmiş sistematik bir yaklaşımdır [1]. Bu yaklaşım sayesinde şirketler geleceğe yönelik iflas olasılıklarını, yükümlülüklerini karşılayıp karşılayamayacaklarını daha net görebilir ve yönetim kararlarını da buna göre alabilirler.

Literatürde tanımlanmış tek bir DFA modeli yoktur. Şirketler kendi ihtiyaçlarına göre farklı DFA modelleri belirleyebilirler. Bu özelliği DFA modelini daha kullanışlı ve geçerli kılmaktadır.

1990'ların sonlarına doğru CAS (Hasar Aktüerleri Derneği) mal ve kaza sigortası için benzetim modelleri geliştirmiş ve yaptığı çalışmaları DFA el kitabında yayımlamıştır. O zamandan beri akademik alanda DFA üzerine pek çok araştırma ve uygulama yayınlanmıştır. Lowe ve Stanard [2] ve Kaufmann, Gadmer, ve Klett [3] DFA için bir model yapısı oluşturmuş ve bu model yapısı üzerinde bir uygulama ile DFA'ya bir giriş sağlamışlardır. Lowe ve Stanard [2] sigorta, yatırım ve katasrof nitelikli reasüransın sermaye yönetim süreci için bir DFA modeli geliştirmiştir. Kaufmann, Gadmer ve Klett [3] bir hayat dışı sigorta şirketi için kullanıma hazır bir model oluşturmuşlardır. Blum ve arkadaşları [4], D'Arcy ve Gorratt [5], Eling, Parnitzke ve Schmeiser [1] DFA'yı özel karar verme durumlarını incelemek için kullanmışlardır. Blum ve arkadaşları DFA çatısı altında kur riskinin reasürans üzerindeki etkisini araştırmış ve D'Arcy ve Gorratt [5] ise mal ve kaza sigortası için optimal büyüme oranını araştırmak için DFA'yı kullanmıştır. Yönetim stratejilerinin sigortacının risk ve getirisi üzerindeki etkileri Eling, Parnitzke ve Schmeiser [1] tarafından DFA kullanılarak araştırılmıştır.

Bir sigorta şirketinin kullandığı DFA modelinden aldığı sonuçların geçerli ve gerçeğe yakın olabilmesi varlık ve yükümlülüklerinin stokastik davranışlarının doğru biçimde modellenmesine bağlıdır. Kullanılan DFA modellerinde genellikle doğrusal korelasyon varsayımının ele alınıyor olmasına rağmen bu konu üzerine yapılan çalışmalar sigorta

alanında sıklıkla görülen ağır kuyruklu ve çarpık dağılıma sahip riskler arasındaki bağımlılığın modellenmesi için sadece doğrusal korelasyon varsayımının uygun olmadığını gösterir [6].

Hayat dışı sigortalar yapıları gereği hayat sigortalarından daha belirsiz ve büyük risklere sahiptir. Bu risklerden bazıları ağır kuyruklu ve çarpık dağılıma sahip risklerdir. Bunlar özellikle büyük hasarların olduğu dönemlerdeki risklerdir. Bunlara örnek olarak Amerika Birleşik Devletlerinde meydana gelen 11 Eylül saldırısı verilebilir. Bu olay sonucu sigorta şirketleri hem Dünya Ticaret Merkezi (WTC) binasında kendi yaptıkları sigorta işlerinden dolayı hem de ilgili sermaye piyasası batışından dolayı aynı anda hem varlık hem yükümlülük açısından büyük bir zarara uğramışlardır. Bu tip terör saldırıları sonucu meydana gelen ekonomik kayıpların çok önemli boyutlarda olduğu görülmektedir. Insurance Service Office (ISO) isimli kuruluşun belirlemelerine göre WTC'ye yapılan terörist saldırılar nedeniyle 50.000'e yakın bireysel mal sigortası hasarı, 18.000 dolaylarında ticari hasar ve 4.800 dolaylarında motorlu araç hasarı için hasar başvurusunda bulunulmuştur [7].

Bu duruma bir başka örnek sigorta şirketlerinin hem mortgage'a dayalı finansal ürünlere (mortgage based security, MBS) yatırım yapması hem de teminatlı borç yükümlülüğü gibi yapılandırılmış kredi ürünlerini sigortalaması sonucu oluşan büyük hasarlara maruz kaldıkları yüksek faizli kredi krizleridir. MBS'ler konut edinmek için mortgage kredisi alan müşterilerin yaptıkları düzenli ödemeleri bir havuzda toplayan ve MBS tahvili alanlara buradan aylık ana para ve faiz ödemesi yapan yatırım araçlarıdır. Bankalar konut kredisinde patlama yaşandığı dönemlerde krediyi geri ödeyemeyecek kişilere de kredi vererek bir krize neden olmuş, bu alana yatırım yapan sigorta şirketleri de yapılandırılmış kredi ürünlerini de sigortaladıkları için büyük bir kayba uğramışlardır.

Yine Amerika Birleşik Devletleri'nde her yıl oluşan kasırgalar sigorta şirketlerinin çok yüklü ödemeler yapmasına sebep olmaktadır. Bu konuda araştırma yapan modelleme şirketleri bu ödeme miktarlarının ciddi bir artış göstereceğini öngörmektedir [8].

Bu örneklere ek olarak, meydana gelen doğal afetlerin sebep olabileceği ekonomik krizler sonucu sigorta şirketlerinin sigorta işlerinden elde edeceği hasarın yanı sıra finansal kriz sonucu yatırımlarından elde edeceği zarar şirketi büyük bir kayba sokar. Oluşan büyük hasarların sigorta şirketlerini mali açıdan etkilediği ve finansal krizin eşliğine getirebildiği bir gerçektir. Türkiye gibi deprem kuşağı üzerinde olan bir ülke için de bu tip doğal

afetlerin sigortaya ve finansal piyasalara olan etkileri göz ardı edilemez. Özellikle hayat dışı sigorta şirketleri için bu durumların risk ve kar profiline etkilerinin incelenmesi gerekmektedir.

Yukarıda bahsedilen ağır kuyruklu ve çarpık dağılıma sahip riskler arasındaki bağımlılık yapılarını modellemek için doğrusal olmayan bağımlılıklar incelenmelidir. Doğrusal olmayan bağımlılıklar için kullanılacak olan bağımlılık ölçümlerinden en etkin ve uygun olanı kopulalardır.

Literatürde ilk kez M. Fréchet'in çok boyutlu olasılık fonksiyonuyla onun daha az boyutlu marjinali arasındaki ilişki hakkında ortaya attığı bir soruyu cevaplandırmak için A.Sklar tarafından 1959' da önerülen kopula kavramı yıllardır var olmasına rağmen istatistik alanındaki çalışmaları oldukça yenidir [9]. Önceleri olasılıksal ölçüm uzayları teorisinin gelişiminde kullanılan kopulalar, daha sonra rastgele değişkenlerin arasındaki bağımlılığın parametrik olmayan ölçümlerini tanımlamak için kullanılmışlardır ve o zamandan beri olasılık ve matematiksel istatistikte çok önemli bir rol oynarlar. Son yıllarda yapılan uluslararası pek çok konferansın içerdiği konu başlıkları da kopulalara olan ilginin giderek arttığının bir göstergesidir [10].

Kopula kavramı ile sigorta alanında doğrusal olmayan bağımlılıkların eşleştirilmesi ilk kez ilişkili risk portföylerinin bütünleştirilmesi için algoritmalar ve modeller ortaya koyan Wang [11] tarafından 1998'de yapılmıştır. Frees ve Valdez'de [12] aynı zamanda kopulaların temel özelliklerini, bağımlılığın ölçüsüyle olan ilişkilerini ve çeşitli kopula ailelerini tanımlayarak risk hesaplamada kopulaların kullanımlarına bir başlangıç sunmuştur. Klugman ve Parsa [13], Mashal ve Zeevi [14], Malevergne ve Sornette [15] , Dias [16] ve Kole, Koedijk ve Verbeek [17] deneysel veriye kopula uygulayarak sigorta ve sermaye piyasalarının analizi için uygun modeller geliştirmişlerdir. Blum, Dias, ve Embrechts [18] alternatif risk transfer ürünlerinde bağımlılığın ölçülmesinde kopulaların kullanımını tartışmışlardır. Embrechts, McNeil ve Straumann [19] riske maruz değerde bağımlılık yapılarının etkilerinin analizi ve risk yönetiminde bağımlılık ve korelasyon için simülasyon algoritmaları ve bu algoritmaların özelliklerini sunmuşlardır. Pfeifer ve Nešlehov'a [20] kolektif risk teorisi çatısında bağımlı risk süreci üretmek ve modellemek için yaklaşımlar tasarlamıştır. McNeil [21] çok boyutlu problemler için kullanılabilen belirli bir kopula sınıfından örnekleme için algoritmalar sunmuştur. Oakes [22] [23], Hougaard, Harvald ve Holm [24], ve Carriere [25] hayat tablolarının tahminleri için yaşam modellerinde bağımlılık yapılarını analiz etmişlerdir. Tibiletti [26] sigorta talebi

alanında; Wang [27] ve Frees, Carriere ve Valdez [28] de sigorta ürünlerinin fiyatlandırılmasında kopulaları uygulamıştır.

Bu çalışmada hayat dışı sigorta şirketleri için bir Dinamik Finansal Analiz modeli yapısı kullanılmaktadır. Model hem uygulamada kolaylık sağlayacak şekilde hem de bir hayat dışı sigorta şirketinin finansal analizi için gerekli temel bileşenleri içerecek şekilde düzenlenmiştir. İki farklı uygulama yapılmıştır. Uygulamaların her ikisinde de aynı DFA model yapısı kullanılmıştır. Modele bağımlılıklar kopula yardımıyla dahil edilmiştir.

Çalışmanın ikinci bölümünde DFA'nın tanımı ve temel özellikleri verildikten sonra genel bir DFA sürecinin nasıl ilerlediği şekil yardımıyla anlatılmıştır. DFA modeli ile ilgili dikkat edilmesi gereken hususlara değinilmiş ve ardından tezde kullanılan DFA model yapısı tüm formülasyon ve ayrıntılarıyla anlatılmıştır.

Çalışmanın üçüncü bölümünde bağımlılık ölçümlerine genel bir bakış verilmiştir. Bağımlılık ölçümlerinden olan doğrusal korelasyon katsayısı, kuyruk bağımlılığı katsayısı ve sıra korelasyonu katsayıları olan Kendall'in tau katsayısı ile Spearman'in rho katsayısı işlenmiştir. Bu bölümde sıra korelasyonu katsayıları arasındaki benzerlik ve farklılıklara da yer verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümü kopulalara ayrılmıştır. Bu bölümde öncelikle kopulaların tanımı ve özellikleri anlatılmıştır. Verilen bu genel bilgilerin ardından kopulalar teorisi için önemli olan; yaşam kopulası, Sklar teoremi, değişmezlik teoremi, Fréchet-Hoeffding sınırları anlatılmıştır. Bazı önemli kopula ailelerinin neler olduğu ve bu ailelerin özellikleri de bu bölüm içerisinde yer almaktadır. Son olarak değiştirilebilirlik ve değiştirilebilir kopulalar ile değiştirilemeyen arşimed kopulalar üzerinde durulmuştur.

Çalışmanın beşinci bölümü, ikinci ve dördüncü bölümdeki bilgilerin sentezlenmesi olan DFA modeline kopulaların nasıl dahil edileceğini ve DFA modeline kopulalar dahil edildikten sonra yapılan benzetim çalışmasının risk, getiri ve performans ölçümünde kullanılan finansal rasyoları anlatmaktadır.

Çalışmanın altıncı bölümünde birinci ve ikinci uygulamanın model varsayımları ve kullanılan model parametrelere yer verilmiştir. Birinci uygulamada yatırımlar arasında, hasarlar arasında ve yatırımlarla hasarlar arasında bağımlılığın olduğu dört boyutlu bir doğrusal olmayan bağımlılık yapısı vardır. İkinci uygulamada iki farklı sigorta branşı arasında bağımlılık vardır. Her iki uygulamanın benzetim sonuçlarıyla bu bağımlılıkların

sigortacının risk ve kar profiline etkileri ölçülmüş, elde edilen sonuçların şirketin yükümlülüğünü yerine getirememeye ve iflas olasılığına olan etkileri incelenmiştir.

Yedinci ve son bölümde her iki uygulamanın da sonuçları yer almaktadır.

2. DİNAMİK FİNANSAL ANALİZ

2.1.Dinamik Finansal Analiz Tanım ve Temel Özellikleri

DFA çeşitli eğilimlerin birleşmesiyle 1990'larda geliştirilmiş yeni bir yaklaşımdır. Bu eğilimlerden biri 1970'lerde önce enflasyonun ve ardından faiz oranlarının oynaklığının artmasıyla başlayan finansal risklerdeki artıştır. Diğer bir eğilim ise DFA ile alakası olan ileri matematik tekniklerini düzenlemek için yeterli bilgisayar gücüne erişimin artmış olmasıdır. Üçüncü eğilim de bankalarda ve diğer finansal kuruluşlarda benzer tipte analizlerin benimsenmesidir. Genel DFA yaklaşımı ilk olarak Avrupa'daki sigortacılar tarafından ve ardından Kanada'da ve Amerika'da kullanılmıştır [5].

Dinamik Finansal Analiz, finansal sonuçları muhtemel senaryolar altında inceleyen, içsel ve dışsal koşulların değişimiyle çıktıların nasıl etkilendiğini gösteren, finansal modelleme için getirilmiş sistematik bir yaklaşımdır. Bu yaklaşım sayesinde şirketler geleceğe yönelik iflas olasılıklarını, yükümlülüklerini karşılayıp karşılayamayacaklarını daha net görebilir ve kararlarını da buna göre alabilirler.

DFA,

- yükümlülük karşılama yeterliliğini düzenleme,
- şirketin faaliyet alanlarının performans ölçümü,
- sermaye yönetimi,
- enflasyon riski, faiz oranı riski, rezerv riski gibi temel risklerin analizi,
- stratejik varlık yönetimi,
- sigorta sektöründe optimal büyüme oranı hesaplaması,
- alternatif reasürans kararlarının analizi

gibi yönetimle ilgili pek çok alanda kullanılmaktadır.

Avrupada ortaya konan yeni bir süreç olan riske dayalı sermaye standartları (Solvency II) ve Uluslararası Finansal Raporlama Standartları'nın (IFRS) gelişiminde nakit akışı projeksiyonu ve karar verme sürecinde özellikle reasürans ve hayat dışı sigorta piyasaları için DFA önemli bir rol oynamaktadır. Bu sebeple son yıllarda özellikle hayat dışı sigortalar alanında DFA'nın önemi giderek artmaktadır [1].

DFA daha deterministik olan klasik finansal ve aktüeryal analizlerden oldukça farklıdır. Stokastik değişkenler şirketin faaliyetlerini etkileyecek faktörleri temsil etmek amacıyla

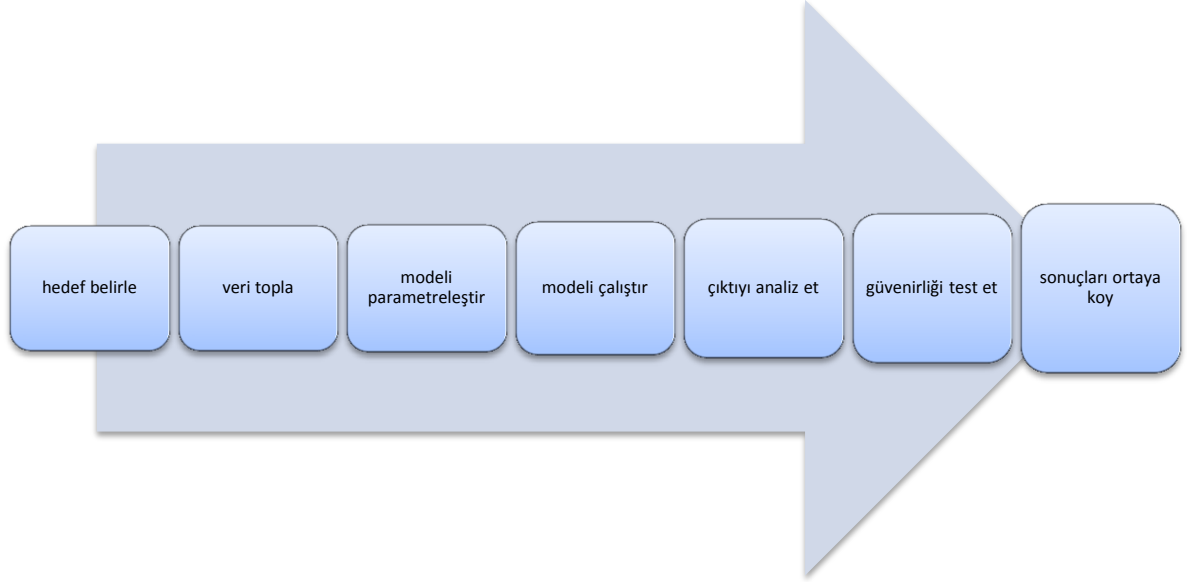
kullanılırlar. Bu yöntem çıktının tek en iyi tahmini yerine muhtemel çıktılarının ilgili olasılıklarıyla beraber dağılımına dayanır. Bir şirketin bilançosunu veya faaliyetlerini etkileyebilecek faktörlerin tek bir deterministik değer olarak tahmin edilmesi yerine seçilen parametrelere göre çeşitlendirilmesine izin verilir. Örneğin faiz oranları, gelecekteki faiz oranının tek bir tahmini yerine ilgili matematiksel modellerle sunulur. DFA'nın içerisinde yer alan finansal kelimesi de yatırım ve sigortanın, hem yatırım değerlerini hem de sigorta getirilerini etkileyen faiz oranları gibi değişkenlerle bütünleşmesini ifade eder. Geçmişte, sigorta şirketleri faaliyetlerinin sigorta kısmına odaklanmış ve yatırım yönünü ihmal etmiştir. Sigorta şirketlerinin en üst düzey yöneticilerinin genellikle sigortalama, hasarlar, satışlar veya aktüeryal işler konusunda çok güçlü bir bilgi birikimi vardı ama yatırım alanında nadiren böyle güçlü bir bilgiye sahiptiler. Pek çok şirket için bu durum 1980'lerde değişti çünkü yatırım gelirleri sigorta gelirlerinin büyümesini önlemeye başladı ve yatırım gelirleri daha oynak bir hal aldı. Şimdi sigortacılar sigorta ve yatırım faaliyetlerini koordine etme ve hem varlık hem de yükümlülüklerine dikkat etme eğilimindedirler [5].

DFA karar verme sürecinde önemli bir araç ve firma risk yönetimi (enterprise risk management, ERM) için esas parça haline gelmiştir. Özellikle hayat dışı sigorta şirketleri için vazgeçilmez olmasının nedeni hayat dışı sigorta şirketlerinin özelliklerinden kaynaklanmaktadır. Hayat dışı sigorta şirketlerinde hasarın meydana gelme anı ve büyüklüğü hayat sigortası şirketlerine göre daha belirsizdir ve faiz oranı riskine daha çok maruz kalmaktadırlar.

Pek çok ekonomik ve matematiksel kavramı ve yöntemi bir araya getiren DFA için tek bir yöntem bilim tanımlamak imkansızdır. Piyasada hayat dışı sigorta şirketleri için ulaşılabilir bazı DFA yazılım ürünleri mevcuttur ve bunların her biri kendi DFA yaklaşımlarına dayalıdır. Bir DFA modeli için en önemli soru en iyi stratejinin ne olduğudur. DFA'dan elde edilecek başarı stokastik davranışlarının uygun biçimde modellenmesine ve bağımlılıkların doğru eşleştirilmesine bağlıdır.

Bir sigorta şirketinin etkilenebileceği pek çok risk vardır; piyasa riski, enflasyon riski, kredi riski ve operasyonel riskler gibi. Tüm bu riskler ve daha fazlası modele dahil edilebilir. Ancak anlaşılabilirlik ve hesaplamalarda kolaylık için tezde kullanılan DFA modeline genel olarak bir hayat dışı sigorta şirketinde temel olan standart bileşenler dahil edilmiştir. İleriki çalışmalarda model daha fazla parametreye dayandırılabilir.

Genel yapısıyla DFA sürecinin nasıl işlediğini John C. Burkett, Thomas McIntyre ve Stephen M.Sonlin'in [29] çalışması kaynak alınarak Şekil 2.1'deki gibi gösterilebilir.



Şekil 2.1. DFA süreci

Tüm kullanışlı yönleri ve üstünlüklerine rağmen DFA modelleri kullanılırken bazı hususlar göz önünde bulundurulmalıdır.

DFA ile ilgili dikkat edilmesi gerekenler [30];

- DFA modelleri modelin ayrıntılarına dayalı olarak gelecek için benzetim yaparlar ama gerçek dünyayı tüm karmaşıklığıyla asla modelleyemezler.
- DFA modelleri varsayımları olan modellerdir. Bu varsayımlar yanlış olabilir. Modelin geçerliliği daima kontrol edilmelidir.
- DFA ölçümlemeyi gerektirir. Değerleri ölçümlemek zaman alır.
- DFA modelleri şirketin ihtiyaçlarına göre detaylandırılabilir ama modeli genişletmeden önce var olan model iyice anlaşılmalı ve genişlemenin etkilerinin neler olabileceği hesaplanmalıdır.

2.2. Dinamik Finansal Analiz Model Yapısı

Bu bölümde uygulamada kullanılmış olan DFA model yapısı açıklanmıştır. Model bir hayat dışı sigorta şirketi için gerekli olduğu düşünülen temel bileşenleri içermektedir. Eling ve Toplek'in [6] makalesinde kullanılan DFA modeli temel alınmış ancak model üzerinde bir takım değişiklikler yapılmıştır.

EC_t sigorta şirketinin ($t \in 1, \dots, T$) olmak üzere t dönem sonundaki öz sermayesi ve E_t şirketin t dönemindeki kazancını göstermek üzere zaman içinde öz sermayedeki değişim şöyle gösterilebilir;

$$EC_t = EC_{t-1} + E_t \quad (2.1)$$

Şirketin t dönemindeki kazancı olan E_t 'yi elde etmek için yatırım kazancı olan I_t ve sigortadan elde edilen kazancı gösteren U_t toplanır ve vergi oranı (tr) çıkartılır. Şirket kar etmemesi durumunda vergi vermeyecektir. Bu çalışmada kullanılan modelde kolaylık açısından vergi hukuku oldukça basitleştirilmiştir. Gerçek hayatta pek çok ulusal vergi sistemi en azından belli bir seviyede geçmişe ya da ileriye yönelik hasarlara izin veren karşılıklar içerir.

$$E_t = I_t + U_t - \max(tr(I_t + U_t), 0) \quad (2.2)$$

Varlıkların tamamı yüksek karlı bonolar ya da hisse senetleri gibi yüksek riskli ve getirisi çok olan yatırımlara veya tamamını devlet tahvilleri ve para piyasası araçları (mevduat hesapları, mevduat sertifikası, finansman bonusu vb.) gibi düşük riskli ve getirisi az yatırımlara yönlendirilebilir. Bunun yerine her ikisine de belirli oranlarda da paylaştırılabilir. α_{t-1} t döneminde yüksek riskli yatırımların oranı ve r_{1t} yüksek riskli yatırımların getirisi ve benzer biçimde r_{2t} düşük riskli yatırımların getirisi olmak üzere şirketin t zamanında yatırımlarından elde ettiği yatırım getirisi, r_{pt} ;

$$r_{pt} = \alpha_{t-1} r_{1t} + (1 - \alpha_{t-1}) r_{2t} \quad (2.3)$$

eşitliği ile yazılabilir.

Yatırıma yönlendirilecek uygun fon büyüklüğü ile yukarıda elde edilen r_{pt} yatırım getirisi çarpılarak yatırımlardan elde edilen yatırım kazancı I_t elde edilir. Yatırıma yönlendirilecek uygun fon büyüklüğü öz sermaye ve prim geliri (P_{t-1}) toplamından

görünen maliyetlerin (Ex_{t-1}^P) çıkartılmasıyla elde edilir. Görünen maliyetler hasar oluşumuna bağlı değildir. Sigortacılık işiyle alakalıdır.

$$I_t = r_{pt} \underbrace{(EC_{t-1} + P_{t-1} - Ex_{t-1}^P)}_{\substack{t-1 \text{ ile } t \text{ arasında} \\ \text{yatırıma yönlendirilen sermaye}} \quad (2.4)$$

Prim seviyesini hesaplamak için genellikle DFA modellerinde 3 durumun mevcut olduğu sigorta piyasası döngüleri kullanılır. Bu üç durum zayıf rekabet, orta rekabet ve güçlü rekabet piyasa koşullarıdır. Sigorta piyasası döngülerinin bir Markov sürecini izlediği varsayımıyla bir durumdan diğerine geçiş olasılıklarının yer aldığı geçiş matrisi kullanılır. Erişilebilir prim seviyesinin de geçerli piyasa durumuna bağlı olarak değiştiği varsayılır. Bu varsayım için geçiş matrisi şu şekildedir [3];

$$P_{sj} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Örneğin bu geçiş matrisinde p_{11} zayıf rekabet durumunda kalma olasılığını, p_{12} zayıf rekabet durumundan orta rekabet durumuna geçiş olasılığını verir. Bu geçiş olasılıklarına bağlı olarak prim seviyesi π^s üç durum için $s = 1, 2, 3$ üç farklı değer alır.

MV sigorta piyasası hacmini ve β_{t-1} ilgili şirketin sigorta piyasasındaki payını göstermek üzere tüm şirketlerin sigorta piyasası payları toplamı 1'dir ve bu sigorta piyasası hacminin bütün şirketler arasında paylaştırıldığını gösterir.

Prim gelirleri sadece prim seviyesi π^s 'yle değil aynı zamanda tüketici tepki fonksiyonuyla da ilişkilidir. Şöyle ki sigorta şirketlerinin borçlarını zamanında ödeyememe risklerinde meydana gelen artış elde edilebilir prim seviyelerinde düşüşe sebep olmaktadır. Tüketici tepki fonksiyonu da yazılan primlerle şirketin güvenlik seviyesi arasındaki ilişkiyi gösterir ve burada cr ile gösterilmektedir. Güvenlik seviyesi bir önceki dönem sonundaki öz sermaye ile ifade edilir. Tüm bu verilenler ışığında prim geliri aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunur.

$$P_{t-1} = cr_{t-1}^{EC_{t-1}} \pi_{t-1}^s \beta_{t-1} MV(1+i)^{t-1} \quad (2.6)$$

Model içerisinde iki tip maliyet kullanılacaktır. Birincisi, görünen maliyetler Ex_{t-1}^P ve ikincisi de hasar çözümlene maliyetleri olan Ex_t^C 'dir. Görünen maliyetler yazılı piyasa hacmi seviyesine γ faktörüyle doğrusal olarak ve sigorta işlerinin artması ya da azalması

nedeniyle reklam ve promosyon gibi sebeplerden doğan ek masraflara dayalı olarak meydana gelen yazılı piyasa hacmindeki değişime η faktörüyle karesel biçimde bağlıdır. Bu bilgiler doğrultusunda görünen maliyetler aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunur.

$$Ex_{t-1}^P = \gamma\beta_{t-1}MV(1+i)^{t-1} + \left(\eta(\beta_{t-1} - \beta_{t-2})MV(1+i)^{t-1}\right)^2 \quad (2.7)$$

Hasar çözümleme maliyetleri meydana gelen hasarların δ oranı kadardır, $Ex_t^C = \delta C_t$. Meydana gelen hasarlar katastrof ve katastrof olmayan hasarların toplamıdır.

$$C = C_{ncat} + C_{cat} \quad (2.8)$$

Sigorta işinden elde edilen kazanç elde edilen primlerden hasarların ve masrafların çıkartılmasıyla bulunur.

$$U_t = P_{t-1} - C_t - (Ex_{t-1}^P + Ex_t^C) \quad (2.9)$$

Tezde kullanılan modele başka bileşenler de eklenebilir ve model daha fazla parametreye dayandırılabilir ancak modelin karmaşıklığı arttıkça hassasiyeti azalacak ve üzerinde çalışmak zorlaşacaktır. Amaç bir hayat dışı sigorta şirketinin varlık ve yükümlülüklerinin genel bir resmini çizmek ve bu resim üzerinden ölçümlenmeleri yapmaktır. Bu nedenle model, risk ve getiri üzerinde etkisi olabilecek bazı bağımlılıkların etkilerinden arındırılmıştır.

Sigorta şirketi yönetimi model içerisinde her yıl piyasa payının ne olacağını ve yatırımın ne kadarının riskli araçlar ne kadarının da risksiz araçlar üzerine yapılacağını belirleyebilir.

3. BAĞIMLILIK ÖLÇÜMLERİ

Kopulaların daha rahat anlaşılabilmesi için bağımlılık ölçümlerinin türlerinin ve birbiriyle olan ilişkilerinin incelenmesi gerekmektedir çünkü bağımlılık bu ölçümler yardımıyla kopulalar içerisine dahil edilmektedir. Nelsen'in kopulalar üzerine oldukça kapsamlı bilgiler içeren kitabında sıra korelasyonu katsayıları, bu katsayılar arasındaki ilişki ve kuyruk bağımlılığı üzerine geniş yer verilmiştir [34]. Schmidit kopulalar ve bağımlılık ölçümleri üzerine yaptığı çalışmada kopulaların çok geniş bir uygulama alanı, bağımlılık yapılarının tanımlanmasında etkili bir araç olduğunu ve bağımlılık ölçümleri ile olan ilişkisinin incelenmesinin önemini anlatmaktadır [32].

İki rastgele değişkenden birisi hakkındaki bilgi diğeri hakkında hiçbir yeni bilgi içermiyorsa bu iki rastgele değişken bağımsızdır denebilir. Bu durum matematiksel olarak ifade edilmek istenirse X ve Y rastgele değişkenleri ancak ve ancak aşağıdaki eşitlik sağlandığında bağımsızdır.

$$P(X \leq x \text{ ve } Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y) \quad (3.1)$$

Bir diğer gösterimle,

$$P(X \leq x|Y) = P(X \leq x) \quad (3.2)$$

olması gerekir.

Bağımsız olmayan iki değişken bağımlıdır ve eğer X 'in bilgisi Y 'nin bilgisini içeriyorsa bu rastgele değişkenler karşılıklı tam bağımlıdır. Bu durum neredeyse her yerde $Y = f(x)$ gibi birebir f eşleşmesi anlamına gelir. f eşleşmesi tam artan ya da tam azalandır. İlk durumda X ve Y pozitif tam bağımlı (comonotonic) ikinci durumda ise negatif tam bağımlıdır (countermonotonic) [31].

Bağımlılık ölçümleri rastgele değişkenler arasındaki bağımlılık yapılarını özetler. Üç önemli bağımlılık ölçümü vardır: doğrusal korelasyon katsayısı, sıra korelasyonu katsayısı ve kuyruk bağımlılığı katsayısı.

3.1. Doğrusal Korelasyon Katsayısı

Sadece eliptik dağılımlar için kullanışlı olan bir bağımlılık ölçümüdür. Bunun nedeni eliptik dağılımların ortalama vektör, kovaryans matrisi ve bir karakteristik üretici fonksiyon tarafından tamamıyla tanımlanıyor olmasıdır. Ortalama ve varyans marjinal dağılımlar tarafından belirlendiği için, eliptik dağılımların kopulaları sadece üretici

fonksiyon ve kovaryans matrisine bağlıdır. Böylelikle doğrusal korelasyon bu sınıfta diğer çok değişkenli modellerde sahip olmadığı sivrilmiş bir role sahiptir [32].

Doğrusal bağımlılık doğrusal korelasyon katsayısı (Pearson's product-moment coefficient) ile ölçülür. X ve Y rastgele değişkenleri verildiğinde $Var(X)$ ve $Var(Y)$ varolmak koşuluyla doğrusal korelasyon katsayısı Eş. 3.3.'deki gibi ifade edilir.

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} \quad (3.3)$$

$Cov(X, Y)$ X ve Y 'nin kovaryansıdır. $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$\rho(X, Y)$ doğrusal korelasyon katsayısı, $Y = \beta X + \varepsilon$ doğrusal regresyonunun β katsayısına eşdeğer bilgiyi içermektedir. ε , X ile doğrusal korelasyonsuz olan artığı ifade eder ve ρ ve β arasındaki ilişki:

$$\rho = \beta \sqrt{Var(X)/Var(Y)} \quad (3.4)$$

biçiminde ifade edilir.

Doğrusal korelasyon katsayısının özellikleri şöyle açıklanabilir;

- $[-1, 1]$ aralığında değerler alır; $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$,
- Doğrusal korelasyon katsayısı, değişkenlerin monoton değişimi altında sabittir.

$$\left. \begin{array}{l} X' = aX + b \\ Y' = cY + d \end{array} \right\} \Rightarrow \rho(X', Y') = \text{sign}(ac)\rho(X, Y) \quad (3.5)$$

Doğrusal korelasyon katsayısı hesaplanması kolay bir katsayıdır, çok değişkenli eliptik ve küresel dağılımlar için doğal bağımlılık ölçümüdür. Bunlara ek olarak korelasyon ve kovaryansı doğrusal operasyonlar altında yönetmek kolaydır.

Bu üstünlüklerinin yanında aşağıda belirtilen sıkıntılardan dolayı doğrusal korelasyon katsayısı yerine sıra korelasyonları tercih edilebilir [33].

- X ve Y 'nin varyansları sonlu değilse korelasyon katsayıları tanımlanamaz. Bu durum bir bağımlılık ölçümü için elverişli değildir ve ağır kuyruklu dağılımlarla çalışıldığında sorunlara sebep olabilir. Ağır kuyruklu durağan dağılımların varyanslarını sonsuza sürükler. Örneğin iki değişkenli t_v dağılımlı rastgele vektörün iki bileşeni arasındaki kovaryans ve korelasyon $v \leq 2$ için tanımlanamaz. Hayat dışı aktüerlerinin farklı iş kollarındaki hasarların modellenmesinde sonsuz varyanslı dağılımları kullanırken dikkatli olmaları gerekmektedir.

- İki rastgele değişkenin bağımsızlığı onların korelasyonsuz olduğunu gösterir ama sıfır korelasyon bu değişkenlerin bağımsız olduklarını ifade etmez. Örneğin x rastgele değişkeninin $[0, 2\pi]$ arasında tekdüze dağıldığı varsayalım ve U, W değişken çifti de $(U, W) = (\cos x, \sin x)$ olsun. Bu değişken çiftinin korelasyonu $\rho(U, W) = 0$ olmasına rağmen bağımsız değildirler.
- Doğrusal korelasyon katsayısının doğrusal olmayan tek düze dönüşümler için sabit kalamaması nedeniyle ciddi yetersizlikleri vardır.

3.2. Sıra Korelasyonu Katsayısı

Sıra korelasyonları sıralar arasındaki bağımlılık yapılarını tanımlar yani, olasılık dönüşümü kullanılarak dikkate alınan rastgele değişkenler tekdüze marjinallere dönüştürüldüğünde bağımlılık yapısını tanımlar. Bir değişken çiftindeki değişkenlerden bir tanesinin “büyük” değerleri diğerinin “büyük” değerleriyle ve “küçük” değerleri de diğerinin “küçük” değerleriyle ilişkiliyse bu değişken çifti uyumludur denir. Daha açık bir anlatımla; (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) bir (X, Y) sürekli rastgele değişkenler vektöründen elde edilen iki gözlem çifti olsun. Eğer $x_i < x_j$ ve $y_i < y_j$ ise ve ya $x_i > x_j$ ve $y_i > y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumludur. Benzer biçimde eğer $x_i < x_j$ ve $y_i > y_j$ ise ve ya $x_i > x_j$ ve $y_i < y_j$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumsuzdur (discordant). Diğer bir gösterim şekli, eğer $(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumludur (concordant). Eğer $(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0$ ise (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) uyumsuzdur [34]. Sıra korelasyonu rastgele değişkenlerin uyumunu ölçmek için kullanılır. En önemli iki sıra korelasyonu ölçümü *Kendall'in tau katsayısı* ve *Spearman'in rho katsayısı*'dir.

3.2.1. Kendall'in Tau Katsayısı

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ sürekli rastgele değişkenlerden oluşan (X, Y) vektöründen elde edilen n gözlemlili bir rastgele örneklem olsun. Örneklemde $\binom{n}{2}$ kadar farklı (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) çiftleri vardır ve her çift ya uyumludur ya da uyumsuzdur. c uyumlu çiftlerin sayısını ve d uyumsuz çiftlerin sayısını göstermek üzere örneklem için Kendall'in tau katsayısı şöyledir:

$$t = \frac{c-d}{c+d} = (c-d) / \binom{n}{2}.$$

t , bir örneklemden rastgele seçilen bir (x_i, y_i) ve (x_j, y_j) çifti için uyumluluğun olasılığı ile uyumsuzluğun olasılığı arasındaki farktır. Bileşik dağılım fonksiyonu H ile sürekli rastgele değişkenlerden oluşan (X, Y) vektörü için Kendall'ın tau katsayısının kitle-yığın versiyonu benzer biçimde tanımlanır. (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_2) her biri bileşik dağılım fonksiyonu H ile bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele vektörler olsun. Kendall'ın tau katsayısının kitle versiyonu aşağıdaki eşitlikteki gibidir.

$$\tau = \tau_{X,Y} = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] \quad (3.6)$$

Eş. 3.6.'nın sağ tarafındaki ilk terim uyumluluğun olasılığını ve ikinci terim ise uyumsuzluğun olasılığını vermektedir [34].

Sürekli rastgele değişkenler için Kendall'ın tau katsayısı şu şekilde de ifade edilebilir;

$$\tau = 2P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 \quad (3.7)$$

Bu eşitlikten de anlaşılacağı gibi Kendall'ın tau katsayısının değeri -1 ile +1 arasındadır. Sadece ve sadece (X, Y) çifti negatif tam bağımlı (*countermonotonic*) olduğunda -1, sadece ve sadece (X, Y) çifti pozitif tam bağımlı (*comotonic*) olduğunda ise +1 değerini alacaktır [31].

Doğrusal olmasına gerek duyulmadan herhangi monoton G_X ve G_Y eşleştirmeleri verildiğinde birinin aşağıdaki koşulu sağlaması durumunda (X_i, Y_i) çiftinin monoton dönüşümler altında sıralaması değişmiyor demektir.

$$\begin{aligned} X_1 \geq X_2 &\Leftrightarrow G_X(X_1) \geq G_X(X_2), \\ Y_1 \geq Y_2 &\Leftrightarrow G_Y(Y_1) \geq G_Y(Y_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Marjinal dağılımların monoton dönüşümleri altında Kendall'ın tau katsayısının değeri sabit kalır [31].

3.2.2. Spearman'ın Rho Katsayısı

Spearman'ın rho katsayısı bağımlılık ölçümü, Kendall'ın tau katsayısında olduğu gibi uyumluluk ve uyumsuzlukla ilişkilidir. Aynı bileşik dağılım fonksiyonuna sahip üç

bağımsız vektör olarak (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) ve (X_3, Y_3) çiftleri ele alınsın. Sperman'ın Rho katsayısının kitle versiyonu (X_1, Y_1) ve (X_2, Y_3) çiftleri için uyumluluğun olasılığı ile uyumsuzluğun olasılığı arasındaki fark ile orantılıdır ve şu şekilde ifade edilir [34]:

$$\rho_s = \rho_s(X, Y) = 3\left(\text{P}\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\right] - \text{P}\left[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\right]\right) \quad (3.9)$$

$\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots (x_n, y_n)\}$ sürekli rastgele değişkenlerden oluşan (X, Y) vektöründen elde edilen n gözlemlili bir rastgele örneklem olsun. Sperman'ın Rho katsayısının örneklem tahmin edicisi Eş.3.10.'daki gibidir [35].

$$\hat{\rho}_s = \hat{\rho}_s(X, Y) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left(\text{rank}(X_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left(\text{rank}(Y_i) - \frac{n+1}{2} \right) \quad (3.10)$$

Marjinal dağılımları F_X, F_Y olan X ve Y rastgele değişkenleri için Sperman'ın rho katsayısı Eş. 3.11.'deki gibi ifade edilebilir [35].

$$\rho_s = \rho_s(X, Y) = \rho_s(F_X(x), F_Y(Y)) = \frac{\text{Cov}(F_X(x), F_Y(Y))}{\sqrt{\text{Var}(F_X(X))\text{Var}(F_Y(Y))}} \quad (3.11)$$

3.2.3. Kendall'ın Tau Katsayısı ve Spearman'ın Rho Katsayısı Arasındaki İlişki Katsayılar arasındaki benzerlikler şunlardır

- Herhangi sürekli (X, Y) çiftleri için tanımlanırlar
- Simetrikler

$$\begin{aligned} \rho_s(X, Y) &= \rho_s(Y, X) \\ \tau(X, Y) &= \tau(Y, X) \end{aligned} \quad (3.12)$$

- $[-1, 1]$ aralığında değer alırlar

$$-1 \leq \rho_s(X, Y), \tau(X, Y) \leq 1 \quad (3.13)$$

- Ancak ve ancak X ve Y bağımsızsa sifira eşittirler.
- Eğer (X, Y) comotonic ise $\rho_s(X, Y) = \tau(X, Y) = 1$, countermonotonic ise $\rho_s(X, Y) = \tau(X, Y) = -1$ olur [31].

Katsayılar arasındaki farklılıklar şunlardır

Ortak özellikleri olması ve her ikisi de verilen rastgele değişkenler arasındaki uyumluluğu ölçüyor olmasına rağmen aynı büyüklüğe sahip değildirler, çünkü temellerinde yatan mantık ve hesaba dayalı formülasyonları oldukça farklıdır. Farklı yorumlar sunarlar. Spearman'ın rho katsayısı hesaplanan değişkenliğin oranı açısından Pearson'nın düzenli (regular) korelasyon katsayısı olarak anılırken Kendall'ın tau katsayısı bir olasılık sunmaktadır. Bir başka deyişle gözlenen verinin aynı sırada olması olasılığına karşın gözlenen verinin aynı sırada olmama olasılığını sunar.

Teorem 3.1.

X ve Y sürekli rastgele değişkenler ve τ ve ρ_s sırasıyla Kendall'ın tau ve Spearman'ın rho katsayılarını göstermek üzere Eş. 3.6. ve Eş. 3.9.'dan yola çıkarak;

$$-1 \leq 3\tau - 2\rho_s \leq 1 \quad (3.14)$$

elde edilir [34].

Teorem 3.2.

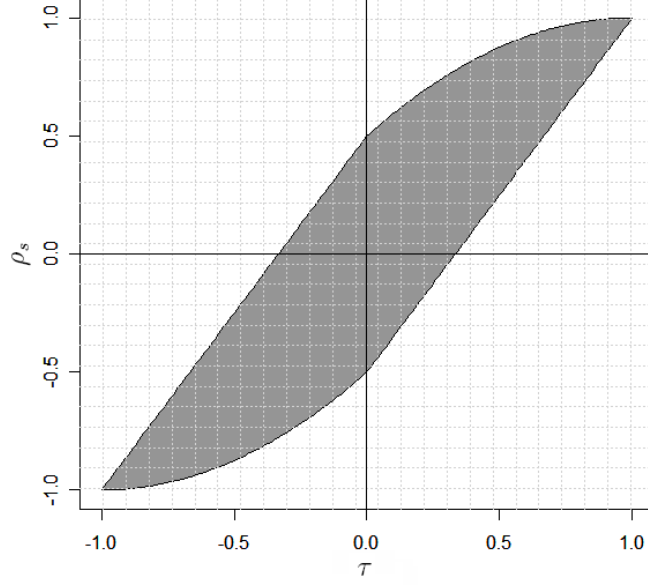
X , Y , τ ve ρ_s Teorem 3.1.'de tanımlandıkları gibi olsun, buradan Eş. 3.15 elde edilir [34].

$$\begin{aligned} \frac{1+\rho_s}{2} &\geq \left(\frac{1+\tau}{2}\right)^2 \\ \frac{1-\rho_s}{2} &\geq \left(\frac{1-\tau}{2}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Teorem 3.1 ile teorem 3.2.'nin birleştirilmesiyle Kendall'ın tau ve Spearman'ın rho katsayıları arasındaki ilişkiyi aşağıdaki eşitsizliklerle gösterebiliriz [34].

$$\begin{aligned} \frac{3\tau-1}{2} \leq \rho_s \leq -\frac{\tau^2-2\tau-1}{2}, \tau \geq 0 \\ \frac{\tau^2+2\tau-1}{2} \leq \rho_s \leq \frac{3\tau+1}{2}, \tau \leq 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

ρ_s ve τ için belirlenmiş olan bu sınırları Şekil 3.1.'de görülebilir. Herhangi bir (X, Y) rastgele sürekli değişken çifti için Kendall'ın tau ve Spearman'ın rho değerleri taralı alanda yer almalıdır [31].



Şekil 3.1. Kendall'in tau katsayısı ve Spearman'ın rho katsayısı için sınırlar

İki değişkenli normal dağılım için Kendall'in tau τ ya da Spearman'ın rho ρ_s parametreleri ve doğrusal korelasyon katsayısı ρ arasında basit, bire bir eşleştirme vardır [36].

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho) \quad \text{veya} \quad \rho = \sin\left(\tau \frac{\pi}{2}\right) \\ \rho_s &= \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right) \quad \text{veya} \quad \rho = 2 \sin\left(\rho_s \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.3. Kuyruk Bağımlılığı Katsayısı

Kuyruk bağımlılığı yerel bağımlılıklara odaklanmak için pozitif kadrant bağımlılığın basitleştirilmiş bir formudur. Kuyruk bağımlılığı iki değişkenli dağılımın kuyruğundaki bağımlılık miktarını ölçer. Bir başka ifadeyle, kuyruk bağımlılığı iki değişkenli bir dağılımın sağ üst kadrantı veya sol alt kadrantının köşesindeki bağımlılık derecesini gösterir. Son zamanlarda finansal uygulamalarda piyasa ve kredi riskiyle alakalı olarak kullanılmaktadır. Özellikle varlık portföyleri için riske maruz değer tahimini yapmak amacıyla kuyruk bağımlı dağılımlar revaçtadır çünkü bu dağılımlar ile büyük hasarlarla farklı varlıklar arasındaki bağımlılık modellenebilir [37].

Çok değişkenli rastgele vektörler için tanımlanacak olan kuyruk bağımlılıkları genellikle bu değişkenlerin iki değişkenli marjinal dağılım fonksiyonlarına bağlıdır. Genel anlamda kuyruk dağılımları bir marjinin belirli bir eşiği aştığı bilindiğinde, diğer marjinin de bu eşiği aşma durumunun sınırlayıcı oranını verir. Kuyruk bağımlılığının kullanılan pek çok gösterimi vardır. Bunlardan biri aşağıdadır:

$X = (X_1, X_2)^T$ iki boyutlu rastgele bir vektör olsun, eğer aşağıdaki eşitliği sağlarsa (istenilen limit varken), X üst kuyruk bağımlıdır denir.

$$\lambda_U = \lim_{\nu \rightarrow 1^-} P\{X_1 > F_1^{-1}(\nu) | X_2 > F_2^{-1}(\nu) > 0\} \quad (3.18)$$

F_1^{-1}, F_2^{-1} sırasıyla X_1 ve X_2 'nin genelleştirilmiş ters dağılım fonksiyonlarıdır ve λ_U üst kuyruk bağımlılık katsayısıdır (upper TDC). Bu eşitsizlik sözel olarak ifade edilmek istenirse, X_2 'nin çok büyük olduğu bilindiğinde aynı olasılık seviyesi ν de X_1 'in de çok büyük olması olasılığı asimptotik olarak λ_U üst kuyruk bağımlılığı katsayısını tanımlar.

Şayet $\lambda_U = 0$ ise $X = (X_1, X_2)^T$ üst kuyruk bağımsızdır denir.

Benzer bir biçimde (istenilen limit varsa) X 'in alt kuyruk bağımlılık katsayısı Eş. 3.19.'daki gibidir.

$$\lambda_L = \lim_{\nu \rightarrow 0^+} P\{X_1 \leq F_1^{-1}(\nu) | X_2 \leq F_2^{-1}(\nu)\} \quad (3.19)$$

λ_L alt kuyruk bağımlılık katsayısıdır (lower TDC) [37].

4. KOPULALAR

Latin kökenli bir kelime olan ve “bağlamak, eklemek, bağ, ilişki” anlamlarına gelen kopula [38], dilbilgisinde “cümlelerin yüklem ve öznesini ilişkilendiren kısmı” için kullanılır [39].

İstatistikçiler uzun bir süre çok değişkenli dağılım fonksiyonları ve onların daha az değişkenli marjinal dağılımları arasındaki ilişkileri incelemişler ve 50’li yıllarda iki değişkenli ve üç değişkenli dağılımlarla onların tek değişkenli marjinalleri üzerine çalışmalar yapmışlardır. A.Sklar [9] 1959 yılında bu problem üzerine eğilmiş ve “copulas” adını verdiği fonksiyonları ortaya çıkarmıştır. Kopulalar marjinalleri $[0,1]$ aralığında tekdüze dağılan iki değişkenli dağılım fonksiyonlarının $[0,1]^2$ şeklinde ifade edilen birim kare alanı içerisinde gösterilmesidir. Özetle Sklar şunu demektedir, eğer H marjinalleri $F(x)$ ve $G(y)$ olan iki değişkenli bir dağılımsa, $H(x,y) = C(F(x),G(y))$ olacak biçimde bir C kopulası mevcuttur. Eğer F ve G fonksiyonları süreklirse bir tek C kopulası vardır. Benzer biçimde C bir kopulaysa ve F ve G dağılım fonksiyonlarıysa H , marjinalleri F ve G olan bir bileşik dağılım fonksiyonudur.

1959 ve 1976 yılları arasında kopulalar hakkında yapılan çalışmaların çoğu olasılıksal ölçüm uzaylarının gelişimi üzerine, özellikle de olasılık dağılım fonksiyonları uzayında ikili işlemler üzerine yapılmıştır.

1942’de Karl Menger [40] ölçüm uzayları teorisine olasılıksal bir genelleme getirmiştir. Herhangi bir gerçel x için p ile q arasındaki mesafenin x ’ten küçük olma olasılığının $F_{pq}(x)$ ile gösterildiği F_{pq} dağılım fonksiyonu ile $d(p,q)$ sayısının yerlerini değiştirmiştir. Ölçüm uzaylarının oluşturulmasında ilk zorluk, F_{pr} , F_{pq} ve F_{qr} dağılım fonksiyonları arasındaki ilişkiyi gösteren $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$ üçgen eşitsizliğinin olasılıksal örneğinin bulunmasında ortaya çıkar. Menger T üçgen normu göstermek üzere (t-norm) $F_{pr}(x+y) \geq T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$ eşitsizliğini ortaya koymuştur. Bazı üçgen normlar kopuladır, bazı kopulalar da üçgen normdur.

İlerleyen zamanlarda kopulaların rastgele değişkenler arasındaki bağımlılığın parametrik olmayan ölçümlerini tanımlamak için kullanışlı olabileceği fark edilmiştir. Bunun üzerine kopulalar olasılık ve istatistik alanında özellikle de monoton dönüşümler altında sabit olan

rastgele değişkenlerin marjinalleri ve fonksiyonları verildiğinde bağımlılıkla ilgili problemlerin incelenmesinde önemli rol oynamaktadırlar.

Kopulalar birim kare üzerindeki iki değişkenli F dağılımının tek değişkenli bir sunumu biçimindedir. Bağımlılığın etkilerini marjinal dağılımların etkisinden ayırmayı sağladığı için de iki değişken arasındaki bağımlılığın çalışılmasında önemli bir araçtır [41].

Kopulalar pek çok nedenden dolayı bağımlılık çalışanlar tarafından tercih edilebilir yapılardır. Bu nedenlerden bazıları:

- Doğrusal olmayan bağımlılıklar için kullanılabilirler,
- Ağır kuyruklu dağılımlar için bağımlılığı ölçebilirler,
- Çok esnekler: parametrik, yarı parametrik veya parametrik olmayan bağımlılık yapılarının asimptotik özelliklerini çalışmaya elverişlidirler,
- Hesaplamalar iki aşamalı tahmin ile daha hızlı ve durağandır,
- Bağımlılık yapılarını inceleyen diğer yapılara göre daha olasılıksal ve istatistiksel olabilirler.

4.1. Kopula Tanımı ve Özellikleri

$F(x) = P[X \leq x]$ ve $G(y) = P[Y \leq y]$ sırasıyla X ve Y rastgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları olsun. $H(x, y) = P[X \leq x, Y \leq y]$ X ve Y değişkenlerinin bileşik dağılım fonksiyonunu göstermek ve $F(x)$, $G(y)$ ve $H(x, y)$ 'nin her biri $[0, 1]$ aralığında gerçel birer sayı olmak üzere (x, y) ifti yani $(F(x), G(y))$ çifti $[0, 1] \times [0, 1]$ birim karesinde bir noktaya denk gelir. Bu sıralı çiftlerin her biri $[0, 1]$ aralığında bir $H[x, y]$ noktasına karşılık gelir. Bu karşılık aslında birleşik dağılım fonksiyonunun değerini bireysel dağılım fonksiyonlarının her bir sıralı çiftlerinin değerlerine atayan bir fonksiyondur ve bu fonksiyonlara kopulalar denir [34].

$F^{-1}(x)$, $G^{-1}(y)$ dağılım fonksiyonlarının tersini göstermek üzere aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$U = F(x) \sim U(0, 1)$$

$$V = G(y) \sim U(0, 1)$$

$$C(u, v) = P(U \leq u, V \leq v) = P(X \leq F^{-1}(u), Y \leq G^{-1}(v))$$

$$C(u, v) = H(F^{-1}(u), G^{-1}(v))$$

$C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ biçiminde gösterilen fonksiyon n-boyutlu kopula fonksiyonudur.

Dolayısıyla $C : [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ 2-boyutlu bir kopula fonksiyonudur ve şu özellikleri sağlar;

1) Temel özellikler:

$[0,1]$ aralığındaki her u, v için

$$C(u,0) = 0 = C(0,v) \quad (4.1)$$

ve

$$C(u,1) = u \quad \text{ve} \quad C(1,v) = v \quad (4.2)$$

olur.

2) Dikdörtgensel eşitsizlik:

$[0,1]$ aralığında $u_1 \leq u_2$ ve $v_1 \leq v_2$ olacak şekilde her u_1, u_2, v_1, v_2 için

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0 \quad (4.3)$$

olur. Bu eşitsizlik özellikle $C(u,v)$ 'nin hem u hem de v 'de arttığını gösterir [19].

3) Türevlenebilme

$C(u,v)$ her iki değişkende de sürekli ve artan olduğu için $[0,1]$ 'de herhangi bir v için

$\frac{\partial C}{\partial u}$ kısmi türevi neredeyse her u için vardır ve

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \leq 1 \quad \text{olur.} \quad (4.4)$$

Aynı şekilde $[0,1]$ 'de herhangi bir u için $\frac{\partial C}{\partial v}$ kısmi türevi neredeyse her v için vardır ve

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u,v) \leq 1 \quad \text{olur [19].}$$

4) Süreklilik

C kopulasının tanım kümesindeki her u_1, u_2, v_1, v_2 için *Lipschitz Koşulu* ile

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| \quad (4.5)$$

olur. Bu nedenle C kendi tanım kümesinde düzgün süreklidir [19].

Lipschitz Koşulu: $f(x,y)$ fonksiyonu (x_0,y_0) noktasını barındıran R bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun. Bu R bölgesi kapalı bir dikdörtgenle sınırlı olsun. Eğer R bölgesindeki tüm x ve y 'ler için

$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < L|y_1 - y_2|$ olacak şekilde bir L varsa $f(x,y)$ fonksiyonu *Lipschitz Koşulu* 'nu sağlar.

5) Kopuların dualı

C kopulasının dualı C_d ile gösterilir. (bazı kaynaklarda \tilde{C} ile gösterilir)

$$C_d(u,v) = u+v - C(u,v) \quad (4.6)$$

C_d bir kopula değildir çünkü $C(u,0) = 0 = C(0,v)$ özelliğini sağlamaz ve $C_d(u,v)$ sıfır yerine u 'ya eşittir. Ancak $0 \leq C_d(u,v) \leq 1$ koşulunu sağlar.

6) Köşegen kopula

Köşegen kopula tek değişkenli bir fonksiyondur ve şöyle gösterilir;

$$D(u) = C(u,u) \quad (4.7)$$

Köşegen kopuların dualı şu şekildedir;

$$D_d(u) = 2u - D(u)$$

X ve Y C kopulasına ve ortak marjinal dağılım fonksiyonuna sahip sürekli rastgele değişkenler olsun. Ancak ve ancak C kopulası köşegen kopula olduğunda $\max(X,Y)$ ve $\min(X,Y)$ 'nin bileşik dağılım fonksiyonu *Fréchet-Hoeffding* üst sınırıdır [34].

7) Bağımsız kopula

İki boyutlu bağımsız kopula Eş. 4.8.'deki gibi yazılabilir.

$$C^{ind}(u,v) = uv \quad (4.8)$$

n-boyutlu bağımsız kopula aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$C^{ind}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i \quad (4.9)$$

8) Comonotonicity ve countermonotonicity kopula

Pozitif tam bağımlılığı ifade eden Comonotonicity kopula bir *Fréchet* üst sınır kopulasıdır.

$$C^{up}(u,v) = \min\{u,v\} \quad (4.10)$$

n-boyutlu comonotonicity kopula Eş. 4.11.'deki gibidir.

$$C^{up}(u_1, \dots, u_n) = \min\{u_1, \dots, u_n\} \quad (4.11)$$

X_1, X_2, \dots, X_d rastgele değişkenleri eğer C^{up} kopulasına sahipse bu değişkenler comonotonic'tir denir.

Negatif tam bağımlılığı ifade eden countermonotonicity kopula 2-boyutlu bir *Fréchet* alt sınır kopulasıdır.

$$C^{lo}(u,v) = \max\{u+v-1, 0\} \quad (4.12)$$

Çok boyutlu comonotonicity kopula olmasına karşın 2 den daha fazla boyutlu countermonotonicity kopula bulunmamaktadır.

Bu kopulaya sahip iki rastgele değişken countermonotonic'tir denir [32].

9) Bir kopulanın yaşam fonksiyonu

Bileşik dağılım fonksiyonu C kopulası olan iki tekdüze rastgele değişkenin bileşik yaşam fonksiyonu \bar{C} ;

$$\bar{C}(u,v) = P[U > u, V > v] = 1 - u - v + C(u,v) \quad (4.13)$$

biçimindedir ve aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$\bar{C}(u,1) = 0, \quad \bar{C}(u,0) = 1.$$

$(1-U, 1-V)$ çiftini kullanarak yaşam fonksiyonu C ile ilişkili olan $C'(u,v)$ kopulası tanımlayabiliriz [19].

$$C'(u,v) = Pr(1-U \leq u, 1-V \leq v) = \bar{C}(1-u, 1-v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v) \quad (4.14)$$

$$\bar{C}'(u,v) = C(1-u, 1-v)$$

4.2. Yaşam Kopulası

Pek çok uygulamada ilgili rastgele değişkenler bir popülasyondaki bireylerin ya da nesnelerin kalan ömrünü gösterir. Bir bireyin x zamanının ötesinde yaşaması ya da

hayatta kalma süresini gösteren fonksiyonlar yaşam fonksiyonlarıdır ve $F(x)$ x 'in dağılım fonksiyonunu olmak üzere, $\bar{F}(x) = 1 - F(x) = P[X > x]$ şeklinde gösterilir. Yaşam süresi ile ilgilenildiği zaman söz konusu rastgele değişkenlerin aralığı $[0, \infty)$ olur. H bileşik dağılım fonksiyonuna sahip (X, Y) rastgele değişken çifti için bileşik yaşam fonksiyonu $\bar{H}(x, y) = P[X > x, Y > y]$ biçimindedir. \bar{H} 'nin marjinleri $\bar{H}(x, -\infty)$ ve $\bar{H}(-\infty, y)$ 'dir ve sırasıyla tek değişkenli yaşam fonksiyonları \bar{F} ve \bar{G} 'dirler. C X ve Y 'nin kopulası olmak üzere aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$\begin{aligned}\bar{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \bar{F}(x) + \bar{G}(y) - 1 + C(1 - \bar{F}(x), 1 - \bar{G}(y))\end{aligned}\tag{4.15}$$

$\hat{C}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ şeklinde tanımlanan fonksiyon yaşam kopulasıdır ve

$$\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v),\tag{4.16}$$

$$\bar{H}(x, y) = \hat{C}(\bar{F}(x), \bar{G}(y))\tag{4.17}$$

olur.

Yaşam kopulası, diğer kopulaların bileşik dağılım fonksiyonuyla marjinlerini birleştirmesi gibi bileşik yaşam fonksiyonunu tek değişkenli marjinlerine bağlar.

Yaşam kopulası \hat{C} ile bileşik dağılım fonksiyonu C kopulası olan iki tekdüze rastgele değişkenin bileşik yaşam fonksiyonu \bar{C} birbirine karıştırılmamalıdır. İki arasındaki ilişki şu şekildedir [34]:

$$\bar{C}(u, v) = P[U > u, V > v] = 1 - u - v + C(u, v) = \hat{C}(1 - u, 1 - v)$$

$$\bar{C}(u, v) = \hat{C}(1 - u, 1 - v)$$

4.3. Sklar Teoremi

Sklar teoremi çok boyutlu dağılım fonksiyonları ile onların marjinal fonksiyonları arasındaki ilişkide kopulaların önemini ortaya koyar.

Marjinalleri F_1, F_2, \dots, F_n olan n -boyutlu F dağılım fonksiyonu verildiğinde $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ olacak biçimde bir kopula vardır ve aşağıdaki gibidir.

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \quad (4.18)$$

Eğer tüm F_1, F_2, \dots, F_n marjinalleri süreklirse tek bir C kopulası vardır; diğer taraftan C $RanF_1 \times \dots \times RanF_n$ de tanımlıdır. $RanF_i$ i marjinalinin değer kümesini gösterir. Bunun aksi de geçerlidir, eğer C n-boyutlu kopula ve F_1, F_2, \dots, F_n dağılım fonksiyonlarıysa yukarıda tanımlanan F fonksiyonu F_1, F_2, \dots, F_n marjinalleriyle bir n-boyutlu dağılım fonksiyonudur [34].

Eş. 4.18. bir bileşik dağılım fonksiyonunun kopula ve n tane tek değişkenli dağılım fonksiyonları kullanılarak gösterimini sunar. Bu eşitlik bir bileşik dağılım fonksiyonu ve n tane marjinalin tersleri yardımıyla kopula elde edilmesini sağlayacak şekilde de kullanılabilir. Ancak bunun yapılabilmesi için marjinalin tam artan olması ve dolayısıyla tersinin alınabiliyor olması gerekir. Bu sebeple dağılım fonksiyonlarının yarı ters olmasının ne anlama geldiğine göz atmak gerekir.

$[0,1]$ 'de tanımlı herhangi bir F dağılım fonksiyonunun yarı tersi $F^{(-1)}$ ile gösterilir. Buradan aşağıdaki koşullarla Eş. 4.19. ve Eş. 4.20. elde edilir [34].

1) Eğer $t \in RanF$ de yer alıyorsa $F^{(-1)}(t)$, $F(x) = t$ olacak biçimde \bar{R} 'de

($\bar{R} = [-\infty, \infty]$ genişletilmiş gerçel doğru (extended real line)) herhangi bir x değerini alır ($RanF$ 'deki tüm t 'ler için).

$$F(F^{(-1)}(t)) = t \quad (4.19)$$

2) Eğer $t \in RanF$ 'de değilse

$$F^{(-1)}(t) = \inf \{x | F(x) \geq t\} = \sup \{x | F(x) \leq t\} \text{ olur.} \quad (4.20)$$

Eş. 4.20.'de yer alan \inf (infimum): bir kümenin elemanlarını alttan sınırlayan sınırların en büyüğü, \sup (supremum): bir kümenin elemanlarını üstten sınırlayan sınırların en küçüğüdür.

F tam artan bir fonksiyonsa tersi vardır ve tektir ve F^{-1} ile gösterilir. Bu durumda Eş. 4.18.'den Eş. 4.21. rahatlıkla elde edilebilir.

$[0,1]^n$ de tanımlı herhangi (u_1, u_2, \dots, u_n) için F_1, F_2, \dots, F_n marjinalleriyle çok değişkenli F dağılım fonksiyonu verildiğinde

$$C(u_1, \dots, u_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_1^{-1}(u_n)) \quad (4.21)$$

n-boyutlu kopuladır [35].

4.4. Değişmezlik Teoremi

Eğer X_1, X_2, \dots, X_n C kopulasına sahipse Y_i, X_i 'nin artan fonksiyonu olmak koşuluyla $Y_1 = h_1(X_1), \dots, Y_n = h_n(X_n)$ aynı C kopulasına sahiptir.

$$C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = C(h_1(F_1(x_1)), \dots, h_n(F_n(x_n))) \quad (4.22)$$

Değişmezlik teoreminden görülebileceği gibi kopulalar rastgele değişkenlerin doğrusal olmayan dönüşümlerinden etkilenmemektedir [31].

4.5. Fréchet-Hoeffding Sınırları

$[0,1] \times [0,1]$ deki her (u, v) çifti için herhangi bir C kopulası aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$W(u, v) = \max(u+v-1, 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v) = M(u, v) \quad (4.23)$$

Bu eşitsizlikte alt ve üst sınırı ifade eden $W(u, v) = \max(u+v-1, 0)$ ve $\min(u, v) = M(u, v)$ birer kopuladır. $M(u, v)$ Fréchet-Hoeffding Üst Sınırı; $W(u, v)$ Fréchet-Hoeffding Alt Sınıridir.

Sklar teoreminden yola çıkarak H bileşik dağılım fonksiyonuna sahip, marjinalleri sırasıyla F ve G olan X ve Y rastgele değişkenleri için \bar{R} deki her (x, y) çifti için bu sınırlar şu şekildedir:

$$\max(F(x) + G(y) - 1, 0) \leq \min(F(x), G(y))$$

Bu sınırlar iki-boyutlu yerine n-boyutlu kopulalar için yazılacak olunursa gösterim şu şekilde değişir:

Tüm $u_1, u_2, \dots, u_n \in [0,1]$ için n-boyutlu bir kopulanın Fréchet-Hoeffding Sınırları:

$$\max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0) \leq C(u_1, \dots, u_n) \leq \min(u_1, \dots, u_n) \text{ biçiminde gösterilir.}$$

Teorem 4.1.

X ve Y, C_{XY} kopulasına sahip sürekli rastgele değişkenler olsun. f ve g sırasıyla $Ran(X)$ ve $Ran(Y)$ de tanımlı kesin monoton (strictly monotone functions) fonksiyonlar olsun.

- Eğer f ve g kesin artansa, $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = C_{XY}(u,v)$
 - Eğer f kesin artan g kesin azalansa, $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = u - C_{XY}(u,1-v)$
 - Eğer f kesin azalan g kesin artansa, $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = v - C_{XY}(1-u,v)$
 - Eğer f ve g kesin azalansa, $C_{f(X),g(Y)}(u,v) = u + v - 1 + C_{XY}(1-u,1-v)$
- olur [41].

4.6. Bazı Önemli Kopula Aileleri

Tezin bu kısmında literatürde adı sıkça geçen ve ileriki bölümlerde bağımlılık yapılarını modellemek için kullanılan önemli kopula ailelerinden bahsedilmektedir.

4.6.1. Eliptik Kopulalar

Eliptik kopulalar çok değişkenli eliptik dağılımlardan türemişlerdir. İçlerinde en önemlileri sırasıyla t-kopula ve normal kopula olarak da anılan Student kopula ve Gaussian kopuladır. İkisi arasında karşılaştırma yapılmak istenirse merkez kısımlarında oldukça benzer ve Student kopulanın serbestlik derecesi arttıkça da kuyruk bölgesinde de birbirlerine benzer oldukları görülür. Sonuç olarak bazen duyarlılık testleri kullanılmasına rağmen aralarında ayırım yapmak zordur ama yine de uç noktalar arasındaki bağımlılıklar açısından oldukça farklı davranışlara sahiptirler.

Eliptik kopulalar sayısal olarak kolayca sentezlenebilir bu da onları sayısal benzetimler ve senaryo çalışmaları açısından kullanışlı kılar. Böyle kolayca sentezlenebiliyor olmalarının nedeni değişkenlerin uygun monoton değişimleri ile kopulanın değişmezliğini korurken doğru marjinal dağılımlar veren Gaussian ve t dağılımlı rastgele değişkenlerin kolayca üretilmesinden ileri gelir [31].

4.6.1.1. Gaussian Kopula

Gaussian kopula çok değişkenli Gaussian dağılımdan türemiştir. Φ standart normal birikimli dağılım ve $\Phi_{\rho,n}$ korelasyon matrisi ρ ile n-boyutlu standart Gaussian dağılım olsun. Öyleyse korelasyon matrisi ρ ile Gaussian n-kopula şöyle gösterilir:

$$C_{\rho,n}^{Gauss}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_{\rho,n}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \quad (4.24)$$

ve yoğunluk fonksiyonu da Eş.4.25.'deki gibidir.

$$\begin{aligned}
c_{\rho,n}^{Gauss}(u_1,\dots,u_n) &= \frac{\partial C_{\rho,n}^{Gauss}(u_1,\dots,u_n)}{\partial u_1 \dots \partial u_n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \exp\left(-\frac{1}{2} y^t(u)(\rho^{-1} - I_d)y(u)\right)
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Bu eşitlikte $y^t(u) = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$ 'dir, I_d birim matristir ve $|\cdot|$ determinant gösterir. Gaussian kopular korelasyon matrisleri yardımıyla tamamen elde edilebilir [31].

Bağımsız ve comonotonicity kopular Gaussian kopuların özel bir biçimidir. Eğer $\rho = I_d$ olursa bağımsız kopula elde edilir, $\rho = J_d$ olursa comonotonicity kopula elde edilir. J_d her elemanı 1 olan $d \times d$ 'lik matristir.

4.6.1.2. T- Kopula

T-kopula çok değişkenli Student dağılımdan türemiştir. v serbestlik derecesi ve ρ korelasyon matrisiyle n -boyutlu bir $T_{n,\rho,v}$ Student dağılımı verilsin.

$$T_{n,\rho,v}(x) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right) (\pi v)^{n/2}} \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} \frac{dx}{\left(1 + \frac{x^t \rho^{-1} x}{v}\right)^{\frac{v+n}{2}}} \tag{4.26}$$

Bu durumda ilgili t-kopula Eş. 4.27.'deki gibidir.

$$C_{n,\rho,v}^t(u_1,\dots,u_n) = T_{n,\rho,v}(T_v^{-1}(u_1), \dots, T_v^{-1}(u_n)) \tag{4.27}$$

t-kopuların yoğunluğu ise Eş. 4.28.'deki gibidir

$$c_{n,\rho,v}^t(u_1,\dots,u_n) = \frac{1}{\sqrt{|\rho|}} \frac{\Gamma\left(\frac{v+n}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\right]^{n-1}}{\left[\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)\right]^n} \frac{\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{y_k^2}{v}\right)^{\frac{v+1}{2}}}{\left(1 + \frac{y^t \rho^{-1} y}{v}\right)^{\frac{v+n}{2}}} \tag{4.28}$$

$$y^t = (T_v^{-1}(u_1), \dots, T_v^{-1}(u_n))$$

Student dağılımı normal dağılıma yakınsadığı için serbestlik derecesi v sonsuza gittikçe Student kopula Gaussian kopulaya yakınsar. Gaussian kopulada olduğu gibi $\rho = J_d$ olursa comonotonicity elde edilir ancak $\rho = I_d$ olduğunda bağımsız kopula elde edilemez çünkü korelasyonsuz çok değişkenli t dağılımlı rastgele değişkenler bağımsız değildir.

4.6.2. Arşimed Kopulalar

Arşimed kopula ailesi çok önemli ve bazı temel nedenlerden dolayı çok kullanışlı bir kopula sınıfıdır. Bu temel sebepler; arşimed kopulaların kolay inşa edilebilir olması, bu sınıfa mensup çok sayıda kopula olması, bu kopulaların çok sayıda faydalı özelliklere sahip olması ve özellikle sigorta alanındaki farklı ve çeşitli bağımlılık yapılarını modellemek için kullanılabilir olmasıdır.

4.6.2.1. İki Değişkenli Arşimed Kopulalar

İki değişkenli bir arşimed kopula için genel gösterim şu şekildedir:

$$C(u, v) = \phi^{-1}(\phi(u) + \phi(v)).$$

Denklemden $0 \leq u, v \leq 1$ olacak şekildedir ve ϕ üretici fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

- $\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$,
- $\phi(0) = \infty, \phi(1) = 0$,
- tüm $t \in (0, 1)$ için $\phi'(t) < 0$ olur ve böylece ϕ azalandır,
- tüm $t \in (0, 1)$ için $\phi''(t) \geq 0$ olur ve böylece ϕ konvektir.

Eğer üretici fonksiyon ϕ için $\phi(0) = \infty$ olmazsa o zaman arşimed kopula üretimi için ϕ yerine ϕ 'nin sözde tersi (*pseudo-inverse*) kullanılır.

ϕ 'nin sözde tersi

$\phi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ sürekli ve kesin azalan bir fonksiyon ve $\phi(0) \leq \infty, \phi(1) = 0$ olmak üzere $\phi^{[-1]}(t)$ üretici fonksiyonun sözde tersidir ve Eş. 4.29.'daki gibi ifade edilir.

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0, & t \geq \phi(0) \end{cases} \quad (4.29)$$

Sözde ters aşağıdaki özelliklere sahiptir.

$$Dom\phi^{[-1]} = [0, \infty]$$

$$Ran\phi^{[-1]} = [0, 1]$$

$\phi^{[-1]}$ sürekli ve $[0, \infty]$ aralığında artmayan ve $[0, \phi(0)]$ aralığında kesin azalandır.

Ayrıca $[0, 1]$ aralığında $\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u$ olur.

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)).\end{aligned}$$

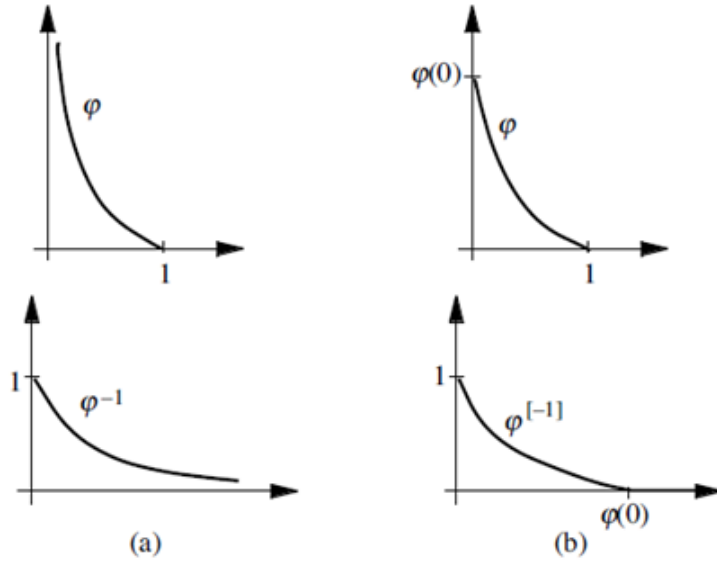
Son olarak, eğer $\varphi(0) = \infty$ ise $\varphi^{-1} = \varphi^{[-1]}$ olur [34].

Bu koşullar altında iki değişkenli arşimed kopula Eş. 4.30'deki gibi olur.

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \quad (4.30)$$

Tüm bu bilgilere dayanarak arşimed kopula üretici fonksiyon için bir tanım yazmak istenilirse;

$\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\varphi(1) = 0$ olmak üzere sürekli, kesin azalan ve konveks bir fonksiyondur ve $\varphi(0) = \infty$ olması durumunda da tam üreticidir (strict generator). φ tam üretici olduğunda $\varphi^{-1} = \varphi^{[-1]}$ olur ve $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ tam arşimed kopuladır.



Şekil 4.1. Tam (a) ve kısmi (b) üreticiler ve tersleri [34]

Eğer C φ üreticisi ile bir arşimed kopula ise;

- tüm $u, v \in [0, 1]$ için C simetriktir,
 $C(u, v) = C(v, u)$
- tüm $u, v, w \in [0, 1]$ için C değiştirilebilirdir,
 $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$
- c sıfırdan büyük bir sabit olmak üzere $c\varphi$ 'da C 'nin bir üreticisidir.

En kullanışlı ve yaygın arşimed kopulalardan bazıları şunlardır:

Clayton Kopula; bir limit kopulası rolü oynar.

$$C_{\theta}^{Cl}(u, v) = \max\left(\left[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1\right]^{-1/\theta}, 0\right), \quad \theta \in [-1, \infty]$$

üretici fonksiyon $\varphi(t) = \frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$ ile.

$\theta = -1$ olduğunda Clayton kopula $W(u, v)$ Fréchet-Hoeffding alt sınırına eşit olur.

Gumbel Kopula; Malevergne ve Sornette'nin [31] kitabında yer alan uç değer teoremini kullanarak bağımlılık tanımında özel bir rol oynar.

$$C_{\theta}^G(u, v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^{\theta} + (-\ln v)^{\theta}\right]^{1/\theta}\right), \quad \theta \in [1, \infty] \quad (4.31)$$

üretici fonksiyon $\varphi(t) = (-\ln t)^{\theta}$ ile.

Frank Kopula;

$$C_{\theta}^F(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right), \quad \theta \in \mathbb{R} \quad (4.32)$$

üretici fonksiyon $\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$ ile.

Çizelge 4.1. Arşimed kopulaların üretici fonksiyonları

<i>Kopula</i>	<i>Üretici fonksiyon</i>	<i>Parametre aralığı</i>
Clayton	$\frac{t^{-\theta} - 1}{\theta}$	$\theta \geq -1$
Gumbel	$(-\ln t)^{\theta}$	$\theta \geq 1$
Frank	$-\ln \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}$	$\theta \in \mathbb{R}$

Kaynak: McNeil, Frey ve Embrechts [36] Tablo 5.4.

Çizelge 4.2. Arşimed kopuların kuyruk bağımlılık katsayıları ve Kendall'in tau korelasyon katsayıları

Kopula	τ	λ_U	λ_L
Clayton	$\theta/(\theta+2)$	0	$\begin{cases} 2^{-1/\theta} & \theta > 0 \\ 0 & \theta \leq 0 \end{cases}$
Gumbel	$1-1/\theta$	$2-2^{1/\theta}$	0
Frank	$1-4\theta^{-1}(1-D_1(\theta))$	0	0

Kaynak: McNeil, Frey ve Embrechts [36] Tablo 5.5.

Çizelge 4.2.'de yer alan $D_1(\theta)$ debye fonksiyonudur ve açılımı,

$$D_1(\theta) = \theta^{-1} \int_0^\theta t / (\exp(t) - 1) dt \text{ şeklindedir.}$$

4.6.2.2. Çok Değişkenli Arşimed Kopular

Yukarıda söz edilen tüm arşimed kopula türleri ve formülasyonları 2 boyutludur. $n > 2$ olması durumunda kopular çok değişkenli (çok boyutlu) olarak adlandırılırlar.

Çok değişkenli bir arşimed kopula için genel gösterim şu şekildedir:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{[-1]}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n)).$$

Bu yapı keyfi olarak seçilmiş n-boyut için düzgün bir dağılım fonksiyonu tanımlamakta başarısız olabilir. Örneğin tam üretici olamayan bir $\varphi(t) = 1-t$ üreticisi seçilirse böyle bir durum ortaya çıkabilir. Böyle bir durumda $n > 2$ olan kopular için kendisi bir kopula olmayan Fréchet alt sınırını elde edilir. n-boyutlu bir yapı söz konusu olduğunda tüm boyutlarda başarılı olmak için gerekli koşul şudur; φ tam Arşimed kopula üreticisi olmalıdır ancak bu yeter koşul değildir.

Eğer $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ tam Arşimed kopula üreticisi olmak üzere

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_n) &= \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) \\ &= \varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \varphi(u_i)\right) \quad u_1, u_2, \dots, u_n \in [0,1] \end{aligned} \tag{4.33}$$

Teorem 4.2.

$\varphi [0,1] \rightarrow [0,\infty]$ sürekli kesin azalan bir fonksiyon, $\varphi(0)=\infty$, $\varphi(1)=0$ ve φ^{-1} de φ fonksiyonunun tersi için kullanılıyorken, $C^n [0,1]^n \rightarrow [0,1]^n$ 'de tanımlı bir fonksiyon olsun. Ancak ve ancak $\varphi^{-1} [0,\infty)$ 'da tam monoton olduğunda C^n $n \geq 2$ için n boyutlu bir kopula ifade eder [34].

Azalan bir $f(t)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında aşağıdaki koşulu sağladığında tam monotondur:

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} f(t) \geq 0, \quad k \in N, \quad t \in (a,b).$$

Yukarıda bahsedilen tüm kopulalar $[0,\infty]$ aralığında tam monoton terslere sahiptir (Clayton Kopula için $\theta \geq 0$ olacak şekilde sınırlandırmak gerek) ve hepsi Eş. 4.31. kullanılarak istenen boyuta genişletilebilir. Örneğin n-boyutlu bir Clayton kopula ve n-boyutlu bir Frank kopula şu şekilde ifade edilebilir:

$$C_{\theta}^{Cl}(u) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1)^{-1/\theta}, \quad \theta > 0, \quad \text{n- boyutlu Clayton kopula,}$$

$$C_{\theta}^F(u) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1)(e^{-\theta u_2} - 1) \dots (e^{-\theta u_n} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right) \quad \theta > 0 \quad \text{n- boyutlu Frank kopula.}$$

Kopulaları yüksek boyutlara genişletmenin bir başka yolu da Laplace-Stieltjes dönüşümleridir ancak tezde kullanılmamıştır.

4.7. Değiştirilebilirlik ve Değiştirilebilir Kopulalar

$(1, \dots, d)$ nin her hangi bir $(\Pi(1), \dots, \Pi(d))$ permütasyonu için eğer

$(X_1, \dots, X_d) \stackrel{d}{=} (X_{\Pi(1)}, \dots, X_{\Pi(d)})$ eşitliği sağlanırsa rastgele vektör X değiştirilebilirdir denir.

Eğer bir kopula, tekdüze değişkenler U 'nun değiştirilebilir rastgele vektörünün dağılım fonksiyonuysa bu kopula bir değiştirilebilir kopuladır. C 'nin tüm parametrelerinin muhtemel permütasyonları için aşağıdaki eşitlik yazılabilir.

$$C(u_1, \dots, u_d) = C(u_{\Pi(1)}, \dots, u_{\Pi(d)}) \quad (4.34)$$

Bu kopulalar kredi riskinde şirketlerin homojen grupları için varsayımlar arasındaki bağımlılığı modellemede oldukça kullanışlıdır.

Değiştirilebilir kopula örnekleri Gaussian, t-kopula, Gumbel ve Clayton gibi kopulaları içerir. Örneğin C_p^{Ga} kopula için P bir eş korelasyon matrisidir. Şöyle ki $P = \rho J_d + (1 - \rho)I_d$ olacak biçimde J_d tüm elemanları bir olan kare matristir ve $\rho \geq -1/(d-1)$ olur.

(U_1, U_2) vektörünün dağılım fonksiyonu değiştirilebilir iki değişkenli bir kopula ise

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = P(U_1 \leq u_1 | U_2 = u_2)$$

olur. Bu eşitlik güçlü bir simetri gösterir. Şöyle ki eğer bir (X_1, X_2) rastgele vektörü böyle bir kopulaya sahipse X_1 'in u_1 yüzdeliğine ulaştığı bilindiğinde X_2 'nin kendi u_2 yüzdeliğini aşması olasılığı, X_2 'nin kendi u_1 yüzdeliğine ulaştığı bilindiğinde X_1 'in u_2 yüzdeliğini aşması olasılığıyla tamamen aynıdır.

Bu denklem Eş. 4.34 ve kopulaların koşullu dağılımından gelmektedir [36].

Kopulaların koşullu dağılımı:

İki boyutlu bir kopuladan ve kopulaların sürekli artan fonksiyonlar olması savından yola çıkarak kopulaların koşullu dağılım fonksiyonu şu şekilde gösterilir :

$$\begin{aligned} C_{U_2|U_1}(u_2 | u_1) &= P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{C(u_1 + \delta, u_2) - C(u_1, u_2)}{\delta} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) \end{aligned} \quad (4.35)$$

4.8. Değiştirilemeyen Arşimed Kopulalar

Eş. 4.33.'den elde edilen bir kopula apaçık Eş. 4.34.'e uygun bir değiştirilebilir kopuladır. Değiştirilebilir iki değişkenli arşimed kopulalar modelleme uygulamalarında genişçe kullanılmalarına rağmen değiştirilebilir çok değişkenli uzantıları bağımlılık yapılarının oldukça kısıtlı bir formunu sunar ve daha sınırlı uygulamalara sahiptir. Değiştirilemez çok boyutlu arşimed kopulaları üretmek için değiştirilebilir iki boyutlu marjinaler ve arşimed kopula üreticileri ile tersleri kullanılır. Bu işlem yapılırken üreticilerin geçerli çok değişkenli dağılımlar meydana getirip getirmediğinin kontrol edilmesi önemli ve bir o kadar da zordur. Bu durum 3 ve 4 boyutlu değiştirilemez arşimed kopulaların oluşumu incelenerek anlaşılabilir.

4.8.1. 3-Boyutlu Değiştirilemeyen Arşimed Kopulalar

φ_1 ve φ_2 iki tam arşimed üretici olmak üzere

$$C(u_1, u_2, u_3) = \varphi_2^{-1} \left(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} (\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2)) + \varphi_2(u_3) \right) \quad (4.36)$$

ifadesi, üreticilerin tersi φ_1^{-1} ve φ_2^{-1} tam monoton azalan fonksiyonlar ve bileşke fonksiyon $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : [0, \infty] \rightarrow [0, \infty]$ tam monoton artan fonksiyon olmak üzere bir kopula gösterir.

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$ olursa eğer tam değiştirilebilirlik durumu söz konusu olur. Eğer $\varphi_1 \neq \varphi_2$ ise (U_1, U_2, U_3) Eş. 4.36.'da verilen dağılım fonksiyonu ile rastgele bir vektördür ise sadece U_1 ve U_2 değiştirilebilirdir; şöyle ki $(U_1, U_2, U_3) =_d (U_2, U_1, U_3)$ olabilir ama diğer alt indislerin değiş tokuşu mümkün değildir. Eş. 4.36.'nın tüm iki değişkenli marjinleri birer arşimed kopuladır. C_{13} ve C_{23} 'ün üreticileri φ_2 ve C_{12} 'nin üreticisi φ_1 'dir.

4.8.2. 4-Boyutlu Değiştirilemeyen Arşimed Kopulalar

Muhtemel bir 4-boyutlu yapı şöyledir

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = \varphi_3^{-1} (\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1} (\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2)) + \varphi_3 \circ \varphi_2^{-1} (\varphi_2(u_3) + \varphi_2(u_4))) \quad (4.37)$$

φ_1 , φ_2 ve φ_3 üç ayrı tam arşimed üreticilerdir ve terslerinin ve $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ ve $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$ bileşke fonksiyonlarının uygun bir dağılım fonksiyonu elde etmek için tam monoton olduğunu varsayınız. Yukarıda kurulan eşitlik muhtemel tek dört boyutlu yapı değildir ancak bu yapı oldukça kullanışlıdır çünkü iki değiştirilebilir grup içerir. Eğer (U_1, U_2, U_3, U_4) Eş. 4.37.'deki yapıya sahipse U_1 ve U_2 değiştirilebilirdir, U_3 ve U_4 'de öyledir.

Bu yapılar 3-boyutlu ve 4-boyutlu yerine daha yüksek boyutlu yapılara genişletilebilir.

5. KOPULALI DİNAMİK FİNANSAL ANALİZ MODELİ

5.1. Modelde Kullanılan Kopula Yapısı

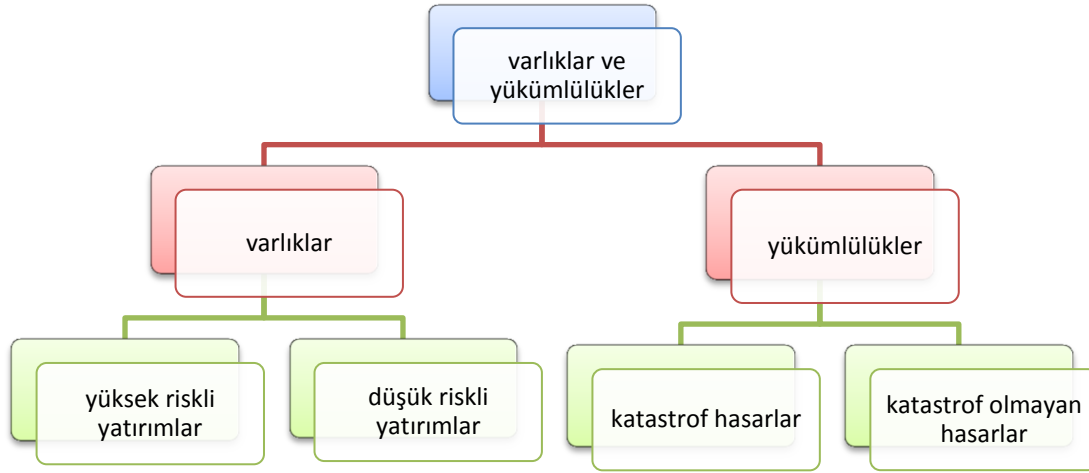
Bu bölümde Bölüm 2’de söz edilen DFA model yapısı içerisinde kopula kavramının nasıl yer aldığı anlatılmaktadır. Öncelikle risk kategorileri arasındaki bağımlılık modellenmiştir. Daha önceki bölümlerde de bahsedildiği üzere bu bağımlılıkların doğrusal olmaması nedeniyle kopulalar kullanılmaktadır.

Tezde yapılan birinci benzetim çalışmasında farklı varlık sınıfları (yüksek riskli yatırımlar ile düşük riskli yatırımlar) arasında bir bağımlılık, farklı tür yükümlülükler (katastrof hasarlar ile katastrof olmayan hasarlar) arasında bir bağımlılık ve yükümlülükler ile varlıklar arasında bir bağımlılık vardır. Tüm bu bağımlılıklar yardımıyla birbiriyle ilişkili rastgele sayılar üretilerek DFA modeline dahil edilir.

Kopulaların kullanımında büyük kolaylık sağlayan, tek düze dönüşümler altında sabit kalan ve marjinal dağılımlardan etkilenmeyen sıra korelasyon ölçümü olan Kendall’ın Tau korelasyon katsayısını kullanıyoruz.

Tezde tüm bu bağımlılıklar için tek bir kopula kullanmak yerine farklı kopulalar kullanılarak bunların etkisi incelenmiştir. Kullanılan kopulalar Gauss kopula, t-kopula ve 3 tane değiştirilemeyen arşimed kopula (Gumbel, Clayton, Frank) ile bunların yaşam kopulalarıdır. Bu kopulalar hayat dışı sigorta şirketleri için kullanıma uygun, pratik, teknik açıdan da ölçümlendirilmesi kolay kopulalardır. Ayrıca bu kopulaların bazıları alt kuyruk bağımlılığı, bazıları üst kuyruk bağımlılığı gösterir ve bazıları ise kuyruk bağımlılığı göstermez. Böylece kuyruk bağımlılığı konusunda da bir çeşitlendirmeye sahip olunmuştur.

Toplamda 4 farklı risk kategorisi arasındaki bağımlılık inceleneceği için çok boyutlu kopulalardan yararlanılmıştır. Eling ve Toplek’in [6] çalışmaları doğrultusunda oluşturulan Şekil 5.1 bağımlılık yapısını göstermektedir.



Şekil 5.1. Birinci uygulamanın bağımlılık yapısı

Modelde kullanılan 4 boyutlu Gauss kopula aşağıdaki gibidir;

$$C_{\rho,4}^{Gauss}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Phi_{\rho,4}(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2), \Phi^{-1}(u_3), \Phi^{-1}(u_4)) \quad (5.1)$$

Eşitlikte Φ standart tek değişkenli normal birikimli dağılımı, $\Phi_{\rho,4}$ korelasyon matrisi ρ ile 4 boyutlu bir Gaussian vektör $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ 'nun bileşik birikimli dağılım fonksiyonunu ifade eder. Gauss kopula kuyruk bağımlılığı göstermez ve çok değişkenli Gaussian dağılımdan türemiştir.

Modelde kullanılan 4 boyutlu t-kopula aşağıdaki gibidir;

$$C_{4,\rho,v}^t(u_1, u_2, u_3, u_4) = T_{4,\rho,v}(T_v^{-1}(u_1), T_v^{-1}(u_2), T_v^{-1}(u_3), T_v^{-1}(u_4)) \quad (5.2)$$

Eşitlikte T_v v serbestlik derecesiyle standart tek değişkenli t dağılımının birikimli dağılım fonksiyonunu, $T_{4,\rho,v}$ korelasyon matrisi ρ ve v serbestlik derecesi ile 4-boyutlu bir vektörün bileşik t dağılımının birikimli dağılım fonksiyonunu ifade eder. T-kopula üst ve alt kuyruk bağımlılığı gösterir ve çok değişkenli Student dağılımdan türemiştir.

Kopulalı yapıda Kendall'in tau katsayısı kullanılmıştır. Gauss ve t kopulalar yardımıyla rastgele bağımlı sayılar üretirken doğrusal korelasyon katsayısına ihtiyaç vardır. Kendall'in tau katsayısı ve doğrusal korelasyon katsayısı arasındaki ilişki;

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho) \quad \text{şeklindedir [36].}$$

Modelde kullanılan Arşimed kopulalar incelenmelidir. Arşimed kopulalar üretici fonksiyonlar ile kolayca üretilebilir ve kullanılan Arşimed kopulalar farklı kuyruk bağımlılıkları göstermektedir. Gumbel kopula üst kuyruk bağımlılığı, Clayton kopula alt kuyruk bağımlılığı gösterir ve Frank kopula kuyruk bağımlılığı göstermez. Bu sebeple Gumbel kopula ile Clayton kopulunun yaşam kopulaları da incelenmiş ancak kuyruk bağımlılığı açısından Frank kopulayla simetri göstereceği için Frank yaşam kopulası incelenmemiştir. Gumbel yaşam kopulası alt kuyruk ve Clayton yaşam kopulası ise üst kuyruk bağımlılığı gösterecektir. Bu kopulaların üretici fonksiyonları ve Kendall'ın tau katsayısı değerleri Bölüm 4'de Çizelge 4.1. ve Çizelge 4.2.'de gösterilmiştir. Yaşam kopulalarının Kendall'ın tau katsayısı değerleri, kuyruk bağımlılıkları ve parametre aralıkları aşağıdadır.

Çizelge 5.1. Clayton yaşam ve Gumbel yaşam kopulalarının kuyruk bağımlılık katsayıları, Kendall'ın tau katsayıları ve parametre aralıkları

Kopula	τ	λ_U	λ_L	Parametre aralığı
Clayton Yaşam	$\theta/(\theta + 2)$	$\begin{cases} 2^{-1/\theta} & \theta > 0 \\ 0 & \theta \leq 0 \end{cases}$	0	$\theta \geq -1$
Gumbel Yaşam	$1 - 1/\theta$	0	$2 - 2^{1/\theta}$	$\theta \geq 1$

Arşimed kopulalar Kendall'ın tau değeri ile korelasyon parametresi θ arasındaki ilişkiyi yararlanılarak üretilebilir.

Arşimed kopulalar hem değiştirilebilir hem de değiştirilemeyen bir yapıyla oluşturulabilir, ancak değiştirilebilir arşimed kopulalar bağımlılık yapısında özellikle çok değişkenli durumda kısıtlayıcıdır. Bu çalışmada hem varlıkları hem de yükümlülükleri içeren bir bağımlılık yapısı incelenmiştir ve bu iki grup birbiriyle homojen değildir dolayısıyla 4 boyutlu değiştirilemeyen yapı kullanılmıştır.

Modelde kullanılan 4 boyutlu değiştirilemeyen Arşimed kopula Eş. 5.3.'deki gibidir.

$$C(u_1, u_2, u_3, u_4) = \varphi_3^{-1} \left(\varphi_3 \circ \underbrace{\varphi_1^{-1}(\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2))}_{\text{yüksek riskli ve düşük riskli yatırımlar}} + \varphi_3 \circ \underbrace{\varphi_2^{-1}(\varphi_2(u_3) + \varphi_2(u_4))}_{\text{katasrof olmayan ve katasrof hasarlar}} \right) \quad (5.3)$$

φ_1 yüksek riskli yatırımlar ile düşük riskli yatırımlar arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılan üretici fonksiyondur ve θ_1 bu fonksiyonun ilgili parametresi ve τ_1 ilgili Kendall'ın tau değeridir.

φ_2 katastrof hasarlar ile katastrof olmayan hasarlar arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılan üretici fonksiyondur ve θ_2 bu fonksiyonun ilgili parametresi ve τ_2 ilgili Kendall'ın tau değeridir.

φ_3 varlıklarla yükümlülükler arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılan üretici fonksiyondur ve θ_3 bu fonksiyonun ilgili parametresi ve τ_3 ilgili Kendall'ın tau değeridir.

Daha farklı 4 boyutlu değiştirilemeyen yapılar da kullanılabilir ancak bu 4-boyutlu değiştirilemeyen yapı kendi içinde iki tane değiştirilebilir grubu içerir ve oldukça kullanışlıdır. Aynı zamanda bu yapı tamamen monoton terslere ve $\varphi_3 \circ \varphi_1^{-1}$ ve $\varphi_3 \circ \varphi_2^{-1}$ bileşke fonksiyonlarına sahip üç tam arşimed üretici içeriyor.

Bağımlılıklar incelenirken yukarıdaki 4-boyutlu değiştirilemeyen yapıdaki üç üretici fonksiyonun her biri için ayrı ayrı kopulalar seçilebilir. Örneğin üretici fonksiyonlardan biri Clayton diğeri Frank ve bir diğeri de Gumbel kopula olabilir. Ancak kuyruk bağımlılıklarının farklı türlerinin saf etkisini görebilmek için bu üç üretici fonksiyon için de aynı kopula üzerinde çalışılmıştır.

5.2. Risk, Getiri ve Performansın Ölçümü

DFA modeline kopulalar yardımıyla bağımlılıkları ekledikten sonra yapılacak benzetim sonucu elde edilen değerlerin risk, getiri ve performans ölçümü için Çizelge 5.2.'deki finansal rasyolar kullanılmıştır [1].

Çizelge 5.2. Finansal rasyolar

	<i>Sembol</i>	<i>Ölçüm</i>	<i>Açıklama</i>
Getiri	$E(G)$	yıllık beklenen kazanç	mutlak getiri
Risk	$\sigma(G)$	yıllık kazancın standart sapması	toplam risk
	RP	iflas olasılığı	aşağı yönlü risk
	EPD	beklenen poliçeli açığı	aşağı yönlü risk
Performans	SR_{σ}	sharpe oranı	getiri/toplam risk
	SR_{RP}	değiştirilmiş sharpe oranı (RP)	getiri/aşağı yönlü risk
	SR_{EPD}	değiştirilmiş sharpe oranı (EPD)	getiri/aşağı yönlü risk

Getiri ölçümü olarak yıllık beklenen kazanç ele alındı. Başlangıç zamanından T zamanına kadar beklenen kazanç; $E(EC_T) - EC_0$ 'dır. Bu durumda yıllık beklenen kazanç $E(G)$ aşağıdaki gibi olur.

$$E(G) = \frac{E(EC_T) - EC_0}{T} \quad (5.4)$$

Risk ölçümü olarak yıllık kazancın standart sapması, iflas olasılığı ve beklenen poliçeli açığı ele alınmıştır. Yıllık kazancın standart sapması $\sigma(G)$ beklenen değerden tüm pozitif ve negatif sapmaları hesaba katar ve toplam riskin bir ölçümüdür.

$$\sigma(G) = \frac{\sigma(EC_T)}{T} \quad (5.5)$$

Buna ek olarak sigorta sektöründe risk genellikle iflas olasılığı (RP) gibi ya da beklenen poliçeli açığı (EPD) gibi aşağı yönlü risk ölçümleriyle de ölçülür. Toplam risk ölçümlerine benzemeyen aşağı yönlü risk ölçümleri sadece belirli bir eşikten negatif sapmalar durumunda hesaba katılır. Bu açıdan iflas olasılığı şöyle hesaplanabilir;

$$RP = \Pr(\hat{t} \leq T) \quad (5.6)$$

$\hat{t} = \inf\{t > 0; EC_t < 0\}$ $t = 1, 2, \dots, T$ iflasın ilk kez ortaya çıkması olayını gösterir.

Kesikli zaman analizlerinde iflas olasılığı sürekli zaman analizlerinde olduğundan daha düşük değerlerle sonuçlanacaktır [42]. Buna ek olarak iflas problemlerinin kapalı formlarının çözümüne çok kısıtlayıcı durumlar altında ulaşılabilir [43]. Dolayısıyla daha karmaşık modeller için analitik veya sayısal yaklaşımlar gereklidir.

İflas olasılığında borcunu ödeyememe durumu veya paranın zaman değeri göz önünde bulundurulmaz. Bu sebeple bir başka risk ölçümü olan beklenen poliçeli açığı da incelenmektedir. Beklenen poliçeli açığı Eş. 5.7.'deki gibidir.

$$EPD = \sum_{t=1}^T E[\max(-EC_T, 0)](1+r_f)^{-t} \quad (5.7)$$

Burada r_f risksiz getiri oranıdır.

Performans ölçümü olarak sharpe oranı, beklenen poliçeli açığına göre değiştirilmiş sharpe oranı ve iflas olasılığına göre değiştirilmiş sharpe oranı kullanılmaktadır.

Sharpe oranı SR_σ en yaygın kullanılan ve iyi bilinen bir performans ölçümüdür ve getirilerin standart sapmasıyla risk primi (risksiz faiz oranı üzerindeki beklenen getiri fazlası) arasındaki ilişkiyi ölçer [44] :

$$SR_\sigma = \frac{E(EC_T) - EC_0 \cdot (1+r_f)^T}{\sigma(EC_T)} \quad (5.8)$$

Sharpe oranının payında, öz sermayenin T anındaki beklenen değeriyle risksiz getiri arasındaki fark yer almaktadır.

Standart sapmayı bir risk ölçümü olarak kullanıldığında, Sharpe oranı aynı zamanda beklenen değere ilişkin getirilerin pozitif sapmalarını da ölçümler.

Genellikle risk aşağı yönlü ölçümlerle hesaplandığından iflas olasılığı veya EPD Sharpe oranının paydasında kullanılabilir. Böylece beklenen poliçeli açığına göre değiştirilmiş sharpe oranı ve iflas olasılığına göre değiştirilmiş sharpe oranı elde edilir.

$$SR_{RP} = \frac{E(EC_T) - EC_0 \cdot (1+r_f)^T}{RP}, \quad (5.9)$$

$$SR_{EPD} = \frac{E(EC_T) - EC_0 \cdot (1+r_f)^T}{EPD}. \quad (5.10)$$

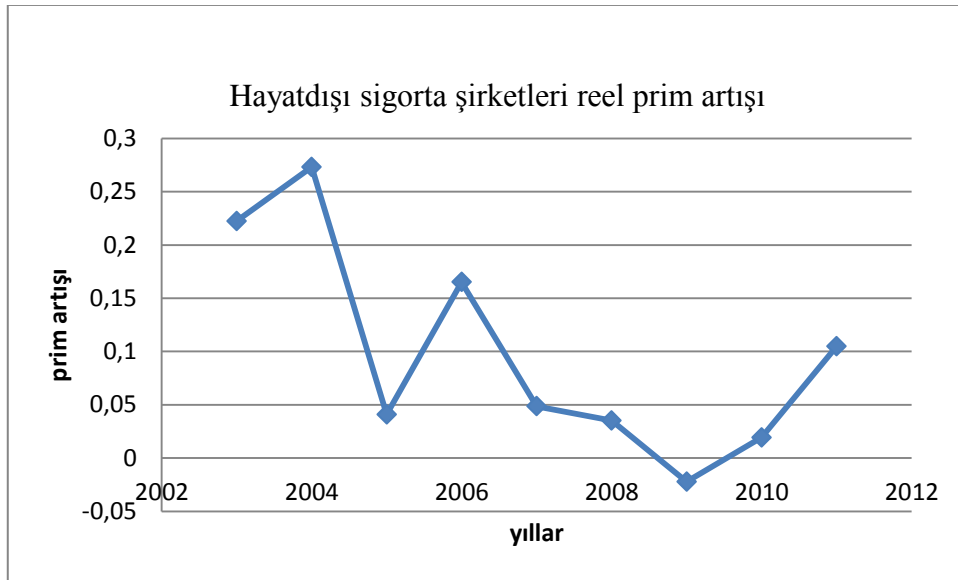
6. UYGULAMALAR

6.1. Birinci Uygulama

6.1.1. Birinci Uygulamanın Model Varsayımları ve Parametreleri

Tezin bu bölümünde birinci uygulama için kurulan DFA modeline ait varsayımlardan bahsedilmektedir. Kullanılan parametreler; sembolleri, tanımları ve başlangıç değerleri ile birlikte Çizelge 6.2.'de gösterilmiştir.

Benzetim 5 yıllık süre için yapılmıştır. Başlangıç anındaki piyasa hacmi MV çalışmanın Türkiye verisine uygun olabilmesi açısından Hazine Müsteşarlığı'nın 2011 yılında yayımlanmış olduğu Türkiye'de Sigortacılık ve Bireysel Emeklilik Faaliyetleri Hakkında Rapordan alınmıştır ve değeri 14.014.702.000 TL'dir. Piyasa hacminin yıllık artışı için doğru bir varsayım yapabilmek amacıyla T.C Başbakanlık Hazine Müsteşarlığı'nın yayımlanmış olduğu Sigortacılık ve Bireysel Emeklilik Faaliyetleri Hakkındaki Raporları yıllar itibariyle incelenmiştir. Nominal veri 2003 temel yılı tüketici fiyatları endeks rakamları (Ek) ile 2012 aralık ayına göre deflate edilmiş reel değerleri sonucu yıllık reel artış Şekil 6.1.'deki gibidir.



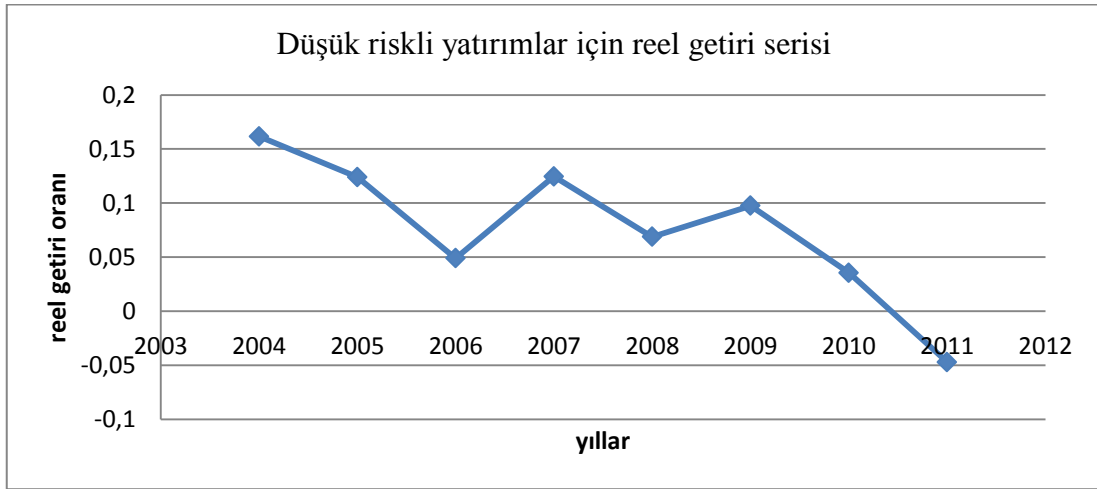
Şekil 6.1. Brüt prim artışı

Şekil 6.1.'den artışların doğrusal olmadığı, bazı yıllardaki artışların diğer yıllara oranla daha az bazı yıllarda ise daha fazla olduğu görülmektedir. Dolayısıyla artış oranı varsayımı

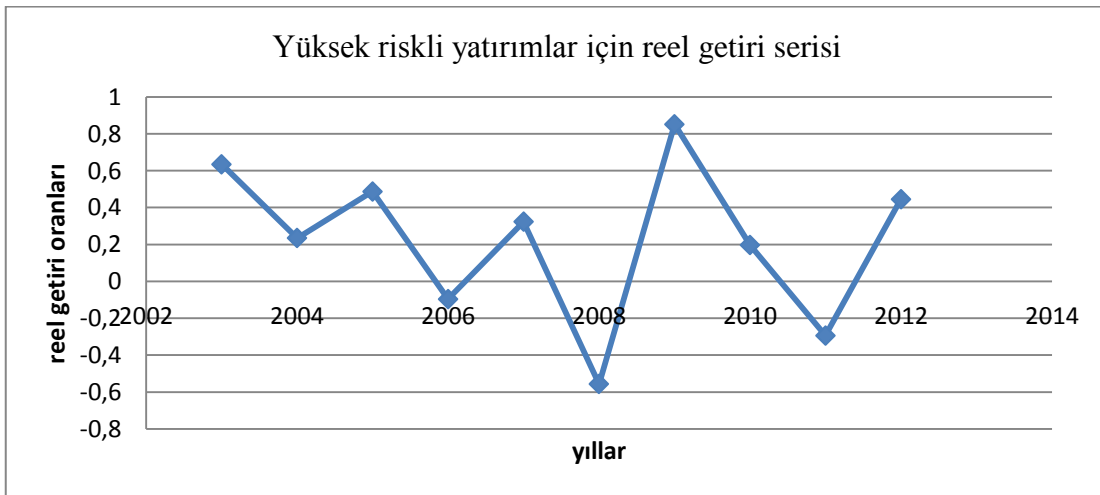
yapılırken 10 yıllık dönemin (2002-2011) reel artış oranlarının ortalaması benzetim çalışmasının piyasa hacmi artış oranı olarak alınmıştır. Bu oran 0,098'dir.

Başlangıçta şirketin piyasa payı β_{t-1} 0,15 ve öz sermayesi 400.000.000 TL olarak alınmıştır.

Yatırımların getirileri normal dağılımla, katastrof hasarlar pareto dağılımla ve katastrof olmayan hasarlar lognormal dağılımla modellenmiştir [6]. Varlıkların dağılım parametrelerinin (beklenen değer ve sapma) varsayımının belirlenmesi için Türkiye'deki yüksek riskli ve düşük riskli yatırım araçlarının 10 yıllık reel getirileri incelenmiştir.



Şekil 6.2. Düşük riskli yatırımlar için getiri oranları



Şekil 6.3. Yüksek riskli yatırımlar için getiri oranları

Şekil 6.2. ve Şekil 6.3. incelendiğinde yüksek riskli yatırımların getiri oranlarının beklenildiği gibi düşük riskli yatırımlardan daha yüksek bir sapmaya sahip olduğu görülmektedir. Her iki durum için de getiri oranlarının ortalama ve standart sapma değerleri incelenmiştir. Bu inceleme sonucu elde edilen değerler Çizelge 6.2.'de verilmiştir.

Tüketici tepki parametresi, öz sermayenin şirketin güvenlik seviyesi olan minimum sermaye gereksiniminin (*MCR*) altına düşmediği varsayımıyla $cr = 1$ olarak seçilmiştir.

Yatırım oranlarının varsayımının yapılabilmesi için Türkiye'deki sigorta şirketlerinin yatırımlarının ne kadarını yüksek riskli ne kadarını düşük riskli yatırım araçlarına yönlendirdikleri incelenmiştir. Bunun için T.C. Başbakanlık Hazine Müsteşarlığı Sigorta Denetleme Kurulunun yayımlanmış olduğu 2011 yılı sigortacılık ve bireysel emeklilik faaliyetleri hakkındaki raporda yer alan aşağıdaki bilgiler kullanılmıştır.

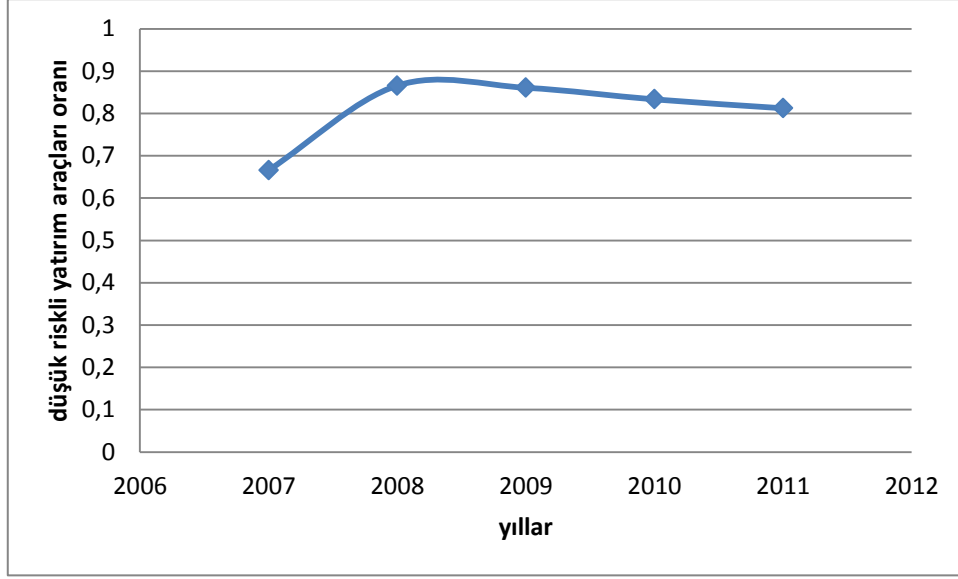
Çizelge 6.1. Finansal varlıkların dağılımı

(Milyon TL)	2007	2008	2009	2010	2011
DT/HB	5.244	7.576	8.319	7.819	7.556
Hisse senedi	1.576	143	269	339	269
Yatırım fonu	90	134	179	236	222
Diğer finansal varlıklar	968	899	899	989	1.256
Toplam	7.878	8.752	9.666	9.384	9.303

DT: devlet tahvili HB: hazine bonusu

Çizelge 6.1.'deki devlet tahvili ve hazine bonusu düşük riskli yatırım araçları ve diğer finansal varlıklar da yüksek riskli yatırım araçları olarak değerlendirilmektedir.

Yıllar itibariyle sigorta şirketlerinin yatırımları incelendiğinde yatırımlarının ne kadarını düşük riskli yatırım araçlarına yaptıkları Şekil 6.4.'ten görülmektedir.



Şekil 6.4. Yıllar itibariyle sigorta şirketlerinin düşük riskli yatırım araçlarına yaptıkları yatırımın oranı

Şekil 6.4. incelendiğinde sigorta şirketlerinin 2007 yılında yatırımlarını yaklaşık %67 sini düşük riskli yatırım araçlarına yaptıkları ve bu oranın diğer yıllarda %80'in üzerine çıktığı görülmektedir. 2011 yılına doğru ise bu oran %80 seviyelerine doğru düşmüştür. Bu eğilimin devam edeceği düşünülerek yapılan benzetim çalışmasında düşük riskli yatırım araçlarına yapılan yatırım oranının başlangıç değeri %80 olarak seçilmiştir.

Prim seviyesini hesaplamak için kullanılan geçiş matrisi olasılık değerlerini hesaplamak için öncelikle geçmiş yılların piyasa koşullarının zayıf, orta ve güçlü rekabet piyasa koşulları olarak sınıflandırılması ardından da uzun seneler gözlemlenerek geçiş olasılıklarının bulunması gerekmektedir. Türkiye için böyle bir çalışma bulunmadığından Eling, Parnitzke ve Schmeiser'in çalışmasında kullanılan geçiş matrisi kullanılmıştır [1].

$$p_{sj} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Bu geçiş olasılıklarına bağlı olarak prim seviyesi π^s üç durum için $s=1,2,3$ üç farklı değer alır. 1.durum zayıf rekabet durumudur ve bu durumda yüksek bir prim gelir seviyesi elde edilmesi beklenir bu nedenle $\pi^1 = 1,05$ olarak varsayılmıştır. Orta rekabet durumunda prim seviyesi $\pi^2 = 1$ olarak alınmıştır. Piyasada güçlü rekabet koşulları hakim olduğunda ise alınması beklenen prim daha az olacaktır bu sebeple $\pi^3 = 0,95$ 'dir. Başlangıçta piyasa koşullarının orta rekabet durumunda olduğu varsayılmıştır.

Aynı model içerisinde bağımlılık seviyeleri değiştirilerek sonuç üzerindeki etkileri karşılaştırılabilir. Bu çalışmada Eling ve Toplek'in [6] makalelerinde kullandığı korelasyon katsayıları kullanılmıştır. Yüksek ve düşük riskli yatırımlar arasındaki korelasyon 0,2; katastrof hasarlar ile katastrof olmayan hasarlar arasındaki korelasyon 0,2 ve varlıklar ile yükümlülükler arasındaki korelasyon -0,1 olarak alınmıştır. Çizelge 6.2.'deki değerler bu bağımlılıklar ile elde edilmiştir.

Çizelge 6.2. Birinci uygulamanın parametreleri

<i>Tanım</i>	<i>Sembol</i>	<i>Başlangıç değeri (t=0)</i>
Zaman periyodu	T	5
t periyodu sonunda öz sermaye	EC_t	400.000.000 TL
vergi oranı	tr	0,25
t periyodunda yüksek riskli yatırımların oranı	α_{t-1}	0,20
t periyodunda normal dağılımlı yüksek riskli getiri	r_{1t}	
ortalama getiri	$E(r_{1t})$	0,22
getirinin standart sapması	$\sigma(r_{1t})$	0,43
t periyodunda normal dağılımlı düşük riskli getiri	r_{2t}	
ortalama getiri	$E(r_{2t})$	0,076
getirinin standart sapması	$\sigma(r_{2t})$	0,065
risksiz getiri	r_f	0,03
piyasa hacmi	MV	14.014.702.000 TL
piyasa hacmindeki yıllık artış	i	0,098
şirketin t periyodundaki piyasa payı	β_{t-1}	0,15
tüketici tepki fonksiyonu	$cr_{t-1}^{EC_{t-1}}$	1
görünen maliyetlerin yazılı piyasa hacmine	γ	0,05
doğrusal bağımlılık oranı		
görünen maliyetlerin yazılı piyasa hacmine	η	0,001
karesel bağımlılık oranı		
lognormal dağılımlı katastrof olmayan hasarlar	C_{ncat}	
ortalama hasar	$E(C_{ncat})$	1.786.874.505 TL
hasarların standart sapması	$\sigma(C_{ncat})$	178.687.450 TL
hasar çözümleme maliyetlerinin hasarlara oranı	δ	0,05
pareto dağılımlı katastrof hasarlar	C_{cat}	
ortalama hasar	$E(C_{cat})$	5.255.513
dağılımın biçim parametresi	$B(C_{cat})$	4,5
yüksek ve düşük riskli yatırımlar arasındaki	τ_1	0,2
Kendall'in tau katsayısı		
katastrof ve katastrof olmayan hasarlar arasındaki	τ_2	0,2
Kendall'in tau katsayısı		
Varlıklarla yükümlülükler arasındaki	τ_3	-0,1
Kendall'in tau katsayısı		
prim seviyesi	π^s	
zayıf rekabet koşullarında	π^1	1,05
orta rekabet koşullarında	π^2	1
güçlü rekabet koşullarında	π^3	0,95

6.1.2. Birinci Uygulamanın Sonuçları

Birinci uygulamanın sonuçları Çizelge 6.3.'de verilmiştir.

Çizelge 6.3. Birinci uygulamanın benzetim sonuçları

kuyruk bağımlılığı	bağımlılık yapısı / f. rasyolar	$E(G)$ milyar TL	$\sigma(G)$ milyar TL	RP	EPD milyon TL	SR_{σ}	SR_{RP} milyar	SR_{EPD} bin	
yok	Korelasyonsuz	0,6990	0,1691	0,0090	0,9483	4,0574	380,61	3,6185	
yok	Gaussian	0,6966	0,1999	0,0275	3,7689	3,4208	124,49	0,9073	
Alt ve Üst	t	1	0,6972	0,1990	0,0428	10,216	3,4392	80,000	0,3350
		3	0,6980	0,2002	0,0369	7,4472	3,4215	92,780	0,4600
		5	0,6975	0,2013	0,0332	6,3461	3,4018	103,13	0,5395
		7	0,6963	0,1999	0,0320	5,7296	3,4181	106,87	0,5965
		9	0,6980	0,2008	0,0300	5,0119	3,4128	114,07	0,6836
üst	Gumbel	0,6983	0,1962	0,0216	2,9765	3,5779	159,00	1,1517	
alt	Gumbel Yaşam	0,6977	0,1933	0,0212	3,0961	3,5804	161,41	1,1063	
alt	Clayton	0,6979	0,1914	0,0411	3,3105	3,5797	83,250	1,0349	
üst	Clayton Yaşam	0,6985	0,1920	0,0205	3,1075	3,5711	167,60	1,1035	
yok	Frank	0,7029	0,1880	0,0144	1,7228	3,6710	240,32	2,0032	

Çizelge 6.3. kurulan birinci DFA modelinin MATLAB'da 100.000 iterasyonu sonucu elde edilen değerlerini korelasyonsuz model için ve yedi farklı kopula ile kurulmuş bağımlılık yapısı için göstermektedir. Çizelgede tüm kopulaların alt ve üst kuyruk bağımlılıklarına sahip olup olmadığı ayrıca belirtilmiştir.

Sonuçlar risk, getiri ve performansın ölçümü açısından değerlendirilirse;

Hiçbir bağımlılığın yer almadığı korelasyonsuz durumda 169.150.000 TL'lik sapmayla yıllık beklenen kazanç 699.060.000 TL olarak elde edilmiştir. İflas olasılığı 0,009 ve beklenen poliçeli açığı da 948.350 TL'dir.

Korelasyonsuz durum ile doğrusal bağımlılığın olduğu Gaussian kopula karşılaştırıldığında yıllık beklenen kazanç Gaussian kopula ile 696.690.000 TL'dir ve dolayısıyla % 0.33'lük bir azalış olduğu görülmektedir. Getiri üzerindeki bu değişim küçük ve önemsizdir ancak risk üzerindeki değişimler daha büyük ve önemlidir. Korelasyonsuz durum için yıllık kazancın standart sapması 169.150.000 TL iken Gaussian yapı için bu değer % 18,2'lik artışla 199.940.000 TL'dir. İflas olasılığı korelasyonsuz durum için 0,0090 iken Gaussian yapı için bu olasılık % 205,5 artarak 0,0275 olmuştur. Bu durum bize bağımlılığın risk ölçümlenmesi üzerindeki etkilerinin çok büyük olduğunu gösterir. Bu etki toplam risk ölçümü olan $\sigma(G)$ 'de daha az, aşağı yönlü risk ölçümü olan RP 'de daha fazladır.

Genel olarak tüm kopulaların ve korelasyonsuz durumun beklenen kazancı karşılaştırıldığında aralarında önemli bir farklılık olmadığı görülür. İflas olasılığı üzerindeki etkilere bakılırsa bağımlılık söz konusu olduğunda iflas olasılığının tüm kopulalarda korelasyonsuz yapıdakinden daha yüksek olduğunu görüyoruz. Üst kuyruk bağımlılığı içeren Gumbel kopula ve kuyruk bağımlılığı içermeyen Frank kopulada iflas olasılığı Gauss kopulayla olduğundan daha düşüktür. Alt kuyruk bağımlılığı içeren Clayton kopulada iflas olasılığı üst kuyruk bağımlılığı içeren Gumbel kopuladan daha yüksektir. Bu sonuçları yaşam kopulalarının sonuçlarıyla karşılaştırıldığında alt kuyruk bağımlılığına sahip olan Gumbel yaşam ve Clayton kopulalarının iflas olasılıkları üst kuyruk bağımlılığı gösteren Gumbel ve Clayton yaşam kopulalarınınkinden daha yüksek olduğu görülmektedir. Tek simetrik arşimed kopula olan Frank kopula diğer tüm kopulardan daha düşük bir iflas olasılığına sahiptir çünkü kuyruklarda daha hafiftir [49].

Beklenen poliçeli açığı için karşılaştırma yapılırsa korelasyonsuz durumda EPD değerinin tüm korelasyonlu durumlardakinden daha düşük olduğu görülmektedir. En yüksek EPD değeri hem alt hem de üst kuyruk bağımlılığı gösteren T-kopuladadır.

T-kopulanın sonuçlarını incelenirken t kopulada daha az serbestlik derecesinin daha yüksek kuyruk bağımlılığı anlamına geldiğinin unutulmaması gerekir. Bu bilgi doğrultusunda serbestlik derecesi arttıkça iflas olasılığının ve beklenen poliçeli açığının azaldığı görülmektedir.

Performans ölçümlerine bakıldığında ise en yüksek değerlerin korelasyonsuz yapıda olduğu ve kopulalı yapının performans ölçümlerinin daha düşük değerlere sahip olduğu görülmektedir.

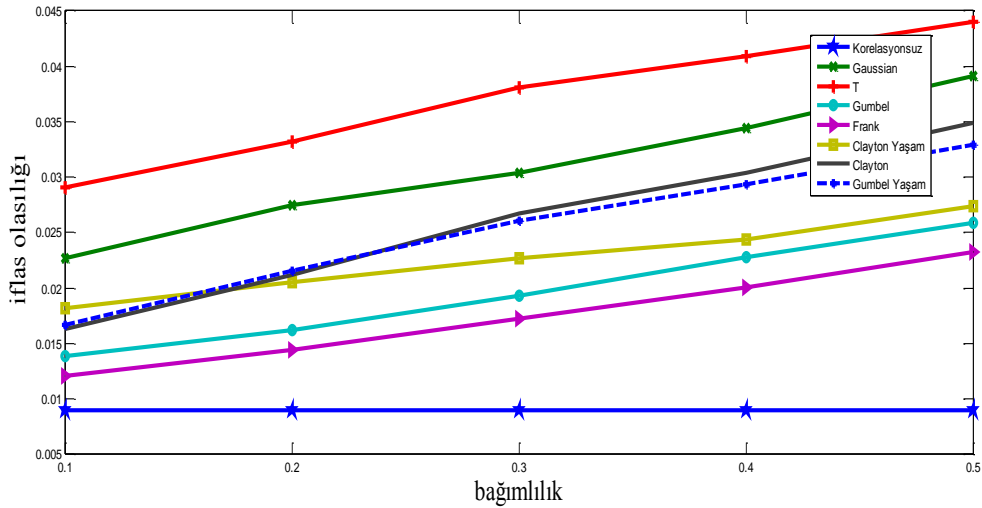
Bu sonuçlar hayat dışı sigorta şirketleri için var olduğu düşünülen doğrusal olmayan bağımlılığın DFA içerisinde incelenmesinin ne kadar önemli olduğunu gösterir çünkü bu bağımlılık yapısının modele dahil edilmesi ile sigorta şirketinin risk ve performans ölçümü üzerinde büyük değişiklikler olmuştur. Bu sonuçlar düzenleyiciler ve derecelendirme kuruluşları için oldukça önemlidir. İlişkilerin doğru modellenmesi önemlidir.

6.1.3. Bağımlılık Seviyelerindeki Değişimin Sonuçlar Üzerine Etkisi

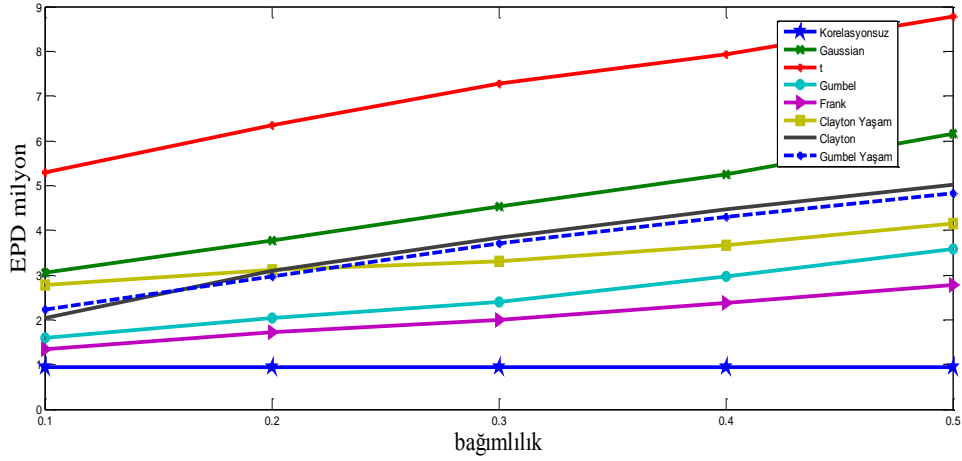
Bağımlılıklardaki değişimin sonuçlar üzerine olan etkilerini görebilmek için önce yatırımlar arasındaki bağımlılıklar ardından hasarlar arasındaki bağımlılıklar diğer bağımlılıklar sabit tutulmak kaydıyla 0.1'den 0.5'e 0.1'erlik artışlarla değiştirilmiştir ve elde edilen benzetim sonuçları Şekil 6.5. – Şekil 6.9. yardımıyla gösterilmektedir.

6.1.3.1. Yatırımlar Arasındaki Bağımlılığın Etkisi

Yatırımlar Arasındaki Bağımlılığın RP ve EPD'ye Etkisi



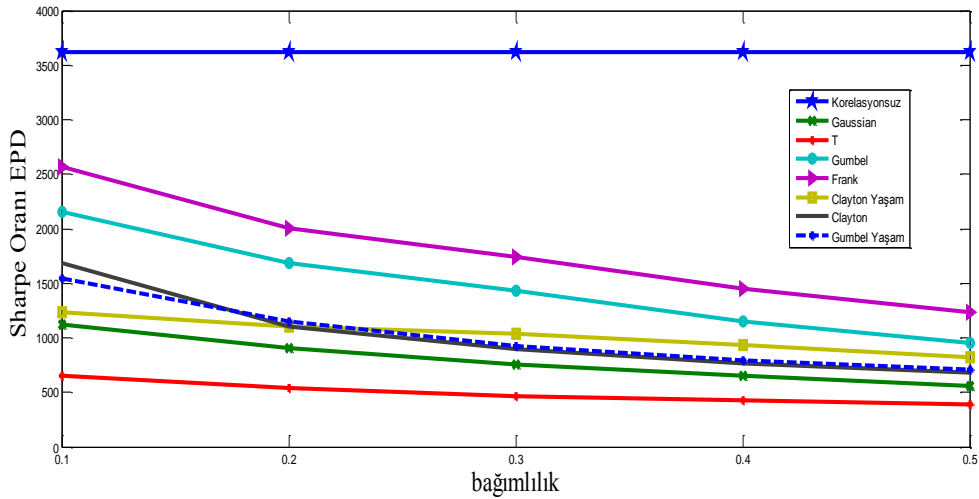
Şekil 6.5. Yatırımlar arasındaki bağımlılığın iflas olasılığına etkisi



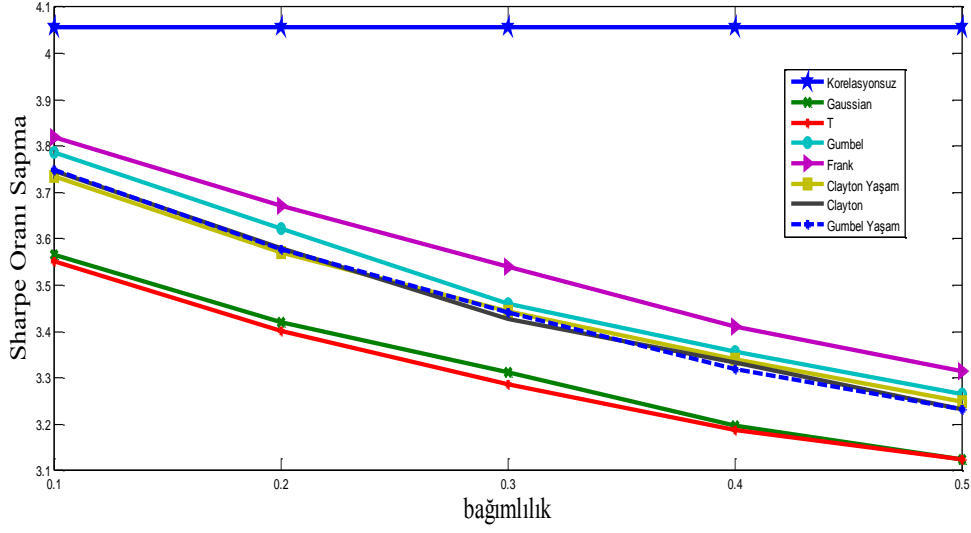
Şekil 6.6. Yatırımlar arasındaki bağımlılığın beklenen poliçeli açığına etkisi

Düşük riskli yatırımlar ile yüksek riskli yatırımlar arasındaki bağımlılık seviyesi arttıkça iflas olasılığı ve beklenen poliçeli açığı değerleri tüm bağımlılık içeren durumlar için artmaktadır. Daha yüksek bağımlılık her iki yatırım tipinde de üretilen negatif çıktılarının olabirliğinde daha fazla artış anlamına gelmektedir [6]. Şekillerde mavi ve siyah renkle gösterilen alt kuyruk bağımlılığı içeren Gumbel Yaşam ve Clayton kopulalar için bağımlılığın etkisi diğer durumlardan daha fazladır. Ayrıca Clayton kopulada artış Gumbel Yaşam'a göre daha fazladır. Bu durum Kendall'in tau katsayı arttıkça Clayton kopulada alt kuyruk bağımlılığının daha fazla artmasından kaynaklanmaktadır [6].

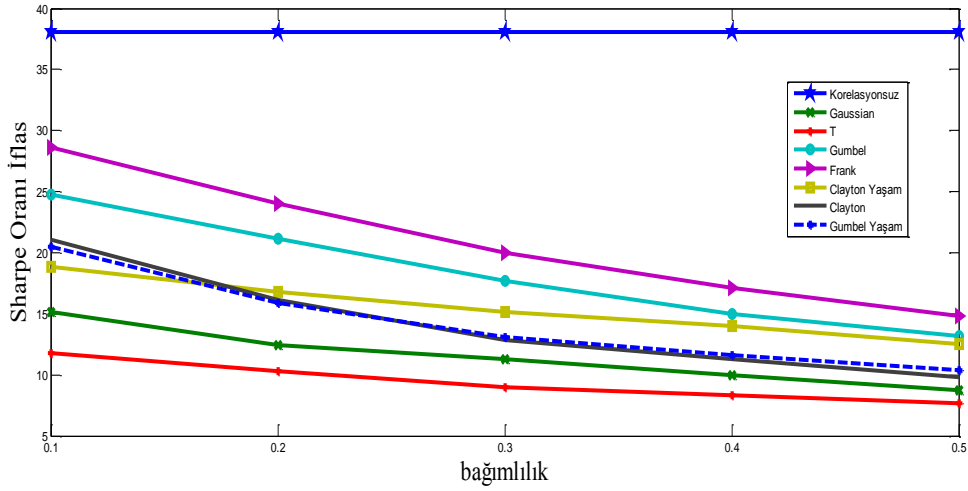
Yatırımlar Arasındaki Bağımlılığın Sharpe Oranları Üzerindeki Etkisi



Şekil 6.7. Yatırımlar arasındaki bağımlılığın değiştirilmiş sharpe oranına (SR_{EPD}) etkisi



Şekil 6.8. Yatırımlar arasındaki bağımlılığın sharpe oranına (SR_{σ}) etkisi



*Gerçek sharpe oranı iflas değerleri şekildekinin (10^{10}) katıdır.

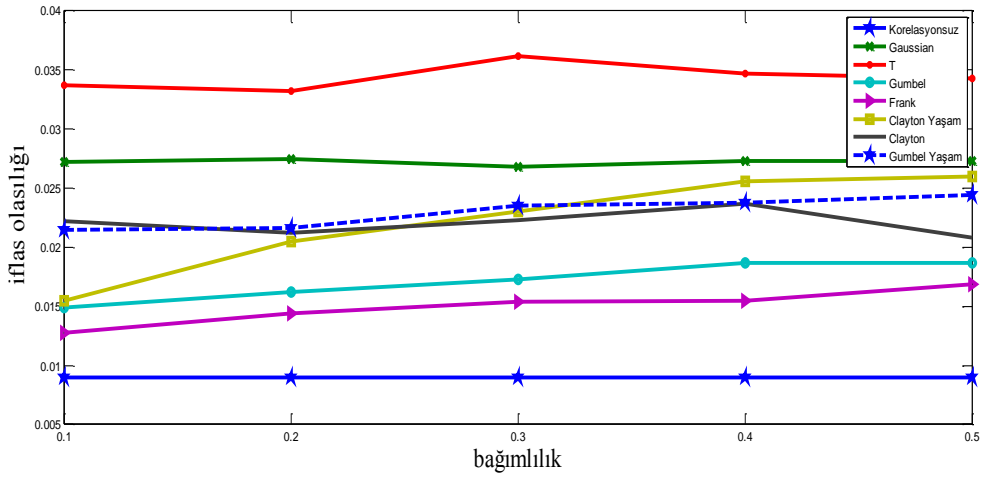
Şekil 6.9. Yatırımlar arasındaki bağımlılığın değiştirilmiş sharpe oranına (SR_{RP}) etkisi.

Şekil 6.7., 6.8. ve 6.9.'da yüksek riskli ve düşük riskli yatırımlar arasındaki bağımlılık arttıkça tüm korelasyonlu durumlar için sharpe oranı düşmektedir.

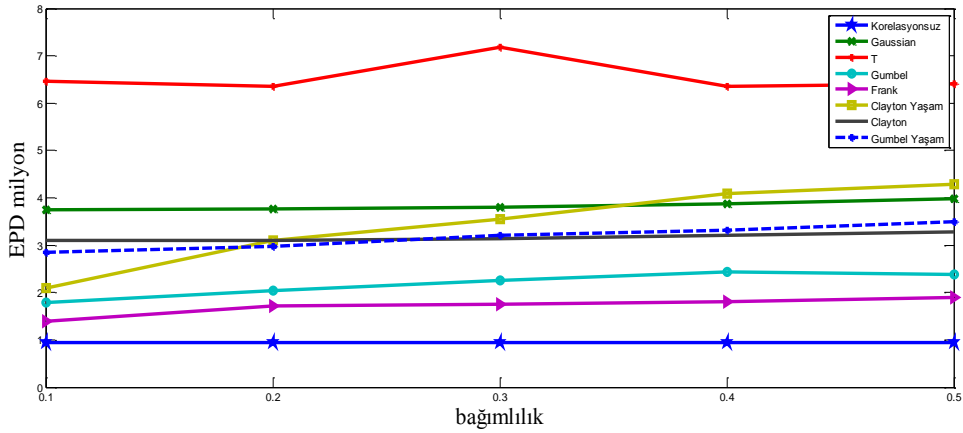
Şekil 6.5.- 6.9.'a bakıldığında yatırımlar arasındaki bağımlılığın hem risk ölçümleri için hem de getiri ölçümleri için önemli etkileri olduğu görülmektedir. Bu durum doğru bağımlılık seviyesinin belirlenmesi ve DFA'ya dahil edilmesinin önemini gözler önüne sermektedir.

6.1.3.2. Hasarlar Arasındaki Bağımlılığın Etkisi

Hasarlar Arasındaki Bağımlılığın RP ve EPD'ye Etkisi



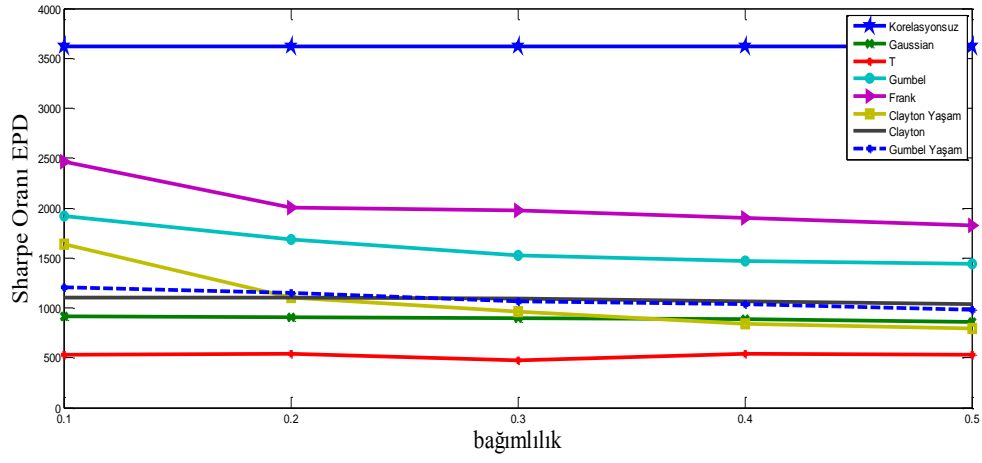
Şekil 6.10. Hasarlar arasındaki bağımlılığın iflas olasılığına etkisi



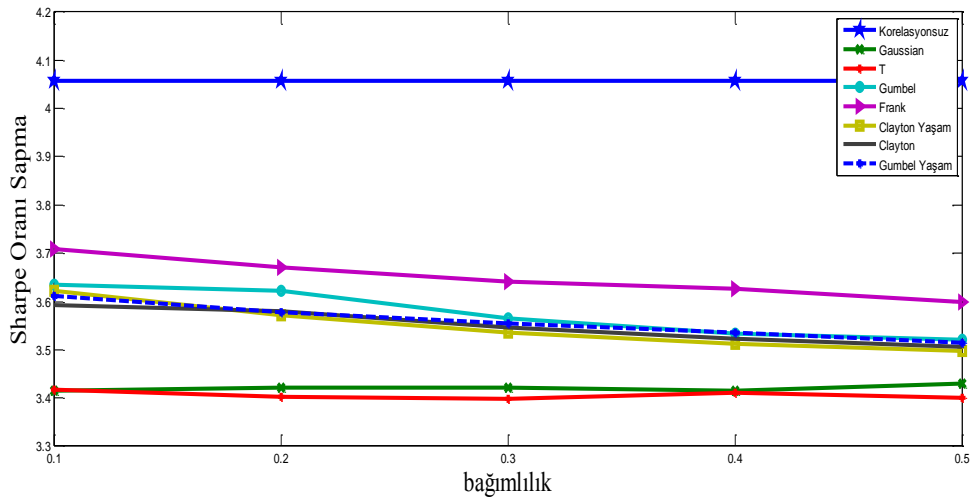
Şekil 6.11. Hasarlar arasındaki bağımlılığın beklenen poliçeli açığına etkisi

Şekil 6.10 ve Şekil 6.11 incelendiğinde katastrofik hasarlar ile katastrofik olmayan hasarlar arasındaki bağımlılık arttıkça korelasyonlu durumların genelinde hem iflas olasılığında hem de beklenen poliçeli açığında bir artış söz konusudur ancak bu artış yatırımlar arasındaki bağımlılık artışı sonucu oluşan artış kadar yüksek değildir. Bunun nedeni verilen parametrelerle yatırımlardan elde edilen sonuçların sigortacının karlılığını hasarlardan daha fazla etkilemesidir. Hem alt hem de üst kuyruk bağımlılığı gösteren t kopulada iflas olasılığı ve beklenen poliçeli açığının her ikisinde de hem artış hem azalış görülmektedir ancak rakamlar incelendiğinde bu farkların çok ciddi boyutlarda olmadığı görülür ve iterasyon sayısı arttıkça grafik daha düz bir hal alacaktır.

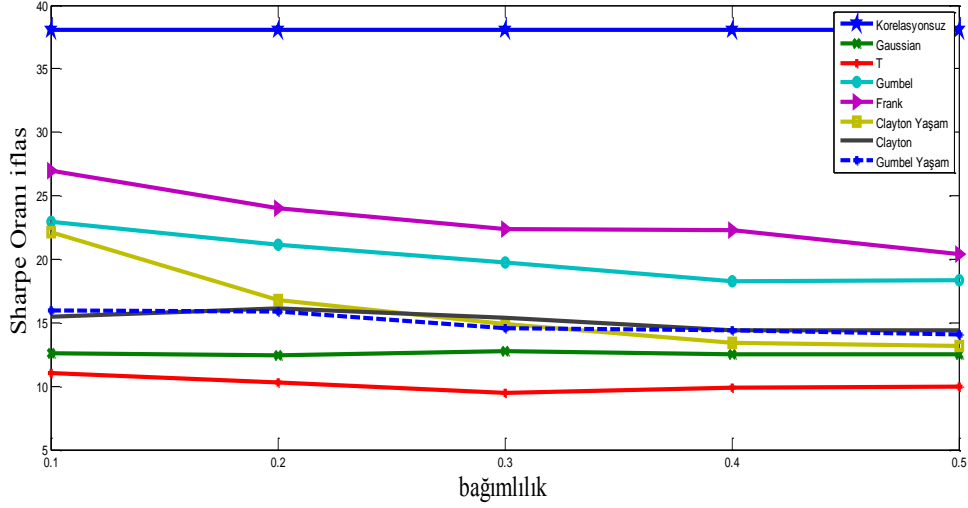
Hasarlar Arasındaki Bağımlılığın Sharpe Oranlarına Etkisi



Şekil 6.12. Hasarlar arasındaki bağımlılığın değiştirilmiş sharpe oranına (SR_{EPD}) etkisi



Şekil 6.13. Hasarlar arasındaki bağımlılığın sharpe oranına (SR_{σ}) etkisi



*Gerçek sharpe oranı iflas değerleri şekildekinin (10^{10}) katıdır.

Şekil 6.14. Hasarlar arasındaki bağımlılığın değiştirilmiş sharpe oranına (SR_{RP}) etkisi.

Şekil 6.12.- 6.14. incelendiğinde yüksek riskli ve düşük riskli yatırımlar arasındaki bağımlılık arttıkça korelasyonlu durumların genelinde sharpe oranlarının düştüğü görülmektedir. Ancak bu düşüş yatırımlar arasındaki bağımlılık artışı sonucu oluşan düşüş kadar fazla değildir. Bunun nedeni verilen parametrelerle yatırımlardan elde edilen sonuçların sigortacının karlılığını hasarlardan daha fazla etkilemesidir.

İterasyon sayısı arttırılırsa elde edilen değerler birbirine yaklaşır ve doğrular daha düzgün azalan bir hal alacaktır.

Şekiller hasarlar arasındaki bağımlılık seviyesinin doğru belirlenmesi ve DFA'ya dahil edilmesinin önemli olduğunu göstermektedir.

6.2. İkinci Uygulama

6.2.1. İkinci Uygulamanın Model Varsayımları ve Parametreleri

İkinci uygulamada kullanılan modelde birinci uygulamadaki DFA model yapısı temel alınmıştır ancak bağımlılık yapılarında değişiklik vardır. İlk uygulamada hem düşük riskli yatırımlarla yüksek riskli yatırımlar arasında hem de katastrof hasarlar ile katastrof olmayan hasarlar arasında bağımlılık varsayılmıştır. Ayrıca yatırımlar ile hasarlar arasında da bir bağımlılık söz konusudur ve bu bağımlılığın sebebinin de katastrof hasarların finansal piyasalarda yol açtığı değişimler olduğu daha önceki bölümlerde örneklerle açıklanmıştır.

İkinci uygulamada ise DFA içerisine dahil edilen bağımlılık yapısı birinci modeldekinden farklıdır. Bu uygulamanın amacı farklı sigorta branşları arasında da bağımlılık yapısı olabileceğini, dolayısıyla bir sigorta şirketi için finansal analiz yapıldığında bu sigorta branşları tarafından üretilen hasarların birbirine bağımlı üretilerek analize dahil edilmesi gerektiğini göstermektir. Literatür taraması yapıldığında Li'nin [45] 2006'da yapmış olduğu çalışmada farklı sigorta kolları arasındaki bağımlılığı kopulalar ile modellediği görülmektedir.

Bu uygulamada hasarlar katastrofik olup olmadığına göre ayrılmamış ve katastrof hasarların incelemesi yapılmadığı için yatırımlarla aralarında bağımlılık yapısı kurulmamıştır. Ayrıca iş kollarının arasındaki bağımlılığın DFA sonuçlarını nasıl etkileyeceğinin salt sonucunu görebilmek amacıyla yatırım gelirleri de aralarında bağımsız olarak üretilmiştir.

Bağımlılığın modellenmesinde kullanımdaki kolaylık ve ölçümlendirmedeki etkinlik açısından yine kopulalardan yararlanılmıştır. Bağımlılık katsayısı olarak kopulaların kullanımında büyük kolaylık sağlayan, tek düze dönüşümler altında sabit kalan ve marjinal dağılımlardan etkilenmeyen Kendall'ın Tau katsayısı kullanılmıştır.

Hayat dışı sigorta şirketleri için “hayat dışı branşlar direkt primlerin branş bazında dağılımı” T.C. Başbakanlık Hazine Müsteşarlığının yayımlamış olduğu 2011 Yılı Sigortacılık ve Bireysel Emeklilik Faliyetleri Hakkında Rapor'undan incelenmiştir. Kasko (kara araçları) ve zorunlu trafik sigortası (KTK Zorunlu Mali Sor.) primlerinin toplam prim içindeki payı %45.16'dır. Hayat dışı sigorta şirketlerinin ödediği tazminatların da büyük bir bölümü sigortanın bu iki branşına yapılmaktadır. Geçmiş yılların raporları

incelendiğinde de yine en fazla primin kasko ve zorunlu trafik sigortasından alındığı görülmektedir.

Hasarlarını sigorta türleri açısından modelleyecek bir hayatdışı sigorta şirketi için böyle önemli paya sahip olan bu iki sigorta kolunun birbirleriyle olan bağımlılıkları ve yapılacak finansal analiz içerisinde doğru modellenmesi oldukça önemlidir.

Bu amaçla T.C. Başbakanlık ve Hazine Müsteşralığının yayımlamış olduğu son on yıllık sigortacılık ve bireysel emeklilik faaliyetleri hakkındaki raporlarından, ödenen kasko ve trafik tazminatları incelenmiştir. Ödenen tazminatların 2012 Aralık ayına göre deflate edilmiş reel değerleri bulunmuş ve bu değerler üzerinden bağımlılıkları incelenmiştir. İkisi arasındaki Kendall'ın Tau korelasyon katsayısı 0.42'dir.

Benzetim 5 yıllık süre için yapılmıştır.

Kasko ve zorunlu trafik sigortası 2011 primlerinin toplam içindeki payının %45.16 olduğunu biliyoruz ve modelde diğer sigorta kolları dahil edilmeden hasar üretimi yapılacağı için başlangıç anındaki piyasa hacmini *MV* birinci uygulamada almış olduğumuz miktarın %45'i olarak seçiyoruz (6.306.615.900 TL). Aynı yöntem şirketin başlangıç öz sermayesini belirlerken de uygulanmış ve toplam öz sermayenin % 45'inin trafik ve kasko branşına ayrılacağını düşünerek şirketin başlangıç öz sermayesi 180.000.000 TL olarak belirlenmiştir.

Kasko ve zorunlu trafik sigortası hasar dağılımı varsayımı için motor sigortaları ile ilgili literatür araştırması yapılmıştır. Adeleke'nin [46] ve Achieng'nin [47] çalışmalarında motor sigortasının hasar büyüklüğü için en uygun dağılımın Log-normal dağılım olduğu gösterilmiştir.

Şirket başlangıç piyasa hacmi payı, piyasa hacminin yıllık artışı, piyasa hacmi artış oranı, tüketici tepki parametresi, getiri oranlarının ortalama ve sapma değerleri, düşük riskli yatırım araçlarına yapılan yatırım oranının başlangıç değeri, prim seviyesini hesaplamak için kullanılan geçiş matrisi ve piyasa koşullarına göre değişen prim seviyeleri birinci modelde olduğu gibidir.

İkinci model için kullanılan parametreler; sembolleri, tanımları ve başlangıç değerleri ile birlikte Çizelge 6.4.'de gösterilmiştir

Çizelge 6.4. İkinci uygulamanın parametreleri

Tanım	Sembol	Başlangıç değeri ($t=0$)
Zaman periyodu	T	5
t periyodu sonunda öz sermaye	EC_t	180.000.000 TL
vergi oranı	tr	0,25
t periyodunda yüksek riskli yatırımların oranı	α_{t-1}	0,20
t periyodunda normal dağılımlı yüksek riskli getiri	r_{1t}	
ortalama getiri	$E(r_{1t})$	0,22
getirinin standart sapması	$\sigma(r_{1t})$	0,43
t periyodunda normal dağılımlı düşük riskli getiri	r_{2t}	
ortalama getiri	$E(r_{2t})$	0,076
getirinin standart sapması	$\sigma(r_{2t})$	0,065
risksiz getiri	r_f	0,03
piyasa hacmi	MV	6.306.615.900 TL
piyasa hacmindeki yıllık artış	i	0,098
şirketin t periyodundaki piyasa payı	β_{t-1}	0,15
tüketici tepki fonksiyonu	$cr_{t-1}^{EC_{t-1}}$	1
görünen maliyetlerin yazılı piyasa hacmine	γ	0,05
doğrusal bağımlılık oranı		
görünen maliyetlerin yazılı piyasa hacmine	η	0,001
karesel bağımlılık oranı		
lognormal dağılımlı kasko branşı hasarlar	C_{MOD}	
ortalama hasar	$E(C_{MOD})$	371.280.684 TL
hasarların standart sapması	$\sigma(C_{MOD})$	115.868.962 TL
hasar çözümü maliyetlerinin hasarlara oranı	δ	0,05
lognormal dağılımlı trafik branşı hasarlar	C_{CM}	
ortalama hasar	$E(C_{CM})$	204.766.537 TL
hasarların standart sapması	$\sigma(C_{CM})$	125.142.315 TL
kasko ve trafik sigortası arasındaki	τ	0,42
Kendall'ın tau katsayısı		
prim seviyesi	π^s	
zayıf rekabet koşullarında	π^1	1,05
orta rekabet koşullarında	π^2	1
güçlü rekabet koşullarında	π^3	0,95

6.2.2. İkinci Uygulamanın Sonuçları

Birinci uygulamanın sonuçları Çizelge 6.5.'de verilmiştir.

Çizelge 6.5. İkinci uygulamanın benzetim sonuçları

kuyruk bağımlılığı	bağımlılık yapısı f. rasyolar	$E(G)$ milyar TL	$\sigma(G)$ milyar TL	RP	EPD milyon TL	SR_{σ}	SR_{RP} milyar	SR_{EPD} bin	
yok	Korelasyonsuz	0,5272	0,1108	0,0141	2,1257	4,7068	184,55	1,2267	
yok	Gaussian	0,5271	0,1246	0,0380	7,7790	4,1817	68,643	0,3351	
Alt ve Üst	t	1	0,5258	0,1249	0,0430	10,081	4,1612	60,522	0,2579
		3	0,5266	0,1254	0,0404	9,8784	4,1521	64,506	0,2636
		5	0,5256	0,1253	0,0409	8,8948	4,1476	63,502	0,2922
		7	0,5259	0,1254	0,0380	8,2701	4,1459	68,483	0,3145
		9	0,5251	0,1252	0,0394	8,8191	4,1479	65,937	0,2945
üst	Gumbel	0,5253	0,1270	0,0457	10,866	4,0898	56,888	0,2391	
alt	Gumbel Yaşam	0,5255	0,1237	0,0323	6,0646	4,2235	80,509	0,4285	
alt	Clayton	0,5259	0,1236	0,0406	9,2354	4,2084	64,023	0,2816	
üst	Clayton Yaşam	0,5251	0,1282	0,0498	11,759	4,0510	52,101	0,2208	
yok	Frank	0,5274	0,1232	0,0297	4,9326	4,2324	87,866	0,5288	

Çizelge 6.5. kurulan ikinci DFA modelinin MATLAB'da 100.000 iterasyonu sonucu elde edilen değerlerini korelasyonsuz model için ve yedi farklı kopula ile kurulmuş bağımlılık yapısı için göstermektedir. Çizelgede tüm kopulaların alt ve üst kuyruk bağımlılıklarına sahip olup olmadığı ayrıca belirtilmiştir.

Sonuçlar risk, getiri ve performansın ölçümü açısından değerlendirildiğinde;

Öncelikle hiçbir bağımlılığın yer almadığı korelasyonsuz durumu incelenmiştir. 110.810.000 TL'lik sapmayla yıllık beklenen kazanç 527.280.000 TL olarak elde edilmiştir. İflas olasılığı 0,0141 ve beklenen poliçeli açığı da 2.125.700 TL'dir.

Korelasyonsuz yapıyla kopulalı yapılar karşılaştırıldığında bağımlılık söz konusu olduğunda getirinin ölçümü olan yıllık beklenen kazançta çok büyük farklılıklar olmadığı

ancak risk ve performans ölçümlerinde farklılıklar olduğu görülmektedir. Yıllık kazancın standart sapması $\sigma(G)$, iflas olasılığı RP ve beklenen poliçeli açığı EPD bağımlılığın söz konusu olduğu durumlarda korelasyonsuz yapıda olduğundan daha yüksek değerler almıştır. Performans ölçümleri ise birinci modelde olduğu gibi bağımlılığın söz konusu olduğu durumlarda daha düşük değerler almıştır.

Bu durum sigorta branşları arasındaki bağımlılığın DFA içerisinde incelenmesinin ne kadar önemli olduğunu gösterir çünkü bu bağımlılık yapısının modele dahil edilmesi ile sigorta şirketinin risk ve performans ölçümlendirmeleri üzerine büyük değişiklikler olmuştur. Bu sonuçlar düzenleyiciler ve derecelendirme kuruluşları için oldukça önemlidir.

İkinci modelde sadece iki branş arasında bağımlılık varsayılmıştır. Birinci modelde ise dört boyutlu bir bağımlılık yapısı kurulmuştur. Bu sebeple birinci modelde görülen ve doğrusal olmayan bağımlılıklar sonucu farklı kuyruk bağımlılığına sahip kopulalar ile risk ve performans ölçümleri arasındaki ciddi farklılıklar ikinci modelde yoktur.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada Türkiye verisine uyumlu olarak hayat dışı sigorta şirketleri için bir DFA modeli kurmak ve bunu yaparken de şirket için önemli olan doğrusal olmayan bağımlılıkların etkisini kopulalar yardımıyla modele dahil etmek istenmiştir. Çalışmanın amaçları doğrultusunda iki farklı bağımlılık yapısı içeren DFA modelinin benzetimi yapılmıştır. Benzetimlerin sayısal değerleri tablolaştırılmış ve değerler birbiriyle karşılaştırılmıştır.

Birinci uygulamanın sonuçları incelendiğinde görülmektedir ki hayat dışı sigorta şirketlerini ilgilendiren ağır kuyruklu ve çarpık dağılıma sahip risklerin bağımlılıklarının DFA modeline dahil edilmesiyle iflas olasılığı, beklenen poliçeli açığı gibi sigorta şirketi yöneticilerinin geleceğe yönelik kararlarını, durum analizlerini ve yönetimle ilgili pek çok kararı etkileyebilecek finansal rasyolarda ciddi farklılıklar meydana gelmiştir. Tüm bu finansal rasyolar sadece sigorta şirketi yöneticilerini değil aynı zamanda sigorta şirketlerini denetleyen kuruluşları ve dercelendirme şirketlerini de ilgilendirmektedir. Bu sonuçlar eşliğinde daha doğru ve gerçekçi rakamların elde edilmesi ve yorumların da daha gerçekçi yapılması söz konusudur.

Günümüzde hem sigortalıların hem de sigortacıların çıkarlarının karşılıklı olarak korunması için şirketlerin yükümlülüklerini karşılama yeterliliklerinin doğru şekilde hesaplanması giderek daha fazla önem kazanmaktadır. Avrupa Birliği'nin 1997 Müller Raporu sonuçlarına dayanarak oluşturduğu pek çok ülkede uygulanmakta olan ve Türkiye'de kullanılan yükümlülük karşılama yeterliliği sisteminin temellerini oluşturan Solvency I ve şu an yapım aşamasında olan Solvency II bu duruma en güzel örnektir. Her iki sistem için de DFA'nın önemi büyüktür ve sadece doğrusal bağımlılığın incelenmesinin doğru olmayacağı doğrusal olmayan bağımlılıkların da hesaba katılması gerekliliği gerçeği bu sistemler için de geçerlidir.

İkinci uygulamanın sonuçlarına bakıldığında doğrusal olmayan bağımlılıkların DFA içerisindeki önemi ve finansal rasyolar üzerindeki etkisi birinci uygulamada olduğu gibidir. Bu uygulamanın farkı bağımlılığın sigorta branşları arasında kurulmuş olmasıdır. Benzetim sonuçlarından anlaşıldığı üzere sigorta branşlarının birbirleriyle olan bağımlılığının DFA sonuçları üzerinde ciddi bir etkisi vardır. İlerde tüm sigorta branşları arasında ciddi bir bağımlılık incelemesi yapılabilir ve DFA modeli içerisinde bu bağımlılıkların dahil edilmesinin sonuçlar üzerindeki etkisi incelenebilir.

Çalışmada kullanılan DFA modeli benzetim yaparken kolaylık sağlayacak ve bir hayat dışı sigorta şirketi için temel bileşenleri içerecek şekilde kurulmuştur. Daha sonra yapılacak çalışmalarda modelin geliştirilmesi ve bileşenlerin değiştirilerek istenilen herhangi bir şirketin ihtiyaçlarına uygun hale getirilmesi mümkündür. Ayrıca model için farklı yönetim stratejileri de belirlenebilir.

Bu çalışmadaki birinci uygulamada yatırımlar arasında, hasarlar arasında ve yatırımlarla hasarlar arasında ikinci uygulamada da farklı sigorta branşları arasında bağımlılık yapısı kurulmuştur. İlerde yapılacak olan çalışmalarda farklı bileşenler arasında da bağımlılık olup olmadığı varsa ne tür bir bağımlılığın olduğu araştırılabilir ve DFA modeli içerisinde işlenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Eling, M., Parnitzke T., Schmeiser H., Management Strategies and Dynamic Financial Analysis, *Variance*, 2(1): 52-70, **2008**
- [2] Lowe, S.P., Stanard, J.N., An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer *Astin Bulletin*, 27, 339-371, **1997**
- [3] Kaufmann, R., Gadmer, A., Klett, R., Introduction to Dynamic Financial Analysis, *Astin Bulletin*, 31(1), 213-249, **2001**
- [4] Blum, P., Dacarogna, M., Emrechts, P., Neghaiwi, T., Niggli, H., Using DFA for Modeling the Impact of Foreign Exchange Risks on Reinsurance Decisions, *Casualty Actuarial Society Forum*, **2001**
- [5] D'Arcy, S.P., Gorvett, R.W., The Use of Dynamic financial Analysis to Determine Whether an Optimal Growth Rate Exists for a Property-Liability Insurer, *Journal of Risk and Reinsurance*, 71, 583-615, **2004**
- [6] Eling, M., Toplek, D., Modeling and management of nonlinear dependencies – copulas in dynamic financial analysis, *The Journal of Risk and Insurance*, Vol. 76, No. 3, 651-681, **2009**
- [7] Gürer, B., Terör ve Sigorta, <http://eski.tsrbsb.org.tr/private/trk/sayi23/ince23 .htm> (Mayıs, **2013**)
- [8] Reasürör, 61. Sayı, http://www.millire.com/dergi/SAYI_61.pdf (Mayıs, **2013**)
- [9] Sklar, A., Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges, *Publ. Inst. Statist. Univ., Paris* **8**: 229–231, **1959**
- [10] Quesada-Molina, J.J., Rodr'iguez-Lallena, J.A., Ubeda-Flores M., What are copulas? , *Monograf'ias del Semin. Matem. Garc'ia de Galdeano*. 27: 499–506, **2003**
- [11] Wang, S., Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models and Algorithms, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, 85(163): 848-939, **1998**
- [12] Frees, E. W., and Valdez, E.A., Understanding Relationships Using Copulas, *North American Actuarial Journal*, 2(1): 1-25, **1998**
- [13] Klugman, S. A., and R. Parsa, Fitting Bivariate Loss Distributions with Copulas, *Insurance: Mathematics and Economics*, 24(1): 139-148, **1999**
- [14] Zeevi, A., Mashal, R., *Beyond Correlation: Extreme Co-Movements Between Financial Assets*, Working Papers Series, **2002**
- [15] Malevergne, Y., and Sornette D., Testing the Gaussian Copula Hypothesis for Financial Assets Dependences, *Quantitative Finance*, 3(4): 231-250, **2003**
- [16] Dias, A., *Copula Inference for Finance and Insurance*, Doctoral Thesis ETH No. 15283, Zurich, **2004**
- [17] Kole, E., Koedijk, K., and Verbeek, M., Selecting Copulas for Risk Management, *Journal of Banking & Finance*, 31(8): 2405-2423, **2007**

- [18] Blum, P., A. Dias, and P. Embrechts, The ART of Dependence Modeling: The Latest Advances in Correlation Analysis, *Alternative Risk Strategies*, (ed: Mortan, L.), Risk Books, London, **2002**.
- [19] Embrechts, P., A. McNeil, and D. Straumann, Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls, in: M. A. H. Dempster, ed., *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, (Cambridge, UK) *Cambridge University Press*, 176-223, **2002**
- [20] Pfeifer, D., and J. Nešlehov'a, Modeling and Generating Dependent Risk Processes for IRM and DFA, *ASTIN Bulletin*, 34(2): 333-360, **2004**
- [21] McNeil, A. J., Sampling Nested Archimedean Copulas, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 78(6): 567-581, **2007**
- [22] Oakes, D., A model for association in bivariate survival data, *Journal of the Royal Statistical Society*, B 44: 414–22, **1982**
- [23] Oakes, D., Bivariate survival models induced by frailties, *Journal of the American Statistical Association* 84: 487–93, **1989**
- [24] Hougaard, P., B. Harvald, and N.V. Holm., Measuring the similarities between the lifetimes of adult Danish twins born between 1881–1930, *Journal of the American Statistical Association* 87: 17–24., **1992**
- [25] Carriere, J., Dependent decrement theory, *Transactions of the Society of Actuaries* 46: 45–74, **1994**
- [26] Tibiletti, L., Beneficial changes in random variables via copulas: An application to insurance, *Geneva Papers on Risk and Insurance – Theory* 20: 191–202, **1995**
- [27] Wang, S., Premium calculation by transforming the layer premium density, *ASTIN Bulletin*, 26: 71–92, **1996**
- [28] Frees, E., J. Carriere, and E.Valdez., Annuity valuation with dependent mortality, *Journal of Risk and Insurance* 63,no. 2: 229–61, **1996**
- [29] Burkett., J.C., McIntyre, T., Sonlin, S.M., DFA Insurance company case study part I: Reinsurance and asset allocation. *Casualty Actuarial Society Forum*, Summer 2001. Arlington, VA: Casualty Actuarial Society, **2001**
- [30] Beusekom-Bastiaans, I.V, *Dynamic Financial Analysis; Introduction to Nonlife Insurance Decisions*, BMI paper, November 15, Amsterdam, The Netherlands, **2005**
- [31] Malevergne, Y., Sornette, D., *Extreme Financial Risks: From Dependence to Risk Management*, Springer, **2006**.
- [32] Schmidit, T., Copulas and dependence measurement, http://www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/TSchmidt_eqf_Copulas.pdf (Mayis **2013**)
- [33] Embrechts, P., McNeil, A.J., Straumann, D., Correlation and dependency in risk management. *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, (ed: Dempster., M.A.H.) Cambridge University Press, **2002**
- [34] Nelsen, R.B., *An Introduction to Copulas*, second edition, Springer, **2006**

- [35] Karadağ, D.K., *Portfolio Risk Calculation and Stochastic Portfolio Optimization by a Copula Based Approach*, Yüksek Lisans Tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul, **2003**
- [36] McNeil,A.J., Frey, R., Embrechts, P., *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton, NJ, Princeton University, **2005**
- [37] Cizek, P., Hardle, W., Weron, W., *Statistical Tools in Finance and Insurance*, Chapter 3., Springer, **2005**
- [38] Charles, J. F., Marchant, J.R. V., *Cassell's Latin Dictionary*, **1853-1936**.
- [39] Simpson, J., Weiner E., *The Oxford English Dictionary*, second edition, Oxford University Press, United Kingdom, **1989**
- [40] Menger, K., Statistical metrics, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 28, 535-537,**1942**
- [41] Quesada-Molina, J.J., Rodr'iguez-Lallena, J.A., Ubeda-Flores M., What are copulas? , *Monograf'ias del Semin. Matem. Garc'ia de Galdeano.* 27: 499–506, **2003**
- [42] Bühlmann, H., *Mathematical Methods in Risk Theory*, 2nd edition, Springer, Berlin **1996**
- [43] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance* , Wiley, New York, **1998**
- [44] Sharpe, W. F., Mutual Fund Performance, *Journal of Business*, 39(1): 119-138., **1966**
- [45] Li, J., *Modelling dependency between different lines of business with copulas*. Research Paper 146, **2006**
- [46] Adeleke, I.A., Modeling claim sizes in personal line non-life insurance, *International Business and Economic Research Journal*, volume 10 number 2, February, **2011**
- [47] Achieng,O.M., Actuarial modeling for insurance claim severity in motor comprehensive policy using industrial statistical distributions, *International Congress of Actuaries*, 7-12 March, Cape Town, **2010**
- [48] Venter, G., Tails of copulas, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society* 89(171):68-113, **2002**

EK

2003 temel yılı tüketici fiyat endeks rakamları

	Ocak	Şubat	Mart	Nisan	Mayıs	Haziran	Temmuz	Ağustos	Eylül	Ekim	Kasım	Aralık
	January	February	March	April	May	June	July	August	September	October	November	December
2003	94,77	96,23	98,12	99,09	100,04	100,12	99,93	100,09	101,44	102,38	103,68	104,12
2004	104,81	105,35	106,36	106,89	107,35	107,21	107,72	108,54	109,57	112,03	113,50	113,86
2005	114,49	114,51	114,81	115,63	116,69	116,81	116,14	117,13	118,33	120,45	122,14	122,65
2006	123,57	123,84	124,18	125,84	128,20	128,63	129,72	129,15	130,81	132,47	134,18	134,49
2007	135,84	136,42	137,67	139,33	140,03	139,69	138,67	138,70	140,13	142,67	145,45	145,77
2008	146,94	148,84	150,27	152,79	155,07	154,51	155,40	155,02	155,72	159,77	161,10	160,44
2009	160,90	160,35	162,12	162,15	163,19	163,37	163,78	163,29	163,93	167,88	170,01	170,91
2010	174,07	176,59	177,62	178,68	178,04	177,04	176,19	176,90	179,07	182,35	182,40	181,85
2011	182,60	183,93	184,70	186,30	190,81	188,08	187,31	188,67	190,09	196,31	199,70	200,85
2012	201,98	203,12	203,96	207,05	206,61	204,76	204,29	205,43	207,55	211,62	212,42	213,23

ÖZGEÇMİŞ

Kimlik Bilgileri

Adı Soyadı : Betül Zehra KARAGÜL

Doğum Yeri : Ankara

Medeni Hali : Bekar

E-posta : betul.zehra@hacettepe.edu.tr

Adresi : Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü / Ankara

Eğitim

Lise : 2001-2005 Ayşe Melahat Erkin Anadolu Lisesi

Lisans : 2005-2010 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yüksek Lisans : 2010-2013 Hacettepe Üniversitesi Aktüerya Bilimleri Bölümü

Yabancı Dil ve Düzeyi

İngilizce, İleri

Almanca, Başlangıç

İspanyolca, Başlangıç

İş Deneyimi

2011-... Hacettepe Üniversitesi Araştırma Görevlisi

Deneyim Alanları

Tezden Üretilmiş Projeler ve Bütçesi

Tezden Üretilmiş Yayınlar

Tezden Üretilmiş Tebliğ ve/veya Poster Sunumu ile Katıldığı Toplantılar

