

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**TABAKALI ORTAMLARDA TEMAS PROBLEMLERİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ VE
BU ÇÖZÜME İLİŞKİN BİR BİLGİSAYAR PROGRAMININ GELİŞTİRİLMESİ**

DOKTORA TEZİ

Yük. Müh. Gökhan ADIYAMAN

NİSAN 2019

TRABZON



**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**TABAKALI ORTAMLARDA TEMAS PROBLEMLERİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ VE BU
ÇÖZÜME İLİŞKİN BİR BİLGİSAYAR PROGRAMININ GELİŞTİRİLMESİ**

İnşaat Yüksek Mühendisi Gökhan ADIYAMAN

**Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce
"DOKTOR (İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 29 / 03 / 2019

Tezin Savunma Tarihi : 17 / 04 / 2019

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Trabzon 2019

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında

Gökhan ADIYAMAN Tarafından Hazırlanan

**TABAKALI ORTAMLARDA TEMAS PROBLEMLERİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ VE BU
ÇÖZÜME İLİŞKİN BİR BİLGİSAYAR PROGRAMININ GELİŞTİRİLMESİ**

**başlıklı bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulunun 02 /04/2019 gün ve 1798 sayılı
kararıyla oluşturulan jüri tarafından yapılan sınavda
DOKTORA TEZİ
olarak kabul edilmiştir.**

Jüri Üyeleri

Başkan : Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ

Üye : Prof. Dr. Talat Şükrü ÖZŞAHİN

Üye : Prof. Dr. Hasan SOFUOĞLU

Üye : Prof. Dr. Mehmet H. OMURTAG

Üye : Prof. Dr. Ragıp ERDÖL

Prof. Dr. Asim KADIOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda Doktora Tezi olarak hazırlanmıştır.

“Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerinin Genel Çözümü ve Bu Çözüme İlişkin Bir Bilgisayar Programının Geliştirilmesi” isimli tez çalışmasının her aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, öğrencisi olmaktan ve kendisiyle çalışmaktan onur duyduğum danışman Hocam Sayın Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ' ye minnet ve şükranlarımı sunmayı zevkli bir görev sayarım.

Öğrenim hayatım boyunca bana emeği geçen tüm hocalarımı saygıyla anar, kendilerine minnettar olduğumu belirtmek isterim.

Çalışmalarım sırasında tezim ile ilgili birçok konuda yardım ve değerli fikirlerini esirgemeyen Sayın Prof. Dr. T. Şükrü ÖZŞAHİN' e, Sayın Prof. Dr. Hasan Sofuoğlu' na, Sayın Prof. Dr. Volkan KAHYA' ya, Sayın Doç. Dr. İsa ÇÖMEZ' e ve Sayın Dr. Öğr. Üyesi F. Lütfü ÇAKIROĞLU' ayrıca teşekkür etmek isterim.

Öğrenim hayatım süresince bana her türlü desteği veren ve beni sabırla destekleyen anneme, babama ve kardeşlerime müteşekkir olduğumu belirtirim. Çalışmanın her aşamasında bana destek olan eşim Deniz ADIYAMAN' a ve varlıklarıyla bana moral veren kızlarım Serra Nur ve Elif Duru' ya teşekkür eder, çalışmamın ülkemize faydalı olmasını temenni ederim.

Gökhan Adıyaman
Trabzon 2019

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum ‘‘Tabakalı Ortamlarda Temas Problemlerinin Genel Çözümü Ve Bu Çözüme İlişkin Bir Bilgisayar Programının Geliştirilmesi’’ başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ ’nin sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 17/04/2019

Gökhan ADIYAMAN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VIII
SUMMARY	IX
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	X
TABLolar LİSTESİ	XXIV
SEMBOLLER DİZİNİ	XXVI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Literatür Taraması.....	2
1.2.1 Sadece Homojen Malzemeden Oluşan Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri	2
1.2.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) İçeren Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri.....	6
1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı.....	10
1.4. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	12
1.4.1. Elastik Homojen Tabakaya İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi	12
1.4.2. Elastik Yarım Düzleme İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi	18
1.4.3. Elastik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakaya İlişkin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi	19
1.4.4. Elastik Çeyrek Düzleme İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi.....	22
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	28
2.1. Problemin Tanımı	28
2.2. Kullanılan Denklemler	30
2.3. Tabakalı Ortama İlişkin Sınır Şartları.....	33
2.3.1. Tabakalı Ortamın Oturacağı Temel ile Birinci Tabaka Arasındaki Sınır Şartları	33
2.3.1.1. Rijit Temel	33
2.3.1.2. Elastik Yarım Düzlem.....	34
2.3.1.3. Winkler Temeli	37

2.3.1.4.	Elastik Çeyrek Düzlemler	37
2.3.2.	Tabakalar Arasındaki Sınır Şartları.....	39
2.3.3.	Yüklemeye İlişkin Sınır Şartları	41
2.4.	Katsayıların Belirlemesi.....	43
2.5.	Denge Şartları	44
2.6.	İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi.....	45
2.7.	İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması	54
2.8.	İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü	56
2.9.	Gerilme ve Yer Değiştirme Bileşenlerinin Hesaplanması	64
3.	PROGRAM.....	66
3.1.	Programın Tanıtımı	66
3.2.	Programın Kullanımı	66
3.2.1.	Model Oluşturma	68
3.2.1.1.	Tabaka Ekleme.....	68
3.2.1.2.	Temel Ekleme	70
3.2.1.3.	Yük Ekleme	73
3.2.1.4.	Komut Dosyası Okuma.....	77
3.2.1.5.	Ayrılmalı Temas Yüzeyi Ekleme.....	77
3.2.1.6.	Model Sıfırlama	78
3.2.2.	Model Çözme.....	79
3.2.2.1.	Çözüm Seçenekleri	79
3.2.2.2.	Çözüm	81
3.2.3.	Sonuçlar	84
3.2.3.1.	Herhangi Bir Noktadaki Gerilme ve Yer Değiştirme Değerlerinin Bulunması	84
3.2.3.2.	Temas Gerilmelerine İlişkin Grafiklerinin Çizilmesi	87
3.2.3.3.	İstenen Doğrultularda Gerilme ve Yer Değiştirme Bileşenlerine İlişkin Grafiklerin Çizilmesi	88
3.2.4.	Üst Menü.....	90
3.3.	Komut Sistemi	93
3.3.1.	Komutlar	93
4.	SAYISAL SONUÇLAR	100
4.1.	Literatürden Seçilen Bazı Temas Problemleri İçin Sayısal Sonuçlar	100
4.1.1.	Kahya [19]	101

4.1.2.	Çömez	107
4.1.3.	Karabulut [33]	115
4.1.4	Akavcı [21]	121
4.1.5.	Çömez [46].....	128
4.1.6.	Yan ve Li [40]	132
4.1.7	Yan ve Mi [53].....	138
4.2.	Literatürde Bulunmayan Çeşitli Temas Problemleri İçin Sayısal Sonuçlar	143
4.2.1.	Rijit Temele Oturan FD İki Tabakanın Temas Problemi.....	143
4.2.2.	Winkler Temeline Oturan İki Tabakanın Temas Problemi.....	154
4.2.3.	Çeyrek Düzlemlere Oturan Homojen Bir Tabakanın Temas Problemi	167
4.2.4.	Yarım Düzleme Oturan FD Bir Tabakanın Temas Problemi	177
4.3.5.	Rijit Temele Oturan Üç Homojen Tabakanın Temas Problemi.....	189
5.	SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	199
6.	KAYNAKLAR	203
ÖZGEÇMİŞ		

Doktora Tezi

ÖZET

TABAKALI ORTAMLARDA TEMAS PROBLEMLERİNİN GENEL ÇÖZÜMÜ VE BU ÇÖZÜME İLİŞKİN BİR BİLGİSAYAR PROGRAMININ GELİŞTİRİLMESİ

Gökhan ADIYAMAN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2019, 206 Sayfa

Bu çalışmada, tabakalı ortamlarda sürtünmesiz temas problemlerinin genel çözümü yapılarak bu çözümü esas alan bir bilgisayar programı geliştirilmektedir. Problemlerin çözümünde kütle kuvvetleri ihmal edilmekte olup problemler düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmaktadır. Tanımlanabilecek herhangi bir problemin genel çözümü elastisite teorisi, integral dönüşüm yöntemleri ve Gauss-Jacobi integral formülasyonları kullanılarak programlamaya yönelik olarak gerçekleştirilmektedir. Elde edilen söz konusu çözümü esas alan görsel arayüze sahip bir bilgisayar programı Matlab kullanılarak geliştirilmektedir. Program kullanılarak belirlenen sınırlar içindeki herhangi bir tabakalı ortam modellenerek çözülebilmektedir. Çözüme ilişkin temas uzunlukları ve temas gerilmelerinin yanı sıra tabakalı ortamın herhangi bir noktasındaki gerilme veya yer değiştirme değerleri tablolar veya grafikler halinde yine program yardımıyla görüntülenebilecektir. Çalışma sonucunda, geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçlarla mevcut literatürde var olan sonuçlar karşılaştırılmakta ve sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir. Dolayısıyla, geliştirilen programın literatürdeki benzer problemlerin çözümünde kullanılabileceği sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Tabakalı ortam, temas problemi, integral dönüşüm teknikleri, Gauss-Jacobi İntegral formülasyonu, Matlab

Doctoral Thesis

SUMMARY

GENERAL SOLUTION OF CONTACT PROBLEMS IN LAYERED MEDIUMS AND
DEVELOPMENT OF A COMPUTER PROGRAM BASED ON THIS SOLUTION

Gökhan ADIYAMAN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Civil Engineering Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Ahmet BİRİNCİ
2019, 206 Pages

In this study, a general solution of frictionless contact problems in layered mediums will be done and a computer program is developed based on this solution. The mass forces are neglected in the solution of the problems and the problems are considered as plain strain problems. The general solution of any defined problem is obtained for programming purposes using elasticity theory, integral transformation methods and Gauss-Jacobi integral formulations. A computer program with a graphics user interface based on this solution is developed using Matlab. Using this program, any layered medium within the limitations can be solved by modeling. In addition to the contact lengths and contact stresses related to the solution, the stress or displacement values of the desired points in the layered medium can also be displayed in the form of tables or graphs by means of the program. As a result of the study, the results obtained by the means of the developed program and the results in the existing literature are compared and the compatibility of the results are shown. As a result, it was concluded that the developed program can be used in the solution of similar problems in the literature.

Key Words: Layered medium, contact problem, integral transformation techniques, Gauss-Jacobi Integral formulation, Matlab

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Tabakalı ortama ilişkin temsili geometri ve yükleme durumu	29
Şekil 2. Rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu.....	33
Şekil 3. Rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumu	34
Şekil 4. Yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu	35
Şekil 5. Yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumu	36
Şekil 6. Tabakalı sistemin Winkler temele oturması durumu.....	38
Şekil 7. Tabakalı sistemin elastik çeyrek düzlemler üzerine oturması durumu.....	38
Şekil 8. Tabakalar arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu	39
Şekil 9. Tabakalar arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumu	40
Şekil 10. Dairesel veya belli bir fonksiyona sahip rijit blok çeşitleri için b_{jS} ve b_{jE} .	42
Şekil 11. Çalıştırıcı Penceresi	67
Şekil 12. Programın ana penceresi	67
Şekil 13. Tabaka ekleme düğmesi	68
Şekil 14. Tabaka ekleme penceresi	69
Şekil 15. Homojen tabaka ekleme penceresi	69
Şekil 16. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ekleme penceresi.....	70
Şekil 17. Temel ekleme düğmesi	70
Şekil 18. Temel ekleme penceresi	71
Şekil 19. Winkler temeli penceresi ekleme penceresi	71
Şekil 20. Elastik yarım düzlem ekleme penceresi	72
Şekil 21. Elastik çeyrek düzlemler ekleme penceresi	72
Şekil 22. Yük ekleme düğmesi	73
Şekil 23. Yük ekleme penceresi.....	73
Şekil 24. Rijit blok ekleme penceresi	74
Şekil 25. Dairesel blok ekleme penceresi	74
Şekil 26. Düz blok ekleme penceresi	75
Şekil 27. Fonksiyonel blok ekleme penceresi	75
Şekil 28. Yayılı yük ekleme penceresi.....	77

Şekil 29.	Komut dosyası okuma düğmesi.....	77
Şekil 30.	Ayrılmalı temas yüzeyi ekleme düğmesi.....	78
Şekil 31.	Temas yüzeyine ayrılma (receding) ekleme penceresi.....	78
Şekil 32.	Model sıfırlama düğmesi	79
Şekil 33.	Çözüm seçenekleri düğmesi	79
Şekil 34.	Çözüm seçenekleri penceresi.....	80
Şekil 35.	Çözüm düğmesi	82
Şekil 36.	Bilinmeyen temas mesafeleri için örnek ilk değerler penceresi	82
Şekil 37.	Çözüm sonrası menü penceresi	83
Şekil 38.	Yeni adım sayısı belirleme penceresi	83
Şekil 39.	Yeni hassasiyet belirleme penceresi	84
Şekil 40.	Yerel koordinatlarda gerilme ve yer değiştirme bulma düğmesi.....	85
Şekil 41.	Yerel koordinatlarda sonuç penceresi.....	85
Şekil 42.	Genel koordinatlarda gerilme ve yer değiştirme bulma düğmesi.....	86
Şekil 43.	Genel koordinatlarda sonuç penceresi	86
Şekil 44.	Temas yüzeyi gerilme grafiği çizdirme düğmesi.....	87
Şekil 45.	Temas yüzeyi gerilme grafiği penceresi	87
Şekil 46.	İstenen doğrultularda gerilme ve yer değiştirme bileşenlerine ilişkingrafiklerin çizdirilme düğmesi.....	88
Şekil 47.	Grafik çizimi penceresi.....	89
Şekil 48.	X doğrultusunda grafik çizim seçenekleri	89
Şekil 49.	Y doğrultusunda grafik çizim seçenekleri	90
Şekil 50.	Ana pencere ekranına model çizdirme düğmesi.....	91
Şekil 51.	Model kaydetme düğmesi.....	91
Şekil 52.	Model geri çağırma düğmesi	91
Şekil 53.	Model kaydetme penceresi	91
Şekil 54.	Model adı değiştirme düğmesi.....	92
Şekil 55.	Model adı değiştirme penceresi	92
Şekil 56.	[18] 'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu....	101
Şekil 57.	[18] 'de verilen temas problemi için geliştirilen program yardımıyla oluşturulan model	102
Şekil 58.	$R_1 / h_b = 100$ Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2, R_1 / h_b = 100$).....	103

- Şekil 59. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2, R_1 / h_b = 100$)..... 104
- Şekil 60. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2, R_1 / h_b = 100$)..... 104
- Şekil 61. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0,001$ ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2, R_1 / h_b = 100$)..... 105
- Şekil 62. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için x ekseninde derinlik boyunca tabaka ortasındaki σ_x normal gerilmelerine ilişkin Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2, R_1 / h_b = 100$) 106
- Şekil 63. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için x ekseninde derinlik boyunca tabaka ortasındaki σ_y normal gerilmelerine ilişkin Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2, R_1 / h_b = 100$) 106
- Şekil 64. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için x ekseninde derinlik boyunca tabaka ortasındaki τ_{xy} kayma gerilmelerine ilişkin Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2, R_1 / h_b = 100$) 107
- Şekil 65. [23] 'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu..... 108
- Şekil 66. [23]' de verilen temas problemi için programda oluşturulan model 108
- Şekil 67. Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, h_1 / h_2 = 2, G_1 / G_2 = 1, \frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$)..... 110
- Şekil 68. Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen üst tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, h_1 / h_2 = 2, G_1 / G_2 = 1, \frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$) ... 111

Şekil 69.	Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$).....	112
Şekil 70.	Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$).....	112
Şekil 71.	Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0,5$ ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$).....	113
Şekil 72.	Farklı R_1 / h_b oranları için x ekseninde derinlik boyunca üst tabakanın ortasındaki σ_x normal gerilmelerine ilişkin Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$).....	114
Şekil 73.	Farklı R_1 / h_b oranları için x ekseninde derinlik boyunca üst tabakanın ortasındaki σ_x normal gerilmelerine ilişkin Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$).....	114
Şekil 74.	Farklı R_1 / h_b oranları için x ekseninde derinlik boyunca üst tabakanın ortasındaki τ_{xy} kayma gerilmelerine ilişkin Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$).....	115
Şekil 75.	[32] 'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu....	116
Şekil 76.	[32] problemi için program yardımıyla oluşturulan model	117
Şekil 77.	Farklı blok genişlikleri ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b$) için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($G_1 / G_2 = 4$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$).....	118

- Şekil 78. Farklı blok genişlikleri $((b_{1E} - b_{1S}) / h_b)$ için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen tabaka ile sağ düz blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($G_1 / G_2 = 4$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)..... 119
- Şekil 79. Farklı G_1 / G_0 oranları için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b = 1.25$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)..... 120
- Şekil 80. Farklı G_1 / G_0 oranları için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b = 1.25$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)..... 120
- Şekil 81. Farklı G_1 / G_0 oranları için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0,25$ ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b = 1.25$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)..... 121
- Şekil 82. [20]'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu..... 122
- Şekil 83. [20] problemi için geliştirilen program yardımıyla oluşturulan model 122
- Şekil 84. [49] problemi için geliştirilen program yardımıyla oluşturulan model 124
- Şekil 85. Farklı yayılı yük genlikleri $[c_{1S}, c_{1E}]$ için Akavcı [20] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($G_{0R} / G_{0L} = 1$, $G_1 / G_{0R} = 1/7$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c / h_b = 1$) 125
- Şekil 86. Farklı β_1 değerleri için Adıyaman vd. [49] ve program yardımıyla elde edilen FD tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($G_{0R} / G_{0L} = 1$, $G_{10} / G_{0R} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c / h_b = 1$, $a = 1$)..... 126
- Şekil 87. Farklı yayılı yük genlikleri $[c_{1S}, c_{1E}]$ için Akavcı [20] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($G_{0R} / G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c / h_b = 1$) 127
- Şekil 88. Farklı yayılı yük genlikleri $[c_{1S}, c_{1E}]$ için Akavcı [20] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($G_{0R} / G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c / h_b = 1$) 127

Şekil 89.	[45] ‘de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu....	128
Şekil 90.	[45] ‘de verilen temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model	129
Şekil 91.	Farklı G_{1h} / G_{10} oranları için Çömez [45] ve program yardımıyla elde edilen rijit blok ile FD tabaka arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500, k_y / G_{1h} = 10, \kappa_1 = 2.2, R_1 / h_b = 100$).	130
Şekil 92.	Farklı G_{1h} / G_{10} oranları için Çömez [45] ve program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500, k_y / G_{1h} = 10, \kappa_1 = 2.2, R_1 / h_b = 100$)	131
Şekil 93.	Farklı G_{1h} / G_{10} oranları için Çömez [45] ve program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500, k_y / G_{1h} = 10, \kappa_1 = 2.2, R_1 / h_b = 100$)	131
Şekil 94.	[46] ‘da verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu....	132
Şekil 95.	[46] ‘da verilen temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model	133
Şekil 96.	[48] problemi için program yardımıyla oluşturulan model	135
Şekil 97.	Farklı β_2 değerleri için Yan ve Li [46] ve program yardımıyla elde edilen tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, h_1 / h_2 = 2, R_1 / h_b = 100$).....	137
Şekil 98.	Farklı β_2 değerleri için Yan ve Li [46] ve program yardımıyla elde edilen tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, h_1 / h_2 = 2, R_1 / h_b = 100$) ...	137
Şekil 99.	[52] ‘de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu....	139
Şekil 100.	[52] ‘de verilen temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model	140
Şekil 101.	Farklı β_1 değerleri için Yan ve Mi [52] ve program yardımıyla elde edilen FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2, h_1 = h_2, G_{1h} / G_0 = 1, G_{1h} / G_2 = 1, R_1 / h_b = 1000$).....	142

Şekil 102. Farklı β_1 değerleri için Yan ve Mi [52] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$, $h_1 = h_2$, $G_{1h} / G_0 = 1$, $G_{1h} / G_2 = 1$, $R_1 / h_b = 1000$).....	142
Şekil 103. Rijit temele oturan FD iki tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu	143
Şekil 104. Yükleme durumlarına ait yayılı yük fonksiyonlarının grafikleri.....	144
Şekil 105. Rijit temele oturan FD iki tabakanın temas problemi için programda oluşturulan model	145
Şekil 106. Farklı kayma modülü oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabaka ile rijit temel arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, <i>Yükleme (iii)</i> , $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$).....	147
Şekil 107. Farklı kayma modülü oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, <i>Yükleme (iii)</i> , $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$).....	147
Şekil 108. Farklı yükleme durumları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabaka ile rijit temel arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, $G_{10} / G_{1h} = 1.001$, $G_{20} / G_{2h} = 1.001$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$).....	148
Şekil 109. Farklı yükleme durumları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, $G_{10} / G_{1h} = 1.001$, $G_{20} / G_{2h} = 1.001$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$).....	149
Şekil 110. Farklı G_{10} / G_{1h} ve G_{20} / G_{2h} oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, <i>Yükleme (iii)</i> , $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)...	150
Şekil 111. Farklı G_{10} / G_{1h} ve G_{20} / G_{2h} oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, <i>Yükleme (iii)</i> , $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)...	151
Şekil 112. Farklı G_{10} / G_{1h} ve G_{20} / G_{2h} oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0.5$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, <i>Yükleme (iii)</i> , $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)...	151
Şekil 113. Farklı yükleme durumları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x ekseninde derinlik boyunca değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, $G_{10} / G_{1h} = 1.001$, $G_{20} / G_{2h} = 1.001$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$).....	152

- Şekil 114. Farklı yükleme durumları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, $G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)..... 153
- Şekil 115. Farklı yükleme durumları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, $G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)..... 153
- Şekil 116. Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu..... 154
- Şekil 117. Rijit blok profili şekil fonksiyonlarına ilişkin grafikler..... 155
- Şekil 118. Winkler temeline oturan temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model 156
- Şekil 119. Farklı rijit blok profili şekil fonksiyonları için Winkler temeline oturan iki tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, $\frac{k_y}{G_1} = 10$, $G_{20}/G_1 = 1$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)..... 158
- Şekil 120. Farklı rijit blok profili şekil fonksiyonları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, $\frac{k_y}{G_1} = 10$, $G_{20}/G_1 = 1$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) 159
- Şekil 121. Farklı k_y/G_1 oranları için Winkler temeline oturan iki tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_1 , $G_{20}/G_1 = 1$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)..... 160
- Şekil 122. Farklı k_y/G_1 oranları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_1 , $G_{20}/G_1 = 1$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)..... 160

- Şekil 123. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan iki tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_1 , $G_{20}/G_1 = 1$, $\frac{k_y}{G_1} = 10$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)..... 161
- Şekil 124. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_1 , $G_{20}/G_1 = 1$, $\frac{k_y}{G_1} = 10$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) 162
- Şekil 125. Farklı k_y/G_1 oranları için Winkler temele oturan temas problemine ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x=0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_2 , $G_{20}/G_1 = 1$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) 163
- Şekil 126. Farklı k_y/G_1 oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x=0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_2 , $G_{20}/G_1 = 1$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) 164
- Şekil 127. Farklı k_y/G_1 oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin τ_{xy} normal gerilmelerinin $x=0.5$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_2 , $G_{20}/G_1 = 1$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) 164
- Şekil 128. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin σ_x normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_3 , $G_{20}/G_1 = 1$, $k_y/G_1 = 10$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) 165
- Şekil 129. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin σ_y normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_3 , $G_{20}/G_1 = 1$, $k_y/G_1 = 10$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) 166

- Şekil 130. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_3 , $G_{20}/G_1 = 1$, $k_y/G_1 = 10$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)..... 166
- Şekil 131. Çeyrek düzlemler oturan homojen bir tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu 167
- Şekil 132. Çeyrek düzlemlere oturan homojen bir tabakanın temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model 168
- Şekil 133. Farklı rijit blok konumları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $G_{0R}/G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 170
- Şekil 134. Farklı rijit blok konumları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $G_{0R}/G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 170
- Şekil 135. Farklı rijit blok konumları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $G_1/G_{0R} = 1$, $c/h_b = 1.0$, $G_{0R}/G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 171
- Şekil 136. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 172
- Şekil 137. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 172

- Şekil 138. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 173
- Şekil 139. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 174
- Şekil 140. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 174
- Şekil 141. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 175
- Şekil 142. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin tabakanın yarı yüksekliğinde x ekseninde boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 176
- Şekil 143. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin tabakanın yarı yüksekliğinde x ekseninde boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 176
- Şekil 144. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin tabakanın yarı yüksekliğinde x ekseninde boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 177

Şekil 145. Yarım düzleme oturan FD tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu	178
Şekil 146. Yarım düzleme oturan FD tabakanın temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model	179
Şekil 147. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 / h_b = 1, m_1 = -m_2$)	181
Şekil 148. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sağ blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1$, $R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 / h_b = 1, m_1 = -m_2$)	182
Şekil 149. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sol blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1$, $R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 / h_b = 1, m_1 = -m_2$)	182
Şekil 150. Farklı m_1 / h_b oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $R_1 / R_2 = 1, m_1 = -m_2$)	183
Şekil 151. Farklı m_1 / h_b oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sağ rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $R_1 / R_2 = 1, m_1 = -m_2$)	184
Şekil 152. Farklı m_1 / h_b oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sol rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $R_1 / R_2 = 1, m_1 = -m_2$)	184
Şekil 153. Farklı G_{10} / G_{1h} oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $R_1 / R_2 = 1$, $m_1 = -m_2$)	186

- Şekil 154. Farklı G_{10} / G_{1h} oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi
 $(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500, G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500, \kappa_1 = \kappa_0 = 2, R_1 / R_2 = 1,$
 $m_1 = -m_2)$ 186
- Şekil 155. Farklı G_{10} / G_{1h} oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0.5$ ekseninde derinlik boyunca değişimi
 $(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500, G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500, \kappa_1 = \kappa_0 = 2, R_1 / R_2 = 1,$
 $m_1 = -m_2)$ 187
- Şekil 156. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin tabaka yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca
değişimi $(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500, G_{10} / G_0 = 1, G_{10} / G_{1h} = 1.001, R_1 / h_b = 500,$
 $\kappa_1 = \kappa_0 = 2, m_1 = -m_2)$ 188
- Şekil 157. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin tabaka yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca
değişimi $(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500, G_{10} / G_0 = 1, G_{10} / G_{1h} = 1.001, R_1 / h_b = 500,$
 $\kappa_1 = \kappa_0 = 2, m_1 = -m_2)$ 188
- Şekil 158. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin tabaka yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca
değişimi $(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500, G_{10} / G_0 = 1, G_{10} / G_{1h} = 1.001, R_1 / h_b = 500,$
 $\kappa_1 = \kappa_0 = 2, m_1 = -m_2)$ 189
- Şekil 159. Rijit temele oturan üç homojen tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu 190
- Şekil 160. Rijit temele oturan üç homojen tabakanın temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model 191
- Şekil 161. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin üst tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin
değişimi $(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, G_1 / G_2 = 1, G_1 / G_3 = 1, R_1 / h_b = 1000,$
 $h_1 / h_2 = 1, h_1 / h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2)$ 194

- Şekil 162. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin ikinci tabaka ile üçüncü tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $R_1/h_b = 1000$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$) 195
- Şekil 163. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin birinci tabaka ile ikinci arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $R_1/h_b = 1000$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$) 195
- Şekil 164. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin tabaka ile rijit temelzemin arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $R_1/h_b = 1000$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$) 196
- Şekil 165. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x = 0$ simetri ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $R_1/h_b = 1000$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$) 197
- Şekil 166. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x = 0$ simetri ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $R_1/h_b = 1000$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$) 198
- Şekil 167. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0.5$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $R_1/h_b = 1000$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$) 198

TABLolar LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 1.	Komut sistemi komutları.....	94
Tablo 2.	Kahya [18] problemi için çeşitli problem parametrelere bağlı temas mesafelerinin karşılaştırılması.....	102
Tablo 3.	Çömez [23] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $h_1 / h_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$)....	109
Tablo 4.	Karabulut [32] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $h_1 / h_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$)....	117
Tablo 5.	Akavcı [20] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($G_{0R} / G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c / h_b = 1$).....	123
Tablo 6.	Adıyaman vd. [49] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($G_{0R} / G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c / h_b = 1$).....	125
Tablo 7.	Çömez [45] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500$, $\kappa_1 = 2.2$).....	129
Tablo 8.	Yan ve Li [46] problemi için çeşitli parametreler bağlı için temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1 / h_2 = 2$).....	134
Tablo 9.	Çömez vd. [48] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\beta_1 = 0.001$, $G_{20} / G_{1h} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1 / h_2 = 2$).....	136
Tablo 10.	Yan ve Mi [52] problemi için çeşitli parametrelere bağlı için temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$, $h_2 = 0$, $G_{1h} / G_0 = 1$, $G_{1h} / G_2 = 1$).....	141
Tablo 11.	Farklı yükleme ve kayma modülü oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi ($G_{20} / G_{1h} = 1$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$).....	146
Tablo 12.	Farklı rijit blok profili şekil fonksiyonları ile k_y / G_1 ve G_{20} / G_{2h} kayma modülü oranları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100$, $G_{20} / G_1 = 1$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$).....	157

- Tablo 13. Farklı yükleme ve kayma modülü oranları için çeyrek düzlemlere oturan tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)..... 169
- Tablo 14. Farklı m_1/h , R_1/R_2 ve G_{10}/G_{1h} oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500$, $G_{10}/G_0 = 1$, $R_1/h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 = -m_2$)..... 180
- Tablo 15. Farklı YD değerleri ve R_1/h_b oranları için rijit temele oturan üç tabakanın temas uzunluklarının değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$)..... 192

SEMBOLLER DİZİNİ

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	x, y, z doğrultularındaki normal gerilmeler
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	Dik koordinatlarda kayma gerilmesi bileşenleri
X, Y, Z	x, y, z doğrultularındaki kütle kuvvetleri
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	x, y, z doğrultularındaki birim şekil değiştirmeler
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	Dik koordinatlarda açısal şekil değiştirme bileşenleri
u, v, w	x, y, z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenleri
e	Hacim değiştirme oranı
λ	Lame sabiti
G	Kayma modülü
G_0	FD tabakalarda, tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülü
ν	Poisson oranı
E	Elastisite modülü
κ	Malzeme sabiti
Δ	Laplace operatörü
Δ^2	Biharmonik operatör
β	FD tabakalarda, kayma modülünün değişimini gösteren parametre
u_r, u_θ	Polar koordinatlarda yer değiştirme bileşenleri
$\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$	Polar koordinatlarda gerilme bileşenleri

Not: Bu listede verilmeyen bazı semboller metin içerisinde ilgili oldukları yerlerde tanımlanmışlardır.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Çoğu yapıların ve mekanik sistemlerin elemanları birbirleri ile temas halindedir. Bu temasın karakteri, cisimlerin gerilmeleri birbirlerine iletme şekilleri, temas halindeki cisimlerde meydana gelen şekil değiştirmeler, temas uzunlukları ve temas gerilmesi dağılımları yapının davranışında önemli rol oynamaktadır. Yol ve havaalanı üst yapıları, demiryolları, temeller, tahıl siloları, akaryakıt tankları, silindirik miller ve bilyeler temasın söz konusu olduğu mühendislik uygulamalarından bazılarıdır. Taşıt çarpışmalarının simülasyonu, insan eklemlerinin davranışı gibi konular da temas probleminin uygulama sahasına girmektedir [1].

Temas mekaniğine ilişkin çalışmalara Heinrich Hertz tarafından 1882 yılında yazılan “On the contact of elastic solids” adlı makaleyle başlandığı söylenebilir [2]. Elastisite teorisinden elde edilen ifadeler karışık ve uzun olmasına karşın eleman teorisiye göre daha kesin sonuçlar vermektedir. Bilgisayar teknolojisi ve sayısal çözüm yöntemlerinin gelişmesine paralel olarak temas problemlerinin çözümünde elastisite teorisi kullanımı yoğunluk kazanmış ve temas problemi konusundaki çalışmalarda önemli artışlar kaydedilmiştir. Elastisite teorisi yanında integral dönüşüm yöntemleri, sonlu elemanlar, sınır elemanları ve sonlu farklar gibi yöntemler de kullanılarak temas problemleri ile ilgili son yıllarda pek çok çalışma yapılmıştır.

Diğer taraftan, malzeme biliminin ilerlemesiyle birlikte malzeme özelliklerinin eleman içerisinde konuma bağlı olarak değiştiği üretim yöntemleri geliştirilmiştir. Bu yöntemlerle üretilen malzemelerde, malzeme özellikleri sabit sayısal değerler olarak değil fonksiyonlar ile ifade edilmektedir. Bu şekilde üretilen malzemeler genel olarak Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) olarak isimlendirilmekte ve bu malzemeler çoğunlukla aşınmaya karşı direnç kazandırma ve yüksek sıcaklıklara dayanabilme özellikleri için kullanılmaktadır. Son yıllarda FDM içeren tabakalı ortamların temas problemlerine ilişkin çalışmalara literatürde sıklıkla karşılaşılmaktadır.

Yapılan çalışmalarda, tabakalı ortamlara ilişkin temas problemi genel olarak iki tipe ele alınmaktadır. Birinci tip problemlerde, ağırlığın etkisi göz önünde bulundurulmakta ve ayrılma sonlu bir bölgede gerçekleşmektedir. İkinci tip problemlerde ise, ağırlığın etkisi

ihmal edilmekte ve ayrılma bölgesi sonsuz uzunlukta olmaktadır. Burada ağırlık etkisi ihmal edileceğinden, mevcut çalışma bahsi geçen ikinci gruba girmektedir.

1.2. Literatür Taraması

Literatür incelendiğinde, tabakalı ortamlara ilişkin temas problemlerine ait çalışmalar sadece homojen malzemedен oluşan temas problemleri ve FDM içeren temas problemleri olarak iki gruba ayrılabilir.

1.2.1. Sadece Homojen Malzemedен Oluşan Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri

Sadece homojen malzemedен oluşan tabakalı ortamlara ilişkin literatürde mevcut temas problemlerinden bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Weitsman [3], elastik yarım düzlem ile plak arasındaki yapışık olmayan temas problemini irdelemiştir. Çalışmada, plağın ve elastik yarım düzlemin rijitliklerinin çeşitli durumları için temas uzunlukları belirlenmiştir.

Dhaliwal [4], yarı sonsuz düzlem üzerine dairesel rijit bir rijit blok ile bastırılan temas problemini incelemiştir. Fredholm integral denkleminde indirgenen karışık sınır değer problemi, kuvvet serileri ve sayısal yöntemler yardımıyla çözülmüştür.

Chen ve Engel Chen [5], farklı rijit blok profilleri ile bastırılan çok tabakalı elastik tabakalar ile yarı sonsuz düzlem arasındaki temas problemini ele almışlardır. Çalışmada, farklı tabaka kalınlıkları için gerilme analizleri yapılmıştır.

Keer ve Chantaramungkom [6], elastik yarım düzlem ile elastik tabaka arasında sürtünmesiz değme problemini incelemiştir. Çalışmada; tabakanın belirli bir uzunluğu dışında tüm yüzeyi üniform yayılı yük ile yüklenmiş olup tabaka ile düzlem arasında yayılı yükün etki etmediği mesafeden daha küçük bir ayrılma bölgesi meydana geleceği kabul edilerek, problem Papkovitch-Neuber potansiyelleri kullanılarak çözülmüştür.

Yayıllı yük aracılığıyla yüklenmiş ve yarım düzlem üzerine oturan sonsuz uzunluklu elastik tabakanın temas problemi Keer vd. [7] tarafından incelenmiştir. Çözümde, dönele simetrik durum için Hankel dönüşümleri ve düzlem şekil değiştirme hali için ise üstel Fourier dönüşümleri kullanılmıştır. Problem tabaka ile yarım düzlem arasındaki gerilmelerin

bilinmeyen olduğu ikinci tür bir Fredholm integral denklemine indirgenmiş ve integral denklem sayısal olarak çözülmüştür.

Ratwani ve Erdoğan [8], baskı uygulanan elastik tabaka ile altındaki elastik yarım düzlem arasındaki sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Çözümde, temas bölgesinde sadece basınç gerilmeleri olacağı kabul edilmiştir. Problem basınç gerilmelerinin bilinmeyen olarak kabul edildiği tekil integral denklem sistemine indirgenmiş ve bu denklem sistemi tekil yük, keskin kenarlı düz blok ve dairesel blok durumları için sayısal olarak çözülmüştür.

Erdoğan ve Ratwani [9], iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturtulmuş ve üzerine baskı uygulanan elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemişlerdir. Elastik tabaka için Fourier integral dönüşümlerinin ve çeyrek düzlemler için ise Mellin integral dönüşümünün kullanıldığı problem, temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu genelleştirilmiş Cauchy tipi tekil integral denkleme dönüştürülmüştür. Farklı yükleme ve geometri durumları için gerilme tekilliği, temas uzunlukları ve temas bölgesindeki gerilme yayılışlarına ilişkin sayısal sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, temas uzunluğunun yükün şiddetinden bağımsız olup, sadece yükün dağılımına bağlı olduğu gösterilmiştir.

Adams ve Bogy [10], farklı elastik özelliklere sahip elastik yarım düzlem ile yarı sonsuz tabaka arasındaki temas problemini çözmüşlerdir. Çözümde, tabaka ile yarım düzlem arasında sürtünme olmaması ve tam yapışık olması durumları ayrı ayrı ele alınmıştır. Çalışma sonucunda, ara yüzeydeki normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri çeşitli malzeme kombinasyonları için verilmiştir.

Keer vd. [11], üzerine rijit bir bloğun etkideği elastik çeyrek düzlem probleminin çözümünü iteratif bir yöntem kullanarak yapmışlardır. Önce tahmini bir temas bölgesi seçilmiş ve bu bölge dikdörtgen bölgelere ayrılarak her bir bölgede gerilmelerin sabit olduğu düşünülmüştür. Bu şekilde integral denklem lineer denklem sisteminin çözümüne dönüştürülerek iterasyonlar sonucunda gerçek temas bölgesi ve temas bölgesindeki gerilme dağılımı elde edilmiştir.

Ortotropik yarı sonsuz tabaka için temas problemi farklı mesnetlenme durumları için Loboda ve Tauchert [12] tarafından ele alınmıştır. İntegral dönüşüm tekniği kullanılarak problem bir tekil integral denkleme dönüştürüldükten sonra sayısal olarak çözülmüştür. Çalışmada, gerilme şiddet faktörünün ortotropik tabakanın özelliklere bağlılığı araştırılmıştır.

King ve O'Sullivan [13], rijit dairesel blok aracılığıyla yüklenmiş, tabakalı elastik yarım düzlemin sürtünmeli temas problemini ele almışlardır. Tek bir tabaka ve elastik yarım düzlemin temas problemi düzlem şekil değiştirme hali için detaylı olarak incelenmiş ve ara yüzdeki gerilme dağılımları belirlenmiştir.

Nowell ve Hills [14], bir hibrid metot kullanarak, ince bir elastik şerit ile simetrik yerleştirilmiş tekerlekler arasında meydana gelen temas problemini ele almışlardır. Çalışmada, sürtünmesiz ve sürtünmeli temas problemleri için temas gerilmeleri elde edilmiştir. Ayrıca yapışma ve kayma bölgelerinin detaylı bir analizi gerçekleştirilmiştir.

Dempsey vd. [15], Winkler temeline oturan sonsuz uzunluktaki elastik tabakanın değişik yüklemeler altındaki temas problemini ele almışlardır. Tabakaya üst yüzeyinden tekil yük veya düzgün yayılı yük etki etmesi durumları ile tekil yükün dairesel veya dikdörtgen rijit bloklar aracılığıyla tabakaya iletilmesi durumları, elastisite teorisi ve kiriş teorisine göre ayrı ayrı çözülmüş ve sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Rijit olarak mesnetlenmiş ve rijit dairesel bir blok ile bastırılan elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemi Jaffar [16] tarafından incelenmiştir. Problemin çözümü, Chebyshev serileri kullanılarak sayısal olarak yapılmış ve yüklemekten dolayı tabakanın yüzeyinde meydana gelen deformasyonlar incelenmiştir.

Rijit düzlem üzerindeki elastik bir tabakanın silindirik iki rijit blok aracılığıyla yüklenmesi durumuna ait temas problemi Lan vd. [17] tarafından ele alınmıştır. Problem yüklemenin normal ve teğetsel olması durumları için ayrı ayrı incelenmiş ve Fredholm integral denklemlerine indirgenerek sayısal olarak çözülmüştür.

Üst tarafından rijit olarak mesnetlenmiş ve alttan rijit bir blok ile bastırılan bir tabakanın temas problemi Kahya [18] tarafından incelenmiştir. Problemin çözümü bloğun dairesel, düz veya parabolik olması durumları için ayrı ayrı yapılarak temas gerilmeleri ve temas uzunlukları irdelenmiştir. Aynı problem, Kahya vd. [19] tarafından tekrar ele alınmıştır.

İki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan elastik bir tabakanın temas problemi Akavcı [20] tarafından incelenmiştir. Çalışmada, yüklemenin simetrik olmaması durumu göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca, tabaka ile çeyrek düzlemler arası sürtünmesiz olduğu kabul edilip temas bölgesinde yalnız normal basınç gerilmelerinin olduğu düşünülmüştür. Problem integral dönüşüm yöntemleri kullanılarak tekil integral denklem sistemine indirgenerek sayısal olarak çözülmüştür. Çözüm sonucunda, temas uzunlukları ve temas gerilmeleri elde edilmiştir.

Birinci ve Erdöl [21], basit mesnetler üzerine oturan ağırlıksız iki tabakadan oluşan bileşik tabakanın sürtünmesiz temas problemini incelemiştir. Bileşik tabakaya üstten dairesel veya dikdörtgen rijit bloklar ile bastırılması sonucu oluşan temas uzunlukları ve temas gerilmeleri her iki durum içinde elde edilmiştir.

Birinci vd. [22], elastik temele oturan, farklı elastik sabitlere ve yüksekliklere sahip iki malzemedan yapılmış tabakalara ait temas problemini elastisite teorisine göre incelemiştir. Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri integral dönüşüm yöntemleri kullanılarak elde edilmiş, çalışma sonucunda tabakalardaki gerilme ve yer değiştirme değerleri araştırılarak grafikleri çizilmiştir.

Alt tarafından rijit olarak mesnetlenmiş yapışık olmayan iki elastik tabakanın ve rijit bloğun sürtünmesiz temas problemi Çömez [23] tarafından incelenmiştir. Problemin çözümü elastisite teorisi ve integral dönüşüm yöntemleri kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonucunda, farklı malzeme özellikleri ve yükleme durumları için elde edilen sonuçlar tablolar ve grafiklerle verilmiştir. Aynı problem Çömez vd. [24] tarafından tekrar ele alınmıştır.

Homojen yarım düzlem üzerine oturan ve rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş tabakanın sürtünmeli temas problemi Çömez [1] tarafından elastisite teorisi kullanılarak ele alınmıştır. Çözümde, tabaka ile blok arasındaki ve tabaka ile yarım düzlem arasındaki sürtünme hesaba katılmıştır. Sınır şartları ve integral dönüşüm yöntemi kullanılarak, problem temas uzunluğunun ve değme gerilmelerinin bilinmeyen olduğu ikinci tip bir tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. Elde edilen bu sistem Gauss-Jacobi integrasyon formülü ve Jacobi polinomlarını kullanılarak çözülmüştür. Çalışma sonucunda; temas uzunlukları, temas gerilmeleri, normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri elde edilmiştir. Aynı problem Çömez ve Erdöl [25] tarafından tekrar ele alınmıştır.

İki elastik çeyrek düzleme oturan ve dairesel rijit bir rijit blok aracılığıyla iletilen tekil bir yük ile yüklenmiş bir tabakanın sürtünmesiz temas problemi Çakıroğlu [26] tarafından çalışılmıştır. Problemin çözümünde elastisite teorisi ve integral dönüşüm yöntemi kullanılarak yer değiştirme ve gerilme ifadeleri elde edilmiştir. Değişik yükleme, malzeme ve geometri durumların için temas uzunlukları ve temas gerilmeleri hesaplanmıştır.

İki çeyrek düzlem üzerine oturan elastik iki tabakanın ayrılmalı temas probleminin elastisite teorisi ve integral dönüşüm teknikleri kullanılarak analitik çözümü Yaylacı [27] tarafından gerçekleştirilmiştir. Aynı problemin ANSYS programı kullanılarak yaklaşık

çözümü Yaylacı vd. [28] tarafından yapılmış ve sonlu elemanlar metodu ile elde edilen sonuçların analitik çözümden elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Adıbelli vd.[29], rijit silindirik bir blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarım düzleme oturan iki tabakanın ayrılmalı temas problemini incelemiştir. Fourier integral dönüşüm yöntemi ve problemin sınır şartları kullanılarak söz konusu problem iki tekil integral denkleme indirgenmiştir. Bu denklem sistemi çözülerek temas uzunlukları, temas gerilmeleri elde edilmiş ve sonuçlar literatürle karşılaştırılmıştır.

Öner vd. [30], Winkler zemine oturan elastik iki tabakanın ayrılmalı temas problemini elastisite teorisi kullanarak analitik olarak ve sonlu elemanlar metodu kullanarak sayısal olarak çözmüşler, sonuçların birbiriyle oldukça uyumlu olduğu sonucuna varmışlardır.

Adıyaman [31], iki elastik çeyrek düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemini elastisite teorisine göre çözmüştür. Problemden tabakaya, üstten rijit bir rijit blok aracılığıyla iletilen tekil bir yük ve simetrik şekilde yerleştirilmiş iki sabit yayılı yük etki ettirilmiştir. Aynı problemin sonlu elemanlar çözümü ANSYS programı kullanılarak Adıyaman vd. [31] tarafından yapılmış ve sonuçların uyumlu olduğu görülmüştür.

Rijit dikdörtgen iki blok aracılığıyla yüklenmiş ve elastik yarı sonsuz düzlem üzerine oturan, homojen, izotrop elastik bir tabakanın sürtünmesiz temas problemi Karabulut [32] tarafından irdelenmiştir. Problemden, tabakaya üstten rijit dikdörtgen iki blok aracılığıyla iki tekil yük etki etmektedir. Çalışma sonucunda, temas uzunlukları, temas gerilmeleri, y eksenini boyunca tabakada ve yarım düzlemde meydana gelen normal gerilmeler ve kayma gerilmeleri çeşitli malzeme ve yükleme durumları için elde edilmiştir. Aynı çalışma Karabulut vd. [33] tarafından tekrar ele alınmıştır.

1.2.2. Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) İçeren Tabakalı Ortamlara İlişkin Temas Problemleri

Fonksiyonel Derecelendirilmiş Malzeme (FDM) içeren tabakalı ortamlara ilişkin literatürde mevcut temas problemlerinden bazıları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

Sürtünmesiz düz, konik ve küresel rijit bloklar aracılığıyla yüklenmiş aksiyonel simetrik fonksiyonel derecelendirilmiş malzemelerde temas gerilmeleri aksiyonel simetrik olarak Giannakopoulos ve Suresh [34, 35] tarafından araştırılmıştır.

El-Borgi vd. [36], homojen yarım düzlem üzerine oturan ve yayılı yük ile yüklenmiş FD bir tabakanın ayrılmalı temas problemini inceleyerek, FD malzeme özelliklerinin temas gerilmeleri ve temas uzunluklarına olan etkilerini incelemiştir.

Ke ve Wang [37], rijit silindirik bir rijit blok altındaki kaplama tabakası, FD tabaka ve alt tabakadan oluşan üçlü bir yapı için sürtünmesiz temas problemini irdelemiştir. Kaplama tabakası ve alt tabaka, farklı fiziksel özelliklere sahip homojen malzemelerden ve ara tabaka kayma modülü kalınlık boyunca keyfi olarak değişen FD malzemeden oluşmuştur. FD tabaka, kayma modülü doğrusal olarak değişen alt katmanlara bölünerek tabakalı bir model oluşturulmuştur. Poisson oranı yapı içinde sabit olarak alınmıştır. Aynı problemde sürtünme olması durumu Ke ve Wang [38] tarafından ele alınmıştır.

FD bir kaplamanın aksel simetrik sürtünmesiz temas problemi Liu v.d. [39] tarafından araştırılmıştır. FD kaplamanın kayma modülünün üstel olarak değiştiği ve Poisson oranının sabit kaldığı kabul edilmiştir. Hankel integral dönüşüm tekniği kullanılarak aksel simetrik temas problemi, Cauchy tipi bir tekil integral denkleme indirgenmiş ve elde edilen bu denklem sayısal olarak çözülmüştür.

Choi vd. [40], sürtünmeli kayan düz bir blok aracılığıyla yüklenmiş FD bir tabakanın temas problemini incelemiştir. Problemde, sürtünme katsayısının sabit olduğu ve FD tabakanın alt yüzeyinin rijit olarak mesnetlendiği kabul edilmiştir. FD tabakanın kayma modülü üstel bir fonksiyona göre değiştirilirken Poisson oranı sabit tutulmuştur. Düzlem elastisite denklemleri ve Fourier integral dönüşüm yöntemleri kullanılarak problem temas gerilmelerinin bilinmeyen olduğu ikinci türdeki Cauchy tipi tekil integral denkleme indirgenmiştir. Çalışma sonucunda, çeşitli parametrelerin (malzemenin homojen olmaması, sürtünme katsayısı, blok genişliği ve Poisson oranı) temas gerilmeleri üzerindeki etkileri ortaya konulmuştur.

Aizikovich vd. [41], derinlik boyunca keyfi olarak değişen özelliklere sahip malzemeler için temas problemlerinin verimli bir şekilde çözümüne izin veren yaklaşık analitik bir yöntem geliştirmiştir.

Chen ve Chen [42], homojen elastik yarım düzlem üzerine oturan ve rijit bir blok aracılığıyla yüklenen FD bir tabakanın temas problemini çalışmışlardır. Tabakanın malzeme özelliklerinin lineer olarak ve üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişimine göre sonuçlar elde edilerek, her iki durum için elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

FD malzemeler içeren yapışık ve yapışık olmayan temas problemlerinin iki boyutlu çözümü Chidlow vd [43] tarafından ele alınmıştır. Problem tekil integral denkleme dönüştürülerek Galerkin yönteminin kullanılmasıyla yaklaşık olarak çözülmüştür.

Volkov vd. [44], FD elastik bir tabakanın dairesel bir blok aracılığıyla yüklenmesi durumundaki temas problemini irdelemişlerdir. FD tabakanın elastik özellikleri derinliğe bağlı keyfi olarak değiştiği ve tabakanın üzerine oturduğu temelin elastik olduğu, ancak tabakadan çok daha sert olduğu varsayılmıştır. Çalışmada, yaklaşık analitik çözüm oluşturulmuş ve çözümlerin problemin karakteristik boyutsuz geometrik parametresinin hem büyük hem de küçük değerleri için asimptotik olarak tam olduğu gösterilmiştir.

Çömez [45], Winkler zemine oturan FD bir tabakanın temas problemini lineer elastisite teorisini kullanarak çözmüştür. Tabaka, normal doğrultuda silindirik rijit bir blok aracılığıyla iletilen tekil yüklerle yüklenmiştir. Çalışmada, Poisson oranı sabit olarak seçilmiş ve elastisite modülünün tabakanın kalınlığı boyunca üstel olarak değiştiği varsayılmıştır. Problem, Fourier integral dönüşüm yöntemleri ve sınır koşulları kullanılarak Cauchy tipi bir tekil integral denkleme indirgenmiştir. İntegral denklemin sayısal çözümü Gauss-Chebyshev integrasyon formülleri kullanarak gerçekleştirilmiştir. Çalışma sonunda; malzeme homojenliği, Winkler temelinin rijitliği ve rijit blok yarıçapının temas gerilmeleri, temas uzunlukları ve normal gerilmeler üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Yan ve Li [46], FD bir tabaka ile elastik bir tabaka arasında sürtünmesiz ayrılmalı temas problemini incelemişlerdir. Çalışmada, FD tabakanın izotropik olduğu ve tabakanın kayma modülünün kalınlık boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değiştiği kabul edilmektedir. Çalışma sonucunda; temas uzunlukları ve temas gerilmeleri için sayısal sonuçlar çeşitli boyutsuz büyüklükler için grafikler ve tablolarla verilmiştir.

Liu vd. [47], rijit bir blok aracılığıyla yüklenmiş FD bir tabakaya ilişkin eksenel simetrik temas problemini dikkate almışlardır. Çalışmada, rijit blok profilinin silindirik ve küresel olması durumları ele alınmıştır. Kayma modülünün rastgele bir fonksiyon olarak değiştiği FD tabakanın modellenmesi için lineer çok tabakalı bir model uygulanmıştır.

Rijit silindirik bir blok aracılığıyla yüklenmiş iki FD tabakanın ayrılmalı temas problemi ara yüzeydeki malzeme özelliklerinin uyumsuz olması durumu göz önünde bulundurularak Çömez vd. [48] tarafından çözülmüştür. Çözümde, tabakaların kayma modüllerinin kalınlık boyunca üstel bir fonksiyona bağlı olarak değiştiği kabul edilmiştir. Çalışma sonunda; non-homojinite parametresinin ve ara yüzeydeki malzeme özelliğinin uyumsuz olmasının temas uzunluklarına ve temas gerilmelerine etkisi verilmiştir.

Homojen iki çeyrek düzlem üzerine oturan FD bir tabakanın ayrılmalı temas problemi Adıyaman vd. [49] tarafından irdelenmiştir. Çalışmada, FD tabakanın kayma modülü üstel bir fonksiyona bağlı olarak değişmektedir. Malzemen özelliklerinin temas uzunluklarına ve temas gerilmelerine etkisi çalışma sonunda elde edilen bulgulardır.

Eksenel simetrik yükleme altında homojen zemine oturan FD tabakanın temas problemi Turan vd. [50] tarafından incelenmiştir. FD tabakanın kayma modülünün, kalınlık boyunca üstel bir biçimde değiştiği kabul edilmiştir. Yer değiştirmeler ve gerilmelere ilişkin elde edilen sayısal sonuçlar klasik elastisite ve sonlu elemanlar çözümleri ile karşılaştırılmıştır. Çalışmadan elde edilen sonuçlardan yola çıkılarak; kullanılan yaklaşımın elasto-statik FD malzemelere ilişkin problemlerin çözümü için doğru ve etkili olduğu vurgulanmıştır.

Jobin vd. [51], FD malzemeyle kaplı yüzeyin rastgele şekilli rijit blokla iki boyutlu sürtünmeli temasının sayısal analizini sunmuşlardır. Yükler rijit blok tamamen kayacak şekilde uygulanmıştır. Rastgele profil için ara yüzdeki basınç dağılımı modifiyeli bir kosinüs serisi olarak ifade edilmiştir.

Yarım düzlem üzerine oturan yapışık iki tabakanın sürtünmesiz temas problemi Yan ve Mi [52] tarafından incelenmiştir. Problemden, üst tabaka homojen ve alt tabak ise fonksiyonel derecelendirilmiş malzemedendir oluşmaktadır. Problem integral dönüşüm teknikleri kullanılarak tekil integral denklem sistemine indirgenmiş ve bu denklem sistemi Chebyshev–Gauss integral formülasyonları kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Çalışma sonucunda, malzeme özelliklerinin temas uzunlukları ve temas gerilmeleri üzerindeki etkileri incelenmiştir. FD tabakanın üstte ve homojen tabakanın altta olduğu benzer bir problem yine Yan ve Mi [53] tarafından ele alınmıştır.

El-Borgi ve Çömez [54], yarım düzlem üzerine oturan FD bir tabakanın sürtünmeli temas problemini incelemişlerdir. Sürtünmenin Coulombs kanununa göre davrandığı kabul edilmiş ve Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılarak problem tekil integral denklem sistemine indirgenmiştir. Elde edilen bu denklem sistemi Gauss-Chebyshev integral formülasyonları kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Çalışmada; malzeme özelliklerinin, temas bölgesindeki sürtünme katsayısının ve blok yarıçapının temas gerilmeleri ve temas uzunlukları üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

Yarım düzlem üzerine oturan yapışık iki tabakanın temas problemi Liu vd. [55] tarafından araştırılmıştır. Çalışmada, üst tabakanın homojen ve alt tabakanın FD malzemedendir olduğu kabul edilmiştir. Yayılı yükler yüklenmiş sistem hem analitik olarak

hem de sonlu elemanlar metodu kullanılarak çözülmüş olup temas uzunlukları ve temas gerilmeleri için elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Analitik ve sayısal yöntemle elde edilen sonuçların uyumlu olduğu sonucuna varılmıştır.

Yan ve Mi [56], yarım düzlem üzerine oturan ve fonksiyonel derecelendirilmiş bir katman ile güçlendirilmiş homojen bir tabakanın temas problemini incelemiştir. Çalışmada, tabaka farklı profillere sahip bloklar aracılığıyla yüklenmiştir. Problem Fourier integral dönüşüm teknikleri kullanılarak tekil integral denklem sistemine dönüştürülmüştür. Elde edilen bu sistem, Gauss–Chebyshev integral formülasyonları kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Çalışma sonucunda, malzeme özelliklerinin ve blok profilinin temas uzunlukları ve temas gerilmeleri üzerindeki etkileri araştırılmıştır.

FD iki tabakanın sürtünmeli temas problemi Yılmaz vd. [57] tarafından ele alınmıştır. Problem hem analitik olarak hem de sonlu elemanlar metodu kullanılarak sayısal olarak çözülmüştür. Çalışma sonucunda; malzeme özelliklerinin, sürtünme katsayısının, tabaka yüksekliklerinin ve tabaka birleşim yüzeyindeki malzeme özellikleri farklılıklarının temas uzunluğu ve temas gerilmelerine olan etkileri araştırılmıştır.

1.3. Çalışmanın Amacı ve Kapsamı

Sürtünmesiz temas problemlerinin analitik çözümü ile ilgili literatürde pek çok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalar incelendiğinde, çalışmaların konusu olan problemlerde tabaka sayılarının, malzeme türlerinin, yükleme durumlarının ve temel türlerinin farklılık gösterdiği görülmektedir. Bu temas problemlerinin analitik çözümleri benzer olmakla birlikte, problemin geometrisi, malzeme özellikleri ve yükleme durumundaki farklılıklardan dolayı her bir problem için analitik çözümün yeniden yapılması gerekmektedir. Sonuç olarak, elde edilen çözümler sadece o probleme ait çözüm olup benzer olsa bile farklı geometri ve sınır şartları içeren bir problemin çözümünde doğrudan kullanılamamaktadır. Bununla beraber, analitik çözümlerin basitleştirilmesi adına yükleme genellikle simetrik olarak verilmekte ve elde edilen çözümler programlamaya yönelik kullanımlar için yetersiz kalmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, herhangi bir temel üzerine oturan tabakalı bir ortama ilişkin sürtünmesiz temas problemlerinin genel çözümü elde edilerek, bu çözümü esas alan ve görsel ara yüze sahip bir bilgisayar programının geliştirilmesidir. Çalışmada analitik çözümün yanında geliştirilen program yardımıyla; programda tanımlı temel türü (rijit temel,

Winkler temel, elastik yarım düzlem, elastik çeyrek düzlemler), tabaka çeşidi (homojen, fonksiyonel derecelendirilmiş) ve yükleme şekli (dairesel rijit blok ile iletilen tekil yük, düz rijit blok ile iletilen tekil yük, yüzeyi fonksiyonel değişen rijit blok ile iletilen tekil yük, yayılı yük) bileşenlerinden seçilmek suretiyle kullanıcı tarafından çözülmek istenen tabakalı ortamın modeli kolaylıkla oluşturulabilecektir. Belirlenecek çözüm seçeneklerine göre geliştirilen program yardımıyla oluşturulan modelin çözümü yapılabilecek ve istenilen sonuçlar tablolar veya grafikler halinde görüntülenebilecektir. Belirlenen sınırlar içinde istenilen herhangi bir temas probleminin çözümünü yapabilecek olması göz önünde bulundurulduğunda, geliştirilen program bu alanda literatürde bir ilk olma özelliğine sahip olacaktır. Ayrıca, çalışma sonucunda elde edilecek olan analitik çözüm, yazılacak programa temel teşkil etmesinin yanında gelecekte temas problemi alanında yapılacak diğer çalışmalar için de bir referans olabilecektir.

Çalışmanın birinci bölümünde, temas problemlerinin tarihsel gelişiminden bahsedilmiş, temas problemleri ile ilgili daha önce yapılmış bazı çalışmalar özetlenmiştir. Tabakalar ve elastik yarım düzlem için elastisite teorisine ait temel denklemlerden yola çıkılarak düzlem haldeki Navier denklemleri elde edilmiş ve Fourier integral dönüşümü kullanılarak gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel denklemleri elde edilmiştir. Çeyrek düzlemler için ise elastisite teorisi, Airy gerilme fonksiyonları ve Mellin integral dönüşümü kullanılarak gerilme ve yer değiştirme ifadeleri elde edilmiştir.

İkinci bölümde problemin tanımı yapılmıştır. Çalışma kapsamında karşılaşılabilecek tüm sınır şartları tanımlanmış ve oluşturulan modele göre gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde oluşabilecek bilinmeyen katsayılar özetlenmiştir. Daha sonra, oluşturulacak modellerde sağlanması gereken denge şartları verilmiştir. Problemlerin çözümü için gerekli olan tekil integral denklemlerden oluşan integral denklem sisteminin elde edilişi verilerek bu denklem sistemi boyutsuzlaştırılarak sayısal çözümünün nasıl yapılacağı açıklanmıştır.

Üçüncü bölümde, ikinci bölümde verilen çözüm yöntemini esas alarak Matlab ve Matlab GUI (Graphic User Interface/Grafik arayüz) kullanılarak geliştirilen bilgisayar programının kullanımına ilişkin bilgiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, çalışmada elde edilen sayısal sonuçlar verilmiştir. Çalışma kapsamında on iki farklı temas problemi incelenmiştir. Bu problemlerden yedi tanesi literatürde mevcut olan çalışmalardır. Geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçlar ile sözü geçen literatürdeki mevcut çalışmalardan elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak programdan elde edilen sonuçların doğruluğu teyit edilmiştir. Literatürde mevcut olmayan

beş çalışmada ise farklı problem parametreleri için temas uzunlukları, temas gerilmeleri ve belli eksenler boyunca gerilme değerleri elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen tüm sonuçlar tablo ve grafiklerle sunulmuş ve bunlarla ilgili değerlendirmeler yapılmıştır

Çalışmanın beşinci bölümde çalışmadan çıkarılan sonuçlar verilerek gelecek çalışmalar için öneriler sıralanmıştır. Bu son bölümü yararlanan kaynaklar izlemektedir.

1.4. Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Bu kısımda, elastisite teorisinden yararlanılarak gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin genel ifadeleri elde edilecektir. Bu amaçla, tabakalar ve yarım düzlem için önce bünye denklemleri ve yer değiştirme-şekil değiştirme bağıntıları kullanılarak denge denklemleri yer değiştirmeler cinsinden yazılacak ve Navier denklemleri elde edilecektir. Yer değiştirme bileşenlerinin gerekli türevleri Navier denklemlerinde yerlerine yazılarak elde edilecek adi diferansiyel denklem takımının çözümü Fourier integral dönüşümü yardımıyla yapılacak ve yer değiştirme bileşenleri için genel ifadeler elde edilecektir. Bu ifadelerin bünye denklemlerinde yerine yazılması ile de gerilme bileşenlerinin genel ifadeleri belirlenecektir. Çeyrek düzlemler için ise polar koordinatlarda, Airy gerilme fonksiyonları ve Mellin integral dönüşümleri kullanılarak çalışma kapsamında gerekli olan gerilme ve yer değiştirme ifadeler elde edilecektir.

1.4.1. Elastik Homojen Tabakaya İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi

Üç boyutlu halde, bir cisim için (x, y, z) kartezyen koordinat takımında $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ ve τ_{yz} gerilme bileşenlerini göstermek üzere, denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \quad (3)$$

Burada; X , Y ve Z sırasıyla x , y ve z doğrultularındaki birim hacimdeki kütle kuvveti bileşenleridir. Yer değiştirme ve şekilde değiştirme arasındaki bağıntılar;

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (9)$$

olarak tanımlanabilmektedir.

Bu ifadelerde geçen u , v ve w sırasıyla x , y , z doğrultularındaki yer değiştirme bileşenlerini, ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{xz} ve γ_{yz} ise şekil değiştirme bileşenlerini göstermektedir.

Bünye denklemleri ise;

$$\sigma_x = \lambda e + 2G \frac{\partial u}{\partial x} \quad (10)$$

$$\sigma_y = \lambda e + 2G \frac{\partial v}{\partial y} \quad (11)$$

$$\sigma_z = \lambda e + 2G \frac{\partial w}{\partial z} \quad (12)$$

$$\tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (13)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (14)$$

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (15)$$

olarak yazılabilmektedir.

Bu denklemlerde; e hacim değiştirme oranını, λ Lamé sabitini ve G Kayma modülünü göstermekte olup aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (16)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)} \quad (17)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (18)$$

Bu ifadelerde, E elastisite modülünü ve ν Poisson oranını göstermektedir.

(10-15) ifadeleri (1-3) denge denklemlerinde yerlerine yazılırsa Navier denklemleri;

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial x} + G\Delta u + X = 0 \quad (19)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial y} + G\Delta v + Y = 0 \quad (20)$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial e}{\partial z} + G\Delta w + Z = 0 \quad (21)$$

olarak elde edilir.

Burada, Δ Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (22)$$

Çözümü yapılacak problemler düzlem Şekil değiştirme problemleri olduğundan (19-21) ifadeleri ile verilen Navier denklemlerinin iki boyutlu hale indirgenmesi gerekir. Navier denklemlerindeki indisi z olan Şekil değiştirme bileşenleri $\varepsilon_z, \gamma_{zx}, \gamma_{yz}$ ve kütle kuvvetleri X, Y ve Z sıfır alınıp denklemler düzenlenirse, düzlem Şekil değiştirme hali için Navier denklemleri aşağıda verildiği gibi yazılabilir.

$$(\lambda + G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right] + G \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (23)$$

$$(\lambda + G) \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] + G \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (24)$$

(23) ve (24) ifadeleri ile verilen kısmi türevli diferansiyel denklemler Fourier integral dönüşüm teknikleri yardımıyla adi diferansiyel denklemlere dönüştürülebilirler. u ve v yer değiştirme bileşenlerinin Fourier dönüşümleri aşağıdaki gibi alınabilir.

$$\phi(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y) e^{i\xi x} dx \quad (25)$$

$$\psi(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} v(x, y) e^{i\xi x} dx \quad (26)$$

(25) ve (26) ifadelerinin ters Fourier dönüşümleri alınarak yer değiştirmeler;

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (27)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi, y) e^{-i\xi x} d\xi \quad (28)$$

şeklinde yazılabilirler. Yer değiştirmelerin gerekli bazı türevlerinin Fourier dönüşümleri ise aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\xi x} dx = -\xi^2 \phi \quad (29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} e^{i\xi x} dx = -i\xi \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (30)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} e^{i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \quad (31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} e^{i\xi x} dx = -\xi^2 \psi \quad (32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} e^{i\xi x} dx = -i\xi \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (33)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} e^{i\xi x} dx = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \quad (34)$$

(23) ve (24) ifadeleri $e^{i\xi x}$ ile çarpılıp $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edilir ve (29-34) türev ifadeleri burada yerlerine yazılırsa, aşağıda verilen diferansiyel denklem takımı elde edilmiş olur.

$$(\kappa - 1) \frac{d^2 \phi}{dy^2} - (\kappa + 1) \xi^2 \phi - 2i\xi \frac{d\psi}{dy} = 0 \quad (35)$$

$$(\kappa + 1) \frac{d^2 \psi}{dy^2} - (\kappa - 1) \xi^2 \psi - 2i\xi \frac{d\phi}{dy} = 0 \quad (36)$$

Burada, κ bir malzeme sabiti olup düzlem şekil değiştirme hali için $\kappa = 3 - 4\nu$ şeklindedir. (35) ifadesi y 'ye göre iki, (36) ifadesi y 'ye göre bir defa türetildikten sonra ilk ifadeden bulunan $\frac{d^3 \psi}{dy^3}$ değeri ikinci ifadede yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{d^4 \phi}{d^4 y} - 2\xi^2 \frac{d^2 \phi}{dy^2} + \xi^4 \phi = 0 \quad (37)$$

şeklinde dördüncü mertebeden, homojen, adi diferansiyel denklem elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümü;

$$\phi = e^{ny} \quad (38)$$

olarak aranır ve (37) ifadesinde yerine yazılıp düzenlenirse;

$$n^4 - 2\xi^2 n^2 + \xi^4 = 0 \quad (39)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bu denklemin kökleri;

$$n_1 = n_2 = \xi \quad (40)$$

$$n_3 = n_4 = -\xi \quad (41)$$

şeklinde bulunur. Buna göre, (37) ifadesinde verilen diferansiyel denklemin genel çözümü;

$$\phi = (A_1 + A_2 y)e^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y)e^{\xi y} \quad (42)$$

olarak elde edilir. (35) ifadesinin y 'ye göre türevi alınırsa $\frac{d^2 \psi}{dy^2}$ ifadesi ϕ ifadesinin türevleri türünden elde edilebilir. Elde edilen bu ifade (36) ifadesinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa, ψ ifadesi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$\psi = \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + \left[-A_3 + \left(\frac{\kappa}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \quad (43)$$

(42) ve (43) ifadeleri (27) ve (28) ifadelerinde yerlerine yazılırsa, yer değiştirme bileşenleri;

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_1 + A_2 y)e^{-\xi y} + (A_3 + A_4 y)e^{\xi y} \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (44)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \left[A_1 + \left(\frac{\kappa}{\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} + i \left[A_3 - \left(\frac{\kappa}{\xi} - y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (45)$$

olarak elde edilir. (44) ve (45) ifadelerinin gerekli türevleri alınıp (10), (11) ve (13) ifadelerinde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemelerde yapılırsa gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &2G\xi i \left[A_1 + \left(\frac{\kappa-3}{2\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \\ &+ \left[A_3 + \left(-\frac{\kappa-3}{2\xi} + y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (46)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &2G\xi i \left[A_1 + \left(\frac{\kappa+1}{2\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \\ &+ \left[A_3 + \left(-\frac{\kappa+1}{2\xi} + y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (47)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \begin{aligned} &2G\xi \left[A_1 + \left(\frac{\kappa-1}{2\xi} + y \right) A_2 \right] e^{-\xi y} \\ &- \left[A_3 + \left(-\frac{\kappa-1}{2\xi} + y \right) A_4 \right] e^{\xi y} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (48)$$

1.4.2. Elastik Yarım Düzleme İlişkin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Sonsuzda gerilmelerin sıfır olacağı düşüncesinden yola çıkılarak $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \rightarrow 0$, tabaka için elde edilen (44-48) ifadelerinin buna göre yeniden düzenlenmesi ile elastik yarım düzleme ilişkin yer değiştirme ve gerilme ifadeleri aşağıdaki gibi olur.

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_1 + A_2 y) e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi, \quad (49)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \frac{|\xi|}{\xi} \left[-A_1 + \left(\frac{\kappa}{|\xi|} + y \right) A_2 \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (50)$$

$$\sigma_x(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ 2G\xi i \left[A_1 + \left(y - \frac{\kappa-3}{2|\xi|} \right) A_2 \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (51)$$

$$\sigma_y(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ 2G\xi i \left[A_1 + \left(y - \frac{\kappa+1}{2|\xi|} \right) A_2 \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (52)$$

$$\tau_{xy}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ 2G|\xi| \left[A_1 + \left(y - \frac{\kappa-1}{2|\xi|} \right) A_2 \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (53)$$

1.4.3. Elastik Fonksiyonel Derecelendirilmiş Tabakaya İlişkin Genel Denklemlerin Elde Edilmesi

Fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) bir tabaka için kayma modülünün değişimi üstel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$G = G_0 e^{\beta y} \quad (54)$$

Burada; G_0 tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülünü ve β ise kayma modülünün tabaka yüksekliği boyunca değişimini gösteren parametredir. (54) ifadesi (10-15) bünye denklemlerinde yerlerine yazılırsa, düzlem şekil değiştirme halinde Navier denklemleri FD tabaka için aşağıda verildiği gibi elde edilebilir.

$$(\kappa + 1) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\kappa - 1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \beta(\kappa - 1) \frac{\partial u}{\partial y} + \beta(\kappa - 1) \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (55)$$

$$(\kappa - 1) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\kappa + 1) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \beta(3 - \kappa) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta(\kappa + 1) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (56)$$

(55) ve (56) ifadeleri $e^{i\xi x}$ ile çarpılıp $(-\infty, \infty)$ aralığında integre edilir ve (29-34) türev ifadeleri burada yerlerine yazılırsa,

$$-(\kappa + 1)\xi^2 \phi + (\kappa - 1) \frac{d^2 \phi}{dy^2} - 2\xi \frac{d\psi}{dy} + \beta(\kappa - 1) \left[\frac{d\phi}{dy} - \xi\psi \right] = 0 \quad (57)$$

$$-(\kappa - 1)\xi^2 \psi + (\kappa + 1) \frac{d^2 \psi}{dy^2} + 2\xi \frac{d\phi}{dy} + \beta \left[(3 - \kappa)\xi\phi + (\kappa + 1) \frac{d\psi}{dy} \right] = 0 \quad (58)$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir. (57) ve (58) denklemleri $\ddot{y} = \ddot{U} y + k y$ şeklinde bir diferansiyel denklem sistemi [58] olup, bu diferansiyel denklem sistemi,

$$\phi = y_1 \text{ ve } \frac{d\phi}{dy} = y_3 \quad (59)$$

$$\psi = y_2 \text{ ve } \frac{d\psi}{dy} = y_4 \quad (60)$$

tanımlamaları yapılarak $\dot{y} = \mathfrak{U}y$ şeklinde aşağıdaki matris formda yazılabilir:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa_1+1}{\kappa_1-1} \xi^2 & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa_1-1} \\ \frac{-\beta \xi (3-\kappa_1)}{\kappa_1+1} & \frac{\kappa_1-1}{\kappa_1+1} \xi^2 & -\frac{2\xi}{\kappa_1+1} & -\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Burada,

$$\mathfrak{U} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{\kappa_1+1}{\kappa_1-1} \xi^2 & \beta \xi & -\beta & \frac{2\xi}{\kappa_1-1} \\ \frac{-\beta \xi (3-\kappa_1)}{\kappa_1+1} & \frac{\kappa_1-1}{\kappa_1+1} \xi^2 & -\frac{2\xi}{\kappa_1+1} & -\beta \end{bmatrix} \text{ olarak tanımlanır ve diferansiyel}$$

denklem sisteminin karakteristik denklemi $|\mathfrak{U} - nI| = 0$ yazılarak aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$n^4 + 2\beta n^3 + (\beta^2 - 2\xi^2)n^2 - 2\xi^2 \beta n + \frac{\xi^2 (3\beta^2 + \xi^2 + (\xi^2 - \beta^2)\kappa_1)}{\kappa_1 + 1} = 0 \quad (62)$$

Diferansiyel denklem sisteminin çözümünün e^{ny} şeklinde olduğu kabul edilirse;

$$\phi = \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} \quad (63)$$

$$\psi = \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} \quad (64)$$

olarak tanımlanabilir. (63) ve (64) ifadeleri (57) ve (58) ifadelerinde yerlerine yazılırsa,

$$m_j = \frac{(3\beta + 2n_j - \beta\kappa_1) \left[n_j (\beta + n_j) (\kappa_1 + 1) - \xi^2 (\kappa_1 + 3) \right]}{\xi \left[4\xi^2 - \beta^2 (\kappa_1 - 3) (\kappa_1 + 1) \right]}, \quad (j = 1, \dots, 4) \quad (65)$$

olarak elde edilir. Karakteristik denklemin kökleri ise aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

$$n_1 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (66)$$

$$n_2 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 - 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (67)$$

$$n_3 = -\frac{1}{2} \left(\beta + \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (68)$$

$$n_4 = -\frac{1}{2} \left(\beta - \sqrt{4\xi^2 + \beta^2 + 4\xi\beta i \sqrt{\frac{3-\kappa_1}{\kappa_1+1}}} \right) \quad (69)$$

$\phi(\xi, y)$ ve $\psi(\xi, y)$ fonksiyonları sırasıyla (27) ve (28) nolu denklemlerde yerlerine yazılırsa, FD tabakaya ilişkin yer değiştirme ifadeleri tabakanın kütle kuvvetinin olmaması durumu için aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j e^{n_j y} e^{-i\xi x} d\xi \quad (70)$$

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j m_j e^{n_j y} e^{-i\xi x} d\xi \quad (71)$$

(70) ve (71) ifadeleri (10), (11) ve (13) bünye denklemlerinde yerlerine yazılırlarsa, düzlem şekil değiştirme halinde FD tabaka için gerilme bileşenleri aşağıdaki şekilde elde edilirler:

$$\sigma_x = \frac{\mu_0 e^{\beta y}}{2\pi(\kappa-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j [(3-\kappa)m_j n_j + \xi(\kappa+1)] e^{n_j y} e^{-i\xi x} d\xi \quad (72)$$

$$\sigma_y = \frac{\mu_0 e^{\beta y}}{2\pi(\kappa-1)} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j C_j e^{n_j y} e^{-i\xi x} d\xi \quad (73)$$

$$\tau_{xy} = \frac{\mu_0 e^{\beta y}}{2\pi} \int_0^\infty \sum_{j=1}^4 A_j D_j e^{n_j y} e^{-i\xi x} d\xi \quad (74)$$

Burada,

$$C_j = [(\kappa+1)m_j n_j + \xi(3-\kappa)] \quad (j=1, \dots, 4) \quad (75)$$

$$D_j = [n_j - \xi m_j] \quad (j=1, \dots, 4) \quad (76)$$

olarak tanımlanmaktadır.

1.4.4. Elastik Çeyrek Düzleme İlişkin Denklemlerin Elde Edilmesi

Düzlem elastisite problemlerinin çözümünde, Airy gerilme fonksiyonlarının kullanılması büyük kolaylık sağlar. Burada Airy gerilme fonksiyonu:

$$\varphi = \varphi(r, \theta) \quad (77)$$

olarak tamamlanırsa, kütle kuvvetsiz halde gerilme bileşenleri polar koordinatlarda aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (78)$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \quad (79)$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} \quad (80)$$

Kütle kuvvetsiz halde, (78-80) ifadelerinde verilen gerilme bileşenleri kullanılarak yazılan denge denklemleri özdeş olarak sağlanır. Gerilmeler cinsinden yazılan uygunluk bağıntısı ise aşağıdaki hale dönüşür.

$$\Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad (81)$$

Burada, Δ polar koordinatlar için Laplace operatörü olup aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (82)$$

(78-80) ifadelerinde verilen gerilme bileşenleri (81) ifadesinde yerlerine yazılırsa, problemin çözümü Airy gerilme fonksiyonunun arandığı aşağıdaki diferansiyel denklemin bulunmasına indirgenmiş olur:

$$\Delta\Delta\varphi = 0 \quad (83)$$

Kamalar ve aksenal simetrik konilerin temas ve sınır değer problemlerinin çözümünde Mellin dönüşümünün kullanılması problemin çözümünde kolaylık sağlar.

Verilen bir $f(r, \theta)$ fonksiyonu için r değişkenine göre Mellin dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$f^M(s, \theta) = M[f(r, \theta); r \rightarrow s] = \int_0^\infty f(r, \theta) r^{s-1} dr \quad (84)$$

Burada; f^M , Mellin uzayına taşınmış fonksiyonu ve s ise dönüşüm parametresini göstermektedir. f^M fonksiyonunun ters Mellin dönüşümü ise;

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^M r^{-s} ds \quad (0 \leq r < \infty) \quad (85)$$

şeklinde ifade edilebilir. n . dereceye kadar türevleri olan bir $f(r, \theta)$ fonksiyonu için;

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial \theta^n}\right)^M = M \left[\frac{\partial^n f}{\partial \theta^n}; r \rightarrow s \right] = \frac{\partial^n f^M}{\partial \theta^n} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \left(r^m \frac{\partial^n f}{\partial r^n}\right)^M &= M \left[r^m \frac{\partial^n f}{\partial r^n}; r \rightarrow s \right] \\ &= (-1)^n \frac{\Gamma(s+m)}{\Gamma(s+m-(n-1)-1)} M[f; r \rightarrow s+(m-n)] \end{aligned} \quad (87)$$

Mellin dönüşümleri yazılabilir. Bu ifadelerde geçen Γ ifadesi Gamma fonksiyonunu göstermektedir. Airy gerilme fonksiyonunun Mellin dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\varphi^M = M[\varphi; r \rightarrow s] = \int_0^\infty \varphi r^{s-1} dr \quad (88)$$

(83) ifadesinde verilen biharmonik denklem r^4 ile çarpılarak Mellin dönüşümü alınırsa:

$$\int_0^\infty \left[r^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r^3 \frac{\partial}{\partial r} + r^4 \frac{\partial^4}{\partial^4} \right] \Delta \varphi r^{s-1} dr = 0 \quad (89)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - (s+2) + (s+3)(s+2) \right] M[\Delta \varphi; r \rightarrow s+2] = 0 \quad (90)$$

olarak bulunur. (90) ifadesi düzenlenirse:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (s+2)^2 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + s^2 \right) \varphi^M = 0 \quad (91)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümü;

$$\varphi^M = e^{\lambda\theta} \quad (92)$$

şeklinde aranır ve (91) ifadelerinde yerine yazılırsa:

$$\left(\lambda^2 + s^2\right)\left(\lambda^2 + (s+2)^2\right)e^{\lambda\theta} = 0 \quad (93)$$

karakteristik denklemini elde edilir. Bu denklemin kökleri;

$$\lambda_{1,2} = \pm is \quad (94)$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i(s+2) \quad (95)$$

olarak bulunur. (91) ifadesinin genel çözümü;

$$\varphi^M = B_1 e^{is\theta} + B_2 e^{-is\theta} + B_3 e^{i(s+2)\theta} + B_4 e^{-i(s+2)\theta} \quad (96)$$

olarak elde edilir.

(78-80) nolu denklemlerde verilen gerilme bileşenleri r^2 ile çarpıldıktan sonra Mellin dönüşümleri alınır;

$$\left(r^2 \sigma_r\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - s\right) \varphi^M \quad (97)$$

$$\left(r^2 \sigma_\theta\right) = s(s+1) \varphi^M \quad (98)$$

$$\left(r^2 \tau_{r\theta}\right) = (s+1) \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi^M \quad (99)$$

olarak elde edilirler. Polar koordinatlarda yer değiştirme bileşenleri:

$$2Gu_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} + (1-\nu)r \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \quad (100)$$

$$2Gu_\theta = -\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + (1-\nu)r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (101)$$

olarak tanımlanabilir. Burada;

$$\Delta\Psi = 0 \quad (102)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \right) = \Delta\varphi \quad (103)$$

şeklinindedir. Tanımlanacak problemlere ilişkin integral denklemlerin elde edilmesinde kullanılacak sınır şartları için $\frac{\partial u_\theta}{\partial r}$ ifadesine ihtiyaç vardır. (101) numaralı ifade r 'ye göre bir defa türetilirse;

$$2G \frac{\partial u_\theta}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2\varphi}{\partial r \partial\theta} + (1-\nu) \left[2r \frac{\partial\Psi}{\partial r} + r^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} \right] \quad (104)$$

elde edilir. (104) ifadesi r^2 ile çarpılıp Mellin dönüşümü alınırsa;

$$2G \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = (s+1) \frac{\partial\varphi^M}{\partial\theta} + (1-\nu)(s+2)(s+1)M [\Psi; r \rightarrow s+2] \quad (105)$$

olur. Burada, $M [\Psi; r \rightarrow s+2]$ ifadesi $r^2\Psi$ fonksiyonun Mellin dönüşümünü ifade etmektedir. (103) ifadesi r^2 ile çarpılıp Mellin dönüşümü alınırsa;

$$(s+1) \frac{\partial}{\partial\theta} M [\Psi; r \rightarrow s+2] = \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + s^2 \right) \varphi^M \quad (106)$$

olarak elde edilir. (102) ifadesi r^4 ile çarpılıp Mellin dönüşümü alınırsa;

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} M [\Psi; r \rightarrow s+2] = -(s+2)^2 M [\Psi; r \rightarrow s+2] \quad (107)$$

olur. (106) ifadesi θ 'ya göre türetilir ve (107) numaralı ifadeden $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} M[\Psi; r \rightarrow s+2]$ değeri alınıp burada yerine yazılırsa:

$$M[\Psi; r \rightarrow s+2] = \frac{1}{(s+1)(s+2)^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + s^2 \right) \frac{\partial \varphi^M}{\partial \theta} \quad (108)$$

elde edilir. (108) ifadesi (105) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$2G \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = \left(s+1 + \frac{1-\nu}{s+2} s^2 \right) \frac{\partial \varphi^M}{\partial \theta} + \left(\frac{1-\nu}{s+2} \right) \frac{\partial^3 \varphi^M}{\partial \theta^3} \quad (109)$$

olarak elde edilir. (96) ifadesinin gerekli türevleri alınıp (109) ifadesinde yerlerine yazılırsa;

$$2G \left(r^2 \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right)^M = is(s+1) \left(B_1 e^{is\theta} - B_2 e^{-is\theta} \right) + \\ + i \left[(s+2)(s+1) + (1-\nu)(-4s-4) \right] \left[B_3 e^{i(s+2)\theta} - B_4 e^{-i(s+2)\theta} \right] \quad (110)$$

elde edilmiş olur. Çeyrek düzlem için genel denklemler elde edilirken (r, θ) koordinatlarına yönelik herhangi bir tanımlama yapılmadığından, elde edilen denklemler hem sağ hem de sol çeyrek düzlem için kullanılabilirler.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Problemin Tanımı

Bu çalışma kapsamında; tabakalı ortamlara ilişkin temas problemlerinin genel çözümü programlaya yönelik olarak elde edilecektir. Daha sonra; tabaka sayısı, temel türü, malzeme özellikleri, yükleme durumu ve temas yüzeylerinin yapışıklık durumu kullanıcı tarafından belirlenebilecek görsel ara yüze sahip bir bilgisayar programı geliştirilecektir. Program yardımıyla tanımlanan herhangi bir tabakalı ortama ilişkin temas probleminin çözümü, çalışma kapsamında elde edilen genel çözüm esas alınarak analitik olarak yine program yardımıyla yapılacaktır. Çözümünden elde edilen sonuçlar tablolar ve grafiklerle halinde program yardımıyla görüntülenebilecektir. Tabakalı ortamlarda temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu temsili olarak Şekil 1’de verilmektedir.

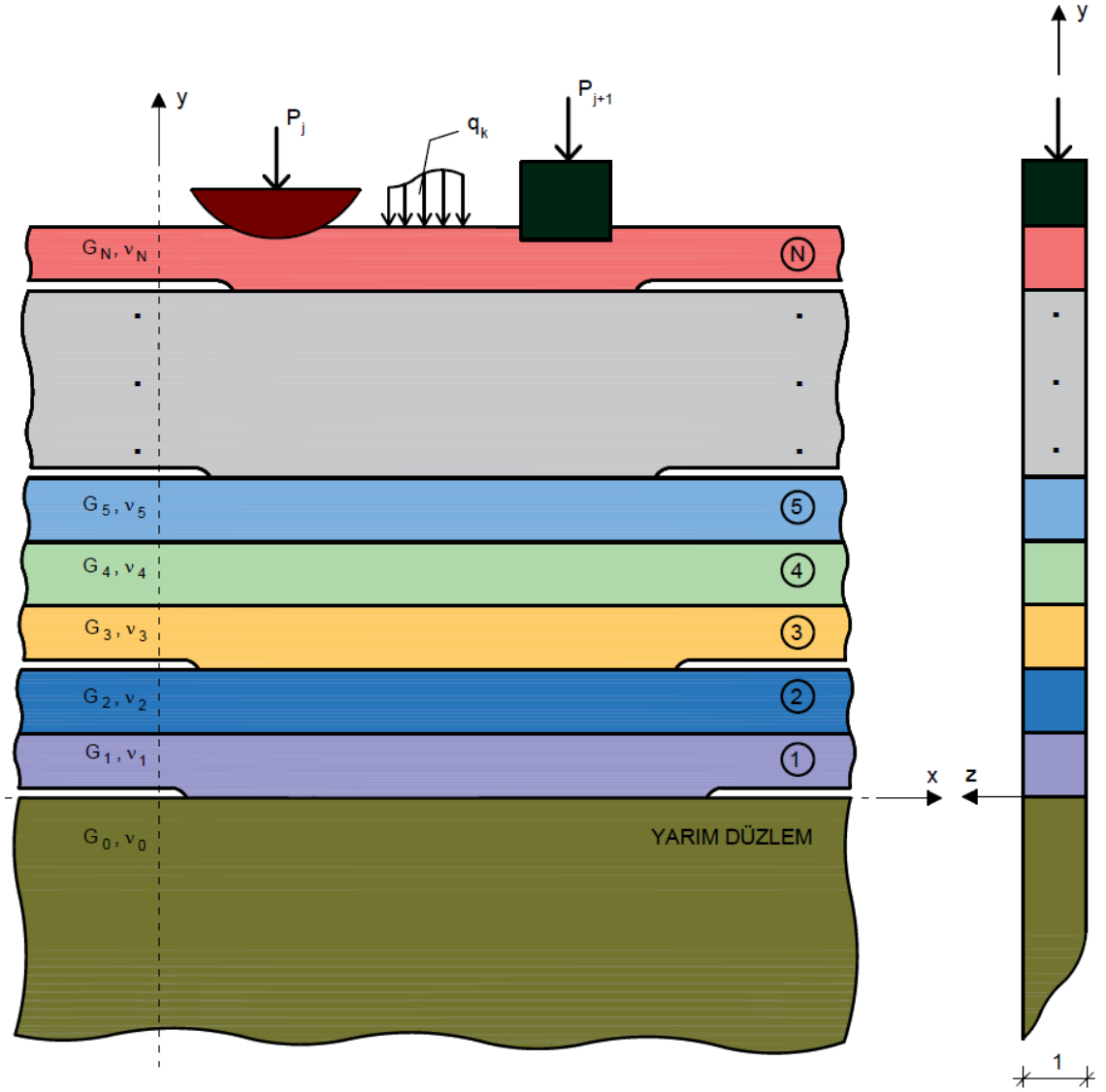
Tabakalı ortam, malzeme özellikleri ve yüksekliği değişebilen homojen veya fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) N adet tabakadan oluşmaktadır. Tabakalı ortam; rijit temel, elastik yarım düzlem, Winkler temel veya elastik iki çeyrek düzlemden oluşan yüzeylerden herhangi birinin üzerine oturabilmekte ve aşağıda verilen yükleme durumlarından herhangi biri ile yüklenebilmektedir.

- a) Rijit bloklar aracılığıyla yüklenen tekil yük (Bir veya daha fazla olabilir, n adet)
- b) Yayılı yük (bir veya daha fazla bölgede olabilir, r adet)
- c) a ve b durumlarınının beraber etkimesi

Tabakalar arasındaki temas yüzeyleri ile tabaka-yarım düzlem ve tabaka-rijit temel arasındaki temas yüzeylerin yapışıklık durumu, yapışık veya yapışık olmayan temas şeklinde kullanıcı tarafından belirlenebilecektir. Rijit blok altı temas yüzeyleri ile tabaka çeyrek düzlemler arası temas yüzeyleri yapışık olmayan temas şeklinde otomatik olarak program tarafından tanımlanacaktır. Yapışık olmayan temas yüzeylerinde üç farklı durum oluşabilmektedir. Tabaka ile düz bloklar arasındaki temas yüzeylerinde, temas uzunlukları sadece tanımlanan bloğun boyutuna bağlıdır ve sabit kalırlar. Diğer temas yüzeylerinde ise temas uzunlukları tanımlanacak probleme göre artabilir veya azalabilir. Bu nedenle, değişebilen bu temas uzunlukları bilinmeyenler olup problemin çözümü ile bulunacaktır. Tanımlanan bir problemin toplamda M adet yapışık olmayan temas yüzeyinden oluştuğu

kabul edilecektir. Bu temas yüzeylerinden m tanesi tabakalar arasındaki veya ilk tabaka ile temel arasındaki temas yüzeyleri, n tanesi ise rijit bloklar altındaki temas yüzeyleri olup, $M=m+n$ şeklinde tanımlanmaktadır.

Çözümde kütle kuvvetleri ve sürtünme ihmal edilecek olup, problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınacaktır. Probleme ait genel eksen takımının birinci tabakanın alt yüzeyinden geçecek şekilde olduğu kabul edilecektir.



Şekil 1. Tabakalı ortama ilişkin temsili geometri ve yükleme durumu

2.2. Kullanılan Denklemler

Tabakanın alt yüzeyinden geçecek şekilde seçilen yerel eksen takımına (x, y_j) göre, homojen j . tabaka için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_j(x, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_{j1} + A_{j2}y_j)e^{-\xi y_j} + (A_{j3} + A_{j4}y_j)e^{\xi y_j} \right] e^{-i\xi x} d\xi \quad (111)$$

$$v_j(x, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & -i \left[A_{j1} + \left(\frac{\kappa_j}{\xi} + y_j \right) A_{j2} \right] e^{-\xi y_j} \\ & + i \left[A_{j3} - \left(\frac{\kappa_j}{\xi} - y_j \right) A_{j4} \right] e^{\xi y_j} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (112)$$

$$\sigma_{x_j}(x, y_j) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & 2G_j \xi i \left[A_{j1} + \left(\frac{\kappa_j - 3}{2\xi} + y_j \right) A_{j2} \right] e^{-\xi y_j} \\ & + \left[A_{j3} + \left(-\frac{\kappa_j - 3}{2\xi} + y_j \right) A_{j4} \right] e^{\xi y_j} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (113)$$

$$\sigma_{y_j}(x, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & 2G_j \xi i \left[A_{j1} + \left(\frac{\kappa_j + 1}{2\xi} + y_j \right) A_{j2} \right] e^{-\xi y_j} \\ & + \left[A_{j3} + \left(-\frac{\kappa_j + 1}{2\xi} + y_j \right) A_{j4} \right] e^{\xi y_j} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (114)$$

$$\tau_{xy_j}(x, y_j) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & 2G_j \xi \left[A_{j1} + \left(\frac{\kappa_j - 1}{2\xi} + y_j \right) A_{j2} \right] e^{-\xi y_j} \\ & - \left[A_{j3} + \left(-\frac{\kappa_j - 1}{2\xi} + y_j \right) A_{j4} \right] e^{\xi y_j} \end{aligned} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (115)$$

Burada, j indisi ifadelerin j . tabakaya (j indisi $1, \dots, N$ arasında değişebilmektedir) ait olduğunu göstermektedir. (111-115) denklemlerinde geçen A_{jk} ($k=1, \dots, 4$) ifadeleri sınır şartlarından belirlenecek tabakalara ait bilinmeyen katsayılardır.

Elastik yarım düzlemin üst yüzeyinden geçecek şekilde seçilen eksen takımına (x, y) göre, elastik yarım düzleme ait yer değiştirme ve gerilme ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_{h1} + A_{h2}y) e^{|\xi|y} \right] e^{-i\xi x} d\xi, \quad (116)$$

$$v_h(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \frac{|\xi|}{\xi} \left[-A_{h1} + \left(\frac{\kappa_h}{|\xi|} + y \right) A_{h2} \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (117)$$

$$\sigma_{x_h}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2G_h \xi i \left[A_{h1} + \left(y - \frac{\kappa_h - 3}{2|\xi|} \right) A_{h2} \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (118)$$

$$\sigma_{y_h}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2G_h \xi i \left[A_{h1} + \left(y - \frac{\kappa_h + 1}{2|\xi|} \right) A_{h2} \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (119)$$

$$\tau_{xy_h}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ 2G_h |\xi| \left[A_{h1} + \left(y - \frac{\kappa_h - 1}{2|\xi|} \right) A_{h2} \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (120)$$

Burada, A_{hi} ($i=1,2$) ifadeleri sınır şartlarından belirlenecek yarıım düzleme ait bilinmeyen katsayılardır.

Tabakanın alt yüzeyinden geçecek şekilde seçilen yerel eksen takımına (x, y_j) göre, fonksiyonel derecelendirilmiş j . tabaka için yer değiştirme ve gerilme ifadeleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_j(x, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^4 A_{jk} e^{n_{jk} y_j} e^{-i\xi x} d\xi \quad (121)$$

$$v_j(x, y_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^4 A_{jk} m_{jk} e^{n_{jk} y_j} e^{-i\xi x} d\xi \quad (122)$$

$$\sigma_{x_j}(x, y_j) = \frac{G_{0j} e^{\beta_j y_j}}{2\pi(\kappa_j - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^4 A_{jk} \left[(3 - \kappa_j) m_{jk} n_{jk} + \xi(\kappa_j + 1) \right] e^{n_{jk} y_j} e^{-i\xi x} d\xi \quad (123)$$

$$\sigma_{y_j}(x, y_j) = \frac{G_{0j} e^{\beta_j y_j}}{2\pi(\kappa_j - 1)} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^4 A_{jk} C_{jk} e^{n_{jk} y_j} e^{-i\xi x} d\xi \quad (124)$$

$$\tau_{xy_j}(x, y_j) = \frac{G_{0j} e^{\beta_j y_j}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^4 A_{jk} D_{jk} e^{n_{jk} y_j} e^{-i\xi x} d\xi \quad (125)$$

Burada, j indisi ifadelerin j . tabakaya (j indisi $1, \dots, N$ arasında değişebilmektedir) ait olduğunu göstermektedir. (121-125) denklemlerinde geçen A_{jk} ($k=1, \dots, 4$) ifadeleri sınır şartlarından belirlenecek tabakalara ait bilinmeyen katsayılardır. Homojen ve FD tabakalar beraber düşünüldüğünde tabakalara ait bilinmeyen katsayıların toplamı $4N$ tanedir.

Polar koordinatlarda sağ ve sol çeyrek düzlemler için gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin r^2 ile çarpımlarının Mellin dönüşümleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{r_j} = \frac{1}{r_j^2} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \theta_j^2} + \frac{1}{r_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r_j} \rightarrow \left(r_j^2 \sigma_{r_j} \right)^M = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_j^2} - s_j \right) \varphi_j^M \quad (126)$$

$$\sigma_{\theta_j} = \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r_j^2} \rightarrow \left(r_j^2 \sigma_{\theta_j} \right)^M = s_j (s_j + 1) \varphi_j^M \quad (127)$$

$$\tau_{r\theta_j} = -\frac{1}{r_j} \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial r_j \partial \theta_j} \rightarrow \left(r_j^2 \tau_{r\theta_j} \right)^M = (s_j + 1) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \varphi_j^M \quad (128)$$

$$2G_j \left(r_j^2 \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right)^M = is_j (s_j + 1) \left(A_{qj1} e^{is_j \theta_j} - A_{qj2} e^{-is_j \theta_j} \right) + i \left[(s_j + 2)(s_j + 1) + (1 - \nu)(-4s_j - 4) \right] \left[A_{qj3} e^{i(s_j+2)\theta_j} - A_{qj4} e^{-i(s_j+2)\theta_j} \right] \quad (129)$$

Bu ifadelerde geçen j indisi; ifadelerin sağ veya sol çeyrek düzleme ait olduğunu göstermekte olup, sağ çeyrek düzlem için 1 ve sol çeyrek düzlem için 2 değerini almaktadır. (...) ^M ile parantez içindeki ifadenin Mellin integral dönüşümü ifade edilmekte ve φ ise Airy gerilme fonksiyonu olup genel çözümü aşağıda verilmektedir.

$$\varphi_j^M = A_{qj1} e^{is_j \theta_j} + A_{qj2} e^{-is_j \theta_j} + A_{qj3} e^{i(s_j+2)\theta_j} + A_{qj4} e^{-i(s_j+2)\theta_j} \quad (130)$$

(126-130) denklemlerinde geçen A_{qjk} ($j=1, 2$; $k=1, \dots, 4$) ifadeleri sınır şartlarından belirlenecek tabakalara ait bilinmeyen katsayılar olup sağ ve sol çeyrek düzlem için toplamda 8 tanedir.

2.3. Tabakalı Ortama İlişkin Sınır Şartları

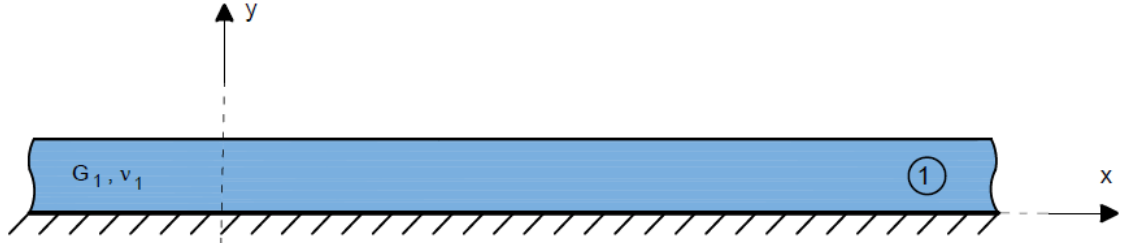
Bu bölümde tabakalı ortama ilişkin karşılaşılabilecek sınır şartlarının tamamı tanımlanacak olup, bu şartlar seçilen probleme göre farklılık gösterebilmektedir.

2.3.1. Tabakalı Ortamın Oturacağı Temel ile Birinci Tabaka Arasındaki Sınır Şartları

Bu hale ilişkin sınır şartları; temel türü ve tabaka ile temel arasındaki temas yüzeyinin yapışık olup olmaması durumlarına göre ayrı ayrı tanımlanabilir.

2.3.1.1. Rijit Temel

Rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu Şekil 2’de verilmektedir.



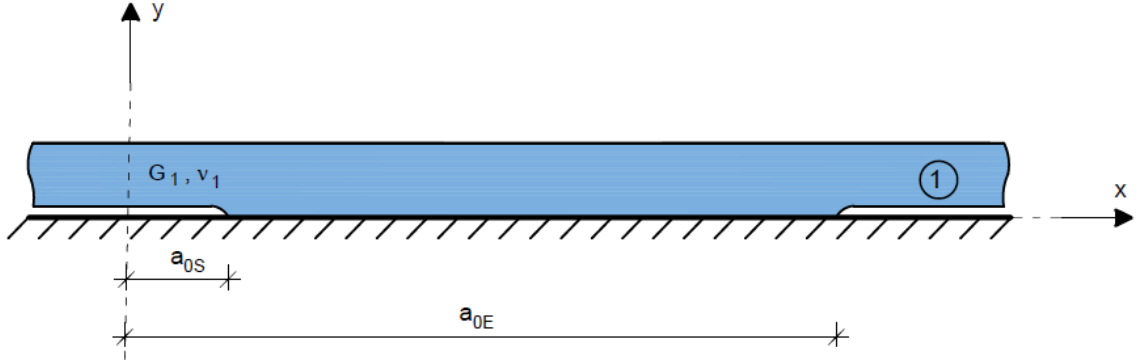
Şekil 2. Rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu

Bu durum için yer değiştirmeler cinsinden 2 adet sınır şartı tabakanın alt yüzeyinden geçen eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_1(x,0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (131)$$

$$v_1(x,0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (132)$$

Rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumunda tabaka ile rijit zemin arasında ayrılma olur. Bu durum Şekil 3’te verilmektedir.



Şekil 3. Rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumu

Bu durum için gerilmeler cinsinden 2 adet ve yer değiştirmeler cinsinden 1 adet olmak üzere toplamda 3 adet sınır şartı, tabakanın alt yüzeyinden geçen eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \begin{cases} -p_0(x) & , \quad a_{0S} \leq x \leq a_{0E} \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases} \quad (133)$$

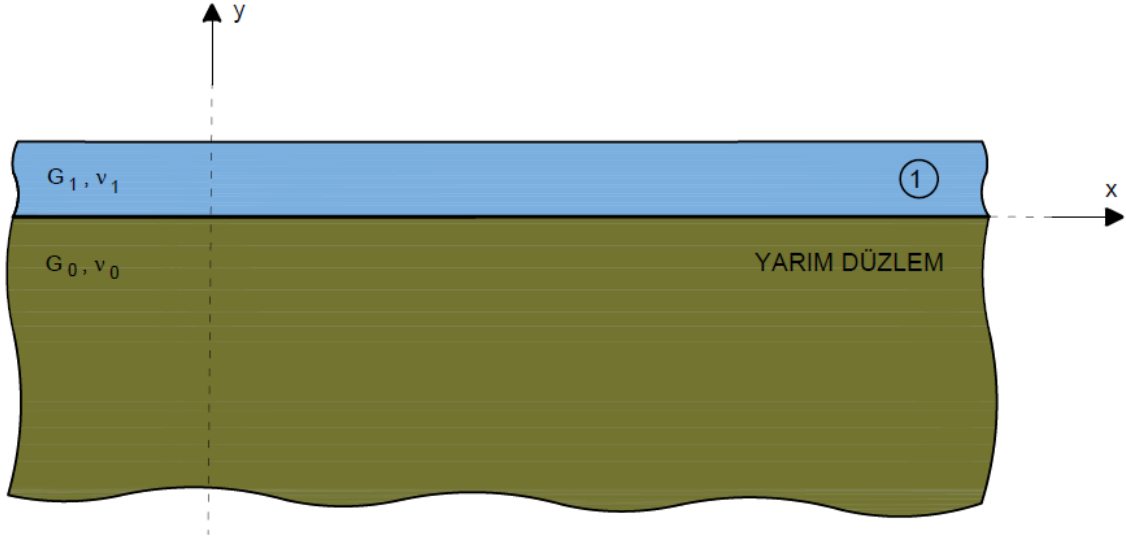
$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (134)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[v_1(x, 0)] = 0 \quad (a_{0S} \leq x \leq a_{0E}) \quad (135)$$

Bu sınır şartlarında geçen $p_0(x)$ rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinde oluşan temas gerilmelerini, a_{0S} ve a_{0E} ise sırasıyla temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktalarını göstermektedir. $p_0(x)$, a_{0S} ve a_{0E} ele alına problemin çözümünden bulunacak bilinmeyenlerdir.

2.3.1.2. Elastik Yarım Düzlem

Elastik yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu Şekil 4'de verilmektedir.



Şekil 4. Yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu

Bu durum için 2 adet gerilmeler ve 2 adet yer değiştirmeler cinsinden olmak üzere toplamda 4 adet sınır şartı yazılabilir.

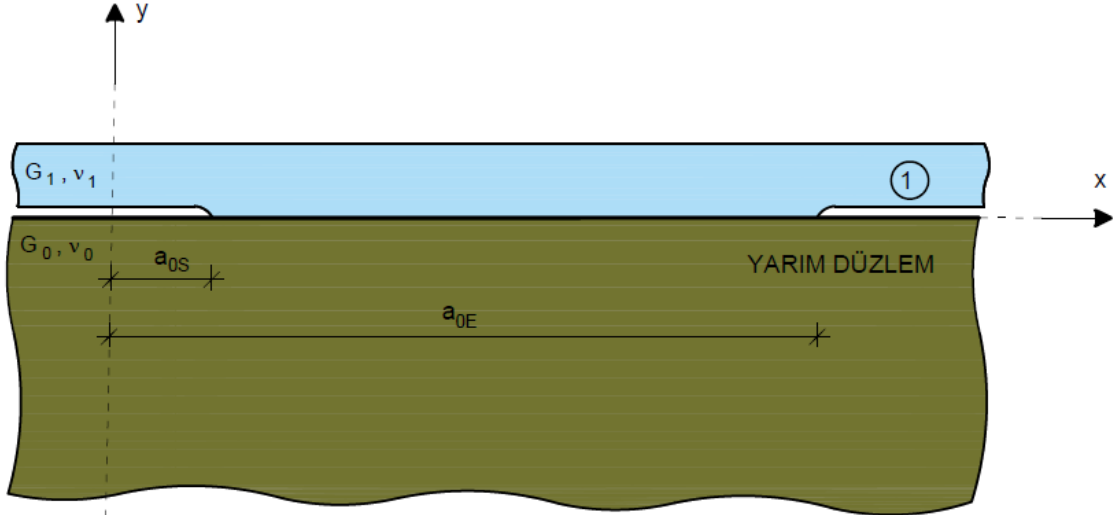
$$u_1(x, 0) = u_h(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (136)$$

$$v_1(x, 0) = v_h(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (137)$$

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \sigma_{y_h}(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (138)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = \tau_{xy_h}(x, 0) \quad (-\infty < x < \infty) \quad (139)$$

Elastik yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumunda temas yüzeylerinde ayrılma olur. Bu durum Şekil 5’de verilmektedir.



Şekil 5. Yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumu

Bu durum için gerilmeler cinsinden 4 adet ve yer değiştirmeler cinsinden 1 adet olmak üzere toplamda 5 adet sınır şartı tabakanın alt yüzeyinden geçen eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \begin{cases} -p_0(x) & , \quad a_{0S} \leq x \leq a_{0E} \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases} \quad (140)$$

$$\sigma_{y_h}(x, 0) = \begin{cases} -p_0(x) & , \quad a_{0S} \leq x \leq a_{0E} \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases} \quad (141)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (142)$$

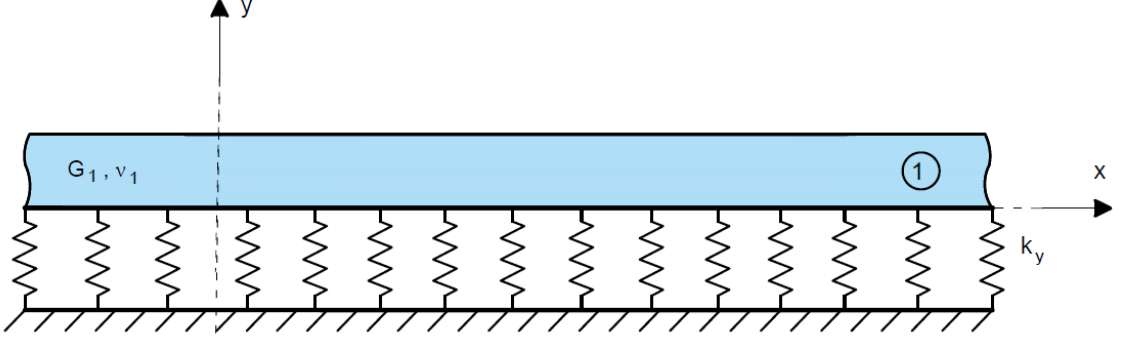
$$\tau_{xy_h}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (143)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_1(x, 0) - v_h(x, 0)] = 0 \quad (a_{0S} \leq x \leq a_{0E}) \quad (144)$$

Bu sınır şartlarında geçen $p_0(x)$ elastik yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinde oluşan temas gerilmelerini, a_{0S} ve a_{0E} ise sırasıyla temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktalarını göstermektedir. $p_0(x)$, a_{0S} ve a_{0E} ele alınan problemin çözümünden bulunacak bilinmeyenlerdir.

2.3.1.3. Winkler Temeli

Tabakalı sistemin Winkler temeline oturma durumu Şekil 6'da verilmektedir.



Şekil 6. Tabakalı sistemin Winkler temeline oturması durumu

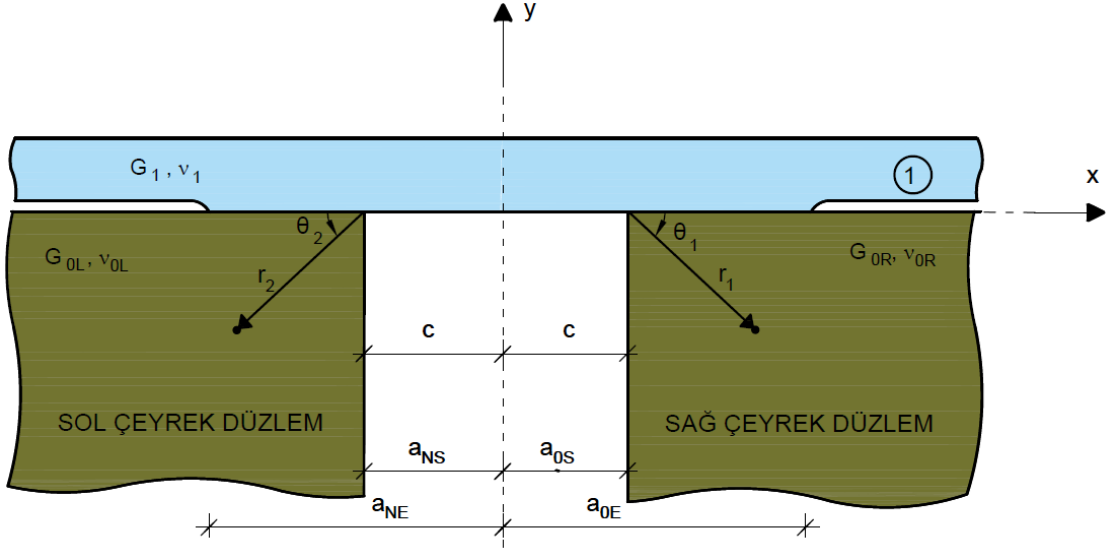
Şekil 6'dan görülebileceği gibi Winkler temeli yay sabiti k_y olan yay olarak idealleştirilmektedir. Bu duruma ilişkin iki adet sınır şartı tabakanın alt yüzeyinden geçen eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = v_1(x, 0) * k_y \quad (-\infty < x < \infty) \quad (145)$$

$$\tau_{y_1}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (146)$$

2.3.1.4. Elastik Çeyrek Düzlemler

Tabakalı sistemin elastik çeyrek düzlemler üzerine oturma durumu Şekil 7'de verilmektedir.



Şekil 7. Tabakalı sistemin elastik çeyrek düzlemler üzerine oturması durumu

Bu durum için gerilmeler cinsinden 8 adet ve yer değiştirmeler cinsinden 2 adet olmak üzere toplamda 10 adet sınır şartı, tabaka ve çeyrek düzlemler için Şekil 7 'de verilen Kartezyen ve polar koordinatlara göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_1}(x, 0) = \begin{cases} -p_0(x) & , a_{0S} \leq x \leq a_{0E} \\ -p_N(x) & , a_{NS} \leq x \leq a_{NE} \\ 0 & , \text{diğer} \end{cases} \quad (147)$$

$$\tau_{xy_1}(x, 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (148)$$

$$\sigma_{\theta_1}(r_1, 0) = \begin{cases} -p_0(r_1) & , 0 \leq r_1 \leq (a_{0E} - a_{0S}) \\ 0 & , \text{diğer aralıklarda} \end{cases} \quad (149)$$

$$\tau_{r\theta_1}(r_1, 0) = 0 \quad (0 \leq r_1 < \infty) \quad (150)$$

$$\sigma_{\theta_1}(r_1, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (0 \leq r_1 < \infty) \quad (151)$$

$$\tau_{r\theta_1}(r_1, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (0 \leq r_1 < \infty) \quad (152)$$

$$\sigma_{\theta_2}(r_2, 0) = \begin{cases} -p_N(r_2) & , 0 \leq r_2 \leq (a_{NE} - a_{NS}) \\ 0 & , \text{diğer aralıklarda} \end{cases} \quad (153)$$

$$\tau_{r\theta_2}(r_2, 0) = 0 \quad (0 \leq r_2 < \infty) \quad (154)$$

$$\sigma_{\theta_2}(r_2, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (0 \leq r_2 < \infty) \quad (155)$$

$$\tau_{r\theta 2}(r_2, \frac{\pi}{2}) = 0 \quad (0 \leq r_2 < \infty) \quad (156)$$

$$\frac{\partial v_1(x, 0)}{\partial x} = -\frac{\partial u_{\theta 1}(r_1, 0)}{\partial r_1} = -\frac{\partial v_{r1}(x, 0)}{\partial x} \quad a_{0S} \leq x \leq a_{0E}, \quad 0 \leq r_1 \leq (a_{0E} - a_{0S}) \quad (157)$$

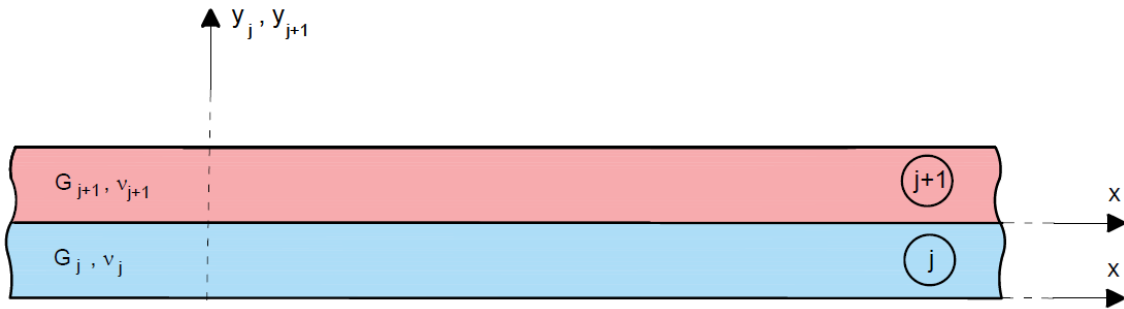
$$\frac{\partial v_1(x, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u_{\theta 2}(r_2, 0)}{\partial r_2} = \frac{\partial v_{r2}(x, 0)}{\partial x} \quad a_{NS} \leq x \leq a_{NE}, \quad 0 \leq r_2 \leq (a_{NE} - a_{NS}) \quad (158)$$

Bu sınır şartlarında geçen, $p_0(x)$ ve $p_N(x)$ sırasıyla, tabaka ile sağ ve sol çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeylerinde oluşan temas gerilmelerini göstermektedir. v_{r1} ve v_{r2} yer değiştirme bileşenleri ise sırasıyla polar koordinatlardaki $u_{\theta 1}$ ve $u_{\theta 2}$ yer değiştirmelerinin kartezyen koordinatlardaki karşılıklarıdır. Ayrıca, a_{0S} ve a_{0E} sırasıyla tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktasını, a_{NS} ve a_{NE} ise yine sırasıyla tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktasını göstermekte olup, a_{0S} ve a_{NE} büyüklükleri çeyrek düzlemler arasındaki mesafenin yarısını ifade eden c değerine bağlıdır. $p_0(x)$, $p_N(x)$, a_{0E} ve a_{NS} ele alınan problemin çözümünden bulunacak bilinmeyenlerdir.

2.3.2. Tabakalar Arasındaki Sınır Şartları

Bu duruma ilişkin sınır şartları, tabakalar arasındaki temas yüzeyinin yapışık olup olmamasına göre ayrı ayrı tanımlanabilir.

Tabakalar arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu Şekil 8'de verilmektedir.



Şekil 8. Tabakalar arasındaki temas yüzeyinin yapışık olması durumu

Bu durum için 2 adet gerilmeler ve 2 adet yer değiştirmeler cinsinden olmak üzere toplamda 4 adet sınır şartı tanımlanabilir. Tabakaların alt yüzeylerinden geçen yerel eksen takımlarına göre bu sınır şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$u_j(x, y_j = h_j) - u_{j+1}(x, y_{j+1} = 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (159)$$

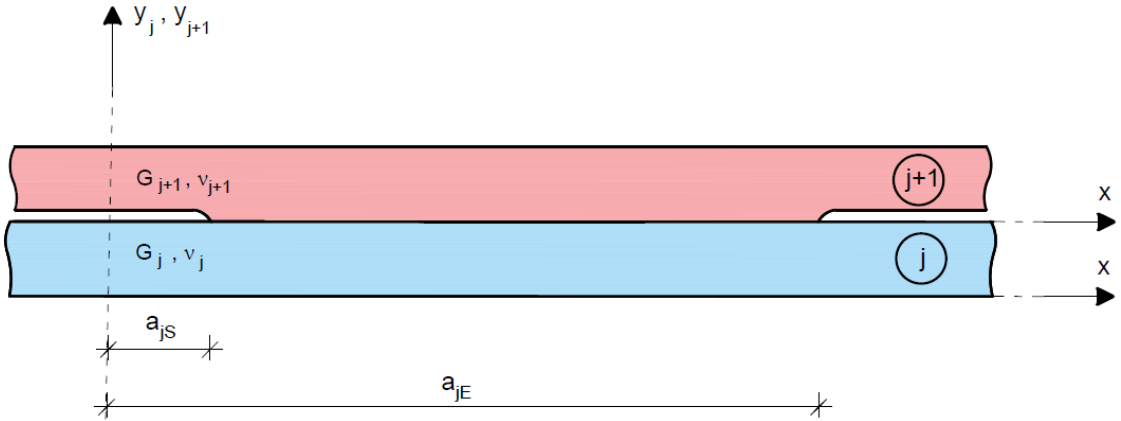
$$v_j(x, y_j = h_j) - v_{j+1}(x, y_{j+1} = 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (160)$$

$$\sigma_{y_j}(x, y_j = h_j) - \sigma_{y_{j+1}}(x, y_{j+1} = 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (161)$$

$$\tau_{xy_j}(x, y_j = h_j) - \tau_{xy_{j+1}}(x, y_{j+1} = 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (162)$$

Burada; j ve $j+1$ indisleri sırasıyla ifadenin j . ve $(j+1)$ tabakaya ait olduğunu göstermekte olup j indisi ($j=1, \dots, N-1$) aralığında değişebilir. h_j , j . tabakaya ait ykseklęi göstermektedir.

Tabakalar arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumunda tabakalar arasında ayrılma olur. Bu durum Şekil 9'da verilmektedir.



Şekil 9. Tabakalar arasındaki temas yüzeyinin yapışık olmaması durumu

Bu durum için 4 adeti gerilmeler cinsinden biri de yer değiştirmeler cinsinden olmak üzere toplamda 5 adet sınır şartı tanımlanabilir. Bu sınır şartları tabakaların alt yüzeylerinden geçen yerel eksen takımlarına göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\sigma_{y_j}(x, y_j = h_j) = \begin{cases} -p_j(x) , & a_{jS} \leq x \leq a_{jE} \\ 0 , & \text{diğer} \end{cases} \quad (163)$$

$$\sigma_{y_{j+1}}(x, y_{j+1} = 0) = \begin{cases} -p_j(x) , & a_{jS} \leq x \leq a_{jR} \\ 0 , & \text{diğer} \end{cases} \quad (164)$$

$$\tau_{xy_j}(x, y_j = h_j) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (165)$$

$$\tau_{xy_{j+1}}(x, y_{j+1} = 0) = 0 \quad (-\infty < x < \infty) \quad (166)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} [v_j(x, y_j = h_j) - v_{j+1}(x, y_{j+1} = 0)] = 0 \quad (a_{jS} < x < a_{jE}) \quad (167)$$

Bu ifadelerde geçen $p_j(x)$, j . tabaka ile $(j+1)$. tabaka arasındaki temas yüzeyinde oluşan temas gerilmelerini, a_{jS} ve a_{jE} ise sırasıyla tabakalar arasındaki temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktalarını göstermektedir. p_j , a_{jS} ve a_{jE} ele alınan problemin çözümünden bulunacak bilinmeyenlerdir.

2.3.3. Yükleme İlişkin Sınır Şartları

N . tabakanın üst yüzeyinde yükleme ilişkin 2 adet gerilmeler cinsinden ve rijit blok sayısı (n) kadar yer değiştirmeler cinsinden olmak üzere toplam $n+2$ adet sınır şartı tanımlanabilir. Bu sınır şartları tabakanın alt yüzeyinden geçen yerel eksen takımına göre aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\tau_{xy_N}(x, h_N) = 0 \quad (-\infty \leq x < \infty) \quad (168)$$

$$\sigma_{y_N}(x, h_N) = \begin{cases} -q_1(x), & c_{1S} \leq x \leq c_{1E} \\ \vdots & \vdots \\ -q_r(x), & c_{rS} \leq x \leq c_{rE} \\ -p_{b1}(x), & b_{1S} \leq x \leq b_{1E} \\ \vdots & \vdots \\ -p_{bn}(x), & b_{nS} \leq x \leq b_{nE} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (169)$$

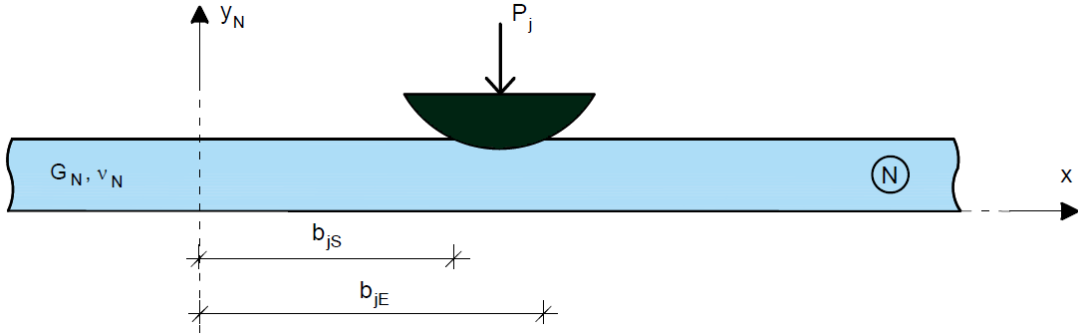
$$\frac{\partial v_N(x, h_N)}{\partial x} = f_k \quad (b_{kS} \leq x \leq b_{kE}) \quad (170)$$

Burada, $q_i(x)$ ($i=1, \dots, r$), $[c_{iS}, c_{iE}]$ aralığında tabakaya etki eden yayılı yük fonksiyonunu, p_{bj} ($j=1, \dots, n$), j . blok ile tabaka arasındaki temas yüzeyinde oluşan temas gerilmelerini, b_{jS} ve b_{jE} ise tabaka ile j . blok arasındaki temas yüzeyinin sırasıyla başlangıç ve bitiş noktalarını göstermekte olup a temas uzunlukları cinsinden aşağıda verildiği gibi tanımlanabilirler.

$$b_{jS} = a_{(N+j)S} \quad (171)$$

$$b_{jE} = a_{(N+j)E} \quad (172)$$

(170) ifadesinde geçen f_k ($k=1, \dots, n$) ise, k . rijit bloğa ait şekil fonksiyonunun x 'e göre türevini göstermektedir. $p_{bj}(x)$ gerilmeleri probleme ait bilinmeyenler olup problemin çözümünden elde edileceklerdir. Düz bloklar için b_{jS} ve b_{jE} ifadelerinin değerleri bellidir. Buna karşın, Şekil 10 'da verilen dairesel veya belli bir fonksiyona sahip rijit blok çeşitleri için b_{jS} ve b_{jE} 'ler bilinmeyenler olup yine problemin çözümü ile elde edilecektir.



Şekil 10. Dairesel veya belli bir fonksiyona sahip rijit blok çeşitleri için b_{jS} ve b_{jE}

2.4. Katsayıların Belirlemesi

Tanımlanacak probleme göre gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde oluşabilecek bilinmeyen katsayıların sayısı değişiklik göstermektedir. Bilinmeyen katsayıların elde edilmesi için; kullanıcı tarafından belirlenen probleme göre, geliştirilen program (131-170) ifadeleri ile verilen sınır şartlarından probleme uygun sınır şartlarını seçebilecektir. Seçilen

bu sınır şartlarının Fourier dönüşümleri alındıktan sonra katsayılar, bilinmeyen temas gerilme fonksiyonlarının ve $q_k(x)$ ($k=1, \dots, r$) yayılı yük fonksiyonlarının Fourier dönüşümlerine bağlı olarak belirlenebilmektedir. Bilinmeyen herhangi bir A katsayısının en genel hali aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$A = \sum_{k=1}^M A_k \bar{P}_k + \sum_{j=1}^r A_{(j+M)} \bar{Q}_j \quad (173)$$

Burada geçen A_k ($k=1, \dots, M$) ve A_{j+M} ($j=1, \dots, r$) ifadeleri, sınır şartlarının uygulanması sonucunda bulunan bilinen ifadelerdir. \bar{P}_k ($k=1, \dots, M$) ve \bar{Q}_j ($j=1, \dots, r$) sırasıyla bilinmeyen \bar{p}_k gerilme fonksiyonunun ve q_j yayılı yük fonksiyonunun Fourier dönüşümleri olup aşağıdaki gibi tanımlanabilmektedirler.

$$\bar{P}_k(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{p}_k(x) e^{i\xi x} dx = \int_{\bar{a}_{kS}}^{\bar{a}_{kE}} \bar{p}_k(t_k) e^{i\xi t_k} dt_k \quad (174)$$

$$\bar{Q}_j(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} q_j(x) e^{i\xi x} dx = \int_{c_{jS}}^{c_{jE}} q_j(x) e^{i\xi x} dx \quad (175)$$

Program, tanımlanan probleme göre sınır şartlarını araştırırken sınır şartlarında karşılaştığı temas gerilmelerini 1'den başlayarak numaralandırmaktadır. (174) ifadesinde geçen \bar{p}_k ile sınır şartlarında karşılaşılan k . yapışık olmayan temas yüzeyine ait bilinmeyen temas gerilmeleri ifade edilmektedir. Benzer şekilde \bar{a}_{kS} ve \bar{a}_{kE} sırasıyla, sınır şartlarında karşılaşılan k . yapışık olmayan temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktalarını göstermektedir. Örneğin, sınır şartlarında karşılaşılan ilk yapışık olmayan temas yüzeyi yarım düzlem ile ilk tabaka arasındaki temas yüzeyi ise $\bar{p}_1 = p_0$, $\bar{a}_{1S} = a_{0S}$ ve $\bar{a}_{1E} = a_{0E}$ şeklinde olacaktır. Eğer, sınır şartlarında karşılaşılan ikinci yapışık olmayan temas yüzeyi üçüncü ve dördüncü tabakalar arasındaki temas yüzeyine ait ise $\bar{p}_2 = p_3$, $\bar{a}_{2S} = a_{3S}$ ve $\bar{a}_{2E} = a_{3E}$ şeklinde olacaktır. Son örnek olarak, sınır şartlarında karşılaşılan ikinci yapışık

olmayan temas yüzeyi birinci rijit blok ile tabaka arasındaki temas yüzeyine ait ise $\bar{p}_2 = p_{b1}$, $\bar{a}_{2S} = b_{1S}$ ve $\bar{a}_{2E} = b_{1E}$ şeklinde olacaktır.

Örneğin, rijit düzlem üzerine oturan ve iki tabakadan oluşan bir tabakalı ortam göz önünde bulundursun. Tabakalı ortamın dairesel rijit bir blok aracılığıyla yüklendiği, rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin yapışık olduğu ve tabakalar arası temas yüzeyinin yapışık olmadığı kabul edilsin. Tanımlanan bu problemde $N=2$, $m=1$, $n=1$ ve $M=2$ olur. Ayrıca toplamda $4N=8$ tane bilinmeyen katsayı ortaya çıkar. Tanımlanan probleme uygun olarak 2 adet sınır şartı (131) ve (132) ifadelerinden, 4 adet sınır şartı (163-166) ifadelerinden ve 2 adet sınır şartı (168) ve (169) ifadelerinden olmak üzere toplam 8 adet sınır şartı program tarafından seçilir. Sınır şartları seçilirken karşılaşılan ilk yapışık olmayan temas yüzeyi tabakalar arasındaki temas yüzeyi ve ikinci temas yüzeyi ise rijit blok ile tabaka arasındaki temas yüzeyidir. Bu nedenle $\bar{p}_1 = p_1$, $\bar{a}_{1S} = a_{1S}$, $\bar{a}_{1E} = a_{1E}$, $\bar{p}_2 = p_{b1}$, $\bar{a}_{2S} = b_{1S}$ ve $\bar{a}_{2E} = b_{1E}$ şeklinde olacaktır. Seçilen probleme ilişkin bilinmeyen katsayılar; tabakalar arasındaki temas yüzeyinde oluşan bilinmeyen temas gerilmeleri \bar{p}_1 ve üst tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyinde oluşan bilinmeyen temas gerilmeleri \bar{p}_2 'nin Fourier dönüşümleri cinsinden, aşağıdaki gibi elde edilir.

$$A_{ji} = \sum_{k=1}^{M=2} A_{jik} \bar{P}_k(x) \quad (j=1,2), \quad (i=1,\dots,4) \quad (176)$$

Tanımlanan herhangi bir problem için bulunan katsayılar içinde M adet bilinmeyen temas gerilme fonksiyonu $\bar{p}_k(x)$ ($k=1,\dots,M$) mevcuttur. Bilinmeyen bu temas gerilmelerinin bulunabilmesi için yapışık olmayan temas yüzeylerine ait olan ve katsayılar bulunurken kullanılmayan M adet yer değiştirmeler cinsinden sınır şartı kullanılır. Bu sınır şartlarının uygulanması ile M adet tekil integral denklemden oluşan bir integral denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin sayısal çözümü ile temas gerilmeleri ve temas uzunlukları bulunabilecektir.

2.5. Denge Şartları

Probleme ait temas yüzeylerine ilişkin denge şartları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\int_{a_{iS}}^{a_{iE}} p_i(t_i) dt_i = \sum_{j=1}^n P_j + \sum_{j=1}^r Q_j, \quad (i=1, \dots, m) \quad (177)$$

$$\int_{b_{iL}}^{b_{iR}} p_{i+m}(t_i) dt_i = P_i, \quad (i=1, \dots, n) \quad (178)$$

(177) ifadesi tabakalar arası yapışık olmayan temas yüzeyleri için, (178) ifadesi ise rijit blok altı temas yüzeyleri için geçerlidir. Bu ifadelerde geçen P_i ($i=1, \dots, n$), i . rijit blok üzerine etkileyen tekil yükü göstermektedir. Q_j ise, j . yayılı yüke ait bileşke kuvveti ifade etmekte olup aşağıdaki gibi tanımlıdır.

$$Q_j = \int_{c_{jL}}^{c_{jR}} q_j(x) dx \quad (179)$$

(177) ve (178) ifadeleri ile herhangi bir temas yüzeyinde oluşan gerilmelerden doğan yükler, o temas yüzeyinin üstünde kalan toplam yüke eşittir. Bu ifadeler toplamda $M=m+n$ tane denge şartı içerir. Ancak (177) ile verilen ifade tabakalı sistemin üzerine oturduğu temelin çeyrek düzlemler olması durumu için geçerli değildir. Temeli çeyrek düzlemler olan tabakalı sistemlerde, sağ çeyrek düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinde oluşan gerilmeler ile sol çeyrek düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinde oluşan gerilmelerden doğan kuvvetlerin toplamı üstten etkileyen toplam yüke eşittir. İki temas yüzeyi için tek bir eşitlik yazıldığından sağlanması gereken denge şartları bir azalmaktadır. Ancak, çeyrek düzlemler içeren problemlerde, sistemin toplam momentinin de sıfır olması gerekmektedir. Bu nedenle sağlanması gereken denge şartları çeyrek düzlemler içeren sistemler için de M tane olur.

2.6. İntegral Denklemlerin Elde Edilmesi

İntegral denklemler, yapışık olmayan temas yüzeylerine ait olan ve katsayılar bulunurken kullanılmayan M adet yer değiştirmeler cinsinden sınır şartları olan (135, 144, 157, 158, 167 ve 170) nolu ifadelerde tanımlanan sınır şartlarından probleme uygun olanları

kullanılarak bulunacaktır. Söz konusu bu sınır şartları v düşey yer değiştirme bileşeninin x 'e göre türevini içermektedir. Homojen yarım düzlem için düşey yer değiştirmenin türevi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{\partial v_h(x, y)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -|\xi| \left[-A_{h1} + \left(\frac{\kappa_h}{|\xi|} + y \right) A_{h2} \right] e^{|\xi|y} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (180)$$

Tabakalı ortamın j . tabakası için yer değiştirmenin söz konusu türevi, kullanılan malzemenin homojen veya fonksiyonel derecelendirilmiş olmasına göre sırasıyla aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{\partial v_j(x, y_j)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -\xi \left\{ \begin{array}{l} \left[A_{j1} + \left(\frac{\kappa_j}{\xi} + y_j \right) A_{j2} \right] e^{-\xi y_j} \\ - \left[A_{j3} - \left(\frac{\kappa_j}{\xi} - y_j \right) A_{j4} \right] e^{\xi y_j} \end{array} \right\} e^{-i\xi x} d\xi \quad (181)$$

$$\frac{\partial v_j(x, y_j)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} -i\xi \sum_{k=1}^4 A_{jk} m_{jk} e^{n_{jk} y_j} e^{-i\xi x} d\xi \quad (182)$$

Çeyrek düzlemler içeren tabakalı bir ortam için yazılan (147-156) sınır şartlarının kullanılması sonucu bilinmeyen A_{qjk} ($j=1,2$; $k=1,\dots,4$) katsayıları bulunabilir. Elde edilen bu katsayılar (129) nolu denklemde yerine yazılıp denklem düzenlenirse,

$$2G_{rj} \left(r_j^2 \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right)^M = is(s+1) p_{rj}(s) \frac{1}{\Delta} \left[(s+2)R_{j1}(s, \theta_j) + (s+1+\kappa_{rj})R_{j2}(s, \theta_j) \right] \quad (183)$$

elde edilir. Bu ifadede geçen, j indisi, sağ ve sol çeyrek düzlemler için sırasıyla 1 ve 2 değerini almaktadır. G_{r1} ve G_{r2} sırasıyla sağ ve sol çeyrek düzlemlere ait kayma modülünü göstermektedir. p_{rj} ($j=1,2$) ise sağ ve sol çeyrek düzlemler ile tabaka arasındaki

temas gerilmelerini ifade etmekte olup sırasıyla p_0 ve p_N değerlerine eşittir. κ_{r1} ve κ_{r2} ile sırasıyla sağ ve sol çeyrek düzlemlere ait malzeme sabitleri ifade edilmektedir. Δ , R_{j1} ve R_{j2} bilinen fonksiyonlar olup aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$\Delta = 2s(s+1) \left[-(s+1)^2 (e^{\pi i} + e^{-\pi i}) + 2s(s+2) + e^{\pi i(s+1)} + e^{-\pi i(s+1)} \right] \quad (184)$$

$$R_{j1}(s, \theta_j) = e^{-\theta_j s i} \left(2s+1 + e^{\pi(s+1)i} \right) - e^{\theta_j s i} \left(2s+1 + e^{-\pi(s+1)i} \right) \quad (185)$$

$$R_{j2}(s, \theta) = e^{-\theta_j(s+2)i} \left(2s+3 - e^{\pi(s+1)i} \right) - e^{\theta_j(s+2)i} \left(2s+3 - e^{-\pi(s+1)i} \right) \quad (186)$$

Çeyrek düzlemlere ilişkin İntegral denklemleri elde etmek için kullanılan (157) ve (158) numaralı sınır şartları $\theta_j = 0$ ($j=1,2$) için yazılmıştır. (185) ve (186) nolu ifadeler $\theta_j = 0$ ($j=1,2$) için düzenlenirse,

$$R_{j1}(s, 0) = -R_{j2}(s, 0) \quad (187)$$

eşitliği elde edilir. (185) ve (186) nolu ifadeler $\theta_j = 0$ ($j=1,2$) ve $R_j(s, 0) = R_{j1}(s, 0)$ için (183) nolu denklemde yerlerine yazılıp denklem düzenlenirse aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$2G_{rj} \left(r_j^2 \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right)^M = is(s+1) p_{rj}(s) \frac{1}{\Delta} (\kappa_{rj} + 1) R_j \quad (188)$$

R_j ve Δ fonksiyonları trigonometrik fonksiyonlar cinsinden yazılıp (188) nolu denklem tekrar düzenlenirse,

$$\frac{4G_{rj}}{\kappa_{rj} + 1} \left(r_j^2 \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right)^M = -P_{rj}(s_j) \frac{2 \sin[\pi(s+1)]}{2(s+1)^2 + 2s(s+2) + 2 \cos[\pi(s+1)]} \quad (189)$$

olarak elde edilir. (189) nolu denklemin ters Mellin dönüşümü alınırsa;

$$\frac{4G_{rj}}{\kappa_{rj} + 1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} \left(r_j^2 \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right)^M r^{-s} ds \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} -p_{rj}(s) \frac{2 \sin[\pi(s+1)]}{2(s+1)^2 + 2s(s+2) + 2 \cos[\pi(s+1)]} r^{-s} ds \quad (190)$$

olur. Burada;

$$p_{rj}(s) = M \left[p_{rj}(r); r_j \rightarrow s+2 \right] = \int_0^{\infty} p_{rj}(r_j) r_j^{s+1} dr = \int_0^{(a_{rjE}-a_{rjS})} p_{rj}(\tau_j) \tau_j^{s+1} d\tau_j \quad (191)$$

şeklindedir. Bu ifadede geçen a_{rjS} ve a_{rjE} sırasıyla, çeyrek düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyinin polar koordinatlarda başlangıç ve bitiş noktalarını göstermektedir. Bu şekilde tanımlanan $p_{rj}(s)$ fonksiyonu (190) numaralı ifadede yerine yazılır ve ifadenin her iki tarafı r ile bölünüp denklem yeniden düzenlenirse aşağıda verilen denklem elde edilir.

$$-\frac{4G_{rj}}{\kappa_{rj} + 1} \left(r_j \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right) = \int_0^{a_{rjE}-a_{rjS}} p_{rj}(\tau_j) d\tau_j \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} \left(\frac{\tau_j}{r_j} \right)^{s+1} \frac{2 \sin[\pi(s+1)]}{2(s+1)^2 + 2s(s+2) + 2 \cos[\pi(s+1)]} ds \quad (192)$$

(192) ifadesinde $s = -1 + iy$ ve $ds = idy$ değişken dönüşümleri yapıp denklem düzenlenirse aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$-\frac{4G_{rj}}{\kappa_{rj} + 1} \left(r_1 \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right) = \int_0^{a_{rjE}-a_{rjS}} p_{rj}(\tau_j) d\tau_j \frac{1}{2\pi} \int_{e-i\infty}^{e+i\infty} N_j(r_j, \tau_j, y) dy \quad (193)$$

Burada;

$$N_j(r_j, \tau_j, y) = (\cos \alpha_j y + i \sin \alpha_j y) \frac{i \sinh(\pi y)}{-2y^2 - 1 + i \cosh(\pi y)} \quad (194)$$

$$\alpha_j = \log \left(\frac{\tau_j}{r_j} \right) \quad (195)$$

şeklinde dir. (193) ifadesini i 'li terimlerden kurtarmak için Rezidü teoreminden yararlanılabilir.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{e^{-i\infty}}^{e^{+i\infty}} N_j(r_j, \tau_j, y) dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N_j dy - \frac{1}{2} \text{rezidü}(N_j) \quad (196)$$

Bu denklemde N_j ifadelerinin rezidüsü bulunduktan sonra integral aralığı $(-\infty, \infty)$ ' dan $[0, \infty)$ aralığına dönüştürmek için gerekli işlemler yapıp denklem düzenlenirse;

$$\text{rezidü} N_j = -\frac{2\pi}{4 - \pi^2} \quad (197)$$

$$-\frac{4G_{rj}}{\kappa_{rj} + 1} \left(r_j \frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} \right) = \int_0^{a_{rjE} - a_{rjS}} p_{rj}(\tau_j) d\tau_j \frac{1}{2\pi} \left\{ N_j - \frac{2\pi^2 \alpha_j}{4 - \pi^2} \right\} \quad (198)$$

elde edilir. Buna göre (106) numaralı ifade düzenlenirse;

$$\frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} = -\frac{\kappa_{rj} + 1}{4G_{rj}} \int_0^{a_{rjE} - a_{rjS}} p_{rj}(\tau) d\tau \frac{1}{\pi} \left\{ -\int_0^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\sinh(\pi y) \sin(\alpha y)}{-2y^2 - 1 + \cosh(\pi y)} dy - \frac{1}{r} \frac{\pi^2 \alpha}{4 - \pi^2} \right\} \quad (199)$$

elde edilir. (199) ifadesinin sağ tarafı büyük y değerleri için sıfırdan farklı sabit bir değere yaklaşmakta yani yakınsamamaktadır. Yakınsamayı bozan terim pay paydaya bölünerek;

$$S_{rj} = \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \sin \alpha y dy \quad (200)$$

olarak hesaplanır. Bu terimin integrali kapalı olarak alınıp değeri (199) nolu denkleme eklenip gerekli düzenlemeler yapılırsa aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$\frac{\partial u_{\theta_j}}{\partial r_j} = -\frac{(\kappa_{r_j} + 1)}{4G_{r_j}} \frac{1}{r_j} \int_0^{a_{r_j E} - a_{r_j S}} p_{r_j}(\tau_j) d\tau_j \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{1}{\alpha_j} + K_{r_j} + \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \right\} \quad (201)$$

Burada,

$$K_{r_j} = \int_0^{\infty} \left[\frac{\sinh \pi y}{-2y^2 - 1 + \cosh \pi y} - 1 \right] \sin \alpha_j y dy \quad (202)$$

şeklindedir. Çeyrek düzlemler y simetri ekseninden c kadar uzaktadırlar.

$$r_1 = x - c \quad \rightarrow \quad dr_1 = dx \quad (203)$$

$$\tau_1 = t_1 - c \quad \rightarrow \quad d\tau_1 = dt_1 \quad (204)$$

$$r_2 = c - x \quad \rightarrow \quad dr_2 = -dx \quad (205)$$

$$\tau_2 = c - t_1 \quad \rightarrow \quad d\tau_2 = -dt_1 \quad (206)$$

(203-206) ifadelerinde verilen değişken dönüşümleri (201) ifadesinde yerlerine yazılır ve denklemler düzenlenirse, integral denklemleri elde etmek için gerekli olan düşey yer değiştirmelerin x 'e göre türevlerini içeren ifadeler çeyrek düzlemler için aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta_1}(r_1, 0)}{\partial r_1} &= \frac{\partial v_{r_1}(x, 0)}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{(\kappa_{r_1} + 1)}{4G_{r_1}} \frac{1}{x - c} \int_{a_{1S}}^{a_{1E}} p_1(t_1) \left\{ \frac{1}{\log\left(\frac{x - c}{t_1 - c}\right)} + K_{r_1} - \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \right\} dt_1 \end{aligned} \quad (207)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{\theta_2}(r_2, 0)}{\partial r_2} &= \frac{\partial v_{r_2}(x, 0)}{\partial x} \\ &= -\frac{1}{\pi} \frac{(\kappa_{r_2} + 1)}{4G_{r_2}} \frac{1}{c-x} \int_{a_{NS}}^{a_{NE}} p_N(t_N) \left\{ \frac{1}{\log\left(\frac{c-x}{c-t_N}\right)} + K_{rN} - \frac{\pi^2}{\pi^2 - 4} \right\} dt_N \end{aligned} \quad (208)$$

Tanımlanan herhangi bir problemde 6 farklı yapışık olmayan temas yüzeyi ile karşılaşılabılır. Bunlar, rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyi, yarım düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyi, sağ çeyrek düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyi, sol çeyrek düzlem ile tabaka arasındaki temas yüzeyi, iki tabaka arasındaki temas yüzeyi ve tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas yüzeyi şeklindedir. Karşılaşılabilecek bu temas yüzeylerine ilişkin integral denklemleri elde edebilmek için sırasıyla (135), (144), (157), (158) ve (170) nolu sınır şartları kullanılacaktır. Kullanılacak sınır şartları değişiklik gösterse bile izlenecek işlem adımları aynıdır.

Karşılaşılan d . yapışık olmayan temas yüzeyi için d . integral denklemin yazılabilmesi için öncelikle yapışık olmayan temas yüzeyinin bahsi geçen altı durumdan hangisi olduğu belirlenerek uygun sınır şartı seçilir. Sınır şartını yazmak için gerekli olan düşey yer değiştirmelerin x 'e göre türevleri (180-182), (207) ve (208) ifadelerinden sınır şartına uygun olarak seçilerek yerlerine yazılır. Daha önce (174) ve (175) ifadeleriyle verilen \bar{p}_k ($k=1, \dots, n$) gerilme fonksiyonunun ve q_j ($j=1, \dots, r$) yayılı yük fonksiyonunun Fourier dönüşümleri cinsinden elde edilen katsayılar, yer değiştirme ifadelerinde yerlerine yazılır ve $x = x_d$ değişken dönüşümü yapıлып ifade düzenlenirse d . integral denklem aşağıda verilen genel formatta elde edilebilir.

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \int_{a_{kL}}^{\bar{a}_{kR}} \bar{p}_k(t_k) K_{dk}(t_k, x_d) dt_k = R_{db} + R_{dq} \quad (209)$$

Burada, K_{dk} terimi d . integral denklemin k . temas gerilmesine ait çekirdek fonksiyonu olup aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$K_{dk}(t_k, x_d) = \int_{-\infty}^{\infty} k_{dk} e^{-i\xi x_d} e^{i\xi t_k} d\xi \quad (210)$$

Burada k_{dk} bilinen bir fonksiyondur. (209) denklemindeki R_{db} ifadesi; d . integral denklemin (170) ile verilen tabaka ile rijit blok arasındaki sınır şartından yazılması durumunda rijit bloğun şekil fonksiyonunun x 'e göre türevine eşit olmakta, diğer durumlarda ise sifıra eşit olmaktadır. R_{dq} ifadesi bilinen bir ifade olup aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$R_{dq} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}_j L_{dj}(x_d) d\xi \quad (211)$$

Bu ifadede geçen L_{dr} , d . integral denklemin j . yayılı yüküne ait bilinen çekirdek fonksiyonudur. K_{dk} çekirdek fonksiyonundaki $(-\infty, \infty)$ aralığındaki integral $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralığında iki integrale ayrılıp $e^{-i\xi x_d}$ ve $e^{i\xi t_k}$ ifadelerinin trigonometrik açılımları yerlerine yazılırsa aşağıda verilen denklemler elde edilir.

$$K_{dk}(t_k, x_d) = K_{dk}^-(t_k, x_d) + K_{dk}^+(t_k, x_d) \quad (212)$$

$$K_{dk}^-(t_k, x_d) = \int_{-\infty}^0 k_{dk} \left\{ \cos(\xi(t_k - x_d))i - \sin(\xi(t_k - x_d)) \right\} d\xi \quad (213)$$

$$K_{dk}^+(t_k, x_d) = \int_0^{\infty} k_{dk} \left\{ \cos(\xi(t_k - x_d))i - \sin(\xi(t_k - x_d)) \right\} d\xi \quad (214)$$

(209) sınır şartı hangi yüzey için yazılmışsa, K_{dk} çekirdek fonksiyonlarında geçen y koordinatlarının o yüzeyin y koordinatına göre limite götürülmesi gerekir. Örneğin, rijit temel ile tabaka arasındaki temas yüzeyine ilişkin integral denklem ifadesinde $y \rightarrow 0$ limitinin kullanılması gerekirken, ikinci tabaka ile üçüncü tabaka arasındaki temas yüzeyine ilişkin yazılan integral denklemde $y_2 \rightarrow h_2$ ve $y_3 \rightarrow 0$ limitlerinin kullanılması gerekir. Bu limitlerin hepsi genel olarak $y \rightarrow y_t$ şeklinde ifade edilebilir. (209) sınır şartında $y \rightarrow y_t$

limitine geçilirse, bazı K_{dk} çekirdek fonksiyonları $\xi \rightarrow -\infty$ ve $\xi \rightarrow \infty$ için sıfıra yakınsamamaktadır. K_{dk} çekirdek fonksiyonlarının $\xi \rightarrow -\infty$ ve $\xi \rightarrow \infty$ için değerleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$S_{dk}^{-\infty} = \lim_{y \rightarrow y_t} [k_{dk}(\xi \rightarrow -\infty)] \quad (215)$$

$$S_{dk}^{+\infty} = \lim_{y \rightarrow y_t} [k_{dk}(\xi \rightarrow \infty)] \quad (216)$$

$S_{dk}^{-\infty}$ ve $S_{dk}^{+\infty}$ limit değerlerinin sıfırdan farklı olması, yani K_{dk} çekirdeğin sıfıra yakınsamaması durumunda yakınsamayı bozan terimler çekirdekte çıkarılıp kapalı integralleri alındıktan sonra $y \rightarrow y_t$ limitine geçilebilir. K_{dk} çekirdeği yakınsamayı bozan terim olup olmamasına bağlı olarak iki şekilde yazılabilir.

$$K_{dk}(t_k, x_d) = \begin{cases} S_{dk}^{-\infty} = 0 \text{ ve } S_{dk}^{+\infty} = 0; & K_{dk}^-(t_k, x_d) + K_{dk}^+(t_k, x_d) \\ S_{dk}^{-\infty} \neq 0 \text{ ve } S_{dk}^{+\infty} \neq 0; & K_{dks}^-(t_k, x_d) + K_{dks}^+(t_k, x_d) + K_{dks} \end{cases} \quad (217)$$

Bu ifadede geçen K_{dk}^- , $K_{dk}^+(t_k, x_d)$, K_{dks}^- , K_{dks}^+ ve K_{dks} aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$K_{dk}^-(t_k, x_d) = \int_{-\infty}^0 \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk}) \{ \cos(\xi(t_k - x_d))i - \sin(\xi(t_k - x_d)) \} d\xi \quad (218)$$

$$K_{dk}^+(t_k, x_d) = \int_0^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk}) \{ \cos(\xi(t_k - x_d))i - \sin(\xi(t_k - x_d)) \} d\xi \quad (219)$$

$$K_{dks}^-(t_k, x_d) = \int_{-\infty}^0 \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk} - S_{dk}^{-\infty}) \{ \cos(\xi(t_k - x_d))i - \sin(\xi(t_k - x_d)) \} d\xi \quad (220)$$

$$K_{dks}^+(t_k, x_d) = \int_0^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk} - S_{dk}^{+\infty}) \{ \cos(\xi(t_k - x_d))i - \sin(\xi(t_k - x_d)) \} d\xi \quad (221)$$

$$K_{dks}(t_k, x_d) = \lim_{y \rightarrow y_t} \left(\int_{-\infty}^0 S_{dk}^{-\infty} e^{(y-y_t)h} \begin{bmatrix} \cos(\xi(t_k - x_d))i \\ -\sin(\xi(t_k - x_d)) \end{bmatrix} d\xi + \int_0^{\infty} S_{dk}^{+\infty} e^{(y-y_t)h} \begin{bmatrix} \cos(\xi(t_k - x_d))i \\ -\sin(\xi(t_k - x_d)) \end{bmatrix} d\xi \right) \quad (222)$$

2.7. İntegral Denklemlerin Boyutsuzlaştırılması

Elde edilen integral denklemlerin sayısal çözümünü yapabilmek için aşağıdaki boyutsuz büyüklükler tanımlanabilir.

$$t_k = \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2} \right) r_k + \left(\frac{\bar{a}_{kE} + \bar{a}_{kS}}{2} \right), \quad dt_k = \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2} \right) dr_k, \quad (k=1, \dots, M) \quad (223)$$

$$x_d = \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2} \right) s_d + \left(\frac{\bar{a}_{dE} + \bar{a}_{dS}}{2} \right), \quad dx_d = \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2} \right) ds_d, \quad (d=1, \dots, M) \quad (224)$$

$$\phi_k(r_k) = \frac{P_k(t_k)}{P_b / h_b}, \quad (k=1, \dots, M) \quad (225)$$

$$z = \xi h_b, \quad dz = h_b d\xi \quad (226)$$

Bu ifadelerde geçen ϕ_k ($k=1, \dots, M$) temas gerilmelerine bağlı boyutsuz büyüklüğü, P_b yük boyutsuzlaştırma parametresini ve h_b ise uzunluk boyutsuzlaştırma parametresini göstermektedir. Tanımlanan bu boyutsuz büyüklükler (209), (211) ve (217-222) ifadelerinde yerlerine yazılırsa sırasıyla, aşağıda verilen denklemler elde edilirler.

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-1}^1 \phi_k(r_k) K_{dk}(r_k, s_d) \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) dr_k = \frac{R_{db} + R_{dq}}{P_b / h_b} \quad (227)$$

$$R_{dq} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} Q_j \frac{L_{dj}(s_d)}{h_b} dz \quad (228)$$

$$K_{dk}(r_k, s_d) = \begin{cases} S_{dk}^{-\infty} = 0 \text{ ve } S_{dk}^{+\infty} = 0; & K_{dk}^-(r_k, s_d) + K_{dk}^+(r_k, s_d) \\ S_{dk}^{-\infty} \neq 0 \text{ ve } S_{dk}^{+\infty} \neq 0; & K_{dks}^-(r_k, s_d) + K_{dks}^+(r_k, s_d) + K_{dks} \end{cases} \quad (229)$$

$$K_{dk}^-(r_k, s_d) = \int_{-\infty}^0 \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk}) \left\{ \begin{array}{l} \cos z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) r_k + \left(\frac{\bar{a}_{kE} + \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) \right\} i \\ -\sin z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) s_d - \left(\frac{\bar{a}_{dE} + \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) \right\} \end{array} \right\} dz \quad (230)$$

$$K_{dk}^+(r_k, s_d) = \int_0^{\infty} \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk}) \left\{ \begin{array}{l} \cos z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) r_k + \left(\frac{\bar{a}_{kE} + \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) \right\} i \\ -\sin z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) s_d - \left(\frac{\bar{a}_{dE} + \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) \right\} \end{array} \right\} dz \quad (231)$$

$$K_{dks}^-(r_k, s_d) = \int_{-\infty}^0 \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk} - S_{dk}^{-\infty}) \left\{ \begin{array}{l} \cos z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) r_k + \left(\frac{\bar{a}_{kE} + \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) \right\} i \\ -\sin z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) s_d - \left(\frac{\bar{a}_{dE} + \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) \right\} \end{array} \right\} dz \quad (232)$$

$$K_{dks}^+(r_k, s_d) = \int_0^\infty \lim_{y \rightarrow y_t} (k_{dk} - S_{dk}^\infty) \left\{ \begin{array}{l} \cos z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) r_k + \left(\frac{\bar{a}_{kE} + \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) \right\} i \\ - \sin z \left\{ - \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) s_d - \left(\frac{\bar{a}_{dE} + \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) \right\} \end{array} \right\} dz \quad (233)$$

$$K_{dks}(r_k, s_d) = \lim_{y \rightarrow y_t} \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^0 S_{dk}^{-\infty} e^{(y-y_t)h} \left\{ \begin{array}{l} \cos z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) r_k + \left(\frac{\bar{a}_{kE} + \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) \right\} i \\ - \sin z \left\{ - \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) s_d - \left(\frac{\bar{a}_{dE} + \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) \right\} \end{array} \right\} dz \\ + \int_0^\infty S_{dk}^{+\infty} e^{(y-y_t)h} \left\{ \begin{array}{l} \cos z \left\{ \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) r_k + \left(\frac{\bar{a}_{kE} + \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) \right\} i \\ - \sin z \left\{ - \left(\frac{\bar{a}_{dE} - \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) s_d - \left(\frac{\bar{a}_{dE} + \bar{a}_{dS}}{2h_b} \right) \right\} \end{array} \right\} dz \end{array} \right\} dz \quad (234)$$

2.8. İntegral Denklemlerin Sayısal Çözümü

Elde edilen integral denklemlerin sayısal çözümü, integral denklemin indisine göre Erdogan ve Gupta'da [59] verildiği gibi yapılabilir.

İndisi K_d olan d . integral denklem genel olarak aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-1}^1 \phi_k(r_k) K_{dk}(r_k, s_d) \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) dr_k = \frac{R_{db} + R_{dq}}{P_b/h_b} \quad (235)$$

Söz konusu integral denkleminin yazıldığı d . temas yüzeyine ait temas gerilmeleri için çözüm aşağıda verildiği gibi aranabilir.

$$\phi_d(r_{di}) = w_d(r_{di}) g_d(r_{di}) \quad (i = 1, \dots, SN) \quad (236)$$

$$w_d(r_{di}) = \begin{cases} (1-r_{di}^2)^{0.5} & , K_d = -1 \\ (1-r_{di}^2)^{-0.5} & , K_d = 1 \\ (1-r_{di})^{\alpha_1} (1+r_{di})^{\alpha_2} & , diğ er \end{cases} \quad (i = 1, \dots, SN) \quad (237)$$

Burada, SN sayısal çözümün kaç adımda yapılacağını gösteren parametredir.

Temas yüzeyinin uç noktalarında gerilmeler sıfır ise [$\phi_d(-1) = 0$ ve $\phi_d(1) = 0$], integral denklemin indisi $K_d = -1$ olur. Temas yüzeyinin uç noktalarında gerilmeler sonsuza gidiyorsa [$\phi_d(-1) \rightarrow \infty$ ve $\phi_d(1) \rightarrow \infty$], integral denklemin indisi $K_d = 1$ olur. Çeyrek düzlemler için uç noktalardaki temas gerilmelerinden bir tanesi sonsuza giderken, diğ eri sıfıra gider. Bu nedenle indis “-1” veya “1” olmaz. Bu durumda çeyrek düzlemlerin ve çeyrek düzleme temas eden tabakanın malzeme özelliklerine göre α_1 ve α_2 üsleri belirlenir.

$G_{1,0}$, κ_1 , G_R , κ_R büyüklükleri sırasıyla birinci tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülünü, birinci tabakanın malzeme sabitini, sağ çeyrek düzlemin kayma modülünü ve sağ çeyrek düzlemin malzeme sabitini göstermek üzere sağ çeyrek düzlem için α_{1R} ve α_{2R} değerleri aşağıdaki gibi ifade edilebilirler.

$$\alpha_{1R} = 0.5 \quad (238)$$

$$\frac{G_{1,0}(1+\kappa_R)}{G_R(1+\kappa_1)} \left(2\lambda^2 - 1 + \cos \pi\lambda \right) \cos \pi\lambda - \sin^2 \pi\lambda = 0 \quad (239)$$

$$\alpha_{2R} = \lambda - 1 \quad (240)$$

(240) ifadesinde geçen λ (239) denklemini sağlayan en küçük pozitif köktür.

$G_{1,0}$, κ_1 , G_L , κ_L büyüklükleri sırasıyla birinci tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülünü, birinci tabakanın malzeme sabitini, sol çeyrek düzlemin kayma modülünü ve sol çeyrek düzlemin malzeme sabitini göstermek üzere sol çeyrek düzlem için α_{1R} ve α_{2R} değerleri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\alpha_{2L} = 0.5 \quad (241)$$

$$\frac{G_{1,0}(1+\kappa_L)}{G_L(1+\kappa_1)} \left(2\lambda^2 - 1 + \cos \pi\lambda \right) \cos \pi\lambda - \sin^2 \pi\lambda = 0 \quad (242)$$

$$\alpha_{1L} = \lambda - 1 \quad (243)$$

(243) ifadesinde geçen λ (242) denklemini sağlayan en küçük pozitif köktür.

Bütün temas yüzeylerine ait çözümler, o temas yüzeyine ait integral denklemin indisine göre yukarıda tanımlandığı gibi tanımlanıp (235) ifadesinde yerine yazılırsa, d . integral denklem aşağıda verilen lineer denklem takımına dönüşür.

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{SN} W_{kj} g_{kj} K_{dk} (r_{kj}, s_{di}) \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) = \frac{R_{db} + R_{dq}}{P_b/h_b}, \quad (i = 1, \dots, SN - SK_d) \quad (244)$$

(244) ifadesinde geçen s_{di} ve SK_d büyüklükleri d . integral denklemin indisi K_d 'ye bağlı olup aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$SK_d = \begin{cases} -1, & K_d = -1 \\ 1, & K_d = 1 \\ 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (245)$$

$$s_{di} = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2i-1}{SN+1}\right), & K_d = -1 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{2i-1}{SN-1}\right), & K_d = 1 \\ P_{SN}^{(\alpha_{j1}-1, \alpha_{j2}+1)}(s_{di}) = 0, & \text{diğer} \end{cases} \quad (i = 1, \dots, SN - SK_d) \quad (246)$$

(246) ifadesinde “diğer” için verilen eşitlikte geçen P_{SN} , Jacobi polinomlarını göstermekte olup s_{di} değerleri bu polinomun köklerinden oluşmaktadır. P_{SN} polinomunun üstündeki üsler ise sağ ve sol çeyrek düzlem için sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$\alpha_{j1} = \alpha_{1R}, \quad \alpha_{j2} = \alpha_{2R} \quad (247)$$

$$\alpha_{j1} = \alpha_{2L}, \quad \alpha_{j2} = \alpha_{1L} \quad (248)$$

(246) ‘de geçen r_{kj} ve W_{kj} büyüklükleri, k . temas yüzeyi için yazılan integral denklemin indisi K_k ’ya bağlı olup aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$r_{kj} = \begin{cases} \cos\left(\frac{j\pi}{SN+1}\right) & , K_k = -1 \\ \cos\left(\frac{(j-1)\pi}{SN-1}\right) & , K_k = 1 \quad (j=1, \dots, SN) \\ P_{SN}^{(\alpha_{j1}, \alpha_{j2})}(r_{kj}) = 0 & , diğer \end{cases} \quad (249)$$

$$W_{kj} = \begin{cases} \pi \frac{1-r_{kj}^2}{SN+1} \quad (j=1, \dots, SN) & , K_k = -1 \\ \frac{\pi}{2*(SN-1)} \quad (j=1, SN); \frac{\pi}{(SN-1)} \quad (j=2, \dots, SN-1) & , K_k = 1 \\ \left(\frac{2SN+2+\alpha_{j1}+\alpha_{j2}}{(SN+1)!(SN+1+\alpha_{j1}+\alpha_{j2})} \frac{\Gamma(SN+1+\alpha_{j1})\Gamma(SN+1+\alpha_{j2})}{\Gamma(SN+1+\alpha_{j1}+\alpha_{j2})} \right) * \frac{2^{\alpha_{j1}+\alpha_{j2}}}{P_{SN}^{(\alpha_{j1}, \alpha_{j2})}(r_{kj})P_{SN+1}^{(\alpha_{j1}, \alpha_{j2})}(r_{kj})} & , diğer \end{cases} \quad (250)$$

(249) ifadesinde “diğer” için verilen r_{kj} , ilgili Jacobi polinomunun köklerinden oluşmaktadır.

d. integral denklem için yazılan (244) ifadesi matris formunda aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$[L_{d1} \quad L_{d2} \quad \cdots \quad \cdots \quad L_{dM}] \left\{ \begin{array}{c} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ g_M \end{array} \right\} = Z_d \quad (251)$$

Burada L_{dk} , g_k ($k=1, \dots, M$) ve Z_d ($d=1, \dots, M$) aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$L_{dk} = \begin{bmatrix} L_{d1k1} & L_{d1k2} & \cdots & L_{d1kSN} \\ L_{d2k1} & L_{d2k2} & \cdots & L_{d2kSN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{de_d k1} & L_{de_d k2} & \cdots & L_{de_d kSN} \end{bmatrix} \quad (252)$$

$$g_k = \left\{ \begin{array}{c} g_{k1} \\ g_{k2} \\ \vdots \\ g_{kSN} \end{array} \right\} \quad (253)$$

$$Z_d = \left\{ \begin{array}{c} Z_{d1} \\ Z_{d2} \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{de_d} \end{array} \right\} \quad (254)$$

Bu ifadelerdeki; e_d , L_{dikj} ve Z_{di} ($i=1, \dots, SN-SK_d$; $k=1, \dots, M$; $j=1, \dots, SN$) aşağıdaki gibi tanımlanabilirler.

$$e_d = SN - SK_d \quad (255)$$

$$L_{dikj} = \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) W_{kj} K_{dk}(r_{kj}, s_{di}) \quad (256)$$

$$Z_{di} = \frac{R_{db}(s_{di}) + R_{dq}(s_{di})}{P_b / h_b} \quad (257)$$

(252) ifadesinden görülebileceği gibi L_{dk} ve Z_d matrisleri e_d satırdan oluşmaktadır. (245) ifadesi göz önünde bulundurulduğunda $K_d = -I$ için L_{dk} matrisi $SN+1$ satırdan oluşurken, g_k matrisi SN terimden oluşmaktadır. Bu nedenle, L_{dk} ve Z_d matrislerinde $s_{di} = 0$ ($i = SN/2+1$) için yazılan ve $(SN/2+1)$. satıra karşılık gelen satırlar matrislerden çıkartılabilir. Söz konusu $(SN/2+1)$. satırı çıkarılmış L_{dk} ve Z_d matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$L_{dk} = \begin{bmatrix} L_{d1k1} & L_{d1k2} & \dots & L_{d1kSN} \\ L_{d2k1} & L_{d2k2} & \dots & L_{d2kSN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{d(SN/2)k1} & L_{d(SN/2)k2} & \dots & L_{d(SN/2)kSN} \\ L_{d(SN/2+2)k1} & L_{d(SN/2+2)k2} & \dots & L_{d(SN/2+2)kSN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{de_d k1} & L_{de_d k2} & \dots & L_{de_d kSN} \end{bmatrix} \quad (258)$$

$$Z_d = \begin{Bmatrix} Z_{d1} \\ Z_{d2} \\ \vdots \\ Z_{d(SN/2)} \\ Z_{d(SN/2+2)} \\ \vdots \\ Z_{de_d} \end{Bmatrix} \quad (259)$$

d. integral denklemin, tabaka ile düz blok arasındaki temas yüzeyi için yazılması durumunda $K_d = I$ olur. Bu durumda, Z_d matrisleri $SN-1$ satırdan oluşurken g_k matrisi SN terimden oluşur. Bu nedenle, L_{dk} ve Z_d matrislerine sırasıyla SN . satır olarak *d.* temas yüzeyi için yazılan ve (178) de verilen denge şartının sol ve sağ tarafları bir satır olarak eklenebilir. Söz konusu SN . satırı eklenmiş L_{dk} ve Z_d matrisleri aşağıda verilmiştir.

$$L_{dk} = \begin{bmatrix} L_{d1k1} & L_{d1k2} & \cdots & L_{d1kSN} \\ L_{d2k1} & L_{d2k2} & \cdots & L_{d2kSN} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{de_dk1} & L_{de_dk2} & \cdots & L_{de_dkSN} \\ L_{DB1} & L_{DB2} & \cdots & L_{DB(SN)} \end{bmatrix} \quad (260)$$

$$Z_d = \begin{Bmatrix} Z_{d1} \\ Z_{d2} \\ \vdots \\ \vdots \\ Z_{de_d} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (261)$$

(260) ifadesinin j . blok için yazıldığı kabul edilirse, L_{DBi} ($i=1, \dots, SN$) aşağıda verildiği gibi tanımlıdır.

$$L_{DBi} = W_{ji} \left(\frac{b_{jR} - b_{jL}}{2h_b} \right) \quad (262)$$

d . integral denklem için yazılan (251) ifadesi her bir integral denklem için ayrı ayrı yazılıp tek bir matris formunda birleştirilirse, aşağıda matris formda verilen denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & \cdots & \cdots & L_{1M} \\ L_{21} & L_{22} & \cdots & \cdots & L_{2M} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ L_{M1} & L_{M2} & \cdots & \cdots & L_{MM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_M \end{Bmatrix} \quad (263)$$

Bu denklem sistemi en genel halde aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$[L]\{g\} = \{Z\} \quad (264)$$

(177) ve (178) ifadeleriyle verilen denge şartları da integral denklemlere benzer şekilde boyutsuzlaştırılarak cebirsel denklem sistemine indirgenebilirler. Söz konusu denge şartları için ifadeler aşağıda verildiği gibi elde edilir.

$$\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \sum_{i=1}^{SN} W_{ki} g_{ki}(r_{ki}) = \frac{\sum_{j=1}^n P_j + \sum_{j=1}^r Q_j}{P_b} = DS_k, \quad (k = 1, \dots, m) \quad (265)$$

$$\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \sum_{i=1}^{SN} W_{ki} g_{ki}(r_{ki}) = \frac{P_k}{P_b} = DS_k, \quad (k = m+1, \dots, m+n) \quad (266)$$

Tanımlanan herhangi bir temas probleminde, $d=1, \dots, M$ için yazılan integral denklemlerde toplamda ($B_g = M * SN$) tane bilinmeyen temas gerilmesi vardır. İntegral denklemlerden M_I tanesinin $K_d = -1$ indise sahip olduğu kabul edilirse, probleme ait bilinmeyen temas uzunlukları problemin çeyrek düzlem içerip içermemesine göre aşağıdaki gibi belirlenebilir.

$$B_t = \begin{cases} 2 * M_I & ; \text{Çeyrek düzlem içermeyen problemler} \\ 2 * M_I + 2 & ; \text{Çeyrek düzlem içeren problemler} \end{cases} \quad (267)$$

(263) ifadesinde verilen denklem sistemi ($B_g + B_t$) tane bilinmeyen içeren B_g tane denklemden oluşur. Eksik olan B_t tane denklem, (263) ifadesi elde edilirken $K_d=-1$ indisli integral denklemler için sistemden çıkartılan denklemlerle [(252) ifadesinde ($SN/2+1$). satıra karşılık gelen denklem] birlikte (265) ve (266) ifadelerinde verilen denge şartlarından düz bloklar için olanlar hariç tutularak (düz bloklar için olanlar daha önce L_{dk} matrisine eklenmişti) elde edilen denklemler eksik kalan denklem sistemine eklenerek, problemin çözümü ($B_g + B_t$) bilinmeyenli ($B_g + B_t$) denklemden oluşan bir denklem sisteminin çözümüne indirgenmiş olur. Elde edilen bu denklem sistemi g_{ki} ifadelerine göre lineer özellik gösterse de, bilinmeyen temas uzunlukları nedeniyle lineer olmayan özellik göstereceğinden iteratif bir metot ile probleme çözüm aranabilir.

Problemin çözülebilmesi için öncelikle bilinmeyen temas mesafeleri için ilk tahminler yapılır. (263) ifadesinin çözümü ile bilinmeyen g_{ki} temas gerilmeleri elde edilir. Elde edilen bu temas gerilmelerinin sisteme sonradan eklenen B_i tane denklemi istenen hassasiyette sağlaması gerekir. Bu denklemler istenen hassasiyet ile sağlanmıyorsa temas mesafeleri için yeni değerler belirlenir ve çözüm işlemi tekrarlanır. İstenen hassasiyet sağlanıyorsa bilinmeyen temas gerilmeleri ve temas uzunlukları bulunmuş olur.

2.9. Gerilme ve Yer Değiştirme Bileşenlerinin Hesaplanması

Gerilme ve yer değiştirme bileşenleri (111-125) ifadeleri kullanılarak elde edilecektir. Hesaplanacak bileşene ait ifade H olarak adlandırılırsa, öncelikli olarak bulunan A katsayılarının H ifadesinde yerlerine yazılması gerekir. H ifadesi gerekli düzenlemelerden sonra aşağıdaki gibi elde edilir.

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \int_{\bar{a}_{kL}}^{\bar{a}_{kR}} \bar{p}_k(t_k) K_k(t_k, x) dt_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}_j L_j(x) d\xi \quad (268)$$

İntegral denklemler elde edilirken kullanılan (223-226) boyutsuz büyüklükleri (268) denklemde yerlerine yazılırsa, aşağıda verilen ifade elde edilir.

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-1}^1 \phi_k(r_k) K_k(r_k, s) \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) dr_k + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}_j \frac{L_j(s)}{h_b} dz \quad (269)$$

(269) ifadesi integral denklemlerde olduğu gibi uygun integrasyon formülasyonları kullanılarak cebirsel denklem takımlarına indirgenebilirler. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra H ifadesi aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$H = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^M \sum_{j=1}^{SN} W_{kj} g_{kj} K_k(r_{kj}, s) \left(\frac{\bar{a}_{kE} - \bar{a}_{kS}}{2h_b} \right) + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^r \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}_j \frac{L_j(s)}{h_b} dz \quad (270)$$

Bu denklem yardımıyla tanımlanan tabakalı ortamın herhangi bir noktasındaki gerilme veya yer değiştirme bileşeni kolaylıkla bulunabilir. Ancak, integral denklemlerin çözümünde olduğu gibi, (268) ifadesi ile verilen gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin teklik kontrolleri yapıldığında, yapışık olmayan temas yüzeylerinin olduğu noktalarda bazı K_k çekirdek değerleri $\xi \rightarrow -\infty$ ve $\xi \rightarrow \infty$ için sifira yakınsamadığı görülebilir. Bu nedenle, tekliğin olduğu bu noktalar yerine, bu noktalara çok yakın noktalardaki gerilme ve yer değiştirme değerleri bu noktalardaki değerler yerine kullanılabilir. Örneğin teklik içeren (0,1) noktası yerine (0,0.99) noktası kullanılarak gerçek değere yakın sonuçlar elde edilebilir.



3. PROGRAM

3.1. Programın Tanıtımı

Bu çalışma kapsamında, “Matlab” [60] ve “Matlab GUI” (Graphic User Interface – Grafik Kullanıcı Arayüzü) kullanılarak tabakalı ortamlara ilişkin temas problemlerinin analitik çözümünü yapacak bir bilgisayar programı geliştirilecektir.

Geliştirilecek program kullanıcıdan öncelikle çözülmesi istenen probleme ilişkin verileri isteyecek ve bu verilere göre tabakalı ortama ilişkin temsili bir model oluşturacaktır. Bu veriler aşağıda verilen bilgileri içermektedir.

- Tabaka bilgileri
- Zemin bilgileri
- Yükleme bilgileri
- Temas yüzeylerini yapışıklık durumuna ilişkin bilgiler

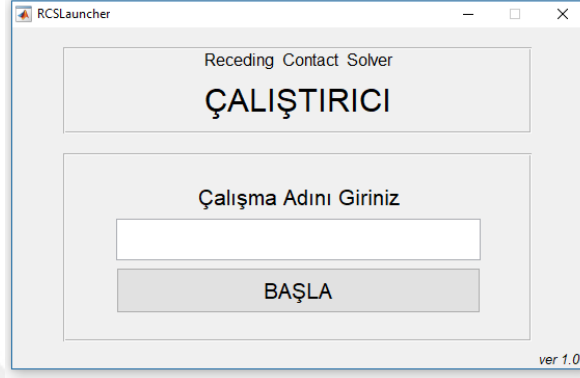
Bu bilgiler alındıktan sonra, kullanıcı problemin çözümüne veya sonuçların elde edilmesine ilişkin ayarları belirleyecektir. Buna örnek olarak, problemin sayısal çözümünün kaç noktada yapılacağı, çekirdek integrallerinin hangi aralıklar kullanılarak hesaplanacağı veya bilinmeyen temas uzaklıkları için tahmin türünün belirlenmesi gibi durumlar verilebilir.

Tanımlanan problem program aracılığıyla çözüldükten sonra, temas gerilmeleri, temas uzunlukları ve tabakalı ortamın herhangi bir noktasındaki gerilme veya yer değiştirme değerleri kullanıcı tarafından görüntülenebilecektir. Ayrıca program yardımıyla istenilen doğrultulardaki gerilme ve yer değiştirme bileşenlerine ilişkin grafikler istenen nokta aralığı ile kullanıcı tarafından çizdirilebilecektir. Bu işlemler hazırlanan ara yüz ile yapılabileceği gibi program içine yerleştirilecek komut sistemi yardımıyla da yapılabilecektir.

3.2. Programın Kullanımı

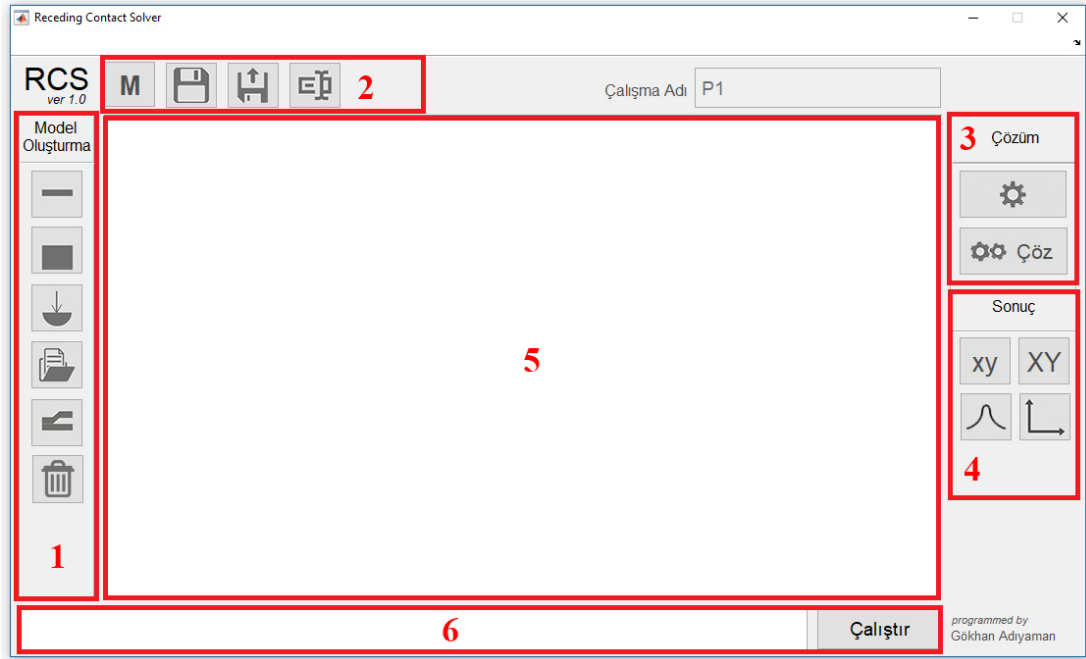
Programı çalıştırmak için programın kayıtlı olduğu klasör, Matlab’in aktif çalışma dizini olan “Current Folder” olarak seçilmelidir. “Receding Contact Solver (RCS)” olarak adlandırılan programı başlatabilmek için oluşturulan “run” komutu Matlab komut

penceresinde çalıştırılmalıdır. Bu komut, programı başlatacak olan ve Şekil 11’de verilen “Çalıştırıcı” penceresini açmaktadır. Bu penceredeki metin kutusuna çalışma adı girilip “BAŞLA” düğmesine basılmasıyla program başlayacaktır.



Şekil 11. Çalıştırıcı Penceresi

RCS isimli programın ana penceresi Şekil 12 ’de verilmektedir.



Şekil 12. Programın ana penceresi

Şekil 12 incelendiğinde programın altı ana bölümden oluştuğu görülebilir. Birinci bölüm model oluşturmak için kullanılan komutların düğmelerini, ikinci bölüm model için

kullanılacak komutların düğmelerini, üçüncü bölüm çözüm için kullanılacak komutların düğmelerini, dördüncü bölüm problemin çözümünden sonra kullanılacak komutların düğmelerini, beşinci bölüm modelin ve sonuçların gösterileceği ana pencere ekranını ve altıncı bölüm düğmeler yerine komutların girilip çalıştırılmasını sağlayacak komut işleme bölümünü içermektedir.

3.2.1. Model Oluşturma

Model oluşturma işlemi, Şekil 12’de bir numara ile gösterilen düğmeler veya Şekil 12’de 6 ile gösterilen komut işleme sistemi kullanılarak yapılabilir. Burada, 1 numara ile gösterilen düğmeler kullanılarak model oluşturma işlemi verilecektir.

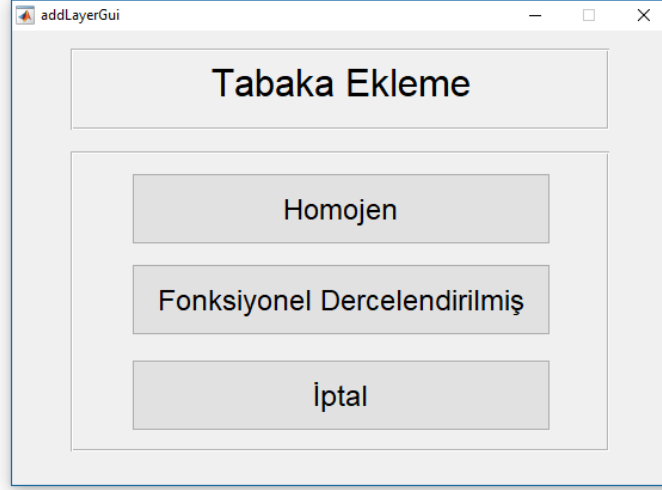
3.2.1.1. Tabaka Ekleme

Tabaka eklemek için kullanılacak düğme Şekil 13 ‘de verilmektedir.



Şekil 13. Tabaka ekleme düğmesi

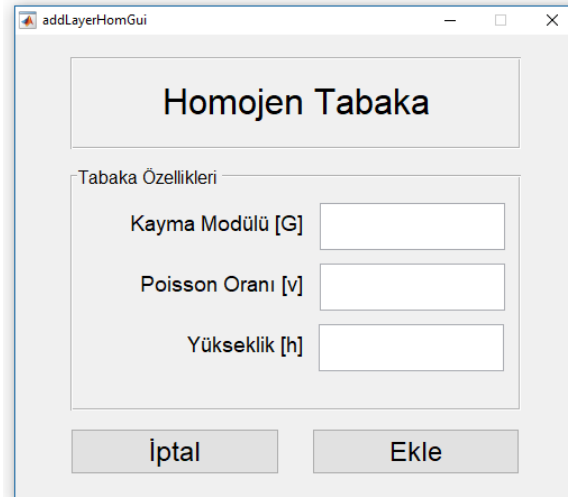
Bu düğmeye basılınca Şekil 14’de verilen tabaka ekleme penceresi açılacaktır.



Şekil 14. Tabaka ekleme penceresi

Eklenmek istenen tabakanın malzeme özelliğine göre “Homojen” veya “Fonksiyonel Dercelendirilmiş” düğmelerinden biri seçilir. Herhangi bir pencerede “İptal” seçilirse pencere hiçbir işlem yapılmadan kapanır.

“Homojen” seçeneği seçilirse Şekil 15’de verilen homojen tabaka ekleme penceresi açılır. Metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen tabakaya ait kayma modülü (G), Poisson Oranı (ν) ve tabaka yüksekliği (h) bilgileri girilip “Ekle” düğmesine basılırsa, girilen özelliklere sahip yeni bir homojen tabaka, önceden var olan modele eklenmiş olur.



Şekil 15. Homojen tabaka ekleme penceresi

Benzer şekilde ‘‘Fonksiyonel Derecelendirilmiş’’ seçeneği seçilirse, Şekil 16 ’da verilen pencere açılır.

Şekil 16. Fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka ekleme penceresi

Metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen tabakaya ait tabaka alt yüzeyindeki kayma modülü (G_0), tabaka üst yüzeyindeki kayma modülü (G_h), Poisson Oranı (ν) ve tabaka yüksekliği (h) bilgileri girilip ‘‘Ekle’’ düğmesine basılırsa, girilen özelliklere sahip yeni bir fonksiyonel derecelendirilmiş tabaka, önceden oluşturulan modele eklenebilir.

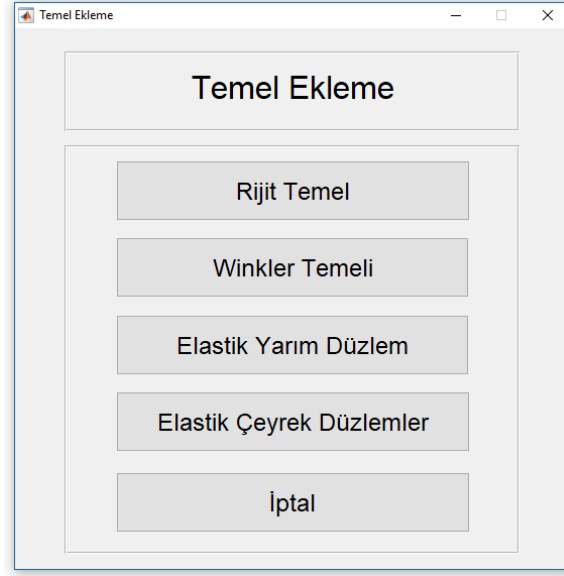
3.2.1.2. Temel Ekleme

Temel eklemek için kullanılacak düğme Şekil 17 ’de verilmiştir.



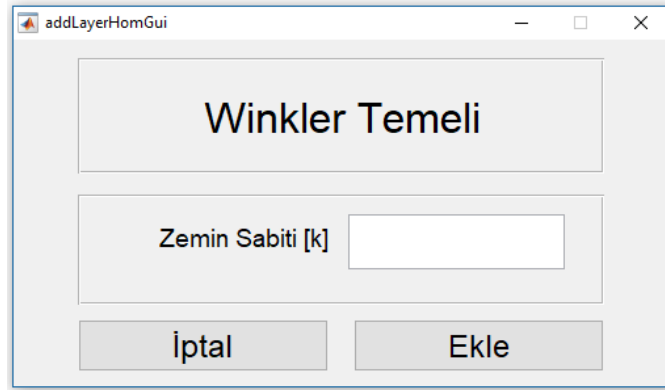
Şekil 17. Temel ekleme düğmesi

Bu düğmeye basılıncı Şekil 18’de verilen temel ekleme penceresi açılacaktır.



Şekil 18. Temel ekleme penceresi

Bu menüden eklenmek istenen temel türü seçilerek tabakalı ortamın üzerine oturacağı temel modele eklenmiş olur. “Rijit Zemin” seçeneği seçilerek probleme rijit temel eklenebilir. “Winkler Zemin” tıklandığında Şekil 19’da verilen pencere açılır.



Şekil 19. Winkler temeli penceresi ekleme penceresi

Bu pencerede idealleştirilmiş yay olarak modellenen Winkler temeli yay sabiti girilerek istenen modele eklenebilir. “Temel Ekleme” penceresinde “Elastik Yarım Düzlem” seçeneği seçilirse Şekil 20’de verilen pencere açılır.

The screenshot shows a software window titled 'addFoundationHPGui' with a subtitle 'Yarım Düzlem'. Below the subtitle, there is a section labeled 'Yarım Düzlem Özellikleri'. This section contains two input fields: 'Kayma Modülü [G]' and 'Poisson Oranı [ν]'. At the bottom of the window, there are two buttons: 'İptal' and 'Ekle'.

Şekil 20. Elastik yarım düzlem ekleme penceresi

Bu penceredeki metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen yarım düzleme ait kayma modülü (G) ve Poisson Oranı (ν) bilgileri girilip “Ekle” düğmesine basılırsa, girilen özelliklere sahip elastik yarım düzlem zemin olarak modele eklenmiş olur.

“Temel Ekleme” penceresinde “Elastik Çeyrek Düzlemler” seçeneği seçilirse Şekil 20 ’de verilen pencere açılır.

The screenshot shows a software window titled 'addFoundationQPGui' with a subtitle 'Yarım Düzlem'. Below the subtitle, there are two sections: 'Sağ Çeyrek Düzlem Özellikleri' and 'Sol Çeyrek Düzlem Özellikleri'. The 'Sağ Çeyrek Düzlem Özellikleri' section contains input fields for 'Kayma Modülü [GR]' and 'Poisson Oranı [νR]'. The 'Sol Çeyrek Düzlem Özellikleri' section contains input fields for 'Kayma Modülü [GL]' and 'Poisson Oranı [νL]'. Below these sections, there is a section for 'Çeyrek Düzlemler Arası Yarı Mesafe [c]' with an input field. At the bottom of the window, there are two buttons: 'İptal' and 'Ekle'.

Şekil 21. Elastik çeyrek düzlemler ekleme penceresi

Bu penceredeki metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen çeyrek düzlemlere ait sağ çeyrek düzlemin kayma modülü (GR), sağ çeyrek düzlemin Poisson Oranı (νR), sol çeyrek düzlemin kayma modülü (GL), sol çeyrek düzlemin Poisson Oranı (νL) ve iki çeyrek düzlemin $x = 0$ eksenine olan uzaklıkları (çeyrek düzlemler arası mesafenin yarı değeri, c) bilgileri girilip “Ekle” düğmesine basılırsa, girilen özelliklere sahip elastik çeyrek düzlemler oluşturulan modele eklenmiş olur.

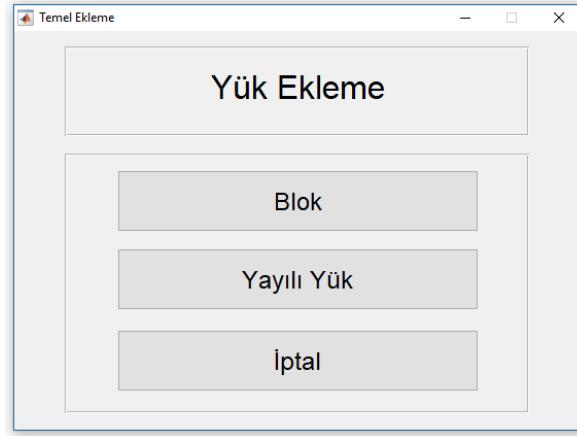
3.2.1.3. Yük Ekleme

Sisteme yük eklemek için Şekil 22’de verilen düğme kullanılabilir.



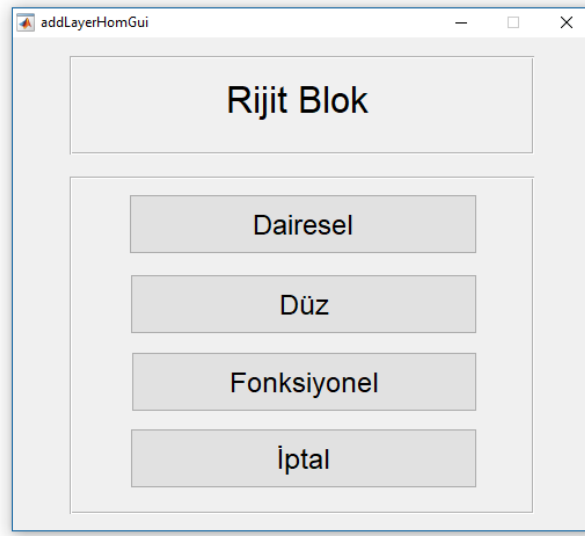
Şekil 22. Yük ekleme düğmesi

Bu seçenek seçildiğinde, Şekil 23 ’de verilen “Yük Ekleme” penceresi açılır.



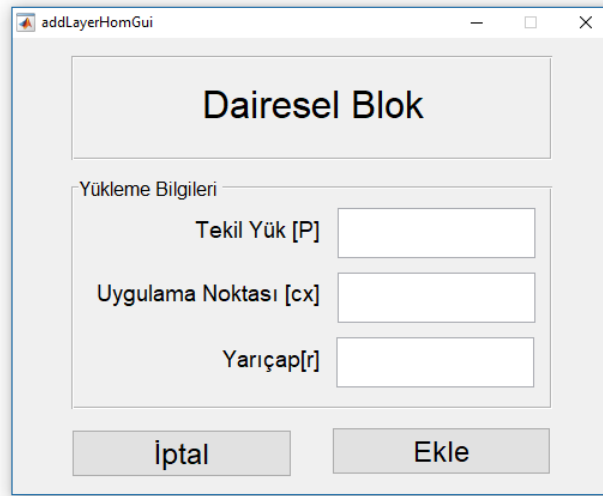
Şekil 23. Yük ekleme penceresi

“Blok” düğmesine basılarak sisteme rijit bloklar eklenmesini sağlayacak Şekil 24 ’de verilen “Rijit Blok” penceresi açılır.



Şekil 24. Rijit blok ekleme penceresi

“Dairesel” seçeneği seçilirse Şekil 25’de verilen “Dairesel Blok” penceresi açılır.

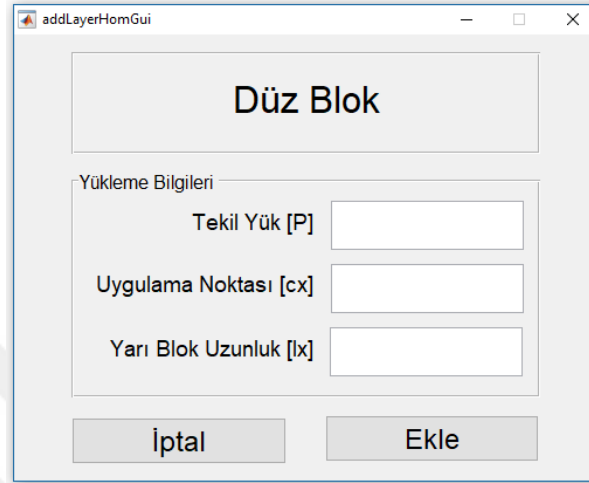


Şekil 25. Dairesel blok ekleme penceresi

Bu penceredeki metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen dairesel blok aracılığıyla yüklenmiş tekil kuvvet (P), tekil kuvvetin x eksenini üzerindeki konumu (c_x , $x=0$ ekseninin sağ tarafında pozitif değerler alırken, $x=0$ ekseninin sol tarafında negatif değerler alır) ve dairesel bloğun yarıçapı (R) girilirse, istenen özelliklere sahip rijit bir dairesel blok oluşturulan modele eklenebilir.

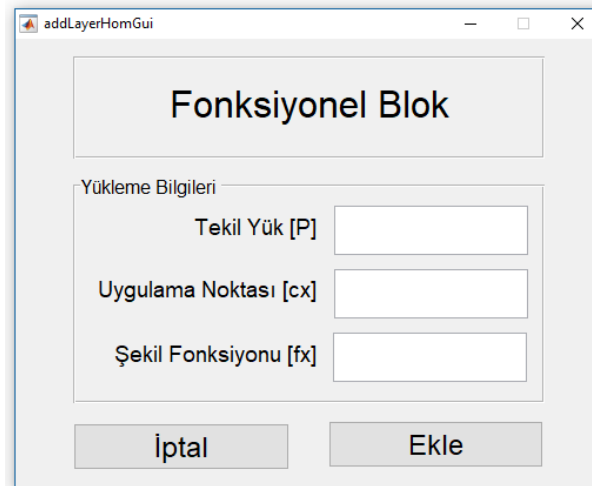
“Rijit Blok” penceresinde “Düz” düğmesi tıklanırsa Şekil 26 ’da verilen “Düz Blok” penceresi açılır. Metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen düz bloğa etkiyen tekil kuvvet

(P), tekil kuvvetin x eksenindeki konumu (c_x) ve düz bloğun genişliğinin yarı uzunluğu (l_x) girilirse, istenen özelliklere sahip bir rijit düz blok oluşturulan modele eklenmiş olur.



Şekil 26. Düz blok ekleme penceresi

“Rijit Blok” penceresinde “Fonksiyonel” düğmesi tıklanırsa Şekil 27’de verilen “Fonksiyonel Blok” penceresi açılır.



Şekil 27 Fonksiyonel blok ekleme penceresi

Bu penceredeki metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen fonksiyonel bloğa etkiyen tekil yük (P), tekil kuvvetin x eksenindeki konumu (c_x): rijit bloğun şekil fonksiyonu

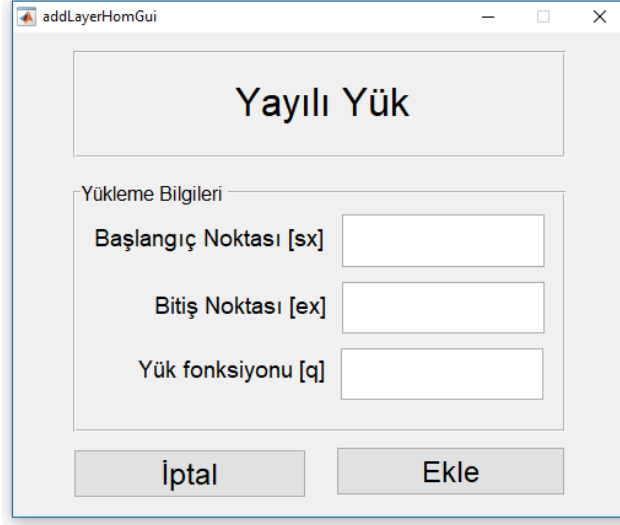
program tarafından c_x kadar otomatik olarak ötelenir) ve fonksiyonel bloğun şekil fonksiyonu (f_x : tekil kuvvetin $x=0$ eksenini üzerinde kabul edildiği duruma ait şekil fonksiyonu) girilirse; sisteme istenen özelliklere sahip rijit bir fonksiyonel blok eklenebilir. Örneğin, şekil fonksiyonu $f_x = x^2$ ve sisteme etkidiği nokta $c_x = 1$ olarak girilen fonksiyonel rijit bir blok için program tarafından otomatik olarak oluşturulan şekil fonksiyonu $f_x = (x-1)^2$ şeklindedir. Tanımlanacak bir şekil fonksiyonunda, $x=0$ ekseninden uzaklaştıkça f_x değerleri artmalıdır.

$$0 < x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (271)$$

$$x_2 < x_1 < 0 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad (272)$$

“Yük Ekleme” penceresinde “Yayılı Yük” seçeneği seçilirse, Şekil 28 'de verilen pencere açılır. Bu penceredeki metin kutularına sırasıyla eklenmek istenen yayılı yüke ait uygulama başlangıç noktası (s_x), uygulama bitiş noktası (e_x) ve yayılı yük fonksiyonu (q) girilerek, istenen özelliklerde yayılı yük modele eklenebilir. Sisteme tekil yük eklenmesi gereken durumlarda, ($e_x - s_x$) değeri 0.01 gibi küçük bir değer seçilerek istenen etki oluşturulabilir. Eklenmek istenen tekil yükün şiddetinin P olduğu kabul edilirse yayılı yüke ait yük fonksiyonu aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$q = \frac{P}{e_x - s_x} \quad (273)$$



Şekil 28. Yayılı yük ekleme penceresi

3.2.1.4. Komut Dosyası Okuma

Programda ana penceredeki düğmeler kullanılarak yapılabilecek tüm işlemler, geliştirilen komut sistemi kullanılarak da yapılabilir. Uygulanmak istenen komutlar bir metin dosyasına kaydedilip Şekil 29 'da verilen düğme kullanılarak dosya içindeki tüm komutlar toplu olarak uygulanabilir.



Şekil 29. Komut dosyası okuma düğmesi

Bu düğme tıklandığında, uygulanacak komut dosyasının seçilmesine yardımcı olacak pencere açılır. Bu pencerede ilgili dosya bulunarak dosya seçme işlemi tamamlanabilir.

3.2.1.5. Ayrılmalı Temas Yüzeyi Ekleme

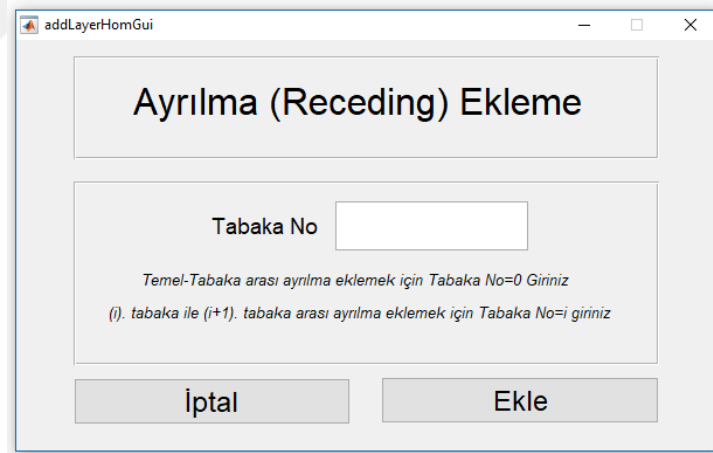
Tabaka ile rijit bloklar ve tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeyleri hariç diğer tüm temas yüzeyleri ilk oluşturulduklarında yapışık oldukları kabul edilir. Tabakalar arasındaki temas yüzeylerinin veya tabaka ile temel arasındaki temas yüzeylerinin yapışıklık

durumunu yapışıkta yapışık olmayana değiştirmek için Şekil 30’da verilen düğme kullanılabilir.



Şekil 30. Ayrılmalı temas yüzeyi ekleme düğmesi

Bu düğme tıklandığında Şekil 31 ‘de verilen ‘‘Ayrılma Ekleme’’ penceresi açılır. Bu penceredeki metin kutusuna ayrılmanın ekleneceği tabaka numarası girilerek temas yüzeyleri ayrılmalı olarak değiştirilebilir. Tabaka ile temel arasındaki temas yüzeyini ayrılmalı yapmak yani yapışıklık durumunu yapışıkta yapışık olmayana değiştirmek için bu metin kutucuğuna 0 girilmelidir. i . tabaka ile $(i+1)$. tabaka arasındaki teması ayrılmalı yapabilmek için bu metin kutusuna tabakanın numarasını ifade eden ‘‘ i ’’ girilmelidir.



Şekil 31. Temas yüzeyine ayrılma (receding) ekleme penceresi

3.2.1.6. Model Sıfırlama

Oluşturulan modelde bir yanlışlık yapılmışsa veya yeni bir model girilmesi gerekiyorsa o ana kadar oluşturulan model ve seçeneklerde yapılan değişiklikler Şekil 32 ‘de verilen düğme tıklanarak sıfırlanabilir.



Şekil 32. Model sıfırlama düğmesi

3.2.2. Model Çözme

Oluşturulan modelin çözümü ve bu çözümle ilgili seçenekler Şekil 12 'de verilen program ana penceresinde üç numaralı bölümdeki düğmeler kullanılarak yapılabilir.

3.2.2.1. Çözüm Seçenekleri

Şekil 33 'de verilen düğme tıklanarak Şekil 34 'de verilen çözüme ilişkin seçeneklerin olduğu "Çözüm Seçenekleri" penceresi açılabilir.



Şekil 33. Çözüm seçenekleri düğmesi

"Çözüm Seçenekleri" penceresi çözüme ilişkin altı ana seçeneğin olduğu bölümden oluşur. "Çözüm Seçenekleri" penceresi ve bu altı bölüm Şekil 34 'de verilmiştir.

Birinci bölümde, problemin çözümünde kullanılacak nokta sayısı N seçeneği mevcuttur. Bu bölümdeki metin kutusuna dörtten büyük ve çift olacak şekilde istenen adım sayısı girilebilir. Bu seçenek için varsayılan değer 20 'dir.

Oluşturulan modele ilişkin problemin sayısal çözümü yapılırken elde edilen sonuçların belirlenen hassasiyetle sağlanması gerekir. İkinci bölüm, çözüm hassasiyeti ($solAcc$) seçeneğini içermektedir. İstenen hassasiyet bu bölümdeki metin kutusuna girilerek belirlenebilir. Bu seçenek için varsayılan değer 0.000001 'dir.

Şekil 34. Çözüm seçenekleri penceresi

“Çözüm Seçenekleri” nin üçüncü bölümünde, problemin çözümü yapılırken gerekli olabilecek iterasyon işleminde bilinmeyen temas uzunlukları için yeni tahminlerin nasıl yapılacağı seçilmektedir. Yeni tahminler için “Manuel” seçeneği seçilirse her bir iterasyon öncesinde program kullanıcıdan yeni temas mesafelerini girmesini isteyecektir. “Auto” seçeneğinin seçilmesi durumunda ise program yeni tahminleri “Geliştirilmiş Scant Metodu” kullanarak otomatik olarak gerçekleştirecektir.

İntegral denklemlerdeki çekirdeklerin sayısal integralleri “Çözüm Seçenekleri” penceresinin dördüncü bölümündeki seçeneklere göre belirlenir. Bu bölümdeki metin kutularına sırasıyla integral başlangıç noktası (*intEps*), integral bitiş noktası (*intFix*) ve integral durdurma hassasiyeti (*intDivStopAcc*) değerleri girilmelidir. Bu seçeneklerin varsayılan değerleri sırasıyla 0.01, 50 ve 1×10^{-8} ‘dir. Program çekirdek integrallerini (*intEps*, *intFix*) aralığında “Simpson 3/8” kuralını [61] kullanarak hesaplar. İntegrasyon aralığı önce alt alanlara ayrılır ve her bir alanın toplam integrale göreceli etkisi *intDivStopAcc* seçeneğinden küçük oluncaya kadar alanlar alt alanlara ayrılmaya devam eder. Bu nedenle *intDivStopAcc* değeri integral sonucunun hassasiyetini belirler. Bu seçenek

ne kadar küçük olursa gerçek değere o kadar yaklaşılır. Bununla birlikte, *intDivStopAcc* değeri küçüldükçe alt alanların sayısı artmakta ve çözüm süresi uzamaktadır.

Çekirdeklere ilişkin integraller $(-\infty, \infty)$ aralığında hesaplanmaktadır. Ancak, pek çok durumda $(-\infty, 0)$ aralığındaki integral $(0, \infty)$ aralığındaki integrale eşit olmaktadır. Bu nedenle integrallerin aynı olduğu durumlarda sadece bu integrallerden birinin değerinin hesaplanması yeterli olacaktır. Çözümü hızlandırabilmek için öncelikle $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralığındaki integrallerin aynı olup olmadığının kontrol edilmesi gerekmektedir. Bunun için bu bölümdeki metin kutusuna $(-\infty, 0)$ ve $(0, \infty)$ aralığındaki integralleri arasındaki farkın tam değerinin en fazla kaç olabileceği (*solAccAcc*) programa girilmelidir. (*solAccAcc*) için varsayılan değer *0.001* 'dir.

Oluşturulan modele ilişkin problem sayısal olarak çözüldükten sonra, herhangi bir noktadaki gerilme ve yer değiştirme bileşenleri hesaplanırken ayrılmalı temas yüzeylerindeki gerilme ve yer değiştirme ifadelerinde tekillikler (singülarite) oluşabilir. Bu tekillik durum için "Çözüm Seçenekleri" 'nin altıncı bölümünde iki seçenek sunulmaktadır. Birinci seçenek "Yakın nokta" olup istenen nokta yerine istenen noktaya çok yakın olacak şekilde kullanıcı tarafından belirlenecek (*sinApp*) bir noktada istenen büyüklük hesaplanabilir. İkinci seçenek ise "Sınır Şartı" olup istenen noktadaki büyüklük o yüzeydeki sınır şartları göz önünde bulundurularak elde edilecektir. Örneğin; yapışık olmayan iki tabaka arasındaki σ_y normal gerilmesinin değeri isteniyorsa program öncelikle istenen noktanın temas yüzeyleri içinde olup olmadığını kontrol eder. İstenen nokta temas bölgesi dışında ise ilgili sınır şartında belirtildiği gibi $\sigma_y = 0$ olarak belirlenir, temas bölgesi içinde ise gerilme değeri o noktadaki temas gerilmesinin değeri olarak alınır. Eğer istenen büyüklük için sınır şartı belirlenemezse o noktaya, (*sinApp*) kadar yakın bir noktada istenen büyüklük hesaplanabilecektir.

3.2.2.2. Çözüm

Kullanıcı tarafından oluşturulan modele ilişkin problemin çözümü Şekil 35 'de verilen düğme kullanılarak gerçekleştirilebilir.



Şekil 35. Çözüm düğmesi

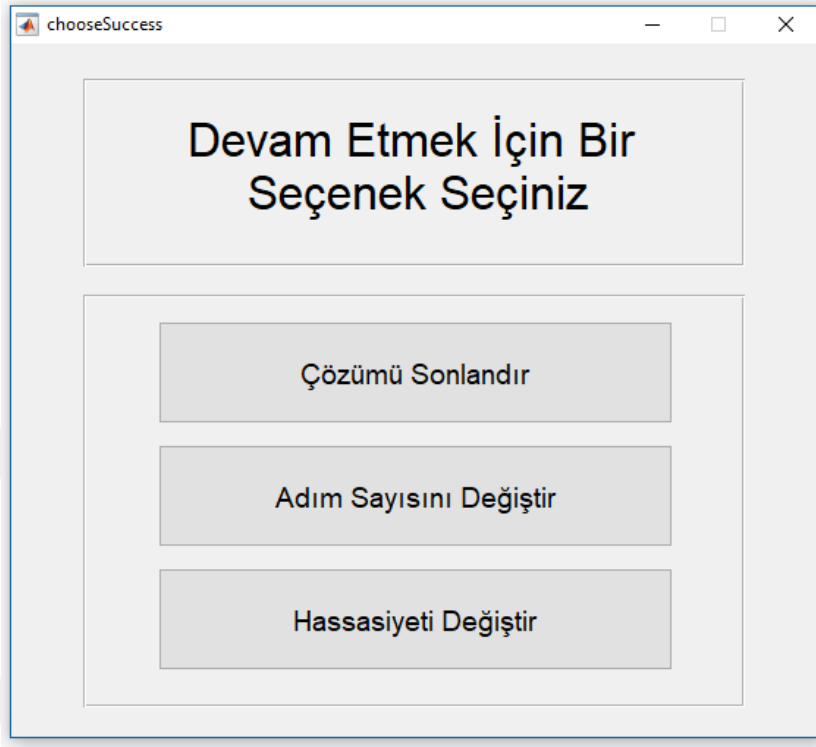
Bu düğmeye tıklandığında, söz konusu problemin çözümü ikinci bölümde açıklanan çözüm yöntemi esas alınarak gerçekleştirilir. Problemin çözümünde bilinmeyen temas uzunlukları varsa, bunlar için ilk değerler Şekil 36 'da bir örneği verilen ve her bir bilinmeyen temas mesafesi için bir metin kutusu içeren bir pencere aracılığıyla kullanıcıdan istenir.

Parametre	İlk Tahmin
a_0_S için İlk Tahmin [a_0_S=-1.00000000]	-1
a_0_E için İlk Tahmin [a_0_E=1.00000000]	1
a_1_S için İlk Tahmin [a_1_S=-1.00000000]	-1
a_1_E için İlk Tahmin [a_1_E=1.00000000]	1
b_1_S için İlk Tahmin [b_1_S=-1.00000000]	-1
b_1_E için İlk Tahmin [b_1_E=1.00000000]	1
b_2_S için İlk Tahmin [b_2_S=-1.00000000]	-1
b_2_E için İlk Tahmin [b_2_E=1.00000000]	1

Şekil 36. Bilinmeyen temas mesafeleri için örnek ilk değerler penceresi

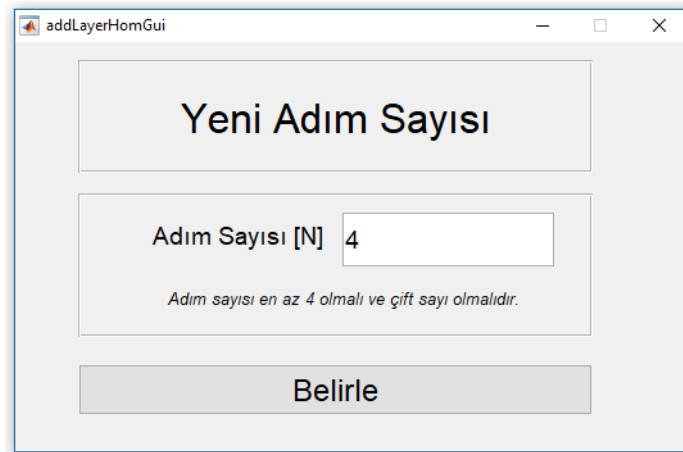
Bu metin kutularına tahmini ilk değerler girilip “OK” düğmesine basılırsa program çalışmaya devam eder. Eğer yeni temas mesafelerinin tahmini için “Çözüm Seçenekleri” ‘nin üçüncü bölümünde “Manuel” seçili ise her bir iterasyon öncesi Şekil 36 'dakine benzer bir pencere ile temas uzunlukları için yeni tahminler kullanıcıdan alınır. Eğer altıncı bölümde “Auto” seçili ise temas uzunlukları için yeni tahminler otomatik olarak Geliştirilmiş Scant metodu [61] kullanılarak belirlenir.

İterasyonlar sonucunda, problemin çözümü istenen hassasiyette gerçekleşirse Şekil 37 ‘de gösterilen bir menü penceresi açılır.



Şekil 37. Çözüm sonrası menü penceresi

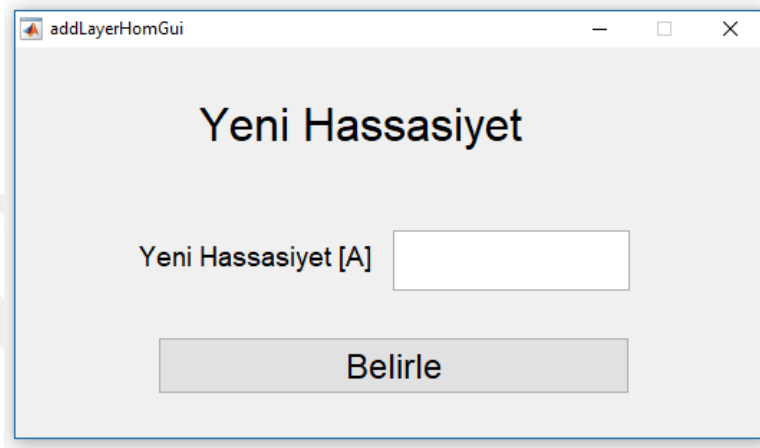
Bu pencerede üç seçenek mevcuttur. “Çözümü Sonlandır” seçeneği seçilerek istenen adım sayısı ve çözüm hassasiyeti ile problemin çözüldüğü kabul edilip çözüm sonlandırılır. “Adım Sayısını Değiştir” düğmesi tıklandığında Şekil 38 ‘de verilen pencere açılır.



Şekil 38. Yeni adım sayısı belirleme penceresi

“Yeni Adım Sayısı” belirleme penceresinde metin kutusunda problemin çözümünde kullanılan adım sayısı mevcuttur. Bu metin kutusuna bir sonraki iterasyonda kullanılacak adım sayısı girilerek iterasyonlara devam edilir.

Şekil 37 ‘de gösterilen menüde “Hassasiyeti Değiştir” seçeneği seçilirse Şekil 39 ‘da verilen “Yeni Hassasiyet” penceresi açılır.



Şekil 39. Yeni hassasiyet belirleme penceresi

Bu penceredeki metin kutusuna bir sonraki iterasyonda kullanılacak hassasiyet değeri girilerek iterasyonlara devam edilir.

3.2.3. Sonuçlar

Oluşturulan modelin çözümü sonucunda istenen sonuçlar Şekil 12 ‘de gösterilen program ana penceresinde dört numaralı bölümde verilen düğmeler kullanılarak yapılabilir.

3.2.3.1. Herhangi Bir Noktadaki Gerilme ve Yer Değiştirme Değerlerinin Bulunması

Oluşturulan model program yardımıyla çözüldükten sonra herhangi bir noktadaki gerilme ve yer değiştirmeler menüler aracılığı ile yerel veya genel koordinatlarda olmak üzere iki şekilde elde edilebilir. Herhangi bir elemanın herhangi bir noktasındaki ilgili büyüklük Şekil 40 ‘da verilen düğme ile yerel koordinatlarda bulunabilir.



Şekil 40. Yerel koordinatlarda gerilme ve yer değiştirme bulma düğmesi

Bu düğme tıklandığında Şekil 41 'de verilen “Yerel Koordinatlarda Sonuç” penceresi açılır.

Şekil 41. Yerel koordinatlarda sonuç penceresi

Bu pencerede “Bulmak İstedğiniz Bileşen” bölümünde, istenen büyüklüğün türü seçilir. Bu bölümde gerilme bileşenleri σ_x , σ_y , τ_{xy} ve yer değiştirme bileşenleri u ve v için sırasıyla Sx, Sy, Txy, u ve v seçilebilir. “Bulmak İstedğiniz Noktanın Bulunduğu Eleman” bölümünde ise istenen noktanın modelde hangi bileşende olduğu seçilmelidir. Temel için “Temel” seçilmesi yeterlidir. Temel olarak sadece elastik yarım düzlem için gerilme ve yer değiştirme bileşenleri program yardımıyla hesaplanabilmektedir. Tabaka için “Tabaka” seçilip tabakanın numarası “Tabaka için Tabaka No” metin kutusuna yazılmalıdır. Son olarak; “Bulmak İstedğiniz Noktanın Koordinatları” bölümüne istenen noktanın koordinatları, çalışmanın (2.2). bölümünde verilen ve çözümde kullanılan elemana ait yerel

koordinatlarda girilmelidir. Tabaka için yerel eksen takımı tabaka alt yüzeyinden geçecek şekilde seçilen takımdır. Buna karşılık yarım düzlem için yerel eksen takımı genel eksen takımı ile çakışık olup yarım düzlemin üst yüzeyinden (birinci tabakanın alt yüzeyinden) geçecek şekilde seçilen takımdır.

Elemanlar düşünülmeden modelin herhangi bir noktasındaki istenilen sonuç genel koordinatlarda bulunmak istenirse Şekil 42 'de verilen seçenek seçilmelidir.



Şekil 42. Genel koordinatlarda gerilme ve yer değiştirme bulma düğmesi

Bu seçenek tıklandığında Şekil 43 'de verilen "Genel Koordinatlarda Sonuç" penceresi açılır.

Şekil 43. Genel koordinatlarda sonuç penceresi

Bu pencerede "Bulmak İstediğiniz Bileşen" bölümünde, istenen büyüklüğün türü yerel koordinatlarda olduğu gibi seçilir. "Bulmak İstediğiniz Noktanın Koordinatları" bölümüne ise istenen noktanın koordinatları yine çalışmanın ikinci bölümünde verilen ve birinci tabakanın alt yüzeyinden geçecek şekilde seçilen genel eksen takımı referans alınarak girilmelidir.

İster yerel ister genel koordinatlarda sonuç bulma işlemi olsun, “Hesapla” düğmesine basılarak sonuçlar elde edilebilir. Elde edilen sonuçlar Matlab komut penceresinde gösterilir.

3.2.3.2. Temas Gerilmelerine İlişkin Grafiklerinin Çizilmesi

Oluşturulan modelin çözümü yapıldıktan sonra görüntülenebilecek seçeneklerden biri de temas yüzeylerinde oluşan gerilmelere ilişkin grafiklerinin çizilmesidir. Bu işlem için Şekil 44 ‘de verilen düğme kullanılabilir.



Şekil 44. Temas yüzeyi gerilme grafiği çizdirme düğmesi

Bu düğme tıklandığında Şekil 45’de verilen “Temas Yüzeyi Gerilme Grafiği” penceresi açılır.

Şekil 45. Temas yüzeyi gerilme grafiği penceresi

Bu penceredeki metin kutusuna temas yüzeyinin numarası girilerek istenen temas yüzeyindeki gerilmelere ilişkin grafikler çizilebilir. Temas yüzeylerinin numaralandırılması sırasıyla, tabaka ve temel arasındaki temas yüzeyi (çeyrek düzlemler içeren problemlerde tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyi ilk temas yüzeyi olurken tabaka ile sol

çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyi ikinci temas yüzeyi olmaktadır), aşağıdan yukarıya doğru tabakalar arası temas yüzeyleri ve son olarak blokların eklenme sırasına göre tabaka ile bloklar arasındaki temas yüzeyleri şeklinde olmaktadır.

İstenen temas yüzeyi seçilip “Çiz” düğmesine basılırsa Şekil 12 ‘de beşinci bölüm olarak verilen ana ekranda ilgili temas yüzeyine ait gerilme grafiği çizdirilebilir.

3.2.3.3. İstenen Doğrultularda Gerilme ve Yer Değiştirme Bileşenlerine İlişkin Grafiklerin Çizilmesi

Oluşturulan modelin çözümü yapıldıktan sonra x veya y eksenı doğrultularında iki nokta arasındaki gerilme veya yer değiştirme bileşenlerine ilişkin grafikler istenilen aralıkta Şekil 46 ‘da verilen düğme kullanılarak çizdirilebilir.



Şekil 46. İstenen doğrultularda gerilme ve yer değiştirme bileşenlerine ilişkin grafiklerin çizdirilme düğmesi

Bu düğmeye basıldığında Şekil 47 ‘de verilen “Grafik Çizimi” penceresi açılır.

Şekil 47. Grafik çizimi penceresi

Bu pencerede, bir noktadaki gerilme ve yer değiştirme bileşenlerinin hesaplanmasında olduğu gibi öncelikle bulmak istediğimiz bileşen seçilmelidir. Daha sonra çizdirilme istenen bileşene ait grafiğin doğrultusu seçilmelidir. x eksenini doğrultusunda grafik çizimi için “X Doğrultusunda Çiz”, y eksenini doğrultusunda grafik çizimi için ise “Y Doğrultusunda Çiz” seçeneği seçilmelidir. “X Doğrultusunda Çiz” seçeneği seçildiğinde, pencerenin alt bölümünde Şekil 48 ’de verilen bölüm aktif olur.

Şekil 48. X doğrultusunda grafik çizim seçenekleri

Bu bölümde X doğrultusu için verilen metin kutularına sırasıyla x doğrultusundaki grafik çizimine hangi nokta ile başlanacağı, grafikte noktalar arası mesafenin ne kadar olacağı ve grafiğin hangi noktada sonlanacağı seçenekleri girilmelidir. Y için verilen metin kutusuna ise ilgili doğrultunun y koordinatı değerleri girilmelidir. Bu metin kutularına girecek sayısal değerler genel koordinatlar esas alınarak girilmelidir.

“Y Doğrultusunda Çiz” seçeneği seçili olduğunda pencerenin alt bölümünde Şekil 49 ‘da verilen bölüm aktif olur.

Şekil 49. Y doğrultusunda grafik çizim seçenekleri

Bu bölümde Y doğrultusu için verilen metin kutularına sırasıyla y doğrultusundaki grafik çizimine hangi nokta ile başlanacağı, grafikte noktalar arası mesafenin ne kadar olacağı ve grafiğin hangi noktada sonlanacağı seçenekleri girilmelidir. X için verilen metin

kutusuna ise ilgili doğrultunun x koordinatı girilmelidir. Bu metin kutularına girilecek sayısal değerler genel koordinatlar esas alınarak girilmelidir.

İstenen bilgiler girilip “Çiz” düğmesine basıldığında Şekil 12 ‘de beşinci bölüm olarak verilen ana ekranda istenen bileşene ilişkin grafik çizdirilir.

Şekil 12 ‘de beş numara olarak verilen bölüm “Ana Pencere Ekranı” olarak adlandırılmaktadır.

Bu ekranın programın çalışma süresi boyunca farklı işlevleri mevcuttur. Öncelikle model oluşturma sürecinde oluşturulan modelin temsili bir çizimi yapılır. Bu çizim ölçekli olmayıp sadece kullanıcının oluşturduğu modeli takip etmesini sağlama amaçlıdır.

Ana pencere ekranının diğer bir işlevi kullanıcıya bilgi vermektir. Örneğin bir model sıfırlandığında veya problemin çözümü yapılırken bunları ana ekrana yazarak, kullanıcının yapılan veya yapılmakta olan işlemleri takip etmesini sağlamaktadır.

3.2.4. Üst Menü

Oluşturulan model ile ilgili genel düğmeler Şekil 12 ‘de ikinci bölüm olarak gösterilmektedir. Bu bölüm programda “Üst Menü” olarak adlandırılmaktadır.

3.2.3. numaralı bölümün son iki paragrafında ana ekran penceresinin işlevleri verilmektedir. Bu işlevlerden biri oluşturulan modelin gösterimidir. Kullanıcının yapmış olduğu işlemler sonucu ana ekran görüntüsü değişebilir. Kullanıcı tarafından tekrardan modelin görüntülenmesi istenirse, Şekil 50 ‘de verilen düğme kullanılmalıdır.



Şekil 50. Ana pencere ekranına model çizdirme düğmesi

Bu düğmeye basıldığında ana ekran temizlenerek, oluşturulan model ekrana çizdirilir.

Kullanıcı oluşturduğu modeli kaydetmek veya daha önceden kaydettiği bir modeli geri çağırarak isteyebilir. Model kaydetme ve geri çağırma işlemleri için sırasıyla, Şekil 51 ve 52 ‘de verilen düğmeler kullanılabilir.

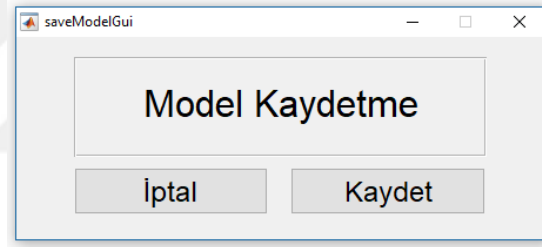


Şekil 51. Model kaydetme düğmesi



Şekil 52. Model geri çağırma düğmesi

Şekil 51 'de verilen düğme tıklandığında Şekil 53 'de verilen model kaydetme penceresi açılır.



Şekil 53. Model kaydetme penceresi

Bu pencerede “Kaydet” düğmesine basıldığında, oluşturulan model, programın yüklü olduğu ana klasör içinde var olan “Save” isimli klasörün içine dosya adı “Çalışma Adı” ve uzantısı “.mat” olacak şekilde kaydedilir.

Şekil 52 'de verilen model çağırma düğmesi tıklandığında, kayıtlı model dosyasının seçilmesine yardımcı olacak pencere açılır. Bu pencerede ilgili model dosyası “Save” klasörü içinde bulunarak dosya seçme işlemi tamamlanır. Böylece dosya çağırma işlemi öncesindeki model silinerek yerine dosyadan çağrılan model oluşturulur.

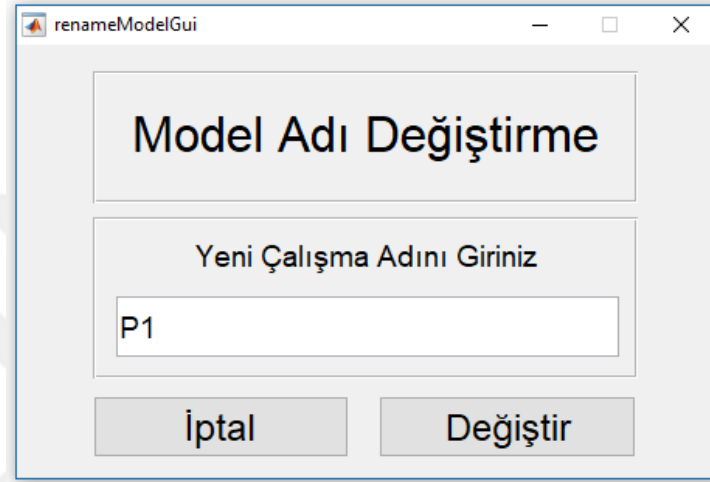
Eğer kaydetme işlemi model çözüldükten sonra yapılırsa, kaydetme işlemi ile model çözümü de kaydedilir. Bu model daha sonra tekrar çağrıldığında modeli tekrardan çözdürmeye gerek kalmaz.

Üst menüde yer alan son seçenek ise Şekil 54 'de verilen ve oluşturulan modelin adını değiştirmeye yarayan düğmedir.



Şekil 54. Model adı değiştirme düğmesi

Bu düğme tıklandığında Şekil 55 'te verilen "Model Adı Değiştirme" penceresi açılır.



Şekil 55. Model adı değiştirme penceresi

Bu penceredeki metin kutusunda modelin mevcut adı yazmaktadır. Bu metin kutusuna modelin yeni adı girilip "Değiştir" düğmesine basılırsa model girilen ada göre yeniden adlandırılır.

3.3. Komut Sistemi

Önceden de belirtildiği gibi program ana penceresinde verilen düğmeleri kullanmak yerine program için geliştirilen komut sistemi kullanılarak da istenilen işlemler gerçekleştirilebilir. İstenilen bir komutu uygulamak için uygulanmak istenen komut Şekil 12 'de altıncı bölümdeki metin kutusuna yazılarak "Çalıştır" düğmesine basılmalıdır.

3.3.1. Komutlar

Program için geliştirilen komut sisteminde, düğmelerle gerçekleştirilen işlemlere karşılık gelen komutlar vardır. Bu komutlar, işlevleri, genel kullanımları ve bu kullanımlara yönelik örnekler Tablo 1’de verilmektedir. Genel kullanım verilirken köşeli parantez içinde gösterilen değişkenler köşeli parantezden önce kullanılan değişkenlere göre çeşitlilik gösterebilirler. Örneğin, probleme tabaka eklemek isteyen bir kullanıcı öncelikle tabakanın homojen mi yoksa fonksiyonel derecelendirilmiş mi olduğunu belirtmelidir. Bundan sonra gelecek parametrelerin türü ve sayısı, tabakanın türüne göre değişiklik göstermektedir. Tabloda komutlara ait açıklamalar işlev, kullanım ve örnek sırasıyla verilmekte olup çizgilerle birbirlerinden ayrılmaktadırlar.

Tablo 1. Komut sistemi komutları

Komut	İşlev, Kullanım, Örnek
addLayer	<p>Modele tabaka eklemek için kullanılır</p> <hr/> <p><i>addLayer Type [Info]</i></p> <p><i>Type</i> : Tabakanın türünü gösterir. İki değer alabilir: <i>HOM, FG</i> <i>HOM</i> : Homojen <i>FG</i> : Fonksiyonel derecelendirilmiş</p> <p><i>Info</i> : Tabakaya ait bilgiler. <i>Type</i>'a göre değişebilir. <i>HOM</i> $\rightarrow G \nu h$ <i>G</i> : Tabakanın kayma modülü ν : Tabakanın Poisson oranı <i>h</i> : Tabaka yüksekliği</p> <p><i>FG</i> $\rightarrow G_0 G_h \nu h$ <i>G₀</i> : Tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülü <i>G_h</i> : Tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülü</p> <hr/> <p>addLayer HOM 500 0.25 1 addLayer FG 500 1000 0.25 1</p>
addFoundation	<p>Modele temel eklemek için kullanılır</p> <hr/> <p><i>addLayer Type [Info]</i></p> <p><i>Type</i> : Temelin türünü gösterir. Dört değer alabilir: <i>RIGID, SPRING, HP, QP</i></p> <p><i>Info</i> : Temele ait bilgiler. <i>Type</i>'a göre değişebilir. <i>RIGID</i> \rightarrow herhangi bir bilgiye gerek yok <i>SPRING</i> $\rightarrow k$ <i>k</i> : Temel zemini temsil eden yay sabiti</p> <p><i>HP</i> $\rightarrow G \nu$ <i>G</i> : Yarım düzlemin kayma modülü ν : Yarım düzlemin Poisson oranı</p> <p><i>QP</i> $\rightarrow G_R \nu_R G_L \nu_L c$ <i>G_R</i> : Sağ çeyrek düzlemin kayma modülü ν_R : Sağ çeyrek düzlemin Poisson oranı <i>G_L</i> : Sol çeyrek düzlemin kayma modülü ν_L : Sol çeyrek düzlemin Poisson oranı <i>c</i> : Sağ çeyrek düzlem ile sol çeyrek düzlem arasındaki mesafenin yarısı</p>

Tablo 1 'in devamı

addFoundation	<p>addFoundation RIGID addFoundation SPRING 500 addFoundation HP 500 0.25 addFoundation QP 500 0.25 500 0.25 1</p>
addLoad	<p>Modele yük eklemek için kullanılır</p> <hr/> <p><i>addLoad Type [Info]</i></p> <p><i>Type</i> : Yükün türünü gösterir. İki değer alabilir: <i>PUNCH</i>, <i>FUNC</i> <i>Info</i> : Yüke ait bilgiler. <i>Type</i>'a göre değişebilir.</p> <p><i>PUNCH</i> → <i>Force Ptype [Pinfo]</i> <i>Force</i>: Bloğa etkiyen tekil yük <i>Ptype</i> : Blok tipini gösterir. Üç değer alabilir: CIR, FLAT, FUNC <i>Pinfo</i>: Bloğa ait bilgiler. <i>Ptype</i>'a göre değişebilir.</p> <p><i>CIR</i> → $c_x R$ c_x : Tekil yükün uygulama noktası <i>R</i> : Bloğun yarıçapı</p> <p><i>FLAT</i> → $c_x l$ <i>l</i> : Bloğun yarı uzunluğu</p> <p><i>FUNC</i> → $c_x func$ <i>func</i> : Bloğun şekil fonksiyonu</p> <p><i>FUNC</i> → $s_x e_x q$ s_x : Yayılı yükün başlangıç noktası e_x : Yayılı yükün bitiş noktası q : Yayılı yükün şiddet fonksiyonu</p> <hr/> <p>addLoad PUNCH 1 CIR 0 100 addLoad PUNCH 1 FLAT 0 1 addLoad PUNCH 1 FUNC 0 x^2 addLoad FUNC -1 1 x^2+1</p>
readFromFile	<p>Dosyadan komut dosyası okur</p> <hr/> <p><i>readFromFile File</i></p> <p><i>File</i>: Komutların olduğu dosyanın klasörü, adı ve uzantısı</p> <hr/> <p>readFromFile inputs/komut2.txt</p>

Tablo 1 'in devamı

addReceding	<p>Temas yüzeyini yapışık olmayan (ayrılmalı) şekilde tanımlar.</p> <hr/> <p><i>addReceding RCNO</i></p> <hr/> <p><i>RCNO</i>: Ayrılmalı olarak tanımlanacak temas yüzeyinin numarası.</p> <hr/> <p>addReceding 1</p>
resetModel	<p>Modeli sıfırlar</p> <hr/> <p><i>resetModel</i></p> <hr/> <p>resetModel</p>
setOption	<p>Çözüm seçeneklerini değiştirmek için kullanılır</p> <hr/> <p><i>setOption Name [Value]</i></p> <p><i>Name</i>: Şekil 34 'de verilen çözüm seçenekleri penceresinde köşeli parantezler içinde verilen çözüm seçeneklerine ilişkin isimlerden herhangi birini alabilir. Örneğin: <i>N</i>, <i>sinChoose</i>, <i>intEps</i> <i>Value</i>: <i>Name</i> ile verilen seçeneğe ilişkin yeni değeri gösterir. Şekil 34 'de verilen çözüm seçeneklerinde, bilgi girişi metin kutusu şeklinde olan seçenekler için bu alana istenilen sayısal değer yazılmalıdır. Bilgi girişi verilen değerlerden birisinin seçimi şeklinde olan seçeneklerde ise seçenekler yalnızca aşağıda verilen değerleri alabilir.</p> <p><i>solAcc</i> → 1 (hızlandırma Yap), 0 (Hızlandırma Yapma) <i>sinChoose</i> → 1 (Sınır Şartına Göre), 2 (Yakın Nokta) <i>estType</i> → MAN (Manuel), AUTO (otomatik)</p> <hr/> <p>setOption N 20 setOption intPrec 0.000001 setOption intType REL setOption estType AUTO</p>
solveModel	<p>Modeli çözer</p> <hr/> <p><i>solveModel</i></p> <hr/> <p>solveModel</p>

Tablo 1 'in devamı

findStrDispLocal	Yerel koordinatlarda herhangi bir noktadaki gerilme ve yer değiştirme bileşenlerini bulur
	<p><i>findStrDispLocal Type Ctype [Info] x y</i></p> <p><i>Type</i> : Bulunmak istenen bileşenin t¼r¼. 5 değer alabilir: <i>Sx, Sy, Txy, u, v</i></p> <p><i>Ctype</i> : Aranana bileşenin modelin hangi elemanında bulunacağı. İki değer alabilir: <i>LAYER, FOUNDATION</i></p> <p><i>Info</i> : <i>Ctype</i> 'a g¼re değişebilir. <i>LAYER</i> → <i>TNO</i> <i>TNO</i> : Tabaka no <i>FOUNDATION</i> → herhangi bir bilgiye gerek yok</p> <p><i>x</i> : Yerel koordinatlarda noktanın <i>x</i> değeri <i>y</i> : Yerel koordinatlarda noktanın <i>y</i> değeri</p> <hr/> <p>findStrDispLocal Sx LAYER 1 0 0.5 findStrDispLocal Sy FOUNDATION 0 -1</p>
findStrDispGen	<p>Genel koordinatlarda herhangi bir noktadaki gerilme ve yer değiştirme bileşenlerini bulur</p> <hr/> <p><i>findStrDispLocal Type x y</i></p> <p><i>Type</i>: Bulunmak istenen bileşenin t¼r¼. 5 değer alabilir: <i>Sx, Sy, Txy, u, v</i></p> <p><i>x</i> : Yerel koordinatlarda noktanın <i>x</i> değeri</p> <p><i>y</i>: Yerel koordinatlarda noktanın <i>y</i> değeri</p> <hr/> <p>findStrDispLocal Sx 0 0.5 findStrDispLocal Sy 0 -1</p>
contactGraph	<p>Temas y¼zeyinde oluşan gerilmelerin grafiğini çizdirmek i¼in kullanılır.</p> <hr/> <p><i>contactGraph CNO</i></p> <p><i>CNO</i>: Ayrılmalđ temas y¼zeyinin numarasđ</p> <hr/> <p>contactGraph 1</p>
drawGraph	<p>İstenen noktalarındaki gerilme ve yer değiştirme grafiklerini çizmek i¼in kullanılır.</p>

Tablo 1 'in devamı

drawGraph	<i>drawGraph Type DType [info]</i>
	<p><i>Type:</i> Grafiği istenen bileşenin türü. 5 değer alabilir: S_x, S_y, T_{xy}, u, v</p> <p><i>Dtype:</i> Grafiği istenen noktaların doğrultuları. İki değer alabilir: X, Y</p> <p><i>info:</i> <i>Dtype</i> 'a göre değerler alır.</p> <p>$X \rightarrow x_s \ x_{inc} \ x_e \ y$</p> <p>$x_s$: Grafiğin çizileceği noktaların başlangıç değeri</p> <p>x_{inc} : Grafiği çizilecek noktaların artım değeri</p> <p>x_e : Grafiğin çizileceği noktaların bitiş değeri</p> <p>y : Grafiğin çizileceği doğrultunun y koordinatı</p> <p>$Y \rightarrow x \ y_s \ y_{inc} \ y_e$</p> <p>$x$: Grafiğin çizileceği doğrultunun x koordinatı</p> <p>y_s : Grafiğin çizileceği noktaların başlangıç değeri</p> <p>y_{inc} : Grafiği çizilecek noktaların artım değeri</p> <p>y_e : Grafiğin çizileceği noktaların bitiş değeri</p>
	<hr/> <pre>drawGraph Sy X -1 0.1 1 0.5 drawGraph v Y 0 0 0.01 1</pre> <hr/>
drawModel	Modeli ana pencere ekranına çizer
	<i>DrawModel</i>
	drawModel
saveModel	Modeli kaydeder
	<i>SaveModel Name</i>
	<i>Name:</i> Kayıt Adı (uzantı olmadan)
	saveModel P1
loadModel	Kayıtlı bir modeli çağırır
	<i>loadModel</i>
	loadModel

Tablo 1 'in devamı

renameModel	Modelin adını değiştirir
	<i>renameModel Name</i>
	<i>Name:</i> Modelin yeni adı
	renameModel P2



4. SAYISAL SONUÇLAR

Bu bölümde, çeşitli temas problemleri için geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçlar tablolar ve grafiklerle verilmektedir. İlk olarak, literatürden seçilen bazı temas problemlerinin sonuçları ile programdan elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak programın doğru sonuç verdiği teyit edilmiştir. Daha sonra, literatürde mevcut olmayan problemlerin çözümü geliştirilen programla çözümlenerek sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Sonuçlar elde edilirken çözüm hassasiyeti 10^{-6} olarak seçilmiştir. Verilen tüm sonuçların boyutsuz büyüklükler olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca sonuçlar verilirken kullanılan G_{i0} ve G_{ih} ($i=1, \dots, N$ ve $N < 10$) büyüklükleri ile i . tabakanın sırasıyla tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülü ve tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülü ifade edilmektedir.

4.1. Literatürden Seçilen Bazı Temas Problemleri İçin Sayısal Sonuçlar

Literatürden seçilen tabakalı ortamlara ilişkin yedi farklı temas problemi için sonuçlar program kullanılarak elde edilmiş ve ilgili çalışmaların literatürdeki sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar tablolar ve grafikler yardımıyla verilmiştir. Böylece programın doğruluğu farklı temel türleri, tabaka sayıları, kullanılan malzeme türleri ve yüklemeler için teyit edilmiştir.

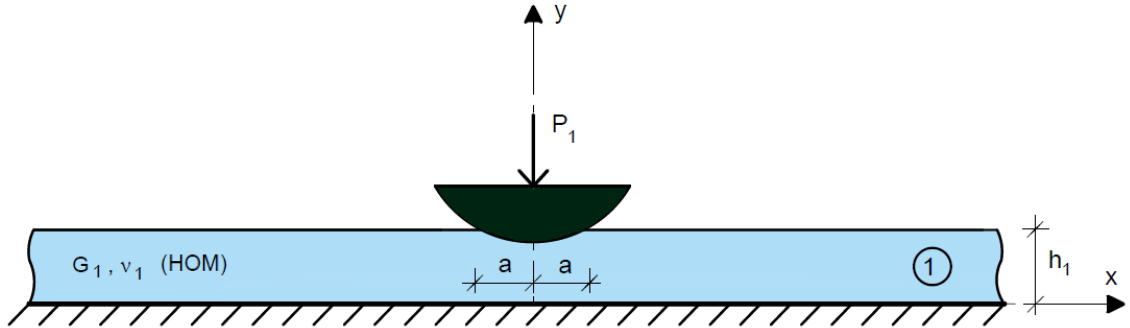
Literatürdeki sonuçlara ait grafik verileri “Engauge Digitizer” [62] isimli program kullanılarak grafik resimlerinin dijitalleştirilmesi ile elde edilmiştir. Elde edilen temas uzunluğu değerlerini karşılaştırmak için kullanılan “% Fark” terimi aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$\% \text{ Fark} = \frac{x_l - x_p}{x_l} * 100 \quad (274)$$

Burada x_l literatürden seçilen çalışmadaki sonucu, x_p ise programdan elde edilen sonucu göstermektedir.

4.1.1. Kahya [18]

İlk problem olarak Kahya [18] tarafından yapılan yüksek lisans tez çalışması seçilmiştir. Çalışmada, rijit olarak mesnetlenmiş bir tabaka ile R_1 yarıçaplı dairesel bir blok arasındaki temas problemi incelenmiştir. Tabakaya, rijit bir blok aracılığı ile P_1 tekil yükü simetrik olarak etkimektedir. Seçilen problemde geometri ve yüklemeye göre simetri mevcut olup problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Problem bir homojen tabaka ($N=1$) ve bir integral denklemden ($M=1$) oluşmaktadır. Çalışmada [18], tabaka ile rijit blok arasındaki temas $[-a, a]$ aralığında gerçekleşirken, geliştirilen programla oluşturulan modelde temasın başlangıç ve bitiş noktaları $[b_{1S}, b_{1E}]$ aralığındadır. Problemden uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yüklemeye durumları Şekil 56'da verilmektedir.

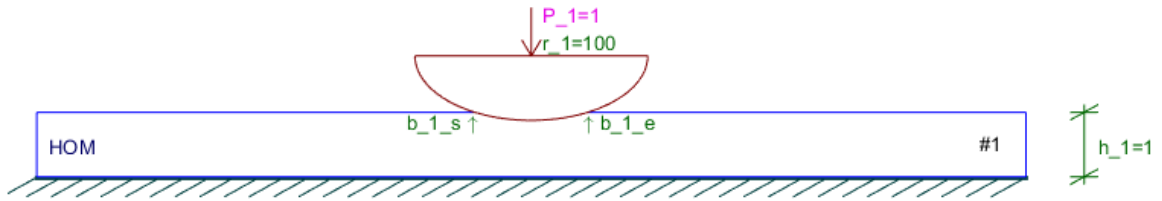


Şekil 56. [18] 'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yüklemeye durumu

Bahsi geçen problemi geliştirilen program yardımıyla oluşturmak için yazılan örnek bir girdi dosyası ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100$, $\kappa_1 = 2$, $R_1 / h_b = 100$) aşağıda verilmektedir.

```
addLayer HOM 100 0.25 1
addFoundation RIGID
addLoad PUNCH 1 CIR 0 100
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 57 ' de verilmektedir.



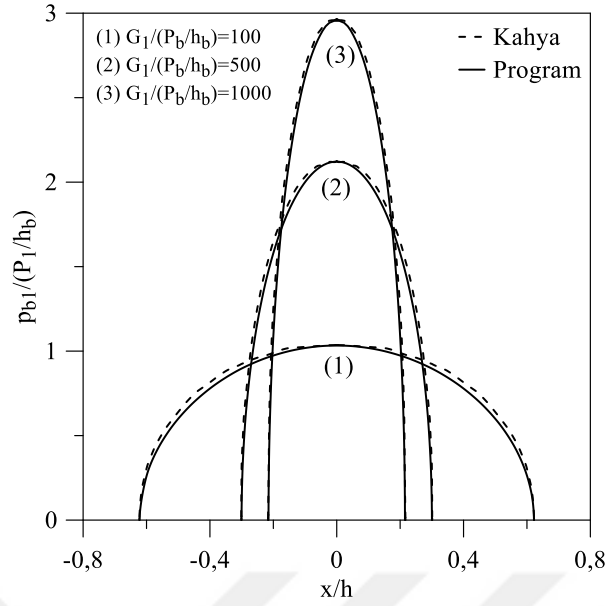
Şekil 57. [18] 'de verilen temas problemi için geliştirilen program yardımıyla oluşturulan model

Tablo 2 'de çeşitli yükleme ve geometri durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [18] elde edilen temas uzunluklarıyla programdan elde edilen temas uzaklıkları karşılaştırılmıştır. Tablodan görülebileceği gibi, geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçlarla Kahya [18] tarafından elde edilen sonuçlar çok yakındır. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 0,046 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 2. Kahya [18] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas mesafelerinin karşılaştırılması

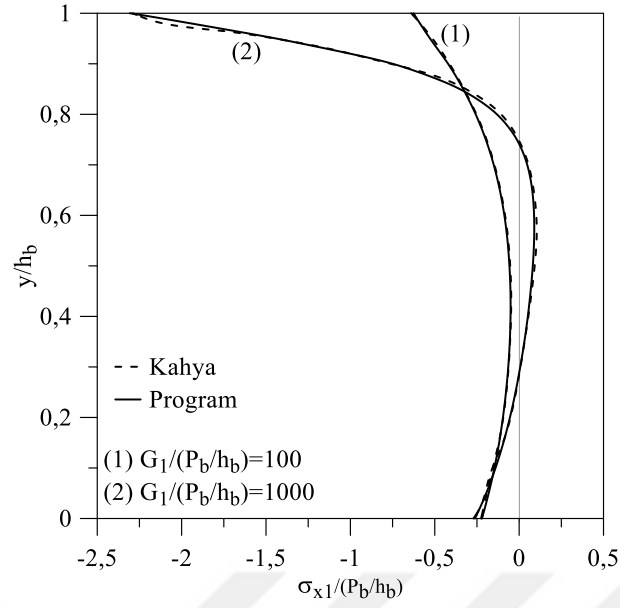
Çeşitli Parametreler			Kahya [18]	Geliştirilen Program		% Fark	
$\frac{G_1}{P_b / h_b}$	R_1 / h_b	κ_1	c / h_b	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b	b_{1S}	b_{1E}
100	10	2	0,215290	-0,2151905	0,21519099	-0,046	0,046
100	100	2	0,622161	-0,6221668	0,62216739	0,001	-0,001
100	1000	2	1,545286	-1,5453621	1,54536244	0,004	-0,005
500	10	2	0,097407	-0,0974071	0,09740715	0,000	-0,000
500	100	2	0,300239	-0,3002404	0,30024056	0,000	-0,000
500	1000	2	0,830313	-0,8303254	0,83032634	0,001	-0,001
1000	10	2	0,068987	-0,0689872	0,06898725	0,000	-0,000
1000	100	2	0,215208	-0,2152084	0,21520900	0,000	-0,000
1000	1000	2	0,622166	-0,6221709	0,62217082	0,001	-0,001
100	100	1,5	0,567560	-0,5675674	0,56756741	0,001	-0,001
100	100	2,5	0,670244	-0,6702525	0,67025328	0,001	-0,001

Tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için Kahya [18] 'de verilen sonuçlarla geliştirilen programdan elde edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 58 'de verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi her iki çözümden elde edilen grafikler birbirleriyle uyumludur.

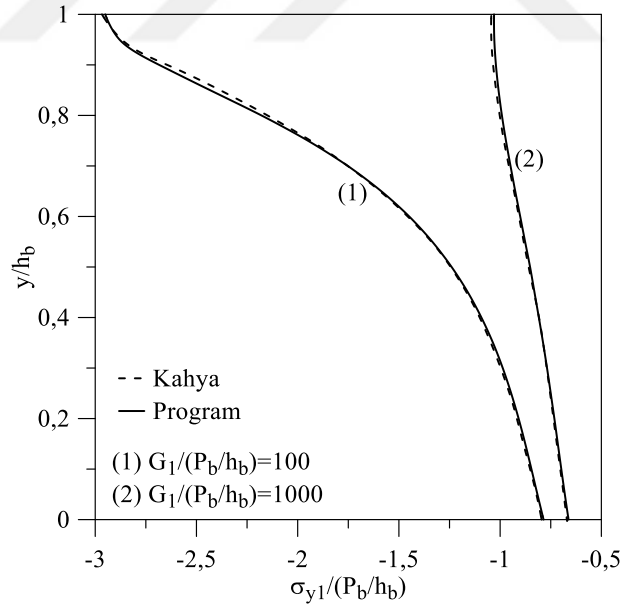


Şekil 58. Farklı $\frac{G_1}{P_b/h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2$, $R_1/h_b = 100$)

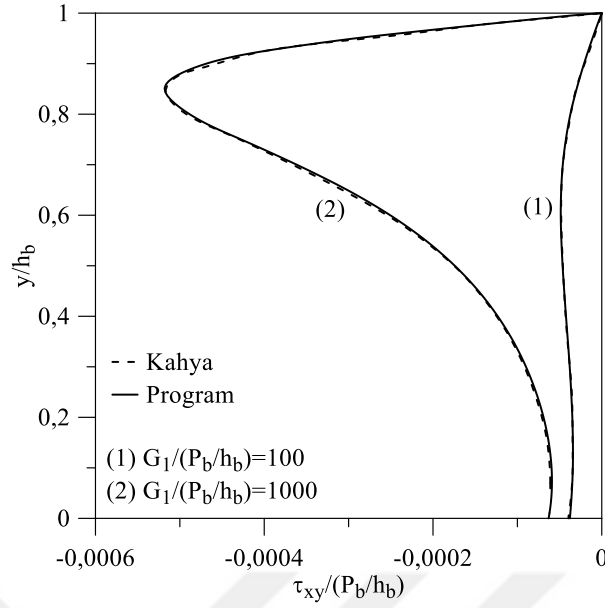
Derinlik boyunca ($0 \leq y \leq h$) σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerine ilişkin farklı $\frac{G_1}{P_b/h_b}$ oranları için Kahya [18] 'de verilen sonuçlarla geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması sırasıyla Şekil 59-61 'de verilmektedir. σ_x ve σ_y normal gerilmelerine ilişkin sonuçlar $x = 0$ simetri için verilirken τ_{xy} kayma gerilmesine ilişkin sonuçlar $x = 0.001$ eksenini için verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, her iki durumda elde edilen grafiklerin üst üste çakıştıkları görülmektedir.



Şekil 59. Farklı $\frac{G_1}{P_b/h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2$, $R_1/h_b = 100$)

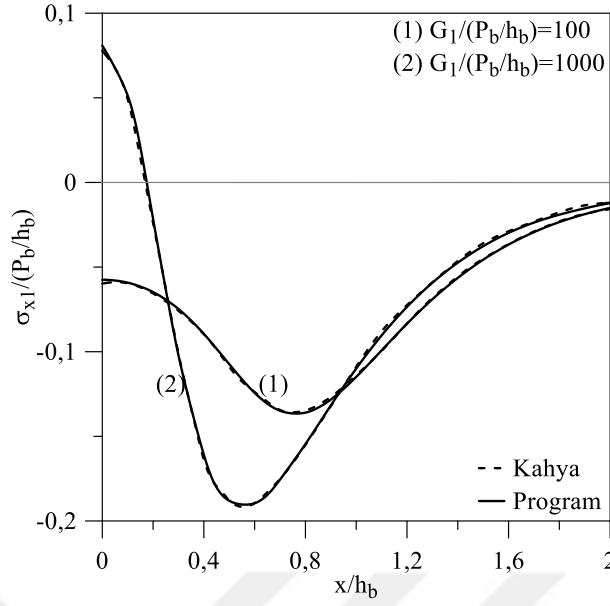


Şekil 60. Farklı $\frac{G_1}{P_b/h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2$, $R_1/h_b = 100$)

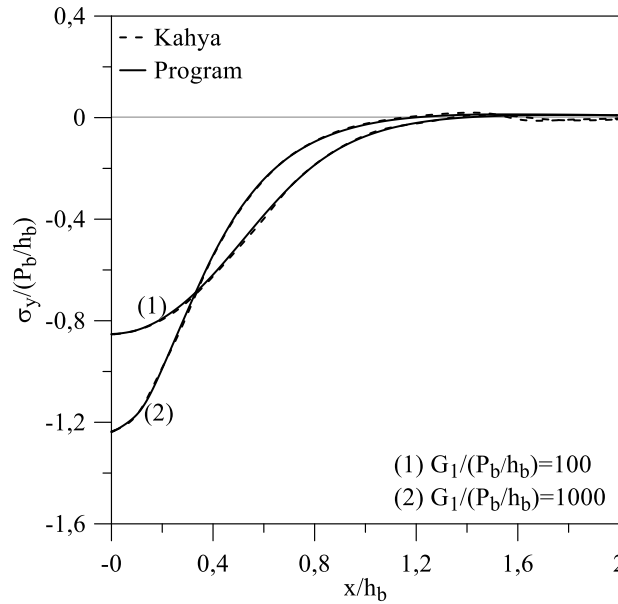


Şekil 61. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0,001$ ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2$, $R_1 / h_b = 100$)

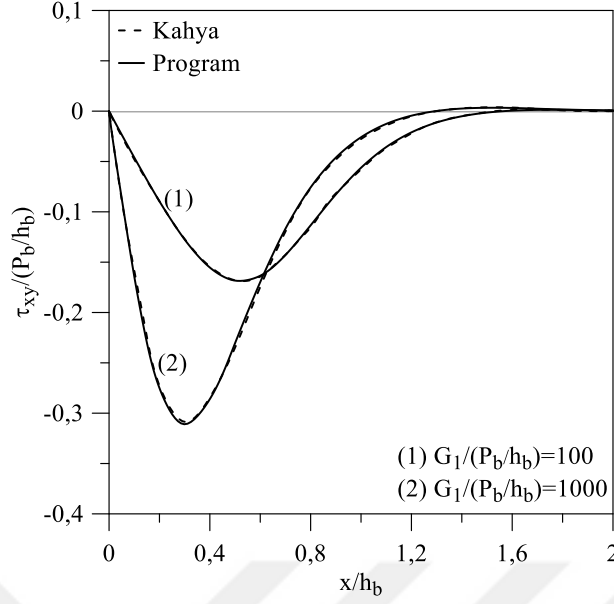
Tabaka ortasında x eksenini boyunca ($0 \leq x \leq 2$, $y = 0.5$) σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için Kahya [18] 'de verilen sonuçlarla geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması sırasıyla Şekil 62-64 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, mevcut çalışmadan elde edilen sonuçlarla geliştirilen programdan elde edilen sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 62. Farklı $\frac{G_1}{P_b/h_b}$ oranları için x eksenı boyunca tabaka ortasındaki σ_x normal gerilmelerine ilişkin Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2$, $R_1/h_b = 100$)



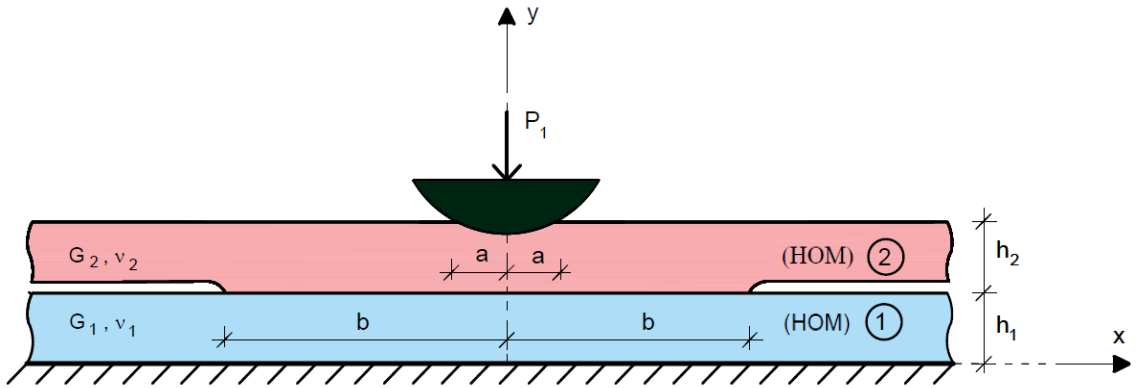
Şekil 63. Farklı $\frac{G_1}{P_b/h_b}$ oranları için x eksenı boyunca tabaka ortasındaki σ_y normal gerilmelerine ilişkin Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2$, $R_1/h_b = 100$)



Şekil 64. Farklı $\frac{G_1}{P_b / h_b}$ oranları için x ekseninde tabaka ortasındaki τ_{xy} kayma gerilmelerine ilişkin Kahya [18] ve geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = 2$, $R_1 / h_b = 100$)

4.1.2. Çömez [23]

İkinci problem olarak Çömez [23] tarafından yapılan yüksek lisans tez çalışması seçilmiştir. Bu çalışmada iki tabakadan oluşan bir ayrılmalı temas problemi incelenmiştir. Alt tabaka rijit olarak mesnetlenmiş ve üst tabakaya P_1 tekil yükü R_1 yarıçaplı dairesel rijit bir blok aracılığıyla etkimektedir. Tabakalar yapışık olmayıp aynı veya farklı malzeme özellikleri ve yüksekliğe sahip olabilmektedirler. Problem geometri ve yüklemeye göre simetrik olup düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Problem iki tabaka ($N=2$) ve iki integral denklemden ($M=2$) oluşmaktadır. Çalışmada [23] tabakalar arasındaki temas ve tabaka ile rijit dairesel blok arasındaki temas sırasıyla $[-b, b]$ ve $[-a, a]$ aralığında gerçekleşirken, program yardımıyla oluşturulan modelde ise sırasıyla $[a_{0S}, a_{0E}]$ ve $[b_{1S}, b_{1E}]$ aralığındadır. Problemden uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_2$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 65’de verilmektedir.



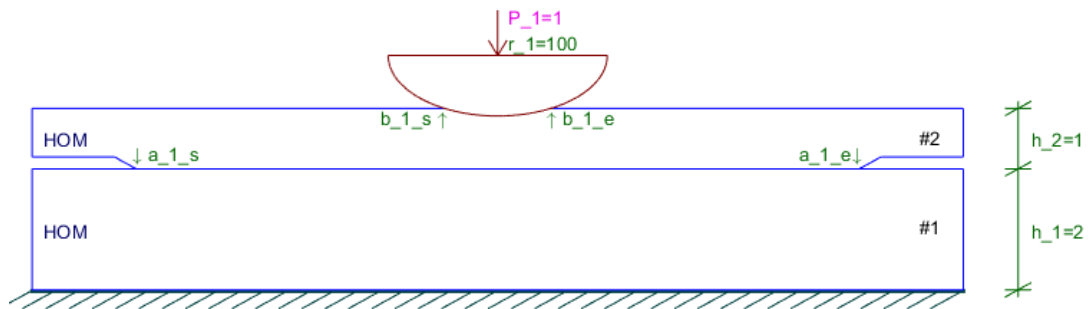
Şekil 65. [23] 'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bu problemi geliştirilen program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası

($\frac{G_2}{P_b/h_b} = 500$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $R_1/h_b = 100$, $h_1/h_2 = 2$, $G_1/G_2 = 1$) aşağıda verilmektedir.

```
addLayer HOM 500 0.25 2
addLayer HOM 500 0.25 1
addFoundation RIGID
addReceding 1
addLoad PUNCH 1 CIR 0 100
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 66' da verilmektedir.



Şekil 66. [23]' de verilen temas problemi için programda oluşturulan model

Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 0,2 olarak gerçekleşmektedir.

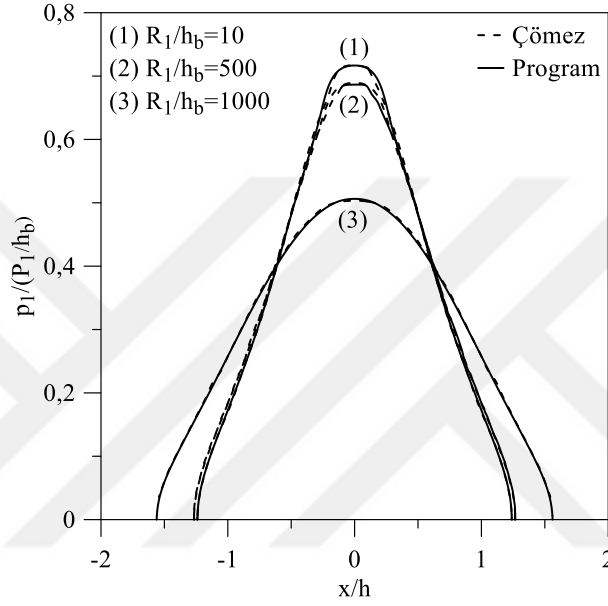
Tablo 3 'de çeşitli geometri ve yükleme durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [23] elde edilen temas uzunluklarıyla programdan elde edilen temas uzaklıkları karşılaştırılmaktadır. Tablo incelendiğinde, program yardımıyla elde edilen sonuçların Çömez [23] tarafından elde edilen sonuçlarla çok yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 0,2 olarak gerçekleşmektedir.

Tablo 3. Çömez [23] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $h_1 / h_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$)

Çeşitli Parametreler			Çömez [23]	Program		% Fark	
$\frac{G_2}{P_b / h_b}$	R_1 / h_b	κ	b / h_b	a_{0S} / h_b	a_{0E} / h_b	a_{0S}	a_{0E}
100	10	2	1,25340	-1,251823	1,251823	-0,13	0,13
100	500	2	1,95470	-1,953003	1,953003	-0,09	0,09
100	1000	2	2,40810	-2,409606	2,409607	0,06	-0,06
500	10	2	1,24200	-1,239558	1,239575	-0,20	0,20
500	500	2	1,40250	-1,399719	1,399719	-0,20	0,20
500	1000	2	1,56410	-1,561074	1,561075	-0,19	0,19
1000	10	2	1,23950	-1,238065	1,238065	-0,12	0,12
1000	500	2	1,31720	-1,316202	1,316201	-0,08	0,08
1000	1000	2	1,40240	-1,399719	1,399719	-0,19	0,19
500	1000	1,12	1,43510	-1,433461	1,433461	-0,11	0,11
500	1000	2,6	1,63100	-1,632405	1,632407	0,09	-0,09

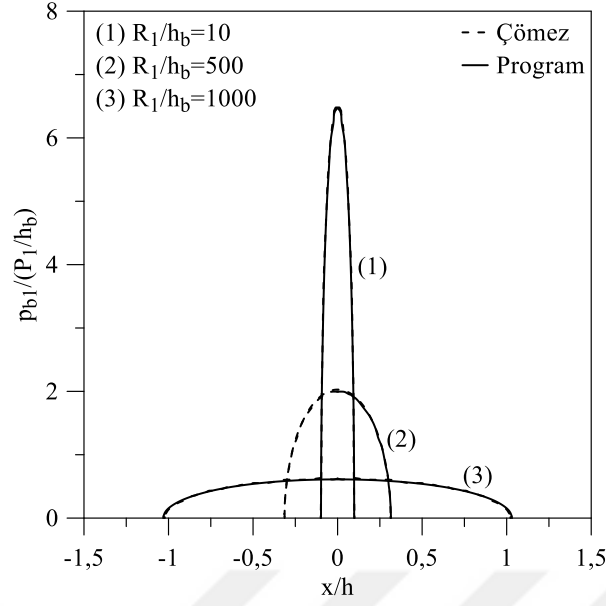
Çeşitli Parametreler			Çömez [23]	Program		% Fark	
$\frac{G_2}{P_b / h_b}$	R_1 / h_b	κ	a / h	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b	b_{1S}	b_{1E}
100	10	2	0,22026	-0,220269	0,220269	0,00	0,00
100	500	2	1,5873	-1,587949	1,587949	0,04	-0,04
100	1000	2	2,1352	-2,134888	2,134888	-0,01	-0,01
500	10	2	0,09788	-0,097885	0,097886	0,00	0,00
500	500	2	0,7243	-0,724458	0,724458	0,02	-0,02
500	1000	2	1,0312	-1,031475	1,031475	0,03	-0,03
1000	10	2	0,06916	-0,069157	0,069157	0,00	0,00
1000	500	2	0,5044	-0,504431	0,504431	0,01	-0,01
1000	1000	2	0,7243	-0,724459	0,724459	0,02	-0,02
500	1000	1,12	0,8561	-0,856263	0,856263	0,02	-0,02
500	1000	2,6	1,1335	-1,133304	1,133304	-0,02	0,02

Tabakalar arasındaki temas yüzeyi ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin farklı R_1/h_b oranları için Çömez [23] 'de verilen sonuçlarla geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 67 ve 68'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, elde edilen sonuçlardan çizilen grafiklerin birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 67. Farklı R_1/h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması

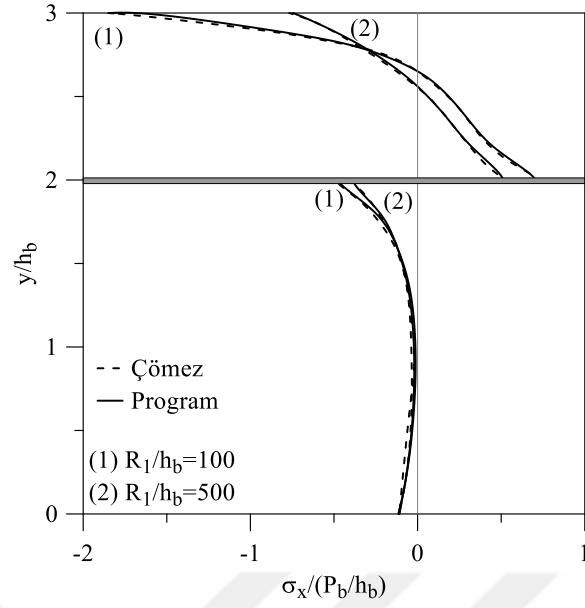
$$\left(\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, h_1/h_2 = 2, G_1/G_2 = 1, \frac{G_2}{P_b/h_b} = 500 \right)$$



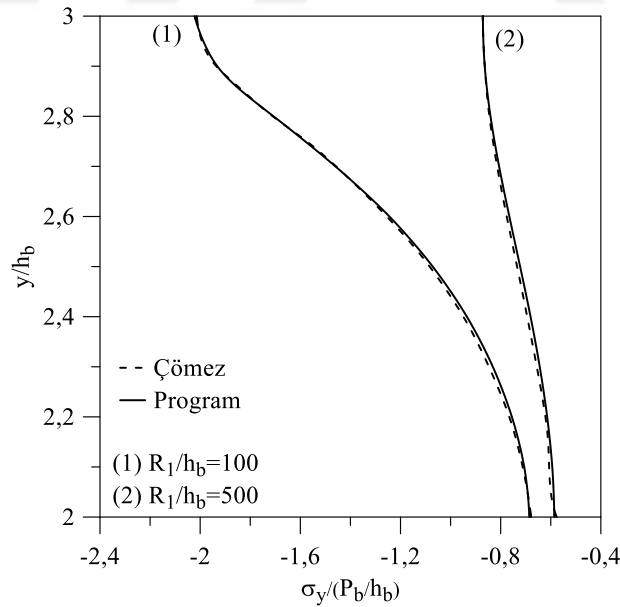
Şekil 68. Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen üst tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması

$$(\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa, h_1 / h_2 = 2, G_1 / G_2 = 1, \frac{G_2}{P_b / h_b} = 500)$$

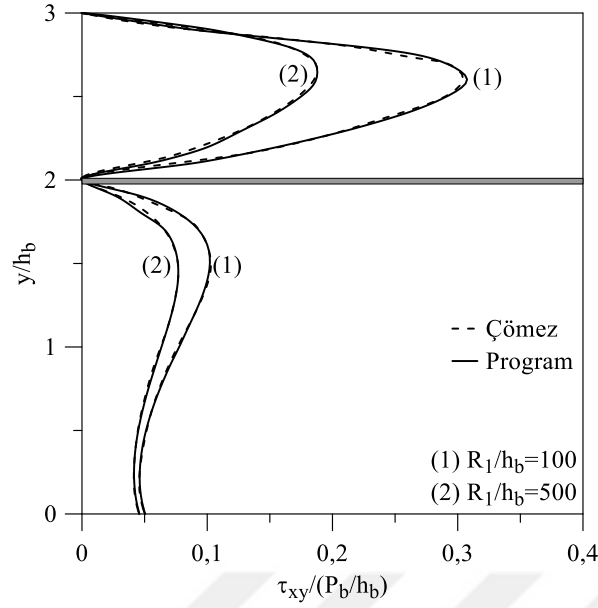
Derinlik boyunca σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerine ilişkin farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] 'de verilen sonuçlarla program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması sırasıyla Şekil 69-71 'de verilmektedir. σ_x ve σ_y normal gerilmelerine ilişkin sonuçlar $x = 0$ simetri eksenini için verilirken τ_{xy} kayma gerilmelerine ilişkin sonuçlar $x = 0.5$ eksenini için verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi, her iki durumda elde edilen sonuçlara ilişkin grafikler üst üste çakışmaktadır.



Şekil 69. Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$)

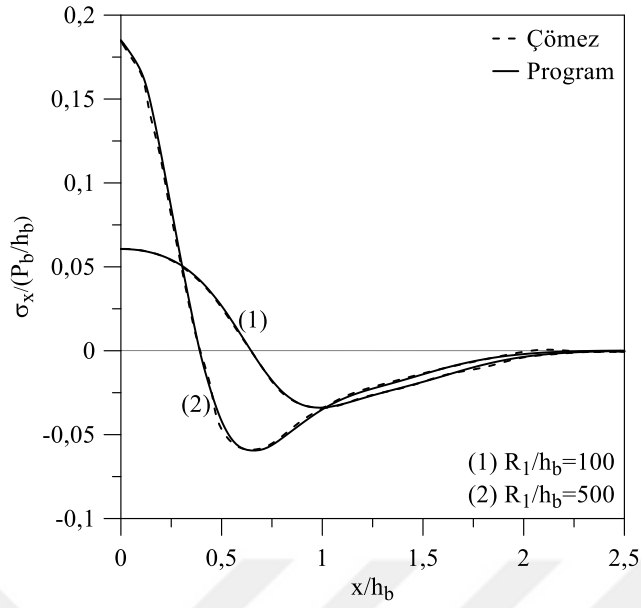


Şekil 70. Farklı R_1 / h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$)

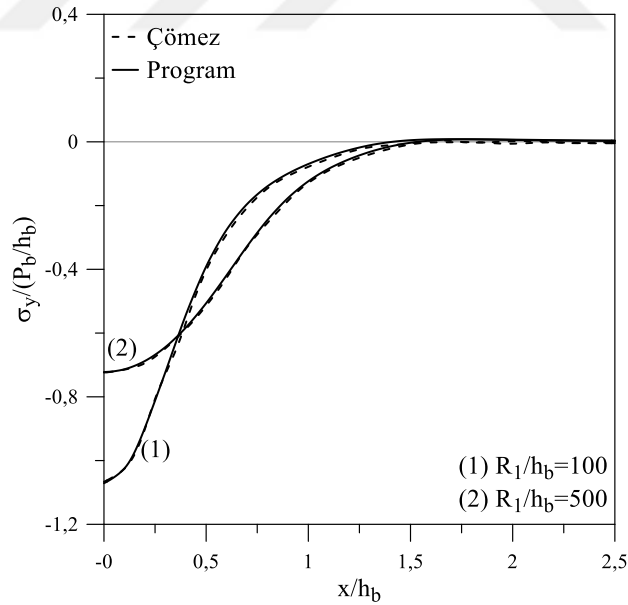


Şekil 71. Farklı R_1/h_b oranları için Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x=0,5$ ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması
 $(\kappa_1 = \kappa_2 = 2, G_1/G_2 = 1, h_1/h_2 = 2, \frac{G_2}{P_b/h_b} = 500)$

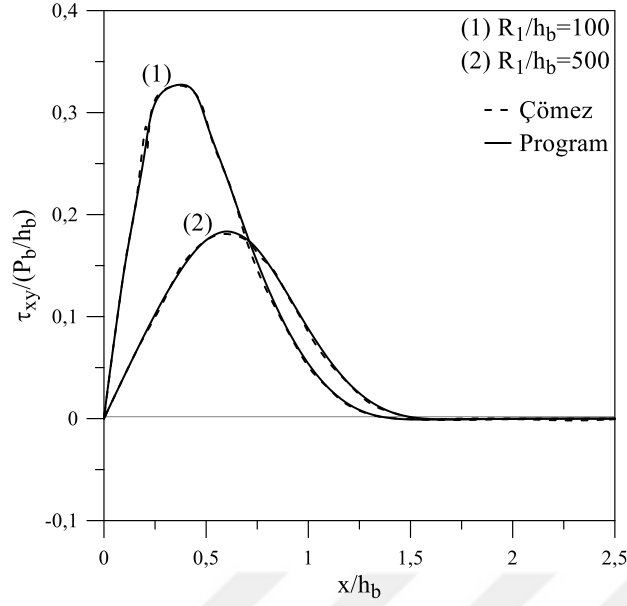
Üst tabakanın ortasında x eksenini boyunca ($0 \leq x \leq 2, y = 0,5$) σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin farklı R_1/h_b oranları için Çömez [23] 'de verilen sonuçlarla program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması sırasıyla Şekil 72-74 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, mevcut çalışmadan [23] elde edilen sonuçlarla geliştirilen programdan elde edilen sonuçların uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 72. Farklı R_1 / h_b oranları için x ekseninde boyunca üst tabakanın ortasındaki σ_x normal gerilmelerine ilişkin Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$)



Şekil 73. Farklı R_1 / h_b oranları için x ekseninde boyunca üst tabakanın ortasındaki σ_y normal gerilmelerine ilişkin Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$)

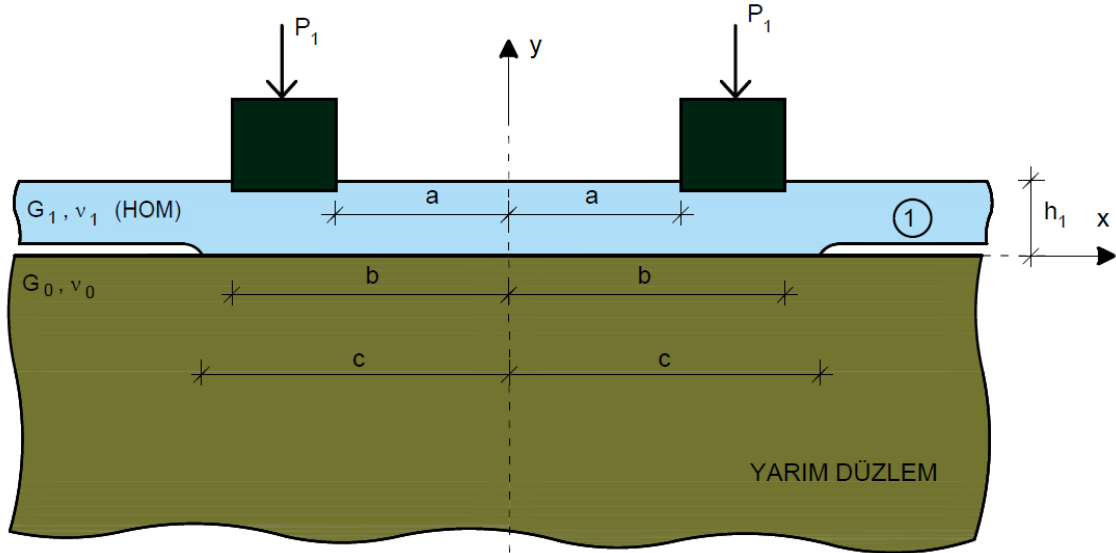


Şekil 74. Farklı R_1 / h_b oranları için x eksenı boyunca üst tabakanın ortasındaki τ_{xy} kayma gerilmelerine ilişkin Çömez [23] ve program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$, $h_1 / h_2 = 2$, $\frac{G_2}{P_b / h_b} = 500$)

4.1.3. Karabulut [32]

Üçüncü problem olarak Karabulut [32] tarafından yapılan yüksek lisans tez çalışması seçilmiştir. Bu çalışmada yarım düzlem üzerine oturan homojen bir tabakanın temas problemi incelenmiştir. Tabakaya simetrik olarak yerleştirilmiş iki adet P tekil yükü, rijit düz bloklar aracılığıyla etkimektedir. Tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas yüzeyi yapışık değildir. Problem geometri ve yüklemeye göre simetrik olup düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Problem bir tabaka ($N=1$) ve üç integral denklemden ($M=3$) oluşmaktadır. Çalışmada [32], rijit düz bloklar ile tabaka arasındaki temas yüzeylerinin başlangıç ve bitiş noktaları bilinmekte olup bu noktalar (a, b) ve $(-b, -a)$ aralığındadır. Buna karşılık söz konusu temas noktaları programda sırasıyla (b_{1S}, b_{1E}) ve (b_{2S}, b_{2E}) aralığındadır. Mevcut çalışmada [32], tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas $[-c, c]$ aralığında gerçekleşirken program yardımıyla oluşturulan modelde $[a_{0S}, a_{0E}]$ aralığındadır. Problemden uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve

$P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 75’de verilmektedir.

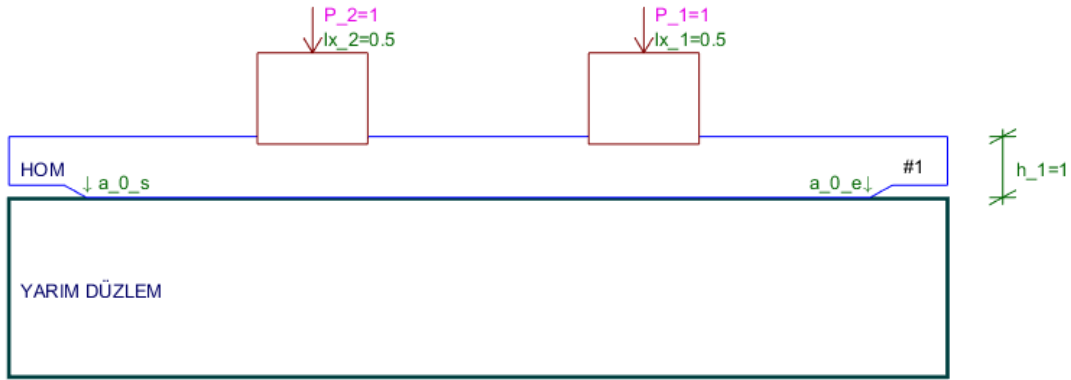


Şekil 75. [32]’de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası ($G_1/G_0 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $(b-a)/h_b = 1$, $(b+a)/(2h_b) = 1$, $P_1 = P_2$) aşağıda verilmiştir.

```
addLayer HOM 100 0.25 1
addFoundation HP 100 0.25
addReceding 0
addLoad PUNCH 1 FLAT 1 0.5
addLoad PUNCH 1 FLAT -1 0.5
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 66’ da verilmektedir.



Şekil 76. [32] problemi için program yardımıyla oluşturulan model

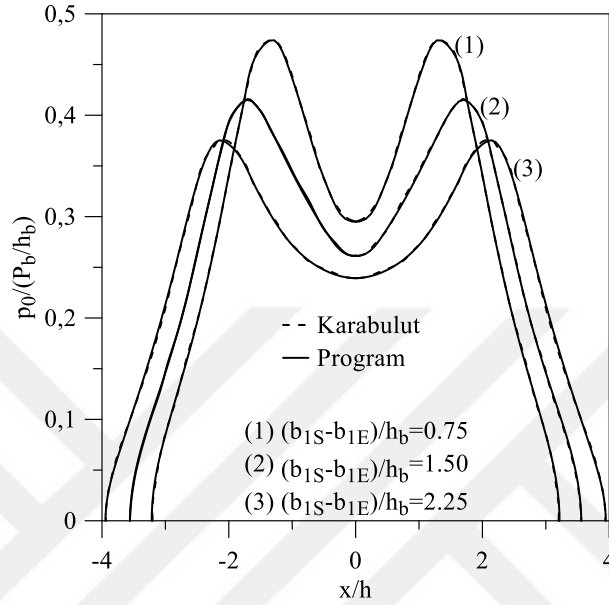
Tablo 4’de çeşitli geometri ve yükleme durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [32] elde edilen temas uzunluklarıyla programdan elde edilen temas uzaklıkları karşılaştırılmıştır. Tabloda verilen sonuçlar incelendiğinde, program yardımıyla elde edilen sonuçların Karabulut [32] tarafından elde edilen sonuçlarla çok yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 0,133 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 4. Karabulut [32] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, $h_1 / h_2 = 2$, $G_1 / G_2 = 1$)

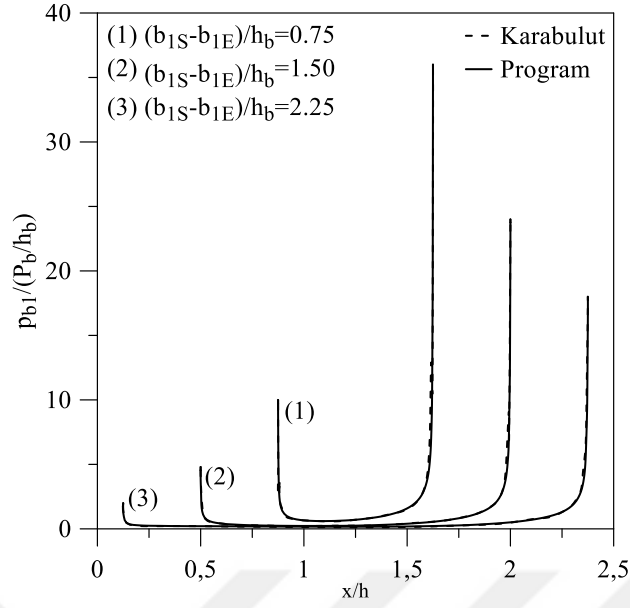
Çeşitli Parametreler			Karabulut [32]	Geliştirilen Program		% Fark	
G_1 / G_0	$\frac{b+a}{2h_b}$	$\frac{b-a}{h_b}$	c / h_b	a_{0S} / h_b	a_{0E} / h_b	a_{0S}	a_{0E}
0.1	0.75	1.25	1,9436	-1,944947	1,944947	0,069	-0,069
1	0.75	1.25	2,2818	-2,283422	2,283422	0,071	-0,071
4	0.75	1.25	2,9036	-2,907453	2,907453	0,133	-0,133
1	1	1.25	2,5458	-2,545637	2,545637	-0,006	0,006
1	1.5	1.25	3,0703	-3,072430	3,072430	0,069	-0,069
1	1	0.5	2,2642	-2,266450	2,266450	0,099	-0,099
1	1	1	2,4356	-2,435911	2,435911	0,013	-0,013
1	1	1.5	2,6648	-2,664638	2,664638	-0,006	0,006
1	1.25	0.5	2,5481	-2,546519	2,546519	-0,062	0,062
1	1.25	1	2,7056	-2,706247	2,706247	0,024	-0,024
1	1.25	1.5	2,9244	-2,926880	2,926880	0,085	-0,085

Tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas yüzeyi ve tabaka ile sağ rijit blok arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin farklı blok genişlikleri ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b$)

için mevcut çalışmada [32] verilen sonuçlar ile program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 77 ve 78'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, elde edilen sonuçlardan çizilen grafiklerin birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

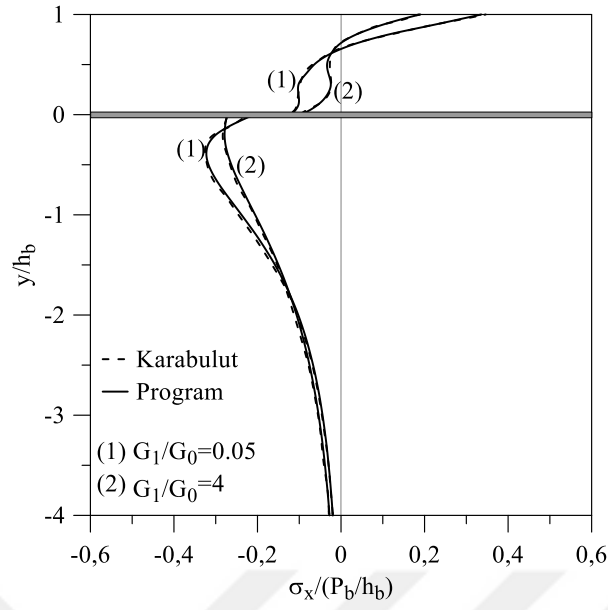


Şekil 77. Farklı blok genişlikleri $((b_{1E}-b_{1S})/h_b)$ için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması $(G_1/G_2=4, (b_{1E}+b_{1S})/(2h_b)=1,25, \kappa_1=\kappa_0=2)$

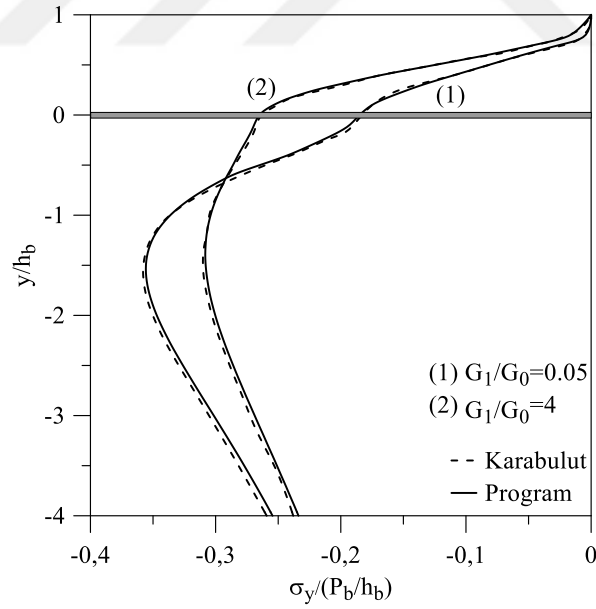


Şekil 78. Farklı blok genişlikleri $((b_{1E} - b_{1S}) / h_b)$ için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen tabaka ile sağ düz blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması
 $(G_1 / G_2 = 4, (b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25, \kappa_1 = \kappa_0 = 2)$

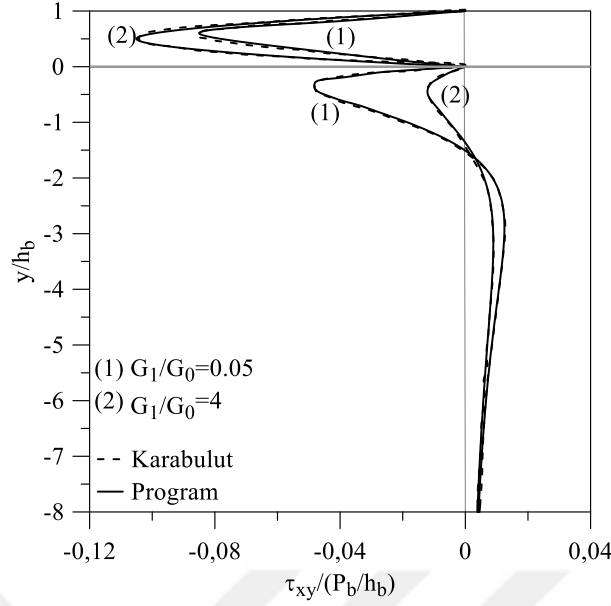
Derinlik boyunca σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerine ilişkin tabaka kayma modülünün yarım düzlemin kayma modülüne oranının (G_1 / G_0) farklı değerleri için mevcut çalışmada [32] verilen sonuçlarla program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması sırasıyla Şekil 79-81 'de verilmektedir. σ_x ve σ_y normal gerilmelerine ilişkin sonuçlar $x = 0$ simetri eksenini için verilirken, τ_{xy} kayma gerilmelerine ilişkin sonuçlar $x = 0.25$ eksenini için verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, her iki durum için elde edilen sonuçlara ilişkin grafiklerin oldukça yakın olduğu görülmektedir.



Şekil 79. Farklı G_1 / G_0 oranları için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri eksenini üzerinde derinlik boyunca karşılaştırılması ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b = 1.25$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)



Şekil 80. Farklı G_1 / G_0 oranları için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri eksenini üzerinde derinlik boyunca karşılaştırılması ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b = 1.25$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)



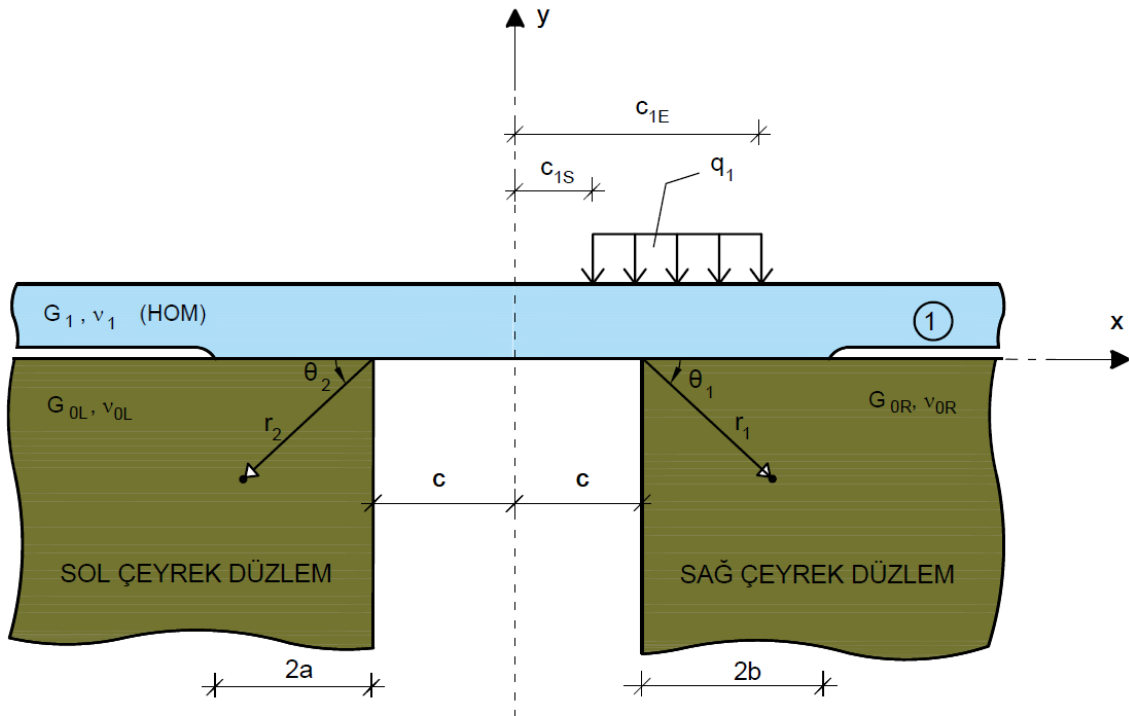
Şekil 81. Farklı G_1 / G_0 oranları için Karabulut [32] ve program yardımıyla elde edilen τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x = 0,25$ ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($(b_{1E} - b_{1S}) / h_b = 1.25$, $(b_{1E} + b_{1S}) / (2h_b) = 1.25$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$)

4.1.4. Akavcı [20]

Dördüncü problem olarak Akavcı [20] tarafından yapılan doktora tez çalışması seçilmiştir. Bu çalışmada, çeyrek düzlemler üzerine oturan homojen bir tabakanın temas problemi incelenmiştir. Tabakaya üstten $[c_{1S}, c_{1E}]$ aralığında q_1 düzgün yayılı yükü

$$(Q_1 = \int_{c_{1S}}^{c_{1E}} q_1 dx = (c_{1E} - c_{1S})q_1)$$

etkimekte olup tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeyleri yapışık değildir. Çeyrek düzlemlerin $x=0$ eksenine uzaklıkları c olup problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Problem bir tabaka ($N=1$) ve iki integral denklemden ($M=2$) oluşmaktadır. Çalışmada, tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki ve tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyleri sırasıyla $(c, c+2b)$ ve $(-c-2a, -c)$ aralığında gerçekleşirken geliştirilen program yardımıyla oluşturulan modelde sırasıyla $(a_{ORS} = c, a_{ORE})$ ve $(a_{OLS}, a_{OLE} = -c)$ aralığındadır. Söz konusu problemde uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = Q_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 82'de verilmektedir.

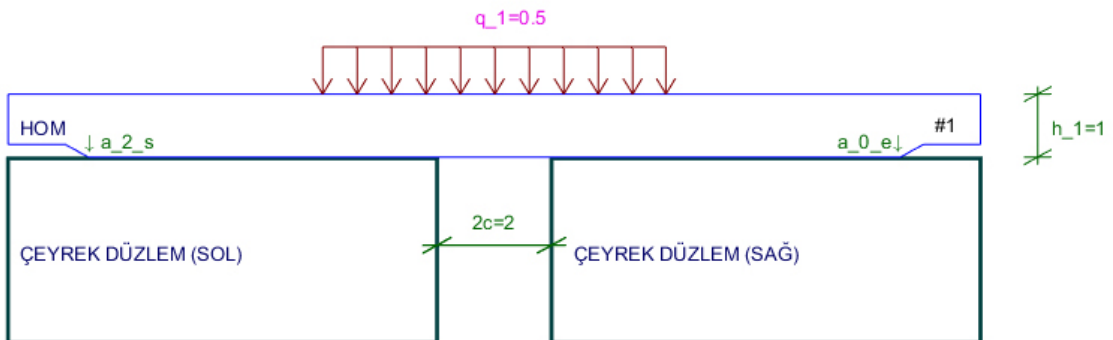


Şekil 82. [20]'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bu problemi geliştirilen program yardımıyla oluşturabilmek için yazılan girdi dosyası ($G_{0R}/G_{0L}=1$, $G_1/G_{0R}=1/7$, $\kappa_1=\kappa_{0R}=\kappa_{0L}=2$, $c_{1S}/h_b=-1$, $c_{1E}/h_b=1$) aşağıda verilmektedir.

```
addLayer HOM 100 0.25 1
addFoundation QP 700 0.25 700 0.25 1
addLoad FUNC -1 1 0.50
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 83' de verilmektedir.



Şekil 83. [20] problemi için geliştirilen program yardımıyla oluşturulan model

Tablo 5 ‘de çeşitli geometri ve yükleme durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [20] elde edilen temas uzunluklarıyla programdan elde edilen temas uzaklıkları karşılaştırılmaktadır. Tablodan da görülebileceği gibi, program yardımıyla elde edilen sonuçlarla Akavcı [20] tarafından elde edilen sonuçlar oldukça yakındır. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 1.426 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 5. Akavcı [20] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($G_{0R}/G_{0L}=1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c/h_b = 1$)

Çeşitli Parametreler			Akavcı [20]	Geliştirilen Program	% Fark
G_1/G_{0R}	c_{1S}/h_b	c_{1E}/h_b	$(c+2b)/h_b$	a_{0RE}/h_b	a_{0RE}
3/7	-0,01	0,01	1,30100	1,310429	-0,725
1/7	-1,00	1,00	1,27900	1,285473	-0,506
3/7	-1,00	1,00	1,38300	1,392521	-0,688
1/7	-0,76	-0,74	1,12200	1,132951	-0,976
1/7	-0,51	-0,49	1,14400	1,155359	-0,993
3/7	-0,26	-0,24	1,25300	1,261227	-0,657
1/7	-1,00	0,00	1,16400	1,167324	-0,286
3/7	0	1,25	1,60200	1,605564	-0,222

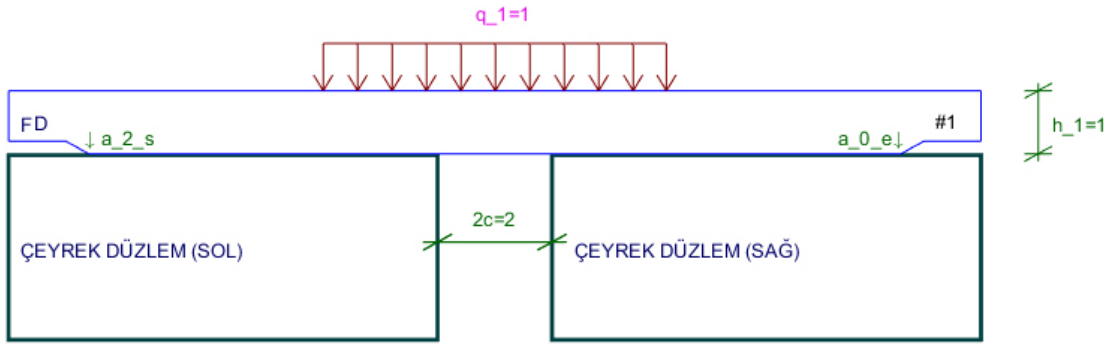
Çeşitli Parametreler			Akavcı [20]	Geliştirilen Program	% Fark
G_1/G_{0R}	c_{1S}/h_b	c_{1E}/h_b	$(-c-2a)/h_b$	a_{0LS}/h_b	a_{0LS}
3/7	-0,01	0,01	-1,30100	-1,310429	-0,725
1/7	-1,00	1,00	-1,27900	-1,285473	-0,506
3/7	-1,00	1,00	-1,38300	-1,392520	-0,688
1/7	-0,76	-0,74	-1,46200	-1,482841	-1,426
1/7	-0,51	-0,49	-1,32800	-1,346581	-1,399
3/7	-0,26	-0,24	-1,36800	-1,377653	-0,706
1/7	-1,00	0,00	-1,36900	-1,375026	-0,440
3/7	0	1,25	-1,22900	-1,230688	-0,137

Tablo 2-5 birlikte değerlendirildiğinde %Fark değerlerinin Tablo 5 ‘de diğerlerine göre daha büyük olduğu görülmektedir. Bu nedenle, programdan elde edilen sonuçların doğruluğunu daha iyi test etmek için literatürden benzer geometri ve yüklemeye sahip Adıyaman vd. [49] tarafından yapılan çalışma ele alınmıştır Adıyaman vd. ‘nin [49] yaptığı çalışmada, Akavcı [20] ‘nın çalışmasından farklı olarak homojen tabaka yerine fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabaka ele alınmakta ve yayılı yük simetrik olarak $(-a,a)$ aralığında FD tabakaya etkimektedir. Tabaka ile sağ çeyrek düzlem ve tabaka ile sol çeyrek düzlem

arasındaki temas bölgeleri sırasıyla $(c, c+2b)$ ve $(-c-2b, -c)$ aralıklarında gerçekleşirken, program yardımıyla oluşturulan modelde temas yüzeyleri $(a_{0RS} = c, a_{0RE})$ ve $(a_{0LS}, a_{0LE} = -c)$ aralıklarında gerçekleşmektedir. Problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası $(G_{0R}/G_{0L} = 1, G_1/G_0 = 1/7, a/h_b = 1, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2, c/h_b = 1, \beta_1 = 0.001)$ aşağıda verilmektedir.

```
addLayer FG 100 100.1 0.25 1
addFoundation QP 100 0.25 100 0.25 1
addLoad FUNC -1 1 1
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 84' de verilmektedir.



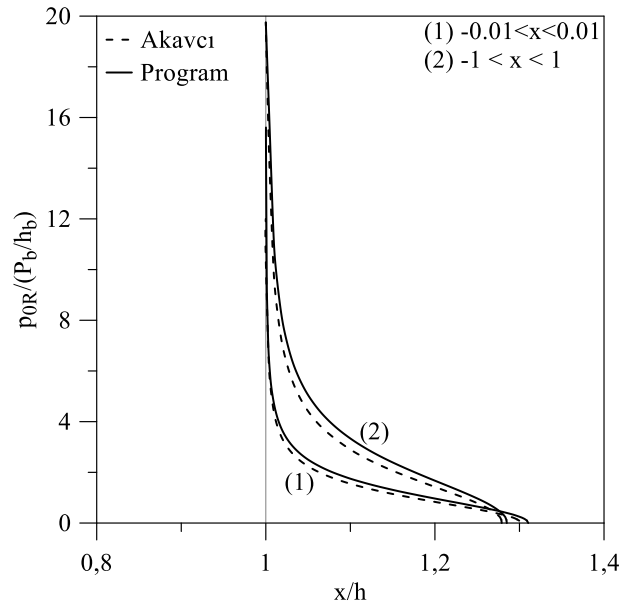
Şekil 84. [49] problemi için geliştirilen program yardımıyla oluşturulan model

Tablo 6' da çeşitli geometri ve yükleme durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [49] elde edilen temas uzunlukları ile program yardımıyla elde edilen temas uzunlukları karşılaştırılmaktadır. Tablo incelendiğinde, program yardımıyla elde edilen sonuçların Adıyaman vd. [49] tarafından elde edilen sonuçlarla çok yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük % Fark 0,115 olarak gerçekleşmektedir.

Tablo 6. Adıyaman vd. [49] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($G_{0R}/G_{0L}=1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c/h_b = 1$)

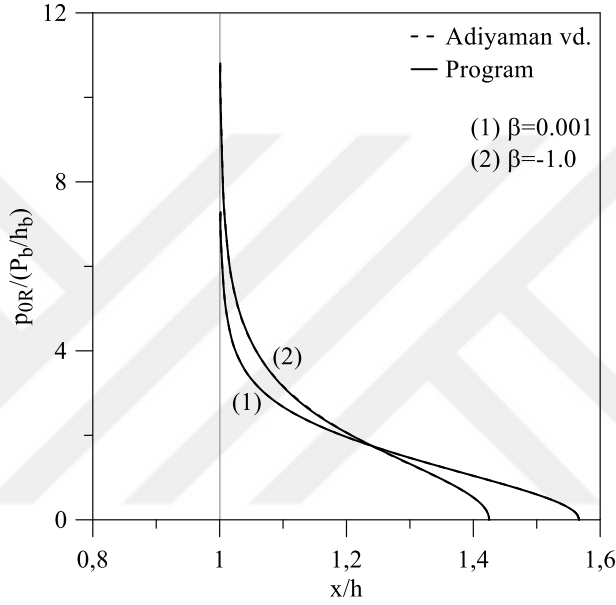
Çeşitli Parametreler			Adıyaman vd. [49]	Geliştirilen Program		% Fark	
G_1/G_0	a/h_b	β_1	$(c+2b)/h_b$	a_{0RE}/h_b	a_{0LS}/h_b	a_{0RE}	a_{0LS}
3/7	0,01	0,001	1,31055	1,310429	-1,310429	0,009	0,009
1/7	1	0,001	1,28400	1,285473	-1,285473	-0,115	-0,115
3/7	1	0,001	1,39200	1,392521	-1,392520	-0,037	-0,037
1	1	0,01	1,56719	1,566764	-1,566764	0,027	0,027
1	1	1	1,42500	1,425192	-1,425190	-0,013	-0,013
1	1	-1	1,73750	1,736547	-1,736547	0,055	0,055
3/7	0,01	0,001	1,31055	1,310429	-1,310429	0,009	0,009

Homojen tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin simetrik yükleme olması durumunda, farklı yayılı yük genlikleri [c_{1S} , c_{1E}] için Akavcı [20] 'nin çalışmasında verilen sonuçlar ile program yardımıyla edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 85 'de verilmektedir. Şekil incelendiğinde, her iki çözümden elde edilen sonuçlara bağlı olarak çizilen grafiklerin birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.



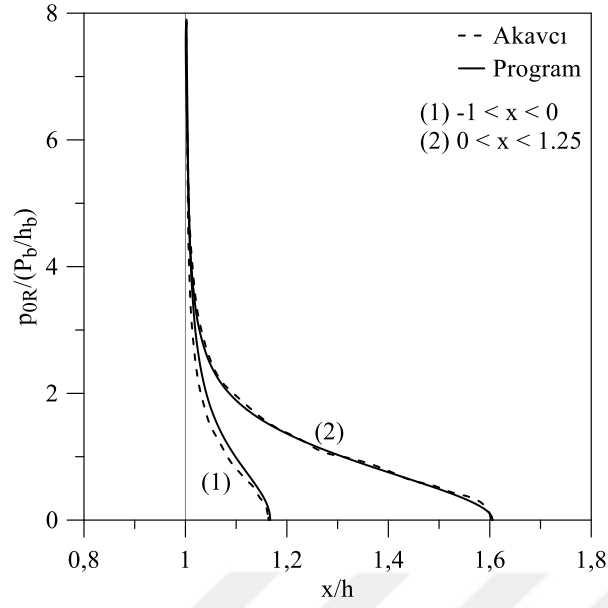
Şekil 85. Farklı yayılı yük genlikleri [c_{1S} , c_{1E}] için Akavcı [20] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($G_{0R}/G_{0L}=1$, $G_1/G_{0R}=1/7$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$, $c/h_b = 1$)

FD tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin tabakanın kayma modülündeki değişimini gösteren β_1 ifadesinin farklı değerleri için Adıyaman vd. [49] 'nin çalışmasında verilen sonuçlar ile program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 86 'da verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi, her iki çözümden elde edilen sonuçlara bağlı olarak çizilen grafikler üst üste çakışmaktadır.

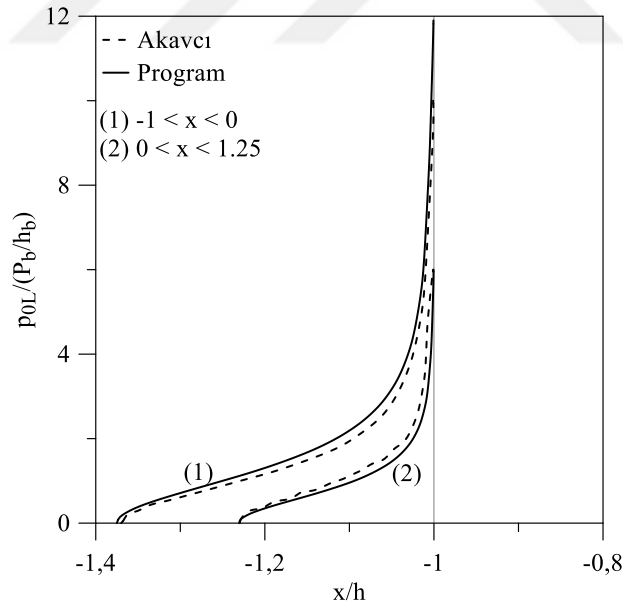


Şekil 86. Farklı β_1 değerleri için Adıyaman vd. [49] ve program yardımıyla elde edilen FD tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması
 $(G_{0R}/G_{0L}=1, G_{10}/G_{0R}=1, \kappa_1=\kappa_{0R}=\kappa_{0L}=2, c/h_b=1, a=1)$

Homojen tabaka ile sağ ve sol çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeyleri boyunca oluşan temas gerilmelerinin yüklemenin simetrik olmaması halinde farklı yayılı yük genlikleri $[c_{1S}, c_{1E}]$ için Akavcı [20] çalışmasında verilen sonuçlar ile program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 87 ve 88 'de verilmektedir. Grafikler elde edilirken (1). yükleme durumu için $(-1 < x < 0)$ $G_1/G_{0R}=1/7$ olarak seçilirken, (2). yükleme durumu için $(0 < x < 1.25)$ bu oran $G_1/G_{0R}=3/7$ olarak seçilmiştir. Her iki şekilden de görülebileceği gibi elde edilen sonuçlara bağlı olarak çizilen grafikler uyumludur.



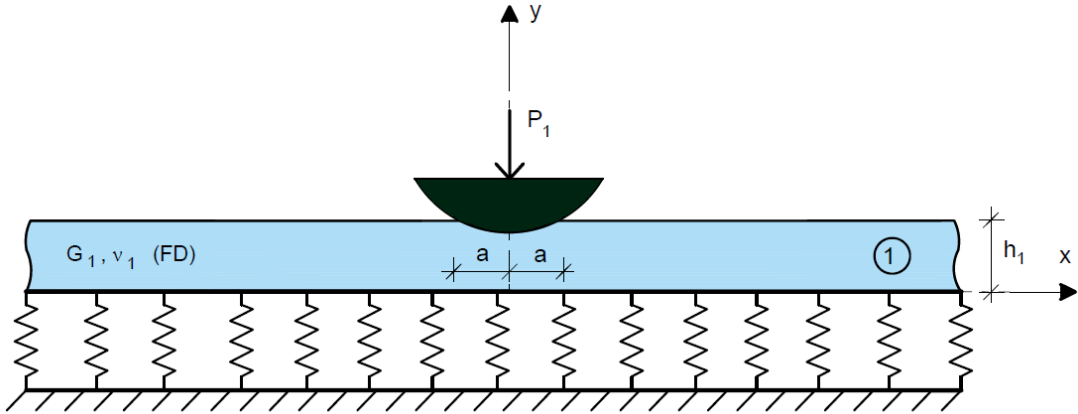
Şekil 87. Farklı yayılı yük genlikleri $[c_{1S}, c_{1E}]$ için Akavcı [20] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması
 $(G_{0R}/G_{0L} = 1, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2, c/h_b = 1)$



Şekil 88. Farklı yayılı yük genlikleri $[c_{1S}, c_{1E}]$ için Akavcı [20] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması
 $(G_{0R}/G_{0L} = 1, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2, c/h_b = 1)$

4.1.5. Çömez [45]

Beşinci problem olarak Çömez [45] tarafından yapılan çalışma seçilmiştir. Çalışmada, Winkler temele oturan FD bir tabakanın temas problemi incelenmiştir. Tabakaya P_1 tekil yükü R_1 yarıçaplı dairesel bir rijit blok aracılığı ile etkimektedir. Söz konusu problem geometri ve yüklemeye göre simetrik olup düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Problem bir tabaka ($N=1$) ve bir integral denklemden ($M=1$) oluşmaktadır. Çömez [45] 'in çalışmasında, tabaka ile rijit blok arasındaki temas $[-a, a]$ aralığında gerçekleşirken, program yardımıyla oluşturulan modelde temas $[b_{1S}, b_{1E}]$ aralığında meydana gelmektedir. Problemden uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 89'da verilmiştir.

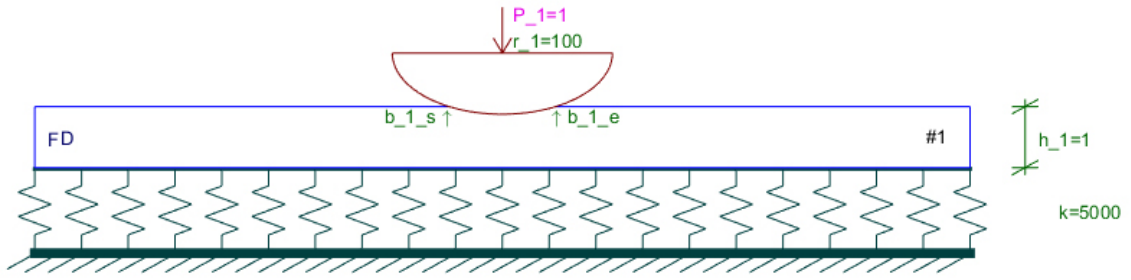


Şekil 89. [45] 'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bahsi geçen problemi geliştirilen program yardımıyla oluşturmak için yazılan örnek bir girdi dosyası ($\frac{G_{1h}}{P_b/h_b} = 500$, G_{10}/G_{1h} , $\kappa_1 = 2.2$, $k_y/G_{1h} = 10$) aşağıda verilmektedir.

```
addLayer FG 50 500 0.2 1
addFoundation WINKLER 5000
addLoad PUNCH 1 CIR 0 100
```

Girdi dosyasının okutulmasıyla programda oluşan model Şekil 90 'da verilmektedir.



Şekil 90. [45] 'de verilen temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model

Tablo 7 'de çeşitli geometri ve yükleme durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [45] elde edilen temas uzunluklarıyla geliştirilen program yardımıyla elde edilen temas uzaklıkları karşılaştırılmaktadır. Tablo incelendiğinde, program yardımıyla elde edilen sonuçların Çömez [45] tarafından elde edilen sonuçlarla çok yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 0,148 olarak gerçekleşmiştir.

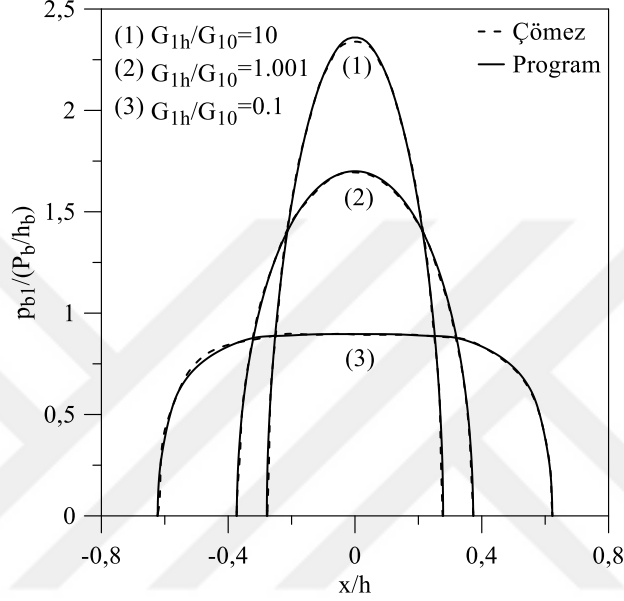
Tablo 7. Çömez [45] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500$, $\kappa_1 = 2.2$)

Çeşitli Parametreler		Çömez [45]	Geliştirilen Program		% Fark	
G_{10} / G_{1h}	k_y / G_{1h}	a / h_b	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b	b_{1S}	b_{1E}
1.001	0.1	0,3725	-0,372478	0,372478	-0,006	0,006
1.001	1	0,3304	-0,330419	0,330419	0,006	-0,006
1.001	10	0,3151	-0,315037	0,315037	-0,020	0,020
1.001	$\rightarrow \infty$	0,3116	-0,311561	0,311561	-0,012	0,012
0.1	0.1	0,6220	-0,622131	0,622131	0,021	-0,021
0.1	1	0,4734	-0,473345	0,473345	-0,012	0,012
0.1	10	0,4452	-0,445860	0,445860	0,148	-0,148
0.1	$\rightarrow \infty$	0,4415	-0,442093	0,442093	0,134	-0,134
10	0.1	0,2779	-0,278016	0,278016	0,042	-0,042
10	1	0,2673	-0,267260	0,267260	-0,015	0,015
10	10	0,2617	-0,261784	0,261784	0,032	-0,032
10	$\rightarrow \infty$	0,2594	-0,259456	0,259456	0,022	-0,022

FD tabaka ile dairesel rijit blok arasındaki temas yüzeyi boyunca oluşan temas gerilmelerinin tabakanın üst yüzeyindeki kayma modülünün (G_{1h}) tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülüne (G_{10}) oranının (G_{1h} / G_{10}) farklı değerleri için mevcut

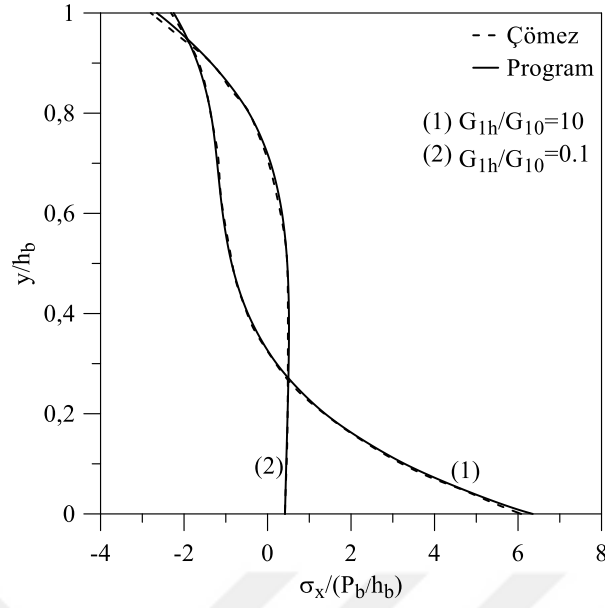
çalışmada [45] verilen sonuçlarla geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması

Şekil 91 'de verilmektedir. Şekilden de görülebileceği gibi, her iki çözümden elde edilen grafikler oldukça uyumludur.

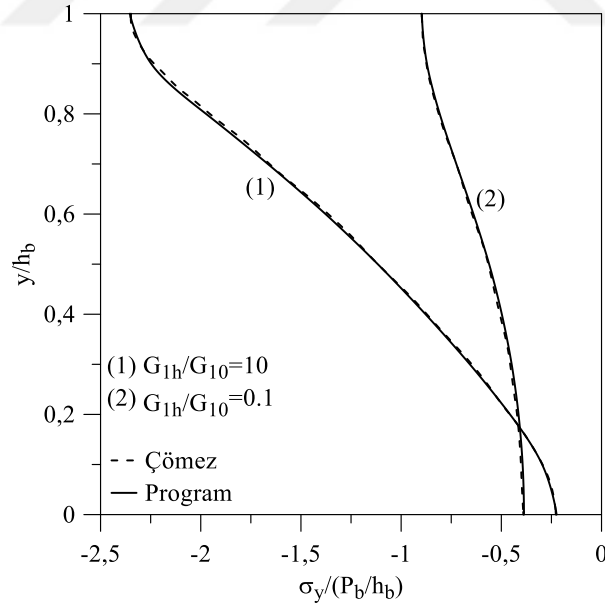


Şekil 91. Farklı G_{1h}/G_{10} oranları için Çömez [45] ve program yardımıyla elde edilen rijit blok ile FD tabaka arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b/h_b} = 500$, $k_y/G_{1h} = 10$, $\kappa_1 = 2.2$, $R_1/h_b = 100$)

Simetri ekseninde derinlik boyunca ($x = 0$, $0 \leq y \leq h$) σ_x ve σ_y gerilmelerinin farklı G_{1h}/G_{10} oranları için mevcut çalışmada [45] verilen sonuçlarla program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması sırasıyla Şekil 92 ve 93 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, her iki çözümden elde edilen grafiklerin üst üste çakıştıkları görülmektedir.



Şekil 92. Farklı G_{1h} / G_{10} oranları için Çömez [45] ve program yardımıyla elde edilen σ_x normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500$, $k_y / G_{1h} = 10$, $\kappa_1 = 2.2$, $R_1 / h_b = 100$)



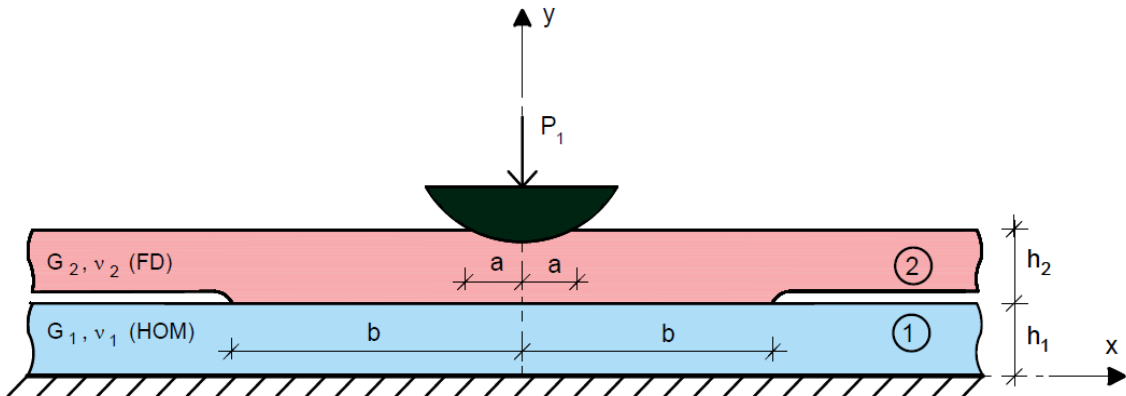
Şekil 93. Farklı G_{1h} / G_{10} oranları için Çömez [45] ve program yardımıyla elde edilen σ_y normal gerilmelerinin simetri ekseninde derinlik boyunca karşılaştırılması ($\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500$, $k_y / G_{1h} = 10$, $\kappa_1 = 2.2$, $R_1 / h_b = 100$)

4.1.6. Yan ve Li [46]

Altıncı problem olarak Yan ve Li [46] tarafından yapılan çalışma ele alınmıştır. Bu çalışmada rijit temel üzerine oturan iki tabakanın temas problemi incelenmiştir. Tabakalara üstten P_1 tekil yükü yarıçapı R_1 olan rijit dairesel bir blok aracılığıyla etkimektedir. Altta tabaka homojen olup kayma modülü (G_1) sabittir. Üstteki tabaka ise FD olup kayma modülü aşağıda verilen bağıntıya göre değişmektedir.

$$G_2 = G_1 e^{\beta_2(y-h_1)} \quad (275)$$

Her iki tabakanın da Poisson oranları sabittir. Problemden, alt tabaka ile rijit temel arasındaki temas yüzeyi yapışık, tabakalar arasındaki temas yüzeyi ise yapışık değildir. Söz konusu problem düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmış olup, iki tabaka ($N=2$) ve iki integral denklemden ($M=2$) oluşmaktadır. Çalışmada, tabakalar arasındaki ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri sırasıyla $(-b, b)$ ve $(-a, a)$ aralığında gerçekleşirken, geliştirilen program yardımıyla oluşturulan modelde temas yüzeyleri sırasıyla (a_{1S}, a_{1E}) ve (b_{1S}, b_{1E}) aralığındadır. Problemden uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_2$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 94'de verilmiştir



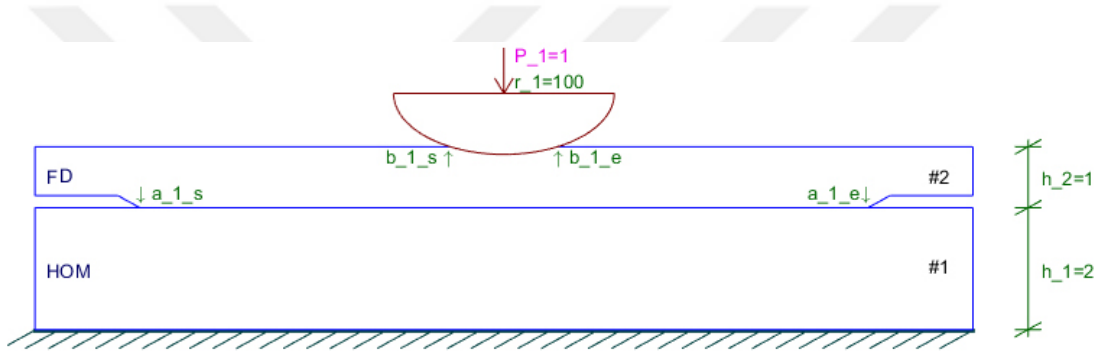
Şekil 94. [46] 'da verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bu problemi geliştirilen program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası

($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100$, $\beta_2 = 1.0$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1 / h_2 = 2$, $R_1 / h_b = 100$) aşağıda verilmektedir.

```
addLayer HOM 100 0.25 2
addLayer FG 100 271.83 0.25 1
addFoundation RIGID
addReceding 1
addLoad PUNCH 1 CIR 0 100
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 95 'de verilmektedir.



Şekil 95. [46] 'da verilen temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model

Tablo 8 'de çeşitli geometri ve yükleme durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [46] elde edilen temas uzunluklarıyla geliştirilen program yardımıyla elde edilen temas uzunlukları karşılaştırılmaktadır. Tabloda verilen değerlere bakıldığında, program yardımıyla elde edilen sonuçların Yan ve Li [46] tarafından elde edilen sonuçlarla yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 1.742 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 8. Yan ve Li [46] problemi için çeşitli parametreler bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1 / h_2 = 2$)

Çeşitli Parametreler			Yan ve Li [46]	Geliştirilen Program		% Fark	
R_1 / h_b	$\frac{G_1}{P_b / h_b}$	B_2	b / h_b	a_{1S} / h_b	a_{1E} / h_b	a_{0S}	a_{0E}
10	100	0.001	1,25371	-1,251991	1,251991	-0,137	0,137
10	100	-1	1,19991	-1,197286	1,197286	-0,219	0,219
10	100	1	1,38254	-1,361670	1,361670	-1,510	1,510
100	100	0.001	1,41805	-1,399566	1,399566	-1,303	1,303
100	100	-1	1,47906	-1,453293	1,453293	-1,742	1,742
100	100	1	1,44437	-1,436556	1,436556	-0,541	0,541
100	500	0.001	1,27028	-1,267417	1,267416	-0,225	0,225
100	500	-1	1,22541	-1,230665	1,230665	0,429	-0,429
100	500	1	1,37594	-1,367802	1,367801	-0,591	0,592
100	1.000	0.001	1,25371	-1,251761	1,251761	-0,155	0,155
100	1.000	-1	1,19992	-1,198133	1,198133	-0,149	0,149
100	1.000	1	1,37270	-1,361674	1,361674	-0,803	0,803
500	1.000	0.001	1,32324	-1,316095	1,316095	-0,540	0,540
500	1.000	-1	1,33257	-1,321988	1,321988	-0,794	0,794
500	1.000	1	1,41140	-1,389958	1,389958	-1,519	1,519

Çeşitli Parametreler			Yan ve Li [46]	Geliştirilen Program		% Fark	
R_1 / h_b	$\frac{G_1}{P_b / h_b}$	B_2	a / h_b	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b	b_{1S}	b_{1E}
10	100	0.001	0,22019	-0,220270	0,220270	0,036	-0,036
10	100	-1	0,32294	-0,322207	0,322207	-0,227	0,227
10	100	1	0,14327	-0,143115	0,143115	-0,108	0,108
100	100	0.001	0,72619	-0,724438	0,724438	-0,241	0,241
100	100	-1	0,92432	-0,924262	0,924262	-0,006	0,006
100	100	1	0,54390	-0,543609	0,543609	-0,054	0,054
100	500	0.001	0,31369	-0,313779	0,313779	0,028	-0,028
100	500	-1	0,44489	-0,443112	0,443112	-0,400	0,400
100	500	1	0,20987	-0,209783	0,209783	-0,042	0,042
100	1.000	0.001	0,22021	-0,220290	0,220290	0,036	-0,036
100	1.000	-1	0,32298	-0,322257	0,322257	-0,224	0,224
100	1.000	1	0,14322	-0,143124	0,143124	-0,067	0,067
500	1.000	0.001	0,50453	-0,504430	0,504430	-0,020	0,020
500	1.000	-1	0,67637	-0,675607	0,675607	-0,113	0,113
500	1.000	1	0,35666	-0,356597	0,356597	-0,018	0,018

Tablo 2-4 ve Tablo 6-8 birlikte incelendiğinde mutlak %Fark değerlerinin Tablo 8 'de diğerlerinden daha büyük olduğu görülmektedir. Bu nedenle, programdan elde edilen

sonuçların doğruluğunu daha iyi tespit etmek için literatürden benzer geometri ve yüklemeye sahip Çömez vd. [48] tarafından yapılan çalışma ele alınmıştır. Çömez vd. [48] 'nin çalışmalarında, Yan ve Li [46] 'nin çalışmasından farklı olarak ele alınan her iki tabaka da fonksiyonel derecelendirilmiş (FD) tabaka olup, tabakaların kayma modülleri aşağıda verilen bağıntıya göre değişmektedir.

$$G_1 = G_{10}e^{\beta_1 y} \quad (276)$$

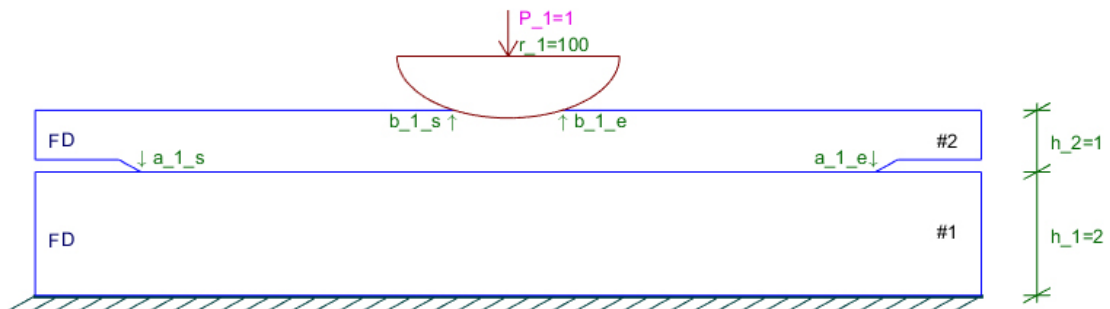
$$G_2 = G_{20}e^{\beta_2(y-h_1)} \quad (277)$$

Her iki tabakanın da Poisson oranları sabittir. [48] çalışmasında, tabakalar arasındaki ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri sırasıyla $(-b,b)$ ve $(-a,a)$ aralığında gerçekleşirken program yardımıyla oluşturulan modelde temas yüzeyleri sırasıyla (a_{1S}, a_{1E}) ve (b_{1S}, b_{1E}) aralığındadır. Söz konusu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası $(\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 100, \beta_1 = 0.001, G_{20}/G_{1h} = 1, \beta_2 = 1.0, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, h_1/h_2 = 2, R_1/h_b = 100)$ aşağıda verilmektedir.

```
addLayer FG 100 100.1 0.25 2
addLayer FG 100.1 271.83 0.25 1
addFoundation RIGID
addReceding 1
addLoad PUNCH 1 CIR 0 100
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model

Şekil 96 'da verilmektedir.



Şekil 96. [48] problemi için program yardımıyla oluşturulan model

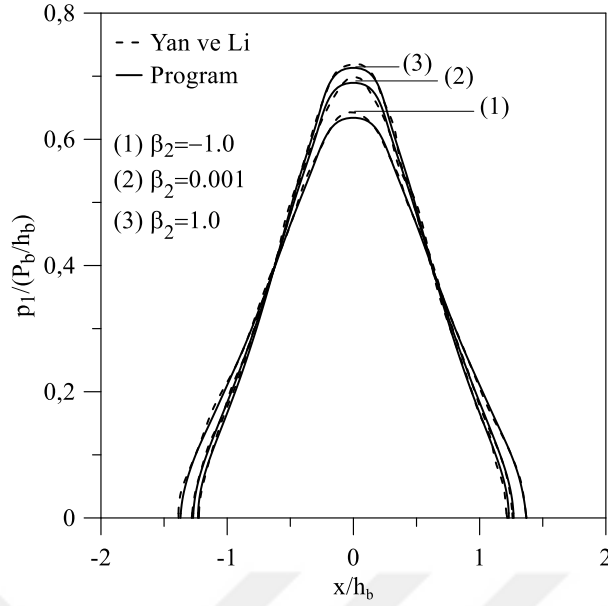
Tablo 9 ‘ da çeşitli geometri ve yükleme durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [48] elde edilen temas uzunluklarıyla geliştirilen program yardımıyla elde edilen temas uzunlukları karşılaştırılmıştır. Tablodan da görülebileceği gibi, program yardımıyla elde edilen sonuçlarla Çömez vd. [48] tarafından elde edilen sonuçlar oldukça yakın ve uyumludur. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 0,304 olarak gerçekleşmektedir.

Tablo 9. Çömez vd. [48] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\beta_1 = 0.001$, $G_{20} / G_{1h} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1 / h_2 = 2$)

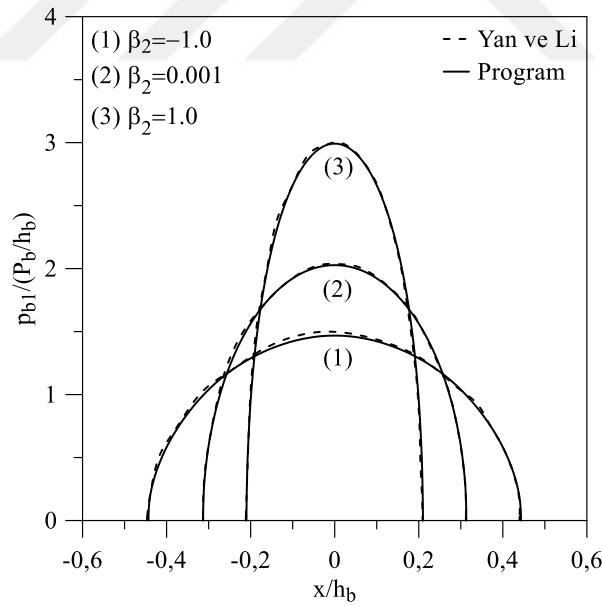
Çeşitli Parametreler			Çömez vd.[48]	Geliştirilen Program		% Fark	
R_1 / h_b	$\frac{G_1}{P_b / h_b}$	B_2	b / h_b	a_{1S} / h_b	a_{1E} / h_b	a_{0S}	a_{0E}
100	100	-1	1,45312	-1,453293	1,453293	0,012	-0,012
100	500	-1	1,23189	-1,230665	1,230665	-0,099	0,099
100	1000	-1	1,19836	-1,198133	1,198133	-0,019	0,019
100	100	1	1,436530	-1,436556	1,436556	0,002	-0,002
100	500	1	1,36799	-1,367802	1,367801	-0,014	0,014
100	1000	1	1,36174	-1,361674	1,361674	-0,005	0,005

Çeşitli Parametreler			Çömez vd.[48]	Geliştirilen Program		% Fark	
R_1 / h_b	$\frac{G_1}{P_b / h_b}$	B_2	a / h_b	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b	b_{1S}	b_{1E}
100	100	-1	0,92455	-0,924262	0,924262	-0,031	0,031
100	500	-1	0,44341	-0,443112	0,443112	-0,067	0,067
100	1000	-1	0,32176	-0,322257	0,322257	0,155	-0,155
100	100	1	0,544230	-0,543609	0,543609	-0,114	0,114
100	500	1	0,21030	-0,209783	0,209783	-0,246	0,246
100	1000	1	0,14356	-0,143124	0,143124	-0,304	0,304

Homojen tabaka ile FD tabaka arasındaki ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca oluşan temas gerilmelerinin farklı β_2 değerleri için Yan ve Li [46] ‘nin çalışmasında verilen sonuçlar ile program yardımıyla elde edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 97 ve 98 ‘de verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi, her iki çözümden elde edilen sonuçlara bağlı olarak çizilen grafikler oldukça uyumludur..



Şekil 97. Farklı β_2 değerleri için Yan ve Li [46] ve program yardımıyla elde edilen tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 2$, $R_1/h_b = 100$)



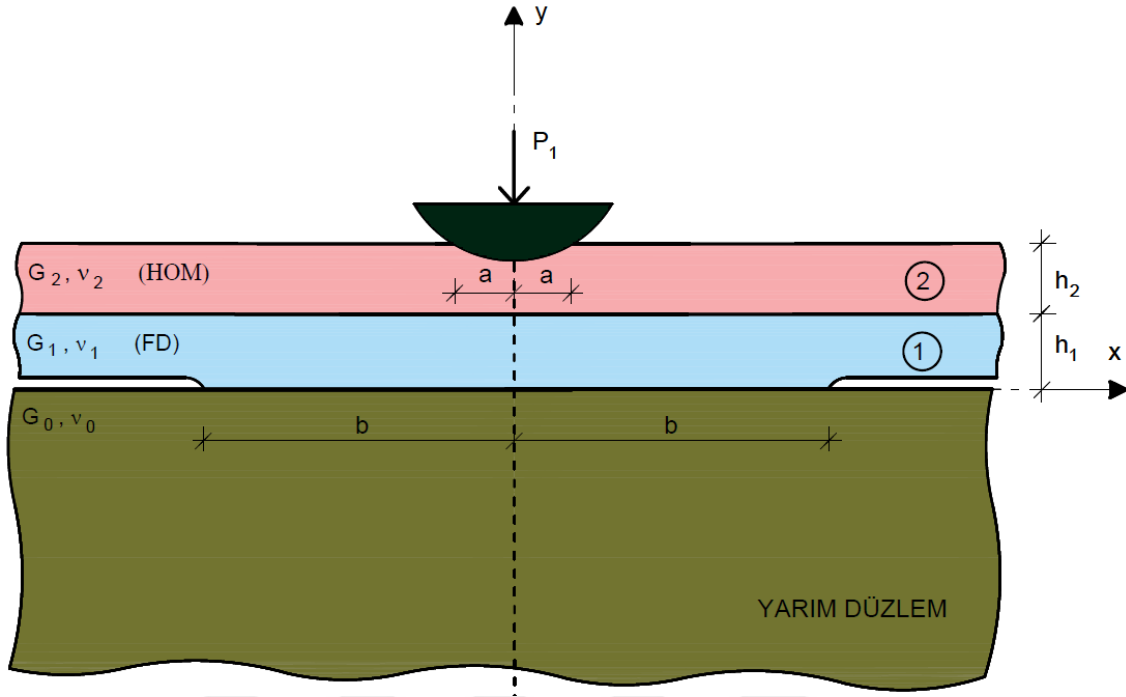
Şekil 98. Farklı β_2 değerleri için Yan ve Li [46] ve program yardımıyla elde edilen tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $\kappa_1 = \kappa_2 = 2$, $h_1/h_2 = 2$, $R_1/h_b = 100$)

4.1.7. Yan ve Mi [52]

Yedinci problem olarak Yan ve Mi [52] tarafından yapılan çalışma ele alınmıştır. Bu çalışmada, yarım düzlem üzerine oturan iki tabakanın temas problemi incelenmiştir. Tabakalar arası temas yüzeyi yapışık olup üst tabakaya P_1 tekil yükü R_1 yarıçaplı dairesel rijit bir blok aracılığı ile etki ettirilmiştir. Alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas yüzeyi yapışık değildir. Üst tabaka homojen olup sabit kayma modülüne (G_2) sahiptir. Alt tabaka ise FD olup kayma modülü aşağıdaki bağıntıya göre değişmektedir.

$$G_1 = G_{10}e^{\beta_1 y} \quad (278)$$

Her iki tabakanın da Poisson oranları sabittir. Problem geometri ve yüklemeye göre simetrik olup düzlem şekil değiştirme problemi olarak ele alınmıştır. Söz konusu problem iki tabaka ($N=2$) ve iki integral denklemden ($M=2$) oluşmaktadır. Çalışmada, alt tabaka ile yarım düzlem arasındaki ve üst tabaka ile rijit dairesel blok arasındaki temas sırasıyla $[-b, b]$ ve $[-a, a]$ aralığında gerçekleşirken program yardımıyla oluşturulan modelde temas yüzeyleri sırasıyla $[a_{0S}, a_{0E}]$ ve $[b_{1S}, b_{1E}]$ aralığındadır. Çözümde, uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 99'da verilmektedir.



Şekil 99. [52] 'de verilen temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası

$$\left(\frac{G_{1h}}{P_b / h_b} = 500, G_{1h} / G_{20} = 1, G_{1h} / G_0 = 1, \beta_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = 2, R_1 / h_b = 250, h_1 / h_2 = 1 \right)$$

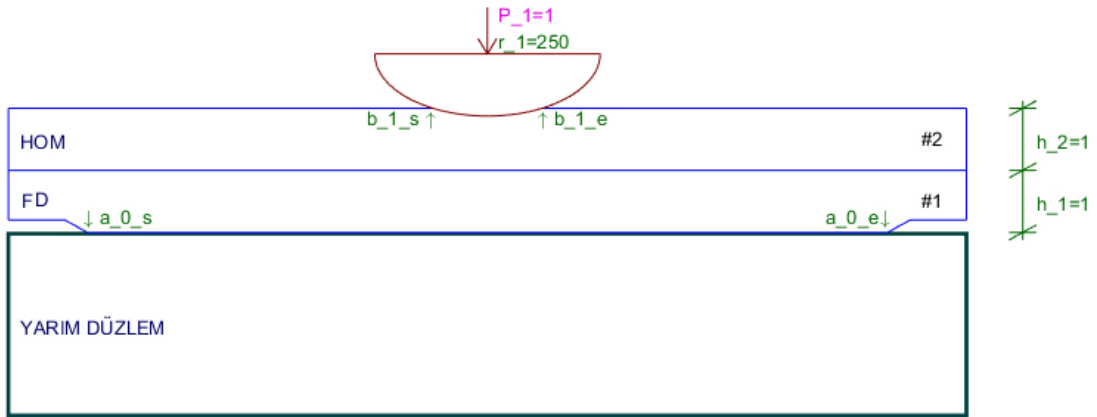
aşağıda verilmektedir.

```

addLayer FG 183.9397 500 0.25 1
addLayer FG 500 0.25 1
addFoundation HP 500 0.25
addReceding 0
addLoad PUNCH 1 CIR 0 250

```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 100' de verilmektedir.



Şekil 100. [52] 'de verilen temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model

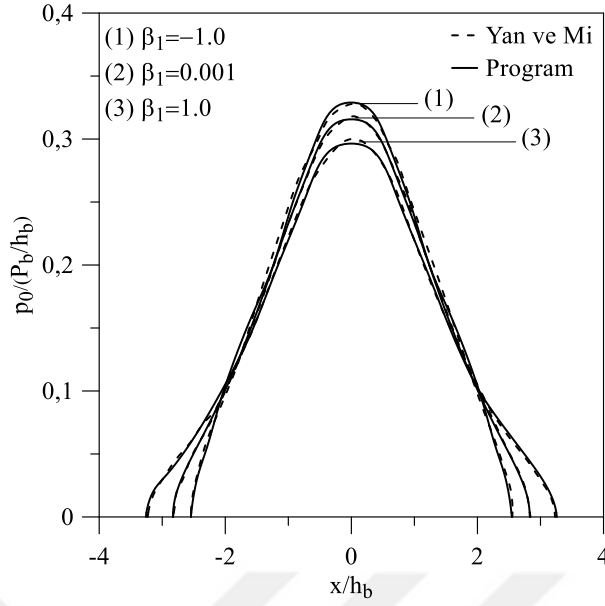
Tablo 10 'da çeşitli geometri ve yük durumları ile malzeme özellikleri için mevcut çalışmadan [52] elde edilen temas uzunluklarıyla geliştirilen program yardımıyla elde edilen temas uzunlukları karşılaştırılmaktadır. Tabloda verilen değerler incelendiğinde, program yardımıyla elde edilen sonuçların Yan ve Mi [52] tarafından elde edilen sonuçlarla çok yakın olduğu görülmektedir. Sonuçlar arasındaki en büyük mutlak % Fark 1.437 olarak gerçekleşmiştir.

Tablo 10. Yan ve Mi [52] problemi için çeşitli parametrelere bağlı temas uzunluklarının karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$, $h_2 = 0$, $G_{1h} / G_0 = 1$, $G_{1h} / G_2 = 1$)

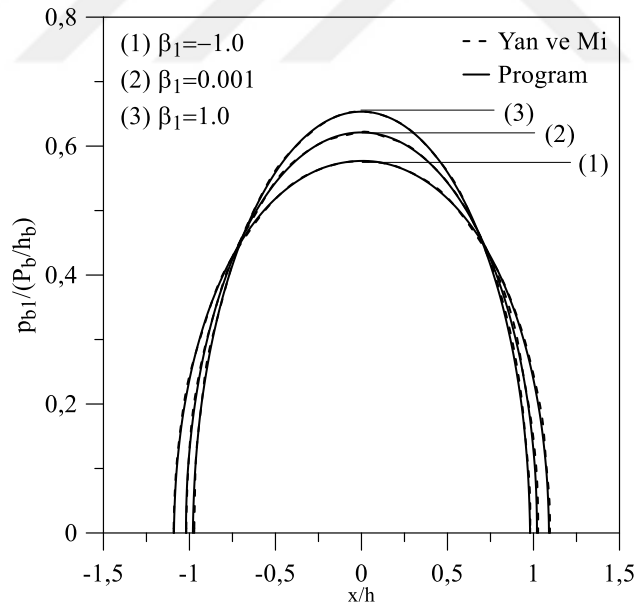
Çeşitli Parametreler			Yan ve Mi [52]	Geliştirilen Program		% Fark	
R_1 / h_b	$\frac{G_{1h}}{P_b / h_b}$	β_1	b / h_b	a_{0S} / h_b	a_{0E} / h_b	a_{0S}	a_{0E}
250	100	-1	1,76690	-1,782817	1,782817	0,901	-0,901
250	100	0,001	1,76210	-1,782304	1,782304	1,147	-1,147
250	100	1	1,87130	-1,890603	1,890603	1,032	-1,032
250	500	-1	1,27460	-1,268229	1,268229	-0,500	0,500
250	500	0,001	1,41980	-1,412557	1,412557	-0,510	0,510
250	500	1	1,64020	-1,647828	1,647828	0,465	-0,465
500	100	-1	2,23320	-2,265280	2,265280	1,437	-1,437
500	100	0,001	2,15960	-2,181691	2,181691	1,023	-1,023
500	100	1	2,23340	-2,209591	2,209591	-1,066	1,066
500	500	-1	1,41900	-1,410486	1,410486	-0,600	0,600
500	500	0,001	1,50200	-1,504940	1,504940	0,196	-0,196
500	500	1	1,68250	-1,704185	1,704284	1,289	-1,295

Çeşitli Parametreler			Yan ve Mi [52]	Geliştirilen Program		% Fark	
R_1 / h_b	$\frac{G_{1h}}{P_b / h_b}$	β_1	a / h	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b	b_{1S}	b_{1E}
250	100	-1	1,41860	-1,413242	1,413242	-0,378	0,378
250	100	0,001	1,21710	-1,214601	1,214601	-0,205	0,205
250	100	1	1,06280	-1,063092	1,063092	0,028	-0,028
250	500	-1	0,60290	-0,602888	0,602888	-0,002	0,002
250	500	0,001	0,51060	-0,510774	0,510774	0,034	-0,034
250	500	1	0,44800	-0,448323	0,448323	0,072	-0,072
500	100	-1	1,98340	-1,967106	1,967106	-0,821	0,821
500	100	0,001	1,74180	-1,737079	1,737079	-0,271	0,271
500	100	1	1,55600	-1,562147	1,562147	0,395	-0,395
500	500	-1	0,88150	-0,882131	0,882131	0,072	-0,072
500	500	0,001	0,74240	-0,742444	0,742444	0,006	-0,006
500	500	1	0,64190	-0,641999	0,641999	0,015	-0,015

FD tabaka ile yarım düzlem ve homojen tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca oluşan temas gerilmelerinin farklı β_1 değerleri için mevcut çalışmada [52] verilen sonuçlar ile programdan elde edilen sonuçların karşılaştırılması Şekil 101 ve 102'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, her iki çözüm halinde elde edilen grafiklerin birbirleriyle uyumlu olduğu görülmektedir.



Şekil 101. Farklı β_1 değerleri için Yan ve Mi [52] ve program yardımıyla elde edilen FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$, $h_1 = h_2$, $G_{1h} / G_0 = 1$, $G_{1h} / G_2 = 1$, $R_1 / h_b = 1000$)



Şekil 102. Farklı β_1 değerleri için Yan ve Mi [52] ve program yardımıyla elde edilen homojen tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin karşılaştırılması ($\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$, $h_1 = h_2$, $G_{1h} / G_0 = 1$, $G_{1h} / G_2 = 1$, $R_1 / h_b = 1000$)

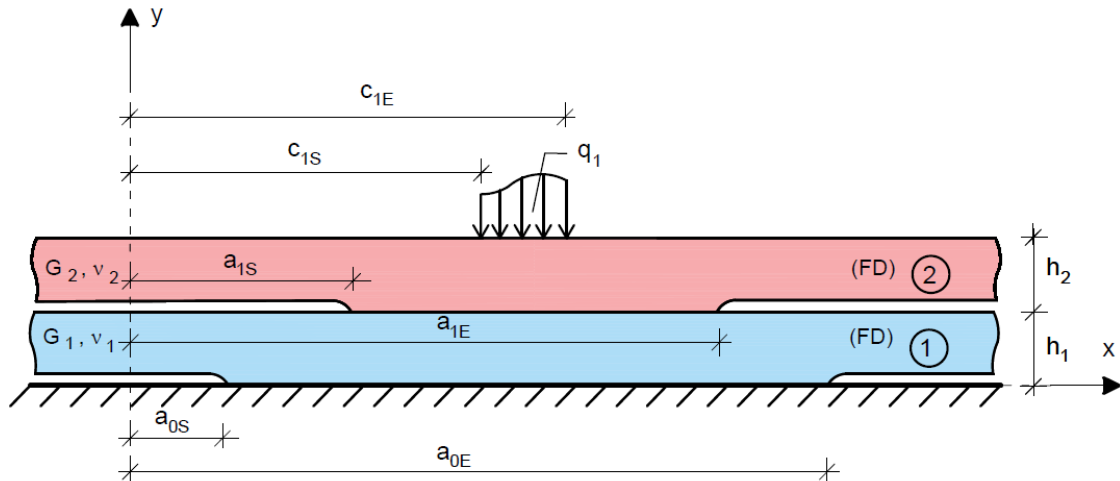
4.2. Literatürde Bulunmayan Çeşitli Temas Problemleri İçin Sayısal Sonuçlar

Burada, literatürde bulunmayan ve geliştirilen program yardımıyla çözülen beş farklı temas problemi için sayısal sonuçlar verilmektedir.

4.2.1. Rijit Temele Oturan FD İki Tabakanın Temas Problemi

Rijit temel üzerine oturan FD iki tabakanın temas probleminde üstteki tabakaya (c_{1S}, c_{1E}) aralığında $q_1(x)$ yayılı yükü $(Q_1 = \int_{c_{1S}}^{c_{1E}} q_1 dx = (c_{1E} - c_{1S})q_1)$ etkimektedir.

Tabakalar ve tabaka ile rijit temel arasındaki temas yüzeyleri yapışık değildir. Problem iki tabaka $(N=2)$ ve iki integral denklemden $(M=2)$ oluşmaktadır. Tabaka ile rijit temel ve tabakalar arasındaki temas yüzeyleri sırasıyla $[a_{0S}, a_{0E}]$ ve $[a_{1S}, a_{1E}]$ aralığında gerçekleşmektedir. Çözümde, uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = Q_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 103'de verilmektedir.



Şekil 103. Rijit temele oturan FD iki tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Problemin çözümüne ilişkin sayısal sonuçlar elde edilirken, bileşke kuvvetleri $Q_1 = 1$ olan ve $(-1 \leq x \leq 1)$ aralığında etki eden beş farklı yayılı yük durumu göz önünde

bulundurulmaktadır. Bu yükleme durumlarına ait yayılı yük fonksiyonları aşağıda verilmektedir

i. $q_1^i = \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$

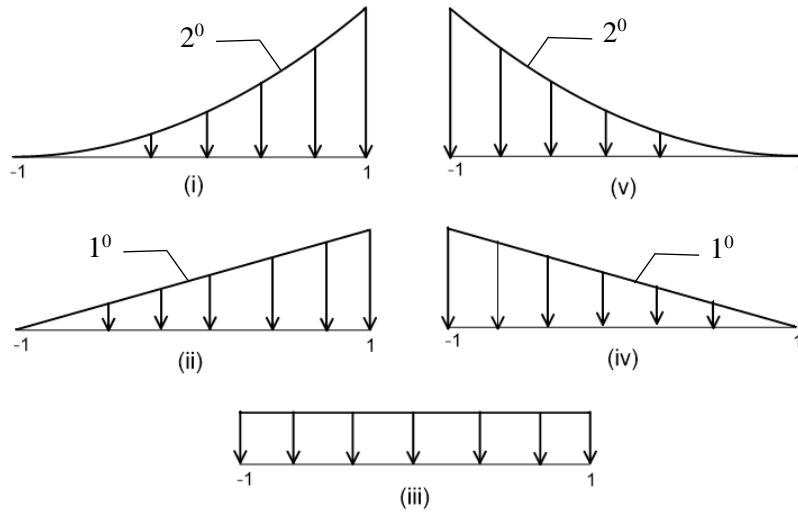
ii. $q_1^{ii} = 0.5x + 0.5$

iii. $q_1^{iii} = 0.5$

iv. $q_1^{iv} = -0.5x + 0.5$

v. $q_1^v = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{3}{8}$

Bu yükleme durumlarına ait fonksiyonlar aşağıdaki şekillerde verilmektedir.



Şekil 104. Yükleme durumlarına ait yayılı yük fonksiyonlarının grafikleri

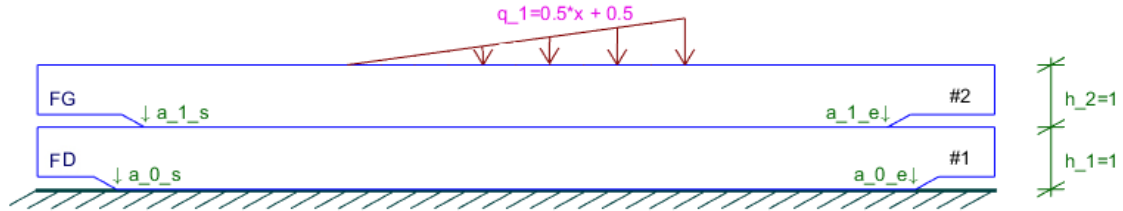
Bu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası ($G_{10}/G_{1h} = 2$, $G_{20}/G_{2h} = 2$, $G_{20}/G_{1h} = 1$, *Yükleme-(ii)*, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) aşağıda verilmektedir.

```

addLayer FG 100 50 0.25 1
addLayer FG 50 25 0.25 1
addFoundation RIGID
addReceding 0
addReceding 1
addLoad FUNC -1 1 0.5*x+0.5

```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 105 'de verilmektedir.



Şekil 105. Rijit temele oturan FD iki tabakanın temas problemi için programda oluşturulan model

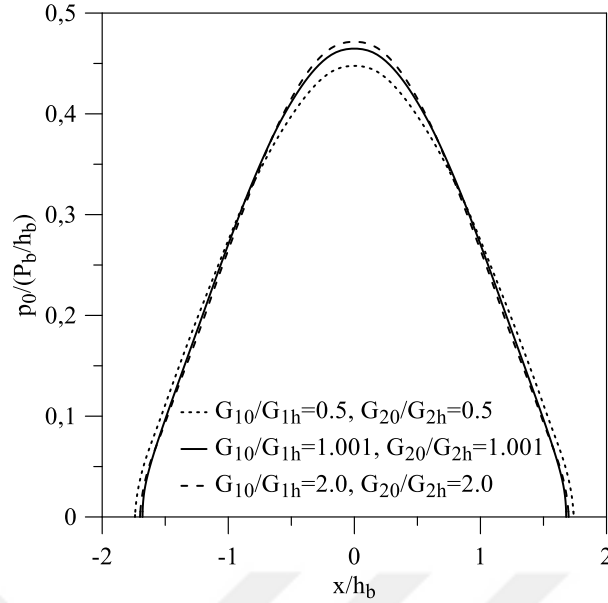
Tablo 11 'de, farklı yükleme durumları (i, \dots, v) ve kayma modülleri oranları ($G_{10}/G_{1h}, G_{20}/G_{2h}$) için temas uzunluklarının ($a_{0S}/h_b, a_{0E}/h_b, a_{1S}/h_b, a_{1E}/h_b$) değişimi verilmektedir. Tablodan görülebileceği gibi, yükleme durumu (i) 'den (v) 'e doğru ilerledikçe, diğer bir ifadeyle bileşke kuvvetin uygulama noktası sağdan sola doğru kaydıkça, temas yüzeylerinin başlangıç ve bitiş noktaları sola doğru kaymaktadır. $x = 0$ eksenine göre simetrik yükleme olan (iii) yükleme durumu için temas uzunlukları da $x = 0$ eksenine göre simetriktir. En büyük temas mesafeleri ($a_{0E}/h_b - a_{0S}/h_b, a_{1E}/h_b - a_{1S}/h_b$) düzgün yayılı yük durumu (iii) için oluşmakta ve yük fonksiyonunun derecesi arttıkça, yani uygulanan yayılı yük ağırlıklı olarak daha dar bir alana toplandığında, temas uzunlukları azalmaktadır. $x = 0$ eksenine göre birbirinin simetriği olan (i) ile (v) ve (ii) ile (iv) yükleme durumu ikililerine ilişkin temas uzunlukları incelendiğinde, temas uzunluklarının $x = 0$ eksenine göre anti simetrik olduğu görülmektedir. Tabakaların alt yüzeylerinin kayma modüllerinin üst yüzeylerin kayma modüllerine oranı arttıkça, diğer bir ifadeyle tabakanın üst yüzeyinin rijitliği alt yüzeyine göre azaldıkça, temas yüzeylerinin başlangıç noktaları

sağa doğru ilerlerken temas yüzeylerinin bitiş noktaları sola doğru kaymakta ve temas uzunlukları azalmaktadır.

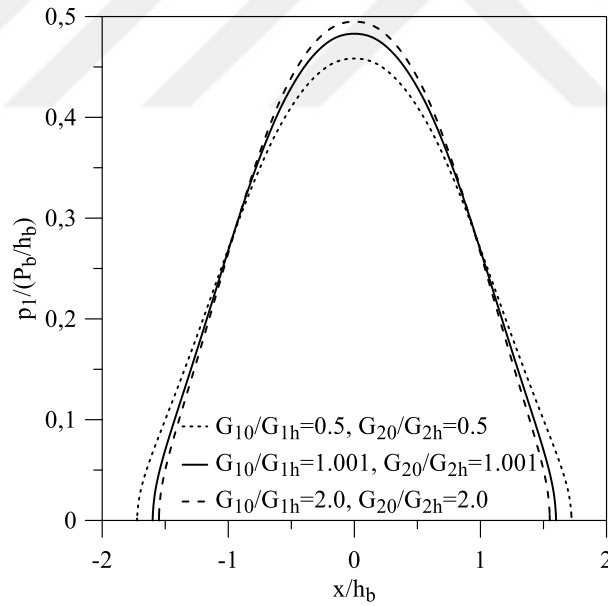
Tablo 11. Farklı yükleme ve kayma modülü oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi
($G_{20}/G_{1h} = 1$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)

Yükleme Durumu	$G_{10}/G_{1h} = 0.5$, $G_{20}/G_{2h} = 0.5$			
	a_{0S}/h_b	a_{0E}/h_b	a_{1S}/h_b	a_{1E}/h_b
i	-1,07517836	2,03806511	-1,06952312	2,01141136
ii	-1,31725314	1,93821577	-1,31432633	1,91457730
iii	-1,73889030	1,73889025	-1,72353422	1,72353485
iv	-1,93821301	1,31724594	-1,91457204	1,31432128
v	-2,03806500	1,07517846	-2,01141127	1,06952320
Yükleme Durumu	$G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$			
	a_{0S}/h_b	a_{0E}/h_b	a_{1S}/h_b	a_{1E}/h_b
i	-0,99769762	1,94957242	-0,92808675	1,84163882
ii	-1,25485704	1,86073566	-1,19045384	1,75891682
iii	-1,70108828	1,70108841	-1,55186176	1,55186192
iv	-1,86073383	1,25485861	-1,75891559	1,19045496
v	-1,94958096	0,99769882	-1,84162445	0,92808871
Yükleme Durumu	$G_{10}/G_{1h} = 2$, $G_{20}/G_{2h} = 2$			
	a_{0S}/h_b	a_{0E}/h_b	a_{1S}/h_b	a_{1E}/h_b
i	-0,99550931	1,93107813	-0,87186279	1,75337647
ii	-1,26529914	1,8505551	-1,14840226	1,68296965
iii	-1,70099774	1,70099741	-1,55128576	1,55128563
iv	-1,85060066	1,26537414	-1,68297247	1,14842012
v	-1,93107793	0,99550934	-1,75337599	0,87186276

Alt tabaka ve rijit temel ile tabakalar arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmelerinin farklı kayma modülü oranları için değişimi sırasıyla Şekil 106 ve 107 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, simetrik yükleme durumu (iii) için temas gerilmelerinin $x=0$ eksenine göre simetrik olduğu ve temas gerilmelerinin en büyük değerinin bileşke kuvvetin de bulunduğu $x=0$ simetri ekseninde olduğu görülmektedir. G_{10}/G_{1h} ve G_{20}/G_{2h} oranları arttıkça temas gerilmelerinin en büyük değerleri de artmaktadır.



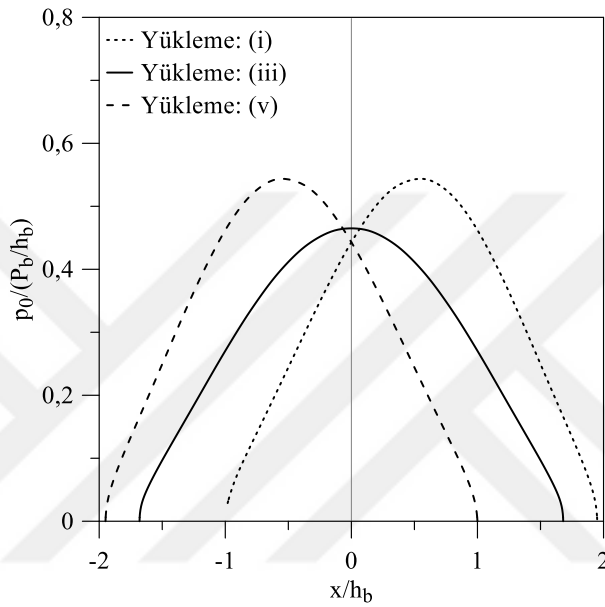
Şekil 106. Farklı kayma modülü oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabaka ile rijit temel arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, *Yükleme (iii)*, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)



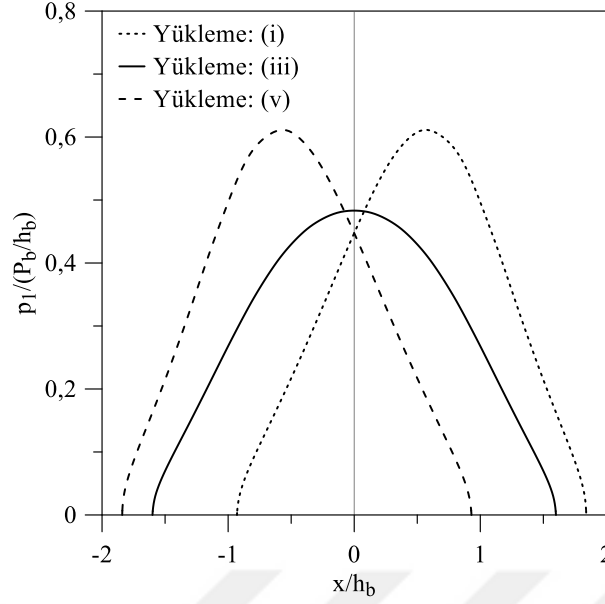
Şekil 107. Farklı kayma modülü oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, *Yükleme (iii)*, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)

Alt tabaka ve rijit temel ile tabakalar arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmeleri farklı yüklenme durumları için sırasıyla Şekil 108 ve 109 'da verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, düzgün yayılı yük durumu (iii) için en büyük temas

gerilmesinin $x=0$ simetri eksenini üzerinde olduğu görülmektedir. Diğer yüklemelerinde ise; en büyük temas gerilmesinin bulunduğu noktanın yayılı yükün şiddetinin en büyük olduğu eksene doğru kaydığı görülmektedir. $x=0$ eksenine göre birbirinin simetriği olan (i) ve (v) nolu yüklemeler için elde edilen temas gerilmelerinin de $x=0$ eksenine göre simetrik olduğu yine şekillerden görülmektedir.



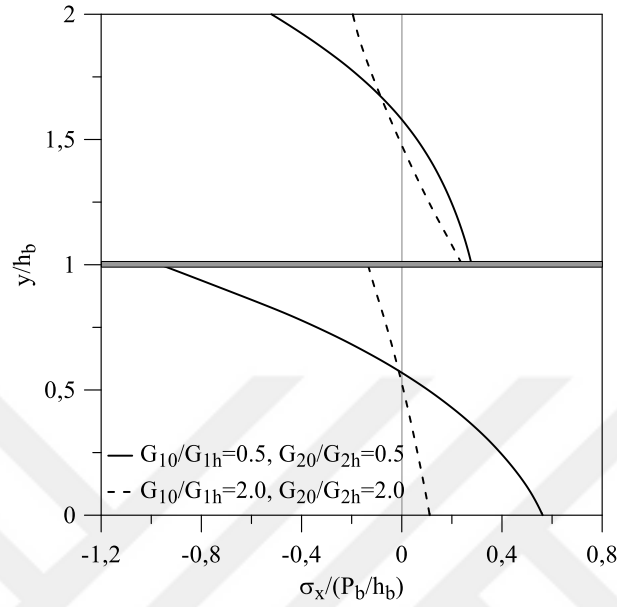
Şekil 108. Farklı yüklemeler için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabaka ile rijit temel arasındaki temas gerilmelerinin değışimi ($G_{20}/G_{1h}=1$, $G_{10}/G_{1h}=1.001$, $G_{20}/G_{2h}=1.001$, $h_2/h_1=1$, $\kappa_1=\kappa_2=\kappa_0=2$)



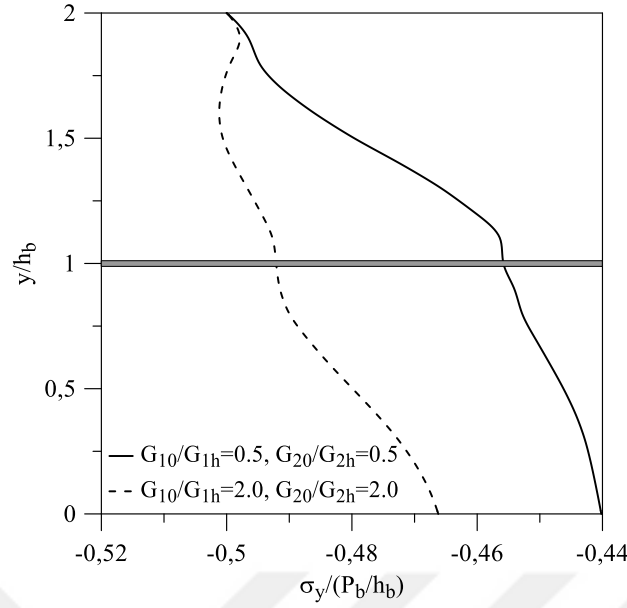
Şekil 109. Farklı yükleme durumları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin tabakalar arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, $G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)

Derinlik boyunca ($0 \leq y \leq h_1 + h_2$) meydana gelen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin farklı G_{10}/G_{1h} ve G_{20}/G_{2h} oranları için değişimi, sırasıyla Şekil 110-112 'de verilmektedir. σ_x ve σ_y normal gerilmeleri geometri ve yüklemeye göre simetri eksenini olan $x = 0$ eksenini için elde edilirken, kayma gerilmeleri simetri ekseninde sıfır olduğundan $x = 0.5$ eksenini için elde edilmiştir. Şekiller incelendiğinde, tabakaların üst bölgelerinde σ_x normal gerilmelerinin basınç, alt bölgelerde ise gerilmelerin çekme olduğu görülmektedir. Diğer bir ifadeyle, tabakalar yapışık olmadığından her bir tabaka bağımsız olarak şekil değiştirmekte ve uygulanan yük altında birbirinden bağımsız olarak eğilmeye maruz kalmaktadır. G_{10}/G_{1h} ve G_{20}/G_{2h} oranları arttıkça, σ_x normal gerilmeleri azalmaktadır. Benzer şekilde, tabakaların üst yüzeylerinin rijitliği alt yüzeyinkine göre arttıkça, σ_y normal gerilmelerinin azaldığı görülmektedir. Tabakalı sistemin üst yüzeyindeki ($y = h_1 + h_2$) σ_y değeri o yüzeydeki yayılı yükün şiddetine eşit olmaktadır. τ_{xy} kayma gerilmeleri yapışık olmayan temas yüzeylerinde sıfıra eşit olmakta ve sınır şartlarını sağlamaktadır. σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin ortalama değerleri üstteki tabakada alttaki tabakaya göre daha büyüktür.

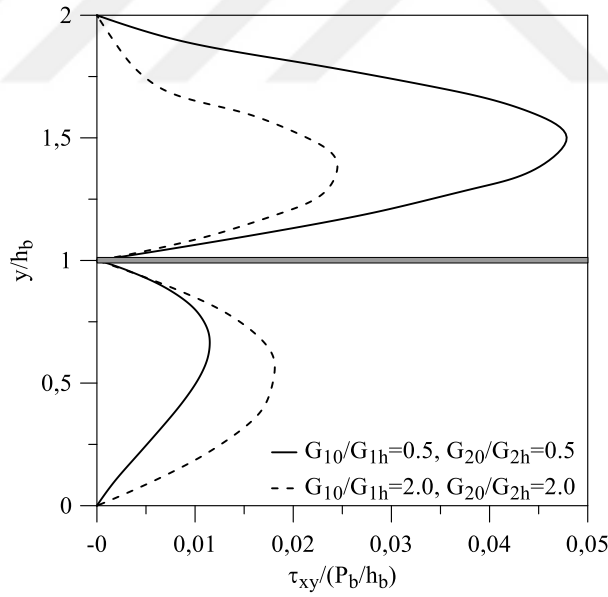
Ancak, G_{10}/G_{1h} ve G_{20}/G_{2h} oranları arttıkça tabakalara ilişkin ortalama gerilme değerleri arasındaki fark azalmaktadır.



Şekil 110. Farklı G_{10}/G_{1h} ve G_{20}/G_{2h} oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x=0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h}=1$, *Yükleme (iii)*, $h_2/h_1=1$, $\kappa_1=\kappa_0=2$)

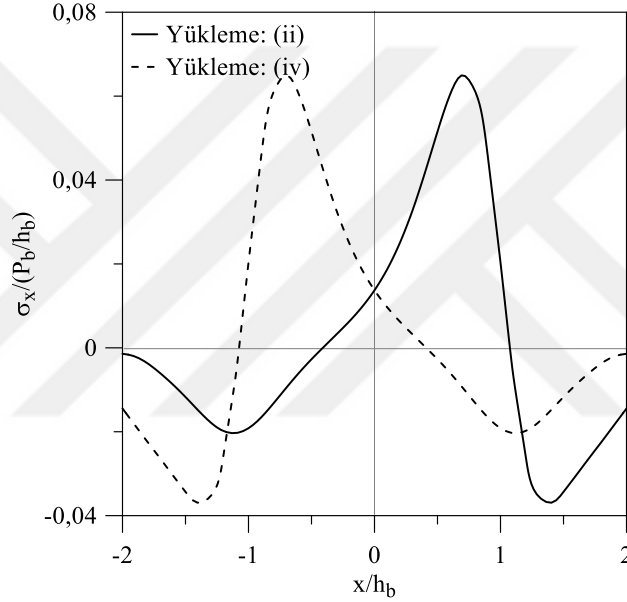


Şekil 111. Farklı G_{10}/G_{1h} ve G_{20}/G_{2h} oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x=0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h}=1$, *Yükleme (iii)*, $h_2/h_1=1$, $\kappa_1=\kappa_0=2$)

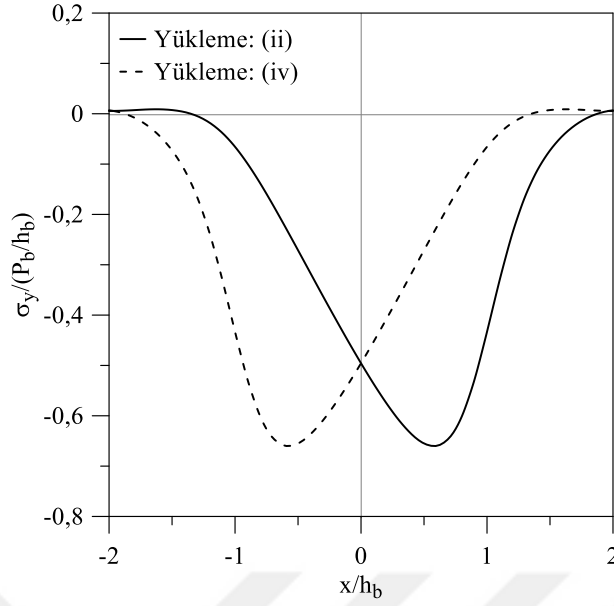


Şekil 112. Farklı G_{10}/G_{1h} ve G_{20}/G_{2h} oranları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x=0,5$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h}=1$, *Yükleme (iii)*, $h_2/h_1=1$, $\kappa_1=\kappa_0=2$)

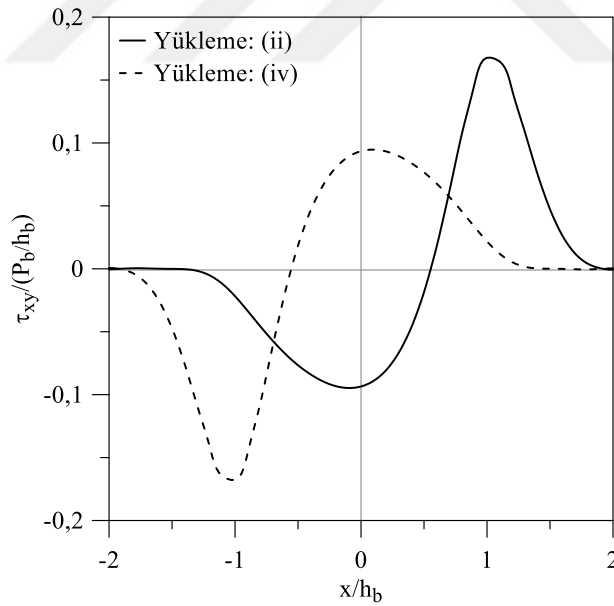
Üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca ($-2 \leq x \leq 2$, $y = h_1 + h_2/2$) σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin farklı yükleme durumları için değişimi sırasıyla Şekil 113-115 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, en büyük gerilme değerlerinin yayılı yükün şiddetinin en büyük olduğu noktadan geçen eksenlere yaklaştığı görülmektedir. Yayılı yükün etkidiği bölgeden uzaklaşıldıkça gerilme değerleri sıfıra yakınsamaktadır. Yükleme durumu (ii) ve (iv) de olduğu gibi σ_x ve σ_y normal gerilmeleri de $x=0$ eksenine göre simetrik olup τ_{xy} kayma gerilmeleri anti-simetriktir.



Şekil 113. Farklı yükleme durumları için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, $G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)



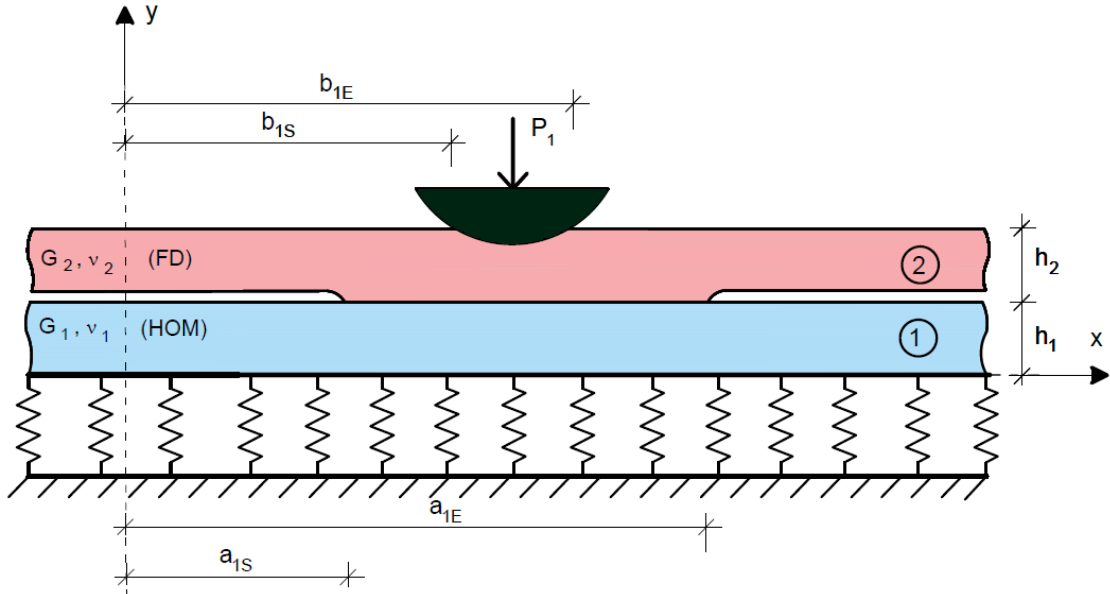
Şekil 114. Farklı yüklemeler için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, $G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)



Şekil 115. Farklı yüklemeler için rijit temele oturan FD iki tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($G_{20}/G_{1h} = 1$, $G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)

4.2.2. Winkler Temeline Oturan İki Tabakanın Temas Problemi

Burada, Winkler temeli üzerine oturan iki tabakanın temas problemi ele alınmıştır. Alttaki tabaka homojen malzemeden oluşurken üstteki tabaka FD malzemeden oluşmaktadır. Üstteki tabakaya P_1 tekil yükü şekil fonksiyonu eğrisel olarak değişen rijit bir blok aracılığıyla etkimektedir. Tabakalar arasındaki temas yüzeyi yapışık olmayıp, problem iki tabaka ($N=2$) ve iki integral denklemden ($M=2$) oluşmaktadır. Tabakalar arasındaki ve üst tabaka ile rijit blok arasındaki temas sırasıyla $[a_{1S}, a_{1E}]$ ve $[b_{1S}, b_{1E}]$ aralığında gerçekleşmektedir. Çözümde, uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 116 'da verilmektedir.



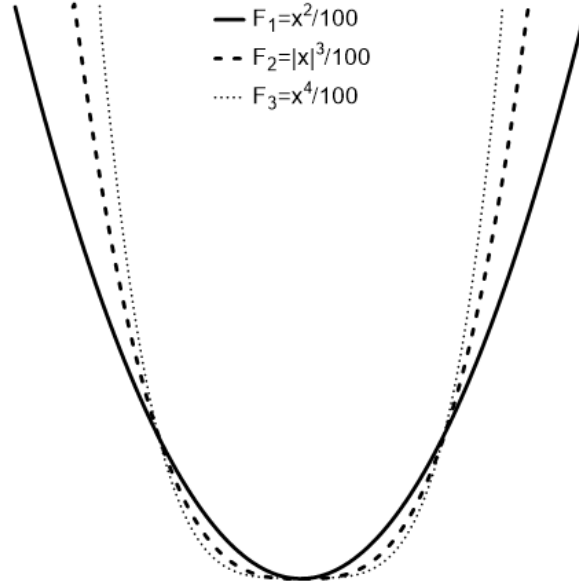
Şekil 116. Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Problemin çözümüne ilişkin sayısal sonuçlar elde edilirken rijit blok profili için aşağıda verilen üç farklı şekil fonksiyonu göz önünde bulundurulmuştur.

- i. $F_1 = x^2 / 100$
- ii. $F_2 = |x|^3 / 100$

iii. $F_3 = x^4 / 100$

Bu şekil fonksiyonlarına bağlı rijit blok profillerine ait grafikler Şekil 117 'de verilmektedir.

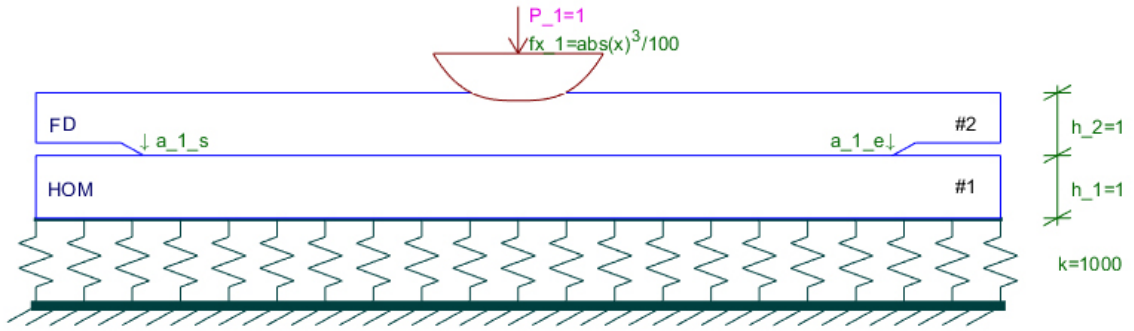


Şekil 117. Rijit blok profili şekil fonksiyonlarına ilişkin grafikler

Bu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası ($G_{10}/G_{1h} = 2$, $G_{20}/G_{2h} = 2$, $G_{20}/G_{1h} = 1$, $k_y/G_{10} = 10$, Şekil fonksiyonu F_2 , $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$) aşağıda verilmektedir.

```
addLayer HOM 100 100 0.25 1
addLayer FG 100 50 0.25 1
addFoundation WINKLER 1000
addReceding 1
addLoad PUNCH 1 FUNC 0 abs(x)^3/100
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 118 'de verilmektedir.



Şekil 118. Winkler temele oturan temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model

Tablo 12’de, farklı rijit blok profilleri (f_x) ile k_y/G_1 ve G_{20}/G_{2h} oranları için tabakalar arasındaki ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas uzunlukları verilmektedir. Tablo incelendiğinde, geometri ve yükleme $x=0$ eksenine göre simetrik olduğundan temas uzunluklarının da bu eksene göre simetrik olduğu görülmektedir. Rijit blok profiline ait şekil fonksiyonunun derecesi arttıkça temas uzunlukları büyümekte ve temas bölgesi genişlemektedir. Buna karşılık, Winkler temelin rijitliği arttıkça temas uzunlukları azalmakta ve temas bölgesi küçülmektedir. G_{20}/G_{2h} oranı arttıkça (üst tabakanın üst yüzeyinin rijitliği alt yüzeyinkine göre azaldıkça) tabakalar arasındaki temas uzunlukları artarken, FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas uzunlukları azalmaktadır.

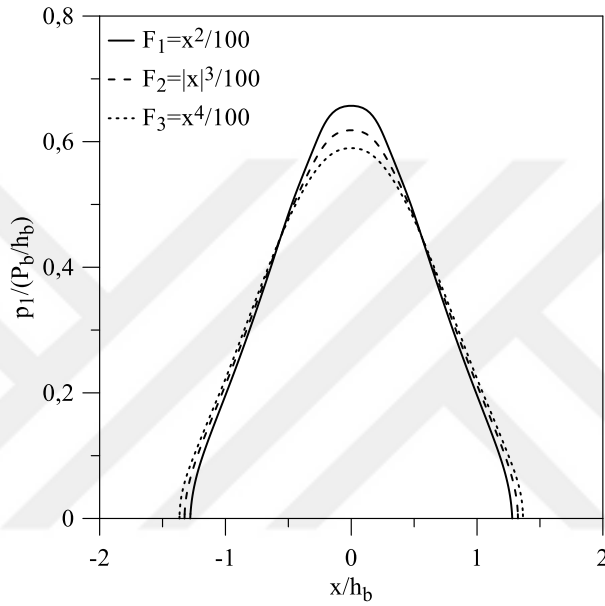
Tablo 12. Farklı rijit blok profili şekil fonksiyonları ile k_y / G_1 ve G_{20} / G_{2h} kayma modülü oranları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100 \quad G_{20} / G_1 = 1, \quad h_2 / h_1 = 1, \quad \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2 \right)$$

k_y / G_1	Şekil Fonksiyonu	$G_{20} / G_{2h} = 2$			
		a_{1S} / h_b	a_{1E} / h_b	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b
1	$x^2/100$	-1,47524130	1,47524135	-0,64263009	0,64263008
1	$ x ^3/100$	-1,51606268	1,51606270	-0,68973804	0,68973808
1	$x^4/100$	-1,55032411	1,55032411	-0,72794600	0,72794601
10	$x^2/100$	-1,27634401	1,27674401	-0,61675083	0,61675083
10	$ x ^3/100$	-1,32490327	1,32490327	-0,66837438	0,66837438
10	$x^4/100$	-1,36550399	1,36550432	-0,70942329	0,70942324
100	$x^2/100$	-1,24811436	1,24811462	-0,61252002	0,61252000
100	$ x ^3/100$	-1,29730259	1,29730259	0,66505661	0,66505661
100	$x^4/100$	-1,33914803	1,33914824	-0,70637812	0,70637811
k_y / G_1	Şekil Fonksiyonu	$G_{20} / G_{2h} = 1.001$			
		a_{1S} / h_b	a_{1E} / h_b	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b
1	$x^2/100$	-1,51058107	1,51058107	-0,52317737	0,52317737
1	$ x ^3/100$	-1,55390734	1,55390731	-0,60407835	0,60407836
1	$x^4/100$	-1,59159694	1,59159690	-0,65996028	0,65996033
10	$x^2/100$	-1,27657526	1,27657527	-0,50120949	0,50120949
10	$ x ^3/100$	-1,32574660	1,32574651	-0,58310673	0,58310675
10	$x^4/100$	-1,36860880	1,36860865	-0,64049109	0,64049114
100	$x^2/100$	-1,24250233	1,24250234	-0,49776376	0,49776376
100	$ x ^3/100$	-1,29254968	1,29254968	-0,57973423	0,57973423
100	$x^4/100$	-1,33621375	1,33621372	-0,63731227	0,63731228
k_y / G_1	Şekil Fonksiyonu	$G_{20} / G_{2h} = 0.5$			
		a_{1S} / h_b	a_{1E} / h_b	b_{1S} / h_b	b_{1E} / h_b
1	$x^2/100$	-1,58483982	1,58483982	-0,41446173	0,41446173
1	$ x ^3/100$	-1,62424692	1,62424649	-0,52562570	0,52562590
1	$x^4/100$	-1,66288645	1,66288645	-0,59781019	0,59781020
10	$x^2/100$	-1,31384430	1,31384434	-0,39705568	0,39705568
10	$ x ^3/100$	-1,35880230	1,35880241	-0,50551183	0,50551186
10	$x^4/100$	-1,40108865	1,40108865	-0,57776086	0,57776086
100	$x^2/100$	-1,27314454	1,27314454	-0,39423639	0,39423639
100	$ x ^3/100$	-1,31972668	1,31972681	-0,50228178	0,50228178
100	$x^4/100$	-1,36265912	1,36265913	-0,57451041	0,57451041

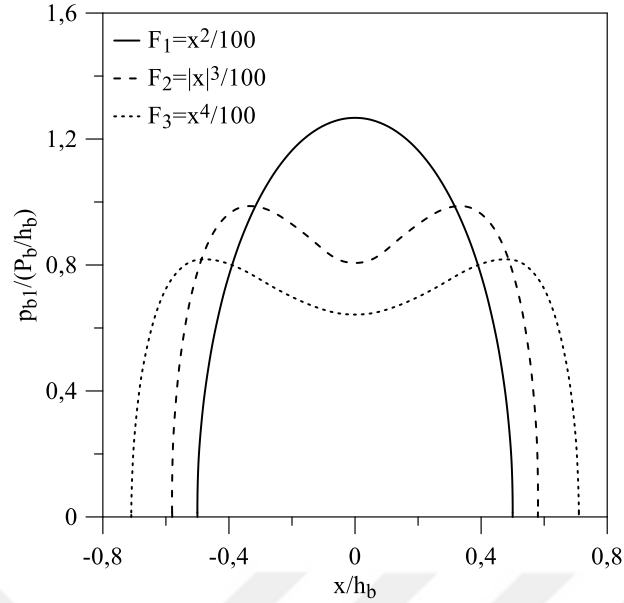
Tabakalar ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmeleri farklı rijit blok profillerine ait şekil fonksiyonları için sırasıyla Şekil 119 ve 120 'de verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi, tabakalar arasındaki en büyük

temas gerilmeleri $x = 0$ simetri ekseninde meydana gelmekte ve rijit blok profilinin şekil fonksiyonunun derecesi arttıkça bu değerler küçülmektedir. Benzer şekilde, rijit blok ile tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değerleri de şekil fonksiyonunun derecesi arttıkça küçülmektedir. Ancak, temas gerilmelerinin en büyük değerlerini her zaman simetri ekseninde meydana gelmemekte, şekil fonksiyonunun derecesi arttıkça simetri ekseninden uzaklaşmaktadır.



Şekil 119. Farklı rijit blok profili şekil fonksiyonları için Winkler temelinde oturan iki tabaka arasındaki temas gerilmelerinin

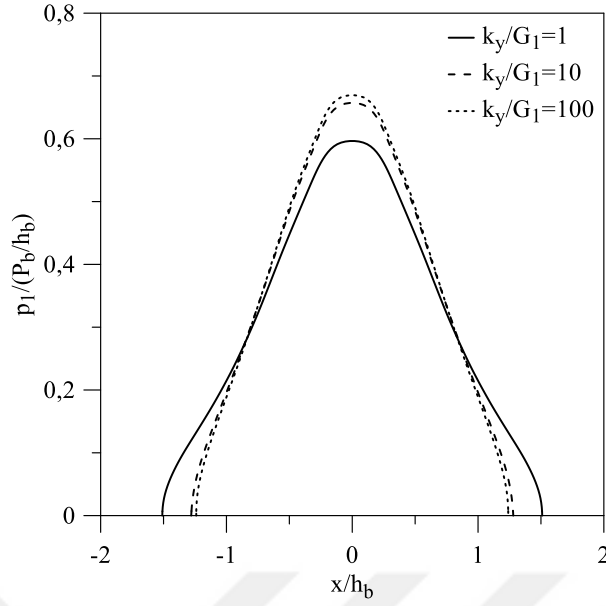
değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, $\frac{k_y}{G_1} = 10$, $G_{20}/G_1 = 1$,
 $G_{20}/G_{2h} = 1.001$, $h_2/h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)



Şekil 120. Farklı rijit blok profili şekil fonksiyonları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$,

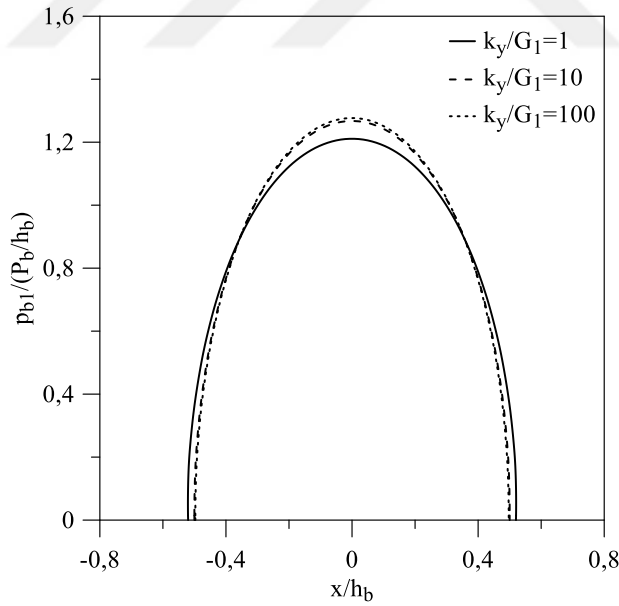
$$\frac{k_y}{G_1} = 10, G_{20}/G_1 = 1, G_{20}/G_{2h} = 1.001, h_2/h_1 = 1, \\ \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2)$$

Tabakalar arasındaki ve FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmeleri Winkler temeline ilişkin yay sabitinin alt tabakanın kayma modülüne oranının farklı değerleri için sırasıyla Şekil 121 ve 122 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, temas gerilmelerinin en büyük değerinin simetri ekseninde meydana geldiği görülmektedir. k_y/G_1 oranı arttıkça en büyük temas gerilmesinin değeri küçülmektedir. k_y/G_1 oranının temas gerilmelerine etkisi, tabakalar arası temasta daha büyük olmaktadır.



Şekil 121. Farklı k_y / G_1 oranları için Winkler temeline oturan iki tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

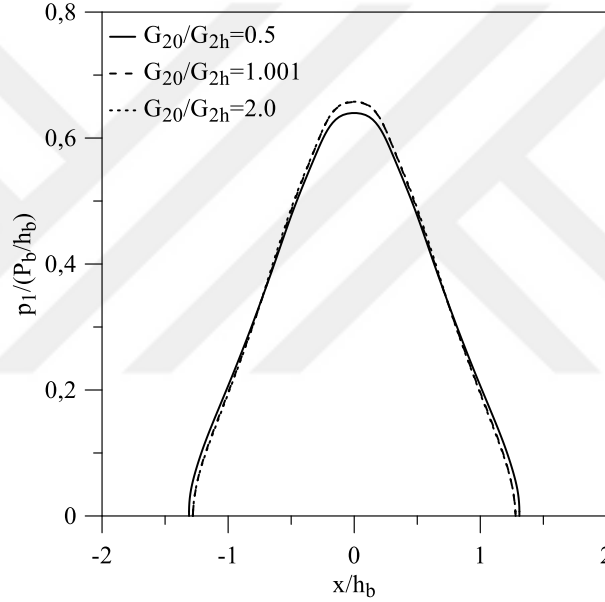
$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100, \text{ Şekil fonksiyonu } F_1, G_{20} / G_1 = 1, G_{20} / G_{2h} = 1.001, h_2 / h_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2 \right)$$



Şekil 122. Farklı k_y / G_1 oranları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100, \text{ Şekil fonksiyonu } F_1, G_{20} / G_1 = 1, G_{20} / G_{2h} = 1.001, h_2 / h_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2 \right)$$

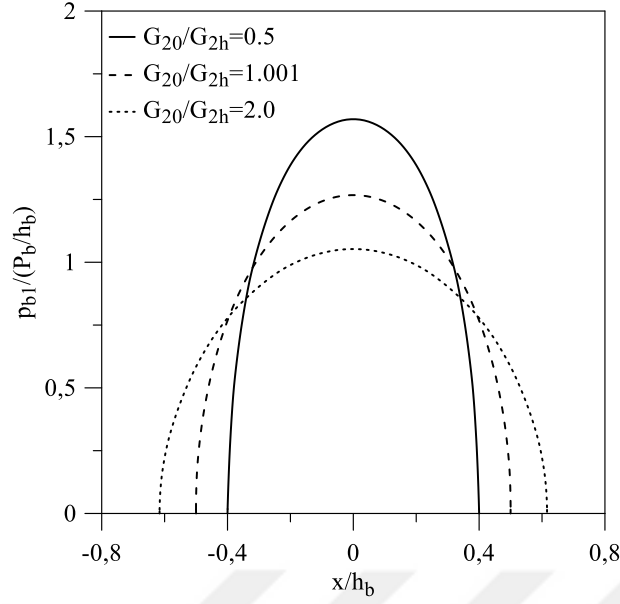
Tabakalar arasındaki ve FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmeleri farklı G_{20}/G_{2h} oranları için sırasıyla Şekil 123 ve 124 'de verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi, temas gerilmelerinin en büyük değeri simetri eksenini üzerinde oluşmaktadır. G_{20}/G_{2h} oranı arttıkça tabakalar arasındaki temas yüzeyinde meydana gelen en büyük temas gerilmeleri azalmaktadır. Buna karşılık, FD tabaka ile rijit blok arasında meydana gelen en büyük temas gerilmeleri azalmaktadır. G_{20}/G_{2h} oranındaki değişimin temas gerilmelerine etkisi FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyinde daha belirgin olmaktadır.



Şekil 123. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan iki tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100, \text{ Şekil fonksiyonu } F_1, G_{20}/G_1 = 1, \right.$$

$$\left. k_y/G_1 = 10, h_2/h_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2\right)$$

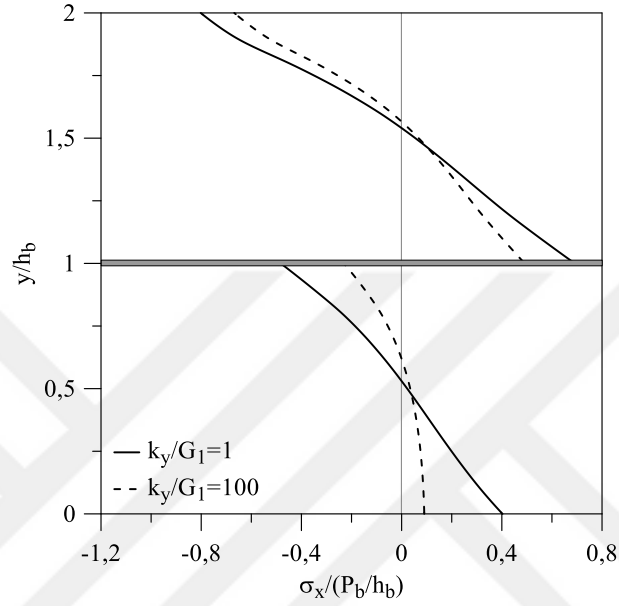


Şekil 124. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan iki tabakaya ilişkin FD tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu

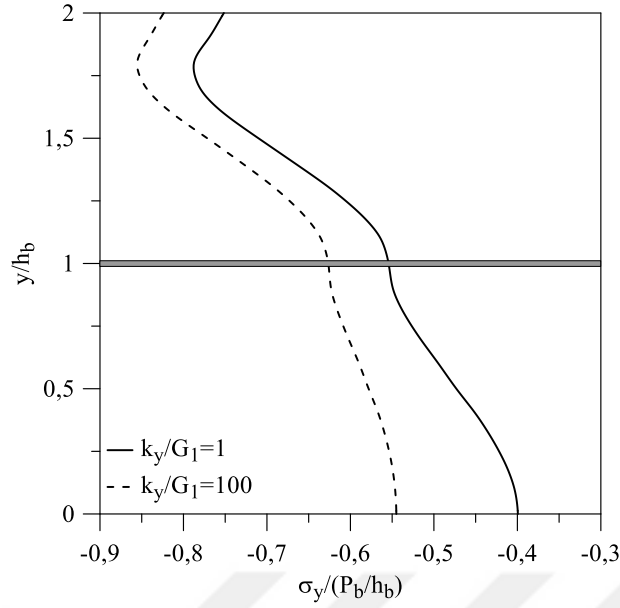
$$F_1, G_{20}/G_1 = 1, \frac{k_y}{G_1} = 10, h_2/h_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2)$$

Derinlik boyunca ($0 \leq y \leq h_1 + h_2$) meydana gelen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin Winkler temeli sabitinin alt tabakanın kayma modülüne oranının (k_y/G_1) farklı değerleri için değişimi, sırasıyla Şekil 125-127 'de verilmektedir. σ_x ve σ_y normal gerilmeleri $x = 0$ eksenini için elde edilirken, τ_{xy} kayma $x = 0,5$ eksenini için elde edilmiştir. Şekiller incelendiğinde, k_y/G_1 oranı arttıkça σ_x normal gerilmelerinin azaldığı, buna karşılık σ_y normal gerilmelerinin arttığı görülmektedir. Tabakalar arasındaki temas yüzeyi yapışık olmadığından tabakalar birbirinden bağımsız olarak eğilmeye maruz kalmakta ve tabakaların üst yüzeylerinde negatif σ_x normal gerilmeleri oluşurken alt yüzeylerinde pozitif σ_x gerilmeleri oluşmaktadır. σ_y normal gerilmelerinin en büyük değeri yaklaşık olarak $y = h_1 + 0,75h_2$ yüksekliğinde meydana gelmektedir. τ_{xy} kayma gerilmeleri yapışık olmayan temas yüzeylerinde sifira eşit olmakta ve bu yüzeylerde sınır şartlarını sağlamaktadır. k_y/G_1 oranının artmasıyla kayma gerilmelerinin en büyük değerleri azalmakta ve bu orana ilişkin değişim alt tabakada daha belirgin olmaktadır. Buna ek olarak,

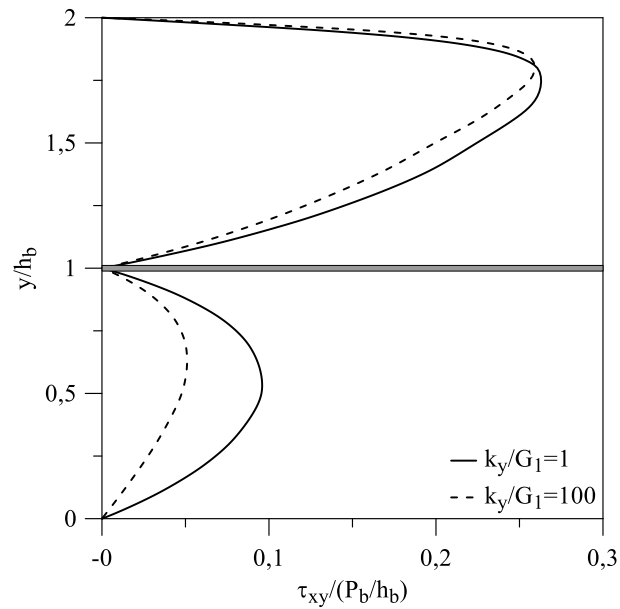
kayma gerilmesinin en büyük değerin meydana geldiği nokta, k_y / G_1 oranı arttıkça tabakanın üst yüzeyine yaklaşmaktadır. Üst tabakada meydana gelen gerilmelerin ortalama değerleri, alt tabakada meydana gelen gerilmelerin ortalamasından daha büyük olmaktadır.



Şekil 125. Farklı k_y / G_1 oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_2 , $G_{20} / G_1 = 1$, $G_{20} / G_{2h} = 1.001$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)

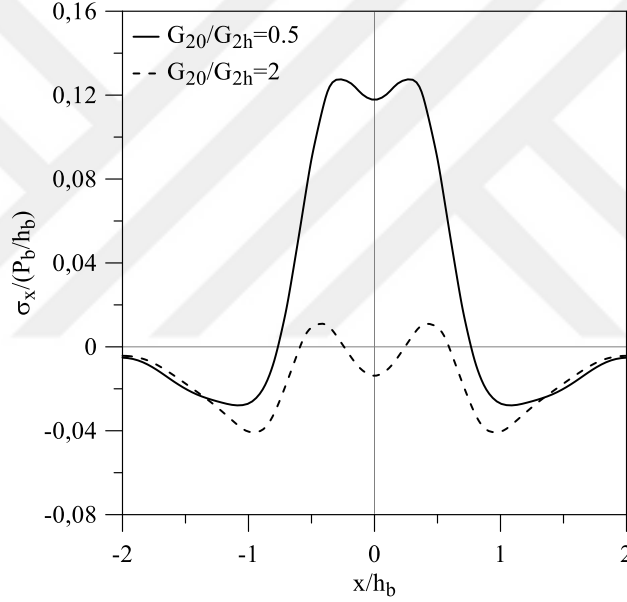


Şekil 126. Farklı k_y / G_1 oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_2 , $G_{20} / G_1 = 1$, $G_{20} / G_{2h} = 1.001$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)



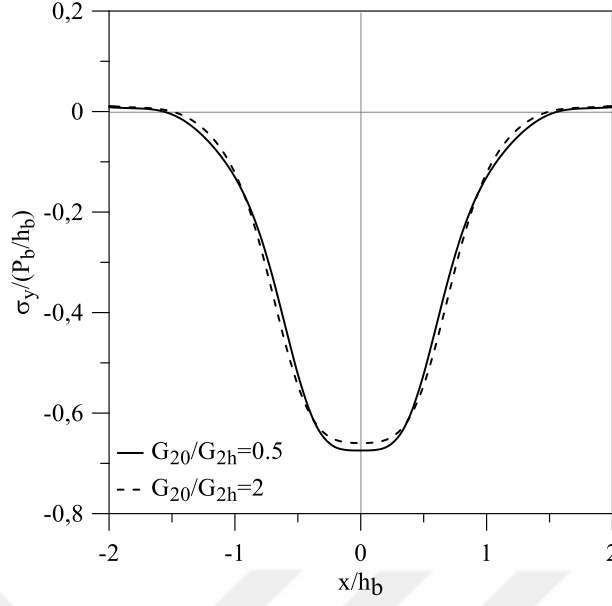
Şekil 127. Farklı k_y / G_1 oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin τ_{xy} normal gerilmelerinin $x = 0.5$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100$, Şekil fonksiyonu F_2 , $G_{20} / G_1 = 1$, $G_{20} / G_{2h} = 1.001$, $h_2 / h_1 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2$)

Üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca ($-2 \leq x \leq 2$, $y = h_1 + h_2/2$) σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin farklı G_{20}/G_{2h} oranları için değişimi, sırasıyla Şekil 128-130 'da verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, $x=0$ simetri eksenine göre σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin simetrik olduğu, τ_{xy} kayma gerilmelerinin ise anti-simetrik olduğu görülmektedir. G_{20}/G_{2h} oranının artmasıyla oluşan en büyük gerilmeler azalmakta, bu oran nedeniyle gerilmelerde meydana gelen değişim en belirgin olarak σ_x normal gerilmelerinde oluşmaktadır. Yüklemin bulunduğu bölgeden uzaklaştıkça, gerilmeler her üç gerilme bileşeninde de sifıra yakınsamaktadır.



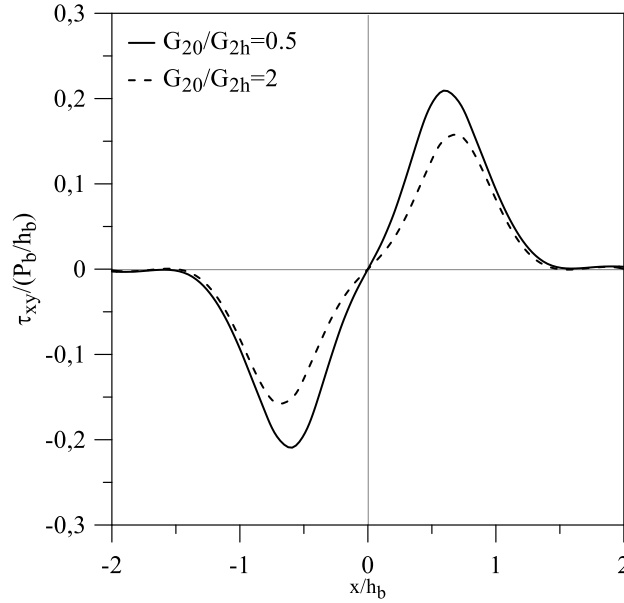
Şekil 128. Farklı G_{20}/G_{2h} oranları için Winkler temeline oturan temas problemine ilişkin σ_x normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 100, \text{ Şekil fonksiyonu } F_3, G_{20}/G_1 = 1, \right. \\ \left. k_y/G_1 = 10, h_2/h_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2 \right)$$



Şekil 129. Farklı G_{20} / G_{2h} oranları için Winkler temele oturan temas problemine ilişkin σ_y normal gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenı boyunca değışimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100, \text{ Şekil fonksiyonu } F_3, G_{20} / G_1 = 1, \right. \\ \left. k_y / G_1 = 10, h_2 / h_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2 \right)$$

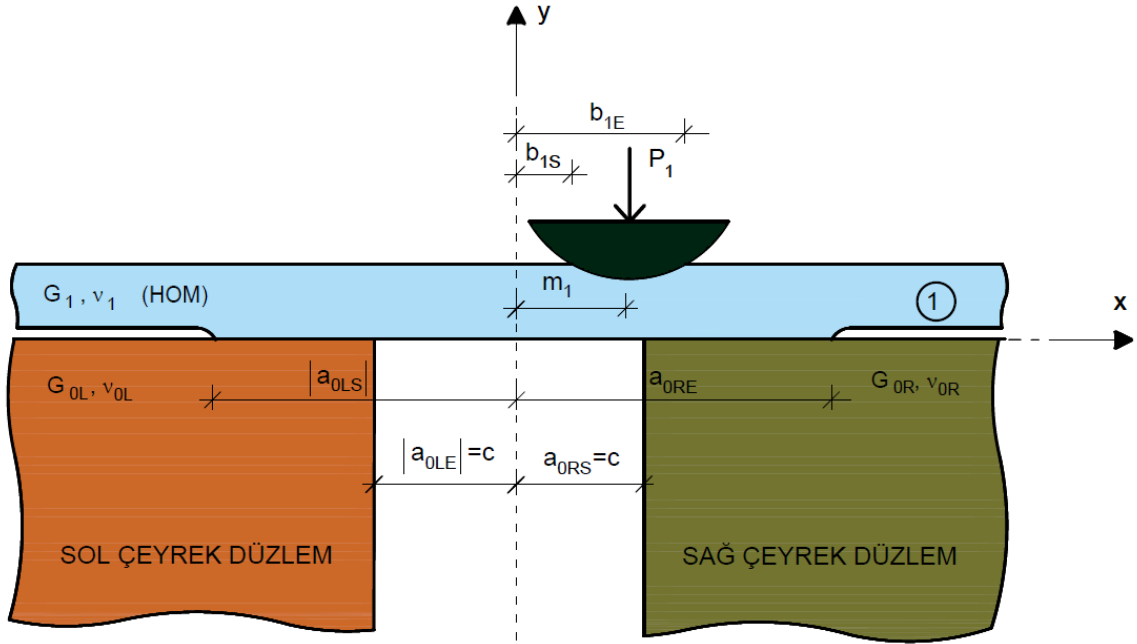


Şekil 130. Farklı G_{20} / G_{2h} oranları için Winkler temele oturan temas problemine ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin üst tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenı boyunca değışimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 100, \text{ Şekil fonksiyonu } F_3, G_{20} / G_1 = 1, \right. \\ \left. k_y / G_1 = 10, h_2 / h_1 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_0 = 2 \right)$$

4.2.3. Çeyrek Düzlemlere Oturan Homojen Bir Tabakanın Temas Problemi

Burada; malzeme özellikleri farklı olabilen iki çeyrek düzlem üzerine oturan homojen bir tabakanın temas problemi incelenmiştir. Tabakaya $x = 0$ eksenine m_1 kadar uzaklıkta P_1 tekil yükü yarıçapı R_1 olan rijit dairesel bir blok aracılığıyla etkimektedir. Çeyrek düzlemlerin $x = 0$ eksenine uzaklığı c olup tabakalar ile çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeyleri yapışık değildir. Problem bir tabaka ($N=1$) ve üç integral denklemden ($M=3$) oluşmaktadır. Tabaka ile sağ çeyrek düzlem, tabaka ile sol çeyrek düzlem ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas sırasıyla $[a_{0RS} = c, a_{0RE}]$, $[a_{0LS}, a_{0LE} = -c]$ ve $[b_{1S}, b_{1E}]$ aralığında gerçekleşmektedir. Çözümde, uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 131’de verilmektedir.



Şekil 131. Çeyrek düzlemlere oturan homojen bir tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

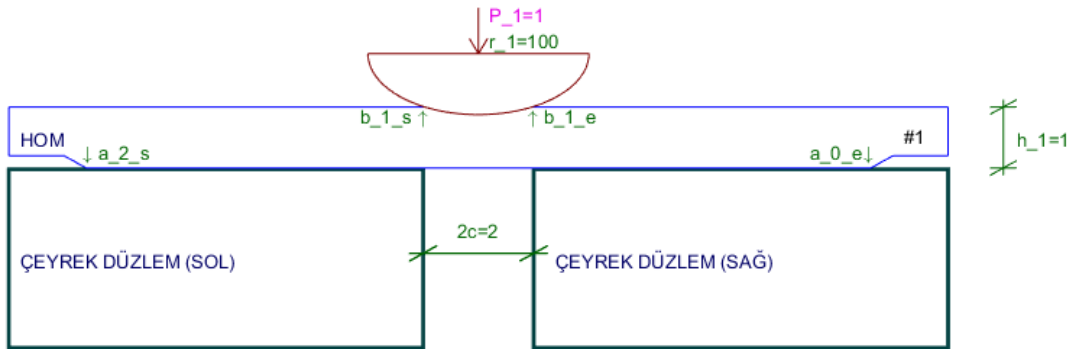
Bu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, R_1/h_b = 100, G_1/G_{0R} = 1, G_{0R}/G_{0L} = 2, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2, m_1/h_b = 0$) aşağıda verilmektedir.

```

addLayer HOM 500 0.25      1
addFoundation QP 500 0.25 250 0.25 1
addLoad PUNCH 1 CIR 0 100

```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 132' de verilmektedir.



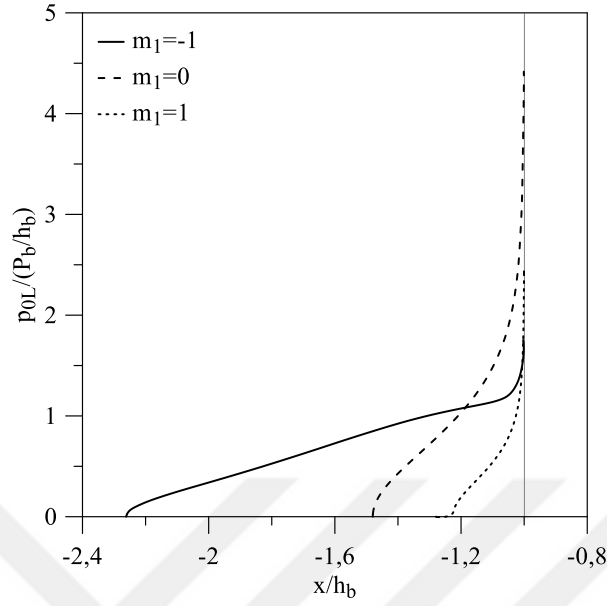
Şekil 132. Çeyrek düzlemlere oturan homojen bir tabakanın temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model

Farklı rijit blok konumu (m_1) ve çeyrek düzlemlerin kayma modüllerinin oranı (G_{0R}/G_{0L}) için temas uzunluklarının (a_{0RE}/h_b , a_{0LS}/h_b , b_{1S}/h_b , b_{1E}/h_b) değişimi Tablo 13 'de verilmektedir. Tablodan, rijit bloğun konumu soldan sağa doğru kaydırıldıkça temas yüzeylerinin başlangıç ve bitiş noktalarının da sağa doğru kaydığı görülmektedir. Problemin malzeme ve yüklemeye göre simetrik olması halinde $m_1/h_b = 0$ ve $G_{0R}/G_{0L} = 1$ için temasın başlangıç ve bitiş noktaları da simetrik olmaktadır. Bloğun konumu $x = 0$ ekseninden uzaklaştıkça; tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki toplam temas uzunlukları artmakta, tabaka ile rijit blok arasındaki temas uzunlukları ise azalmaktadır. G_{0R}/G_{0L} oranı azaldıkça, (yani sol çeyrek düzlemin kayma modülünün değeri sağ çeyrek düzleminkine göre arttıkça) tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu (a_{0RE}/h_b) artarken tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu (a_{0LS}/h_b) azalmaktadır. G_{0R}/G_{0L} oranı arttıkça tabaka ile rijit blok arasındaki temas uzunluğu artmakta olup, bu orandaki değişim tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temasta daha belirgin olmaktadır.

Tablo 13. Farklı yükleme ve kayma modülü oranları için çeyrek düzlemlere oturan tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)

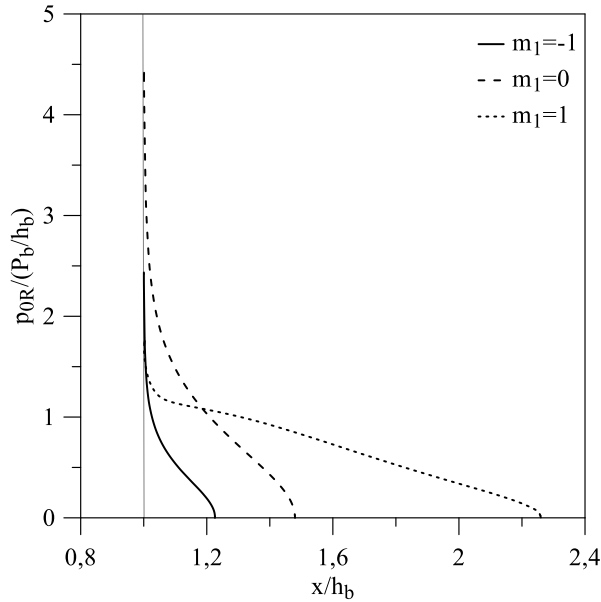
m_1/h_b	$G_{0R}/G_{0L} = 2$			
	a_{0RE}/h_b	a_{0LS}/h_b	b_{1S}/h_b	b_{1E}/h_b
-1	1,21155808	-2,59448505	-1,47935729	-0,79328629
-0.5	1,30499849	-2,10418006	-1,00378469	-0,23402023
0	1,47212773	-1,72165143	-0,39017263	0,43950510
0.5	1,78810050	-1,50593724	0,27384846	1,00371920
1	2,25700382	-1,36652290	0,79527278	1,44517812
m_1/h_b	$G_{0R}/G_{0L} = 1$			
	a_{0RS}/h_b	a_{0LE}/h_b	b_{1S}/h_b	b_{1E}/h_b
-1	1,22654223	-2,26197120	-1,44271740	-0,79179709
-0.5	1,32056526	-1,79423308	-0,99408580	-0,26223555
0	1,48000364	-1,48000363	-0,40867996	0,40867996
0.5	1,79424028	-1,32056576	0,26223558	0,99408566
1	2,26197120	-1,22654220	0,79179709	1,44271740
m_1/h_b	$G_{0R}/G_{0L} = 0.5$			
	a_{0RS}/h_b	a_{0LE}/h_b	b_{1S}/h_b	b_{1E}/h_b
-1	1,23888937	-2,03782842	-1,41338684	-0,78431742
-0.5	1,33237173	-1,59321517	-0,98314880	-0,27516394
0	1,48517718	-1,33658350	-0,41785906	0,39100716
0.5	1,79766572	-1,21758976	0,25583598	0,98865747
1	2,26461628	-1,15145261	0,78993215	1,44139070

Tabaka ile sağ çeyrek düzlem , tabaka ile sol çeyrek düzlem ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmelerinin değişimi farklı rijit blok konumları için Şekil 133-135 'de verilmektedir. Şekiller beraber incelendiğinde, $G_{0R}/G_{0L} = 1$ oranı ve $m_1 = 0$ konumu (malzeme, yükleme ve geometriye göre simetrik problem) için temas gerilmeleri ve temas uzunlukları simetrik olmaktadır. Benzer şekilde, $x = 0$ eksenine göre simetriği olan $m_1 = -1$ ve $m_1 = 1$ konumları için elde edilen tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas gerilmeleri de simetriktir. Tabaka ile çeyrek düzlemler arasındaki temas gerilmeleri çeyrek düzlemlerin köşesine yaklaştıkça sonsuza gitmektedir. Rijit blok $x = 0$ ekseninden uzaklaştıkça tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin en büyük değeri artmakta ve en büyük temas gerilmesinin oluştuğu nokta hem m_1 noktasından hem de simetri ekseninden uzaklaşmaktadır.



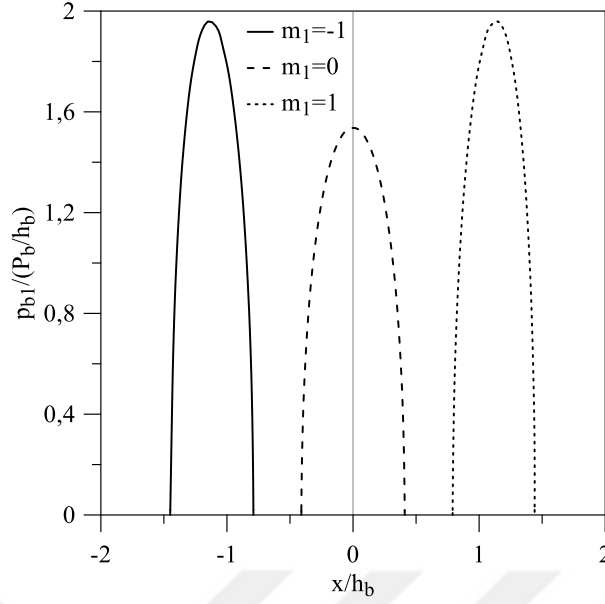
Şekil 133. Farklı rijit blok konumları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, R_1 / h_b = 100, c / h_b = 1.0, G_1 / G_{0R} = 1, \right. \\ \left. G_{0R} / G_{0L} = 1, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$



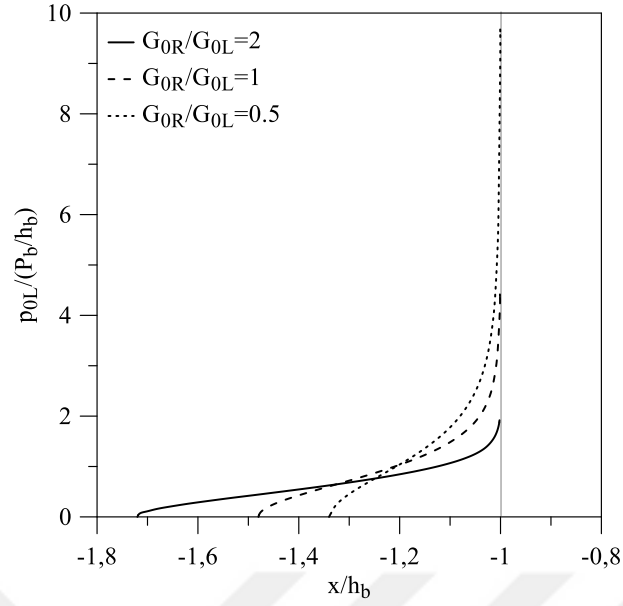
Şekil 134. Farklı rijit blok konumları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, R_1 / h_b = 100, c / h_b = 1.0, G_1 / G_{0R} = 1, \right. \\ \left. G_{0R} / G_{0L} = 1, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$

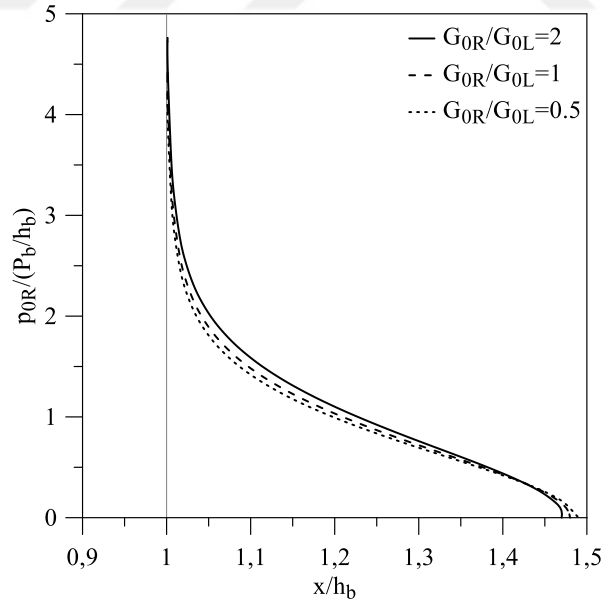


Şekil 135. Farklı rijit blok konumları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $G_1/G_{0R} = 1$, $c/h_b = 1.0$, $G_{0R}/G_{0L} = 1$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)

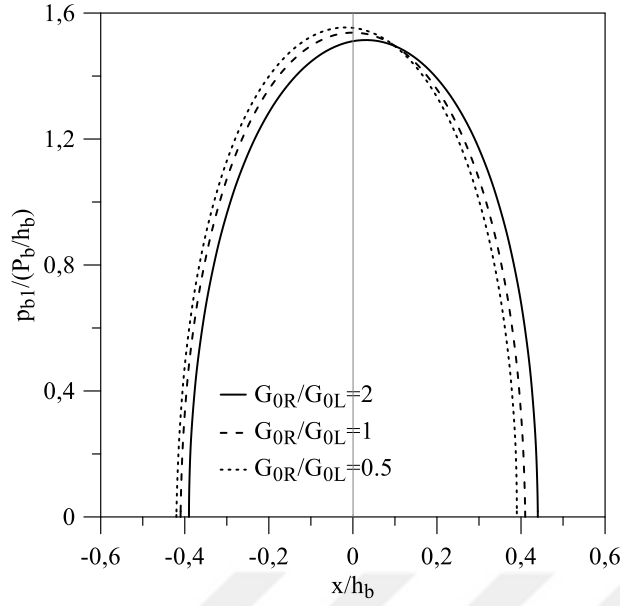
Tabaka ile sağ çeyrek düzlem, tabaka ile sol çeyrek düzlem ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmelerinin değişimi farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için Şekil 136-138 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, G_{0R}/G_{0L} oranındaki değişimin temas gerilmeleri üzerine etkisi en belirgin olarak, tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas yüzeyinde olduğu görülmektedir. G_{0R}/G_{0L} oranı azaldıkça, tabaka ile rijit blok arasında temas gerilmelerinin en büyük değerleri de artmakta ve bu değerlerin oluştuğu noktalar sola doğru kaymaktadır..



Şekil 136. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sağ çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)



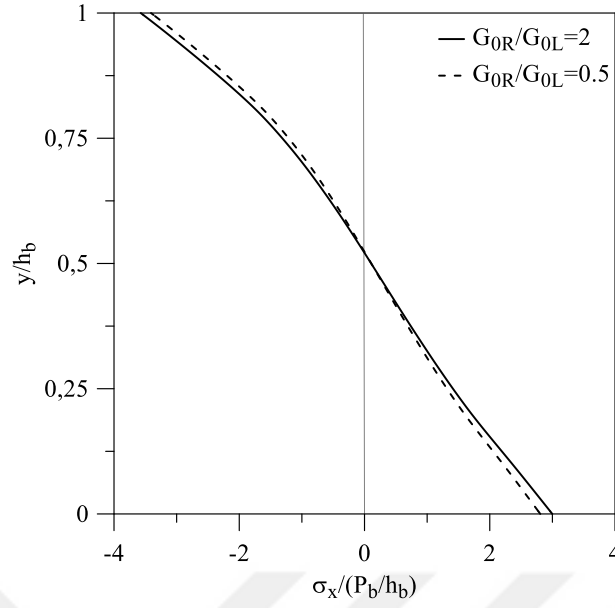
Şekil 137. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile sol çeyrek düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $R_1/h_b = 100$, $c/h_b = 1.0$, $G_1/G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)



Şekil 138. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

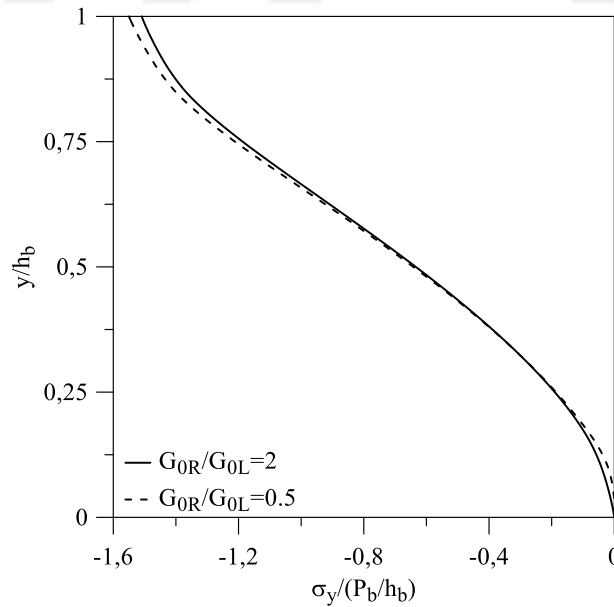
$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, R_1/h_b = 100, c/h_b = 1.0, G_1/G_{0R} = 1, m_1 = 0, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$

$x = 0$ ekseninde derinlik boyunca ($0 \leq y \leq h_1$) meydana gelen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için değişimi sırasıyla Şekil 139-141 'de verilmektedir. Şekillerden de görülebileceği gibi, G_{0R}/G_{0L} oranlarındaki değişim σ_x ve σ_y normal gerilmelerini fazla etkilememektedir. σ_x normal gerilmeleri tabaka üst bölgelerinde negatif olurken, alt bölgelerinde pozitif olmaktadır. σ_y normal gerilmesinin en büyük değeri tabaka üst yüzeyinde elde edilmekte olup, tabaka alt yüzeyi çeyrek düzlemlerle temas halinde olmadığından σ_y gerilmeleri sifira eşit olmakta ve dolayısıyla sınır şartını sağlamaktadır. $x = 0$ ekseninde geometrik olarak simetri eksenine olsa bile farklı malzeme özellikleri nedeniyle problem ($G_{0R}/G_{0L} \neq 1$) simetrik değildir. Bu nedenle, τ_{xy} kayma gerilmeleri $x = 0$ ekseninde sıfır olmamakta ve G_{0R}/G_{0L} oranı, $G_{0R}/G_{0L} > 1$ değerinden $G_{0R}/G_{0L} < 1$ değerine geçerken Şekil 141'de görüldüğü gibi işaret değiştirmektedir.



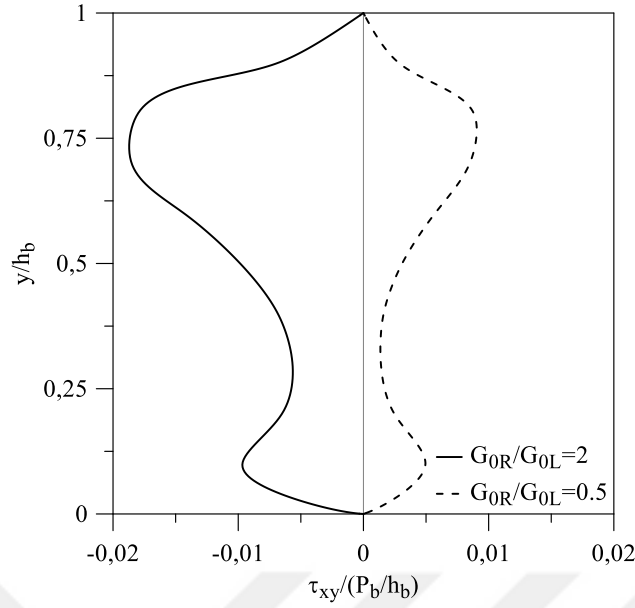
Şekil 139. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x=0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, R_1/h_b = 100, c/h_b = 1.0, G_1/G_{0R} = 1, m_1 = 0, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$



Şekil 140. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x=0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi

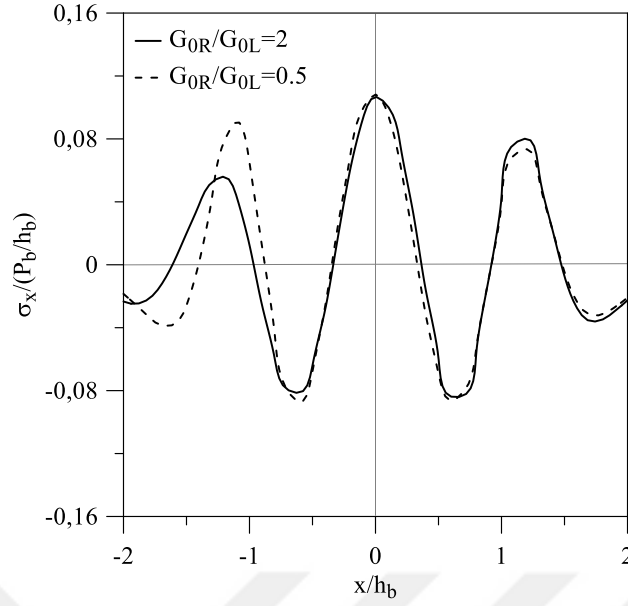
$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, R_1/h_b = 100, c/h_b = 1.0, G_1/G_{0R} = 1, m_1 = 0, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$



Şekil 141. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x=0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi

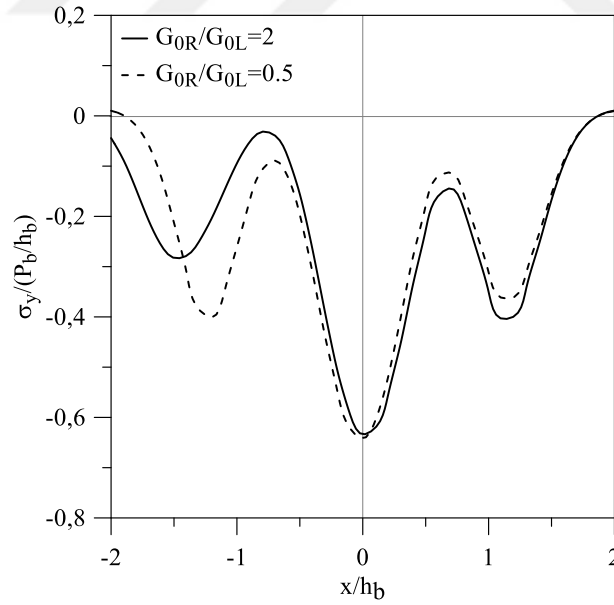
$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, R_1/h_b = 100, c/h_b = 1.0, G_1/G_{0R} = 1, m_1 = 0, \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$

Tabaka yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca ($-2 \leq x \leq 2, y = h_1/2$) σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için değişimi sırasıyla Şekil 142-144 'de verilmektedir. G_{0R}/G_{0L} oranındaki değişimin σ_x, σ_y ve τ_{xy} gerilmeleri üzerindeki etkisi sol çeyrek düzleme yakın kısımlarda daha belirgin olduğu şekillerden görülmektedir. σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin en büyük değeri, rijit blok orta noktasına karşılık gelen $x=0$ ekseninde oluşmaktadır. σ_x ve σ_y gerilmeleri çeyrek düzlemlerin köşe noktalarına yaklaştıkça tekrar artmakta ve köşe noktaların civarlarında yerel maksimumlar oluşmaktadır. G_{0R}/G_{0L} oranı azaldıkça en büyük kayma gerilmesi sol çeyrek düzlem civarında artarken, sağ çeyrek düzlem civarında azalmaktadır.



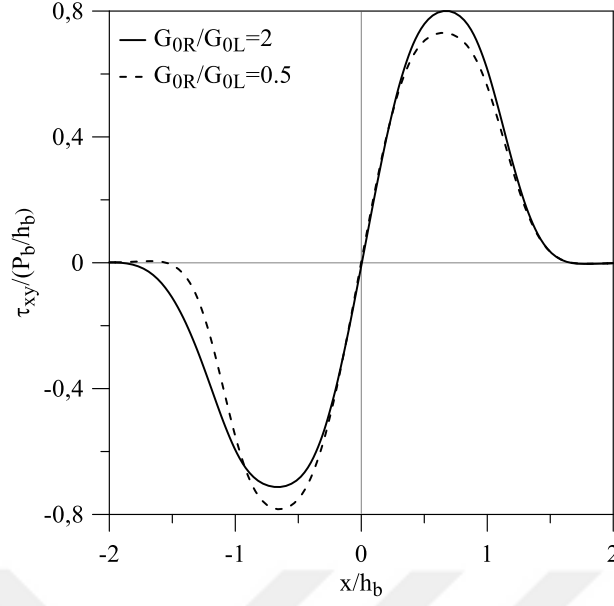
Şekil 142. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, R_1/h_b = 100, G_1/G_{0R} = 1, m_1 = 0, \right. \\ \left. \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$



Şekil 143. Farklı G_{0R}/G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi

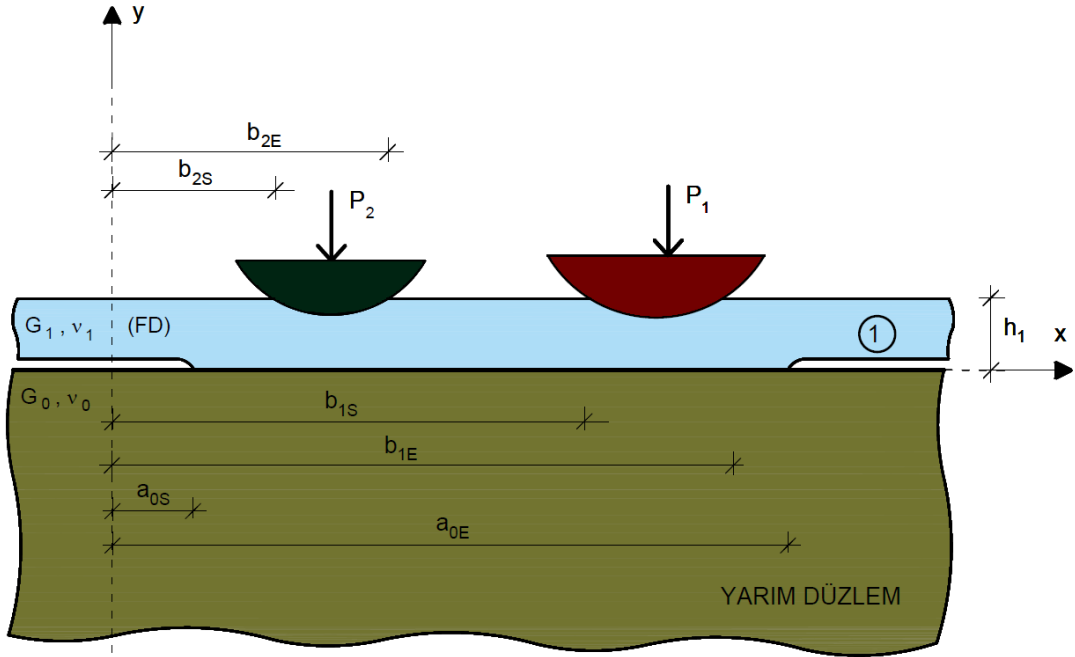
$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, R_1/h_b = 100, G_1/G_{0R} = 1, m_1 = 0, \right. \\ \left. \kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2 \right)$$



Şekil 144. Farklı G_{0R} / G_{0L} oranları için çeyrek düzlemler üzerine oturan tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500$, $R_1 / h_b = 100$, $G_1 / G_{0R} = 1$, $m_1 = 0$, $\kappa_1 = \kappa_{0R} = \kappa_{0L} = 2$)

4.2.4. Yarım Düzleme Oturan FD Bir Tabakanın Temas Problemi

Burada, yarım düzlem üzerine oturan FD bir tabakanın temas problemi ele alınmıştır. FD tabakaya $x = 0$ eksenine m_1 ve m_2 mesafede P_1 ve P_2 tekil yükleri yarıçapları sırasıyla R_1 ve R_2 olan rijit dairesel bloklar aracılığıyla etkimektedir. Yarım düzlem ile FD tabaka arasındaki temas yüzeyi yapışık olmayıp, problem bir tabaka ($N=1$) ve üç integral denklemden ($M=3$) oluşmaktadır. FD tabaka ile yarım düzlem, tabaka ile sağ rijit blok ve tabaka ile sol rijit blok arasındaki temas sırasıyla $[a_{0S}, a_{0E}]$, $[b_{1S}, b_{1E}]$ ve $[b_{2S}, b_{2E}]$ aralığında gerçekleşmektedir. Çözümde, uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Probleme ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 145 'de verilmektedir.

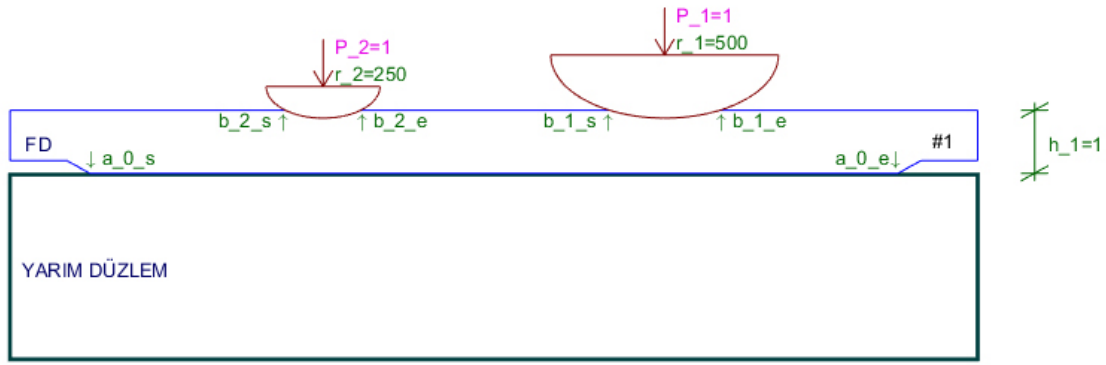


Şekil 145. Yarım düzleme oturan FD tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_{1h} = 0.5$, $G_{10} / G_0 = 1$, $R_1 / h_b = 500$, $R_1 / R_2 = 2$, $\kappa_1 = 2$, $m_1 / h_b = 1$, $m_1 = m_2$) aşağıda verilmektedir.

```
addLayer FG 500 1000 0.25 1
addFoundation HP 500 0.25
addReceding 0
addLoad PUNCH 1 CIR 1 500
addLoad PUNCH 1 CIR -1 250
```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 146' da verilmektedir.



Şekil 146. Yarım düzleme oturan FD tabakanın temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model

Rijit blok konumlarının ($m_1 / h_b = -m_2 / h_b$), rijit blok yarıçap oranlarının (R_1 / R_2) ve tabakanın alt yüzeyindeki kayma modülünün üst yüzeyindeki kayma modülüne oranlarının (G_{10} / G_{1h}) farklı değerleri için temas uzunluklarının (a_{0S} / h_b , a_{0E} / h_b , b_{1S} / h_b , b_{1E} / h_b , b_{2S} / h_b , b_{2E} / h_b) değişimi Tablo 14 'de verilmektedir. Tablodan görülebileceği gibi, rijit blokların konumları $x=0$ ekseninden uzaklaştıkça, tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas yüzeyinin başlangıç noktası sola doğru kayarken bitiş noktası sağa doğru kaymakta dolayısıyla da temas yüzeyi genişlemektedir. Benzer şekilde, bloklar simetri ekseninden uzaklaştıkça, tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas yüzeyleri genişlemektedir. Rijit blok yarıçaplarının eşit olduğu $R_1 / R_2 = 1$ durumunda geometri ve yüklemeye göre simetrik problem olduğundan temas yüzeylerinin başlangıç ve bitiş noktaları da simetrik olmaktadır. R_1 / R_2 oranı arttıkça tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas yüzeyinin başlangıç noktası sağa doğru kaymakta ve temas yüzeyinin uzunluğu azalmaktadır. R_1 / R_2 oranı arttıkça (R_2 yarıçapı azaldıkça) tabaka ile sol blok arasındaki temasın başlangıç ve bitiş değerleri tekil yükün uygulandığı noktaya kaymakta ve temas yüzeyi küçülmektedir. Buna karşılık, tabaka ile sağ blok arasındaki temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş değerleri sağa doğru hareket etmektedir. R_1 / R_2 oranındaki değişimin sol rijit blok civarındaki temas uzunluklarına etkisi daha belirgin olmaktadır. G_{10} / G_{1h} oranı arttıkça tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas uzunlukları artmakta ve bu orandaki değişimin temas uzunluklarına etkisi rijit blok ile FD tabaka arasındaki temas yüzeylerinde daha belirgin olarak görülmektedir.

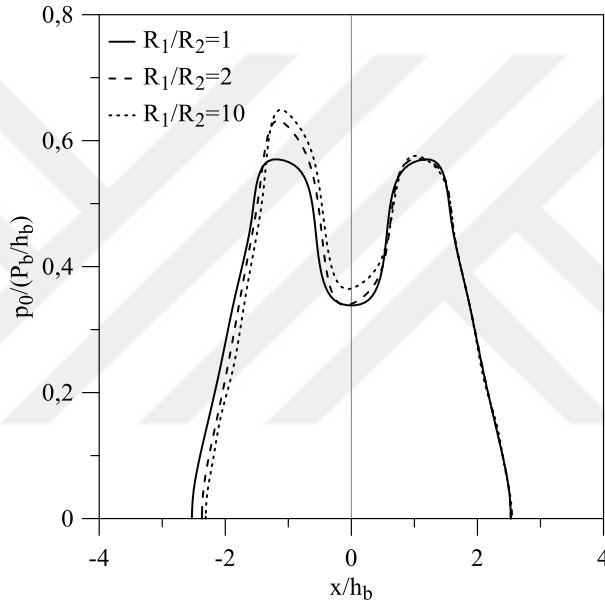
Tablo 14. Farklı m_1/h , R_1/R_2 ve G_{10}/G_{1h} oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin temas uzunluklarının değişimi

$$\left(\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500, G_{10}/G_0 = 1, R_1/h_b = 500, \kappa_1 = \kappa_0 = 2, m_1 = -m_2 \right)$$

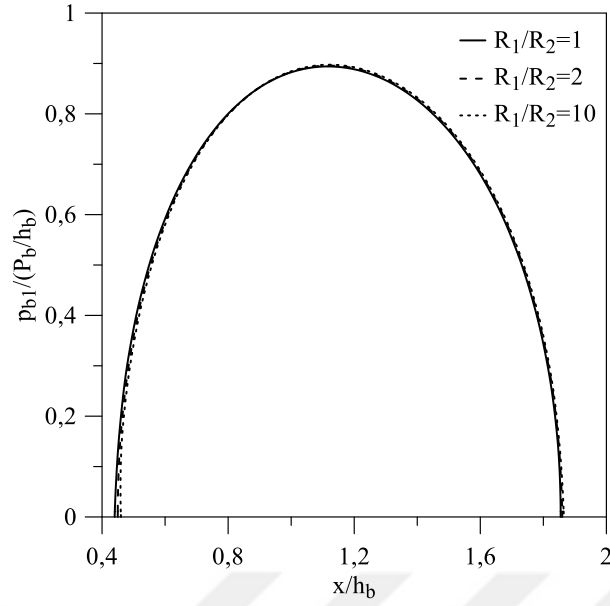
m_1/h	R_1/R_2	$G_{20}/G_{2h} = 2$					
		a_{0S}/h_b	a_{0E}/h_b	b_{1S}/h_b	b_{1E}/h_b	b_{2S}/h_b	b_{2S}/h_b
1,00	1,00	-2,5752	2,5752	0,3129	1,9878	-1,9878	-0,3129
1,25	1,00	-2,8151	2,8151	0,5125	2,2186	-2,2186	-0,5125
1,50	1,00	-3,0658	3,0658	0,7310	2,4538	-2,4538	-0,7310
1,00	2,00	-2,3667	2,5566	0,3192	1,9916	-1,6872	-0,4640
1,25	2,00	-2,6309	2,8062	0,51365	2,2222	-1,9248	-0,6898
1,50	2,00	-2,8993	3,0717	0,7345	2,4589	-2,1673	-0,9259
1,00	10,00	-2,2106	2,5803	0,3225	2,0074	-1,3028	-0,7276
1,25	10,00	-2,4747	2,7965	0,5175	2,2138	-1,5489	-0,9737
1,50	10,00	-2,7538	3,0768	0,7302	2,4670	-1,7976	-1,2210
m_1/h	R_1/R_2	$G_{20}/G_{2h} = 1$					
		a_{0S}/h_b	a_{0E}/h_b	b_{1S}/h_b	b_{1E}/h_b	b_{2S}/h_b	b_{2S}/h_b
1,00	1,00	-2,5322	2,5322	0,4440	1,8556	-1,8556	-0,4440
1,25	1,00	-2,7843	2,7843	0,6480	2,0806	-2,0806	-0,6480
1,50	1,00	-3,0424	3,0424	0,8656	2,3143	-2,3143	-0,8656
1,00	2,00	-2,3739	2,5318	0,4492	1,8584	-1,5724	-0,5777
1,25	2,00	-2,6388	2,7817	0,6500	2,0816	-1,8078	-0,8050
1,50	2,00	-2,9068	3,0432	0,8662	2,3143	-2,0483	-1,0396
1,00	10,00	-2,2445	2,5328	0,4542	1,8606	-1,2370	-0,7936
1,25	10,00	-2,5226	2,7797	0,6518	2,0826	-1,4812	-1,0412
1,50	10,00	-2,7997	3,0431	0,8667	2,3144	-1,7289	-1,2884
m_1/h	R_1/R_2	$G_{20}/G_{2h} = 0.5$					
		a_{0S}/h_b	a_{0E}/h_b	b_{1S}/h_b	b_{1E}/h_b	b_{2S}/h_b	b_{2S}/h_b
1,00	1,00	-2,5415	2,5415	0,5692	1,7341	-1,7341	-0,5692
1,25	1,00	-2,8059	2,8059	0,7774	1,9580	-1,9580	-0,7774
1,50	1,00	-3,0622	3,0622	0,9909	2,1836	-2,1836	-0,9909
1,00	2,00	-2,4255	2,5590	0,5731	1,7305	-1,4681	-0,6818
1,25	2,00	-2,6845	2,7995	0,7783	1,9583	-1,7042	-0,9103
1,50	2,00	-2,9068	3,0432	0,8662	2,3143	-2,0483	-1,0396
1,00	10,00	-2,3134	2,5498	0,5776	1,7331	-1,1789	-0,8515
1,25	10,00	-2,5934	2,7940	0,7787	1,9639	-1,4251	-1,0969
1,50	10,00	-2,8846	3,0631	0,9916	2,1737	-1,6722	-1,3442

Tabaka ile yarım düzlem, tabaka ile sağ rijit blok ve tabaka ile sol rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmelerinin değişimi farklı blok yarıçapı oranları için Şekil 147-149 'da verilmektedir. Şekillerden görülebileceği gibi, FD tabaka ile

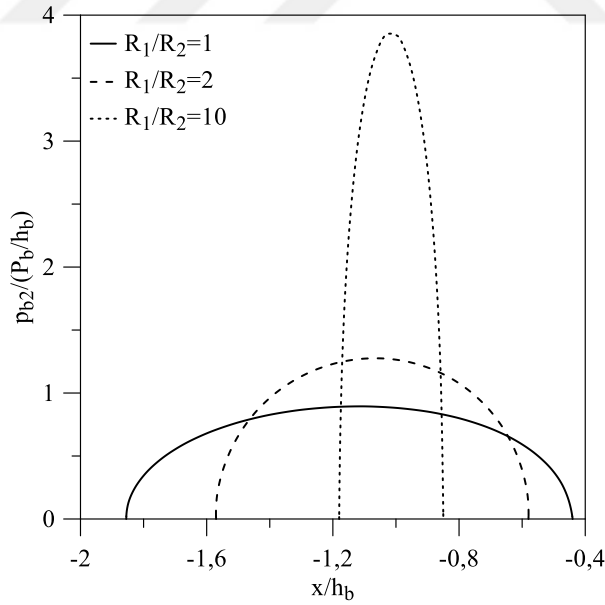
yarım düzlem arasındaki en büyük temas gerilmeleri sol bloğun orta noktasının bulunduğu eksene yakın olurken, tabaka ile rijit bloklar arasındaki en büyük temas gerilmeleri blok orta noktalarının bulunduğu eksene yakın olmaktadır. R_1 / R_2 oranı arttıkça; tabaka ile yarım düzlem ve tabaka ile sol rijit blok arasındaki temas yüzeylerinde meydana gelen en büyük temas gerilmelerinde ve konumunda belirgin bir değişim gözlenmemektedir. R_1 / R_2 oranı arttıkça; tabaka ile sağ rijit blok arasındaki en büyük temas gerilmeleri artmakta, ancak bu gerilmelerin konumunda belirgin bir değişiklik gözlenmemektedir.



Şekil 147. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1$, $R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 / h_b = 1$, $m_1 = -m_2$)

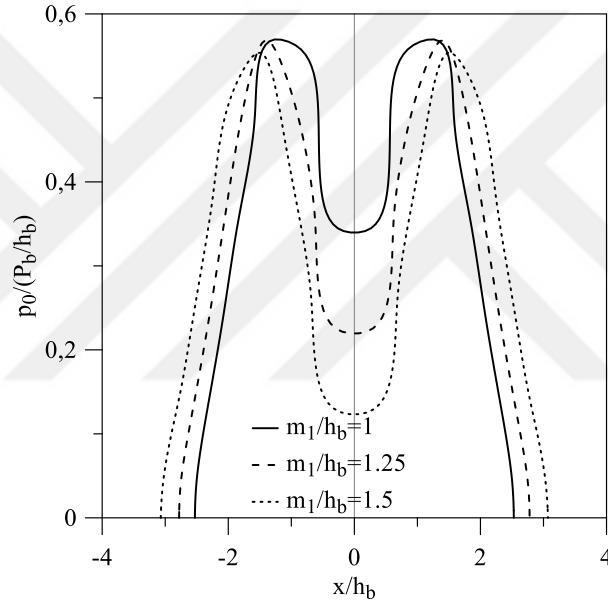


Şekil 148. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sağ blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1$, $R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 / h_b = 1$, $m_1 = -m_2$)



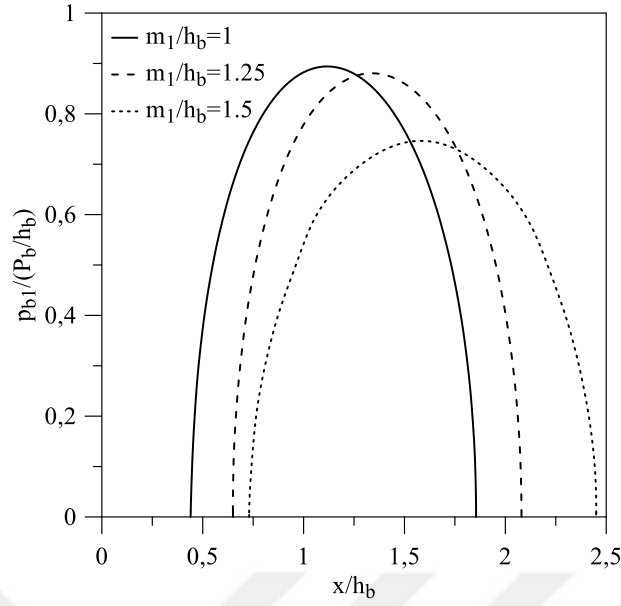
Şekil 149. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sol blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500$, $G_{10} / G_0 = 1$, $R_1 / h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 / h_b = 1$, $m_1 = -m_2$)

FD tabaka ile yarım düzlem, tabaka ile sağ rijit blok ve tabaka ile sol rijit blok arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmelerinin değişimi farklı blok konumları için Şekil 150 ve 152 'de verilmektedir. Şekiller $R_1 / R_2 = 1$ ve $m_1 = -m_2$ için elde edildiğinden problem $x = 0$ eksenine göre simetriktir. Şekillerden de görülebileceği gibi, temas yüzeylerindeki en büyük gerilmeler rijit blok orta noktalarına yakın eksenlerde oluşmaktadır. Rijit blok konumları $x = 0$ simetri ekseninden uzaklaştıkça en büyük temas gerilmelerinin oluştuğu noktalar da simetri ekseninden uzaklaşmakta ve söz konusu temas gerilmeleri azalmaktadır.

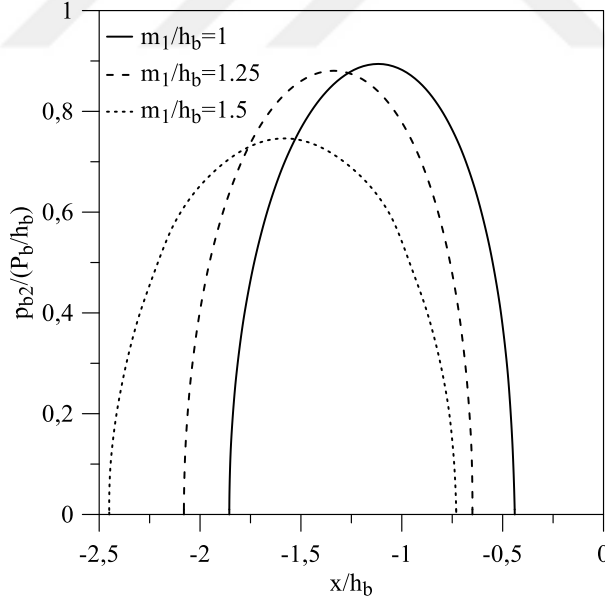


Şekil 150. Farklı m_1 / h_b oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile yarım düzlem arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500, G_{10} / G_0 = 1, R_1 / h_b = 500, \kappa_1 = \kappa_0 = 2, \right. \\ \left. R_1 / R_2 = 1, m_1 = -m_2 \right)$$

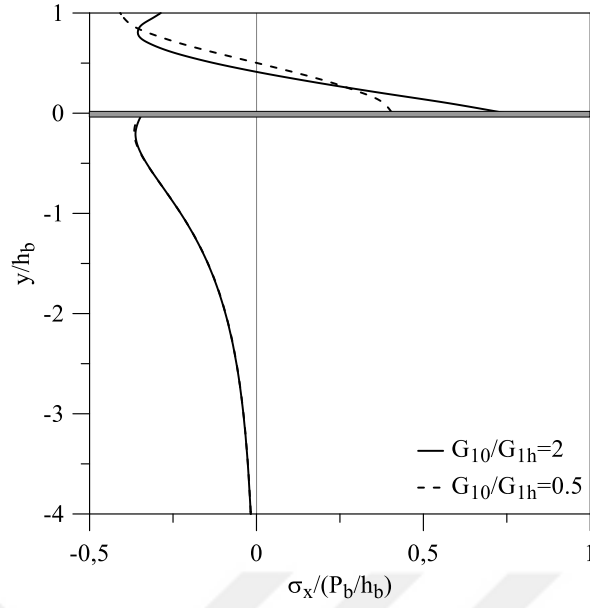


Şekil 151. Farklı m_1/h_b oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sağ rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi
 $(\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500, G_{10}/G_0 = 1, R_1/h_b = 500, \kappa_1 = \kappa_0 = 2,$
 $R_1/R_2 = 1, m_1 = -m_2)$

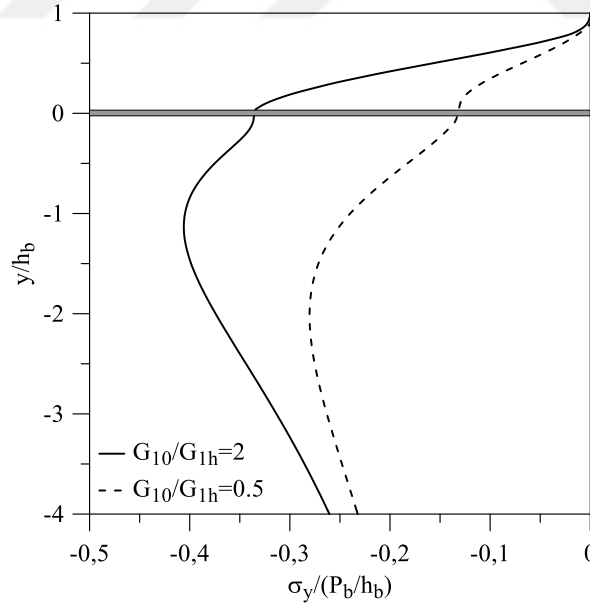


Şekil 152. Farklı m_1/h_b oranları için yarım düzleme oturan FD tabaka ile sol rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi
 $(\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500, G_{10}/G_0 = 1, R_1/h_b = 500, \kappa_1 = \kappa_0 = 2,$
 $R_1/R_2 = 1, m_1 = -m_2)$

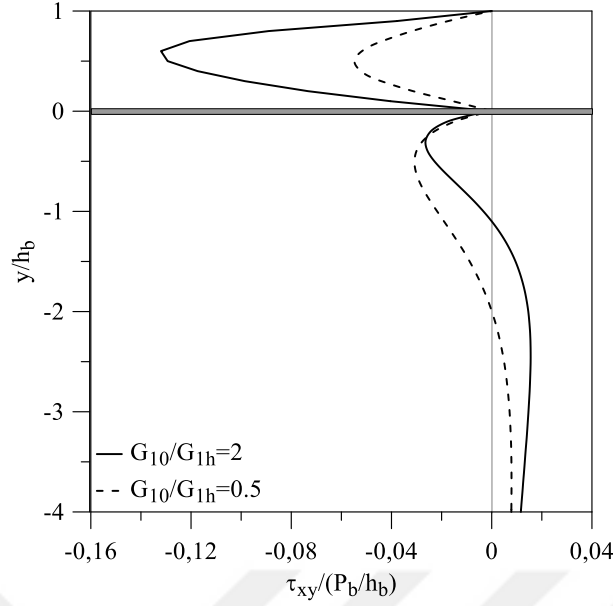
Derinlik boyunca ($-4h_1 \leq y \leq h_1$) meydana gelen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin değişimi farklı G_{10}/G_{1h} oranları için sırasıyla Şekil 153-155 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, FD tabaka ile yarım d¼zlem arasındaki temas y¼zeyi yapışık olmadığından tabaka yarım d¼zlemden bağımsız eğilmeye maruz kalmakta, σ_x normal gerilmeleri tabakanın ¼st y¼zeyinde basınç, alt y¼zeyinde ise çekme olmaktadır. Yarım d¼zlemin ¼st y¼zeyinde negatif σ_x normal gerilmeleri oluşmakta ve temas y¼zeyinden uzaklaşıldıkça bu gerilmeler sıfıra yakınsamaktadır. FD tabakanın ¼st y¼zeyinde $x=0$ kesitinde rijit blok olmadığından σ_y normal gerilmeleri sıfıra eşit olmakta ve sınır Şartını sağlamaktadır. σ_y normal gerilmeleri, FD tabakanın ¼st y¼zeyinden itibaren yarım d¼zleme inildikçe artmakta ve yarım d¼zlem ¼zerinde en b¼y¼k değerine ulaştıktan sonra sıfıra yakınsamaktadır. G_{10}/G_{1h} oranının değişimi σ_x normal gerilmelerini fazla etkilemezken, σ_y normal gerilmeleri bu oranın artmasıyla artmaktadır. τ_{xy} kayma gerilmeleri; tabakanın ¼st y¼zeyinde ve tabaka ile yarım d¼zlem arasındaki temas y¼zeyinde sıfıra eşit olmakta, dolayısıyla da sınır Şartları sağlanmaktadır. G_{10}/G_{1h} oranı arttıķa τ_{xy} kayma gerilmeleri tabkalada artarken, yarım d¼zlemden azalmaktadır ve FD tabakadaki en b¼y¼k gerilme değeri tabakanın ortasına yakın oluşurken, yarım d¼zlemden temas y¼zeyine yakın kesitlerde oluşmaktadır.



Şekil 153. Farklı G_{10}/G_{1h} oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500$, $G_{10}/G_0 = 1$, $R_1/h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $R_1/R_2 = 1$, $m_1 = -m_2$)

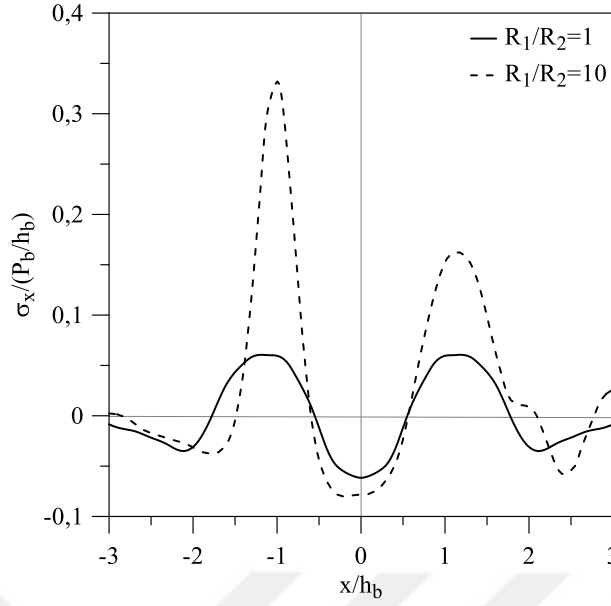


Şekil 154. Farklı G_{10}/G_{1h} oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x = 0$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500$, $G_{10}/G_0 = 1$, $R_1/h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $R_1/R_2 = 1$, $m_1 = -m_2$)

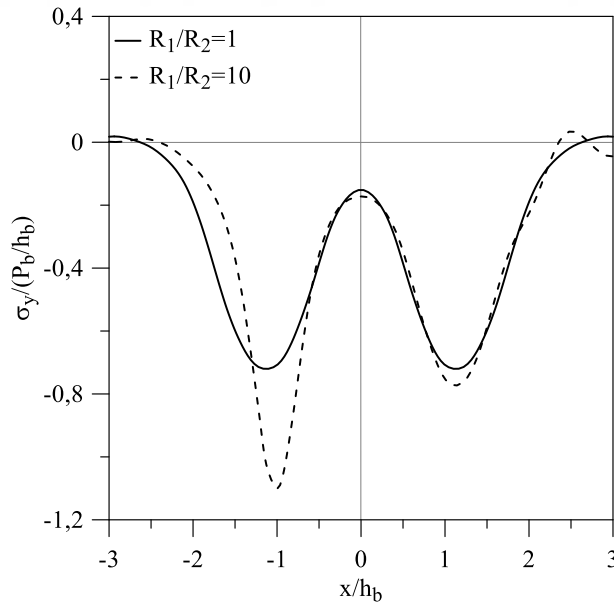


Şekil 155. Farklı G_{10}/G_{1h} oranları için yarı düzleme oturan FD tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x=0.5$ ekseninde derinlik boyunca değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500$, $G_{10}/G_0 = 1$, $R_1/h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $R_1/R_2 = 1$, $m_1 = -m_2$)

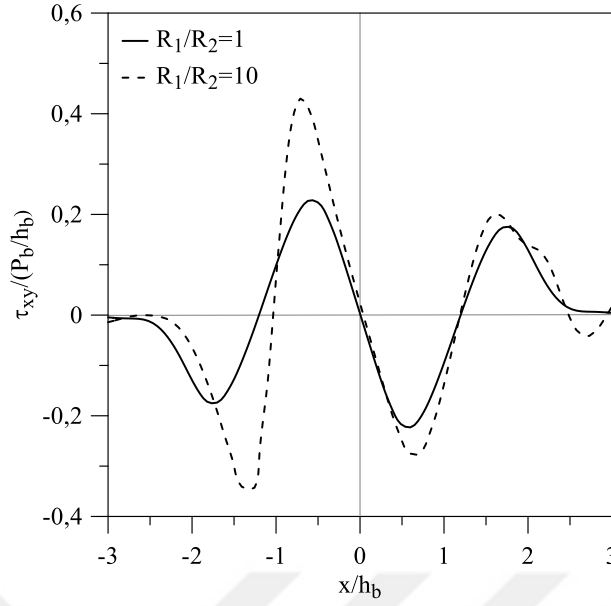
Tabakanın yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca ($-3 \leq x \leq 3$, $y = h_1/2$) σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin değişimi farklı R_1/R_2 oranları için sırasıyla Şekil 156-158 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, simetrik probleme karşılık gelen $R_1/R_2 = 1$ için σ_x ve σ_y normal gerilmelerinin de simetrik olduğu, τ_{xy} kayma gerilmelerinin ise anti-simetrik olduğu görülmektedir. R_1/R_2 oranı arttıkça x eksenini doğrultusunda oluşan her üç gerilme bileşeni de artmakta ve bu orandaki değişimin gerilmeler üzerine etkisi daha belirgin olarak sol rijit bloğa yakın bölgelerde ortaya çıkmaktadır. x doğrultusunda, rijit bloklardan uzaklaştıkça her üç gerilme bileşeni de azalarak sifra yakınsamaktadır.



Şekil 156. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_x normal gerilmelerinin tabaka yarı yüksekliğinde x eksenı boyunca değışimi
 $(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500, G_{10} / G_0 = 1, G_{10} / G_{1h} = 1.001, R_1 / h_b = 500,$
 $\kappa_1 = \kappa_0 = 2, m_1 = -m_2)$



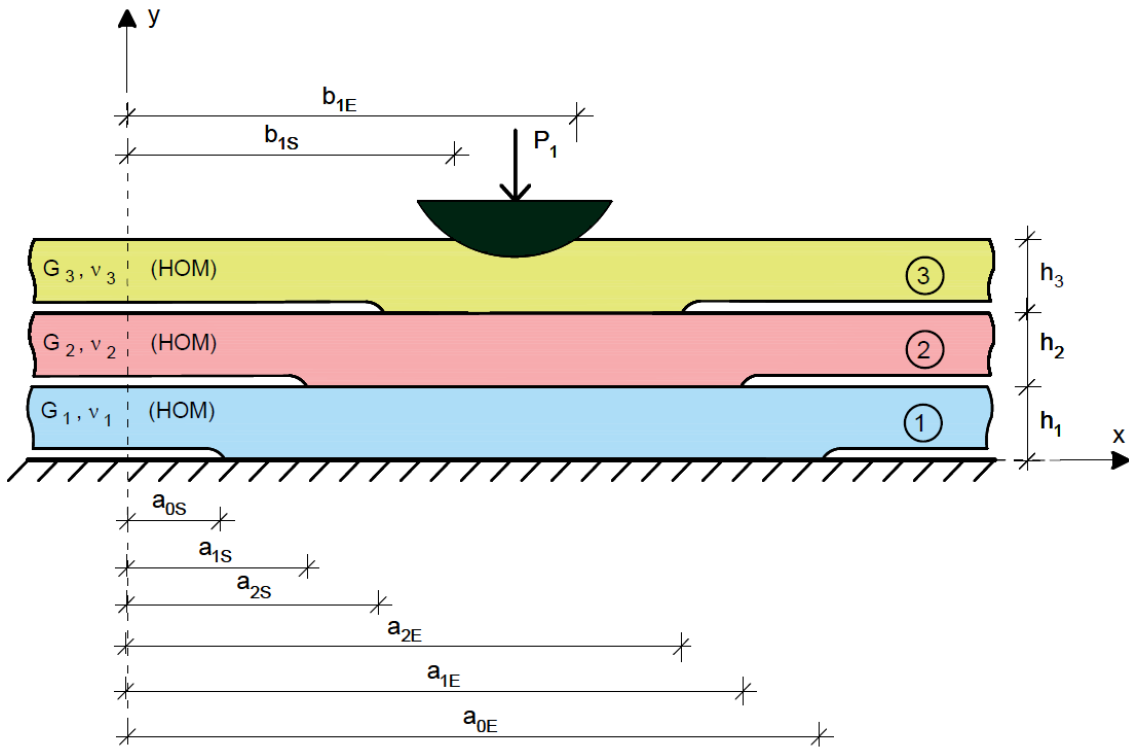
Şekil 157. Farklı R_1 / R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin σ_y normal gerilmelerinin tabaka yarı yüksekliğinde x eksenı boyunca değışimi
 $(\frac{G_{10}}{P_b / h_b} = 500,$
 $G_{10} / G_0 = 1, G_{10} / G_{1h} = 1.001, R_1 / h_b = 500, \kappa_1 = \kappa_0 = 2,$
 $m_1 = -m_2)$



Şekil 158. Farklı R_1/R_2 oranları için yarım düzleme oturan FD tabakaya ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin tabaka yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca değişimi ($\frac{G_{10}}{P_b/h_b} = 500$, $G_{10}/G_0 = 1$, $G_{10}/G_{1h} = 1.001$, $R_1/h_b = 500$, $\kappa_1 = \kappa_0 = 2$, $m_1 = -m_2$)

4.2.5. Rijit Temele Oturan Üç Homojen Tabakanın Temas Problemi

Burada, rijit temele oturan üç homojen tabakanın temas problemi incelenmiştir. Üst tabakaya $x = 0$ noktasında P_1 tekil yükü yarıçapı R_1 olan rijit dairesel bir blok aracılığıyla etkimektedir. Alt tabaka ile rijit temel ve tabakalar arasındaki temas yüzeylerinin yapışık olup olmaması durumları ayrı ayrı ele alınmıştır. Problem üç tabaka ($N=3$) ve temas yüzeylerinin yapışık olup olmaması durumlarına bağlı olarak bir ile dört integral denklemden oluşabilir ($M=1,2,3,4$). Alt tabaka ile rijit temel (eğer temas yüzeyi yapışık değilse), birinci tabaka ile ikinci tabaka (eğer temas yüzeyi yapışık değilse), ikinci tabaka ile üçüncü tabaka (eğer temas yüzeyi yapışık değilse) ve tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyleri sırasıyla $[a_{0S}, a_{0E}]$, $[a_{1S}, a_{1E}]$, $[a_{2S}, a_{2E}]$ ve $[b_{1S}, b_{1E}]$ aralığında gerçekleşmektedir. Çözümde, uzunluk ve yük boyutsuzlaştırma parametreleri sırasıyla $h_b = h_1$ ve $P_b = P_1$ olarak seçilmiştir. Tüm temas yüzeylerinin yapışık olmadığı temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu Şekil 159'da verilmektedir.



Şekil 159. Rijit temele oturan üç homojen tabakanın temas problemine ilişkin geometri ve yükleme durumu

Bu problemi program yardımıyla oluşturmak için yazılan girdi dosyası ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $R_1/h_b = 10$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$,

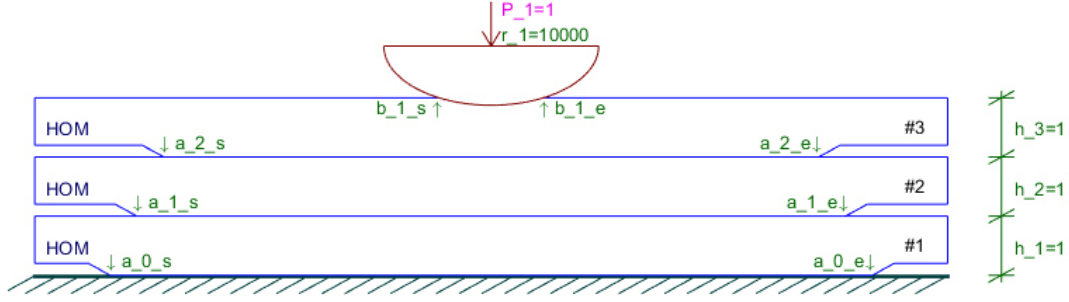
$\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$, tüm temas yüzeyleri yapışık değil) aşağıda verilmektedir.

```

addLayer HOM 500 0.25 1
addLayer HOM 500 0.25 1
addLayer HOM 500 0.25 1
addFoundation RIGID
addReceding 2
addReceding 1
addReceding 0
addLoad PUNCH 1 CIR 0 10

```

Girdi dosyasının okutulması ile programda oluşan model Şekil 160 'da verilmektedir.



Şekil 160. Rijit temele oturan üç homojen tabakanın temas problemi için program yardımıyla oluşturulan model

Tablo 15 ‘de farklı temas yüzeyi yapışıklık durumları ve rijit blok yarıçapları için temas uzunluklarının $(a_{0S}/h_b, a_{0E}/h_b, b_{1S}/h_b, b_{1E}/h_b, b_{2S}/h_b, b_{2E}/h_b)$ değişimi verilmektedir. Problem yükleme ve geometriye göre $x=0$ eksenine göre simetriktir. Problemden geçen temas yüzeylerinin üst yüzeyden aşağıya doğru yapışıklık durumunu ifade eden YD değeri aşağıdaki gibi belirlenmektedir.

- i. $YD=0$: Üst tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyi hariç tüm temas yüzeyleri yapışık.
- ii. $YD=1$: (i) durumunda yapışık olmayan temas yüzeyine ek olarak ikinci tabaka ile üçüncü tabaka arasındaki temas yüzeyi de yapışık değildir.
- iii. $YD=2$: (ii) durumunda yapışık olmayan temas yüzeylerine ek olarak birinci tabaka ile ikinci tabaka arasındaki temas yüzeyi de yapışık değildir.
- iv. $YD=3$: Tüm temas yüzeyleri yapışık değildir.

Tablodan da görülebileceği gibi, R_1/h_b oranı arttıkça yapışık olmayan bütün temas yüzeylerindeki temas uzunlukları da artmaktadır. YD değerleri arttıkça, yani problemdeki temas yüzeylerinin yapışıklık durumu üstten aşağıya doğru yapışık durumdan yapışık olmayan duruma geçtikçe, yapışıklık durumu değişen her bir temas yüzeyi için iki yeni bilinmeyen temas uzunluğu söz konusu olmaktadır. Buna ek olarak, önceden mevcut olan yapışık olmayan temas yüzeylerinin temas uzunlukları da YD değerinin artmasıyla beraber artmaktadır. Temas uzunluklarındaki söz konusu bu değişim, temas yüzeyi yapışıklık durumu değişen temas yüzeyine yakın temas yüzeylerinde daha belirgin olmaktadır. Örneğin, YD değerinin $YD=2 \rightarrow 3$ (birinci tabaka ile rijit temel arasındaki temas yüzeyinin durumu yapışıkta yapışık olmaya geçmiştir) şeklinde değişmesi sonucunda, temas uzunluklarındaki en belirgin değişim birinci tabaka ile ikinci tabaka arasındaki temas

yüzeyinde görülmektedir. Buna karşılık, birinci tabaka ile rijit temel arasındaki temas yüzeyine en uzak olan tabaka ile rijit blok arasındaki temas yüzeyindeki temas uzunluklarında belirgin bir değişim gözlenmemektedir.

Tablo 15. Farklı YD değerleri ve R_1/h_b oranları için rijit temele oturan üç tabakanın temas uzunluklarının değişimi ($\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500$, $G_1/G_2 = 1$, $G_1/G_3 = 1$, $h_1/h_2 = 1$, $h_1/h_3 = 1$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2$)

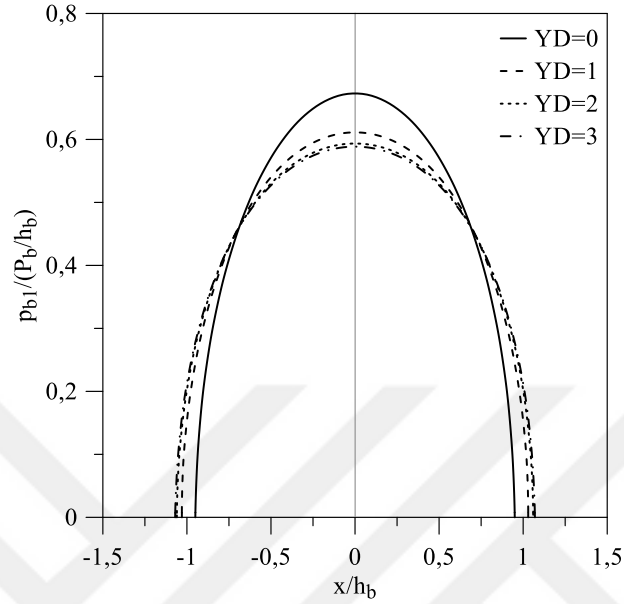
Temas Uzunlukları	$R_1/h_b = 10$				
	$YD=0$	$YD=1$	$YD=2$	$YD=3$	
b_{1S}/h_b	-0,09768370	-0,09788513	-0,09792901	-0,09793880	
b_{1E}/h_b	0,09768370	0,09788512	0,09792900	0,09793880	
a_{2S}/h_b	Temas Yüzeyi Yapışık	-1,23952017	-1,33136472	-1,35015736	
a_{2E}/h_b		1,23952022	1,33136490	1,35015760	
a_{1S}/h_b^0			-1,53313084	-1,58118146	
a_{1E}/h_b			1,53313091	1,58118208	
a_{0S}/h_b				-1,64843154	
a_{0E}/h_b				1,64843273	
Temas Uzunlukları					
Temas Uzunlukları		$R_1/h_b = 100$			
	$YD=0$	$YD=1$	$YD=2$	$YD=3$	
b_{1S}/h_b	-0,30792591	-0,31377912	-0,31515904	-0,31547545	
b_{1E}/h_b	0,30792591	0,31377912	0,31515900	0,31547544	
a_{2S}/h_b	Temas Yüzeyi Yapışık	-1,26741295	-1,35797466	-1,37665386	
a_{2E}/h_b		1,26741293	1,35797583	1,37665393	
a_{1S}/h_b^0			-1,55404222	-1,60195564	
a_{1E}/h_b			1,55414211	1,60195584	
a_{0S}/h_b				-1,66759662	
a_{0E}/h_b				1,66759702	

Tablo 15 'in devamı

Temas Uzunlukları	$R_1 / h_b = 10000$				
	$YD=0$	$YD=1$	$YD=2$	$YD=3$	
b_{1S} / h_b	-2,59952048	-2,81380698	-2,89248411	-2,92770520	
b_{1E} / h_b	2,59952048	2,81380728	2,89248408	2,92770114	
a_{2S} / h_b	Temas Yüzeyi Yapışık	-3,02153774	-3,15889185	-3,20195863	
a_{2E} / h_b		3,02153801	3,15889182	3,20195498	
a_{1S} / h_b			-3,21654562	-3,28615896	
a_{1E} / h_b			3,21654560	3,28615544	
a_{0S} / h_b				-3,31005291	
a_{0E} / h_b				3,31004960	
Temas Uzunlukları		$R_1 / h_b = 1000$			
		$YD=0$	$YD=1$	$YD=2$	$YD=3$
b_{1S} / h_b	-0,94676608	-1,03147374	-1,05857833	-1,06622317	
b_{1E} / h_b	0,94676608	1,03147373	1,05857833	1,06622308	
a_{2S} / h_b	Temas Yüzeyi Yapışık	-1,56107563	-1,65567306	-1,67648905	
a_{2E} / h_b		1,56107566	1,65567306	1,67648905	
a_{1S} / h_b			-1,79942156	-1,84882323	
a_{1E} / h_b			1,79942156	1,84882334	
a_{0S} / h_b				-1,89915157	
a_{0E} / h_b				1,89915182	

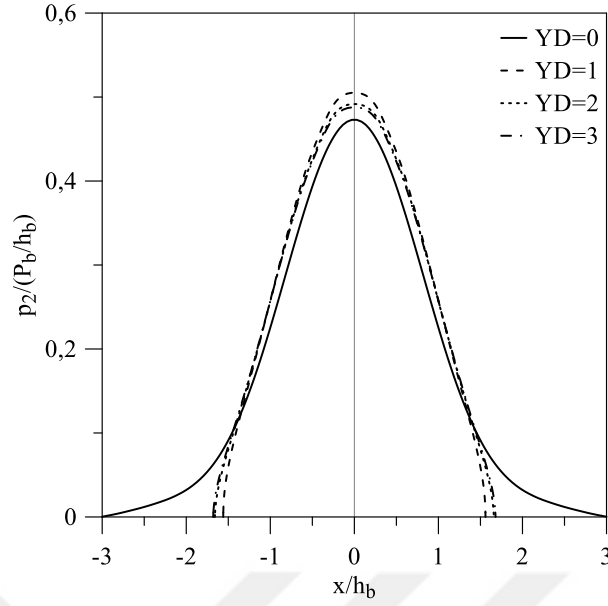
Üst tabaka ile rijit blok, ikinci tabaka ile üçüncü tabaka, birinci tabaka ile ikinci tabaka ve alt tabaka ile rijit temel arasındaki temas yüzeyleri boyunca meydana gelen temas gerilmelerinin değişimi farklı YD değerleri için sırasıyla Şekil 161-164 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, yapışık olmayan temas yüzeylerinde temas yüzeyinin bitimi ile beraber temas gerilmelerinin sıfır olduğu, yapışık yüzeylerde ise temas gerilmeleri kademeli olarak azalarak sıfıra yaklaştığı görülmektedir. Her bir temas yüzeyindeki en büyük temas gerilmeleri $x = 0$ ekseninde oluşmaktadır. Üst tabaka ile rijit blok arasındaki en büyük temas gerilmesi $YD = 0$ durumu için elde edilmekte ve YD değerinin artması ile birlikte söz konusu bu değer azalmaktadır. Diğer temas yüzeylerinde ise en büyük temas gerilmeleri, temas yüzeyinin yapışık durumdan yapışık olmayan duruma geçmesiyle elde edilmektedir. Örneğin, ikinci tabaka ile üçüncü tabaka arasındaki en büyük temas gerilmesi $YD = 1$

durumunda, yani ikinci tabaka ile üçüncü tabaka arasındaki temas gerilmesinin yapışıklık durumunun yapışıkta yapışık olmayana geçtiği durumda elde edilmektedir.



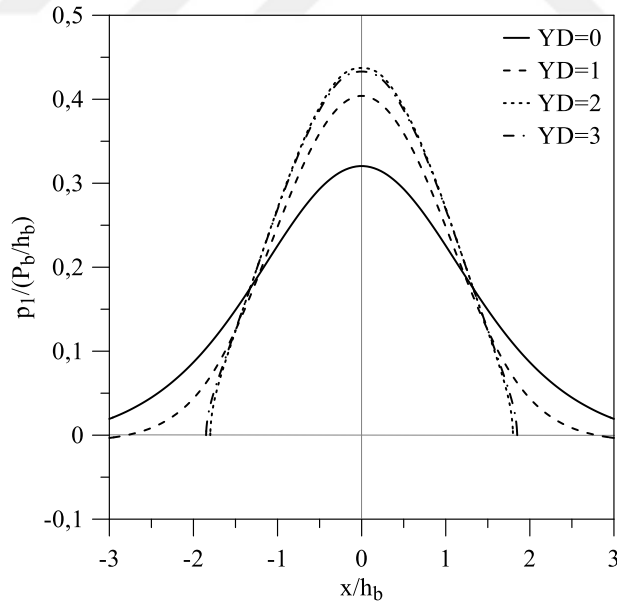
Şekil 161. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas probleminde ilişkin üst tabaka ile rijit blok arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, G_1 / G_2 = 1, G_1 / G_3 = 1, R_1 / h_b = 1000, \right. \\ \left. h_1 / h_2 = 1, h_1 / h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2 \right)$$



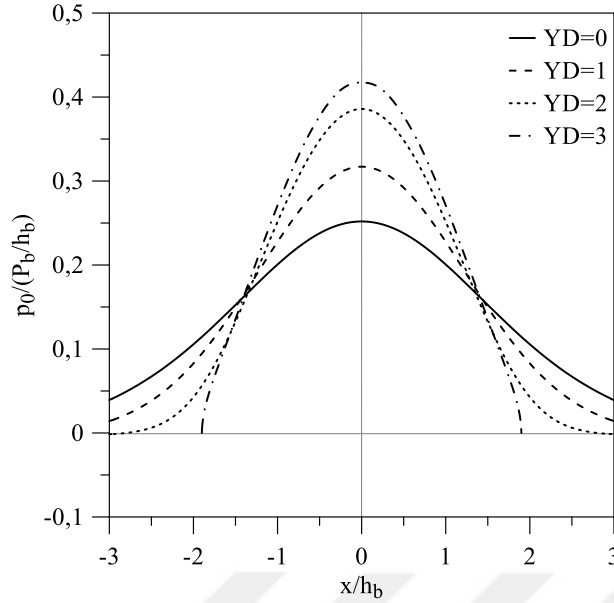
Şekil 162. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas probleminde ikinci tabaka ile üçüncü tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, G_1 / G_2 = 1, G_1 / G_3 = 1, R_1 / h_b = 1000, \right. \\ \left. h_1 / h_2 = 1, h_1 / h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2 \right)$$



Şekil 163. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas probleminde birinci tabaka ile ikinci tabaka arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, G_1 / G_2 = 1, G_1 / G_3 = 1, R_1 / h_b = 1000, \right. \\ \left. h_1 / h_2 = 1, h_1 / h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2 \right)$$

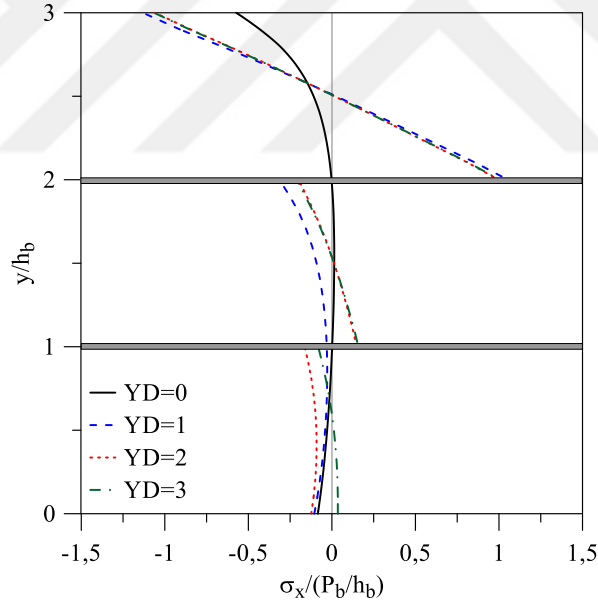


Şekil 164. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas probleminde tabaka ile rijit temel arasındaki temas gerilmelerinin değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, G_1 / G_2 = 1, G_1 / G_3 = 1, R_1 / h_b = 1000, \right. \\ \left. h_1 / h_2 = 1, h_1 / h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2 \right)$$

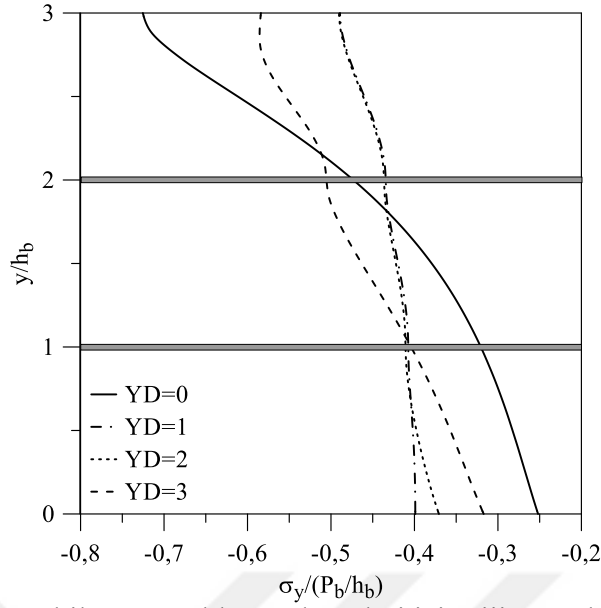
Simetri ekseninde derinlik boyunca ($0 \leq y \leq h_1 + h_2 + h_3$) meydana gelen σ_x , σ_y ve τ_{xy} gerilmelerinin değişimi farklı G_{10} / G_{1h} oranları için sırasıyla Şekil 165-167 'de verilmektedir. Şekiller incelendiğinde, tabakaların alt ve üst yüzeylerindeki temas yüzeylerinin yapışıklık durumuna göre farklı σ_x normal gerilme grafiklerinin elde edildiği görülmektedir. Örneğin, $YD = 0$ için tüm tabaka alt ve üst yüzeylerindeki temas yüzeyleri yapışık olduğundan, tabakalar tek bir tabaka gibi hareket etmekte ve malzeme özellikleri de aynı olduğundan sürekli bir gerilme grafiği elde edilmektedir. YD değeri arttıkça ($YD = 0 \rightarrow 3$) tabakalar birbirinden bağımsız olarak şekil değiştirmekte ve buna uygun şekilde tabakaların üst yüzeylerinde negatif σ_x ve alt yüzeylerinde ise pozitif σ_x gerilmeleri oluşmaktadır. En büyük σ_y normal gerilme değerleri en üst tabakada oluşmakta, alt tabakalara inildikçe söz konusu gerilmeler azalmaktadır. YD değeri arttıkça tabaklı sistemin en üst yüzeyinde oluşan σ_y normal gerilme değerleri azalmakta, buna karşılık sistemin en alt yüzeyinde σ_y normal gerilmeleri artmaktadır. Derinlik boyunca oluşan τ_{xy} kayma gerilmelerine ait grafikler temas yüzeyinin yapışıklık durumuna göre değişmektedir. Yapışık olmayan temas yüzeylerinde kayma gerilmeleri sıfıra eşit olmakta, dolayısıyla da sınır

şartları sağlanmaktadır. Örneğin, $YD = 0$ için sistemin en üst yüzeyindeki temas yüzeyi hariç tüm yüzeyler yapışık olduğundan sadece $y = h_1 + h_2 + h_3$ için kayma gerilmesi sıfır olmaktadır. Buna karşılık, $YD = 3$ için tüm temas yüzeyleri yapışık olmadığından $y = h_1 + h_2 + h_3$, $y = h_1 + h_2$, $y = h_1$ ve $y = 0$ yüzeylerinde kayma gerilmesi sıfır olmaktadır. Bir tabakanın alt ve üst yüzeylerindeki yapışıklık durumu yapışık olmayandan yapışık olana geçtiğinde kayma gerilmelerinin değeri küçülmektedir. Örneğin ikinci tabaka için $YD = 0$, $YD = 1$ ve $YD = 2$ değerleri için sırasıyla hem alt hem üst temas yüzeyi yapışık olmayan, alt temas yüzeyi yapışıkken üst temas yüzeyi yapışık olmayan ve hem alt hem de üst temas yüzeyi yapışık olmayan temas durumları oluşur. Bu üç durum kıyaslandığında, ikinci tabaka için en büyük kayma gerilmesi ve en büyük ortalama kayma gerilmeleri $YD = 0$ durumu için oluşmaktadır. Kayma gerilmelerinin en küçük değerleri $YD = 2$ durumu için elde edilmektedir.



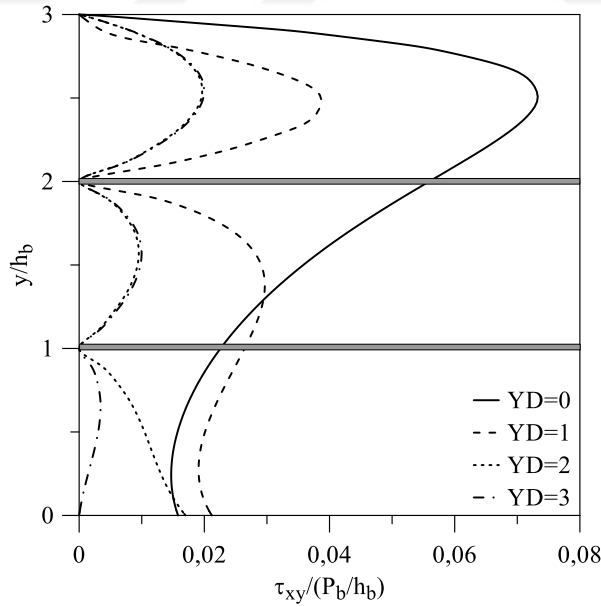
Şekil 165. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas probleminde ilişkin σ_x normal gerilmelerinin $x = 0$ simetri ekseninde derinlik boyunca değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b / h_b} = 500, G_1 / G_2 = 1, G_1 / G_3 = 1, R_1 / h_b = 1000, \right. \\ \left. h_1 / h_2 = 1, h_1 / h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2 \right)$$



Şekil 166. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin σ_y normal gerilmelerinin $x=0$ simetri ekseninde derinlik boyunca değişimi

$$\left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, G_1/G_2 = 1, G_1/G_3 = 1, R_1/h_b = 1000, \right. \\ \left. h_1/h_2 = 1, h_1/h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2 \right)$$



Şekil 167. Farklı YD değerleri için rijit temele oturan üç tabakanın temas problemine ilişkin τ_{xy} kayma gerilmelerinin $x=0,5$

$$\text{ekseninde derinlik boyunca değişimi } \left(\frac{G_1}{P_b/h_b} = 500, \right. \\ \left. G_1/G_2 = 1, G_1/G_3 = 1, R_1/h_b = 1000, h_1/h_2 = 1, \right. \\ \left. h_1/h_3 = 1, \kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 2 \right)$$

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışma kapsamında, tabakalı ortamlarda sürtünmesiz temas problemlerine ilişkin genel bir çözüm programlamaya yönelik olarak elde edilmiş ve elde edilen bu çözüme dayanan görsel arayüze sahip bir bilgisayar programı Matlab programı yardımıyla geliştirilmiştir. Geliştirilen programda, tanımlı temel (rijit temel, Winkler temeli, elastik yarım düzlem, elastik çeyrek düzlemler), tabaka (homojen, fonksiyonel derecelendirilmiş) ve yükleme (dairesel rijit blok ile iletilen tekil yük, düz rijit blok ile iletilen tekil yük, yüzeyi fonksiyonel değişen rijit blok ile iletilen tekil yük, yayılı yük) bileşenlerinden istenilenler seçilerek çözümü aranan tabakalı ortama ait model oluşturulabilmektedir. Modelin geliştirilen program yardımıyla çözülmesinden sonra çözüme ilişkin sonuçlar tablolar ve grafikler halinde yine program yardımıyla görüntülebilmektedir.

Çalışmada, tabakalı ortamlara ilişkin on iki farklı temas problemi geliştirilen program yardımıyla incelenmiştir. Bunlardan yedi tanesi literatürde bulunan bazı çalışmalardan seçilirken beş tanesi literatürde bulunmayan problemlerdir.

Literatürden seçilen temas problemlerindeki sonuçları, geliştirilen program yardımıyla elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak, her iki çözümden elde edilen sonuçların uyumlu olduğu gösterilmiştir. Seçilen temas problemlerinde temel türleri, tabakalarda kullanılan malzeme özellikleri ve yüklemeler çeşitlilik gösterdiğinden programın doğru sonuçlar verdiği farklı temas problemleri için teyit edilmiştir. Dolayısıyla, geliştirilen program literatürde daha önceden çözülmeyen benzer problemlerin çözümüne önemli ölçüde katkı sağlayacağı sonucuna varılmıştır.

Literatürde bulunmayan temas problemleri için temas uzunluklarına, temas gerilmelerine ve tabakalı ortamda oluşan gerilmelere yönelik çeşitli parametrik çalışmalar yapılmıştır. Bahsi geçen bu çalışmalar için elde edilen sonuçlar aşağıdaki gibi özetlenebilir.

- Tabakalı ortamda herhangi bir bileşende (tabaka, temel, temas yüzeyi veya yükleme gibi) yapılan değişiklik (rijitliğinin değiştirilmesi, temas yüzeyi yapışıklık durumunun değiştirilmesi veya blok yarıçapının değiştirilmesi gibi) en belirgin olarak değişimin yapıldığı bölgede ortaya çıkmaktadır.
- Yükün (yayılı yükler için bileşkenin) uygulama noktası yer değiştirdikçe, temas yüzeylerinin başlangıç ve bitiş noktaları buna uygun olarak yer değiştirmektedir.

- Geometri ve yükleme durumuna göre simetrik problemlerde, temas yüzeyinin başlangıç ve bitiş noktaları, temas gerilmeleri ve normal gerilmeler simetrik olarak elde edilirken kayma gerilimleri anti-simetrik olarak elde edilmektedir.
- Temas uzunlukları arttıkça yük daha geniş bir alana yayıldığından temas gerilmeleri azalmaktadır.
- Dairesel rijit bloğun yarıçapı arttıkça tabakayla blok arasındaki temas uzunlukları artmaktadır.
- Fonksiyonel rijit bloklarda (blokla tabaka arasındaki temas uzunluklarının $-1 \leq x \leq 1$ aralığında kaldığı kabul edilirse) blok profiline ait şekil fonksiyonun derecesinin artması blok altındaki temas uzunluklarını arttırmaktadır.
- Yayılı yükün uygulandığı alan artarsa, tabakalar ve tabakayla temel arasındaki yapışık olmayan yüzeylere ait temas uzunlukları da artmaktadır. Benzer şekilde, dairesel rijit blok yarıçapının veya fonksiyonel rijit blok profiline ait şekil fonksiyonun derecesinin (fonksiyonel blokla tabaka arasındaki temas uzunluklarının $-1 \leq x \leq 1$ aralığında kaldığı kabul edilirse) artması tabakalar ve tabakayla temel arasındaki yapışık olmayan yüzeylere ait temas uzunluklarının artmasına neden olmaktadır.
- Yayılı yükün uygulandığı alan veya dairesel rijit bloğa ait yarıçap sonsuza giderse, yük tüm tabaka yüzeyine yayılacağından, tabakalar ve tabakayla temel arasında yapışık olmayan yüzeylere ait temas uzunlukları da sonsuza gitmektedir. Diğer bir ifadeyle, bahsi geçen bu temas yüzeyleri yapışık olmasa bile temas yüzeylerinde herhangi bir ayrılma meydana gelmemektedir.
- Dairesel rijit bloklar aracılığıyla yüklenmiş FD bir tabakanın üst yüzeyinin rijitliği arttıkça, tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas uzunlukları azalmaktadır. Bahsi geçen tabakanın üst yüzeyinin rijitliği sonsuza giderse, rijit bloklar tabakaya nüfuz edemeyeceğinden tabaka ile rijit bloklar arasındaki temas yüzeyi bir noktaya dönüşmektedir.
- FD malzemedan oluşan tabakalarda, tabaka üst yüzeyinin rijitliği arttıkça tabaka altında kalan tüm yapışık olmayan temas yüzeylerine ait temas uzunlukları artmaktadır. Tabaka üst yüzeyinin rijitliği sonsuza giderse, tabakanın üst yüzeyi rijit hareket yapacağından tabaka altında kalan yapışık olmayan temas yüzeylerine ait temas uzunlukları sonsuza gitmekte ve bu temas yüzeyleri yapışık olmasa bile temas yüzeylerinde herhangi bir ayrılma meydana gelmemektedir. Buna karşılık,

FD tabakanın üst yüzeyinin rijitliği sıfıra giderse, bahsi geçen yüzeylere ait temas uzunlukları belirli bir değere yakınsamaktadır.

- Tabakayla dairesel veya fonksiyonel rijit bloklar arasındaki temas yüzeylerinde en büyük temas gerilmeleri temas yüzeyinin orta noktası civarında oluşmaktadır. Tabakalar ve tabakayla temel (çeyrek düzlemler hariç) arasındaki temas yüzeylerinde ise en büyük temas gerilmeleri sisteme etkiyen yüklerin (yayıllı yük durumunda bileşke kuvvetin) uygulama noktalarına yakın bölgelerde meydana gelmektedir. Tabakayla düz bloklar ve tabakayla çeyrek düzlemler arasındaki temas yüzeylerinde ise köşe noktalarda gerilmeler sonsuza gitmektedir.
- Yapışık olmayan tabakalar bağımsız olarak şekil değiştirmekte ve birbirlerinden bağımsız eğilmeye maruz kalmaktadırlar. Yapışık tabaklar ise birlikte çalıştığından tek bir tabakadaki eğilme davranışını göstermektedirler. $x=0$ ekseninde σ_x normal gerilmeleri yapışık olmayan tabakanın ve birlikte hareket eden tabaka gruplarının üst kısmında basınç, alt kısmında ise çekme gerilmeleri olarak ortaya çıkmaktadır.
- σ_y normal gerilmeleri tabakalı sistemin alt ve üst yüzeylerinde probleme ilişkin sınır şartlarını sağlamaktadır. FD malzemedan oluşan tabakalarda, tabaka üst yüzeyinin rijitliği arttıkça, $x=0$ ekseninde oluşan σ_y normal gerilmeleri azalmaktadır. Tabaka üst yüzeyinin rijitliği sonsuza giderse, σ_y normal gerilmeleri sıfıra yakınsamaktadır. Tabaka üst yüzeyinin rijitliği sıfıra yaklaştığında ise σ_y normal gerilmeleri artarak belli bir değere yakınsamaktadır.
- τ_{xy} kayma gerilmeleri yapışık olmayan temas yüzeylerinde sıfıra eşit olmakta ve sınır şartları sağlanmaktadır. Buna karşın, temas yüzeyinin yapışık olduğu durumlarda, τ_{xy} kayma gerilmeleri sıfırdan farklı değerler almakta ve temas bileşenlerinin malzeme özellikleri aynı ise temas yüzeylerinde kayma gerilmeleri eşit olmaktadır.
- Birden fazla tabakadan oluşan bir tabakalı sistemde, en büyük gerilmeler üstteki tabakada oluşmakta ve ortalama gerilme değerleri temele yaklaştıkça azalmaktadır.
- Tabakalı ortamların üst tabakalarının yarı yüksekliğinde x eksenini boyunca oluşan en büyük gerilmeler, tabakalı sisteme etkiyen yüklere yakın bölgelerinde meydana gelmektedir.

- Geometri ve malzeme özellikleri aynı yükleme durumları ise birbirlerine göre simetrik olan iki farklı probleme ait temas uzunlukları, temas gerilmeleri ve normal gerilmeler birbirlerine göre simetrik, kayma gerilmeleri ise anti-simetrik olarak elde edilmektedir.
- Tabakalı sistemin oturduğu temelin rijitliği arttıkça, yapışık olmayan temas yüzeylerinin temas uzunlukları azalarak belli bir değere yakınsamaktadır. Sadece bir çeyrek düzlemin rijitliği artarsa, tabakayla rijitliği değişen çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu azalırken, tabakayla diğer çeyrek düzlem arasındaki temas uzunluğu artmaktadır.
- Tabakalı sistemin oturduğu temelin rijitliği arttıkça, $x = 0$ ekseninde oluşan σ_x normal gerilmeleri ve τ_{xy} kayma gerilmeleri azalarak, σ_y normal gerilmeleri ise artarak belli bir değere yakınsamaktadır.
- Tabakalı bir ortamda, tabakalar veya tabakayla temel (rijit temel veya elastik yarım düzlem) arasındaki temas yüzeylerinden birinin yapışıklık durumu, yapışıkta yapışık olmayana geçtiğinde, sonsuz uzunluktaki temas yüzeyi başlangıç ve bitiş noktaları bilinmeyen sonlu bir temas yüzeyine dönüşmektedir. Bu nedenle, değişimin olduğu temas yüzeyindeki temas gerilmeleri artmaktadır. Buna bağlı olarak, birbirinden bağımsız olarak şekil değiştiren tabaka veya tabaka gruplarının sayısı arttığından, tabakalı ortamın eğilme direnci azalmaktadır. Ayrıca, bu duruma ilişkin $x = 0$ ekseninde oluşan en büyük σ_x normal gerilmeleri artarken, σ_y normal gerilmeleri ve τ_{xy} kayma gerilmeleri azalmaktadır.

Mevcut çalışma aşağıdaki durumlar göz önünde bulundurularak genişletilebilir.

- Tabakalı ortamdaki sürtünme kuvvetinin de dikkate alınması
- Tabakalı ortamın kütle kuvvetlerinin ihmal edilmemesi ve ağırlık etkisinin göz önünde bulundurulması
- Tabakalı ortamın çatlak içermesi

6. KAYNAKLAR

1. Çömez, İ., Rijit Dairesel Bir Pançla Bastırılan Elastik Tabaka ve Yarım Düzlemin Sürtünmeli Değme Problemi, Doktora Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2009.
2. Johnson, K.L., Contact Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
3. Weitsman, Y., On the Unbonded Contact Between Plates and an Elastic Half Space, Journal of Applied Mechanics, 36,2 (1969) 198-202.
4. Dhaliwal, R.S., Punch problem for an elastic layer overlying an elastic foundation, International Journal of Engineering Science, 8,4 (1970) 273-288.
5. Chen, W.T. ve Engel, P.A., Impact and contact stress analysis in multilayer media, International Journal of Solids and Structures, 8,11 (1972) 1257-1281.
6. Keer, L.M. ve Chantaramungkorn, K., Loss of contact between an elastic layer and half-space, Journal of Elasticity, 2,3 (1972) 191-197.
7. Keer, L.M., Dundurs, J. ve Tsai, K.C., Problems Involving a Receding Contact Between a Layer and a Half Space, Journal of Applied Mechanics, 39,4 (1972) 1115-1120.
8. Ratwani, M. ve Erdogan, F., On the plane contact problem for a frictionless elastic layer, International Journal of Solids and Structures, 9,8 (1973) 921-936.
9. Erdogan, F. ve Ratwani, M., The Contact Problem for an Elastic Layer Supported by Two Elastic Quarter Planes, Journal of Applied Mechanics, 41,3 (1974) 673-678.
10. Adams, G.G. ve Bogy, D.B., The Plane Symmetric Contact Problem for Dissimilar Elastic Semi-Infinite Strips of Different Widths, Journal of Applied Mechanics, 44,4 (1977) 604-610.
11. Keer, L.M., Lee, J.C. ve Mura, T., A contact problem for the elastic quarter space, International Journal of Solids and Structures, 20,5 (1984) 513-524.
12. Loboda, V.V. ve Tauchert, T.R., Stresses in an orthotropic semi-infinite strip due to edge loads, Acta Mechanica, 55,1 (1985) 51-68.
13. King, R.B. ve O'Sullivan, T.C., Sliding contact stresses in a two-dimensional layered elastic half-space, International Journal of Solids and Structures, 23,5 (1987) 581-597.
14. Nowell, D. ve Hills, D.A., Contact problems incorporating elastic layers, International Journal of Solids and Structures, 24,1 (1988) 105-115.
15. Dempsey, J.P., Zhao, Z.G., Minnetyan, L. ve Li, H., Plane Contact of an Elastic Layer Supported by a Winkler Foundation, Journal of Applied Mechanics, 57,4 (1990) 974-980.
16. Jaffar, M.J., Determination of surface deformation of a bonded elastic layer indented by a rigid cylinder using the Chebyshev series method, Wear, 170,2 (1993) 291-294.

17. Lan, Q., Graham, G.A.C. ve Selvadurai, A.P.S., Certain two-punch problems for an elastic layer, International Journal of Solids and Structures, 33,19 (1996) 2759-2774.
18. Kahya, V., Üst Trafından Rijit Olarak Mesnetlenmiş Elastik Bir Tabaka İle Rijit Blok Arasındaki Sürtünmesiz Değme Problemi, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 1997.
19. Kahya, V., Birinci, A. ve Erdöl, R., Frictionless Contact Problem Between an Elastic Layer Bonded to a Rigid Support and a Rigid Stamp, Mathematical & Computational Applications, 6,1 (2001) 13-22.
20. Akavcı, S., İki Elastik Çeyrek Düzlem Üzerine Oturan Elastik Bir Tabakanın Sürtünmesiz Temas Problemi, Doktora Tezi, Çukurova Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Adana, 1999.
21. Birinci, A. ve Erdöl, R., Frictionless Contact Between a Rigid Stamp and an Elastic Layered Composite Resting on Simple Supports, Mathematical & Computational Applications, 4,3 (1999) 262-272.
22. Birinci, A., Çakıroğlu, M. ve Erdöl, R., Two Strips Problems Resting on an Elastic Foundation, Mathematical & Computational Applications, 7,3 (2002) 275-286.
23. Çömez, İ., Rijit Bir Panç ile Bastırılmış ve Tabanda Tam Olarak Bağlı Ağırlessiz Çift Şerit Problemi, Yüksek Lisans Tezi, K.T.Ü., Fen Bilimleri Enst,tüsü, Trabzon, 2003.
24. Comez, I., Birinci, A. ve Erdol, R., Double receding contact problem for a rigid stamp and two elastic layers, European Journal of Mechanics - A/Solids, 23,2 (2004) 301-309.
25. Çömez, İ. ve Erdöl, R., Frictional contact problem of a rigid stamp and an elastic layer bonded to a homogeneous substrate, Archive of Applied Mechanics, 83,1 (2013) 15-24.
26. Çakıroğlu, E., İki elastik çeyrek düzleme oturan ve rijit bir panç ile bastırılan elastik tabaka probleminin çözümü ve yapay sinir ağı uygulaması, Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2011.
27. Yaylaci, M. ve Birinci, A., The receding contact problem of two elastic layers supported by two elastic quarter planes, Structural Engineering and Mechanics, 48,2 (2013) 241-255.
28. Yaylaci, M., Oner, E. ve Birinci, A., Comparison between Analytical and ANSYS Calculations for a Receding Contact Problem, Journal of Engineering Mechanics, 140,9 (2014).
29. Adibelli, H., Comez, I. ve Erdol, R., Receding contact problem for a coated layer and a half-plane loaded by a rigid cylindrical stamp, Archives of Mechanics, 65,3 (2013) 219-236.
30. Oner, E., Yaylaci, M. ve Birinci, A., Solution of a receding contact problem using an analytical method and a finite element method, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 9,3 (2014) 333-345.
31. Adiyaman, G., Yaylaci, M. ve Birinci, A., Analytical and finite element solution of a receding contact problem, Structural Engineering and Mechanics, 54,1 (2015) 69-85.

32. Karabulut, P.M., Yarım düzlem üzerine oturan elastik tabakanın sürtünmesiz temas problemi, Yüksek Lisans Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon, 2016.
33. Karabulut, P.M., Adiyaman, G. ve Birinci, A., A receding contact problem of a layer resting on a half plane, Structural Engineering and Mechanics, 64,4 (2017) 505-513.
34. Giannakopoulos, A.E. ve Suresh, S., Indentation of solids with gradients in elastic properties: Part I. Point force, International Journal of Solids and Structures, 34,19 (1997) 2357-2392.
35. Giannakopoulos, A.E. ve Suresh, S., Indentation of solids with gradients in elastic properties: Part II. axisymmetric indentors, International Journal of Solids and Structures, 34,19 (1997) 2393-2428.
36. El-Borgi, S., Abdelmoula, R. ve Keer, L., A receding contact plane problem between a functionally graded layer and a homogeneous substrate, International Journal of Solids and Structures, 43,3-4 (2006) 658-674.
37. Yang, J. ve Ke, L.L., Two-dimensional contact problem for a coating-graded layer-substrate structure under a rigid cylindrical punch, International Journal of Mechanical Sciences, 50,6 (2008) 985-994.
38. Ke, L.L. ve Wang, Y.S., Two-dimensional sliding frictional contact of functionally graded materials, European Journal of Mechanics a-Solids, 26,1 (2007) 171-188.
39. Liu, T.-J., Wang, Y.-S. ve Zhang, C., Axisymmetric frictionless contact of functionally graded materials, 78, 2008.
40. Choi, H.J. ve Paulino, G.H., Thermoelastic contact mechanics for a flat punch sliding over a graded coating/substrate system with frictional heat generation, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 56,4 (2008) 1673-1692.
41. Aizikovich, S.M., Vasil'ev, A.S., Krenev, L.I., Trubchik, I.S. ve Seleznev, N.M., Contact Problems For Functionally Graded Materials Of Complicated Structure, Mechanics of Composite Materials, 47,5 (2011) 539-548.
42. Chen, P.J. ve Chen, S.H., Contact behaviors of a rigid punch and a homogeneous half-space coated with a graded layer, Acta Mechanica, 223,3 (2012) 563-577.
43. Chidlow, S.J., Chong, W.W.F. ve Teodorescu, M., On the two-dimensional solution of both adhesive and non-adhesive contact problems involving functionally graded materials, European Journal of Mechanics a-Solids, 39 (2013) 86-103.
44. Volkov, S., Aizikovich, S., Wang, Y.S. ve Fedotov, I., Analytical solution of axisymmetric contact problem about indentation of a circular indenter into a soft functionally graded elastic layer, Acta Mechanica Sinica, 29,2 (2013) 196-201.
45. Comez, I., Contact problem of a functionally graded layer resting on a Winkler foundation, Acta Mechanica, 224,11 (2013) 2833-2843.
46. Yan, J. ve Li, X., Double receding contact plane problem between a functionally graded layer and an elastic layer, European Journal of Mechanics - A/Solids, 53 (2015) 143-150.
47. Liu, T.J., Xing, Y.M. ve Wang, Y.S., The axisymmetric contact problem of a coating/substrate system with a graded interfacial layer under a rigid spherical punch, Mathematics and Mechanics of Solids, 21,3 (2016) 383-399.

48. Comez, I., El-Borgi, S., Kahya, V. ve Erdol, R., Receding contact problem for two-layer functionally graded media indented by a rigid punch, Acta Mechanica, 227,9 (2016) 2493-2504.
49. Adiyaman, G., Birinci, A., Oner, E. ve Yaylaci, M., A receding contact problem between a functionally graded layer and two homogeneous quarter planes, Acta Mechanica, 227,6 (2016) 1753-1766.
50. Turan, M., Adiyaman, G., Kahya, V. ve Birinci, A., Axisymmetric analysis of a functionally graded layer resting on elastic substrate, Structural Engineering and Mechanics, 58,3 (2016) 423-442.
51. Jobin, K.J., Abhilash, M.N. ve Murthy, H., A simplified analysis of 2D sliding frictional contact between rigid indenters and FGM coated substrates, Tribology International, 108 (2017) 174-185.
52. Yan, J. ve Mi, C., Double contact analysis of multilayered elastic structures involving functionally graded materials, Archives of Mechanics, 69,3 (2017) 199-221.
53. Yan, J. ve Mi, C., On the receding contact between an inhomogeneously coated elastic layer and a homogeneous half-plane, Mechanics of Materials, 112 (2017) 18-27.
54. El-Borgi, S. ve Comez, I., A receding frictional contact problem between a graded layer and a homogeneous substrate pressed by a rigid punch, Mechanics of Materials, 114 (2017) 201-214.
55. Liu, Z.X., Yan, J. ve Mi, C.W., On the receding contact between a two-layer inhomogeneous laminate and a half-plane, Structural Engineering and Mechanics, 66,3 (2018) 329-341.
56. Yan, J. ve Mi, C., On the Receding Contact Between a Homogeneous Elastic Layer and a Half-plane Substrate Coated with Functionally Graded Materials, International Journal of Computational Methods, doi:10.1142/s0219876218440085 (2018).
57. Yilmaz, K.B., Comez, I., Yildirim, B., Güler, M.A. ve El-Borgi, S., Frictional receding contact problem for a graded bilayer system indented by a rigid punch, International Journal of Mechanical Sciences, 141 (2018) 127-142.
58. Apatay, T., Fonksiyonel Derecelendirilmiş Kaplamalarda Çatlak ve Temas Problemi, Doktora Tezi, G.Ü., Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, 2010.
59. Erdogan, F. ve Gupta, G.D., Numerical solution of singular integral-equations, Quarterly of Applied Mathematics, 29,4 (1972) 525.
60. Mathworks, Matlab. (2015).
61. Chapra, S.C. ve Canale, R.P., Numerical Methods for Engineers, Mc Graw Hill, Singapur, 2006.
62. Mitchell, M., Engauge Digitizer. (2014).

ÖZGEÇMİŞ

Gökhan ADIYAMAN, 1983 yılında Malatya' da doğdu. İlköğretimini Malatya Konak İlköğretim Okulu 'nda, orta öğretimini Malatya Fen Lisesi 'nde tamamladı. 2010 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden mezun oldu. 2012 yılında ÖYP Araştırma görevlisi olarak Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne atandı. 2014 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimini tamamlayarak doktora eğitimine başlamıştır. Evli ve iki kız çocuğu sahibi olan ADIYAMAN, iyi derecede İngilizce bilmekte ve Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesinde ÖYP Araştırma görevlisi olarak görev almaktadır.