ANTİ-KÄHLER WEYL MANİFOLDLARI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Elif ALTINTAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı
Prof. Dr. Aydın GEZER
2019

ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ANTİ-KÄHLER WEYL MANİFOLDLARI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Elif ALTINTAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
Geometri Bilim Dalı

ERZURUM
2019

T.C.
ATATÜRK ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü

TEZ ONAY FORMU

ANTİ-KÄHLER WEYL MANİFOLDLARI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Prof. Dr. Aydın GEZER danışmanlığında, Elif ALTINTAŞ tarafından hazırlanan bu çalışma, 09/01/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı'nda yüksek lisans tezi olarak **oybirliği (3/3)** ile kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Ömer TARAKÇI İmza :

Üye : Prof. Dr. Aydın GEZER İmza :

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Sibel TURANLI İmza :

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu'nun 10..01../2019 tarih ve ..02..../....36.... nolu kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet KARAKAN
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildiriş, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ANTİ-KÄHLER WEYL MANİFOLDLARI ÜZERİNE BAZI SONUÇLAR

Elif ALTINTAŞ

Atatürk Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Aydın GEZER

$(M_{2k},\overline{\nabla})$ manifoldu , $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısı ve g pseudo-Riemann metriğine sahip anti-Kähler Weyl manifold olsun. İlk olarak, g pseudo-Riemann metriğinin $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısına göre holomorfik olması için şartlar elde edildi. Ayrıca $(M_{2k},g,\mathcal{J},\overline{\nabla})$ manifoldu üzerinde quarter-simetrik konneksiyon tanımlandı ve bu konneksiyonun bütün eğrilik tensörleri hesaplandı. İkinci olarak, anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldların tanımları yapıldı ve bu manifoldun hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olduğu elde edildi. Daha sonra anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun Ricci ve Ricci* tensörlerinin çakışma şartları elde edildi. Son olarak, bu manifoldun skaler ve skaler* eğrilik tensörlerinin çakışması için gerek ve yeter şartın manifoldun izotropik anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold olması gerektiği gösterildi.

2019, 45 sayfa

Anahtar Kelimeler: Hemen hemen kompleks yapı, Anti-Kähler Weyl manifold, pseudo-Riemannian metrik, İzotropik yapı

ABSTRACT

MS Thesis

SOME RESULTS ON ANTI-KÄHLER WEYL MANIFOLDS

Elif ALTINTAŞ

Atatürk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Department of Geometry

Supervisor: Prof. Dr. Aydın GEZER

Let $(M_{2k}, \overline{\nabla})$ be an anti-Kähler Weyl manifold equipped with an almost complex structure $\mathcal{J}$ and a pseudo-Riemann metric g. Firstly, we give condition for the pseudo-Riemann metric g to be holomorphic with respect to the almost complex structure $\mathcal{J}$. We define a quarter-symmetric connection on the manifold $(M_{2k}, g, \mathcal{J}, \overline{\nabla})$ and compute all of curvature tensors of this connection. Secondly, we introduce anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold $(M_{2k}, g, \mathcal{J}, \overline{\nabla})$ and we get the condition under which the almost complex structure on $(M_{2k}, g, \mathcal{J}, \overline{\nabla})$ is integrable. We present properties of the Ricci and Ricci* curvature tensor on $(M_{2k}, g, \mathcal{J}, \overline{\nabla})$. Finally, we prove that the scalar and scalar* curvatures on $(M_{2k}, g, \mathcal{J}, \overline{\nabla})$ coincide each other if and only if the manifold $(M_{2k}, g, \mathcal{J}, \overline{\nabla})$ is isotropic anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold.

2019, 45 pages

Keywords: Almost complex structure, Anti-Kähler Weyl manifold, pseudo-Riemannian metric, Isotropic structure

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunmuş olduğum bu çalışma Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamda her türlü özveriyi sağlayan, her adımda desteğini ve güvenini eksik etmeyen sevgili danışmanım Sayın Prof. Dr. Aydın GEZER'e, yardımlarından ötürü Sayın Dr. Öğr. Üyesi Çağrı KARAMAN'a ve İbrahim Hakkı ÖZSUBAŞI'na en içten dileklerim ve kalbi duygularımla teşekkür ederim.

Çocukluğum ve eğitim hayatım boyunca kendilerinden görmüş olduğum güven ve destekten dolayı beraber hayaller kurduğumuz anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

Elif ALTINTAŞ
Ocak, 2019

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
M_n	: n-boyutlu manifold
$C^{\infty}(M_n, \mathbb{R})$	: $f: M_n \to \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonların kümesi
f	: Sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyon
I	: Birim tensör alanı
$\mathcal{J}$	: Hemen hemen kompleks yapı
$[X, Y]$	: X ve Y vektör alanlarının Lie çarpımı
∇	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı afin (Lineer) Konneksiyon
∇_X	: X vektör alanı yönündeki kovaryant türev
τ	: Topolojik uzay
φ	: Homeomorfizm
x_i	: Vektörün koordinatları
ξ^i	: Kovektörün koordinatları
$T_q^p(M_n)$	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı (p, q) tipli tensörlerin kümesi
$\mathfrak{I}_q^p(M_n)$	: (M_n) manifoldu üzerinde tanımlı(p, q) tipli tensör alanların cebiri
$\mathfrak{I}^{*p}_{\ q}(M_n)$	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı pür tensörlerin uzayı
T_{ij}^k	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun burulma tensörü
$R_{ijk}^{\ \ \ l}$	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü
R_{jk}	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun Ricci tensörü
S_c	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun skaler eğriliği
$N_{\mathcal{J}}$	: $\mathcal{J}$ afinor alanının Nijenhuis tensörü
g	: M_n manifoldu üzerinde tanımlı Riemann metriği
G	: M_{2n} hemen hemen anti-Hermitian manifoldu üzerinde tanımlı twin metriği
Φ	: Tachibana operatörü
$(M_{2k}, g, \overline{\nabla})$	: Weyl manifold

$\dot{\nabla}$	: Prolanged kovaryant türev
$\bar{\Gamma}_{ij}^{l}$	: $\overline{\nabla}$ konneksiyonun bileşenleri
$\bar{T}_{ij}^{l}$	: $\overline{\nabla}$ konneksiyonun burulma tensörü
$\bar{R}_{ijk}{}^{l}$	: $\overline{\nabla}$ konneksiyonun eğrilik tensörü
$\bar{R}_{jk}$	: $\overline{\nabla}$ konneksiyonun Ricci tensörü
$\bar{S}_{c}$	: $\overline{\nabla}$ konneksiyonun skaler eğriliği
$(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$	: Anti-Kähler Weyl manifold
$\widetilde{\nabla}$	: Anti-Kähler Weyl manifoldu üzerinde tanımlı quarter-simetrik konneksiyon
$\tilde{\Gamma}_{ij}^{l}$	: $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun bileşenleri
$\tilde{T}_{ij}^{l}$	: $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun burulma tensörü
$\tilde{R}_{ijk}{}^{l}$	: $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun eğrilik tensörü
$\tilde{R}_{jk}$	: $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun Ricci tensörü
$\tilde{S}_{c}$	: $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun skaler eğriliği

1. GİRİŞ

M.Ö. ki yıllar arasında yaşamış olan Heradot'a göre geometrinin temelleri eski Mısır'a kadar uzanır. Heradot, geometrinin başlangıcında Nil nehrinin önemli bir yere sahip olduğunu söylemiştir. O dönemde kralın her Mısırlıya kare şeklinde tarla verip, ona göre Mısırlılardan vergi aldığını gözlemlemiştir. Tarlanın kenarları sular altında kaldığı zamansa ölçümcülerin gelip, geri kalan tarla için vergi aldıklarını söylemiştir. Bu bakımdan eski Mısırdaki geometri yer ve ölçme olarak ifade edilebilir.

Geometri ile ilgili ilk sistematik özelliklere sahip çalışma M.Ö 330-275 arasında yaşamış olan Öklid (Euclides) tarafından yapılmıştır. Yunan matematikçi, doğruluğu açık olarak görülebilen 5 temel aksiyomu kabul etmiş ve 13 ciltten oluşan "Elementler" adlı kitabıyla geometri dünyasında seçkin bir yer kaplamıştır. Böylece Öklid varlığı yıllarca süren Öklid geometrisi isimli bir ekolün oluşmasına neden olmuştur. Öklid'in bu ekolü, 19. yüzyıla kadar rakipsiz olarak kalmıştır. 1827 yılında Gauss, Öklid'in ilk dört aksiyomunu sağlayan ancak beşinci aksiyomu olan " Bir doğruya dışında alınan bir noktadan bir ve yalnız bir paralel çizilebilir." şeklindeki aksiyomu sağlamayan geometrilerin varlığından şüphelenmeye başlamıştır.

Gauss, Hannover'da yaptığı yüzey ölçümlerinde, ölçüm hatalarının istatistiksel dağılımını veren Gauss dağılımını kafasında iyice belirginleştirdi. Bu ölçümler Gauss'un diferensiyel geometriye ilgi duymasını sağladı. 1827 yılında muhteşem teoremi *Theorema Egregium* da, Gaus eğriliği adındaki ölçümü ortaya koymuştur. Bu teoremde bir yüzeyin eğriliğinin yüzey üzerindeki eğrilere bağlı olduğunu ve yüzeyden bağımsız olduğunu göstermiştir.

Öklid dışı geometriler hakkında çığır yaratan ikinci çalışma ise Berhard Riemann tarafından yapılmıştır. 1854'te akademik kabul için Göttingen Üniversitesinde sunum yapan Riemann bu sunumda tanımladığı çok katlı genişletilmiş çokluklar (Manifold) kavramıyla Öklid dışı geometriye yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Böylece çok katlı anlamına gelen manifold kavramı ilk kez Riemann tarafından tanımlanmış oldu. Riemann'ın geliştirdiği bu yeni kavram Einstein'in izafiyet teorisindeki uzay zaman kavramı için önemli bir temel oluşturmuştur ve yapılan çalışmaların sonucunda manifoldlar üzerinde ölçme işlemi yapılabilmesi amacıyla Riemann metriği tanımlanmıştır.

Manifold (Çok katlı) kavramı her ne kadar eğri ve yüzeyleri çok boyutlu uzaylara genelleştirmak amacıyla ortaya çıkmış olsa da manifoldların çoğunun vektör uzayı yapısına sahip olmaması manifoldlar üzerinde difrensiyel alma, türevleme ve vektör alanı tarif etme gibi işlemlerin yapılmasına engel teşkil etmiştir. Bu engeli ortadan kaldırmak için manifoldlar üzerinde manifold ve Öklid uzayı arasında tanımlanan yerel haritalar olan homeomorfizmler ve bu haritaların birleşimi olarak tanımlanabilen atlaslar vasıtasıyla diferensiyellenebilir yapılar kurulmuş ve bunun sayesinde diferansiyellenebilir manifold kavramı tanımlanmıştır. Diferensiyellenebilir manifoldların üzerinde Riemann metriklerinin tanımlanmasıyla oluşan manifold ise Riemann manifoldu olarak tanımlanmıştır. Manifold kavramı ilk olarak Riemann tarafından tanımlanmış olmasına rağmen ilk detaylı çalışma 1923'de Weyl tarafından verilmiş ve Whitney (1936) tarafından da günümüzdeki formuna dönüştürülmüştür.

Weyl manifoldları ise 1918 yılında H. Weyl tarafından fizikteki birleşik alanlar teorisini formüle etmek için tanımlanmıştır. Bu teori, elektromanyetik teori için gerekli olan şartları sağlamadığı için birleştirilmiş teori olarak kabul edilmedi. 20. yüzyılın ikinci yarısında Weyl geometri kuantum mekanik, parçacık fiziği gibi fiziğin farklı alanlarında da çalışıldı. Weyl'in birleşik alanlar teorisi fizikçiler tarafından kabul görmemesine rağmen Weyl manifoldları hem fizikçilerin hem de matematikçilerin ilgisini çekmiş ve bu konuda birçok çalışma yapılmıştır.

Weyl manifoldları ile ilgili çalışmlar, özellikle 1990'lı yıllarda ve sonrasında sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Bu konuda Zlatanov (1990), Tsareva (1990), Özdeğer (1997), Özdemir (2013) ve yanı sıra Canfes (2011) gibi isimlerin büyük katkıları vardır.

Anti-Kähler Weyl manifoldlar ve anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldları üzerinde çalışılacak olan bu tezde diğer manifoldlar üzerinde elde edilen sonuçlardan ne gibi benzerlikler ya da farklılıklar olduğunu ortaya çıkarmak amacıyla bu çalışma yapılmıştır. Bu çalışmanın Araştırma ve Bulgular kısmı anti-Kähler Weyl manifoldları ve anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldları olmak üzere iki alt bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde anti-Kähler Weyl manifoldları tanımlandı ve bu manifold üzerinde bir quarter-simetrik $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonu tanımlanarak bu konneksiyon hakkında bazı önemli sonuçlar elde edildi.

İkinci bölümde ise anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldları tanımlandı. Daha sonra bu manifoldların hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olduğu elde edildi. Anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldları üzerindeki Ricci ve Ricci* tensörlerinin çakışma şartları bulundu. Son olarak, anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun skaler ve skaler* eğriliklerinin çakışması için gerek ve yeter şartın bu manifoldun izotropik anti- Kähler-Codazzi Weyl manifold olduğu gösterildi.

Sonuç ve tartışma bölümünde ise elde edilen bulgular yorumlanarak tez çalışması sonlandırıldı.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışması boyunca ihtiyaç duyduğumuz temel kavramlar konu bütünlüğü dâhilinde sunulmuştur.

2.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

Tanım 2.1.1: (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere birbirinden farklı her $x, y \in X$ noktaları için ayrık ve açık U_x, $U_y \in \tau$ komşulukları varsa (X, τ) topolojik uzayına Hausdorff uzay denir (Salimov ve Mağden 2008).

(X, τ) Hausdorff topolojik uzay ise birbirinden farklı her $x, y \in X$ noktaları için $U_x \cap U_y = \emptyset$ olacak şekilde $U_x, U_y \in \tau$ komşulukları vardır.

Tanım 2.1.2: M ve N birer topolojik uzay olsun. $f: M \to N$ fonksiyonu birebir, örten ve sürekli iken f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna M den N ye bir homeomorfizm adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

Burada f bir homeomorfizm olursa M ve N uzaylarına da topolojik olarak birbirlerine denktir veya homeomorfiktir denir (Hacısalihoğlu 1998).

Tanım 2.1.3: X Hausdorff topolojik uzay olmak üzere herhangi bir $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ kümesine tanımlanan

$$\varphi: U \to V$$

homeomorfizmine X de n boyutlu harita veya n boyutlu koordinat sistemi, U ya ise φ haritasının koordinat bölgesi veya koordinat komşuluğu denir (Salimov ve Mağden 2008).

Haritalar genellikle (U, φ) şeklinde gösterilir. Eğer $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$$

olur. Buradaki $x^1, x^2, \dots, x^n$ reel sayılarına x noktasının φ haritasındaki koordinatları denir.

Tanım 2.1.4: M Hausdorff topolojik uzay olmak üzere M uzayının n-boyutlu φ_α haritalarının U_α koordinat komşuluklarının birleşimi X uzayını oluşturursa, yani

$$M = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \ , \qquad (I \ indisler \ kümesi)$$

ise M ye n boyutlu topolojik monifold veya n boyutlu manifold denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.5: M Hausdorff topolojik uzay, k bir doğal sayı ve I indis kümesi olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha) \colon U_\alpha \subset X, \alpha \in I\}$ yerel haritalar ailesine M uzayı üzerinde C^k sınıfından n boyutlu atlas denir (Salimov ve Mağden 2008).

i. Yerel haritaların U_α koordinat komşulukları M yi oluşturur. Buna denk olarak M, n boyutlu topolojik manifolddur.

ii. Herhangi $\alpha, \beta \in I$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ise

$$\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

dönüşümü C^k sınıfındandır.

Tanım 2.1.5 de verilen $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümüne ise koordinatların dönüşümü denir. $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$ olursa $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümü tanımlanamaz. Bu durumda $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün C^k sınıfından olduğu kabul edilir.

Tanım 2.1.5 de verilen ii şartına C^k uzlaşma şartı denir ve bu şart $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ koordinat dönüşümünün difeomorfizm olmasına denktir. Bu durum ise $\varphi_\beta o \varphi_\alpha^{-1}$ dönüşümünün Jakobiyen matrisinin sıfırdan farklı olmasına denktir.

Tanım 2.1.6: M sayılabilir baza sahip olan Hausdorff topolojik uzay olsun. Eğer M üzerinde n boyutlu C^∞ sınıfından atlasların C^∞ yapısı verilmiş ise M uzayına n boyutlu C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold denir ve M_n ile gösterilir (Salimov ve Mağden 2008).

2.2. Tensör Alanları

Tanım 2.2.1: B_n, n boyutlu vektör uzayı ve B_n^* bu uzayın dual kovektör uzayı olmak üzere $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q \in B_n$ vektörleri ve $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p \in B_n^*$ kovektörleri için;

$$t: \underbrace{B_n \times B_n \times \dots \times B_n}_{q} \times \overbrace{B_n^* \times B_n^* \times B_n^* \dots \times B_n^*}^{p} \to \mathbb{R} \quad w = t\left(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p\right)$$

şeklinde tanımlanan reel değerli fonksiyonu bütün değişkenlerine göre lineer oluyorsa bu fonksiyona multilineer fonksiyon denir (Salimov ve Mağden 2008).

Örneğin birinci vektör değişkeni için lineerlik şartı $a, b \in \mathbb{R}$ reel sayıları için

$$\begin{aligned} t\left(a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p\right) = {} & at\left(\vec{x}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p\right) \\ & + bt\left(\vec{y}, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_q, \xi^1, \xi^2, \dots, \xi^p\right) \end{aligned}$$

şeklinde olup Tanım 2.2.1 de verilen bu multilineer fonksiyona B_n uzayında p dereceden kontravaryant, q dereceden kovaryant tensör denir.

Tensörlerin tipi (p,q) sembolüyle gösterilir ve $(p,0)$ tipli tensörlere kontravaryant tensörler, $(0,q)$ tipli tensörlere ise kovaryant tensörler denir.

p ve q her hangi iki doğal sayı olmak üzere $s = p + q$ sayısına tensörün valentliği denir.

B_n vektör uzayı üzerinde tanımlı (p,q) tipli tensörlerin kümesini $T_q^p(B_n)$ ile gösterelim. Bu küme üzerinde tanımlanan tensörlerde toplama ve tensörü bir skalerle çarpma işlemleriyle birlikte $\left(T_q^p(B_n), +, \cdot\right)$ yapısı bir vektör uzayı teşkil eder.

Tanım 2.2.2: $g,\ B_n$ vektör uzayı üzerinde $(0,2)$ tipli simetrik tensör olmak üzere $\forall \vec{y} \in B_n$ vektörü için

$$g(\vec{x}, \vec{y}) = 0$$

eşitliği sadece $\vec{x} = \vec{0}$ olması halinde sağlanıyorsa g tensörüne regüler tensör denir.

Tanım 2.2.3: $g,\ B_n$ vektör uzayı üzerinde $(0,2)$ tipli simetrik tensör ve $\forall \vec{x} \in B_n$ olmak üzere $g(\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$ ise ve $g(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ şartı $\vec{x} = \vec{0}$ olması halinde sağlanıyorsa g tensörüne pozitif tanımlı tensör denir.

Tanım 2.2.4: $g,\ B_n$ vektör uzayı üzerinde $(0,2)$ tipli simetrik tensör olmak üzere g regüler tensör ise g ye B_n uzayı üzerinde esas tensör denir.

Tanım 2.2.5: $\mathrm{T}_1^1(B_n)$ vektör uzayının elamanlarına yani $(1,1)$ tipli tensörlere B_n uzayında afinor denir. Afinorlar genellikle φ sebolüyle gösterilir.

Tanım 2.2.6: M_n diferansiyellenebilir bir manifold ve M_n manifoldu üzerindeki herhangi bir p noktasındaki tanjant vektör uzayı T_p olsun. $\forall p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $X_p \in T_p$ vektörünü karşılık getiren $X: p \to X_p$ dönüşümüne M_n üzerinde vektör alanı denir (Salimov ve Mağden 2008).

f, M_n manifoldu üzerinde bir fonksiyon olmak üzere $(Xf)(p) = X_p f$ biçiminde tanımlanan (Xf) de M_n üzerinde bir fonksiyondur. Eğer her diferensiyellenebilir f fonksiyonu için (Xf) de diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise X vektör alanına diferansiyellenebilir vektör alanı denir.

Tanım 2.2.7: M_n diferansiyellenebilir bir manifold ve $p \in M_n$ olsun. $p \in M_n$ noktasındaki tensör uzayı $\mathrm{T}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{p}}(p)$ olmak üzere $\forall p \in M_n$ noktasına bir ve yalnız bir $t_p \in \mathrm{T}_{\mathrm{q}}^{\mathrm{p}}(p)$ tensörünü karşılık getiren $t: p \to t_p$ dönüşümüne M_n üzerinde tensör alanı denir (Bishop ve Goldberg 1968).

2.3. Diferensiyellenebilir Manifold Üzerinde Lineer Konneksiyonlar

2.3.1. Lineer Konneksiyonlu Uzaylar

Tanım 2.3.1.1: M_n diferensiyellenebilir manifold ve M_n manifoldu üzerindeki vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olsun. $X, Y, Z \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ vektör alanları ve $f \in \mathfrak{I}_0^0(M_n)$ fonksiyonu için $\nabla: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \times \mathfrak{I}_0^1(M_n) \to \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ şeklinde tanımlanan ∇ dönüşümü

i. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$

ii. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$

iii. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$

iv. $\nabla_X (fY) = X(f) Y + f \nabla_X Y$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme M_n manifoldu üzerinde afin veya lineer konneksiyon (M_n, ∇) ikilisine ise afin konneksiyonlu veya lineer konneksiyonlu uzay denir (Şahin 2012).

Tanım 2.3.1.2: M_n diferensiyellenebilir manifold ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ olsun. $\Im(M_n)$ cebir üzerinde tanımlanan $\nabla_X : \Im(M_n) \rightarrow \Im(M_n)$ dönüşümü $\forall f, h \in \Im_0^0(M_n)$ ve $\forall t \in \Im_q^p(M_n)$ için

i. $\nabla_{fX+hY} t = f\nabla_X t + h\nabla_Y t$

ii. $\nabla_X f = Xf$

şartlarını sağlıyorsa ∇_X dönüşümüne X vektör alanı yönündeki kovaryant türev denir (Salimov ve Mağden 2008).

M_n manifoldu üzerindeki U koordinat komşuluğundaki x^i lokal koordinatlarına ve bu komşulukta $\partial_i = \frac{\partial}{\partial\, x^i}$ doğal vektör alanlarını göz önüne alalım ve $\nabla_{\partial_i} = \nabla_i$ gösterimini kabul edelim. ∇_i 'yi ∂_j vektör alanlarına uygulayalım. Sonuç vektör alanı olduğundan dolayı

$$\nabla_i \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$$

yazabiliriz.Burada $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k(x)$, U komşuluğunda tayin edilmiş C^∞ sınıfından fonksiyonlardır. U koordinat komşuluğunda yeni bir koordinat sistemine geçelim ve bu yeni koordinat sistemindeki lokal koordinatlar $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ biçiminde olsun. Bu takdirde,

$$\nabla_{i'} \partial_{i'} = \Gamma_{i'j'}^{k'} \partial_{k'} \tag{2.1}$$

olur. $\partial_{i'} = \frac{\partial}{\partial x^{i'}}$ olduğundan (2.1) ve ∇ 'nın 1. özelliğinden

$$\Gamma_{i'j'}^{k'}\partial_{k'} = \nabla_{\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\partial_i}\partial_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_{\partial_i}\partial_{j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\nabla_i\partial_{j'} \tag{2.2}$$

bulunur. ∇ ‘nın 2. özelliğinden

$$\begin{aligned}
\nabla_i\partial_{j'} &= \nabla_i\left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\right) = \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\partial_j + \Gamma_{ij}^k\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\partial_k \\
&= \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\partial_{k'} + \Gamma_{ij}^k\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\partial_{k'} \\
&= \left(\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}x^{j'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\right)\partial_{k'} \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

yazılır. (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden $\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\right)$ ve $\left(\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\right)$ matrislerinin birbirinin tersi olduğunu ve $\partial_{k'}$ vektörlerinin çatı olduğunu dikkate alırsak,

$$\Gamma_{i'j'}^{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k}\Gamma_{ij}^k + \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial x^{i'}x^{j'}} \tag{2.4}$$

eşitliğini yazarız. Böylece, ∇ konneksiyonu verildiğinde (2.4) kuralına göre dönüşen n^3 sayıda Γ_{ij}^k fonksiyonlarını alabileceğimizi göstermiş olduk.

Tersine, (2.4) kuralına göre dönüşen n^3 sayıda Γ_{ij}^k fonksiyonları verilmişse M_n üzerinde ∇ afin konneksiyonunu tayin edebiliriz. Yani, M_n üzerinde afin konneksiyonun birbirine denk olan iki tanımını vermiş oluruz. Buradaki Γ_{ij}^k lere ∇ afin konneksiyonunun katsayıları veya 2. tür Christoffel sembolleri adı verilir.

Keyfi bir $t \in \mathfrak{I}_q^p(M_n)$ tensör alanının kovaryant türevini ve doğal çatıdaki koordinatlarını bulalım. $Y, X_1, X_2, \dots, X_q \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ vektör ve $w^1, w^2, \dots, w^p \in \mathfrak{I}_q^p(M_n)$ kovektör alanları için;

$$\begin{aligned}\nabla_Y\left(t\left(X_1, X_2, \dots, X_q, w^1, w^2, \dots, w^p\right)\right) &= (\nabla_Y t)\left(X_1, X_2, \dots, X_q, w^1, w^2, \dots, w^p\right) \\ &\quad - \sum_{\lambda=1}^{q} t\left(X_1, \dots, \nabla_Y X_\lambda, \dots, X_q, w^1, w^2, \dots, w^p\right) \\ &\quad - \sum_{\mu=1}^{p} t\left(X_1, X_2, \dots, X_q, w^1, \dots, \nabla_Y w^\mu, \dots, w^p\right) \qquad (2.5)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.5) ifadesini doğal çatıda yazmak için $Y = \partial_k$, $X_\lambda = \partial_{j_\lambda}$ ve $w^\mu = dx^{i_\mu}$ biçiminde ele alalım. Buna göre,

$$\begin{aligned}\nabla_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = (\nabla t)_{k j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} &= (\nabla_k t)_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} \\ &= \partial_k t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} + \sum_{\mu=1}^{p} \Gamma_{km}^{i_\mu} \, t_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots m \dots i_p} - \sum_{\lambda=1}^{q} \Gamma_{k j_\lambda}^{m} \, t_{j_1 \dots m \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}\end{aligned}$$

biçiminde (p, q) tipli tensör alanının doğal çatıdaki kovaryant türev formülü bulunmuş olur. (Salimov ve Mağden 2008).

Özel olarak $(0,2)$ tipli g tensör alanının kovaryant türevini hesaplayalım. $g \in \mathfrak{I}_2^0(M_n)$ olmak üzere kovaryant türevin özelliklerine göre

$$\nabla_{\mathrm{i}} g_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{\mathrm{ij}}^{s} g_{sk} - \Gamma_{ik}^{s} g_{js}$$

eşitliği bulunur.

2.3.2. Eğrilik ve Burulma Tensörleri

Tanım 2.3.2.1: M_n diferensiyelenebilir bir manifold ve ∇, M_n manifoldu üzerinde lineer konneksiyon olsun. $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları olmak üzere

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.6}$$

eşitliği ile tanımlanan $T: \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$ dönüşümüne ∇ lineer konneksiyonun burulma tensörü denir (Şahin 2012).
(2.6) eşitliğinde $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ olarak alınırsa, T'nin doğal çatıdaki koordinatları

$$T_{ij}^{\ \ k} = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$$

olarak yazılır.

Tanım 2.3.2.2: M_n diferensiyellenebilir bir manifold ve ∇, M_n manifoldu üzerinde bir linner konneksiyon olsun. ∇ konneksiyonun burulma tensörü $T_{ij}^{\ \ k} = 0$ ise ∇ konneksiyonuna burulmasız konneksiyon, (M_n, ∇) ikilisine de burulmasız uzay denir.

Afin konneksiyonlu uzaylar içerisinde burulması sıfır olan (burulmasız) uzaylar çok önemli bir sınıf teşkil eder. Bu tür uzaylarda konneksiyon katsayıları simetrik olur. Yani,

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0 \ \Leftrightarrow \ T_{ij}^{\ \ k} = 0$$

biçimindedir (Salimov ve Mağden 2008). Dolayısıyla burulmasız uzaylarda

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.3.2.3: M_n diferensiyelenebilir bir manifold ve ∇, M_n manifoldu üzerinde lineer konneksiyon olsun. $X, Y, Z \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ vektör alanları olmak üzere

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

biçiminde tanımlanan tensöre ∇ lineer konneksiyonun eğrilik tensörü denir.

Eğrilik tensörü tanımında $X = \partial_i\, , Y = \partial_j\, , Z = \partial_k$ olarak alınırsa R nin doğal çatıdaki ifadesi

$$R_{ijk}{}^{s} = \partial_i \Gamma_{jk}^{s} - \partial_j \Gamma_{ik}^{s} + \Gamma_{im}^{s} \Gamma_{jk}^{m} - \Gamma_{jm}^{s} \Gamma_{ik}^{m}$$

biçiminde bulunur.

Yukarıdaki son eşitlikten kolayca görülür ki $R_{ijk}{}^{s} = -R_{jik}{}^{s}$ yazılır. Yani eğrilik tensörü ilk iki alt indise göre antisimetriktir.

Tanım 2.3.2.4: M_n manifoldunun her bir noktasına bir kovektör karşılık getiren dönüşüme kovektör alanı veya 1-form adı verilir (Salimov ve Mağden 2008).

M_n diferensiyellenebilir bir manifold ve ∇, M_n manifoldu üzerinde burulmasız bir lineer konneksiyon olsun. ∇ konneksiyonun R eğrilik tensör alanı aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

i) $R_{ijk}^{l} + R_{jki}^{l} + R_{kij}^{l} = 0$

ii) $\nabla_i R_{jkl}^{m} + \nabla_j R_{kil}^{m} + \nabla_k R_{ijl}^{m} = 0$

Burada verilen *i* eşitliğine 1. Bianchi özdeşliği, *ii* eşitliğine ise 2. Bianchi özdeşliği denir.

2.3.3. Riemann Manifoldu

Tanım 2.3.3.1: M_n diferensiyellenebilir manifold ve M_n manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\mathfrak{I}_0^1(M_n)$ olsun.

$$g: \mathfrak{I}_0^1(M_n) \times \mathfrak{I}_0^1(M_n) \to \mathbb{R}$$

ile tanımlanan g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için

i. $g(X,Y) = g(Y,X)$

ii. $g(X,X) \geq 0$ ve $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör denir. (M_n, g) ikilisine ise Riemann manifoldu denir (Şahin 2012).

(M_n, g) Riemann manifoldu olmak üzere bu manifold üzerinde tanımlı ∇ afin konneksiyon için eğer $\nabla g = 0$ ise bu konneksiyona g ye göre metrik konneksiyon denir bu manifold üzerinde tanımlı burulmasız bir tek metrik konneksiyon vardır.

Tanımda verilen pozitif tanımlılık şartı yerine " Her $Y \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için $g(X,Y) = 0$ olması $X = 0$ olmasını gerektirir." şeklinde tanımlanan g bilineer formunun regülerlik şartı konulursa, bu durumda (M_n, g) ikilisine yarı-Riemann (pseudo-Riemann) manifoldu denir (Kühnel 2005).

(M_n, g) Riemann manifoldu ve ∇ ise bu manifoldun Riemann konneksiyonu olmak üzere her $X, Y, Z \in \mathfrak{I}_0^1(M_n)$ için

$$2g(\nabla_X Y, Z) = Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \qquad (2.7)$$
$$-g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y])$$

eşitliği yazılabilir. (2.7) eşitliğine Kozsul formülü denir. Burada $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ ve $Z = \partial_k$ olarak alınırsa doğal koordinatlardaki ifadesi,

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} \left(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij} \right)$$

şekinde olur. Buradaki Γ_{ij}^h fonksiyonlarına, ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayıları denir.

(M_n, g) Riemann manifoldunun ∇ Levi-Civita konneksiyonunun eğrilik tensörü doğal çatıda,

$$R_{ijk}{}^s = \partial_i \Gamma_{jk}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s + \Gamma_{im}^s \Gamma_{jk}^m - \Gamma_{jm}^s \Gamma_{ik}^m$$

şeklinde tanımlanır ve bu tensöre Riemann eğrilik tensörü denir.

Ayrıca Riemann eğrilik tensörü (0,4) tipli kovaryant tensör olarak da yazılabilir. Yani,

$$R_{ijk}{}^s g_{sl} = R_{ijkl}$$

olur.

(M_n, g) Riemann manifoldu , ∇ ise bu manifoldun Riemann konneksiyonu olmak üzere Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özelikleri sağlar:

$i)$ $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$,
$ii)$ $R_{ijkl} = R_{klij}$.

Tanım 2.3.3.2: Eğrilik tensörü $R_{ijk}{}^{l}$ yardımı ile tanımlanan,

$$C_1^1\left(R_{ijk}{}^{l}\right) = R_{ljk}{}^{l} = R_{jk}$$

tensörüne Ricci eğrilik tensörü denir. Burada C_1^1, kontraksiyon işlemidir. Ayrıca Ricci tensörü simetrik olupv $R_{jk} = R_{kj}$ dir.

Tanım 2.3.3.3: Ricci tensöründen tam kontraksiyon ile elde edilen tensöre skaler eğrilik denir. Yani S,

$$S = g^{jk} R_{jk}$$

biçimindedir.

2.3.4. Pür Tensörler

M_n diferansiyellenebilir manifold $\mathcal{J}$ ise bu manifold üzerinde bir afinor alan olmak üzere $X_1, X_2, \ldots, X_q \in \Im_0^1(M_n)$ vektör ve $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p \in \Im_1^0(M_n)$ kovektör alanları alınsın. $t \in \Im_q^p(M_n)$ tensör alanı

$$\begin{aligned} t\left(\mathcal{J}X_1, X_2, \ldots, X_q, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p\right) &= t\left(X_1, \mathcal{J}X_2, \ldots, X_q, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p\right) \\ &= t\left(X_1, X_2, \ldots, \mathcal{J}X_q, \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p\right) \\ &= t\left(X_1, X_2, \ldots, X_q, \mathcal{J}'\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p\right) \end{aligned}$$

$$= t\left(X_1, X_2, \dots, X_q, \omega^1, \mathcal{J}'\omega^2, \dots, \omega^p\right)$$
$$= t\left(X_1, X_2, \dots, X_q, \omega^1, \omega^2, \dots, \mathcal{J}'\omega^p\right)$$

eşitliğini sağlıyorsa t ye $\mathcal{J}$ afinoruna göre pür tensör alanı denir. Bu tanımda $\mathcal{J}', \mathcal{J}$ afinorunun eşlenik operatörüdür ve $X \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanı ve $\xi \in \Im_1^0(M_n)$ kovektör alanı için

$$(\mathcal{J}'\xi)(X) = \xi(\mathcal{J}X) = (\xi o \mathcal{J})(X)$$

şeklinde tanımlanır (Salimov 2012).

Özel olarak $(0,2)$ tipli g tensör alanının pürlük şartı $X \in \Im_0^1(M_n)$ ve $\varphi \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere

$$g(\mathcal{J}X, Y) = g(X, \mathcal{J}Y) \tag{2.8}$$

eşitliğiyle tanımlıdır.

(2.8) eşitliğini doğal çatıda ifade etmek için $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ olarak alınırsa,

$$\mathcal{J}_i^k g_{kj} = \mathcal{J}_j^k g_{ik}$$

olarak bulunur.

2.3.5. Nijenhuis Tensör Alanı

Nijenhuis tensör alanı $(1,2)$ tipli tensör alanı olup yapı olarak adlandırılan $(1,1)$ tipli afinor alanın integrallenebilirlik şartı hakkında bilgi verir. Bu tensör alanına aynı zamanda yapıların burulma tensörü de denilmektedir. Nijenhuis tensör alanı tanımlaması kullanılacak yapıya göre farklı olabilir. Nijenhuis tensör alanı en genel haliyle aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

Tanım 2.3.5.1: $A, B \in \Im_1^1(M_n)$ afinor alanları ve $X, Y \in \Im_0^1(M_n)$ vektör alanları için

$$N_{A,B}(X,Y) = [AX,BY] + [BX,AY] + AB[X,Y] + BA[X,Y] \\ -A[X,BY] - A[BX,Y] - B[X,AY] - B[AX,Y] \qquad (2.9)$$

eşitliği ile tanımlanan $N_{A,B} : \Im_0^1(M_n) \times \Im_0^1(M_n) \to \Im_0^1(M_n)$ tensör alanına Nijenhuis tensör alanı denir.

(2.9) de verilen eşitlikte $\mathcal{J} \in \Im_1^1(M_n)$ olmak üzere $A = B = \mathcal{J}$ alınarak gerekli işlemler yapılırsa;

$$N_{\mathcal{J}}(X,Y) = 2N(X,Y) = 2[\mathcal{J}X,\mathcal{J}Y] - 2\mathcal{J}[\mathcal{J}X,Y] - 2\mathcal{J}[X,\mathcal{J}Y] + 2\mathcal{J}^2[X,Y]$$

eşitliği bulunur.

Özel olarak $\mathcal{J}$ afinor alanı için Nijenhuis tensör alanı

$$N(X,Y) = [\mathcal{J}X,\mathcal{J}Y] - \mathcal{J}[\mathcal{J}X,Y] - \mathcal{J}[X,\mathcal{J}Y] + \mathcal{J}^2[X,Y]$$

eşitliği ile tanımlanabilir.

2.3.6. Tachibana Operatörü

Pür tensörlerin tensörel toplamları, bir skalerle çarpımları, pür tensör alanlarının kontraksiyonlu çarpımları da pür tensör alanıdır.

$\Im(M) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p(M)$ olmak üzere $\Im(M)$ pür tensörler kümesi tensörel toplam ve kontraksiyonlu çarpım işlemlerine göre $\mathbb{R}$ kümesi üzerinde bir tensör cebiri oluşturur. Bu tensör cebirini ${\Im^*}_q^p(M)$ ile gösterelim.

Tanım 2.3.6.1: $\Im(M) = \sum_{p,q=0}^{\infty} \Im_q^p(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir tensör cebiri , $\mathcal{J}$ ise afinor alan olmak üzere $\Phi_{\mathcal{J}}\big|_{p+q\geq 0} : \Im^*(M) \to \Im(M)$ tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu dönüşüme Tachibana operatörü denir (Yano and Ako 1968; Salimov 2010).

i. $\Phi_{\mathcal{J}}$ operatörü lineer operatördür.

ii. Her p ve q doğal sayısı için $\Phi_{\mathcal{J}} : {\Im^*}_q^p(M) \to \Im_{q+1}^p(M)$ tanımlıdır.

iii. $\otimes^C$ kontraksiyonlu çarpım olmak üzere $\forall t, s \in \Im^*(M)$ için

$$\Phi_{\mathcal{J}}(t \otimes^C s) = \left(\Phi_{\mathcal{J}} t\right) \otimes^C s + t \otimes^C \left(\Phi_{\mathcal{J}} s\right)$$

dir.

iv. $X, Y \in \Im_0^1(M)$ vektör alanları için L_Y, Y ye göre Lie türevi olmak üzere

$$\Phi_{\mathcal{J}X} Y = -(L_Y \mathcal{J})X$$

dir.

v. $\omega \in \Im_1^0(M)$ kovektör ve $X, Y \in \Im_0^1(M)$ vektör alanları için $\iota_Y \omega = \omega \otimes^C Y = \omega(Y)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}(\Phi_{\mathcal{J}X}\omega)Y &= \left(d(\iota_Y \omega)\right)(\mathcal{J}X) - \left(d\left(\iota_Y(\omega o \mathcal{J})\right)\right)X + \omega\left((L_Y \mathcal{J})X\right) \\ &= (\mathcal{J}X)(\iota_Y \omega) - X\left(\iota_{Y\mathcal{J}}\omega\right) + \omega\left((L_Y \mathcal{J})X\right)\end{aligned}$$

dir.

Özel olarak (0,2) tipli pür tensör alanına Tachibana operatörünü uygulanabilir. $X, Y, Z \in \Im_0^1(M)$ ve g (0,2) tipli pür tensör alanı olmak üzere g tensör alanının Tachibana operatörü,

$$\begin{aligned}(\Phi_{\mathcal{J}} g)(X,Y,Z) &= (\mathcal{J}X)g(Y,Z) - Xg(\mathcal{J}Y,Z) + g\big((L_Y \mathcal{J})X,Z\big) + g(Y,(L_z \mathcal{J})X) \\ &= (\mathcal{J}X)g(Y,Z) - Xg(\mathcal{J}Y,Z) - g([\mathcal{J}X,Y],Z) - g(\mathcal{J}[X,Y],Z) \\ &\quad -g(Y,[\mathcal{J}X,Z]) - g(Y,\mathcal{J}[X,Z])\end{aligned}$$

eşitliğiyle bulunur.

2.3.7. Anti- Kähler Manifold

Tanım 2.3.7.1: M_{2n} $2n$ boyutlu diferensiyellenebilir manifold olmak üzere M_{2n} manifoldu üzerinde tanımlanan $\mathcal{J}$ afinor alanı $\mathcal{J}^2 = -\mathrm{I}$ eşitliğini sağlıyorsa $\mathcal{J}$ ye M_{2n} manifoldu üzerinde hemen hemen kompleks yapı , $(M_{2n}, \mathcal{J})$ ikilisine ise hemen hemen kompleks manifold denir.

Tanım 2.3.7.2: M_{2n} 2n boyutlu diferensiyellenebilir hemen hemen kompleks manifold ve $\mathcal{J}$ bu manifold üzerinde bir kompleks yapı olsun. M_{2n} manifoldu üzerindeki g Riemann metriği $X, Y, \in \Im_0^1(M)$ vektör alanları için;

$$g(\mathcal{J}X,Y) = g(X,\mathcal{J}Y)$$

eşitliğini sağlıyorsa g metriğine $\mathcal{J}$ ye göre pür metrik denir.

Tanım 2.3.7.3: M_{2n}, 2n boyutlu diferensiyellenebilir hemen hemen kompleks manifod ve $\mathcal{J}$ afinor alan olsun. $N_{\mathcal{J}}$ Nijenhuis tensörü olmak üzere $N_{\mathcal{J}} = 0$ ise yani $\mathcal{J}$ kompleks yapısı integrallenebilir ise veya buna denk olarak M_{2n} manifoldu üzerindeki burulmasız ∇ lineer konneksiyonu için $\nabla\mathcal{J} = 0$ ise(M_{2n}, g) anti-Hermitian manifolddur.

Tanım 2.3.7.4: M_{2n} diferensiyellenebilir manifoldu $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısı ve g anti-Hermitian metriğine sahip hemen hemen anti-Hermitian manifold olsun. M_{2n} üzerinde X ve Y vektör alanları için

$$G(X,Y) = (go\,\mathcal{J})(X,Y) = g(\,\mathcal{J}X,Y)$$

eşitliği ile tanımlanan G bir anti-Hermitian metriktir. Bu metriğe twin metrik denir.

Tanım 2.3.7.5: M_{2n} hemen hemen anti-Hermitian manifoldu üzerindeki g anti-Hermitian metriği için $\left(\Phi_{\mathcal{J}} G\right) = 0$ ise g ye anti-Kähler metrik (M_{2n}, g) ye ise hemen hemen anti- Kähler manifold denir.

Eğer (M_{2n}, g) hemen hemen anti-Kähler manifold ve $\mathcal{J}$ kompleks yapısı integrallenebilir ise (M_{2n}, g) ye anti-Kähler manifold denir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Weyl Manifold

Tanım 3.1.1: M_{2n} diferansiyellenebilir bir manifold, g bu manifold üzerinde pseudo-Riemannian metrik ve $\overline{\nabla}$ burulmasız afin konneksiyon olmak üzere eğer,

$$\overline{\nabla}_{k} g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}$$

şartı sağlanırsa $(M_{2n}, g, \overline{\nabla})$ üçlüsüne Weyl manifold denir. Burada ω 1-formdur (Özdemir and Canfes 2011).

Weyl manifoldunun konneksiyon katsayısı

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{l} = \Gamma_{ij}^{l} - \{\omega_i \delta_j^l + \omega_j \delta_i^l - \omega^l g_{ij}\}$$

şeklinde olup burada Γ_{ij}^{l} , ∇ Levi-Civita konneksiyonunun katsayılarıdır (Canfes and Özdeğer 1997).

Weyl manifoldunun burulma tensörü

$$\overline{T}_{ij}^{\ \ l} = \overline{\Gamma}_{ij}^{l} - \overline{\Gamma}_{ji}^{l}$$

şeklindedir. Burada Weyl manifoldunun konneksiyon katsayıları yerlerine koyulursa,

$$\begin{aligned}\overline{T}_{ij}^{\ \ l} &= \Gamma_{ij}^{l} - \{\omega_i \delta_j^l + \omega \delta_i^l - \omega^l g_{ij}\} - [\Gamma_{ji}^{l} - \{\omega_j \delta_i^l + \omega_i \delta_j^l - \omega^l g_{ji}\}] \\ &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Yani Weyl manifoldu burulmasızdır.

$(M_{2n}, g, \overline{\nabla})$ Weyl manifoldunun $\bar{R}_{ijk}{}^{l}$ eğrilik tensörü doğal çatıda,

$$\bar{R}_{ijk}{}^{l} = R_{ijk}{}^{l} + \delta_k^l(\nabla_j\omega_i - \nabla_i\omega_j) + \delta_i^l\omega_{jk} - \delta_j^l\omega_{ik} + g^{sl}(\omega_{is}g_{jk} - \omega_{js}g_{ik})$$

olur (Gül 2017). Burada

$$\omega_{jk} = \nabla_j\omega_k + \omega_j\omega_k - \frac{1}{2}\omega_m\omega^m g_{jk}$$

şeklindedir.

Ayrıca Riemann eğrilik tensörü (0,4) tipli kovaryant tensör olarak da yazılabilir. Yani,

$$\bar{R}_{ijkm} = R_{ijkm} + g_{km}(\nabla_j\omega_i - \nabla_i\omega_j) + g_{im}\omega_{jk} - g_{jm}\omega_{ik} + \omega_{im}g_{jk} - \omega_{jm}g_{ik}$$

olur.

Öneri 3.1.1: $(M_{2n}, g, \overline{\nabla})$ Weyl manifoldu , $\overline{\nabla}$ bu manifoldun konneksiyonu olmak üzere Weyl eğrilik tensörü aşağıdaki özelikleri sağlar:

i) $\bar{R}_{ijkm} = -\bar{R}_{jikm}$

ii) $\bar{R}_{ijkm} + \bar{R}_{ijmk} = 2g_{mk}(\nabla_j\omega_i - \nabla_i\omega_j) = 4g_{mk}\nabla_{[j}\omega_{i]}$

İspat : *i)*

$$\begin{aligned}
\bar{R}_{jikm} &= R_{jikm} + g_{km}(\nabla_i\omega_j - \nabla_j\omega_i) + g_{jm}\omega_{ik} - g_{im}\omega_{jk} + \omega_{jm}g_{ik} - \omega_{im}g_{jk} \\
&= -R_{ijkm} - g_{km}(\nabla_j\omega_i - \nabla_i\omega_j) + g_{jm}\omega_{ik} - g_{im}\omega_{jk} + \omega_{jm}g_{ik} - \omega_{im}g_{jk} \\
&= -(R_{ijkm} + g_{km}(\nabla_j\omega_i - \nabla_i\omega_j) + g_{im}\omega_{jk} - g_{jm}\omega_{ik} + \omega_{im}g_{jk} - \omega_{jm}g_{ik}) \\
&= -\ \bar{R}_{ijkm}
\end{aligned}$$

ii)

$$\bar{R}_{ijkm} + \bar{R}_{ijmk} = R_{ijkm} + g_{km}\left(\nabla_{\mathrm{j}}\omega_i - \nabla_i\omega_j\right) + g_{im}\omega_{jk} - g_{jm}\omega_{ik} + \omega_{im}g_{jk}$$
$$= -\omega_{jm}g_{ik} + R_{ijmk} + g_{mk}\left(\nabla_{\mathrm{j}}\omega_i - \nabla_i\omega_j\right) + g_{ik}\omega_{jm} - g_{jk}\omega_{im}$$
$$+\omega_{ik}g_{jm} - \omega_{jk}g_{im}$$
$$= 2g_{mk}\left(\nabla_{\mathrm{j}}\omega_i - \nabla_i\omega_j\right) = 4g_{mk}\nabla_{[j}\omega_{\mathrm{i}]}$$

Weyl manifoldları burulmasız uzay olduğundan burulmasız uzayın birinci ve ikinci Bianchi özdeşliği olarak bilinen aşağıdaki özelliklerini sağlar:

i) $\bar{R}_{ijk}{}^{l} + \bar{R}_{jki}{}^{l} + \bar{R}_{kij}{}^{l} = 0$

ii) $\nabla_m\bar{R}_{kji}{}^{l} + \nabla_k\bar{R}_{jmi}{}^{l} + \nabla_j\bar{R}_{mkl}{}^{l} = 0$

Weyl manifoldunun Ricci tensörü

$$\bar{R}_{jk} = R_{ijk}{}^{i} + \delta_k^i\left(\omega_{\mathrm{ji}} - \omega_{ij}\right) + \delta_i^i\omega_{jk} - \delta_j^i\omega_{ik} + g^{si}\left(\omega_{is}g_{jk} - \omega_{js}g_{ik}\right)$$
$$= R_{jk} + \omega_{jk} - \omega_{kj} + n\omega_{jk} - \omega_{jk} + g^{si}\omega_{is}g_{jk} - \omega_{jk}$$
$$= R_{jk} + (n-1)\omega_{jk} - \omega_{kj} + g^{si}\omega_{is}g_{jk}$$

şeklindedir.

Weyl manifoldunun Ricci tensörü simetrik değildir.

$$\bar{R}_{jk} - \bar{R}_{kj} = R_{jk} + (n-1)\omega_{jk} - \omega_{kj} + g^{si}\omega_{is}g_{jk}$$
$$-R_{kj} - (n-1)\omega_{kj} + \omega_{jk} - g^{si}\omega_{is}g_{kj}$$
$$= n\left(\omega_{jk} - \omega_{kj}\right) \neq 0$$

olup simetrik olmadığı görülür.

Öneri 3.2.2: Weyl manifoldunun Ricci tensörünün simetrik ve antisimetrik parçaları aşağıdaki gibidir:

i) $\bar{R}_{(jk)} = R_{jk} + \frac{(n-2)}{2}\left(\omega_{jk} + \omega_{kj}\right) + g^{si}\omega_{is}g_{kj}$

ii) $\bar{R}_{[jk]} = n\omega_{[jk]}$

İspat : *i)*

$$\bar{R}_{(jk)} = \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{jk} + \bar{R}_{kj}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(R_{jk} + (n-1)\omega_{jk} - \omega_{kj} + g^{si}\omega_{is}g_{jk} + R_{kj} + (n-1)\omega_{kj} - \omega_{jk} + g^{si}\omega_{is}g_{kj}$$

$$= R_{jk} + \frac{(n-2)}{2}\left(\omega_{jk} + \omega_{kj}\right) + g^{si}\omega_{is}g_{kj}$$

ii)

$$\bar{R}_{[jk]} = \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{jk} - \bar{R}_{kj}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(R_{jk} + (n-1)\omega_{jk} - \omega_{kj} + g^{si}\omega_{is}g_{jk} - R_{kj} - (n-1)\omega_{kj} + \omega_{jk} - g^{si}\omega_{is}g_{kj}$$

$$= \frac{n}{2}\left(\omega_{jk} - \omega_{kj}\right)$$

$$= n\omega_{[jk]}$$

Skaler eğrilik tensörü ise

$$\begin{aligned}\bar{S}_c &= g^{jk}\bar{R}_{jk}\\ &= g^{jk}\left(R_{jk} + (n-1)\omega_{jk} - \omega_{kj} + g^{si}\omega_{is}g_{jk}\right)\\ &= S_C + (n-1)\omega_{jk}g^{jk} - g^{jk}\omega_{kj} + g^{si}\omega_{is}\delta_j^j\end{aligned}$$

şeklindedir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}\omega_{jk}g^{jk} &= \left(\nabla_j\omega_k\right)g^{jk} - \omega^k\omega_k - \frac{n}{2}\omega^t\omega_t\\ \omega_{kj}g^{jk} &= \left(\nabla_k\omega_j\right)g^{jk} - \omega^k\omega_k - \frac{n}{2}\omega^t\omega_t\\ \omega_{is}g^{si} &= (\nabla_i\omega_s)g^{si} - \omega^i\omega_i - \frac{n}{2}\omega^t\omega_t\end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki ifadeler yerine koyularsa,

$$\begin{aligned}\bar{S}_c &= S_C + (n-1)(\nabla_j\omega^j) + (n-1)\omega^k\omega_k - (n-1)\frac{n}{2}\omega^t\omega_t\\ &\quad -(\nabla_k\omega^k) + \omega^k\omega_k + \frac{n}{2}\omega^t\omega_t + \left(\nabla_i\omega^i\right) + \omega^i\omega_i - \frac{n}{2}\omega^t\omega_t\\ &= S_C + (n-1)(\nabla_j\omega^j) - \ (n-1)\frac{(n-2)}{2}\omega^j\omega_j\end{aligned}$$

olarak bulunur.

3.2. Prolanged Kovaryant Türev

g metrik tensörünün uygun değişimi altında,

$$\tilde{g} = \lambda^2 g_{ij}\ , \qquad \lambda > 0 \tag{3.1}$$

ω 1-formu ,

$$\widetilde{\omega}_k = \omega_k + \nabla_k ln\lambda$$

kanunu tarafından dönüşür.

Eğer S , g metrik tensörünün (3.1) dönüşümü altında,

$$\check{S} = \lambda^r S$$

formuna dönüşürse $S,\ r$ ağırlıklı g'nin uydusu olarak adlandırılır.

r ağırlıklı S uydusunun prolanged kovaryant türevi,

$$\dot{\nabla}_k S = \overline{\nabla}_k S - r\omega_k S$$

ile tanımlanır. Buradan $\dot{\nabla}_k g_{ij} = 0$ olduğu görülür (Canfes and Özdeğer 1997).

Özel olarak $(1,1)$ tipli afinor alanının prolanged kovaryant türevi

$$\dot{\nabla}_k \mathcal{J}_i^j = \overline{\nabla}_k \mathcal{J}_i^j - 0\omega_k \mathcal{J}_i^j$$

$$\dot{\nabla}_k \mathcal{J}_i^j = \overline{\nabla}_k \mathcal{J}_i^j$$

olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu başlık altında anti-Kähler Weyl manifoldları ve anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldları üzerine bazı sonuçlar verilecektir.

4.1. Anti-Kähler Weyl Manifold

Tanım 4.1.1: M_{2k} diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısı ve g pseudo-Riemannian metriği verilsin. Eğer,

$$g(\mathcal{J}X, Y) = g(X, \mathcal{J}Y) \tag{4.1}$$

ve

$$\dot{\nabla}\mathcal{J} = \overline{\nabla}\mathcal{J} = 0 \tag{4.2}$$

şartları sağlanırsa $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ dörtlüsü bir anti-Kähler Weyl manifoldu tanımlar. Lokal olarak (4.1) ve (4.2) şartları sırasıyla,

$$g_{mj}\mathcal{J}_i^m = g_{im}\mathcal{J}_j^m$$

ve

$$\dot{\nabla}_k\mathcal{J}_j^i = 0$$

olur. Anti-Kähler Weyl manifoldunun twin metriği,

$$G_{ij} = g_{mj}\mathcal{J}_i^m$$

şeklinde tanımlanır.

Öneri 4.1.1: $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ bir anti-Kähler Weyl manifoldu olsun. Bu manifoldun twin metriğinin prolanged kovaryant türevi sıfırdır.

İspat :

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_k G_{ij} &= \dot{\nabla}_k\big(g_{mj}\mathcal{J}_i^m\big) \\ &= \big(\dot{\nabla}_k g_{mj}\big)\mathcal{J}_i^m + g_{mj}\dot{\nabla}_k \mathcal{J}_i^m \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Teorem 4.1.1: $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldun g pseudo-Riemannian metriğinin holomorfik olması için gerek ve yeter şart ,

$$\omega(\mathcal{J}X)(Y) - \omega(X)(\mathcal{J}Y) = 0$$

olmasıdır.

İspat : g pseudo-Riemannian metriğine ϕ operatörü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} (\varphi_{JX}g)(Y,Z) &= (JX)g(Y,Z) - Xg(JY,Z) + g((L_Y J)X,Z) + g((Y,L_Z J)X) \\ &= (\nabla_{JX}g)(Y,Z) + g(\nabla_{JX}Y,Z) + g(Y,\nabla_{JX}Z) - (\nabla_X g)(JY,Z) \\ &\quad -g(\nabla_X(JY),Z) - g(JY,\nabla_X Z) + g((L_Y JX) - JL_Y X,Z) \\ &\quad +g(Y,(L_Z JX) - JL_Z X) \\ &= (\nabla_{JX}g)(Y,Z) - (\nabla_X g)(JY,Z) \\ &= 2[\omega(JX)g(Y,Z) - \omega(X)g(JY,Z)], \end{aligned}$$

olup son eşitlikten,

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(JX)g(Y,Z) - \omega(X)g(JY,Z) \\ &= g(\omega(JX)(Y) - \omega(X)(JY),Z) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.1. Anti-Kähler Weyl Manifoldları Üzerinde Quarter-Simetrik Konneksiyon

Anti-Kähler Weyl manifoldu üzerinde quarter-simetrik konneksiyon tanımlansın ve $\widetilde{\nabla}$ ile gösterilsin.

Eğer $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun $\tilde{T}_{ij}^{k}$ burulma tensörü,

$$\tilde{T}_{ij}^{k} = p_j \mathcal{J}_i^k - p_i \mathcal{J}_j^k \tag{4.3}$$

olarak verilirse bu konneksiyona quarter-simetrik konneksiyon denir. Burada p_j kovektörün lokal bileşenleridir.

$\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun bileşenleri $\tilde{\Gamma}_{ij}^{k}$ ve $\overline{\nabla}$ anti-Kähler Weyl konneksiyonun bileşenlerini de $\bar{\Gamma}_{ij}^{k}$ olmak üzere,

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \bar{\Gamma}_{ij}^{k} + U_{ij}^{k} \tag{4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Hayden'in (1932) metodu kullanıldığında, (4.4) eşitliğinde verilen U_{ij}^{k} tensörü,

$$\widetilde{\nabla}_k g_{ij} = 2\omega_k g_{ij}$$

eşitliği ve $\tilde{T}_{ij}{}^{k}$ burulma tensöründen,

$$\tilde{T}_{ij}{}^{k} = \tilde{\Gamma}_{ij}^{k} - \tilde{\Gamma}_{ji}^{k} = U_{ij}{}^{k} - U_{ji}{}^{k}$$

ve

$$\tilde{T}_{ijk} = U_{ijk} - U_{jik}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (4.4) kullanılarak konneksiyon için,

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_k g_{ij} &= \partial_k g_{ij} - \tilde{\Gamma}^s_{ki} g_{sj} - \tilde{\Gamma}^s_{kj} g_{is} \\ &= \partial_k g_{ij} - (\bar{\Gamma}^s_{ki} + U^s_{ki}) g_{sj} - \left(\bar{\Gamma}^s_{kj} + U^s_{kj}\right) g_{is} \\ &= \partial_k g_{ij} - \bar{\Gamma}^s_{ki} g_{sj} - U_{kij} - \bar{\Gamma}^s_{kj} g_{is} - U_{kji} \\ &= \bar{\nabla}_k g_{ij} - U_{kij} - U_{kji}\end{aligned}$$

buradan

$$U_{kij} + U_{kji} = 0$$

elde edilir.

Son eşitlikten ve $\tilde{T}_{ijk}$ tensörünün döngüsel toplamından,

$$\tilde{T}_{ijk} + \tilde{T}_{kij} + \tilde{T}_{kji} = 2U_{ijk} \tag{4.5}$$

olur.

Son olarak (4.5) eşitliğini içine (4.3) yerine yazılırsa,

$$U_{ij}{}^{k} = p_j \mathcal{J}^k_i - p^k \mathcal{J}_{ij}$$

bulunur. Bu yüzden (4.4) konneksiyonu,

$$\tilde{\Gamma}^k_{ij} = \bar{\Gamma}^k_{ij} + p_j \mathcal{J}^k_i - p^k \mathcal{J}_{ij} \tag{4.6}$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Tanım 4.1.1.1: H, $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldu üzerinde (p, q)tipli tensör alanı olsun. Eğer H tensörü

$$\overline{\nabla}_k H^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} = \eta_k H^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

eşitliğini sağlarsa H tensörüne $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre rekürent denir.

Tanım 4.1.1.1 yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.1.1: $\tilde{T}_{ij}^{\ l}$ burulma tensörünün $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre rekürent olması için gerek ve yeter şart p_j kovektörünün $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre rekürent olmasıdır.

İspat: İlk olarak $\tilde{T}_{ij}^{\ l}$ burulma tensörü rekürent olsun. Yani,

$$\overline{\nabla}_k \tilde{T}_{ij}^{\ l} = \eta_k \tilde{T}_{ij}^{\ l} .$$

Son eşitlikte i ve l arasında kontraksiyon yapılırsa,

$$\overline{\nabla}_k \left(-p_l \mathcal{J}_j^l\right) = \eta_k \left(-p_l \mathcal{J}_j^l\right)$$

olur. Her iki taraf $\mathcal{J}_s^j$ ile çarpılırsa,

$$\delta_s^l \left(\overline{\nabla}_k p_l\right) = \eta_k p_s$$

$$\overline{\nabla}_k p_s = \eta_k p_s .$$

Tersine p_j kovektörü rekürent olsun. O zaman

$$\overline{\nabla}_k\tilde{T}_{ij}^l = \overline{\nabla}_k\left(p_j\mathcal{J}_i^l - p_i\mathcal{J}_j^l\right)$$
$$= \left(\overline{\nabla}_k p_j\right)\mathcal{J}_i^l - \left(\overline{\nabla}_k p_i\right)\mathcal{J}_j^l$$
$$= \eta_k p_j\mathcal{J}_i^l - \eta_k p_i\mathcal{J}_j^l$$
$$= \eta_k\left(p_j\mathcal{J}_i^l - p_i\mathcal{J}_j^l\right)$$
$$= \eta_k\tilde{T}_{ij}^l\ .$$

Böylece ispat tamamlanmış olur.

$(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldu üzerinde quarter simetrik konneksiyon $\tilde{\nabla}$ nın eğrilik tensörü $\tilde{R}_{ijk}{}^l$ aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = \partial_i\tilde{\Gamma}_{jk}^l - \partial_j\tilde{\Gamma}_{ik}^l + \tilde{\Gamma}_{im}^l\tilde{\Gamma}_{jk}^m - \tilde{\Gamma}_{jm}^l\tilde{\Gamma}_{ik}^m\ .$$

Son eşitliğin içinde (4.6) yerine yazılırsa,

$$\tilde{R}_{ijk}{}^l = \bar{R}_{ijk}{}^l + \mathcal{J}_j^l\alpha_{ik} - \mathcal{J}_i^l\alpha_{jk} - \mathcal{J}_{jk}\alpha_i^l + \mathcal{J}_{ik}\alpha_j^l \qquad (4.7)$$

olur. Burada,

$$\alpha_{ik} = \overline{\nabla}_i p_k - p_k p_m\mathcal{J}_i^m + \frac{1}{2}p^m p_m\mathcal{J}_{ik}$$

ve

$$\alpha_i{}^l = \overline{\nabla}_i p^l + 2p^l w_i - p^l p_m\mathcal{J}_i^m + \frac{1}{2}p^m p_m\mathcal{J}_i^l$$

şeklindedir.

$(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldu üzerinde quarter simetrik konneksiyon $\tilde{\nabla}$ nın Ricci tensörü $\tilde{R}_{jk}$ için (4.7) eşitliğinde i ve l arasında kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{R}_{jk} = \bar{R}_{jk} + \mathcal{J}_j^l \alpha_{lk} - \mathcal{J}_{jk} \alpha_l^{\ l} + \mathcal{J}_{lk} \alpha_j^{\ l} \tag{4.8}$$

olarak bulunur. Burada $\bar{R}_{jk}$, $\bar{\nabla}$ Weyl konneksiyonun Ricci tensörüdür.

(4.8) eşitliğinin her iki tarafı g^{jk} ile çarpılırsa $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \bar{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldu üzerinde quarter simetrik konneksiyon $\tilde{\nabla}$ nın skaler eğrilik tensörü $\tilde{S}_c$,

$$\tilde{S}_c = \bar{S}_c + 2\mathcal{J}^{kl}(\bar{\nabla}_l p_k) + (2-n)\|p\|^2$$

olarak bulunur. Burada $\bar{S}_c$, $\bar{\nabla}$ konneksiyonun skaler eğrilik tensörü ve $\|p\|^2 = p^l p_l$ dir.

$(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \bar{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldunun quarter simetrik konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ nın (0,4) tipli eğrilik tensörü (4.7) eşitliğinden,

$$\tilde{R}_{ijkl} = \bar{R}_{ijkl} + \mathcal{J}_{jl}\alpha_{ik} - \mathcal{J}_{il}\alpha_{jk} - \mathcal{J}_{jk}\alpha_{il} + \mathcal{J}_{ik}\alpha_{jl} \tag{4.9}$$

şeklinde elde edilir.

Öneri 4.1.1.1 : $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \bar{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldunun quarter simetrik konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ nın $\tilde{R}_{ijkl}$ eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

i)$\tilde{R}_{ijk}^{\ \ \ k} = \bar{R}_{ijk}^{\ \ \ k}$

ii)$\tilde{R}_{ijkl} + \tilde{R}_{jikl} = 0$

iii)$\tilde{R}_{ijkl} + \tilde{R}_{ijlk} = \bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{ijlk}$.

İspat : *i)* $\tilde{R}_{ijk}^{\ \ \ l}$ eğrilik tensöründe k ve l arasında kontraksiyon yapılırsa,

$$\tilde{R}_{ijk}^{\ \ \ k} = \bar{R}_{ijk}^{\ \ \ k} + \mathcal{J}_j^k \alpha_{ik} - \mathcal{J}_i^k \alpha_{jk} - \mathcal{J}_{jk}\alpha_i^{\ k} + \mathcal{J}_{ik}\alpha_j^{\ k}$$

$$= \bar{R}_{ijk}{}^{k} + \mathcal{J}_j^k \alpha_{ik} - \mathcal{J}_i^k \alpha_{jk} - \mathcal{J}_j^k \alpha_{ik} + \mathcal{J}_i^k \alpha_{jk}$$
$$= \bar{R}_{ijk}{}^{k}$$

elde edilir.

ii)-iii) (4.9) eşitliğinden $\tilde{R}_{ijkl} + \tilde{R}_{jikl} = 0$ olduğu açıktır. Yani, (4.9) ile verilen eğrilik tensörü ilk iki indise göre anti-simetriktir. Ayrıca, son iki indise göre de $\tilde{R}_{ijkl} + \tilde{R}_{ijlk} = \bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{ijlk}$ olduğu kolaylıkla görülür.

Teorem 4.1.1.2 : $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti-Kähler Weyl manifoldunun quarter simetrik konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ ya sahip olsun. Eğer $\tilde{\nabla}$ konneksiyonun eğrilik tensörü sıfır ise p_j kovektör alanı $(dp)_{jk} = p_m \tilde{T}_{jk}^m$ şartını sağlar. Burada $\tilde{T}$, $\tilde{\nabla}$ konneksiyonun burulma tensörüdür.

İspat: $\tilde{R}_{ijk}{}^{l} = 0$ olsun. O zaman,

$$\bar{R}_{ijk}{}^{l} = -\mathcal{J}_j^l \alpha_{ik} + \mathcal{J}_i^l \alpha_{jk} + \mathcal{J}_{jk} \alpha_i^l - \mathcal{J}_{ik} \alpha_j^l$$

$$\bar{R}_{jki}{}^{l} = -\mathcal{J}_k^l \alpha_{ji} + \mathcal{J}_j^l \alpha_{ki} + \mathcal{J}_{ki} \alpha_j^l - \mathcal{J}_{ji} \alpha_k^l$$

$$\bar{R}_{kij}{}^{l} = -\mathcal{J}_i^l \alpha_{kj} + \mathcal{J}_k^l \alpha_{ij} + \mathcal{J}_{ij} \alpha_k^l - \mathcal{J}_{kj} \alpha_i^l$$

eşitlikleri elde edilir. Son üç eşitliğin toplamından,

$$0 = \mathcal{J}_i^l (\alpha_{jk} - \alpha_{kj}) - \mathcal{J}_j^l (\alpha_{ik} - \alpha_{ki}) - \mathcal{J}_k^l (\alpha_{ji} - \alpha_{ij})$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $\mathcal{J}_l^h$ ile çarpılırsa,

$$0 = -\delta_i^h (\alpha_{jk} - \alpha_{kj}) + \delta_j^h (\alpha_{ik} - \alpha_{ki}) + \delta_k^h (\alpha_{ji} - \alpha_{ij})$$

ve i ile h arasında kontraksiyon yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
0 &= (-n+2)\left(\alpha_{jk} - \alpha_{kj}\right) \\
&= (-n+2)\left(\overline{\nabla}_j p_k - p_k p_m \mathcal{J}_j^m - \overline{\nabla}_k p_j + p_j p_m \mathcal{J}_k^m\right) \\
&= (-n+2)\left((dp)_{jk} - p_k p_m \mathcal{J}_j^m + p_j p_m \mathcal{J}_k^m\right) \\
&= (-n+2)\left((dp)_{jk} - p_m (p_k \mathcal{J}_j^m - p_j \mathcal{J}_k^m)\right) \\
&= (-n+2)\left((dp)_{jk} - p_m \tilde{T}_{jk}^m\right)
\end{aligned}
$$

bulunur.

Böylece ispat tamamlanır.

4.2. Anti-Kähler-Codazzi Weyl Manifold

Tanım 4.2.1 : $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ hemen hemen anti-Hermitian Weyl manifold olsun. G , manifoldun twin metriği olmak üzere,

$$\dot{\nabla}_i G_{mj} - \dot{\nabla}_m G_{ij} = 0$$

veya

$$\dot{\nabla}_i\left(g_{js}\mathcal{J}_m^s\right) - \dot{\nabla}_m\left(g_{js}\mathcal{J}_i^s\right) = 0$$

$$g_{js}\left(\dot{\nabla}_i \mathcal{J}_m^s - \dot{\nabla}_m \mathcal{J}_i^s\right) = 0$$

$$\dot{\nabla}_i \mathcal{J}_m^s - \dot{\nabla}_m \mathcal{J}_i^s = 0$$

şartı sağlanıyorsa $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ dörtlüsüne anti- Kähler-Codazzi Weyl manifold denir. Son eşitlikte i ve s arasında kontraksiyon yapılırsa,

$$\dot{\nabla}_i \mathcal{J}_m^i - \dot{\nabla}_m \mathcal{J}_i^i = 0$$

$$\dot{\nabla}_i \mathcal{J}_m^i = 0$$

elde edilir.

Öneri 4.2.1 : $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirdir.

İspat: Nijenhuis tensörünün prolanged kovaryant türeve göre ifadesi,

$$N_{ij}{}^{k} = \mathcal{J}_i^h\left(\dot{\nabla}_h \mathcal{J}_j^k - \dot{\nabla}_j \mathcal{J}_h^k\right) - \mathcal{J}_j^h\left(\dot{\nabla}_h \mathcal{J}_i^k - \dot{\nabla}_i \mathcal{J}_h^k\right) = 0$$

şeklindedir (Özdemir ve Demirbüker 1998). Buradan sonuç kolaylıkla görülür.

Teorem 4.2.1 : $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun Ricci tensörü $\bar{R}_{jt}$ aşağıdaki şartı sağlar:

$$\bar{R}_{jt}\mathcal{J}_i^t - (\bar{R}_{ti} + 2k(d\omega)_{it})\mathcal{J}_j^t + B_{jhli} = 0.$$

Burada $B_{jhli} = -2g_{jh}(d\omega)_{li} - 2g_{ih}(d\omega)_{jl} + 2g_{li}(d\omega)_{jh} + 2g_{jl}(d\omega)_{hi}$ şeklindedir.

İspat: $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısının prolanged kovaryant türevinin Ricci özdeşliği,

$$\dot{\nabla}_k \dot{\nabla}_j \mathcal{J}_i^h - \dot{\nabla}_j \dot{\nabla}_k \mathcal{J}_i^h = \bar{R}_{kjt}{}^{h}\mathcal{J}_i^t - \bar{R}_{kji}{}^{t}\mathcal{J}_t^h$$

şeklindedir (Özdemir ve Türkoğlu 2013). Son eşitlikte k ve h arasında kontraksiyon yapılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_h \dot{\nabla}_j \mathcal{J}_i^h &= \bar{R}_{jt}\mathcal{J}_i^t - \bar{R}_{hji}{}^{t}\mathcal{J}_t^h \\ &= \bar{R}_{jt}\mathcal{J}_i^t - \bar{R}_{hjil}g^{lt}\mathcal{J}_t^h \\ &= \bar{R}_{jt}\mathcal{J}_i^t - \bar{R}_{hjil}G^{lh} \end{aligned}$$

olur. Burada $\bar{R}_{hjil}G^{lh} = H_{ji}$ olsun.

$$H_{ji} = \bar{R}_{hjil}G^{lh} = \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{hjil} + \bar{R}_{hjil}\right)G^{hl}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{hjil} + \bar{R}_{ljih}\right)G^{hl}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{hjil} + \bar{R}_{ihlj} + A_{jlih}\right)G^{hl} \qquad (4.10)$$

ve

$$H_{ij} = \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{hijl} + \bar{R}_{jhli} + A_{iljh}\right)G^{hl} \qquad (4.11)$$

şeklindedir. (4.11) eşitliğinden (4.10) eşitliği çıkarılırsa,

$$H_{ij} - H_{ji} = \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{hijl} + \bar{R}_{jhli} + A_{iljh} - \bar{R}_{hjil} - \bar{R}_{ihlj} - A_{jlih}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\bar{R}_{hijl} + \bar{R}_{jhli} + A_{iljh} + \bar{R}_{jhil} + \bar{R}_{hilj} - A_{jlih}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(\bar{R}_{hijl} + \bar{R}_{jhli} + A_{iljh} - \bar{R}_{jhli} + 2g_{li}(dw)_{jh}$$

$$-\bar{R}_{hijl} + 2g_{jl}(dw)_{hi} - A_{jlih}) \qquad (4.12)$$

bulunur. Burada,

$$A_{jlih} = g_{il}(dw)_{jh} + g_{jl}(dw)_{ih} + g_{jh}(dw)_{il} + g_{hl}(dw)_{ji} + g_{ij}(dw)_{hl} + g_{ih}(dw)_{lj}$$

şeklindedir. Son eşitlikler (4.12) de yerine yazılırsa,

$$H_{ij} - H_{ji} = -2g_{jh}(dw)_{li} - 2g_{ih}(dw)_{jl} + 2g_{li}(dw)_{jh} + 2g_{jl}(dw)_{hi}$$
$$= B_{jhli}$$

olur.

$$\dot{\nabla}_h \dot{\nabla}_j \mathcal{J}_i^h = \bar{R}_{jt} \mathcal{J}_i^t - H_{ji} \tag{4.13}$$

$$\dot{\nabla}_h \dot{\nabla}_i \mathcal{J}_j^h = \bar{R}_{it} \mathcal{J}_j^t - H_{ij}$$

eşitlikleri birbirlerinden çıkartılırsa,

$$\begin{aligned} \dot{\nabla}_h\left(\dot{\nabla}_j \mathcal{J}_i^h - \dot{\nabla}_i \mathcal{J}_j^h\right) &= \bar{R}_{jt} \mathcal{J}_i^t - \bar{R}_{it} \mathcal{J}_j^t + H_{ij} - H_{ji} = 0 \\ &= \bar{R}_{jt} \mathcal{J}_i^t - \bar{R}_{it} \mathcal{J}_j^t + B_{jhli} = 0 \\ &= \bar{R}_{jt} \mathcal{J}_i^t - (\bar{R}_{ti} + 2k(d\omega)_{it}) \mathcal{J}_j^t + B_{jhli} = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.2.1 den aşağıdaki sonuç yazılır.

Sonuç 4.2.1: $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldu olsun. Eğer $dw = 0$ ise, yani ω kapalı ise, Ricci tensörü pürdür.

$(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun Ricci* tensörü

$$\bar{R}_{ji}^* = -H_{jt} \mathcal{J}_i^t \tag{4.14}$$

şeklinde tanımlanır (Yano 1965).

Teorem 4.2.2: $(M_{2k}, \mathcal{J}, g, \overline{\nabla})$ anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun Ricci ve Ricci* tensörleri sırasıyla $\bar{R}_{jt}$ ve $\bar{R}_{jt}^*$ olmak üzere,

$$\bar{R}_{jt} = \bar{R}_{jt}^*$$

olması için gerek ve yeter şart $\dot{\nabla}^s \dot{\nabla}_j G_{is} = \dot{\nabla}^s \dot{\nabla}_s G_{ji} = 0$ olmasıdır.

İspat: (4.14) eşitliğinin her iki tarafı $\mathcal{J}_s^i$ ile çarpılsın. O zaman,

$$\bar{R}^{*}_{ji}\mathcal{J}^{i}_{s} = -H_{jt}\mathcal{J}^{t}_{i}\mathcal{J}^{i}_{s}$$
$$= H_{jt}\delta^{t}_{s}$$
$$= H_{js}$$

bulunur. Son eşitlik (4.13) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\dot{\nabla}_h\dot{\nabla}_j\mathcal{J}^{h}_{i} = \bar{R}_{jt}\mathcal{J}^{t}_{i} - \bar{R}^{*}_{jt}\mathcal{J}^{t}_{i}$$
$$\dot{\nabla}_h\dot{\nabla}_j(G_{is}g^{sh}) = \bar{R}_{jt}\mathcal{J}^{t}_{i} - \bar{R}^{*}_{jt}\mathcal{J}^{t}_{i}$$
$$\dot{\nabla}^{s}\dot{\nabla}_j G_{is} = \bar{R}_{jt}\mathcal{J}^{t}_{i} - \bar{R}^{*}_{jt}\mathcal{J}^{t}_{i}$$

elde edilir. Buradan ispat kolaylıkla tamamlanır.

Tanım 4.2.2: $(M_{2k},\mathcal{J},g,\overline{\nabla})$ anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldu olsun. Eğer $\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\| = 0$ ise $(M_{2k},\mathcal{J},g,\overline{\nabla})$ dörtlüsüne izotropik anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold denir.

Teorem 4.2.3: $(M_{2k},\mathcal{J},g,\overline{\nabla})$ izotropik anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold olsun. Bu durumda skaler ve skaler* eğrilik tensörleri çakışır.

İspat: Anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldunda

$$\dot{\nabla}_j(G_{im}G^{ij}) = \dot{\nabla}_j\delta^{j}_{m}$$

olur ve buradan

$$(\dot{\nabla}_j G_{im})G^{ij} + G_{im}\dot{\nabla}_j G^{ij} = 0$$
$$(\dot{\nabla}_j G_{im})G^{ij} + g_{is}g_{mt}G^{st}\dot{\nabla}_j G^{ij} = 0$$
$$(\dot{\nabla}_j G_{im})G^{ij} + g_{mt}G^{st}\dot{\nabla}_j\mathcal{J}^{j}_{s} = 0$$
$$(\dot{\nabla}_j G_{im})G^{ij} = 0$$

elde edilir. Son eşitliğin $\dot{\nabla}_k$ ya göre kovaryant türevi alınırsa,

$$\dot{\nabla}_k\left[(\dot{\nabla}_j G_{im})G^{ij}\right]=0$$
$$(\dot{\nabla}_k\dot{\nabla}_j G_{im})G^{ji}+(\dot{\nabla}_j G_{im})(\dot{\nabla}_k G^{ji})=0$$
$$(\dot{\nabla}_k\dot{\nabla}_m G_{ji})G^{ji}+(\dot{\nabla}_m G_{ji})(\dot{\nabla}_k G^{ji})=0$$

olur. Her iki tarafı g^{km} ile çarpılırsa,

$$g^{km}(\dot{\nabla}_k\dot{\nabla}_m G_{ji})G^{ji}+g^{km}(\dot{\nabla}_m G_{ji})(\dot{\nabla}_k G^{ji})=0$$
$$(\dot{\nabla}^m\dot{\nabla}_m G_{ji})G^{ji}+g^{km}g_{si}g^{tj}(\dot{\nabla}_m \mathcal{J}_j^s)(\dot{\nabla}_k \mathcal{J}_t^i)=0$$

eşitliği elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$(\bar{R}_{jt}\mathcal{J}_i^t-\bar{R}^*_{jt}\mathcal{J}_i^t)\mathcal{J}_s^i g^{sj}+\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\|=0$$
$$(-\bar{R}_{jt}\delta_s^t+\bar{R}^*_{jt}\delta_s^t)g^{sj}+\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\|=0$$
$$(\bar{R}^*_{js}-\bar{R}_{js})g^{sj}+\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\|=0$$
$$\bar{S}_c^*-\bar{S}_c+\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\|=0$$

bulunur. Böylece $\bar{S}_c^*=\bar{S}_c$ ancak ve ancak $\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\|=0$ olmasıdır. Böylece manifold izotropik anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold olur.

Teorem 4.2.4: $(M_{2k},\mathcal{J},g,\overline{\nabla})$ hemen hemen anti- Hermitian Weyl manifold olsun.

$$(\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij}=0$$

olması için gerek ve yeter şart manifoldun izotropik anti-Kähler Weyl manifold olmasıdır.

İspat:

$$G_{ij}G^{ij}=-2k$$

eşitliğinde her iki tarafın $\dot{\nabla}_k$ ya göre kovaryant türevi alınıp gerekli işlemleri yapılırsa,

$$(\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij}+G_{ij}\dot{\nabla}_k G^{ij}=0$$

$$(\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} + g_{is}g_{tj}G^{st}(\dot{\nabla}_k G^{ij}) = 0$$
$$(\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} + G^{st}(\dot{\nabla}_k G_{st}) = 0$$
$$(\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} + G^{ij}(\dot{\nabla}_k G_{ij}) = 0$$
$$2(\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} = 0$$

bulunur. Son eşitlikte tekrar $\dot{\nabla}^k$ ya göre kovaryant türev alınırsa,

$$(\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} + \dot{\nabla}_k G_{ij}\dot{\nabla}^k G^{ij} = 0$$
$$(\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} + \dot{\nabla}_k\left(\mathcal{J}_i^s g_{sj}\right)g^{kt}\dot{\nabla}_t\left(\mathcal{J}_m^j g^{mi}\right) = 0$$
$$(\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} + g_{sj}g^{kt}g^{mi}\left(\dot{\nabla}_k\mathcal{J}_i^s\right)\left(\dot{\nabla}_t\mathcal{J}_m^j\right) = 0$$
$$(\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} + \left\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\right\| = 0$$

elde edilir. Böylece $(\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} = 0$ ancak ve ancak $\left\|\dot{\nabla}\mathcal{J}\right\| = 0$, yani manifold izotropik anti-Kähler Weyl manifold olur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Sunulan bu tezde ilk olarak, anti-Kähler Weyl manifoldlar tanımlandı. Daha sonra bu manifold üzerinde tanımlı $\overline{\nabla}$ konneksiyonun G twin metriği tanımlanarak bu metriğin prolanged kovaryant türevinin sıfır olduğu gösterildi ve yine bu manifold üzerindeki g pseudo-Riemannian metriğinin holomorfik olması için gerek ve yeter şartın

$$\omega(\mathcal{J}X)(Y) - \omega(X)(\mathcal{J}Y) = 0$$

olması gerektiği gösterildi.

İkinci olarak, anti-Kähler Weyl manifoldu üzerinde quarter-simetrik konneksiyon tanımlandı ve bu konneksiyon $\widetilde{\nabla}$ ile gösterildi. Bu konneksiyon

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^{k} = \bar{\Gamma}_{ij}^{k} + p_j \mathcal{J}_i^k - p^k \mathcal{J}_{ij}$$

olarak bulundu.

Üçüncü olarak, $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonunun eğrilik tensörü $\tilde{R}_{ijk}{}^{l}$, Ricci tensörü $\tilde{R}_{jk}$ ve skaler eğriliği $\tilde{S}_c$ hesaplandı. Bu konneksiyonun eğrilik tensörünün özellikleri ile $\overline{\nabla}$ konneksiyonun eğrilik özellikleri arasında aşağıdaki gibi özellikler bulundu.

i) $\tilde{R}_{ijk}{}^{k} = \bar{R}_{ijk}{}^{k}$

ii) $\tilde{R}_{ijkl} + \tilde{R}_{jikl} = 0$

iii) $\tilde{R}_{ijkl} + \tilde{R}_{ijlk} = \bar{R}_{ijkl} + \bar{R}_{ijlk}$

Dördüncü olarak, $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonun $\tilde{T}_{ij}{}^{l}$ burulma tensörünün $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre rekürent olması için gerek ve yeter şartın p_j kovektörünün $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre rekürent olması gerektiği gösterildi.

Beşinci olarak, anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldlar tanımlandı ve bu manifoldunun $\mathcal{J}$ hemen hemen kompleks yapısının integrallenebilir olduğu gösterildi. Daha sonra anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun Ricci tensörü $\bar{R}_{jt}$ nin aşağıdaki şartı sağladığı gösterildi.

$$\bar{R}_{jt}\mathcal{J}_i^t - (\bar{R}_{ti} + 2k(d\omega)_{it})\mathcal{J}_j^t + B_{jhli} = 0$$

Bunun soucunda ise ω kapalı ise, $\bar{R}_{jt}$ Ricci tensörünün pür olduğu anlaşıldı.

Altıncı olarak, anti- Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun Ricci ve Ricci* tensörlerinin çakışması için gerek ve yeter şartın

$$\dot{\nabla}^s\dot{\nabla}_j G_{is} = \dot{\nabla}^s\dot{\nabla}_s G_{ji} = 0$$

olduğu gösterildi.

Son olarak, izotropik anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold tanımlandı ve anti-Kähler-Codazzi Weyl manifoldunun skaler ve skaler* eğriliklerinin çakışması için gerek ve yeter şartın manifoldun izotropik anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold olması gerektiği gösterildi. Daha sonra $(\dot{\nabla}^k\dot{\nabla}_k G_{ij})G^{ij} = 0$ olması için gerek ve yeter şartın hemen hemen anti-Hermitian manifoldun izotropik anti-Kähler Weyl manifold olması gerektiği gösterildi.

Sonuç olarak, sunulan bu tez çalışmasında genel olarak anti-Kähler Weyl manifold ve anti-Kähler-Codazzi Weyl manifold tanımlandı ve bu manifoldlara ait önemli sonuçlar elde edildi. Yine anti-Kähler Weyl manifold üzerinde $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik konneksiyon tanımlanarak bu konneksiyona ait özgün sonuçlar elde edildi.

KAYNAKLAR

Bishop, R. L. and Goldberg S., 1968. Tensor Analysis on Manifolds. The Macmillan Company, New York, p. 19-135.

Canfes, E.Ö. and Özdeğer, A., 1997. Some Applications of Prolonged Covariant Differentiation in Weyl Spaces. Journal of Geometry, 60 (1/2), 7–16.

Demirbüker, H. and Özdemir, F., 1998. Almost Hermitian, Almost Kaehlerian and Almost Semi-Kaehlerian Structures in Weyl spaces. Buletinnul Sthntific Univ. Politeh. Din Timisoara Math. 43, 1-7.

Gül, İ., 2017. Quarter Symmetric Connections On Complex Weyl Manifolds. Proceedings Book of International Workshop on Theory of Submanifolds, Volume 1.

Hacısalihoğlu, H.H., 1998. Diferensiyel geometri Cilt:1. Hacısalihoğlu yayıncılık, Ankara.

Hayden, H. A., 1932. Sub-spaces of a space with torsion. Proc. London Math. Soc, S2-34: 27-50.

Kühnel, W., 2005. Differential geometry curves- surfaces- manifolds. Amer. Mat. Soc., New York.

Özdemir, F. and Canfes, E.Ö., 2011. On Generalized Concircularly Recurrent Kaehlerian Weyl Spaces. International Mathematical Forum, Vol. 6, no. 60, 2975 – 2983.

Özdemir, F. and Türkoğlu, M.D., 2013. On Nearly-Kaehlerian Weyl Spaces. International Mathematical Forum, Vol. 8, no. 29, 1445 – 1446.

Salimov, A. ve Mağden A., 2008. Diferensiyel geometri. Aktif yayıncılık, Erzurum.

Salimov, A.A., 2010. On Operators Associated with Tensor Fields. J. Geom, 99 (1-2), 107-145.

Şahin, B., 2013. Manifoldların diferensiyel geometrisi. Nobel yayıncılık, Ankara.

Tsareva, B. and Zlatanov, G., 1990. On the geometry of the nets in the n-dimensional space of Weyl, Journal of Geometry, 38, 182–197.

Whitney, H., 1936. Differentiable manifolds. The Annals of Mathematics, Second series, Volume 37, Issue 3, 645-880.

Yano, K. and Ako M., 1968. On certain operators associated with tensor field. Kodai Math. Sem. Rep. 20, 414-436.

Yano, K., 1965. Differantial Geometry on Complex and Almost Complex Spaces. The Macmillan Company, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1994 yılında Trabzon’un Sürmene ilçesinde doğan Elif ALTINTAŞ ilk, orta ve lise öğrenimini Trabzon’da tamamladı. 2012 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümünü 2016 yılında bir yıl erken tamamladı. 2017 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı Matematik Anabilim Dalı, Geometri Bilim Dalında yüksek lisansa başladı. Halen Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne bağlı Matematik Anabilim dalında yüksek lisans yapıyor.